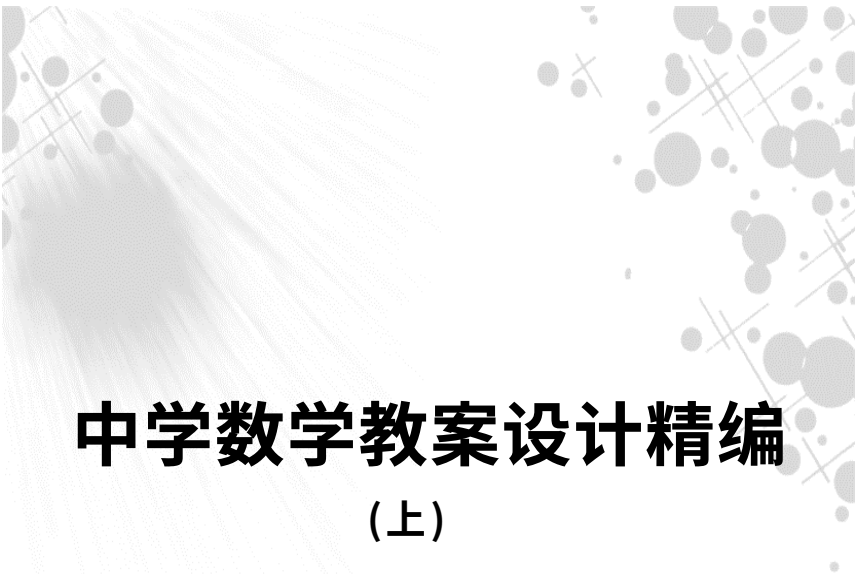




中学数学教案设计精编

(上)

编者董原



目 录

中学数学教案设计精编（一）	1
复数的模与辐角主值的复习深化教案设计	1
复数的模与辐角内容分析及教案设计	8
韦达定理的应用教案设计	12
加法原理和乘法原理教案设计	15
排列数公式教案设计（一）	22
排列数公式教案设计（二）	26
组合、组合数公式教案设计	28
复习总结二项式定理教案设计	30
“随机事件的概率”教案设计	32
等可能事件的概率讲练结合教案设计	35
概率的加法公式讲练结合教案设计	38
概率的乘法公式讲练结合教案设计	41
立体几何序言课教案设计	44
立体几何入门教案设计	48
点到直线距离公式整体教案设计	51
直线与抛物线的位置关系教案设计	53
平面的基本性质教案设计	60
平行直线教案设计	64
两条异面直线所成的角教案设计	67
三垂线定理的两中教案设计	72
中学数学教案设计精编（二）	78
几何引言课教案设计	78
初中平面几何“绪论课”教案设计及评析	82
平面几何入门的概念教案设计	90
平几入门指导编题教案设计	93

垂线教案设计	94
角平分线目标教案设计	98
角的平分线讲授教案设计	100
角平分线（二）教案设计及评注	104
圆周角教案设计	108
平行线概念五层次教案设计	110
平行线等分线段定理教案设计	113
三角形全等的判定 I 教案设计（一）	118
三角形全等的判定 I 教案设计（二）	122
三角形全等的判定 II 案设计（一）	125
三角形全等的判定 II 案设计（二）	131
三角形全等的判定 III 教案设计	135
三角形全等判定的应用教案设计	139
直角三角形全等的判定教案设计	142

中学数学教案设计精编 (一)

复数的模与辐角主值的复习深化教案设计

复数的模与辐角的主值，是复数的重要概念，对于理解复数的几何意义和进行运算都起着重要的作用。尽管学生有所认识，但是由于综合运用各科知识的能力较差，所以解题容易出错。本设计以一题多解的形式，探讨一下怎样深化复数的模与辐角主值的复习教学。

【题目】 设复数 $z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ ， $(0 \leq \theta < \pi, \theta \neq \pi/2)$ 、 $z_2 = z_1 i + 1$ ， z_1, z_2 分别对应复平面上的点 A、B，O 为坐标原点， $\angle AOB = \alpha$ ($0 \leq \alpha < \pi$)，求角 α 的大小。

一、应用三角公式化复数为三角式

解法一（分析：因为复数 z_1, z_2 分别对应复平面上的点 A、B 所以 $\angle AOB$ 可以用 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 的差来表示。关键是把 z_2 化为三角式并且判断 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 的大小。）

$$\because z_1 = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (0 \leq \theta < \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}) \quad \text{①}$$

$$\therefore z_2 = z_1 i + 1 = (\cos \theta + i \sin \theta) i + 1$$

$$= 1 - \sin \theta + i \cos \theta = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad \text{②}$$

1° , $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) > 0$, 这

时, ②式是 z_2 的三角形式, $\arg z_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$, 并且 $\arg z_2 > \arg z_1$,

$$\therefore \alpha = \arg z_2 - \arg z_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} - \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.$$

2° , 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) < 0$,

这种用复数的辐角主值的差来确定夹角 α 的方法, 思路清晰, 但是将 z_2

化为三角形式是解答本题的前提; 合理地分 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 两

个区间, 判断 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ 的值的符号则是关键。因此, 只有熟练地应

用三角变换公式, 记住复数三角式的特点, 并且善于讨论参数的范围, 才能正确作出解答。

二、应用复数除法法则

解法二 (分析: 若 $\arg z_2 > \arg z_1$, 则由复数除法的几何意义可知:

$$\alpha = \arg \frac{z_2}{z_1}.)$$

由解法一中的①式与②式知道:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right] \quad ③ \end{aligned}$$

$$1^{\circ}, \text{ 当 } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) > 0$$

所以③式是 $\frac{z_2}{z_1}$ 的三角形形式, 且 $0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$,

$$2^{\circ}, \text{ 当 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 时, } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}, \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) < 0,$$

$$\therefore \frac{z_2}{z_1} = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right] \quad ④$$

所以④式是 $\frac{z_2}{z_1}$ 的三角形形式, 且 $\frac{3\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < \pi$,

$$\therefore \alpha = \arg \frac{z_2}{z_1} = \frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

这种由复数的商的辐角主值来确定夹角 α 的方法, 是建立在对于复数相除的几何意义有着深刻理解的基础上的。与解法一相比较, 思路要复杂些, 因为两个复数的辐角主值的差是通过两个复数的商的辐角主值来体现的。这

样, 对于③式来说, 不仅要判断 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ 的值的符号还要分析 $\frac{\pi}{4}$

的范围, 没有较强的分析能力与扎实的基础知识是容易弄错的。

另解: 若从 z_1/z_2 入手, 则由于

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]\end{aligned}$$

1°, 当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, 同以前讨论⑤式是 $\frac{z_1}{z_2}$ 的三角形式。

但是 $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$, 可知 $\arg z_1 < \arg z_2$, 根据复数相除的几何意义, 可得 $\alpha = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ 。

2°, 当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, 同以前讨论, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{-2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)}$

$$\left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) \right] \quad \text{⑥}$$

虽然⑥式是 $\frac{z_1}{z_2}$ 的三角形式, 但是 $\pi < \frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$, 超出了

$0 \leq \alpha < \pi$ 的范围, 于是可以把⑥式化为:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{-2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{5\pi}{4} \right) \right]$$

$\because -\pi < \frac{\theta}{2} - \frac{5\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4}$, 同上分析有

$$\alpha = -\left(\frac{\theta}{2} - \frac{5\pi}{4} \right) = \frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

由以上的两种求商的不同解法可知, 只要对复数相

除的几何意义以及辐角主值范围有透彻的理解,都能够求出 α 的大小。同时,通过逆向思维,加深了对复数主值范围的理解,使感性知识上升为理性知识。

三、应用向量加法法则

解法三: (分析: $\because |z_1|=1, \arg z_1 = \theta, 0 \leq \theta < \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}$,

$|z_1 i|=|z_1|=1, \therefore z_2=z_1 i+1$ 可以运用向量加法的平行四边形法则作出菱形,

易知 z_2 对应的向量 OB 相应于菱形的对角线 OB , 又因为 $\arg(z_1 i) = \theta + \pi/2$, 所以 $\arg z_2$ 就可以求出来了。)

$\because z_1 = \cos \theta + i \sin \theta, 0 < \theta < \pi$, 且 $\theta \neq \pi/2$ 。

$$z_2 = z_1 i + 1,$$

$$\therefore |z_1|=1, |z_1 i|=1。$$

1° , 当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时,

$\because |z_1|=|z_1 i|=1, \therefore z_1$ 与 $z_1 i$ 分别对应的点 A 与 C 都在单位圆上, 并且

$$\angle xOA = \theta, \angle AOC = \frac{\pi}{2}, \angle xOC = \theta + \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{2} \leq \angle xOC < \pi。$$

这种应用向量的有向性来确定夹角 α 的方法, 要求学生复数的几何意义理解清楚, 对向量加法法则运用熟悉, 作图准确, 并且对 θ 的分区合理。这样, 既加深了对数形结合的认识, 又提高了解题的技巧。

四、应用余弦定理

解法四 (分析: 因为 $\angle AOB$ 是 $\triangle AOB$ 的内角, 所以, 只要求出各边的长度, 即各相应向量所对应的复数的模, 则能应用余弦定理求解。)

$$\because z_1 = \cos \theta + i \sin \theta, (0 \leq \theta < \pi, \theta \neq \pi/2),$$

$$\therefore z_2 = z_1 i + 1 = 1 - \sin \theta + i \cos \theta。$$

$$z_2 - z_1 = 1 - \sin \theta - \cos \theta + i (\cos \theta - \sin \theta)。$$

$$\therefore |z_1| = 1。$$

1°，当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时， $\cos \theta > 0$ ， α 为锐角，则⑦式为

$$\text{此时 } 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}, \therefore \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}。$$

2°，当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时， $\cos \theta < 0$ ，则 $\cos \alpha < 0$ ， α 为钝角，

$$\text{所以 } \alpha = \frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2}。$$

这种应用余弦定理来确定夹角 α 的方法，学生容易接受，但是在求 $|AB|$ 即 $|z_2 - z_1|$ 时，容易算错。此外，有的学生演算到⑦式再也不懂得如何做下去了。说明他们对于角 θ ， α 的范围与关系认识不清，三角函数式的变换能力差，需要进一步落实双基与加强知识迁移能力的培养。

五、应用两条直线的夹角公式

解法五：（分析：因 OA ， OB 的方向可以用直线 OA ， OB 的斜率表示，所以 $\angle AOB$ 就可以用两条直线的夹角公式求解。）

$\because z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ ， $(0 \leq \theta < \pi, \theta \neq \pi/2)$ ，与 $z_2 = z_1 i + 1 = 1 - \sin \theta + i \cos \theta$ 分别对应复平面上的点 A 与 B 。

$$\begin{aligned}
 \therefore k_{OA} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta; k_{OB} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \\
 \therefore \operatorname{tg} \alpha &= \frac{k_{OB} - k_{OA}}{1 + k_{OB} \cdot k_{OA}} = \frac{\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \operatorname{tg} \theta}{1 + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \cdot \operatorname{tg} \theta} \\
 &= \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} \\
 &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

1° , 当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$, $\therefore \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ 。

当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 时, $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < 0$, 由 $0 \leq \alpha < \pi$, $\therefore \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \pi = \frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ $\left(\frac{3\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < \pi \right)$ 。

这种解法, 以平面解析几何中两条直线的夹角公式为基础, 以三角变换为工具, 脉络清楚, 把复数、三角、解析几何的知识有机地结合起来, 得到很好的效果。

从以上的五个方面, 可以看出, 对于复数的模与辐角的主值范围的复习教学, 单凭定义上的理解是不够的。若将其与三角、解析几何等有关知识联系起来, 综合运用其内涵与外延, 那么, 学生对于复数的模与辐角主值概念的理解与应用将达到了一个新的境界。这样对于拓宽学生的解题思路, 提高其分析问题与解决问题的能力都将起到积极的作用。

复数的模与辐角内容分析及教案设计

一、内容分析

复数的模与辐角是复数三角形式表示的两个基本元素，它分别与复数代数形式表示的实虚部、向量形式表示的乘除运算以及复数本身表示的互为共轭复数的积等都是有机联系着的。要求学生能够“掌握复数的代数、几何、三角表示及其转换。”

复数没有大小，但复数的模与辐角主值有大小。所以复数的模与辐角主值常与函数的最值相结合，在求最值时，除了代数、三角的常规方法外，还需注意几何法及不等式 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 的运用。

复数与复平面上的点以及原点为始点的向量之间具有一一对应的关系，因此复数的向量表示及其几何意义与解析几何中点的坐标、距离等问题相互联系，有些复数模的方程的几何意义表示曲线，求满足某种条件的复数，实际上是求曲线交点对应的复数，往往通过数形结合加以解决。

总之，复数内容具有综合性；解决复数问题的方法具有选择性，这两者往往与复数的模及辐角有机相联，既体现了综合运用基本知识及其基本技能，又有效地发展逻辑思维及综合分析问题的能力。

二、教学方案

课题：复数的模与辐角。

课型：复习课。

教学目的：使学生掌握复数的模与辐角及其在代数、几何、三角形式相互转换方面的运用。

教学方法：程序教学法。

(一) 引入

1.师：前面我们复习了复数的三角形式，大家知道，模与辐角是复数三角形式表示的两个基本元素，那么请同学们考虑：它们与复数代数形式表示的实、虚部以及向量表示的乘除运算是否有联系，有什么联系？

生：有 $z=a+bi=r(\cos\theta+isin\theta)$ 中 $a=rcos\theta$ ， $b=rsin\theta$ ， $r=a^2+b^2$ ，乘除运算可以表示成复平面上向量的旋转与伸缩。

师：对，另外模与复数本身表示的互为共轭复数的积等都有一定的联系： $zz=\overline{z}z=|z|^2$ ，即“模方公式”。

2.师：下面请做练习：

(1) 若虚数 $z=a+bi$ ($a, b\in R, b\neq 0$)，则 $|z|^2$ 、 $|z|^2$ 、 z^2 的关系是 ()。

A. 互不相等

B. $|z|^2 \neq |z|^2 = z^2$

C. $|z|^2 = |z|^2 \neq z^2$

D. $|z|^2 = |z|^2 = z^2$

(2) 设复数 z 的辐角主值是 θ ，则 z^2 的辐角主值是 ()。

A. 2θ

B. $2\theta - 2\pi$

C. $2\pi - \theta$

D. 2θ 或 $2\theta - 2\pi$

检查学生答案后提问：那么“复数的模”与“实数的绝对值”以及“辐角”与“辐角主值”各有什么关系呢？

生：(教师帮助概括) 对于 $z=a+bi$ ($a, b\in R$) 来说，当 $b=0$ 时，则 $z=a+bi$ 是一个实数 a ，它的模就是 $|a|$ ，这与实数意义上的绝对值一致，与 $b\neq 0$ 时的几何意义亦相同，都表示其对应的点到坐标原点的距离，因此，复数的模是实数绝对值概念的扩充，但实数中绝对值的性

质对于复数模来讲未必都成立,例如 $|z|=\pm z$ 、 $|z|^2=z^2$,在复数范围内不成立。

$\arg z = \arg z + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{R}$), 其中 $\arg z \in [0, 2\pi)$, 被某一非零复数唯一确定, 但并非一一对应。

下面来进一步探求解决有关复数模与辐角问题的基本思路与方法。

(二) 授课

(三) 练习 (课内或课外)

已知复数 z 满足 $zz-3iz=1+3i$, 求 z 的模和辐角的主值。

解: $z=-1$ 或 $z=-1+3i$

当 $z=-1$ 时, $|z|=1$, $\arg z = \pi$

当 $z=-1+3i$ 时, $|z|=10$, $\arg z = \pi - \arctg 3$ 。

证明: 本题除了可设 $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) 代入求解还可以将关系 $f(z)=0$, 两边取共轭得到一个与之对应的关系式, $\bar{f}(z)=0$, 即“共轭配对”, 然后通过两式的合成运算使问题得解。

(四) 小结

回顾本课题的解题思路和方法, 提倡“总结(解题)规律, 形成(解题)模式, 产生知识, 解题就方便。”

一元 n 次方程根与系数的关系教案设计

【教学目的】通过教学让学生明确一元 n 次方程的根与系数的关系是一元二次方程的根与系数关系的推广, 通过证明让学生理解韦达定理的实质, 并会正确应用定理来解题。

【教学重点和难点】重点是根与系数的关系, 难点是根与系数关系的证明。

【教学过程】

一、复习提问

1. 定理 1 及定理 2 的内容及作用。

定理 1 一元 n 次方程 $f(x) = 0$ 有一个根 $x=b$ 的充要条件是多项式 $f(x)$ 有一个一次因式 $(x-b)$ 。

定理 2 复系数一元 n 次方程 $f(x) = 0$ 在复数集中有且仅有 n 个根。

定理 1 指出寻求方程根的方法，而定理 2 只解决根的存在性及根的个数。

2. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与系数之间有什么关系？如何证明？

设二根为 x_1 和 x_2 ，则根与系数间关系为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad \text{称韦达定理。}$$

证明：若 x_1 和 x_2 是 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两个根，则根据定理 1 得到 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 。 $\because a \neq 0$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2, \text{ 对比系数得到: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \text{ 同理对一元 } n \text{ 次方程的根与系数之间仍存在这个关系。}$$

二、引入新课

三、小结

韦达定理中诸关系式是 n 个 n 元方程，仍无法解出各根，故与解一元 n 次方程是等价问题，只有给出了各根之间满足的某些条件时，应用根与系数的关系，才能求出方程的解集，在应用时注意符号的规律。这个定理的逆命题也成立，即对于任何一元 n 次方程 $f(x)$

$=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 如果有 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足诸关系式, 那么 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 一定是方程 $f(x) = 0$ 的根。

韦达定理的应用教案设计

【教学目的】让学生进一步理解韦达定理的实质是反映出由 n 个根与系数构成了 n 个 n 元方程组, 与解一元 n 次方程是完全等价的问题。因而只利用根与系数之关系并不能解决一元 n 次方程求根的问题。只有当给出了各根之间满足的某些条件时才能应用韦达定理求方程的解集。

【教学重点和难点】重点是韦达定理的应用, 难点是灵活应用韦达定理理解综合性题。

【教学过程】

一、复习提问

1. 韦达定理及其作用。

2. 已知方程 $x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$, 的根为 α, β, γ , 则由韦达定理, 得

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -p_1 & (1) \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p_2 & (2) \\ \alpha\beta\gamma = -p_3 & (3) \end{cases}$$

下面解含 α, β, γ 的方程组, 结果说明什么问题?

解: (1) $\times \alpha^2$ 得 $\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma = -p_1\alpha^2$ (4)

(2) $\times (-\alpha)$ 得 $-\alpha^2\beta - \alpha\beta\gamma - \alpha^2\gamma = -\alpha p_2$ (5)

(3) + (4) + (5) 得 $\alpha^3 + p_1\alpha^2 + p_2\alpha + p_3 = 0$ 这个结果与原方程完全相同, 说明如果我们没有办法解出原方程时, 同样从这三个根与系数的关系仍不能解出它的根

来，只有当给出各根之间具有某种特殊关系时，应用根与系数之关系才能求出方程的根。

二、引入新课——韦达定理的应用

三、小结

1. 已知方程的根与系数具有某种关系时应用韦达定理转化求解方程组的问题求解，当未知数的个数少于方程组中方程个数时，要适当选择方程组求解，之后必须通过检验该解满足余下的方程才是原方程的解。

2. 应用韦达定理确定方程中的参数。

四、作业（略）

实系数方程虚根成对定理教案设计

【教学目的】掌握实系数方程虚根成对定理并会运用定理求实系数方程在复数集 C 中的解集。

【教学重点和难点】重点是定理的正确应用：突出强调定理中的条件是实系数方程；难点是定理的证明过程。

【教学过程】

一、复习提问

二、引入新课

三、小结

注意定理中的条件“实系数方程”必不可少，若为复系数方程则没有“虚根成对共轭出现”的结论，应用此定理解方程时要特别注意。

四、作业

1. 复习实系数方程虚根成对定理。

2. 求证实系数一元 n 次方程在 n 为奇数时有奇数个实根；在 n 为偶数时有偶数个实根，或者没有实根。[提示：应用实系数一元 n 次方程有且仅有 n 个复数根，而

且虚根是成对出现,说明虚根只能是偶数个(包括 0 个),所以当 n 为奇数时,由于奇数与偶数之差为奇数,从而有奇数个实根。当 n 为偶数时,由于偶数与偶数之差仍为偶数,从而有偶数个实根(包括没有实数根)]

3. 根据已知条件求下列方程在复数集 C 中解集。

实系数方程虚根成对定理的应用教案设计

【教学目的】应用实系数方程虚根成对定理求实系数方程在复数集 C 中的解集并会求次数最低的实系数方程。

【教学重点和难点】重点是利用实系数方程虚根成对定理理解实系数方程,难点是应用虚根成对定理进行论证。

【教学过程】

一、复习提问

1. 叙述实系数方程虚根成对定理以及它的作用。

2. 求证实系数一元 n 次方程在 n 为奇数时有奇数个实数根;在 n 为偶数时有偶数个实根,或者没有实根(即前节课后作业题)。

证明:因为实系数一元 n 次方程有且只有 n 个复数根,而且虚根又是成对出现的,说明虚根只能是偶数个(包括 0 个)所以当 n 为奇数时由于奇数与偶数之差为奇数,从而有奇数个实根,当 n 为偶数时由于偶数与偶数之差仍为偶数,从而有偶数个实根(包括没有实数根)。

二、引入新课——习题课

三、小结

(1) 只有对实系数方程才能应用虚根成对定理。

(2) 已知实系数方程在复数集 C 中有虚根时,可以应用虚根成对定理求次数最低的实系数方程。

(3) 灵活应用根与系数的关系及实系数方程虚根成对定理求方程在复数集 C 中的解集。

四、作业

1. 求次数最低的实系数方程 $f(x)=0$ ，已知它在复数集 C 中的解集含有下列数：

(1) $3+2i$ (答： $x^2-6x+13=0$)

(2) $-2, 1-i$ (答： $x^3-2x+4=0$)

(3) $2+i, -1+i$ (答： $x^4-2x^3-x^2+2x+10=0$)

(4) $\sqrt{2}, \sqrt{2}i$ (答： $x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2x - 2\sqrt{2} = 0$)

加法原理和乘法原理教案设计

【教学目的】

1. 使学生理解和掌握加法原理和乘法原理并能准确、熟练地运用两个基本原理。

2. 加强对学生的思维条理性的训练，培养学生分析问题、解决问题的能力。

【教学重点和难点】 重点是两个基本原理的应用，难点是对两个基本原理的准确理解。

【教学过程】

一、讲授新课

加法原理和乘法原理是有关排列、组合问题所遵循的两条基本原理，深入理解和准确运用这两个原理是学好排列、组合这一单元的重要一环。

请同学们考虑下面两个问题：

问题 1 从甲地到乙地，旱路有 3 条，水路有 2 条，间从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

从图中很容易找到答案：从甲地到乙地共有 5 种不

同的走法。

问题 2 由 A 村到 B 村的路有 3 条，由 B 村到 C 村的路有 2 条，问从 A 村经过 B 村到达 C 村共有多少种不同的走法？

从图中不难看出此题的答案是：共有 6 种不同的走法。

我们从上面两个问题中可以抽象出一般性的规律，得出以下的结论：

(一) 完成一件工作的两种不同的方式。

问题 1 和 **问题 2** 的共同之处在于：它们都是在研究做一件事（或工作）完成它共有多少种不同的方法？这两个问题的不同点是完成工作的方式不同。

问题 1 中的每条旱路或水路都可以从甲地直接到达乙地，其中旱路和水路只不过是完成从甲地到乙地这件工作的两类不同的办法。

问题 2 中的从 A 村到 B 村的 3 条路和从 B 村到 C 村的 2 条路的任意一条路都不能把从 A 村经过 B 村到达 C 村这件工作做完，只能完成这件工作的一部分。**问题 2** 中的工作是分两个步骤完成的：第一步从 A 村到达 B 村，第二步从 B 村到达 C 村。

