

数学二试题

一、填空题 (本题共 6 小题 , 每小题 4 分 , 满分 24 分 , 把答案填在题中横线上)

(1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定 , 则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定 , 则 $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵 , E 是单位矩阵 , 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题 (本题共 8 小题 , 每小题 4 分 , 满分 32 分 . 每小题给出的四个选项中 , 只有一项符合题目要求 , 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来 , 使排在后面的是前一个的高阶无穷小 , 则正确的排列次序是 () .

(A) α, β, γ (B) α, γ, β

(C) β, α, γ (D) β, γ, α

(2) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则 () .

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点 , 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 拐点

$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 拐点

$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是也不是曲线 $y=f(x)$ 拐点

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 ().

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$

(B) $2 \int_1^2 \ln x dx$

(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$

(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$

(4) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 ().

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$

(5) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为 ().

(A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A \sin x + B \cos x)$

(B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A \sin x + B \cos x)$

(C) $y^* = ax^2 + bx + c + A \sin x$

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + A \cos x$

(6) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy) dx dy$ 等于 ().

(A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$

(B) $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx$

(C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{-2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) dr$

(D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{-2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$

(7) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为 ().

$$(A) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(8) 设 A, B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有().

A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

三、解答题 (本题区 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(1) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$$

(2) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的表达式;

(II) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(3) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt,$$

(I) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(II) 求 $f(x)$ 的值域.

(4) (本题满分 12 分)

曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一

旋转体, 其体积 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(I) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值;

(II) 计算极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)}$.

(5) (本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

(6) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在降地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $K=6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.

(7) (本题满分 10 分)

设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(8) (本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0. \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(9) (本题满分 9 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.