我们不难总结出：完成一件工作有以下两种不同的方式：

第一种方式：用不同类的办法去完成一件工作，每类办法中的任意一种方法都可以从头至尾把这件工作做完。

第二种方式：分成几个步骤去完成一件工作，每个步骤中的任意一种方法只能完成这件工作的一部分，这几个步骤都完成了，这件工作才能做完。

(二) 加法原理和乘法原理。

下面我们来研究：完成一件工作的不同方法的总数怎样计算：

问题 1 的答案是共有 5 种不同的走法，已知旱路 3 条，水路 2 条，显然 $5=3+2$ 。

问题 2 的答案是共有 6 种不同的走法，已知从 A 村到 B 村 3 条路，从 B 村到 C 村 2 条路，显然 $6=3 \times 2$ 。

总结一般规律如下：

加法原理 做一件事，完成它有 n 类办法，其中第一类办法中有 m_1 种方法，第二类中有 m_2 种方法……，第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

如问题 1 从甲地到乙地的走法可以分为两类：

第一类办法是走旱路有 3 种不同的走法。

第二类办法是走水路有 2 种不同的走法。

由加法原理共有 $3+2=5$ 种不同的走法。

乘法原理 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，第一个步骤有 m_1 种不同的方法，第二个步骤有 m_2 种不同的方法……，第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ 种不同的方法。

如问题 2 从 A 村经过 B 村到达 C 村可分为两个步骤完成：

第一步 A 村→B 村，有 3 种不同的走法。

第二步 B 村→C 村，有 2 种不同的走法。

由乘法原理，共有 $3 \times 2=6$ 种不同的走法。

例 1 从甲地到乙地可以乘火车，也可以乘汽车或轮船。一天中火车有 4 班，汽车有 2 班，轮船有 3 班，那么一天中，乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少

种不同的走法？

解：完成由甲地到乙地这件事有三类办法：

第一类办法坐火车，一天中有 4 种不同走法。

第二类办法坐汽车，一天中有 2 种不同走法。

第三类办法坐轮船，一天中有 3 种不同走法。

由加法原理得： $4+2+3=9$

答：有 9 种不同的走法。

例 2 由数字 1、2、3、4、5 可以组成多少个允许有重复数字的三位数？无重复数字的三位数？

解：(1) 组成允许有重复数字的三位数这件事可分三个步骤完成：

第一步确定百位上的数字：有 5 种不同方法。

第二步确定十位上的数字：有 5 种不同方法。

第三步确定个位数字：有 5 种不同方法。

由乘法原理： $5 \times 5 \times 5 = 125$ 。

答：可组成允许有重复数字的三位数 125 个。

此题第 (2) 问由同学们自己完成，提醒大家注意：允许有重复数字和无重复数字这两个条件的区别。第 (2) 问答案是 60 个。

(三) 运用两个基本原理时要注意以下几点：

1. 抓住两个基本原理的区别不要用混，不同类的方法（其中每一个方法都能把事情从头至尾做完）数之间做加法，不同步的方法（其中每一个方法都只能完成这件事的一部分）数之间做乘法。

2. 在研究完成一件工作的不同方法数时，要遵循“不重不漏”的原则。

如：从若干件产品中抽出几件产品来检验，把抽出的产品中至多有 2 件次品的抽法分为两类：第一类抽出

的产品中有 2 件次品,第二类抽出的产品中有一件次品,这样的分类显然漏掉了抽出的产品中无次品的情况。

又如:把能被 2、被 3 或被 6 整除的数分为三类:第一类能被 2 整除的数,第二类能被 3 整除的数,第三类能被 6 整除的数,其中第一类、第二类都和第三类有重复,这样分类是不行的。

3.在运用乘法原理时,要注意每个步骤都做完这件事也必须完成,而且前面一个步骤中的每一种方法,在下个步骤中都得有 m 种不同的方法。

二、巩固练习

1.书架上层放有 6 本不同的数学书,下层放有 5 本不同的语文书:

(1) 从中任取一本书,有多少种不同的取法?

(2) 从中任取数学、语文书各一本,有多少种不同的取法?(答案:(1) 11 种,(2) 30 种。)

2.有三个袋子,其中一个袋子装有红色小球 20 个,每个球上标有 1 至 20 中的一个号码,一个袋子装有白色小球 15 个,每个小球上标有 1 至 15 中的一个号码。第三个袋子装有 8 个黄色小球,每个球上标有 1 至 8 中的一个号码。

(1) 从袋子里任取一个小球,有多少种不同的取法?(2) 从袋子里任取红、白、黄色小球各一个,有多少种不同的取法?(答案:(1) 43 种,(2) 2400 种)

三、布置作业

1.复习本节内容:读书和看笔记。

2.做教科书 2.1 基本原理后的练习 1 至 7 题。(答案:1.有 9 种选法;2.有 7 种选法;3.列出 200 个式子;4.共有 60 项;5.有 14 种走法;6. (1) 9 种, (2) 20 种;

7. (1) 有 6 种, (2) 有 8 种)

3. 预习 2.2 排列 (要求看书)

排列数公式教案设计 (一)

【教学目的】

1. 使学生在正确理解排列概念的基础上能从乘法原理推导出排列数公式, 能熟练地运用符号 P_{mn} , 并能初步运用排列数公式解题。

2. 培养学生分析问题、解决问题的能力。

【教学重点】排列数公式的初步运用。

【教学过程】

一、复习提问

从张、王、李、赵四位同学中选出 3 位同学分别担任团支书、组委和宣委, 问有多少种不同的选法? 并把所有的可能性不重漏地写出来 (按支书、组委、宣委顺序写)

解: 分三个步骤完成

第一步选团支书: 有 4 种选法。

第二步选组委: 有 3 种选法。

第三步选宣委: 有 2 种选法。

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

答: 有 24 种不同的选法。

(所有可能的选举结果略)

二、讲解新课

在上面问题的答案中, 张王赵是一个排列, 所有不同的排列总数是 24, 我们把 24 这个数叫做从 4 个不同元素中任取 3 个元素的排列数, 记做 P_{34} 即 $P_{34}=24$ 。

本节课, 我们给出排列数的一般的定义, 并推导出

无重复元素的排列数公式。

(一) 排列数公式

1. 排列数定义：

从 n 个不同元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的排列数，记做 P_{mn} 。

“排列”的第一个字母

m, n 所满足的条件是：① $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ ；② $m \leq n$ 。

如：对于 P_{5n} 必有① $n \in \mathbb{N}$ ；② $n \geq 5$ 。

2. 无重复元素的排列数公式的推导。

在解决提问中的不同选法的计算时，我们所用的方法叫做占位法，这是解决排列问题的最基本的方法，但求解过程较繁，下面我们来推导 P_{mn} 的计算公式，以使今后的解题过程简化。

一般地，从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素的排列数可用占位法计算如下：

解：分 m 个步骤完成：

第一步确定第一个位置上的元素：有 n 种方法。

第二步确定第二个位置上的元素：有 $(n-1)$ 种方法。

第三步确定第三个位置上的元素：有 $(n-2)$ 种方法。

……第 m 步确定第 m 个位置上的元素：有 $[n-(m-1)] = (n-m+1)$ 种方法。

由乘法原理得出：

$$P_{mn} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$$

公式的特点：

1. m 个连续自然数的连乘积；

2. 最大因数为 n ，以下依次减 1，最小的因数是 $(n-m+1)$ 。

由公式很容易计算出： $P_{34}=4 \times 3 \times 2=24$ 。

3. 排列数公式的阶乘形式。

1) 全排列：从 n 个不同元素中每次取出 n 个不同元素的排列称为 n 个元素的全排列，显然全排列

$$P_{nn}=n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

2) 阶乘：自然数 1 到 n 的连乘积 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 称为 n 的阶乘，记做 $n!$ 规定 $0!=1$ 。

即： $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n=n!$ ，显然 $P_{nn}=n!$

3) 无重复元素的排列数公式的阶乘形式。

$$\therefore P_{mn}=[n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)]$$

$$[(n-m)(n-m-1)\cdots 2 \cdot 1]$$

$$/ (n-m)(n-m-1)\cdots 2 \cdot 1$$

4. 无重复元素的排列数公式两种不同形式的应用。

三、巩固练习

教科书 2.3 排列数公式后练习第 2 (单数题)、4、5、6 题。

四、布置作业

排列数公式教案设计 (一)

【教学目的】

1. 使学生能熟练地运用排列数公式和基本原理解较简单的排列问题。

2. 加深学生对排列概念的理解，提高学生动用基本知识解决实际问题的能力。

【教学难点】

1) 正确理解“不同位置”的含义。

2) 有条件限制的排列问题的解法。

【教学过程】

一、复习排列数公式，讲评作业。

二、讲解新课

上节课我们讲了排列数公式的第一个问题

(一) 排列数公式，今天我们着重讲解有关排列的应用问题的解法。

(二) 有关排列的应用题：

有关排列的应用题可以分为两大类：

1. 无条件限制的排列问题：

解题关键：1) 确定该题是否是排列问题。

2) 正确地找出 m 、 n 的值。

3) 准确地运用两个基本原理。

例 1 信号兵用红、黄、兰三面旗从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号，每次可以挂一面、二面、或三面，并且不同的顺序表示不同的信号，一共可以表示多少种不同的信号？

分析：提出下列问题让学生回答：

1) 要做一件什么事？怎样就叫把这件事做完了？

2) 什么叫不同的信号？为什么是排列问题？

3) 如何求解？

解：分为三类

第一类挂一面旗：有 P_{13} 种信号，

第二类挂二面旗：有 P_{23} 种信号，

第三类挂三面旗：有 P_{33} 种信号。

由加法原理： $P_{13}+P_{23}+P_{33}=15$

答：可以表示 15 种不同的信号。

例 2 10 个人走进只有 6 把椅子的屋子，若每把椅子必须且只能坐 1 个人，问有多少种不同的坐法？

分析 坐在椅子上的 6 个人是走进屋子的 10 个人中的任意 6 个人，若我们把人抽象地看做元素，把 6 把椅子当成 6 个不同的位置，则例 2 就抽象为：从 10 个不同元素中任取 6 个元素占据 6 个不同的位置，显然是从 10 个元素中任取 6 个元素的排列问题。

解： $P_{610}=10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5=151200$

答：有 151200 种不同的坐法。

在这一类问题中有两种不同的对象。如：人和椅子，一般处理方法是：把其中一种对象（数量较多者）当做元素，另一种对象则当做位置。

如：在 7 本不同的书中任选 5 本借给 5 名同学，每人必须且只能借一本，问有多少种不同的借法？

把 7 本书当做 7 个元素，5 名同学当做 5 个位置，则此题答案是： $P_{57}=2520$ 种借法。

把例 2 改为：6 个人走进放有 10 把椅子的屋子，若每人必须且只能坐一把椅子，问有多少种不同的坐法？（请同学们自己分析和回答这个题，答案 $P_{610}=151200$ ）

2. 有条件限制的排列问题：

这里所说的限制表现为：某位置上不能排某元素，或某元素只能排在某位置上。

这一类问题常用的不同解法有三种，下面我们就一个具体例题加以说明。

例 1 用 0 到 9 这十个数字可组成多少个无重复数字的四位数。

分析：做图示：千位 百位 十位 个位
不
能
排

0

条件限制：千位上不能排 0，或说千位上只能排 1 到 9 这九个数字中的一个。

解法一：分步完成：第一步选元素占据特殊位置，第二步选元素占据其余位置。

此解法着眼于有条件限制的特殊位置。

解：分两步完成。

第一步从 1 到 9 这九个数字中任选一个占据千位，有 P_{19} 种方法。

第二步从余下的九个数（包括数字 0）中任选 3 个占据百、十、个位，有 P_{39} 种方法。

由乘法定理： $P_{19}P_{39}=9 \times 9 \times 8 \times 7=4536$ 。

答：可组成 4536 个无重复数字的四位数。

解法二：对于某元素只能占据某位置的排列可分步完成：第一步让特殊元素先占位，第二步让其余元素占位。

此种解法着眼于有位置限制的特殊元素。

分析：在所给元素中 0 是有位置限制的特殊元素。在组成的四位数中，有一类根本无 0 元素，另一类含有 0 元素，而此时 0 元素只能占据百、十、个三个位置之上。

解：组成的四位数分为两类：

第一类不含 0 的四位数有 P_{49} 个。

第二类含 0 的四位数的组成分为两步：

第一步让 0 占位有 P_{13} 种占法。

第二步让其余 9 个数占位有 P_{39} 种占法。

$\therefore$ 含 0 的四位数有 $P_{13}P_{39}$ 个。

由加法原理： $P_{49}+P_{13}P_{39}=4536$ 答：(略)

解法三：从无条件限制的排列总数中减去不合要求的排列数（称为排除法）。

此题中不合要求的排列即为 0 占据千位的排列。

解：从 0 到 9 十个数中任取 4 个数的排列总数为 P_{410} ，其中 0 在千位的有 P_{39} 个。

$P_{410} - P_{39} = 4536$ 答：(略)

用解法三时要特别注意不合要求的排列有哪几种？要做到不重漏。

三、巩固练习

教科书 §3 排列数公式后的练习第 7 题。

7. 从 4 种蔬菜品种中选出 3 种，分别种植在不同土质的 3 块土地上，有多少种种植方法？答案： $P_{34} = 24$ 。

补充题。用 1、2、3、4、5 这五个数字，可组成多少个无重复数字的比 2000 大的四位数？(要求用三种方法求解)

答案：(法一) $P_{14}P_{34} = 96$

(法二) $P_{44} + P_{13}P_{34} = 96$

(法三) $P_{45} - P_{34} = 96$

四、布置作业

教科书习题三：5、8、9、10 (1)。要求一题多解。

答案：5. $P_{35} = 60$ 。8. (1) $P_{56} = 720$ ，(2) $P_{15}P_{45} = 600$ 或 $P_{55} + P_{14}P_{45} = 600$ 或 $P_{56} - P_{45} = 600$ 。9. (1) $P_{15} + P_{25} + P_{35} + P_{45} + P_{55} = 325$ ，(2) $P_{13}P_{33} + P_{14}P_{44} = 114$ 。
10. (1) $P_{66} = 720$

排列数公式教案设计 (二)

【教学目的】

1.使学生掌握有条件限制的排列问题的解法,并能独立地解较复杂的排列问题。

2.培养学生分析问题、解决问题的能力。

【教学难点】较复杂的排列问题的分析和求解,不重不漏原则的贯彻。

【教学过程】

一、复习提问

用三种方法解下列习题:7个人排成一排照像,甲不站在中间也不站在两端,问可照出多少张不同的像片?

(法一) $P_{36}P_{44}=2880$

(法二) $P_{14}P_{66}=2880$

(法三) $P_{77}-3P_{66}=2880$ 。

二、讲新课

(注:为节省时间,本节课中的各题都只列式不求值)

在解有条件限制的排列问题时,首先要把条件限制分析透,可用图示把特殊位置和特殊元素标明,还要时刻注意不重不漏,和由题目具体条件选择最佳解题方法。下面我们继续上节课讨论有条件限制的排列问题的解法。

三、巩固练习

1.7个人排成一列,

(1)如果甲、乙不站在两端,有多少种不同的排法?

(2)如果甲、乙、丙三人必须相邻,有多少种不同的排法?(3)如果7个人中有4男3女,要求男、女相间,有多少种不同的排法?

答案:(1) $P_{25}P_{55}=2400$, (2) $P_{55}P_{33}=720$,

(3) $P_{33}P_{44}=144$ 。

四、布置作业

1. 做排列问题的总复习。
2. 复习参考题二：4、19、21、23。

组合、组合数公式教案设计

【教学目的】

1. 使学生正确理解并初步掌握组合的概念，排列和组合之间的区别。
2. 使学生能初步掌握和运用组合数公式，组合数与排列数之间的关系。
3. 教会学生掌握类比的学习方法。

【教学重点和难点】

重点是组合与排列的区别和相互联系以及组合数公式的运用。难点是不重不漏地写出所有组合数。

【教学过程】

一、组合部分内容简介：

有关排列的问题我们学习了以下几个内容：

1. 概念和符号：一个排列定义、排列数定义及符号 P_{mn} 。
2. 排列数公式：公式推导，公式两种形式的应用。
3. 有关排列的应用题：无条件限制和有条件限制的排列问题。

在将要学习的组合这部分内容中仍然涉及到和上面类似的三个问题即：概念、公式、应用题，另外还有在排列中不曾研究过的组合数的性质。因此，同学们在学习有关组合的知识时，要注意到组合与排列这两部分内

容的相近,尤其要注意到它们之间的概念上的本质区别,运用类比的学习方法,必会收到学会新知识又巩固了旧知识的效果。

二、组合

(一) 让同学们自己看书学习,提出如下思考题:

1. 举例说明(不要用书上的例题)一个组合的定义并回答:在从 n 个不同元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素的组合中什么叫不同的组合?

2. 一个组合和一个排列的定义有何不同?

3. 怎样才能不重不漏地写出所有符合条件的组合?

(二) 由同学回答 1 和 2 两个问题,并提出下列练习做为检查。

1. 从 a, b, c, d 四个元素中任取出 3 个元素的一个组合,可以组成从 a, b, c, d 四个元素中任取 3 个元素的几个排列?(以任何一个组合为例均可)

2. 下面的问题中,哪一问是排列问题?哪一问是组合问题?

1) 一条铁路线上有 5 个火车站:

①需准备多少种不同的普通客车票? ②有多少种票价不同的普通客车票?

2) 平面上有 5 个点(无三点共线)

①过任意两点可连多少条线段?

②以其中任意一个点为端点过另外一点可做多少条射线? 3) 某班 45 个同学:

①选出 5 人来组成班委会,共有多少种选法?

②选出 5 人来分别担任正、副班长、学习委员、宣传委员、体育委员,有多少种不同的选法?

答:排列: 1) ① 2) ② 3) ②

组合：1) ② 2) ① 3) ①。

(三) 引导学生看书上的示意图，讨论如何把书中写出所有符合条件的组合的方法推广。

三、组合数公式：

(一) 组合数定义及符号：

(定义由同学自己看书)

($m \in \mathbb{Z}^-$, $n \in \mathbb{N}$, $M \leq n$)

(二) 组合数与排列数之间的关系。

四、巩固练习

教科书 2.6 组合数的两个性质后的练习：1、2、4、5、(1)、(2)、(4)、(5)、(6)。

五、布置作业

复习总结二项式定理教案设计

【教学目的】

1. 小结二项式定理，二项式系数的性质及它们的应用。

2. 指导学生对本节的基本概念和基本公式进行总结和深化。

3. 指导学生对本节的基本题型进行总结，提高解题能力。

【教学重点】 有关重点概念和应用。

【教学过程】

一、复习总结有关概念

(可采取提问的方式)

(1) 什么叫二项式定理，定理的实际含义是什么，公式的条件是什么。

(2) 二项式的展开式的规律是什么？

(3) 两个重要常见的二项式的展开式是什么？

(4) 下列二项式的展开式相同吗？它们的通项相同吗？

二、有关二项式定理的题型总结

(可采取提问)

(1) 二项式定理的应用：

答：结合本节习题和补充题：可总结为它能解决下类题型：

- ①求展开式，
- ②近似计算，
- ③证明有关的整除问题，
- ④证明恒等式，
- ⑤证明有关的不等式。

(2) 通项公式的应用：

答：它能解决下类题型：

- ①求展开式的某项，
- ②求含 x^r 的项（当 $r=0$ 时为常数项），
- ③根据某种条件先求 n 或 r ；再求符合条件的某种项。

(3) 二项式系数的性质的应用：

答：它能解决下类题型：

- ①有关中间项，及二项式系数最大的项的问题，
- ②有关组合等式的证明。

复习结束后，布置下面一组题作为本节的检查题：

“随机事件的概率”教案设计

【教学目的】使学生了解一个随机事件的发生既有随机性，又在大量重复试验中存在着一一种客观规律性——频率的稳定性，以引出随机事件概率的意义和计算方法。

【教学重点和难点】深刻理解随机事件在试验中发生的可能性大小的刻划方法，是用客观存在着的一个小于 1 的正数来表示。

（教学方法：讲授法。）

【教学过程】

一、前言

从这节开始，大约用 12 课时来学习一个新的数学分支——“概率论”初步。“概率论”是研究随机现象规律性的科学，随着现代科学技术的发展，“概率论”在自然科学、社会科学和工农业生产中得到了越来越广泛的应用。在现实世界中，随机现象是广泛存在的，而“概率论”正是一门从数量这一侧面研究随机现象规律性的数学学科。学习这一章之后对有些事件的发生或不发生或发生的可能性是百分之几有个估计和推算。这对是否能完成某一任务有一定的了解。从而增强在工作中的主动性，减少在工作中的盲目性，使工作能达到预想的最好结果。

二、新课引入

在实际生活中，往往在完全相同的综合条件下出现的结果是不相同的。为了叙述的方便，我们把条件每实现一次，叫做进行一次试验，试验的结果中所发生的现

象叫做事件。由于在一定的条件下某些结果是一定发生或一定不发生或可发生也可不发生，所以事件被分为必然事件、不可能事件和随机事件三种。

这节课要通过几个实例说明现实生活中确实存在着以上三种事件；这节课还要通过实例说明一个随机事件的发生是存在着统计规律性的，一个随机事件发生的频率总是在某个常数附近摆。我们给这个常数取一个名字，叫做这个随机事件的概率。它从数量上反映了这个事件发生的可能性的多少。

三、进行新课

1.事件：在一定的条件下所出现的某种结果叫做事件。

事件共分三种：必然事件记作 U （在一定的条件下必然要发生的事件），不可能事件记作 V （在一定的条件下不可能发生的事件）、随机事件记作 A 、 B 等（在一定的条件下可能发生也可能不发生的事件）。

2.随机事件在一次试验中是否发生不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生具有一定的规律性，或称随机事件频率的稳定性，现在引出概率的统计定义：在 n 次重复进行同一试验时，事件 A 发生的次数为 m 次，则称事件 A 发生的频率 m/n 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$ 。

由于随机事件 A 在各次试验中可能发生，也可能不发生，所以它在 n 次试验中发生的次数（称为频数） m 可能等于 0（ n 次试验中 A 一次也不发生），可能等于 1（ n 次试验中 A 只发生一次），……也可能等于 n （ n 次试验中 A 每次都发生）。我们说，事件 A 在 n 次试验中发生的频数 m 是一个随机变量，它可能取得 0、1、2、…、

n 这 $n+1$ 个数中的任一个值。于是，随机事件 A 的频率 $P(A) = m/n$ 也是一个随机变量，它可能取得的值介于 0 与 1 之间，即 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。特别，必然事件的概率为 1，即 $P(U) = 1$ ；不可能事件的概率为 0，即 $P(V) = 0$ 。这里说明随机事件的频率究竟取得什么值具有随机性。然而，经验表明，当试验重复多次时随机事件的频率又具有稳定性。除教材中抛掷钱币的实验结果外，这里我们再举一个例子。

例 进行这样的试验：从 0、1、2、 $\cdots$ 、9 这十个数字中随机取一个数字，重复进行这个试验 10000 次，将每次取得的数字依次记下来，我们就得到一个包括 10000 个数字的“随机数表”。在这个随机数表里，可以发现 0、1、2、 $\cdots$ 、9 这十个数字中各个数字出现的频率稳定在 0.1 附近。现在我们把一个随机数表等分为 10 段，每段包括 1000 个随机数，统计每 100 个随机数中数字“7”出现的频率，得到如下的结果：

3. 利用概率的统计定义，在计算每一个随机事件概率时都要通过大量重复的试验，列出一个表格，从表格中找到某事件出现频率的近似值作为所求概率。这从某种意义上说是很繁琐的。在下一节中介绍第二种求随机事件概率的方法。

四、巩固新课

1. 指导学生阅读课本，进一步了解随机事件 A 发生的频率 m/n 总是接近于某个常数，以加深对概率概念实质的理解。

2. 提问：

- (1) 试举出两个必然事件和不可能事件的实例。
- (2) 不可能事件的概率为什么是 0？

(3) 必然事件的概率为什么是 1？

(4) 随机事件的概率为什么是小于 1 的正数？它是否可能为负数？

五、小结

随机事件在现实世界中是广泛存在的。在一次试验中，事件是否发生虽然带有偶然性，但在大量重复试验下，它的发生呈现出一定的规律性，即事件发生的频率总是接近于某个常数，在它附近摆动，这个常数就叫做这一事件的概率，记作 $P(A)$ 。

且 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

六、布置作业

1. 指出下列事件是必然事件，不可能事件，还是随机事件：

(1) 如果 a, b 都是实数，那么 $a \cdot b = b \cdot a$ 。

(2) 八月的北京气温在摄氏零下 40°C 。

(3) 校对印刷厂送来的清样，每一万字中有错、漏字 10 个。

2. 两位同学各自进行一次抛掷硬币的实验，在抛掷 1000 次的情况下，统计一下出现国徽面向上的次数 m ，然后再计算 $m/1000$ ，以求得抛掷硬币事件的统计概率，再把两位同学做出的结果作一比较。

等可能事件的概率讲练结合教案设计

【教学目的】通过等可能事件概念的讲解，使学生得到一种较简单的、较现实的计算事件概率的方法。

【教学重点和难点】熟练、准确地掌握有关排列、组合的知识是顺利求出等可能事件概率的重要方面。

(教学方法：讲练结合)

【教学过程】

一、复习提问

1.上节课布置作业的第2题，每位同学得到的结果是否接近于同一个小于1的正数0.5？你们是否已经感觉到计算事件概率的繁琐性？大量重复的试验是否可以避免？

2.上抛一个刻着1、2、3、4、5、6字样的正六面体方块出现字样为“3”的事件的概率是多少？出现字样为“0”的事件的概率是多少？上抛一个刻着六个面都是“P”字样的正方体方块出现字样为“P”的事件的概率是多少？

二、新课引入

随机事件的概率，一般可能通过大量重复试验求得其近似值。但对于某些随机事件，也可能不通过重复试验，而只通过对一次试验中可能出现的结果的分析来计算其概率。这种计算随机事件概率的方法，比经过大量试验得出来的概率，有更简便的运算过程；有更现实的计算方法。

这一节课程的学习，对有关的排列、组合的基本知识和基本思考问题的方法有较高的要求，因此对于排列、组合还不十分熟悉的同学应当先补上这一课。

三、进行新课

1.等可能事件的意义：对于有些随机试验来说，每次试验只可能出现有限个不同的试验结果，而出现所有这些不同结果的可能性是相等的（或叫机会均等原理）。

例如，从52张扑克牌中任意抽取一张（记作事件A），那么不论抽到哪一张都是机会均等的，也就是等可能性

的，不论抽到哪一张花色的红心的牌（记作事件 B）也都是等可能性的；又不论抽到哪一张印有“A”字样的牌（记作事件 C）也都是等可能性的。下面我们给出事件 A、B、C 发生的概率的概念和计算方法。

2. 等可能性事件概率的计算方法（概率的古典定义）：如果一次试验中共有 n 种等可能出现的结果，其中事件 A 包含的结果有 m 种，那么事件 A 的概率 $P(A)$ 是 m/n ($m \leq n$)。

在上例中： $P(A) = 52/52 = 1$ ，

$P(B) = 13/52 = 1/4$ ，

$P(C) = 4/52 = 1/13$ 。

这里再介绍一种概率古典定义的叙述方法：若事件 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 发生的机会是相同的，则称它们为等可能性事件，其中 A_i ($i=1, 2, \dots, n$) 称为基本事件 (n 为基本事件总数)，如果事件 A 中包含的结果有其中的 m 种，那么事件 A 的概率 $P(A) = m/n$ ，即

$$P(A) = \frac{A \text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}$$

四、小结

用这节中的观点求随机事件的概率时，首先对于在试验中出现的结果的可能性认为是相等的；其次是通过一个比值的计算来确定随机事件的概率，并不需要通过大量重复的试验。因此，从方法上来说这一节所提到的方法，要比上一节所提到的方法简便得多，并且更具有实用价值。

五、布置作业

1. 把 100 张已编号的卡片（从 1 号到 100 号），从中任取 1 张，计算：

- (1) 卡片号是偶数的概率；
- (2) 卡片号是 5 的倍数的概率；
- (3) 卡片号是质数的概率；
- (4) 卡片号是 111 的概率；
- (5) 卡片号是 1 的概率；
- (6) 卡片号是从 1 号到 100 号中任意一号的数的概率。

2. 一个均匀材料做的正方体玩具，各个面上分别标以数 1、2、3、4、5、6。

(1) 将这玩具抛掷 1 次，朝上的一面出现偶数的概率是多少？

(2) 将这玩具抛掷 2 次，朝上的一面的数之和为 7 的概率是多少？

(3) 将这玩具抛掷 3 次，朝上的一面的数之和为 10 的概率是多少？

3. 某城市的电话号码由六个数字组成，每个数字可以是 0 到 9 这十个数字中的任一个，计算电话号码由六个不同数字组成的概率是多少？

概率的加法公式讲练结合教案设计

【教学目的】使学生了解概率加法公式的应用范围和具体运算法则。

【教学重点和难点】互斥（或称互不相容）事件的概念。

（教学方法：讲练结合）

【教学过程】

一、复习

1.在“集合论”中集合之间的交或并分别有哪些运算？

2.在“集合论”中集合间的交、并、余的对偶律是什么？

二、新课引入

对于一些较复杂的事件的概率，直接根据概率的定义来进行计算是很不方便的。为了将一些较复杂的概率的计算化成较简单的概率的计算，首先要学会将所考虑的事件作出相应的正确运算。这一节先讲事件的和的意义。然后再讲对于怎样的事件可应用哪一种概率加法公式计算事件的概率。

三、进行新课

1.事件的和的意义

对于事件 A 和事件 B 是可以进行加法运算的。 $A+B$ 表示这样一个事件：在同一试验下， A 或 B 中至少有一个发生就表示它发生。例如抛掷一个六面分别标有数字 1、2、3、4、5、6 的正方体玩具，如果掷出奇数点，记作事件 A ；如果掷出的点数不大于 3，记作事件 B ，那么事件 $A+B$ 就是表示掷出的点数为 1、2、3、5 当中的一个。

事件“ $A_1+A_2+\cdots+A_n$ ”表示这样一个事件，在同一试验中， $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生即表示它发生。

2.互斥事件的意义

不可能同时发生的个事件叫做互斥事件。如从 52 张扑克牌中抽出一张牌。设事件 A 为抽到一张红心，事件 B 表示抽到一张红方块。则事件 A 与 B 是互斥的。

3.互斥事件的概率加法公式

如果事件 A, B 互斥，那么：

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad \text{公式 1}$$

四、巩固新课

五、小结

两个事件 A 和 B 是互斥的可应用概率加法公式：

$$P(A+B) = P(A) + P(B),$$

这个公式也可以推广到 n 个彼此互斥事件的情形：

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

如果两个事件 A 与 B 不互斥，那么存在着概率加法公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

六、布置作业

1. 判别下列每对事件是不是互斥事件，如果是，再判别它们是不是对立事件。

从一堆产品（其中正品与次品都多于 2 个）中任取 2 件，其中：

- (1) 恰有 1 件次品和恰有 2 件次品；
- (2) 至少有 1 件次品和全是次品；
- (3) 至少有 1 件正品和至少有 1 件次品；
- (4) 至少有 1 件次品和全是正品。

2. 一个均匀材料做的正方体玩具，各个面上分别标以数 1、2、3、4、5、6。设事件 A 表示出现奇数点（指向上一面的点数是奇数），事件 B 表示出现点数不超过 3。

- (1) 试判断 A 与 B 是互斥事件还是对立事件？
- (2) 试计算下列各式的值：

$$P(A), P(B), P(A+B).$$

- (3) 试比较 $P(A) + P(B)$ 与 $P(A+B)$ 两式的大小。
- (4) 由 (3) 题的结论你能得出在什么样事件的情况下公式 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ 成立？

概率的乘法公式讲练结合教案设计

【教学目的】使学生了解概率乘法公式的应用范围和具体运算法则。

【教学重点和难点】相互独立事件的概念。

(教学方法：讲练结合)

【教学过程】

一、复习

1. 一个坛里有 6 个白球, 3 个黑球, 1 个红球。设摸到一个球是白球的事件为 A , 摸到一个球是黑球的事件为 B 。问 A 与 B 是互斥事件呢还是对立事件?

2. 甲坛子里有 6 个白球, 4 个黑球, 乙坛子里有 3 个白球, 5 个黑球。设从甲坛子里摸出一个球, 得到白球叫做事件 A , 把从乙坛子里摸出一个球, 得到白球叫做事件 B 。问 A 与 B 是互斥事件呢? 还是对立事件? 还是什么事件关系? 试找出事件 A 与 B 的内在联系。

二、新课引入

现在我们引进一个重要的概念, 即随机事件的独立性的概念。

在上述复习提问 2 中提到的从甲坛子里摸出, 得到白球和从乙坛子里摸出, 得到白球, 这两个事件的发生, 可以是同时进行的。并且事件 A (或 B) 是否发生对事件 B (或 A) 发生的概率没有影响。因为事件 $A \cdot B$ 就表示事件 A 和事件 B 同时发生, 所以其概率为 $P(AB)$ 。现在要问 $P(AB)$ 与 $P(A)$ 及 $P(B)$ 有什么关系呢? 并且要进一步问当 A 、 B 是怎样的关系的事件时才能很简单地求出 $P(AB)$ 的结果?

三、进行新课

1. 事件的积的意义

对于事件 A 和事件 B 是可以进行乘法运算的。 $A \cdot B$ 表示这样一个事件：在同一试验下， A 、 B 同时发生就表示它发生。例如抛掷一个六面分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 的正方体玩具，如果抛出奇数点，记作事件 A ；如果掷出的点数不大于 3，记作事件 B ，那么事件 $A \cdot B$ 就是表示掷出的点数为 1, 3 中的一个。事件“ $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ ”表示这样一个事件，在同一试验中， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生即表示它发生。

2. 相互独立事件的意义

如果事件 B 的发生不影响事件 A 的概率，则称事件 A 对事件 B 是独立的；否则，称为是不独立的。

如果事件 A 对事件 B 是独立的，则事件 B 对事件 A 也是独立的。

由于随机事件的独立性是一种相互对称的性质，所以可将事件的独立性定义为：“如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率，则称它们是独立的”；如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任一事件 A_i ($i=1, 2, \dots, n$) 与其它任意一个事件 A_j ($j=1, 2, \dots, n$) 是独立的，则称它们是两两独立的。

应该指出，两两独立的随机事件群（即其中任意两个事件是独立的），总起来不一定是独立的。

例袋中有四个球，其中一个红球，一个白球，一个黑球，还有一个是画着红、白、黑三种颜色的球。从袋中任取一个球，并且设：

A =取出的球上画有红色；

B =取出的球上画有白色；

C=取出的球上画有黑色。

问事件 A 与 B 是否独立？

事件 B 与 C 是否独立？

事件 C 与 A 是否独立？

事件 A, B 与 C 是否独立？

注 (i) 对于较复杂事件概率问题的计算, 首先要搞清楚事件的真实含意。如上例中的 (2) 两粒种子同时能发芽是指事件 A 与事件 B 同时发生, 也即为事件 A 与 B 的积: $A \cdot B$ 。又如上例中的 (3) 两粒种子至少有一粒能发芽是指事件 A 与事件 B 中至少有一个能发生, 也即为事件 A 与事件 B 的和: $A+B$ 。

注 (ii) 为了正确使用恰当的概率计算公式求出所给事件的概率, 往往需要首先判定事件是互斥的, 还是相互独立的; 其次需对事件作适当的运算; 然后才能对事件的概率进行运算。

注 (iii) 原题也可以这样提出: “有甲、乙两批种子, 发芽率分别为 0.8 和 0.7, 在两批种子中各选取一粒。问: 两粒种子都能发芽的概率是多少?” 在解答这问题之前你首先要对事件 A、事件 B 作如同例题中的假设, 然后写出相应的事件运算 $A \cdot B$, 最后才能求出其概率: $P(A \cdot B)$ 。

四、巩固新课

现利用下列两个例题熟悉对怎样的事件用概率的加法公式或概率的乘法公式。

五、小结

为了求出某事件的概率, 先需判断这事件是由哪几个“简单事件”(如 A、B、C) 组成的, 可用 A, B, C 或 A, B, C 的函数式子将所求事件表达出来, 然后在判定

了“简单事件”是互斥的还是相互独立之后，恰当地选取概率的加法或乘法公式等，可求出所求事件的概率，为了简化运算，有时还要应用公式 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 进行演算。

六、布置作业

1. 甲、乙两个气象台同时作天象预报，如果它们预报准确的概率分别是 0.9 和 0.8，那么在一次预报中两个气象台

- (1) 都预报准确的概率是多少？
- (2) 至少有一个气象台预报准确的概率是多少？
- (3) 都预报不准确的概率是多少？

2. 制造一种零件，甲机床的废品率是 0.04，乙机床的废品率是 0.06。从它们制造的产品中各任抽一件

- (1) 其中恰有一件废品的概率是多少？
- (2) 其中无废品的概率是多少？

3. 某售货员负责在三个柜面上售货。如果在某一小时内柜面不需要售货员照顾的概率，第一柜面是 0.9，第二柜面是 0.8，第三柜面是 0.7。假定各个柜面是否需要照顾相互之间没有影响，计算在这个小时内

- (1) 至少有一个柜面需要售货员照顾的概率。
- (2) 恰有一个柜面需要售货员照顾的概率。
- (3) 至多有 2 个柜面需要售货员照顾的概率。

立体几何序言课教案设计

一、充分认识序言课的重要性，是上好立体几何序言课的前提。

立体几何序言课以课本中的“引言”为主要教学内

容, 让学生对立体几何这门功课有一个粗略的整体性了解, 在学习具体内容之前有一个积极的思想准备。通过序言课的教学, 学生明白了立体几何研究的内容及学习立体几何的目的, 就能为以后的学习打下一个良好的基础。

然而有的老师对序言课却不够重视, 把已经十分抽象概括的“引言”进一步抽象概括, 开课后草草几句便开始了“平面”的教学。教师急急匆匆, 学生稀里糊涂, 极易给后继学习带来消极影响。

由此可见, 教师在充分认识序言课重要性的前提下, 认真组织教学, 努力完成序言课的教学任务, 对提高立体几何课的教学效益是至关重要的。

二、排除心理障碍, 激发学习兴趣, 是立体几何序言课的主要任务。

部分学生认为立体几何比平面几何难学, 存在畏惧心理; 多数学生对能不能学好这门功课信心不足, 对怎样学习这门功课心中无数。这种消极心理状态必然会给学习造成消极影响。因此在序言课教学中, 应把排除上述心理障碍, 激发学生学习立体几何的兴趣作为首先任务。

1. 尽量引用实例。

“引言”中指出, “建造厂房、制造机器、修筑堤坝等, 都需要进一步研究空间图形的问题。”为了使学生真正认识到立体几何是一门应用广泛的基础学科, 我们在序言课上展示学校教学楼的建筑图纸, 学生争相观看, 兴趣盎然, 并能辨认出: “这就是我们的教学楼!” 教者由此指出: “没有立体几何知识, 这张图纸是画不出来的。”“同学们能从图纸上看出是我们的教学楼, 这说明

大家已具有一定的空间想象能力，这正是学习立体几何的基础。有这样好的基础，何愁学不好它？”听到这些鼓励，学生常露出自信的微笑。

2.巧用教具、模型。

要求学生自制简单几何体的模型这样在序言课上就可以让学生观看前届学生自制的各种模型。那些自制的模型，有纸质的，有木质的，有用铅丝做的，也有用粘土做的，看颜色，五彩缤纷，望形状，新颖别致。学生看了这些精美的并留有制作者姓名的模型后，赞叹不已，大有“跃跃欲试”之势。

借助模型还可以帮助学生克服学习平面图形时产生的思维定势的消极影响。

例如，在黑板上画出图 1，不少学生乍一看认为这是一个平面图形，当教师指出这是一个空间图形的直观图时，有的学生认为小平行四边形凹在后面，有的学生认为小平行四边形凸在前面，因而引起了激烈的争论，但很快意见趋于统一：两种情况都可能存在。接着教师出示用硬纸板做的模型，学生观物思图，看图想物，终于形成了强烈的立体感。然后教师在黑板上画出图 2 和图 3，并用模型示范，学生不仅分清了两种不同的情况，更重要的是感受到了学习立体几何新鲜有趣，就能变“要我学”为“我要学”。

3.加强知识联系。

立几知识与学生已掌握的平面几何知识有密切的联系。序言课中有目的地加强这种联系有助于消除学生怕学、厌学的心理障碍，增强学好立体几何的信心。

当教师把模型放上讲台时，学生认出模型中的正方体、圆柱体、圆锥体……教师指出：“这些几何体在小学

大家就已经学过，现在学习立体几何，就是要进一步研究这些几何体的性质。”这样学生就会感到立体几何并不陌生。

教师还可以问学生：“两条直线相交有几个交点？两个平面相交有几条交线？”用教具演示后学生很快就能掌握。再问：“几个点可以确定一条直线？几个点可以确定一个平面？”学生会不加思索回答：“两个点可以确定一条直线，两个点也可以确定一个平面。”这时教师用两个指头试图将一块硬纸板顶住，但是无论怎样变化位置总不能成功，引得学生一阵哄笑，不少学生也拿出作业本做试验。教师抓住这一时机告诉学生：“立体几何与平面几何有密切的联系，它们研究的对象虽然不同，但研究的方法和研究的内容（性质、画法、计算和应用）基本相同。”这就能使学生认识到学习立几是学习平凡的自然延续。

三、引导学生探讨如何学好立体几何是序言课教学的落脚点。

有些老师常在序言课上板着面孔提出要“认真听讲，认真做好作业，课前要预习，课后要复习”的要求，这些自学生跨进校门之日起就听惯了的老调，并没有多少效果。我们的做法是让学生自由讨论，各抒己见。因为通过以上活动，学生对立体几何的兴趣被点燃以后，便自然想到：“我们怎样才能学好立几知识呢？经过讨论以后，教师再归纳得出学好立几的主要方法：①加强与平凡知识的联系，注意用对比的方法区别异同，掌握实质；②注意对实物、教具和模型的分析，培养空间想象能力；③自己动手制作模型，以加深对立几知识的理解和应用。为了学好第一章，我们要求学生准备好硬纸

板三块（代平面用），竹针或铅丝四根（代直线用），在学习中随时进行模型演示，以逐步建立起空间观念。

立体几何入门教案设计

高一学生经过初中两年的平几学习，逻辑思维能力和空间想象力得到了一定程度的发展，但一旦进入三维空间的学习，原来的知识结构和思维能力都不能很快适应新的研究对象，这就形成了学习立几入门难的两大因素。在生源较差的三类学校，立几入门难的问题更为突出。

一、发展空间想象力

平几学习中学生对图形直观作用的依赖性极强，立体图形虽有立体感，但失去了真实性，这样要认识图形的性质特征，对图形的直观依赖性就大大削弱。我们所画的空间图形实际上是具有抽象意义的平面图形，因此应要求学生能很好地读图、识图。

为了解决这个问题，在入门阶段要注意应用实物模型，然后由实物过渡到画图。充分应用实物模型对学生空间想象能力的培养确定能起到良好的作用，但是要防止造成学生对实物的依赖性。题题用实物，处处要模型，对空间想象力的提高反而无益。用实物是为了过渡到不用实物。在学生图形有初步认识后必须引导学生进行自觉表象活动，完成直观思维向抽象思维的过渡。

我们以图形翻折问题为例，“已知一个直角三角形的两直角边长分别为 a 、 b ，把三角形沿着斜边上的高折成直二面角，求两直角边夹角的余弦。”这类翻折问题通常的教法有两种：

第一种处理方法：

教师制作一个纸板的模型，利用模型在课堂上边演示边讲解。由于直观形象，学生很容易接受，但因为缺乏表象活动和抽象思维活动，过一段时间再遇翻折问题，学生又会束手无策。

第二种处理方法：

在课堂上出示模型，观察翻折前后点、线段及角的相对位置、大小、形状的变化，然后教师在黑板上画出图形进行分析，得出解题途径，再进行巩固性练习。这种方法较第一种要好，但学生的表象活动仍是由教师包办代替了。

从发展学生的空间想象力出发，我们主张第三种处理方法：出示模型让学生观察，留适当时间让学生有意识的识记翻折前后两个模型的形状。然后撤掉模型，要求学生回忆，并根据回忆画出图形，教师根据学生画的图进行分析。黑板上的图经学生观察后即应擦去，让学生再回忆翻折前后哪些点、线段的相对位置变了，哪些线段、角的大小变了，哪些元素未变化。在这个基础上找出解题思路，最后进行巩固性练习。

这种教学方法明显多了一个环节：自觉表象活动。在本例中，学生在教师引导下进行了三次自觉表象活动：拿掉模型前的有意识记，撤去模型后的回忆，擦掉图形后的再忆。坚持这样的教学过程，学生的空间想象力将有明显的提高。

二、分散难点，分步递进

由于空间图形的结构复杂，形成了很多学习难点，如解异面两直线问题、翻折问题、立几极、定值问题、截面问题等。处理难点宜采用分散的办法，随着教学进

程有计划地将难点分成若干阶段递进式地学习，在不同教学阶段对难点提出不同的要求。

例如求异面直线距离问题是个难点，不能回避，也不能操之过急，宜将此问题分散在各个学习阶段。

1. 定义阶段：学习异面直线的距离概念后，可求解一些易于知道公垂线位置的问题。

2. 线面平行阶段：将异面直线距离化归为线面距离，但还只限于能作出线面距离的问题。

3. 面面平行阶段：线线距离转化为平行平面的距离，但限于能作出面面距离的问题。

4. 线面垂直阶段：①使异面直线在同一平面内的射影为一直线和一点，则这点到射影直线的距离就是异面直线距离。②使二异面直线在同一平面内的射影是两条平行线，则二平行线间的距离就是异面直线距离。

5. 异面直线两点距离公式阶段：从 $EF^2 = m^2 + n^2 + d^2 - 2mncos\theta$ 得到 $d^2 = EF^2 - m^2 - n^2 + 2mncos\theta$ ，此公式由于条件太多，实用价值不大，但作为一种方法仍应向学生介绍。

6. 体积阶段：构造四面体利用体积法求异面直线距离，方法 1、2、中的那些不能作出公垂线的问题到此也解决。

7. 对于学有余力的学生，可用讲座形式补充各种不同条件下求异面直线距离的方法。

由于每个学习阶段都接触异面直线距离问题，这样学生就容易掌握，就避免了由于平时不重视，最后倾盆大雨式地介绍求法以致学生难以接受的状况。

对其他难点也可作同样处理，立几难点的小步子教学方法是入门阶段的好方法。

三、渗透思想方法

立几入门阶段，各种类型的习题相继出现，为了提高学生的解题水平，应当注重各类问题的具体解题思想和方法。但仅仅这样还不够，在学生掌握这些具体方法的同时，要注意提炼一般的教学思想，像化归思想、转化思想、参数思想等，从而在高层次上提高学生的解题水平。

点到直线距离公式整体教案设计

整体观念对数学思维过程起着重要的指导作用。在中学数学教学中，怎样才能卓有成效地培养学生的整体观点，增强整体意识，很值得探讨。所谓整体观念，就是从整体的效益来考虑问题，在解题中，把解题过程看作一个整体，认真分析每一个步骤对解题所起的作用，考虑这个步骤是否必不可少，能否为其他方法所取代，力求整体地解决问题，找到最优解法，最终实现解题目标。

点到直线距离公式是解析几何中的一个重要公式，这不仅是其有广泛的应用，而更重要的是公式推导过程中蕴含着重要的数学思想。因而，在设计这节课的教学方案时，要力求暴露公式推导中的思维过程，突出整体观念对思维过程的指导作用。下面谈谈点到直线距离公式推导这节课的教学设计。

问题：已知点 $P(x_0, y_0)$ 和直线 $l: Ax + By + C = 0$ (其中 A 、 B 不同时为零)，求点 P 到直线 l 的距离 d ，如图(1)。

先从以下几个问题出发：什么叫做点到直线的距

离？如何作出点 P 到直线 l 的距离？从而作图步骤/公式推导步骤

1. 过点 P 作直线 $l' \perp l$ /1. 写出 l' 的方程

2. 得 l' 与 l 的交点 Q /2. 解出 l' 与 l 交点 Q 的坐标

3. 线段 PQ 的长即为所求/3. 用两点间距离公式求出 $|PQ|$

即得推导方案 1：

已知 $\rightarrow l'$ 的方程 $\rightarrow$ 点 Q 的坐标 $|PQ|$ 即 d

课本介绍了上面的推导方法，并作出了“思路自然，但运算繁杂”的简短评价。这是因为在这种推导方法中，需先求出有关曲线（直线 PQ ）的方程、点（ Q 点）的坐标。为能找到一种切实可行而更巧妙和更简捷的推导方案，我们不妨先考虑特例，即当点 P 在 y 轴上时，求点 P 到直线 l 的距离，如图（2）。

引导学生易得推导方案 2：

本方案采用的方法是，找一个直角三角形，确定一个已知角和一条斜边，使所求距离的线段为三角形的一直角边。

特殊问题的解决，对解决一般性问题有所启示：找一条直线作为斜边，构造一个直角三角形。要构造一个直角三角形，只要找一条斜边即可，也就是只要求作过 P 点的一条直线 l_1 与 l 相交即可。这样，只要作一条平行于 y 轴（或 x 轴）的直线 l_1 ，如图（3），其方程简单，便于求它与 l 的交点坐标，而且构成直角三角形的内角容易求出，从而可求出直角边 $|PQ|$ ，一般性问题得到解决。

这样设计教学使学生弄清了作辅助线的道理。若把

分析深入一步还可以得到更简便的解法。

直线与抛物线的位置关系教案设计

【教学目的】培养学生从形及数两个角度研究分析问题习惯，学会依形判数，就数论形，互相验证的数学方法，提高数形结合能力。

【重点】运用解析几何的基本方法建立数形联系。

【教学进程】

1. 问题引入

(通过问题复习方程和曲线的关系)：

1) 怎样判断直线 l 与抛物线 c 的位置关系？为确定起见，给出 $l: y = \frac{1}{2}(x+1)$ ， $c: y^2 = 4x$ ，怎样判断它们是否有公共点？若有公共点，怎样求公共点？

估计学生都能回答：由方程组

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

的解来判断 l 与 c 的关系，接着提出问题：

2) 为什么说方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 有解， l 与 c 就有公共点，为什么该方程组

的解对应的点就是 l 与 c 的交点？

既然有了这样的一一对应关系，那么研究直线与抛物线的公共点，可以通过研究对应的方程组的解来解决；同样，讨论方程组是否有解，也可通过研究直线与抛物线是否有公共点来解决。这样就引出了解决这一类问题的两种方法：代数方法及几何方法。

2.分析讨论例题：

3.小结：

4.提出课堂练习题（由学生解答）：

5.总结：

1)再一次强调要养成从形及数两个角度研究分析问题的习惯，学会依形判数，就数论形，互相补充，互相验证的数学方法。

2)对比几何、代数两种方法的优劣。

在总结中要强调代数法能解决一般问题，不能让学生形成“代数法繁琐”这样的偏见，强调以代数法为主，以几何法为辅，说到底，解析几何就是用代数方法来研究几何问题的一门数学学科。

6.布置作业：

（王人伟）

[评：本设计指导思想明确，数学思想突出，教学效果很好，是一堂成功的设计。

为什么在数学教学中要重视数学思想呢？

1.数学思想是相应数学概念和数学方法的本质认识和精神实质。

我们知道，数学思想产生于数学问题，但光有数学思想并不能解决问题，还需要根据数学思想产生出有利于解决问题的相应的数学方法，所以，数学方法是数学思想和数学问题的中介，数学思想和数学方法又常常以一定数学概念的形式表现出来。这样看来，数学概念、数学方法都体现出相应的数学思想。数学概念和数学方法都是外显的，而数学思想则是内隐的，是蕴含在数学

概念和数学方法里的。所以，我们说数学概念和数学方法是数学思想的载体，我们在教学中就要善于透过数学概念和数学方法，去挖掘相应的数学思想，并以它来统帅全局。

虽然在解析几何课本里，呈现在大家眼前的都是些概念和方法，但整本书无不渗透数、形对应的思想、数形结合的思想和运动变化的思想。我们在每节课里都要努力去体现这些思想，这样才能更好地把握概念和方法。我们从这节课的整体构思与细节安排来看，王老师是有意识地去突出这些思想的，这就为这节课的成功奠定了基础。

2. 数学思想内化就成了数学观念。

所谓数学观念，通俗一点讲，就是数学头脑和数学意识，或者说是数学的习惯，它是由数学思想内化来的。数学观念作为数学思维的高级层次，它对数学思维活动有着一种定向、控制和调节的监控功能。

在解析几何里，我们应该树立这样的观念：解析几何给数学提供了一个双向的工具：几何概念可以用代数表示；几何的目标可以通过代数来达到。反过来，给代数语言以几何的解释，可以直观地掌握这些语言的意义，又可以得到启发去提出新的结论。

王老师在介绍里提到的学生的一些情况：学生仅习惯于用解析法得出结论；相信用简捷、直观的几何法，而对代数法不太重视等，这些都是没有树立起解析几何的上述的观念所致。

这节课王老师比较注意针对学生情况树立上述观念的。例如，求直线与抛物线的位置关系可以用代数方法。再如，对于练习 4：“直线 $y = (a+1)x - 1$ 与曲线 $y^2 = ax$

恰有一个公共点”通过代数法解出的 a 的三种情况，给予几何的解释，可以直观地掌握这些语言的意义。又如，可从几何图形上得出结论（如练习 2：“讨论直线 $x=a$ 与抛物线 $y^2=2x$ 的交点个数”）或提出新问题（如练习 3：“若直线 $l: y-1=a(x-2)$ 与抛物线 $c: y^2=2x$ 有两个公共点，则 a 在什么范围取值？”中， $a=0$ 的情况）。这些思想成了学生头脑中的东西后，就可起着对思维进行定向、调控的作用。

3. 数学思想对数学方法起调控作用。

作为数学方法来说，都是与特定的情境联系在一起的。例如求一直线与二次曲线的交点，无非是联立方程——消元——讨论 Δ ，即所谓的 Δ 法。如果方法不以相应的数学思想作指导，那么这种方法就会变成一种机械的操作，一种固有的模式，而当情境稍作变化，往往会束手无策。例如抛物线对称轴，或与对称轴平行的直线与抛物线只有一个交点是无法用 Δ 来解释的。这一点王老师是注意到了，在设计的例题中要克服学生这种固有模式（如讲新课的例题：“直线 $l: y=a(x+1)$ 与抛物线 $c: y^2=4x$ 的公共点个数”中 $a=0$ ，练习 3 中 $a=0$ ；练习 4 中 $a=-1$ 等都是这种情况）。

相反，用数学思想指导的数学方法，往往可以超脱这个特定的情境，或者变化模式适应情景，或者变换情景以适应模式，这就表现出一种思维的灵活性，而在这里起调控作用的，正是数学思想。在当前的数学教学中，为什么题练得很多，但有时效果不佳，恐怕没有重视数学思想是其中的原因之一。

这节课的教学目的里，提出要提高学生的数形结合的能力。那么在这节课里，数形结合的含义到底是什么？

我个人认为是：“数形取长补短，互相为用”。

笛卡儿在创立解析几何时，看到了“形”与“数”各自的优缺点。“形”具有直观性，它们的位置关系和变化趋势。容易呈现在人们的眼前，但欧氏几何中的每一证明，总是要求某种新的，往往是奇巧的想法。而代数具有一般性（即可以提供“通法”）；它的计算方法带有程序化的特点，并且可以把解题工作量减少。其缺点完全受法则和公式的控制，容易阻碍思想的发展。因此，他主张应当采取代数与几何中一切最好的东西，互相取长补短。

从这节课的具体实施来看，比较好地贯彻了这个含义下的数形结合思想。具体表现在：

从形的方面看：

1. 图形画得正确与否，例如抛物线的开口大些、小一些将会影响“依形判数”的准确性。由于这节课所给的抛物线都是过原点的，这样，我们再取除原点外的两个对称点，由这三点大致可控制抛物线的形状。这一点王老师在教学中指出来了，这很好。

2. 就以讲新课的例题来说，由图形来判断它们的位置关系，这里 a 是直线 l 的斜率，又是个参数，而 l 又过 $(-1, 0)$ 点。这样， a 变化意味着 l 绕 $(-1, 0)$ 点旋转，在旋转过程中看 l 与 c 的位置关系。这样讲是很好的，因为图形比较直观，在运动变化过程中容易把握，发挥了图形的特点。由于切线是一种极限状态，所以它可以起到界限的作用，若 l 按逆时针方向旋转，旋转过程中 l 没经过切线与经过切线， l 与 c 的交点情况就不同。但是，相切的情况很难从图形中观察出来，这就要借助于代数了，这一点王老师在讲课中指出来了。

如果这道题最后把代数的情况与几何的情况对照一下就更好了。

我们由代数知： $-1 < a < 1$ ， l 与 c 有两个交点； $a = \pm 1$ 时， l 与 c 相切； $a < -1$ 或 $a > 1$ 时， l 与 c 无交点； $a = 0$ 时， l 为抛物线的对称轴，与抛物线只有一个交点，用上图表示。再用几何方法，使 l 绕 $(-1, 0)$ 按逆时针方向旋转，两者互相印证就更精彩了。

3.再以练习 4 来说，由于在直线与抛物线方程中都有参数 a ，若按几何讨论，情况就比较复杂了，因对于 a 来说，要分情况讨论，然后分别画图观察，最后总结，相当繁琐。这样还不如借助于一般的代数，似乎问题更容易进展一些。王老师正是用这道题作为就数论形的典型。

由上看来，形方面的不足，由数的优点来弥补。

再从数方面来看：

1.有的题直接从图形就可观察出结果，如练习 2。由于 $x=a$ 是平行于 y 轴的一条直线， a 变动，直线就平行于 y 轴移动，而抛物线是固定的（过原点开口向右），这样直线与抛的线物交点情况就会一目了然了。

又如练习 3，用 Δ 法相当繁琐（解题过程中要用两次三项和的平方公式），但从图形上可以看出一些眉目。由于 l 过 $(2, 1)$ 点，而此点是在抛物线内部，于是过 $(2, 1)$ 点所有直线中，除去与抛物线对称轴平行的直线以外，都与抛物线相交于两点。由观察知，当 $a=0$ 时，直线 l 是过 $(2, 1)$ 且与抛物线对称轴平行的直线，它与抛物线有一个交点。除此之外， a 的其它情况都有两个交点，于是可以得到题目所要求的答案： $a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 。

2. Δ 法确实是判断直线与抛物线交点情况的一般通法,但有些情况它不能包括。如练习3,仅从 Δ 法考虑,求出 a 为任意实数,并不能剔除 $a=0$ 的情况。再如讲新课的那道题,只用 Δ 法是求不出 $a=0$ 的情况,但这些情况都在几何图形中显现出来了。所以,几何有时可以弥补代数方法的不足,或者说可以提醒你某些特殊的情况。

3. 有时用代数方法可以求出其解,但不知其几何意义是什么。为加深理解和检验,用代数方法解出后,再从几何的角度看一看是有好处的。如练习4,求出 $a=0, -1$,后,虽然取这些值时,直线与抛物线恰有一个交点,但它们的位置情况是不同的。

当 $a=0$ 时,抛物线 $y^2=ax$ 退化为 $y=0$,即 x 轴,而此时直线为 $y=x-1$,它们恰有一个交点,相交于 $(1, 0)$ 。

当 $a=-1$ 时,抛物线为 $y^2=-x$,直线为 $y=-1$,这条直线与抛物线的对称轴平行,这时它们恰有一个交点,交点为 $(-1, -1)$ 。

当 $a=-\frac{4}{5}$ 时,抛物线为 $y^2=-\frac{4}{5}x$,直线为 $y=\frac{1}{5}x-1$,这时,

它们相切于 $(-5, -2)$ 。

由此可见,尽管直线与抛物线恰有一个交点,但情况却是如此之不同。这不用几何来印证,恐怕学生是很难想到这些的。

由上看来,数的方面的不足可以由形的优点来弥补。

数形结合的具体含意是:“取长补短,互相为用。”王老师正是按这种情况安排课的,例题就选择得很有针对性,从课堂情况看,总的说教学设想贯彻得很好,教学目的是达到的,所以这节课应该说是一堂成功的课。大家可以设想一下,如果忽视这些数学思想,干巴巴地

给学生讲几道例题，学生固然也可以学会 $\triangle$ 法，但学生的得益肯定不会比这堂课多，这就是为什么我们要强调在数学教学中重视数学思想的道理。]

平面的基本性质教案设计

【**教学目的**】使学生正确理解和掌握平面的基本性质。

【**教学重点**】

掌握平面的基本性质。

【**难点**】证明空间点和直线的共面。

【**教学过程**】

一、新课引入

在开始学习平面几何时，着重研究了点、直线的基本性质，然后以此为基础，进行进一步的推理。在立体几何中，点、直线、平面是空间图形的基本元素，除了原有的点和直线的基本性质外，还要规定平面的基本性质，把它们当作公理，作为进一步推理的基础。

二、新课

1. 在什么样的条件下，一条直线上所有的点都在一个平面内。

公理 1

如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图 1—1）。

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线。

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上，这就是应用公理 1 判定直线是否在平面内。

又如，木工用直尺边检查所刨的木板平不平及泥水工人用木条的直边刮平地面，这就是应用公理 1 检查一个面平不平。

关于公理 1 可以使用集合的符号把它简明准确地表达出来。只把点作基本元素，于是直线、平面都可看作“点的集合”。规定用大写拉丁字母 A, B, P 等表示点；用小写拉丁字母 a, b, l 等表示直线；用小写希腊字母 α, β, γ 等表示平面。如点 A 在直线 a 上，记作 $A \in a$ ；点 A 在直线 a 外，记

作 $A \notin a$ ；点 A 在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$ ；点 A 在平面 α 外，记作 $A \notin \alpha$ ；直线 a 在平面 α 内，即 a 是 α 的子集，记作 $a \subset \alpha$ ；直线 a 不在平面 α 内，记作 $a \not\subset \alpha$ 。

公理 1 的集合形式表示为：若 $A \in a, B \in a, A \in \alpha, B \in \alpha$ ，则 $a \subset \alpha$ 。

公理 1 的图形表示如图 1—1 所示、图 1—2、图 1—3 是学生初学时常会画错的图形，应提醒学生注意其错误的原因。

2. 两个平面在什么样条件下存在公共直线。

用一块木板（设它代表一个平面），使它与桌面（也代表一个平面）有一个公共点，请学生回答“这两个平面是否还有其他公共点？公共点有多少？”提醒学生注意平面有无限延展的特性。回答后，请学生观察教室内相邻的墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线。由此归纳出公理 2 内容。

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线（图 1—4）。

公理 2 中“有且只有一条”的含义是：“有”说明直线是存在的，“只有”说明直线是唯一的。

如果两个平面 α 和 β 有一条公共直线 a ，就是说平面 α 和 β 相交，交线是 a ，则可记作 $\alpha \cap \beta = a$ 。因此公理 2 可表示成如下形式：

若 $A \in \alpha$ ， $A \in \beta$ ，则 $\alpha \cap \beta = a$ ，且 $A \in a$ 。

由公理 2 可见，两个平面如果有一个公共点，那么就有无穷多个公共点，所有公共点在公共直线上，即它们的交线上；交线上的每一个点都是两平面的公共点。

3. 两点确定一直线，几个点确定一个平面？

一扇门用两个交链和一把锁就可以固定了；测量上用的平板仪用三脚架就可固定了。从实例可归纳出公理 3 的内容。

公理 3 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（图 1—5）。

过 A ， B ， C 三点的平面又可记作“平面 ABC ”。

下面我们来讨论一个问题：过空间一点、两点、三点、四点、可以有多少个平面？（请学生回答）

过一点、两点、在同一直线上的三点或四点都可以有无数个平面；过不在一直线上的三点有且只有一个平面；一般情况下，过四点不一定有平面，如图 1—6 所示的教具，不存在一个平面过 A ， B ， C ， D 四点。

根据上述公理，可以得出下面的推论：

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面（图 1—7）。

要证空间的点、直线共面，由证法一可知，可以先由某些元素确定一个平面，然后证明其它元素也在此平面内。这种方法称为纳入平面法。由证法二可知，可以先由某些元素确定一个平面，为证其它元素也在此平面内，再作一个通过其它元素的辅助平面，推证辅助平面

与前一平面重合，从而证得所有元素共面。这种方法称为辅助平面法。

三、小结

本节课我们主要讲了平面的基本性质，并应用它们证明空间点和直线共面。

(1) 平面的基本性质和作用：

名称	作用
公理 1	判定直线在平面内的依据
公理 2	两个平面相交的依据
公理 3 及三个推论	确定一个平面的依据

(2) 证明空间点和线共面的方法有：纳入平面法和辅助平面法。

让学生讨论下面几题：

1. 为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚。
2. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？
3. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

四、作业

1. 一条直线与两条平行直线都相交。证明：这三条直线在同一个平面内。

2. 过直线 a 上的三点 A, B, C ，引三条相互平行的直线 AA_1, BB_1, CC_1 。求证：直线 AA_1, BB_1, CC_1 在同一平面内。

3. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线。证明：这三条直线在同一个平面内。

平行直线教案设计

【教学目的】

- 1.使学生掌握空间两条直线平行的判定及其应用。
- 2.使学生掌握平行线的性质及应用。

【教学重点和难点】 教学重点是空间二直线平行的判定和性质。

难点是二直线平行的判定和性质的应用。

【教学过程】

一、新课引入

通过上一节课的学习，我们已经知道：在图 1—26 所示的正方体 $A_1B_1C_1D_1$

$ABCD$ 中， $AB \parallel C_1D_1$ ， A_1C 和 BD_1 相交。

但对这些结论的正确性没有给出证明。这节课就来解决这个问题。

二、新课

请学生阅读课本上的平行线公理“平行于同一直线的两条直线互相平行。”的有关叙述，并思考思考题(1)：

1.给出图 1—26 中 $AB \parallel C_1D_1$ 和 A_1C 和 BD_1 相交的证明。

2.把一张长方形的纸对折两次，打开后如图 1—27 所示，那么折痕间是怎样的位置关系？为什么？

3.已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形（四个顶点不共面的四边形）， E 、 H 分别是边 AB 、 AD 的中点， F 、 G 分别是边 CB 、 CD 上的点，且。求证：四边形 $EFGH$ 是梯形。

阅读思考后，请一位学生板演

第 3 题。其他学生在读议小组内议论思考题(1)

并对板演作评论。议论后全班进行交流。在这基础上教师作补充讲评：

1. 平行线公理描述了平行线之间的传递性，即若 $a \parallel b$, $b \parallel c$ ，则有 $a \parallel c$ 。这种传递性不受线段数目的限制，可以进行多次传递。

2. 判断两条直线平行的基本方法是寻找分别与这两条直线平行的第三条直线，再利用平行线的传递性就能证得这两直线平行。例如：

又如思考题（I）的第2题，由于每个矩形对边是平行的，所以由平行线的传递性可得知各折痕是平行。

3. 画空间四边形时，一般可先画一个三角形 BCD ，再在 $\triangle BCD$ 外取一点 A ，然后连接 AB 、 AD 即得，如图 1—28 所示。事实上，空间四边形也可看成是由不在同一平面的两个三角形拼成的。

思考题（I）的第3题的图可画成图 1—28，在 $\triangle ABD$ 中由中位线定理得 $EH \parallel BD$ ；又在 $\triangle CBD$ 中，由平行线截比例线段定理的逆定理得 $FG \parallel BD$ 。再由平行线的传递性得 $EH \parallel FG$ ，所以 $EFGH$ 是梯形。

下面再来讨论平行线的性质。让学生阅读课本上等角定理（即如果一个角的两边和另一角的两边分边平行并且方向相同，那么这两个角相等）的论证和推论。

阅读要求是：

（1）理解定理条件、结论，学会定理证明方法。

（2）会应用该定理。为此，阅读时思考思考题（II）：

1. 已知： AA' 、 BB' 、 CC' 不共面，且 $BB' \parallel AA'$ ， $CC' \parallel AA'$ （如图 1—29 所示），求证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

2. 在长方体 $A_1B_1C_1D_1ABCD$ 中

（图 1—30），求证 $\angle D_1AC = \angle BC_1A_1$ 。

阅读思考后请两位学生上黑板板演，其他学生在读议小组中议论思考题并对板演的论证过程和书写进行评论。教师可根据学生的议论和板演进行纠正和补充讲解：

1. 等角定理条件中所提及的方向是指以角顶为出发点而言的。

如图 1—31 中， AC 和 $A'C'$ 是方向相同的，它们的方向都是以角顶为出发点向右方。

而 $A'C'$ 和 AD 就是反方向了，因为 $A'C'$ 是由角顶出发向右，而 AD 是由角顶出发向左。

把等角定理中的条件改成：“角的两边分别平行并且方向相反”，那么定理结论仍成立。

应用它能证明思考题（II）的第 2 题：

因为 $AB \parallel A_1B_1 \parallel C_1D_1$ ，所以， ABC_1D_1 是平行四边形，故 $AD_1 \parallel BC_1$ 。

同理可证得 $AC \parallel A_1C_1$ 。

由等角定理得 $\angle D_1AC = \angle BC_1A_1$ 。

如果把等角定理中的条件改为：“角的两边分别平行并且一组边方向相同而另一组边方向相反”，则结论将为：“两角互补”。这是由等角定理直接可推得的（见图 1—31）。

由于上述分析和角的两边可反向延长的特点可得到等角定理的推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等。

2. 等角定理的证明是利用了全等三角形的性质。

在证明两三角形全等的过程中，我们把对应边放在一个平面内，然后利用平面几何知识来证得对应边相等的。这种证题思想（即把空间图形的问题转化为平面图形来处理）常被用来证明立体几何中线段相等问题，思

考题（II）的第1题就是用这种想法来证的。

由条件和平行线传递性知： $CC' \parallel BB'$ ，因而 $ABB'A'$ 、 $ACC'A'$ 、 $CBB'C'$ 都是平行四边形，所以 $AB=A'B'$ ， $BC=B'C'$ ， $AC=A'C'$ ，故 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

三、小结

本节课主要学习了平行线的传递性，也就是平行线的判定定理，由于它的证明比较复杂，这里我们就把它作为公理不给出证明，事实上它是一个定理，也是以后我们证明空间两直线平行的主要依据。由平行线的传递性还推出了平行线的一个性质定理——等角定理，这个定理除了本身有一些应用外，更重要的是为研究异面直线交角打基础的。因此，这节课学的是基础知识，一定要掌握好。

四、作业

两条异面直线所成的角教案设计

【教学目的】

1. 使学生掌握异面直线所成角的定义和求法。
2. 使学生理解异面直线距离的定义，能根据定义来求两条异面直线间的距离。

【教学重点和难点】 教学重点是异面直线所成角的定义和求法，异面直线的距离的定义。难点是异面直线所成角的定义和求法，异面直线的距离的定义和求法。

【教学过程】

一、新课引入

教师讲解：

在平面几何中我们知道，对于两条相交直线，可以

用它们交角大小来确定其相互的位置关系；对于两条平行线,可以用它们之间的距离来确定它们之间位置关系。对于不在同一个平面内的两条异面直线,它们既不相交又不平行,那么如何来确定它们之间的位置关系呢？这是今天要学习的内容。

二、新课

让学生观察一个模型 在一张糊上白纸的马粪纸上,画一条直线 a ,并插上三根竹针 b 、 c 、 d ,如图 1—32 所示。然后思考:直线 a 与三根竹针是怎样的位置关系？而每根竹针与 a 的位置关系是一样吗？

让一个学生回答,其他学生可补充。

使学生明确。 a 与 b 、 c 、 d 都是异面直线,但 a 与 b 、 c 、 d 的位置关系都不一样,其差别在两方面,一是倾斜程度不一样,如 a 、 b 间和 a 、 c 间倾斜程度是不一样的。二是远近程度不一样,如 a 、 d 间和 a 、 b 间的远近就不一样。

如何寻找出一个合适的几何量来刻画两条异面直线之间的倾斜程度和远近程度呢？让学生阅读课本“两条异面直线所成的角”一节课文。阅读要求：

1. 正确理解异面直线所成的角的定义和求法。
2. 理解异面直线间距离的定义和一些特殊图形中的异面直线距离的求法。

阅读时可思考下列各题：

1. 如何过直线 a 外一点 O 作直线 a 的平行线。
2. 如果直线 a 与两平行直线 b 、 c 都不相交,而 a 与 b 所成的角等于 θ ,求 a 与 c 所成角的大小,并说出理由。
3. 在边长为 a 的正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ (见图 1—

33) 中, (1) 求 AA_1 与 B_1C_1 、 AA_1 与 BC 所成的角。(2) AB 、 A_1B_1 分别是异面直线 AA_1 和 BC 的什么线。

4. 在图 1—33 的正方体中, 求 (1) A_1C_1 和 BD 、 A_1C_1 和 AD_1 所成的角。(2) AB 和 DD_1 间的距离。

阅读思考后请二位学生上黑板板演思考题中的 2、4 两题。其他学生在读议小组中议论思考题并由第 4 题总结异面直线所成角和异面直线间距离的求法。

教师可根据学生议论和板演情况作补充讲解：

1. 在理解异面直线所成角的定义时, 要注意三点：

(1) 过直线 a 外一点 O , 可这样来作 a 的平行线：先作出由 O 和 α 决定的平面在 α , 然后在平面 α 内用平面几何中学过的方法就可过 O 作出 a 的平行线。这个作法为定义异面直线所成角作好了准备。

(2) 异面直线 a 、 b 所成角的定义是：过空间任一点 O , 分别引直线 $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, 则 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）作为异面直线 a 、 b 所成的角。对这个定义不但要理解它的具体内容, 还要懂得这种定义的合理性。由平行线等角定理知道, 不论 O 点在哪里, a' 和 b' 所成锐角（或直角）总相等的。 a' 和 b' 所成锐角（或直角）的大小, 完全取决于两条异面直线 a 和 b 的相互位置, 所以用 a' 和 b' 所成角的大小作为异面直线 a 、 b 所成角是合理的。又 a' 和 b' 所成的角有四个（两组对顶角），其中有二个锐角（或直角），另二个是钝角（或直角），到底取哪一个角作为两条异面直线 a 、 b 所成的角呢？我们规定把 a' 、 b' 交成的锐角（或直角）作为异面直线 a 、 b 所成的角。

由异面直线所成角的定义, 容易求出思考题 2 的解。

如图 1—34 所示, 在直线 b 上任取一点 A , 过 A 作

$EA \parallel a$ ，由异面直线所成角定义得 $\angle EAF = \theta$ 。又在直线 c 上任取一点 B ，作 $BD \parallel a$ ，则由平行线传递性得 $AE \parallel BD$ ，又由平行线等角定理得 $\angle DBG = \angle EAF = \theta$ 。由异面直线所成角定义知 $\angle DBG = \theta$ 即为 a 与 c 所成角。

(3) 因为两条异面直线不相交，所以两条异面直线没有交角，刻画它们倾斜程度的是“两条异面直线所成的角”，而不能叫“两条异面直线的交角”。

2. 在思考题 4 中，根据异面直线所成角的定义，连接 B_1D_1 和 BC_1 ， B_1D_1 与 A_1C_1 交于 O ，由 $D_1D \parallel B_1B$ ，得 D_1DBB_1 是平行四边形，推出 $D_1B_1 \parallel DB$ 。

同法可证得 $BC_1 \parallel AD_1$ 。所以 A_1C_1 与 BD 所成角为 $\angle A_1OD_1 = 90^\circ$ 。 A_1C_1 与 AD_1 所成的角为 $\angle A_1C_1B$ 。因为 $\triangle A_1C_1B_1$ 的三边为各面正方形的对角线，所以都相等，于是得 $\angle A_1C_1B = 60^\circ$ 。

从上面计算中可归纳出来两条异面直线所成角的一般方法：第一步是根据异面直线所成角的定义，作出两条异面直线所成角：在两条异面直线的一条上选取具有某些特殊性质的点（如这题中的 O 、 C' 点就是），再过这点作出另一条异面直线的平行线，所成锐角便是所求的角（如这题中 $\angle A_1OD_1$ ， $\angle A_1C_1B$ ）。第二步是使作出的两条异面直线所成角成为一个三角形的一个内角（本题中的 $\triangle A_1C_1B$ 就是）。第三步解这个三角形。

3. 在思考题 3 中，因为 $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ ， $AD \parallel BC$ ，所以 $\angle D_1A_1A = 90^\circ$ ， $\angle DAB = 90^\circ$ 就是 A_1A 和 B_1C_1 、 A_1A 和 BC 所成的角。

如果两条异面直线所成角是 90° ，那么我们就说这两条异面直线互相垂直。由此可知，在立体几何中两条直线互相垂直不一定是相交的。

从图 1—33 中可知 $A_1B_1 \perp A_1A$, $A_1B_1 \perp BC$, 又 $AB \perp A_1A$, $AB \perp BC$ 。这里 AB 和 A_1B_1 分别与两异面直线 A_1A 和 BC 垂直, 但 AB 与两异面直线 A_1A 和 BC 都相交, 而 A_1B_1 与两异面直线不全相交。我们把象 AB 这样与两条异面直线都垂直而且都相交的直线叫这两条异面直线的公垂线, 而象 A_1B_1 这样的直线不能作为两条异面直线 A_1A 和 BC 的公垂线。但象 A_1B_1 这样与两条异面直线都垂直的直线在作异面直线公垂线时常常是十分有用的, 作两条异面直线公垂线时, 常常可先作出分别与两异面直线垂直的直线, 然后再平移与两条异面直线相交来得到两条异面直线的公垂线。两条异面直线公垂线在这两条异面直线间的线段长, 叫这两条异面直线间的距离, 它刻划了两条异面直线间的远近程度。从图 1—33 中可看出, 异面直线 A_1A 和 BC 的公垂线只有一条, 即 AB 所在的直线, A_1A 和 BC 间的距离只有一个数值, 即 AB 的长 $=a$ 。所以, 两异面直线的公垂线是唯一的, 它们间的距离只有一个数值, 这也是两条异面直线间的距离能刻划两条异面直线远近程度的原因所在。

从异面直线间距离的定义中可知, 要求两条异面直线间的距离, 只需找出这两条异面直线的公垂线, 思考题 4 中, AD 是 AB 和 DD_1 的公垂线, AB 长 $=a$ 即为 AB 和 DD_1 间的距离。随着线面关系和面面关系的学习, 以后还可以有多种方法来求异面直线间的距离。

三、小结

这节课主要介绍了刻划两条异面直线倾斜程度和远近程度的两个几何量: 异面直线所成的角和异面直线间的距离。对于这两个几何量要正确理解它们的意义和掌握它们的求法, 这样就能确定两条异面直线间的位置关

系，而确定两条异面直线间的位置关系，不论在立体图形研究和计算中还是在实际问题的研究中都会遇到。

四、作业

三垂线定理的两中教案设计

A (一)

【教学目的】掌握三垂线定理并能运用。

【教学重点和难点】重点：弄清楚三条垂线的相互位置关系。难点：在非水平放置的平面上运用三垂线定理。

【教学过程】

一、新课引入

上节课我们讲了斜线在平面内的射影，今天我们复习一下。从平面外一点向这个平面引垂线段和斜线段，斜线段的射影是什么？（提问学生）就是垂线足和斜线足连结的线段。斜线在平面上的射影呢？（提问学生）过斜线上一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影。

现在，我们来研究一个问题，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 和底面对角线 AC 的关系。（老师可出示用铁丝做成的正方体教具，其中体的对角线和底面对角线，可用两种不同颜色的塑料丝表示。直观图 1—56 课前画在黑板上）对照图 1—56 提出：

- (1) BD_1 在底面 $ABCD$ 内的射影是什么？
- (2) BD_1 与底面 $ABCD$ 中 AC 处于何种位置关系？
- (3) BD_1 与 AC 所成的角是多少？

（以上三个问题请学生回答）

求异面直线所成的角，一般通过平移，转化成共面直线所成的角，然后运用平面几何知识求得。如我们取 DD_1 中点 M 连 OM ，则 $OM \parallel BD_1$ 。连 AM 、 CM ，则 $AM=CM$ ，又 O 为 AC 的中点，所以 OM 为等腰 $\triangle MAC$ 底边上的中线，从而 $OM \perp AC$ 。于是 BD_1 与 AC 所成的角是 90° ，即 $BD_1 \perp AC$ 。

第三个问题的解答过程，给我们提供了证明两条不共面直线互相垂直的方法；可以利用异面直线所成的角的定义，通过平移两异面直线中的一条或两条，转化为讨论两共面直线的垂直问题，这也是解决立几问题的一种重要方法。此外，我们还可建立直接获得空间两条直线互相垂直的定理——三垂线定理及其逆定理。下面我们学习三垂线定理。

二、新课

三垂线定理（板书）

在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

已知： PA 、 PO 分别是平面 α 的垂线、斜线， AO 是 PO 在平面 α 上的射影。 $a \subset \alpha$ ， $a \perp AO$ （图 1—57）。

求证： $a \perp P$ 。

分析： $\because a$ 和 PO 是异面直线。

$\therefore$ 要证 $a \perp PO$ ，只要证 $a \perp$ 平面 PAO 即可。

证明：请学生自己证并与课本上的证法对照。

说明：(1) 三垂线定理的图形应有以下四种情况：如图 1—58 (1) 所示，直线 a 可以通过 O 点；如图 1—58 (2) 所示直线 a 可以与 OA 相交；如图 1—58 (3)，图 1—58 (4) 所示直线可以与 OA 的延长线与 AO 的延长线相交。

(2)三垂线定理实质上是平面的一条斜线和平面内的一条直线垂直的判定定理。这两条直线可以是相交直线。

也可以是异面直线。

(3)三垂线定理应有三条垂线,如图 1—57 中,直线 PA 是平面 α 的垂线,直线 AO 是直线 a 的垂线,直线 PO 也是直线 a 的垂线,因此这种三垂线定理的叙述是名符其实的,它反映了三条垂线之间的关系。

三、小结

(1)三垂线定理是平面的一条斜线和平面内一条直线垂直的判定定理,可简记为:若垂直射影,则垂直斜线。它把空间的两条直线的垂直问题转化为平面内两条直线的垂直问题。

(2)运用三垂线定理的关键是找射影,要找射影应先找线面垂直关系,有了线面垂直才有斜线的射影,再证垂直射影,得出垂直斜线。

让学生课内作下列练习题:

1.如图 1—60,已知:点 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心, $OP \perp$ 平面 ABC 。求证: $PA \perp BC$ 。

2.如图 1—61,已知: $ABCD$ 是正方形, $PA \perp AB$, $PA \perp AD$ 。求证: $BC \perp$ 平面 PAB , $CD \perp$ 平面 PAD 。

四、作业

1.如图有一方木料,上底面上有一点 E ,要经过点 E 在上底面一条直线和 CE 的连线垂直,应怎样画?

2.过 $\triangle ABC$ 的垂心 H ,引平面 ABC 的垂线 HP ,使 $\angle APB = 90^\circ$ 。求证:

$PA \perp PC$, $PC \perp PB$ 。

3.经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜线,如

果斜线和这个角的两边成相等的角，求证：斜线在平面内的射影是这个角的平分线（或平分线的反向延长线）。

4. 平面 α 内有正 $\triangle ABC$ ，点 O 是平面 α 外和 A, B, C 有等距离的点； P, Q, R, S 分别是线段 OB, AB, AC, OC 各边的中点。求让：四边形 $PQRS$ 是矩形。

A (二)

【教学目的】掌握三垂线定理的逆定理，并能运用三垂线定理及逆定理证题、解题。

【教学重点和难点】重点：运用三垂线定理及逆定理证题、解题。难点：求点到直线的距离。

【教学过程】

一、新课引入

我们上节课讲了三垂线定理。什么叫三垂线定理？它的道命题是什么？让学生思考后回答。

二、新课

三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直。

已知： PA, PO 分别是平面 α 的垂线、斜线， AO 是 PO 在平面 α 上的射影。 $a \subset \alpha, a \perp PO$ (图 1—62)。

求证： $a \perp AO$ 。

由老师写出已知、求证，证明请学生上黑板板演。最后老师讲评。

要注意三垂线定理及其逆定理的区别，三垂线定理是先有 a 垂直于射影 AO 的条件，然后得出 a 垂直于斜线 PO 的结论；而其逆定理则是已知 a 垂直于斜线 PO ，再推出 a 垂直于射影 AO ，在运用时应注意不要混淆。简单地讲前者是“垂直射影垂直斜线”。后者是“垂直斜线垂直射影”。

影”。

现在，我们利用三垂线定理及其逆定理来证明有关两条直线垂直的问题。

例 1 已知： $PA \perp PB$ ， $PB \perp PC$ ， $PA \perp PC$ ， $PO \perp$ 平面 ABC ，垂足为 O （图 1—63）。

求证： $AO \perp BC$ ， $BO \perp AC$ ， $CO \perp AB$ 。

分析：因为 PA 是平面 ABC 的斜线， AO 是 PA 在平面 ABC 内的射影， BC 是平面 ABC 内的一条直线。

所以要证 $AO \perp BC$ ，由三垂线定理的逆定理可知，只要证 $PA \perp BC$ 。

而让 $PA \perp BC$ ，不妨去证 $PA \perp$ 平面 PBC ，由直线和平面垂直的判定定理可知，只要证 $PA \perp PB$ ， $PA \perp PC$ 即可。

$PA \perp PB$ ， $PA \perp PC$ 是已知条件。

下面用综合法写出证明。

下面我们研究利用三垂线定理及其逆定理求点到直线的距离。

什么是点到直线的距离呢？

过这一点向直线引垂线跟直线相交，点到垂足之间的距离，就是这点到直线的距离。

例 2 道旁有一条河，彼岸有电塔 AB ，高 15m 。只有测角器和皮尺作测量工具，能否求出电塔顶与道路的距离？

分析：如图 1—64，要求点 A 到 CD 的距离，就是在空间的一个平面 ACD 内，作一条垂线 AC 垂直于 CD ，垂足为 C ，这是比较困难的问题。为了解决这个问题，我们如能找出垂足 C 在 CD 上的位置，问题就迎刃而解了。

如果我们在道边取一点 C ，使 BC 与道边所成的水平角等于 90° 。由三垂线定理可知 $AC \perp CD$ ， AC 就是电塔

顶与道路的距离。再使水平角 CDB 等于 45° 。测得 C 、 D 的距离，然后解直角三角形 ABC 即可求得 AC 的长。

解：如图 1—64，在道边取一点 C ，使 BC 与道边所成的水平角等于 90° 。再在道边取一点 D ，使水平角 CDB 等于 45° 。测得 C 、 D 的距离等于 20m 。

$\because BC$ 是 AC 的射影，且 $CD \perp BC$ ，

$\therefore CD \perp AC$ 。

因此斜线 AC 的长度就是电塔顶与道路的距离。

$\because \angle CDB = 45^\circ$ ， $CD \perp BC$ ， $CD = 20\text{m}$ ，

$\therefore BC = 20\text{m}$ 。

$\because AB = 15\text{m}$ ，由直角三角形 ABC ：

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25(\text{m}) \quad (\text{m})。$$

答：电塔顶与道路的距离是 25 米。

三、小结

由以上两个例题得到：

(1) 三垂线定理及其逆定理都是二直线相互垂直的判定定理。三垂线定理是由共面二直线的垂直推得空间二直线的垂直。其逆定理是由空间二直线的垂直推得共面二直线的垂直。

(2) 求平面外一点 P 到平面内一条直线 l 的距离，步骤分两步：第一步找出 P 点到直线 l 的垂足 Q 的位置，把求点到直线的距离转化为 P 、 Q 两点之间的距离；第二步通过解以 PQ 为一边的某个三角形求出点到直线的距离。

四、作业

1. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点， $PA \perp BC$ ， $PB \perp AC$ 。求证： $PC \perp AB$ 。

2. 平面 α 内有一个正六边形, 它的中心是 O , 边长是 2cm , $OH \perp \alpha$, $OH=4\text{cm}$ 。求点 H 到这个正六边形顶点和边的距离。

3. 直角三角形 ABC 所在平面 α 内, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=18\text{cm}$, $BC=32\text{cm}$, D 是 AB 的中点, $DE \perp$ 平面 ABC , $DE=12\text{cm}$ 。求点 E 到直角边 AC 和 BC 的距离。

中学数学教案设计精编 (二)

几何引言课教案设计

引言课作为几何课的引入, 要使学生初步了解几何研究的对象和问题, 还要利用几何与实践的密切联系, 通过学生熟悉的实例, 激发学生学习的欲望和兴趣, 渗透思想教育。因此, 引言课的教学内容相当丰富。考虑课时安排较紧, 不可能增加课时进行引言课的教学。如何围绕教学目的深入挖掘教材, 又不致于在要求上失控, 顺利完成引言课的教学任务, 我们结合义务教育初中数学教学大纲和人教版几何第一册尝试设计如下。

一、课前准备

1. 组织全体学生在课余时间观看电影《唐老鸭漫游数学奇境》, 让学生随着唐老鸭的漫游, 了解世界到处存在数学问题, 以及几何对人类社会的发展起着重要作用。教师可从中选择充满趣味的例子充实课堂教学。

2. 对学生的小学几何基础进行调查了解, 为自然引入新课作好衔接。

3. 准备以下教具：

(1) 小黑板一块。一面利用图形归纳小学阶段的几何知识，另一面画教科书第2页图4（彩色）。

(2) 正方形彩色蜡光纸、长方形白纸各一张，为剪五角星、裁正方形示范时使用。

(3) 模型塔一个、直尺一把，讲解测量塔高时使用。

(4) 两张一样大小的长方形硬纸和两根与长方形的长等长的铁丝。利用它们设计问题，为讲解问题作好铺垫。

(5) 正方体、长方体、圆柱、圆锥、球等几何模型，为讲解几何图形性质时使用。

二、课时及教学内容安排

按2课时安排。

第一课是几何研究的对象和问题。围绕以下两方面进行：

(1) 为什么要学习几何？

(2) 几何课学习的主要内容。

第二课是几何图形的性质等有关概念。

三、教学方法

考虑所授内容大部分要通过实例进行讲解，故选用讲授法。但要及时引导学生动脑思考，辅以动手操作。

四、教学过程

第一课

首先从复习小学几何知识开始，出示小黑板，列出小学学过的几何图形，提出以下问题，由学生思考回答。

(1) 说出黑板上图形的名称。

(2) 小学学过的哪些知识与这些图形有关？

(3) 实际生活中，你见过这些图形的应用吗？

简单讲评学生的回答后，引入新课。

通过对教科书中四个问题的讲解，解决为什么要学习几何的问题。为了引起学生的学习兴趣，使教学生动活泼，提出这四个问题要讲究方式和时机。对第一个问题，要利用《唐老鸭漫游数学奇境》中五角星演变时直观形象的特点提出问题，再转向旗帜上的五角星等实际问题，指导学生动手剪五角星。然后指出学生剪出的五角星为什么有的不准确，有的不漂亮，及时把学生的热情引向学好几何画图。

对于测塔高，结合银川北塔等高大建筑的测量提出问题，可以增加直观性，活跃气氛。虽然不介绍测量方法，但要让学生了解学习几何可以解决测量问题，计算塔高、山高，计算角度、面积、体积等等。还要简介“商高定理”，增强学生民族自豪感。

问题三的提出，基本与教科书相同，但要紧密联系日常生活，从把长方形木板截成方桌面的问题开始。

问题四较之前三个问题离学生生活较远，讲解会有一定的难度。为了防止学生因问题陌生而不感兴趣，要注意铺垫，先从学生熟悉的问题讲起。例如，把两张一样大小的长方形硬纸分别折成底面为正方形的长方体桶和圆柱形桶，问：如果给它们配上底，哪个容积大？学生通过计算不难解决。为了加深印象，可以再用等长的铁丝分别围成正方形和圆，让学生比较它们面积的大小。在此基础上提出问题四，并从这个问题的出发，引出实际生活中的有关材料最节省，利用率最高，效益最好等最佳方案的问题，紧扣学习几何的必要性和重要性。

接着讲解几何课里主要学习的内容。可以从前面的实例中归纳出来，并逐一加以说明。此处不再补充内容。

小结之后介绍我国古代几何研究的重要成就，增强学生民族自豪感，培养学生的爱国主义思想。

布置作业：

1. 已知一个正方形和一个圆的周长都是 8cm，分别求出它们的面积，并比较大小。

2. 做一做：

(1) 剪一个五角星。

(2) 照教科书第 3 页上给出的尺寸，用硬纸片做一个长方体的墨水瓶盒。

第二课

首先复习上一节课的内容。根据学生作业反馈的信息，设计问题让学生思考。重点围绕为什么要学习几何以及几何课上要学习什么内容。

接着让学生仔细观察魔方、粉笔盒、皮球和木制的圆柱、圆锥等，配合几何图形性质的讲解，充分发挥学生思维中形象的东西对认识几何图形性质的积极作用，切忌枯燥地进行灌输。

然后提出问题：生活中有哪些物体与展示的实物形体一致，等等，引导学生由形象向抽象过渡。以铁球为例，重点分析它的下列性质：铁制的、硬的、灰黑色、球状，摸上去很凉等等，启发学生找出它的几何性质。紧接着出示小黑板，让学生思考并找出几何图形的几何性质，借以举一反三，巩固认识。

对于体、面、线、点等概念的教学，可让学生拿着自己制做的长方体纸盒，根据制做时的体会，讲解几何图形的性质，再过渡到圆柱体、球体。对于曲线和曲面，可以用流星、扇子、矩形旋转等直观形象进行讲解，适当渗透运动的观点，帮助学生初步了解点、线、面、体

的概念以及它们之间的联系。注意不要拔高要求，适可而止。

平面图形和立体图形概念的建立，要在学生对平面图形认识的基础之上，指导学生阅读和思考教科书第6~7页上的图形，着重指出其中哪些图形是由简单图形组成，哪些图形是由某个图形通过运动而成，最后给出平面图形和立体图形的概念。

小结要强调几何图形的简单分类，点是组成几何图形最基本的元素，以及对几何图形的概念重点在理解而不在于叙述。

布置作业：

- (1) 举出两个生活中可以抽象成几何图形的实物。
- (2) 创造一个用简单图形组成的图案。
- (3) 人教版《初中数学课外习题集第一集（下）》

P61. 1. (1) (2)。

初中平面几何“绪论课”教案设计及评析

【教学目的】

1. 使学生初步了解《几何》发生、发展的历史，结合我国古代在几何学上的光辉成就，对学生进行爱国主义教育，激励学生的民族自尊心；2. 让学生在多种形式的实践活动中，初步感知几何研究的对象和方法；3. 激发学生学习几何的情趣，帮助他们树立学好几何的信心。

【教学过程】

1. 简要介绍几何学发生、发展的历史数学来自于生产、生活实践。几何学是最古老的一门学科，它是如何产生和发展的呢？

相传古埃及的尼罗河经常泛滥，每次洪水泛滥以后都要重新丈量土地。为了适应这种需要，测量土地的方法就逐步产生了。大家知道，埃及在古代建造了很多金字塔，施工时必须准确地计算石块的形状、大小。埃及劳动人民在生产实践中积累了大量的几何知识。后来埃及的几何知识传到希腊，希腊数学家使几何知识更加丰富。大约在公元前 4 世纪末，古希腊伟大的数学家欧几里得(公元前 330~275 年)对这些知识进行了系统整理，写成《几何原本》共十三卷。这样，几何便成为人类历史上第一门独立的、系统的学科。

我国古代在几何学的研究上也有着光辉的成就。在公元前 1 世纪写成的《周髀算经》这部书中，就有“勾三、股四、弦五”这个重要的几何结论。约公元前 4 世纪写成的《墨经》，载录了不少几何中定义，如圆、中点、等等。《九章算术》这本书中，则记载了面积、体积的计算公式。我国古代伟大的数学家祖冲之求得圆周率 π 的值在 3.1415926 与 3.1415927 之间，……。从以上这些事例中可以看到，我国曾经在几何学的发展史上作出过积极的贡献。中华民族一定能够对人类作出更大的贡献。

同学们将要学习的几何这门学科，它的内容是 2000 多年以前人类早已认识并系统总结的几何知识中的一部分。人类社会已经进入二十世纪九十年代，文化、科技的高水平是 2000 多年前不可同日而语的。作为优秀的中华民族的炎黄子孙，作为 20 世纪 90 年代的青少年学生，完全应该也一定能够学好几何这门学科，相信同学们决不会愧对古人、愧对中华民族！

2. 几何研究的对象

从几何的历史可以知道，人们对物体的形状、大小和位置关系的认识，与人们的生产、生活实践有着紧密的联系。

现在，我们举一个大家熟悉的例子。

有许多同学都骑自行车上学，请同学们想象一下，如果自行车的轮子不是圆的，而是鸡蛋形的，骑了那样的自行车将会发生什么情况呢？

（同学们思考几秒钟后，也许会出现笑声）

（注）不仅出笑声，还伴以颠簸的动作。

是啊！骑了那样的自行车，将会一颠一颠的，不平稳，骑不快也不舒服，甚至骑不动。所以，实际上没有哪家工厂会生产那种自行车，这就说明轮子的“形状”与生产以及日常生活实际有着紧密的联系。圆形的轮子能使自行车平稳地前进，这是“圆”这种形状特有的性质所决定的，几何就是要研究物体的形状及性质。

自行车的轮子有大有小，各人根据自己的需要选购28英寸或26英寸24英寸……的自行车。这说明物体的“大小”也与我们的生产及日常生活有着紧密的联系。

自行车的两个轮子之间的距离，也应该合理的设计装配。如果两个轮子装得太靠近，就不好骑；如果装得太远，手无法扶着车把，从而也无法骑自行车。这说明轮子与轮子之间的“位置关系”也与我们的生产及日常生活有着紧密的联系。

事实上，一辆自行车的各个零件都应设计制造成恰当的形状、大小；装配时又必须考虑各个部件之间合理的位置关系。从一辆自行车上，我们可以体会到：人们在实践中需要研究物体的形状、大小和位置关系。几何这门学科就是研究这些内容的。

(评) 从学生熟悉的生活实例出发, 介绍几何学研究内容, 则学科与学生之间的情感便畅通无阻。

在几何学中, 我们关心的是物体的形状、大小及物体之间的位置关系, 而不研究物体的颜色、质地等其它性质, 这时, 我们把物体称为几何体, 简称为体。比如, 粉笔盒、砖块、书本……, 当只考虑它们的形状、大小时都称为长方体; 足球、乒乓球、弹子……, 当只考虑它们的形状、大小时都称为球体, 饮料罐, 茶杯……, 当只考虑它们的形状, 大小时都称为圆柱体等等。

几何体都是由面围成的。面有平的、曲的。比如, 长方体由六个面围成, 这六个面都是平的; 圆柱体由两个平的面和一个曲的面围成; 球体由一个曲的面围成。又如, 在水里倒入油以后, 油与水之间有一个分界面。这个面有多厚呢? 是 1mm ? 还是 0.1mm 呢? 我们无法说出这个面的厚度。事实上, 几何学中所说的“面”是没有厚度的! 这与日常生活中说“这张桌子的桌面有 3cm 厚”是不同的。

(评) 这也是生活实例。几何中所说的、十分抽象的“面”, 在这里找到了它的直观背景。

面与面相交于线。比如, 长方体的六个面分别相交, 共有 12 条直的线 (称为“棱”); 圆柱体的侧面与每一个底面都相交于一条曲的线 (圆)。黑色与白色之间有一条分界线, 它是一条直的线, 但我们无法说出这条线有多宽。在几何里, 线是没有粗细 (宽度) 的。线与线相交于点。比如, 长方体的十二棱相交于 8 个点。在地图上, 上海、南京、常州三个城市都画成一个点, 常州位于沪宁铁路的中点 (注: 刊出时略去此图)。这就告诉我们: 在几何中, 点是不分大小的, 只表示它的位置。再如,

人类生活的地球是一个很大的球体，但在描述太阳系中行星绕太阳转的轨道图中，地球也只被画成了一个点，也就是说，地球被看成没有大小的“点”。

（注）教师进入教室后，第一件事是自我介绍：“我姓杨，来自江苏省常州市，同学们知道常州吗？”答“不知道。”问：“知道上海市吗？”答：“知道。”问：“知道南京市吗？”答：“知道。”

在上述对话过程中，教师在黑板上画了一个线段及线段上分别表示南京、常州、上海的两个点，常州居线段中点的位置。学生不仅认识到几何中的点是用来表示位置的，而且师生之间在进行情感交汇。过去一位中学生来信中曾问：“点是什么？好象在那本书上看到，点是没有大小的，即真正的点是不存在的，它只是一个概念。如果点是存在的，不是一个概念，……，而是一个不折不扣的点，一个有直径（宽度）的点，那么线段的中点如何理解？如果点只是一个概念，点根本就不存在，可视为 0，那么，无数个点构成线，线又构成面，面又构成体。天哪！整个世界不都成为 0 了吗？！”

由于杨老师把“点、线、面”的直观景象和抽象过程处理得好，听众不致于出现上述学生的那种疑虑的，是吗？

点、线、面都称为几何图形。

点、线、面组合在一起，如长方形、三角形、角、圆、……，也称为几何图形。

在初中几何这门学科里，我们只研究在同一个平面里的图形，即平面图形。不在同一个平面里的图形如长方体、圆柱体、棱锥等，将在以后再研究。

3. 几何研究的内容和方法

下面，请同学们动手实践，通过操作活动来体会几何里学习些什么？用什么方法学习？

(1) 折纸

例 1. 把一张长方形的纸裁成一个正方形。(先由学生实践，再由教师演示、讲解)

第一条折痕把长方形的一个直角分成相等的两部分，这条线的位置是特殊的。几何中将给这样的线取一个名称(角平分线)；第二条折痕实际上比较出了长方形的“长”比

“宽”长多少，这是几何中比较线段大小的方法。

(评) 几何入门教学难，“绪论”课更抽象。这里却没有这种感觉。

把阴影部分裁去，可以看成是在长方形的“长”上截取一条线段，使它等于长方形的“宽”，这就是几何中的线段作图；长方形的长与宽相等时，就成为正方形。这是几何中的重要结论——邻边相等的长方形是正方形。

(评) 让学生在折纸过程中接受几何结论，学科与学生间的情感、信息当然也就通畅。

从例 1 可以看到，几何中的许多知识，同学们早已熟悉，也并不难学。

例 2. 用一张长方形的纸剪一个等腰三角形。

(学生可能凭直观，随手剪一个“等腰三角形”)

教师演示：先把长方形的纸对折，再在对折以后的长方形上剪一个直角三角形，然后把剪下的直角三角形展开，就得到一个等腰三角形。

这说明：一个等腰三角形被中间的那条线分成两个同样的直角三角形。几何要专门研究等腰三角形。请同

学们记住这条折痕，它对学习等腰三角形的性质十分有用。

例 3. 用折纸的方法把一个正方形分成两个相同的部分，你能想出多少种方法？

(让学生动手实践，通常能找到四种折纸的方法)

问：除了这四种方法外，还有别的方法吗？

启示：观察图 4 中的四条折痕，有什么特点？

(这四条折痕都经过正方形中间的一个“·”点)

说明：这个“·”点的位置很特殊当学生想到了过“·”点任意折一条折痕，都可以把正方形分成相同的两部分后，教师演示如下：

(评) 数学家十分关心变化中的不变部分，教师抓住“正方形的中心一点”，一切便迎刃而解了。

问：从上面的实验可以知道，把一个正方形折成两个相同的部分，能有多少种方法呢？

(当学生回答“无数种”后，教师指出：过“·”点任意折一次，就有一种分法，因此有无数种方法。同学们能否体会得到“任意一个”与“无数个”之间的关系)

(评)“任意”与“无数”这种数学关系，对初中生来说是难理解的。这里却表现得十分自然，信息通畅无阻。

(2) 拼图、搭图

例 4 (1) 用游戏棒(或火柴棒、牙签等)搭一个等边三角形；

(2) 用游戏棒搭两个等边三角形，最少要几根游戏棒？

(说明：搭两个等边三角形不需要 $3 \times 2 = 6$ 根游戏棒。因为其中有一根游戏棒是两个等边三角形“合用”

的。在几何中，这样的线段叫做两个三角形的“公共边”。

(评) 几何学科为什么要研究三角形的“公共边”？在搭等边三角形的这种游戏中已经看到。

(3) 用游戏棒搭六个等边三角形，看谁用的游戏棒最少？

例 5. 把等腰三角形沿着中间的折痕剪开，成为两个相同的直角三角形。再把这两个直角三角形拼合在一起，你能拼出多少种不同形状的图形？能说出各种图形的名称吗？

(先由学生动手拼图，然后教师演示)

例 6. 用正方形或长方形的地砖，能够把房间的地面铺得完整，无缝隙。那么，用任意形状的四边形地砖，能否把地面拼得没有缝隙呢？

教师演示拼图的方法。然后引导学生观察，拼合以后的图形没有缝隙，说明四边形的四个角的大小之和恰好等于 360° 。这又是几何中要学习的一个重要结论。

(注) 日本的《覆盖几何》教材就是从这里开始的——一个不被人们熟悉的任意四边形性质（覆盖性质）：任意四边形可以覆盖域面。而正五边形却不能。

(3) 观察、判断与思考

例 8 (教师演示)

先出示两张一样大小的圆纸片，把它们贴在黑板上。

然后，把大小不等的两种圆纸片各若干张，分别贴在那两张圆片的周围，让学生观察。这时原来同样大小的那两张圆片，是否仍然“感觉”到一样大了呢？

为什么会感觉到那两个圆，一个变大了，另一个变小了呢？这是因为旁边的小圆‘衬托’出中间的圆变“大”了，而旁边的大圆使中间的圆变“小”了，这就告诉我

们,观察图形时,会受到背景的干扰!同学们学习几何,要学会排除这种干扰,正确地认识图形。

(4) 欣赏图案

请同学们看一些图案,你觉得这些图案美吗?

你能不能自己设计一些漂亮的图案呢?

你能从周围的事物(如建筑物、地板、围墙、公园里……)找到一些好看的图案吗?

4. 小结与作业

(1)问题:请同学们谈谈你对几何这门学科的认识。

(学生大体上会说到以下几点:几何是研究物体形状、大小及位置关系的学科;几何与生产、生活实际有着密切的联系;学习几何很有趣;学习几何要掌握折纸、把图形翻折、旋转等方法,要学会说道理,学好几何可以设计漂亮的图案,美化我们的生活等等。)

(2)作业:有兴趣的同学,课后自己画一个漂亮的图案,以后我们选出好的作业展览,供大家欣赏。

平面几何入门的概念教案设计

几何概念是学习几何的基础,是进行推理论证的依据。对这些概念掌握得如果不深刻,记忆得不牢固,解题时就无从下手,因此,在平几入门教学中,过好这一关。

针对第一章《基本概念》、第二章《相交线、平行线》概念多而集中、相互联系少的特点(仅第一章用黑体字标出的概念就有三十多个),按照这些概念各自的特点以及对后继教学影响的大小,我采取了“有主有次,突出重点”的原则,以减轻学生的负担,消除平几入门难的

畏惧心理。对于象角、垂线、平行、线段的中点，角平分线等重要概念，一定要让学生达到四“会”，即会表述它的定义，会画图 and 识图，会翻译，会运用。如何使学生达到上述要求，教学中我采取了下列措施。

1. 利用直观，丰富感知

几何概念是客观事物的空间形式在人们头脑中的反映，任何一个抽象的概念都有具体的事物作为它的“背景”。在概念教学中的开始，尽量利用学生熟悉的、看得见的实际物体或模型，引导学生通过分析、比较，抽象出几何图形。如讲“直线”时可让学生联想拔河时的绳子；在讲“平行”时，让学生联想电线杆上的电线；在讲“角”时，先让学生观察钟表上的时针和分针以及两角规，再抽象出图。

2. 结合图形，抓住重点

在抽象出几何图形后，先让学生通过观察图形，着重分析这个图形的本质特征，得出概念，并用文字定义把概念表达出来，这样学生对几何图形的认识有实际模型作基础，对概念的理解有几何图形为依据。这样就能避免学生只会形式主义地死记硬背定义的词句。在剖析定义时，要引导学生分层次、抓要点。如“角平分线”的定义：从一个角的顶点引出的一条射线，把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线。理解这个定义时，要抓住三个重点：

①角平分线是一条射线（它不是直线或线段）；②这条射线从角的顶点出发（即以角的顶点为端点）；③把这个角分成两个相等的角。①是回答这个概念“是什么”图形，②、③是回答它是“怎样的”图形。揭示概念的定义后，及时地把概念的文字定义翻译成符号定义。角

平分线就可表示为 $\angle 1 =$

$$\angle 2 \text{ 或 } \angle 1 = \frac{1}{2} \angle AOB \text{ 或 } \angle AOB = 2 \angle 2$$

3. 举反例，抓变式

初二学生刚学习几何，认识事物时很肤浅，因而在理解概念时，常常受日常生活经验的干扰，无意中扩大了概念的内涵，而缩小了概念的外延。在学习“平行”时，也只限于“水平”平行，为了突出概念的本质属性，在教学中，我注意采取了举反例，抓变式，使学生认识到“线段垂直平分线”定义中的“过中点”又“垂直”是缺一不可的。又如，在讲“对顶角”时，可出示图，让学生判断它们是不是对顶角？为什么？

举反例的方式很多，通常通过“去”(去要点)、“换”(换条件)、“拆”(拆开看)等办法，这样可加深概念的理解。另外，要让学生透彻理解概念的本质属性时、教学中还应充分运用变式，在平时板书经常变换几何概念的图形。

4. 找联系，抓对比

对于容易混淆的概念，在教学中经常引导学生进行分析、比较找出它们的区别和联系。如“直线”和“平角”，“平角”是从一个顶点出发的两条射线，“直线”没有顶点，也不是两条射线，若在直线上取一点，则这条直线可看成一个平角，又如，“直角”和 90° ”从表面上看似乎差不多，但前者是指一种特殊的角，指的是“形”，而后者是指角度的量数，指的是“数”。

5. 复习归纳，分类整理

由于前两章概念多，在教学中，我注意从知识的结构出发，在每学完一章节时，帮助学生整理。

平几入门指导编题教案设计

在平面几何的教学中，经常适量地指导学生自编一些题目，可以有效地激发学生的学习兴趣，使学生对有关概念、图形的感知精确化。

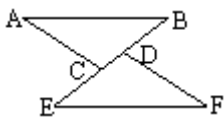
例如，在讲完三角形全等的第四种判定方法之后，我出了这样一道题：

如图：BC 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 的公共边，请充分利用此条件，按下列要求分别编制：

- ①用边角边公理证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ 的题目。
- ②用角边角公理证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ 的题目。
- ③用角角边定理证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ 的题目。
- ④用边边边定理证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ 的题目。

“又要自己编题，真有意思！”虽然是后半课了，但同学们仍为之精神一振，神情专注地思考起来。我又引导大家比较自编②③两小题时加入的已知条件，使一些原来对角边角公理与角角边定理的应用容易混淆的同学也豁然开朗了。

在教学中，我还常常要求同学们将简单的题目改成较复杂一些的综合题目，使他们对所学的知识有更深入的认识。例如，右下的图形，我是这样指导编题的。



问：如图，已知 $\angle B = \angle E$ ， $\angle ACB = \angle FDE$ ， $BC = ED$ 。

可用什么方法判定 $\triangle ACB \cong \triangle FDE$ ？

答：角边角公理。

问：其实，同学们在练习中所遇到的题目并不会都这么简单，证明所需要的条件往往不直截了当地给出来。现在就请同学们重编一道题，将原来题目中的三个已知条件都改成间接条件，应当如何写？

这时，课堂气氛非常热烈，同学们都争先恐后地举手发言，最后归纳为：

“已知： $AB \parallel EF$ ， $AC \parallel DF$ ， $BD=EC$ 。”

教师再问：在很多问题中，我们证明三角形全等并不是目的，而只是作为证明线段或角相等的一个中间步骤。请同学们将上面这道题的结论再重新变一下，能否改成求证什么线段或角相等？

经过讨论，大家明确了若仅仅证明第三对角相等，应用三角形内角和定理比较简便，而不一定要通过三角形全等来证明，因而一致得出：上题可改为：求证 $AB=FE$ 或 $AC=FD$ 。

垂线教案设计

【教学目标】

1. 使学生掌握垂线的定义，会用几何语言，表示垂直。
2. 使学生学会过平面上任一点画已知直线的垂线，从而理解垂线的唯一性。
3. 初步渗透由已知——未知的推理论证思想。

【教学重点】垂线的定义、表示法和垂线的唯一性。

【教学难点】过一点画已知直线垂线、垂线的唯一性。

【教学过程】

一、演示相交直线教具。

AB 和 CD 相交于 O，形成了四个角（转动 CD）。

问：前后两种相交不同，用什么量来刻画？相交直线的位置不同，与相交直线所形成的四个角密切相关。

（演示相交线教具，转动 CD 到任一位置用量角器量 $\angle BOC$ 的大小），设 $\angle BOC = 25^\circ$ 。问：AB、CD 相交的四个角中，有一个角是 25° ，是不是就这一种位置的摆法？还有什么情况。

问：AB 不动。转动 CD，四个角中有一个成 90° 时，有几种摆法？仅有一种，这是两直线相交中的特殊情形，下面对这种特殊情形的位置关系进行研究。

二、定义：

当两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，就说这两条直线互相垂直，其中的一条直线叫做另一条直线的垂线，它们的交点叫做垂足。

在生产和日常生活中，两直线互相垂直的情形是很常见的，请同学们举几个两直线互相垂直的实例。

三、大家还记得对两条直线互相垂直，小学是怎样说的？

两直线相交所构成的四个角都是直角，说这两条直线互相垂直。问：今天所学的定义是，四个角中有一个直角，就说两条直线互相垂直，它们哪一个正确？为什么？

我们看一下，两条直线相交所构成的四个角中，如果有一个是直角，那么其余三个角是什么角？由对顶角和邻补角的关系可知，其余三个都是直角，因此，今天学习的垂直的定义与小学学过的定义不矛盾，这个定义更简洁。

垂线的几何语言表示

图形	记作	读作
	$AB \perp CD$ (或 $CD \perp AB$) 垂足为 O	AB 垂直于 CD , 垂足为 O

根据定义, 可写下推理过程: (对照定义和图形写)

$\because \angle AOC = 90^\circ$ (已知), (或 $\angle COB = 90^\circ$, $\angle BOD = 90^\circ$, $\angle AOD = 90^\circ$)

$\therefore AB \perp CD$ (垂直的定义)。

反过来,

$\because AB \perp CD$ (已知),

$\therefore \angle AOC = 90^\circ$ (垂直的定义)。(或 $\angle COB = \angle BOD = \angle AOD = 90^\circ$)

这样的推理在我们今后的学习中经常要用到, 这两种推理要根据论证的需要而选用。如果需要论证两直线垂直, 则用第一种推理, 如果要论证某角的度数为 90° , 则用第 2 种推理。

注意: 根据定义, 两直线互相垂直, 即: 如果 $AB \perp CD$, 那么 $CD \perp AB$ 。

四、1. 画法

(1) 问: 请同学们回忆, 画一个角等于已知角 (譬如 12°), 怎么画?

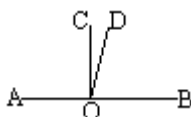
(2) 问: 在直线上取一点, 以这点为顶点, 以一侧射线为边画一个角等于 30° , 怎样画? (可能答用量角器, 也可能用三角板)

(3) 在直线上取一点, 以这点为顶点, 以一侧射线为边画一个角等于 90° , 请同学们自己动手画。(注意总结用量角器和三角板两种工具画, 分别总结画法。所画 90° 角的一边所在的直线, 由定义知, 即为已知直线

的垂线。)

(4)过直线外一点如何画呢?请同学们过直线外一点P画l的垂线l'。(总结画图的步骤:靠线——找点——画垂线)

2. 垂线的唯一性



通过刚才的画图,可以知道过平面上任一点,画已知直线的垂线一定能画出,是否只能画一条呢?假如(图7),过AB上O点画AB的垂线有OC和OD,那么你们能得出什么结论?(请大家根据“§1.5中角的比较”中的办法看应得出什么结论。)

由此可见,垂线具有如下特性:

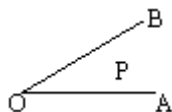
性质:过一点有且只有一条直线与已知直线垂直。

五、小结:这节课我们学习了垂线的定义、画法、表示法,并研究了垂线的唯一性。

练习:

1. AB与CD相交于O,所成的四个角相等,这两条直线有什么关系?

填空:如图,



$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \angle AOD = \angle BOD$ (已知),

$\therefore \angle AOC + \angle AOC + \angle BOC = \underline{\hspace{2cm}}$ (邻补角的定义),

$\therefore 2\angle AOC = \underline{\hspace{2cm}}$ (等量代替)。

$\therefore \angle AOC = \underline{\hspace{2cm}}$ ()。

$\therefore AB \perp CD$ ()。

2. 过线段 AB 的中点 O , 画直线 $MN \perp AB$ 。

3. 已知 $\angle AOB$ 和点 P (如图), 过 P 画 $PC \perp OA$, C 为垂足, 画 $PD \perp OB$, D 为垂足。

4. 如图, 自 A 点向 BC 边画垂线。



作业: P65. 5、6, P67. 2。

角平分线目标教案设计

制定好教学目标是实施目标教学的首要前提。它的设列主要应体现学生的认知之序与教材的逻辑之序。具体地说, 制定目标时一般着眼于以下三方面思考, 第一, 目标的制定必须依据学生的认知规律和已有的学习水平, 以保证学生的主体地位和发扬其主动精神; 第二, 目标的制定必须遵循数学知识的内在的发展规律。我们不仅要看到数学知识点具有存在于整个数学结构之中“相对位置”关系, 而且还要看到它们之间存在的逻辑与方法上的联系。另外, 目标的制定必须体现全面育人, 培养素质的思想。数学教师正是源于对数学知识体系的把握和学生认识规律、已有实习现实的洞悉, 充分发挥主观能动性, 制定出内容结构化, 目的具体化, 要求行为化的教学目标而发挥其主导作用的。关于角的平分线, 义务教育初中数学大纲的要求是“使学生掌握角平分线的性质定理及其逆定理, 能够利用它们进行论证”, 教学中如何具体地达到这一要求呢?

纵观几何教材, 对角平分线的认识是一个不断发展、

完善的过程，先后历经三个阶段。其一，几何定义：从一个角的顶点引出一条射线，把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线；其二，集合意义：角的平分线可以看作到角两边距离相等的所有点的集合；其三，轨迹意义：角的平分线是到角两边距离相等的点的轨迹。后两阶段每个都比上一个更接近概念的实质，认识观点上都有提高。因此，在进行第二阶段集合意义教学时，就可这样把握：一方面，从角平分线的几何定义到对其上点的特征的揭示，是一个由整体到局部，由形到数，由表及里的过程；另一方面，这一集合意义又有待于从静止、孤立的认识到运动、联系认识的上升。

学生在学习这个内容前已具备什么知识呢？必须具备什么知识呢？角的平分线集合意义揭示的是角平分线上点的特征，从而熟记角平分线的几何定义，明确点到直线距离的意义是学习这节课应具有的条件。另外，学生在这一阶段，证明两个三角形全等的问题已经很熟悉，这既为探索角平分线集合意义准备了条件，也造成了学生运用本节课知识的前摄性抑制：在遇到有关角平分线问题时，不习惯直接应用定理，仍然去证三角形全等。从而，这节课一方面要运用“证三角形全等”的方法去完成角平分线集合意义的探讨，另一方面初步实现由证全等到直接运用定理的转化。

鉴于以上这些认识，我们把这节课课题定为“角平分线的进一步认识”并制定相应的教学目标如下。

一、知识、能力目标

1. 知识

识记：

熟记定理 1、定理 2 及角平分线的集合意义。

理解：

(1) 知道定理 1 与定理 2 的联系与区别；

(2) 能结合图形说明角平分线集合意义所包含的两方面的含义。

应用：能直接运用定理 1、2 进行有关证两个角相等或两条线段相等的推理。

2. 能力：

(1) 通过定理 1、2 的证明进一步培养学生将文字语言转化为符号、图形语言的能力。

(2) 通过定理 1、2 的运用，培养学生对问题概括和简化的能力。

二、情感要求

1. 在运用定理 1、2 解题的过程中，认识定理的作用和价值。

2. 从对角平分线上点“纯粹性”与“完备性”两方面的考察中，产生几何图形美的情绪体验。

三、思想教育要点

通过角平分线的进一步认识，渗透运用不同的观点，从不同的侧面认识事物的辩证思维方法。

四、重点、难点

重点：对角平分线集合意义的认识。

难点：

1. 对角平分线集合意义的理解。

2. 准确地运用定理 1、2 解题。

角的平分线讲授教案设计

九年义务教育初中《几何》(人教版)第三章“三角

形”，在内容结构上作了一些调整，其中之一就是把“角的平分线”与“线段的垂直平分线”分开，并把“角的平分线”的授课时间提前。

这种调整的好处在于：

1. 使整个教材对逻辑思维能力的培养更具有阶段性和系统性；

2. 使整个教材对几何图形的研究方法更加合理，更具有循序渐进性。

但是这种调整也给教学带来一定的困难，尤其是第一课时，由于学生在初学阶段，对本节定理 1、定理 2 的文字叙述不易理解，同时，由于对文字命题的证明提前了，教师感到教学内容偏多，完成教学计划有困难。对这节课的设计如下：

【教学目的】使学生掌握角的平分线的性质定理及其逆定理。

【教学方法】讲授法。

【教学过程】

(一) 复习提问

口述“角的平分线”的定义及其几何语言表示。

角平分线的定义。(略)

定义的几何语言表示：

$\because OC$ 平分 $\angle AOB$,

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB.$$

$$\text{又, } \because \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$\therefore OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线。

(二) 讲授新课

1. 按下列要求完成练习

(1) 画出 $\angle AOB$ 的平分线 OC 。

(2) 在 OC 上任取一点 P 。

(3) 过 P 作 $PD \perp OA$ ，垂足为 D ；过 P 作 $PE \perp OB$ ，垂足为 E 。

(4) 度量 PD 、 PE ，并比较 PD 、 PE 的大小。

(5) 试叙述练习的结论。

以上练习的前三步，可由师生共同完成，学生在练习本上做，教师在黑板上做。

练习的第五步，应注意纠正学生口述中的错误，同时指出：“ $PD \perp OA$ ，垂足为 D 。”即 PD 是点 P 到 $\angle AOB$ 的边 OA 的距离。同理， PE 是点 P 到 $\angle AOB$ 的边 OB 的距离。并引导学生能正确口述定理 1。

2. 引入定理回

定理 1：在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等。

根据图形，分析定理 1 的题设、结论，并写出已知、求证和证明。（略）

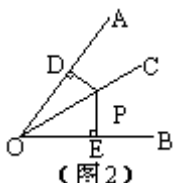
（对于文字命题的证明方法的步骤，不宜过分强调，避免干扰教学目的的实现。这些内容教材将在 3.12“等腰三角形的性质”这小节中出现。本节课只给学生感性认识起渗透作用。）

3. 巩固定理 1

(1) 口述定理 1。

(2) 写出定理 1 的几何语言表达：

如图，



$\therefore P$ 在 $\angle AOB$ 的平分线上。

又 $PD \perp OA$, $PE \perp OB$, 垂足分别为 D 、 E 。

$\therefore PD = PE$ 。

4. 引入定理 2

(1) 交换定理 1 的题设和结论得到一个新命题, 由学生口述新命题, 并注意纠正学生口述中的错误, 使口述完整、准确。

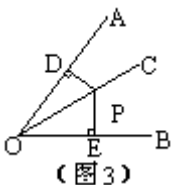
(2) 命题: 到一个角的两边距离相等的点, 在这个角的平分线上。

(3) 根据命题的题意画出图形, 分析命题的题设和结论, 写出已知、求证和证明。(略)

证明完成后可指出, 一个命题经过证明是正确的就是定理, 这个定理是“角的平分线”一节的定理 2。

(4) 写出定理 2 的几何语言表示:

如图,



$\therefore PD \perp OA$, $PE \perp OB$, 垂足分别为 D 、 E 。

又 $PD = PE$ 。

$\therefore OP$ 平分 $\angle AOB$ 。

(三) 练习

讨论完成 P33 练习

(四) 作业

P567, P553

补充说明：

第二课时开始时可首先设计以下提问：

1. 口述角的平分线的定义及其几何语言表示。
2. 口述角的平分线的定理 1 及其几何语言表示。
3. 口述角的平分线的定理 2 及其几何语言表示。
4. OC 平分 $\angle AOB$, P 在 OC 上, D 、 E 分别在角的两边上, $PD=PE$ 成立吗? 为什么?
5. P 在 $\angle AOB$ 的内部, D 、 E 分别在角的两边上, 且 $PD=PE$, OP 平分 $\angle AOB$ 吗? 为什么?

完成上述复习提问后, 再引入: 角的平分线是到角的两边距离相等的所有点的集合。

角平分线 (二) 教案设计及评注

【课题】角平分线 (二)

【目的与要求】

1. 复习巩固角平分线性质定理和判定定理;
2. 掌握这两个定理的应用。

【重点】两个定理的应用。

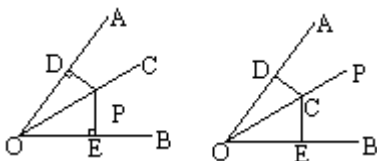
【难点】课本 P143 例题的分析与证明。

【教具】小黑板、三角板、圆规、彩色粉笔等。

【教学过程】

(一) 复习 (出示小黑板上的题目)

1. 根据角平分线的性质定理和判定定理填空：



(1) 如图 1, $\because OP$ 平分 $\angle AOB$, 且 C 是 OP 上一点, CD

_____, CE _____. (已知)

$\therefore CD=CE$ (_____)

(2) 如图 2, $\because P$ 是 $\angle AOB$ 内一点, 且 $PD \perp OA$ 于 D , $PE \perp OB$ 于 E , _____ (已知), 作射线 OP .

$\therefore OP$ 是 $\angle AOB$ 的平分线。 (_____)

[评注: 能针对教学内容恰当地选用简单练习题, 既概括上节主要内容, 又检查学生对已学知识的理解 and 应用情况, 改变了在复习中往往只提几个枯燥无味的问题的做法, 只有多动脑筋的教者才能实现这一安排。]

2. 判断下列推理, 有无错误? 若有, 试指出错误的原因。

(1) $\because E, F$ 分别在 OA, OB 上, 且 $ME=MF$ (已知)

$\therefore OM$ 为 $\angle AOB$ 的平分线, (到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上)。

教师评讲: ME, MF 不是表示 OC 上的点 M 到 $\angle AOB$ 的两边的距离, 虽然相等, 但不能肯定 $SEOC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线。

(2) $\because OM$ 平分 $\angle AOB$, 且 $ME \perp OM$, $MF \perp CM$, E, F 分别在 OA, OB 上 (已知),

$\therefore ME=MF$ (角平分线上一点到这个角的两边的距离相等)。

教师评讲: ME, MF 不是表示 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上的点 M 到角的两边 OA, OB 的距离, 而是分别表示角两边上

的点 E、F 到 OM 的距离，所以虽然它相等，但不是由角平分线的性质定理推得，而是通过 $\triangle MOE \cong \triangle MOF$ 推得。

〔评注：反例举得好，适时选择反例，并让学生口头说理，对深化概念、巩固知识、掌握技能起着重要作用，同时对活跃学生思维，培养学生全面考虑问题，激发学生学习兴趣，提高语言表达能力都有好处。〕

3. 板演：

已知直线 MN 与 OA、OB 都不平行，在 MN 上求作一点 R，使 R 到射线 OA 和 OB 的距离都相等。

(二) 授新

1. 在 (一) 3 的基础上提问：

(1) 在 $\angle AOB$ 的平分线 OR 上能否找到一点，使其到 OM、MN 的距离相等？能，如何找？

(2) 设上面找到的点为 P，问 P 到 ON、MN 的距离是否相等？为什么？

(3) 考虑一下，点 P 在 $\triangle OMN$ 的哪些角的平分线上？由此你能得出怎样的猜想呢？

2. 讲解课本 P143 例：

(1) 让学生确定出命题的“题设、结论”，写出“已知、求证”；

(2) 让学生讨论本题的证明思路；

(3) 指导学生写出证明过程；

(4) 小结本例：任意三角形三条内角平分线交于一点，这点在三角形内部，且到三边的距离相等。

〔评注：在中学数学教学中，能注意知识的发生、发展、发现的过程设计，是目前数学教学思想更新的一个重要方面。〕

另外，在进一步完善角平分线这一知识结构的过程

设计中,安排了学生动口、动手、动脑、议论、猜想、论证等一系列活动,显然这样的做法对训练技能、巩固知识、锻炼学生的思维品质、调动学生的学习兴趣等都起重要作用,同时突出了教师为主导、学生为主体、训练为主线的教学思想。]

(三) 巩固练习 (出示小黑板)

(1) 若 $PD \perp OA$ 于 D , $PE \perp OB$ 于 E , 且 $PD=PE$, $PO=PF$, 那么 P 点 ():

- (A) 为 $\angle AOB$ 的平分线上任一点;
- (B) 线段 OF 的垂直平分线上任一点;
- (C) 只能是 $\angle AOB$ 的平分线与线段 OF 的垂直平分线的交点。

(2) 如图 7, 求作一点 P , 使 $PC=PD$, 且使点 P 到 $\angle AOB$ 的两边距离相等。

(3) 课本 P143 练习 2。

(四) 小结

1. 正确使用两个定理;
2. 三角形三条角平分线交于一点, 这点在形内, 且到三边的距离相等。

(五) 布置作业

- (1) 课堂作业: P149 第 8 题。
- (2) 课外思考题: 在三角形外是否有点到三边或其延长线的距离相等? 有, 有几个? 如何找?

[评注: 在教学中, 我们应当结合课本, 注意编选不同层次、不同方向、不同角度、且深度适当的习题, 才能有效地巩固教学效果。

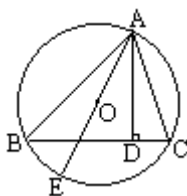
综合评价:

本课的教学任务是通过平面几何第一册 P143 例题

的教学，巩固应用角平分线的性质、判定定理，并要求学生了解例题的结论，且能在实际中应用这一结论，关于本例中三线共点的证明方法是比较难的，不要求学生掌握这一证明方法。本教案在处理这一系列问题时，能恰到好处，要求适当。特别应当指出的是，这一例题的证明过程，对初中二年级的学生来说是比较困难的，而教案在突破这一难点时，匠心独具，利用作图、提问等练习方式，把学生思路一步步引入“圈套”，从而使学生自然而然地认识到探求命题结论的过程。同时教案还能始终围绕两个定理，遵循知识的内部联系设计教学过程，总之，本教案的设计在紧扣课本、吃透大纲、突出“三为主”、更新中学数学教学思想方面有一定的特色。〕

圆周角教案设计

例题如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的高，AE 是 $\triangle ABC$ 的外接圆直径，



求证： $AB \cdot AC = AE \cdot AD$ （《几何》第二册 P85）。

这是一道用“三点法找相似三角形”来证比例式（等积式）的典型题目。当教师讲完了这道题目后，提出了这样的问题：能否将这道题目经过适当的变化，改成其它“形异实同”的题目呢？

经过数分钟的学生自由讨论，加上老师的点拨启发，得出了这样一组变题：

变题 1：如图 1，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高， MN 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径。

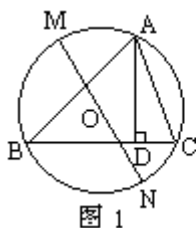


图 1

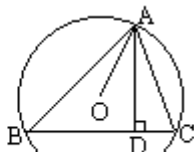


图 2

求证： $AB \cdot AC = AD \cdot MN$ 。

变题 2：如图 2，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高， O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心。

求证： $AB \cdot AC = 2AO \cdot AD$ 。

变题 3：已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高， R 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径。

求证： $AB \cdot AC = 2R \cdot AD$

变题 4：如图 3，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高， OE 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径。

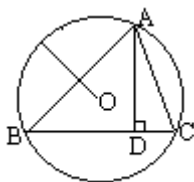


图 3

求证： $AB \cdot AC = 2EO \cdot AD$ 。

变题 5：如图 4，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高， E 、 F 是 $\triangle ABC$ 外接圆上两点，且 $\widehat{EF}$ 的度数是 60° 。

求证： $AB \cdot AC = 2EF \cdot AD$ 。

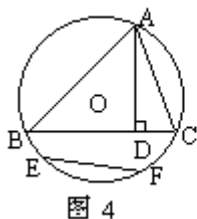


图 4

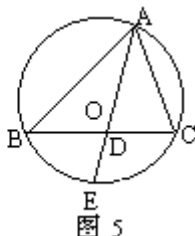


图 5

变题 6：如图 5，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，交其外接圆于 E ，

求证： $AB \cdot AC = AE \cdot AD$ 。

变题 7：已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，且 $AB=4$ ， $AC=3$ ， $AD=2$ 。

求 $\triangle ABC$ 外接圆的直径。

变题 8：已知 $\triangle ABC$ 中， AD 是角平分线，并延长交其外接圆于 E ，且 $AB=4$ ， $AC=3$ ， $AD=2$ ，

求弦 AE 的长。

教师对这些变题的书写、讲解详略得当，多数同学只要稍加启发即可获得，通过对这道例题的变化，不但加深了对题目本身的理解，而且培养了一题多变的能力，使学生初步掌握编题的技能和技巧。

离下课只有 5 分钟了，学生的思维逐渐趋于平静，教师小结了这节课的内容后，又提出了这样一个课外作业。

这道例题不但可以变出这么多题目，而且它还是一个“定理型”题目，请同学们利用课外时间去收集、研究、整理。

平行线概念五层次教案设计

一、教具演示，导入新课

(教具如右图,上下两块木板用一颗螺丝钉连接,下板上画一条直线,上板用钉子钉一根直铁丝,可以旋转。)

把两块木板转至同一平面,然后旋转上板铁丝分别变成下面的图形,要求学生判断各图形中两条直线的关系。

学生回答后,教师指出(3)中两条线段表面上看不相交,但把它们延长是可以相交的(教师可用教棒示意。)

师:请同学们思考,教具上在同一平面内的两条线的位置变化,会不会出现无论怎样延长也不相交的情况呢?(导入新课,揭示课题)

二、列举实例,引出概念

让学生讨论上面的问题,如能回答,指名上讲台,把教具上板的铁丝转至与下面一条线平行的位置,否则教师作演示。

师:在同一平面内的两条线段,如:练习本上的横线,铁路上笔直的两根铁轨、双杠的两根直杠等,无论怎样延长也不相交,像这样的在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线。生活中常见的平行线的例子很多,请大家举例。

三、反倒引思,突出本质

教师将教具中的上板转动一定的角度,使两块木板不在同一平面内,提问:两块木板上的两条线段无论怎样延长也不会相交,这两条直线是不是平行线。让学生思考、争论,使学生明确这两条直线虽然永不相交,但它们不在同一平面内,所以不是平行线。

在此基础上,要求学生举教室内的实例,说明哪两条直线永不相交,又不平行。从反面突出了平行线的本

质属性，加深学生对平行线概念的认识。

四、归纳小结，对比异同

师生讨论小结两条直线是平行线要具备的两个条件：

(1) 在同一平面内；

(2) 永不相交。教师指出：直线无限长，无法全部表示出来，但只要这两条线段无限延长也不相交，我们就称它们是平行线。

师生共同讨论平行线和垂线的异同点：

(1) 平行线和垂线都是在同一平面内的两条直线；

(2) 垂线是两条直线相交的特殊情况，它们只有一个公共点；平行线没有公共点。因此，平行线还可以说成在同一平面内，没有公共点的两条直线。

五、加强练习，巩固深化

设计如下习题，组织学生课堂练习。

1. 判断题。

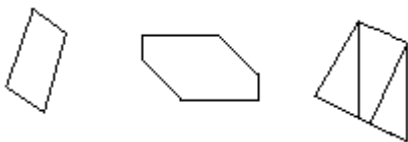
(1) 在同一平面内不相交的两条线是平行线。

(2) 两条平行线一定没有公共点。

(3) 没有公共点的两条直线叫平行线。

(4) 在同一平面内的两条线段，如果不相交，那么它们一定是平行线。

2. 下面图形中哪两条线段是平行线？各有几组平行线？



3. 拿出课前准备的火柴盒，分别指出两组平行线、垂线以及既不相交又不平行的直线，先同桌同学相互检

查,后教师指名演示,最后教师出示思考题:如上图,火柴盒上的 AB 与 CD 两条线段是平行线吗?

平行线等分线段定理教案设计

平行线等分线段定理(以下简称定理 P),不但是研究三角形、梯形中位线以及几等分任意线段作图的基础,而且是平面几何中的一个重要定理,因此教师必须把这个定理教好教活,让学生牢固掌握和熟练应用,笔者在教学这个定理时,采取从定理的引入、定理的证明、定理的应用三个方面进行讲授,收到了良好的效果。

一、定理的引入

在引入定理时,教师可从学生原有的知识水平出发,提出目的明确,合乎学生的认识规律的问题,以后迪思维,激发学生的求知欲望,调动学生探究问题的学习热情,从而引导学生自我获取知识。为了达到这一目的,在引入定理 P 时,笔者设计了一组问题,先让学生去思索、去猜想、去验证、去发现结论。

1. 若 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $l_4 \parallel l_5$, $A_1A_2=A_2A_3$, 则 B_1B_2 与 B_2B_3 相等吗?为什么?

2. $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, A_1A_2 则 B_1B_2 。与 B_2B_3 还会相等吗?用刻度尺去量线段 B_1B_2 、 B_2B_3 的长,验证你猜想的结论。

3. 如何用文字语言表述问题 2。

4. 直线 l_A 、 l_B 被三条以上的平行线所截,若 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4 \cdots$, $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=\cdots$ 成立,则 $B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4\cdots$ 成立吗?若成立,如何用文字语言表述这个问题。

而后,针对这四个问题,师生共同分析、研究、概

括, 教师在学生充分回答的基础上加以纠正或适当的补充, 从而得出定理 P, 板书定理 P。把多余的线擦去, 保留梯形 $A_1A_3B_3B_1$, 便成了图 4, 即在梯形 $A_1A_3B_3B_1$ 中, $A_1A_2=A_2A_3$, $A_2B_2 \parallel A_1B_1$, 则 $B_1B_2=B_2B_3$, 这就是课本第 193 页上的推论 1, 板书推论 1。在图 2 中, l_4 不动, l_5 向左移动, 使 l_5 与 l_4 交于点 A_1 , 把多余的线擦去, 保留三角形 $A_1A_3B_3$, 便成了一个图, 即在 $\triangle A_1A_3B_3$ 中, $A_1A_2=A_2A_3$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, 则 $A_1B_2=B_2B_3$, 这就是课本第 193 页上的推论 2, 板书推论 2。

二、定理的证明

定理的证明是几何教学中的一个难点, 学生较难掌握。培养学生的定理推证能力, 关键是使学生学会分析所证定理的证明的思路及方法, 掌握添辅助线的分析法。对于定理 P, 我们仅对三条平行线的情形进行证明。学生对教材中定理 P 的证明, 普遍反映, 对其所作的辅助线只知其然, 不知其所以然。为揭示添辅助线的分析方法, 在证明定理 P 时, 笔者设计了如下分析过程:

1. 求证是要证明两条线段相等, 我们学过哪些证明两条线段相等的方法? 根据已知条件和图形特点, 选择哪种证明方法? (利用全等三角形来证明)

2. 现在要证明相等的两条线段不是分别处在两个现成的全等三角形中, 采取什么办法能使要证相等的两条线段分别处在两个全等三角形中。(通过作辅助线)

3. 过哪些点作辅助线能使要证相等的两条线段分别处在两个三角形中。(①分别过点 B_1 、 B_2 ; ②分别过点 B_2 、 B_3 ; ③分别过点 B_1 、 B_3 ; ④过点 B_2 。)

4. 要证明新构成的两个三角形全等, 还需角相等和线段相等, 过这些点作什么辅助线有利于造成线段、角

相等。(作平行线)

教师先让学生对上述提出的问题逐动脑、动手、动口,然后有针对性地给予启发、补充,从而归结出下列四种添辅助线的方法:

1. 过 B_1 、 B_3 分别作 L_4 的平行线 B_1C 、 B_3E , 分别交 L_2 于点 C 、 E 。

2. 过 B_2 、 B_3 分别作 L_4 的平行线 B_2G 、 B_3E , 分别交 L_1 、 L_2 于点 G 、 E 。

3. 过 B_1 、 B_2 分别作 L_4 的平分线 B_1C 、 B_2D , 分别交 L_2 、 L_3 于点 C 、 D 。

4. 过 B_2 作 L_4 的平行线 DG , 分别交 L_3 于点 G 、 D 。

三、定理的应用

学习几何定理的目的在于应用,定理 P 的应用不仅是用它去解决几何中的习题,还有它的证明方法的应用。因为定理的证明方法具有代表性、典型性,运用它的证明方法可解决较多问题。因此教师不但要求学生掌握教材 P193 例题和 P194 第 3 题、P198 第 2 题、第 3 题的证明,而且要求学生掌握定理 P 的证明方法的应用。定理 P 的证明方法——添辅助分析法是几何证题中添辅助线的常用方法,结合证明定理 P 的分析过程,帮助学生总结出辅助线的分析步骤如下:

1. 看要证明的结论属于什么类型的问题。

2. 回顾证明这类问题学过哪些定理或方法。

3. 根据已知条件和图形特点选择定理或方法。

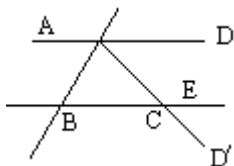
4. 根据所选的定理或方法以及添辅助线的基本规律添辅助线。

用添辅助线的分析法作出教材 P154 第 16 题的辅助线。

三角形内角和化归观念的渗透教案设计

化归观念在“三角形内角和”定理中起着重要作用。我们在教学中，注意渗透化归观念，促使学生积极地探索问题，有效地解决问题。

一、由平行线引入，探索三角形内角和



如图， $AD \parallel BE$ ， $\angle DAB + \angle B = 180^\circ$ ；若把 AD 绕 A 点旋转到 AD' ，交 BE 于 C 点，此时， $\angle D'AB + \angle B$ 的度数发生了变化，减少了 $\angle DAD'$ 的度数。从平行线的内错角相等可知，减少的 $\angle DAD'$ 的度数“跑”到 $\angle ACB$ 的位置去了。这样 $\angle DAB + \angle B = 180^\circ$ 转化为 $\angle BAC + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ 。随着 AD' 位置的变化， $\angle DAD'$ 的大小可以改变， $\angle ACB$ 的大小也随着变化，但 $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ 恒不变，由此探索得三角形内角和等于 180° 的结论。这样引入课题，揭示了三角形内角和与平行线性质之间的关系，学生在证明“三角形内角和定理”时，也容易想到化归平行线的同旁内角或平角的思路。

二、把“在一个三角形中求角的问题”，化归成解方程（组）

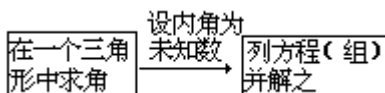
例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，

- (1) $\angle A = 98^\circ$ 、 $\angle B = 53^\circ$ ，求 $\angle C$ ；
- (2) $\angle A = 50^\circ$ 、 $\angle B - \angle C = 10^\circ$ ，求 $\angle B$ 、 $\angle C$ ；
- (3) $\angle A + \angle B = 100^\circ$ ， $\angle C = 2\angle A$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ ；
- (4) $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 。

观察这些问题，都是在一个三角形中求角。若把所

求内角作为未知数，将题设条件转化为代数方程，再加上 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 这一个对每一题目都适合的方程，则无论题目怎样千变万化，只需解方程（组）就行了。

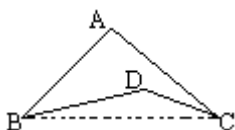
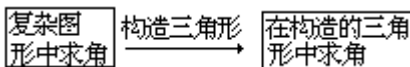
化归框图为：



三、把“在复杂图形中求角的问题”，化归成在一个三角形中求角

例 2. 如图 $\angle A = 100^\circ$ 、 $\angle ABD = 30^\circ$ 、 $\angle ACD = 20^\circ$ ，求 $\angle BDC$ 。

未知角与已知角无直接关系，连接 BC，构造得 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 。未知角与已知角分别放入此两个三角形中，则问题化归为两次在一个三角形中求角的问题。化归框图为：



根据这个化归思路，在某些复杂图形中求角问题，可以设法把原图形分解为几个三角形，从而在新构造的三角形中建立已知角与未知角的关系。如下图（1）中，在五角星形中求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ ，图（2）中求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 的度数，根据上述思路解题，十分简捷。

三角形全等的判定 I 教案设计 (一)

【教学目的】使学生掌握并初步学会应用三角形全等的判定 I —— 一边角边公理

【教学重点和难点】

1. 指导学生分析问题, 寻找判定三角形全等的条件。
2. 三角形全等证明的书写格式。

【教学过程】

一、复习提问

1. 怎样的两个三角形是全等三角形？
2. 全等三角形的性质？
3. 指出图 A 中各对全等三角形的对应边和对应角，并说明通过怎样的变换能使它们完全重合：

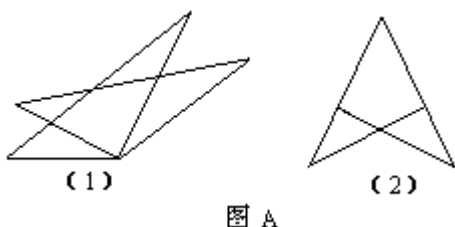


图 A

图 (1) 中： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，AB 与 AC 是对应边；

图 (2) 中： $\triangle ABC \cong \triangle AED$ ，AD 与 AC 是对应边。

二、新课

1. 三角形全等的判定 I

(1) 全等三角形具有“对应边相等、对应角相等”的性质。那么，怎样才能判定两个三角形全等呢？也就是说，具备什么条件的两个三角形能全等？是否需要已知“三条边相等和三个角对应相等”？现在我们用图形变换的方法研究下面的问题：

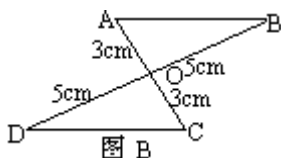


图 B

如图 B, AC、BD 相交于 O, AO、BO、CO、DO 的长度如图所示, $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 是否能完全重合呢?

不难看出, 这两个三角形有三对元素是相等的: $AO=CO$, $\angle AOB=\angle COD$, $BO=DO$ 。

如果把 $\triangle OAB$ 绕着 O 点顺时针方向旋转, 因为 $OA=OC$, 所以可以使 OA 与 OC 重合; 又因为 $\angle AOB=\angle COD$, $OB=OD$, 所以点 B 与点 D 重合, 这样 $\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 就完全重合。

(附注: 此外, 还可以图 A (1) 中的 $\triangle ACE$ 绕着点 A 逆时针方向旋转 $\angle CAB$ 的度数, 也将与 $\triangle ABD$ 重合。图 A (2) 中的 $\triangle ABC$ 绕着点 A 旋转, 使 AB 与 AE 重合, 再把 $\triangle ADE$ 沿着 AE (AB) 翻折正 180° 。两个三角形也可重合)

由此, 我们得到启发: 判定两个三角形全等, 不需要三条边对应相等和三个角对应相等。而且, 从上面的例子可以引起我们猜想: 如果两个三角形有两边和它们的夹角对应相等, 那么这两个三角形全等。

2. 上述猜想是否正确呢? 不妨按上述条件画图并作如下的实验:

(1) 读句画图:

- ①画 $\angle DAE=45^\circ$,
- ②在 AD、AE 上分别取 B、C, 使 $AB=3.1\text{cm}$, $AC=2.8\text{cm}$ 。
- ③连结 BC, 得 $\triangle ABC$ 。
- ④按上述画法再画一个 $\triangle A'B'C'$ 。

(2) 把 $\triangle A'B'C'$ 剪下来放到 $\triangle ABC$ 上, 观察 $\triangle A$

'B'C' 与 $\triangle ABC$ 是否能够完全重合？

3. 边角边公理。

有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等
(简称“边角边”或“SAS”)。

二、三角形全等判定 I 的应用

31 · 填空：

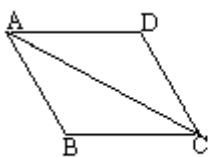


图 C

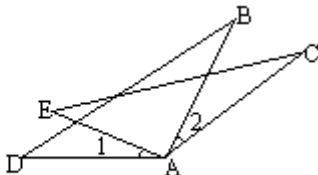


图 D

(1) 如图 C, 已知 $AD \parallel BC$, $AD=CB$, 要用边角边公理证明 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, 需要三个条件, 这三个条件中, 已具有两个条件, 一是 $AD=CB$ (已知), 二是 () = (); 还需要一个条件 () = ()

(这个条件可以证得吗?)。

(2) 如图 D, 已知 $AB=AC$, $\angle 1 = \angle 2$, 要用边角边公理证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 需要满足的三个条件中, 已具有两个条件: () = (), () = () (这个条件可以证得吗?)。

2. 例题

例 1 已知: $AD \parallel BC$, $AD=CB$ (图 C)。

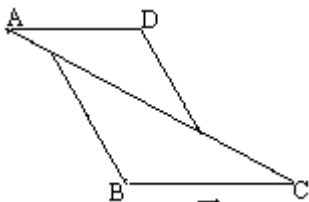


图 E

求证: $\triangle ADC \cong \triangle CBA$ 。

问题:如果把图 C 中的 $\triangle ADC$ 沿着 CA 方向平移到 $\triangle ADF$ 的位置 (如图 E), 那么要证明 $\triangle ADF \cong \triangle CEB$, 除了

AD // BC、AD=CB 的条件外，还需要一个什么条件（AF=CE 或 AE=CF）？怎样证明呢？

例 2 已知：AB=AC、AD=AE、 $\angle 1=\angle 2$ （图 D）。求证： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

三、小结

1. 根据边角边公理判定两个三角形全等，要找出两边及夹角对应相等的三个条件。

2. 找使结论成立所需条件，要充分利用已知条件（包括给出图形中的隐含条件，如公共边、公共角等），并要善于运用学过的定义、公理、定理。

3. 证明的书写格式：

（1）通过证明，先把题设中的间接条件转化成为可以直接用于判定三角形全等的条件；

（2）再写出在哪两个三角形中：具备按边角边的顺序写出可以直接用于判定全等的三个条件，并用括号把它们括起来；

（3）最后写出判定这两个三角形全等的结论。

四、练习

1. 已知：AB=AD，AC 平分 $\angle BAD$ 。求证： $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ 。

2. 已知：AB=AC，AE=AF。求证： $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ 。

3. 已知：点 E、F 在 BC 上，BE=CF，AB=CD， $\angle B=\angle C$ 。求证： $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ 。

五、作业

1. 已知：AB=AC，F、E 分别是 AB、AC 的中点。求证： $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ 。

2. 已知：点 A、F、E、C 在同一条直线上，AF=CE，BE // DF，BE=DF。求证： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 。

3. 已知：点，A、B、C、D 在同一条直线上， $AC=DB$ ， $AE=DF$ ， $EA \perp AD$ ， $FD \perp AD$ ，垂足分别是 A、D。求证： $\triangle EAB \cong \triangle FDC$ 。

4. 已知：B、D、E、C 在一直线上， $AB=AC$ ， $AD=AE$ ， $\angle BAE = \angle CAD$ 。求证： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

三角形全等的判定 I 教案设计（二）

【教学目的】

1. 使学生熟练掌握三角形全等的判定 I。
2. 使学生会用三角形全等的判定 I，证明三角形全等、线段相等、角相等或两直线平行等。

【教学重点和难点】

1. 培养学生分析问题的能力。
2. 训练识图技能

【教学过程】

一、复习提问

判断下列各组三角形是否全等：

1. 腰和顶角对应相等的两个等腰三角形；
2. 两条直角边分别相等的两个直角三角形；
3. 等腰三角形的顶角平分线把这个等腰三角形分成的两个三角形；
4. 三角形一边上的中线把这个三角形分成的两个三角形；
5. 有两边和一角分别相等的两个三角形。

（说明：第 1、2、3 小题利用特殊三角形的性质，间接的给出两个三角形全等的条件；第 4、5 小题则通过辨析提醒学生注意：判定两个三角形全等必须要有三个

条件以及边角边“对应相等”的顺序。)

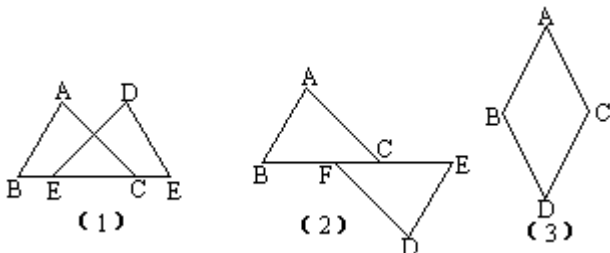
二、例题

例 1 两端 A、B 的距离无法直接量出。现在用这样的办法间接地测量 A、B 的距离：在平地上取一点 C（可直接到达 A 和 B 的点 C），连结 AC 并延长至 D，使 $CD=CA$ 。连接 BC 并延长到 E，使 $CE=CB$ 。连接 DE 并量出 DE 的长，就是 AB 的距离。你能用我们已经学过的知识说明 DE 的长就是 AB 的距离吗？

教师评讲：

例 1 启发我们，要证明分别属于两个三角形的线段相等或者角相等，往往可通过两个三角形全等来解决。

例 2 (1) 观察图的一组图形，试指出图 (1) 通过怎样的变换得图 B (2)、(3)；



(2) 证明下列各题：

①如图 (1)，已知： $AB=DE$ ， $BF=EC$ ， $\angle B=\angle E$ 。求证： $\angle ACB=\angle DFE$ 。

②如图 (2)，已知： $AB \parallel DE$ ， $AB=DE$ ， $BF=EC$ 。求证 $AC \parallel DF$ 。

③如图 (3)，已知 $AB \parallel DC$ ， $AB=DC$ 。求证： $AC \parallel DB$ ， $AC=DB$ 。

(说明：此题用图形变换的方法，设计了三个不同难度的题目。从判定三角形全等的条件看；第 (1) 题有两个直接条件，一个间接条件；第 (2) 题只有一个直接

条件,有两个间接条件;第(3)题需要添辅助线BC(或AD),然后判定 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$,这样由易到难,便于学生“逐级提高”,从而掌握应用三角形全等判定I证明的方法。)

从论证的结论看:第(1)题先证三角形全等,再证对应角相等。第(2)、(3)题则需由“角相等”再递进到证明“线平行”。

例3(1)已知: $AB=AE, AC=AD$, 只要再找出 $\angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$ 或 $\angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$, 就可证得 $\triangle \underline{\hspace{1cm}} \cong \triangle \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 。如果 $AB=DE, BC=EF$, 只要再找出 $\angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$ 或 $\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$, 就可证得这两个三角形全等。

(此题要求学生构造让三角形全等的直接或间接条件, 这比教师指导下分析问题的要求进了一步。有利于向学生为主的分析过渡。)

三、小结

1. “两边及夹角”不能错记成“两边和一角”。有两边和一角对应相等的两个三角形不一定全等。在 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ 中, 虽然 $AB=A'B', \angle B=\angle B', AC=A'C'$, 但这两个三角形不全等。

2. 通过证明两个三角形全等, 常可以进而证明线段相等或角相等或“直线平行”等结论。

四、作业

1. 判断下列结论是否正确:

(1) 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$, $AB=A'B', \angle B=\angle B', AC=A'C'$, 那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;

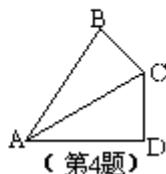
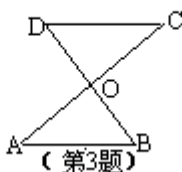
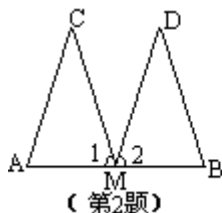
(2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB=A'B', \angle B=\angle$

B' , $BC=B'C'$ 。那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;

(3) 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中, $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A=\angle D$, 那么 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;

(4) 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中, $CB=FE$, $AC=DF$, $\angle A=\angle D$, 那么 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

2. 已知 M 是 AB 的中点, $MC=MD$, $\angle 1=\angle 2$ 。求证: $AC=BD$ 。



3. 已知: AC 和 BD 相交于点 O , $OA=OC$, $OB=OD$ 。求证: $DC \parallel AB$ 。

4. 已知: 如图, AC 平分 $\angle BAD$, $AB=AD$ 。求证: CA 是 $\angle BCD$ 的平分线。

5. (1) 根据下面语句画图并填写空格:

画线段 AB ; 画线段 AB 的垂直平分线 MN , MN 与 AB 相交于点 D , 在 MN 上取一点 P , 连结 PA 、 PB , 度量 PA 、 PB 的长度后, 你得出什么结论: _____。

(2) 根据画出的图形及你得出的结论, 写出“已知”、“求证”, 并加以证明。

三角形全等的判定 II 案设计 (一)

【教学目的】

1. 使学生掌握三角形全等的判定 II (角边角公理) 及其推论 (角角边定理)。

2. 使学生学会用角边角公理和角角边定理证明线段相

等或角相等。

【教学重点和难点】

1. 培养学生分析的习惯和分析问题的能力。
2. 综合应用三角形全等的判定 I、II。

【教学过程】

一、复习提问

三角形全等的判定依据？

二、新课

1. 角边角的公理

如图 A，一块三角形玻璃裂成了两块，配制原来形状的三角形，只需要用第 II 块就可以了。想一想：

(1) 用第 II 块怎样配制与原来的三角形全等的三角形？

(2) 做出来的三角形与原来的三角形有哪些元素相同？

(3) 用第 I 块能配制原来形状的三角形吗？为什么？

上述配制三角形玻璃的方法，使我们产生了一个想法：只要有两角一夹边对应相等，这两个三角形全等。下面我们来检验这个想法。

读句画图：

(1) 画线段 $BC=2.5\text{cm}$ 。

(2) 在 BC 的同旁分别以 B、C 为顶点画 $\angle CBD=30^\circ$ ， $\angle BCE=45^\circ$ ，BD 和 CE 相交于 A，得 $\triangle ABC$ 。

按照上面的条件，用同样的方法再画一个 $\triangle A'B'C'$ ，并把 $\triangle A'B'C'$ 剪下来放到 $\triangle ABC$ 上，可以发现 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 能够完全重合，我们把这个事实作为公理——角边角公理。

2. 角边角公理的推论（角角边定理）

(1) 在下列推理中填写需要补充的条件，使结论成立：

如图 B，在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，

$$\textcircled{1} \begin{cases} OA = OB \text{ (已知)}, \\ \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}, \\ \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (已知)}, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD \text{ (SAS)}.$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ ()}, \\ OA = OB \text{ ()}, \\ \angle \underline{\hspace{2cm}} = \angle \underline{\hspace{2cm}} \text{ ()} \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD \text{ (ASA)}.$

(2) 如图 B，在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，已知 $OA=OB$ 、 $\angle C=\angle D$ ：

① 能不能直接用 ASA 公理证明 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ ？

② 如果要用 ASA 公理，还缺少什么条件？

③ 这个条件能不能由已知条件推出？

从以上情况，我们可以得到角边角公理的推论——角角边定理：

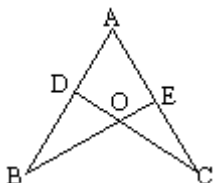
有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等（即“角角边”定理）

3. 例题

例 1 (1) 已知 $AC \parallel BD$ ， $AC=BD$ ，用两种方法证明 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ 。

(2) 连接 AD 、 BC ，还可以证明哪几对三角形全等？

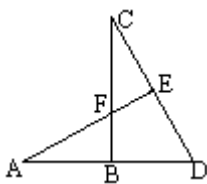
例 2 已知：如图，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上， BE 和 CD 相交于 O ， $AB=AC$ ， $\angle B=\angle C$ 。求证： $BD=CE$ 。



分析

$$\begin{array}{c}
 BD=CE \\
 \updownarrow \\
 \overbrace{\triangle BOD \cong \triangle COE \text{ 或 } AB=AC}^{\text{(已知)}} \quad AD=AE \\
 \updownarrow \quad \updownarrow \\
 \overbrace{\angle B=\angle C \quad BO=CO \quad \angle BOD=\angle COE}^{\text{(已知) (公共角)}} \quad \triangle ABE \cong \triangle ACD \\
 \updownarrow \\
 \overbrace{\angle B=\angle C \quad AB=AC \quad \angle A=\angle A}^{\text{(已知) (已知) (公共角)}}
 \end{array}$$

例 3 已知，如图 D， $CB \perp AD$ 于点 B， $AE \perp DC$ 于 E，且 $AB=BC$ 。求证： $BF=BD$ 。



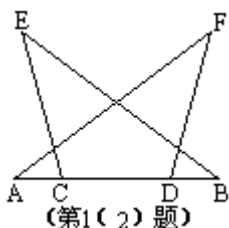
$$\begin{array}{c}
 BF=BD \\
 \updownarrow \\
 \triangle ABF \cong \triangle CBS \\
 \updownarrow \\
 \overbrace{\angle AFB=\angle D \quad \angle ABF= \quad AB=CB}^{\text{(或) } \angle A=\angle C \quad \angle CBD \quad \text{(已知)}} \\
 \updownarrow \\
 \overbrace{\angle AFB=\angle CFE \quad \angle ABF=\angle CEF}^{\text{(对顶角相等)}} \\
 \updownarrow \\
 \overbrace{CB \perp AD \quad AE \perp CD}^{\text{(已知) (已知)}}
 \end{array}$$

三、小结

1. 两个三角形全等的判定依据有：全等三角形定义，SAS 公理，ASA 公理及 AAS 定理。

2. 与“SAS”公理一样，用“ASA”公理及其推论“AAS”判定两个三角形全等时，要十分注意边和角的“对应相

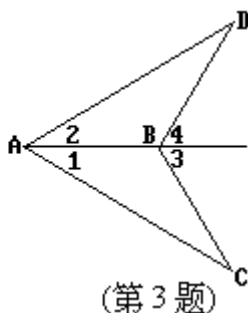
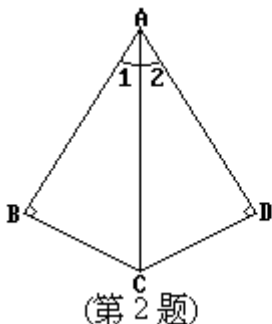
求证：EB=FA。



分析：

$$\begin{array}{c}
 EB=FA \\
 \Updownarrow \\
 \triangle \text{---} \cong \triangle \text{---} \\
 \Updownarrow \\
 \angle \text{---} = \angle \text{---} \quad \angle \text{---} = \angle \text{---} \quad AD=\text{---} \\
 (\quad) \qquad\qquad (\quad) \\
 AC+\text{---}=BD+\text{---} \\
 \Updownarrow \\
 AC=BD \\
 (\quad)
 \end{array}$$

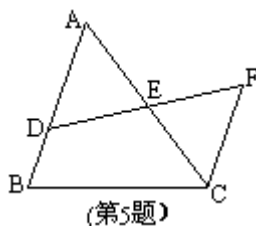
2. 已知： $AB \perp BC$ ， $AD \perp DC$ 垂足分别为 B、D， $\angle 1 = \angle 2$ 。求证： $AB = AD$ 。



3. 已知： $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。求证： $AC = AD$ 。

4. 已知：点 B、F、C、E 在同一条直线上， $FB=CE$ ， $AB \parallel DE$ ， $AC \parallel DF$ 。求证： $AB=DE$ ， $AC=DF$ 。

5. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，DE=EF，FC $\parallel$ AB。求证：AE=CE



三角形全等的判定 II 案设计 (二)

【教学目的】

1. 使学生熟练地运用三角形全等的判定 I、II 及推论。
2. 使学生会根据文字命题准确地画出图形，并会把文字命题翻译成符号语言。

【教学重点和难点】

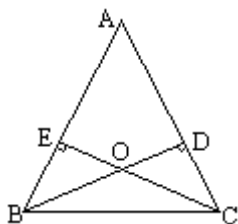
1. 分析文字命题的假设和结论，并用符号语言写出已知、求证。
2. 分析问题能力的培养。

【教学过程】

一、复习练习

已知：如图 A 中， $AB=AC$ ， $BD \perp AC$ 于 D， $CE \perp AB$ 于 E。

求证： $BD=CE$



二、新课

1. 引入新课

(1) 用文字语句把上述论证概括为一个命题：

-----。

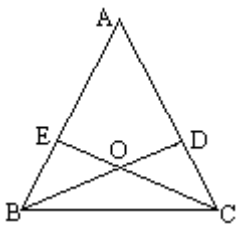
(2) 如图 A, 根据命题“等腰三角形两腰上高的交点到底边的两端距离相等”, 写出“已知”、“求证”。

(说明: 第(1)题是“结合图形的符号语言——文字语言”的翻译, 第(2)题是“文字语言——结合图形的符号语言”的翻译。这两种翻译是互逆翻译, 有利于学生克服文字命题论证的困难。)

2. 例题

例 1 求证: 等腰三角形两腰上中线的交点到底边的两端距离相等。

(1) 按题意画出图形 (如图 B)。



(2) 分清命题的题设和结论, 结合图形用符号语言在“已知”一项中写出题设, 在“求证”一项中写出结论:

已知: $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, BD 、 CE 分别是 AC 、 AB 边上的中线, BD 、 CE 相交于点 O 。求证: $OB=OC$ 。

(3) 分析:

$$\begin{array}{c}
 OB=OC \\
 \updownarrow \\
 \triangle OEB \cong \triangle ODC \\
 \updownarrow \\
 \overbrace{\angle EOB = \angle DOC \quad \angle OEB = \angle ODC \quad BE = DC}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{或} \\
 \angle EBO = \angle DCO \\
 \uparrow \\
 \triangle ABD \cong \triangle ACE \\
 \uparrow \\
 \begin{array}{ccc}
 \overbrace{AB=AC} & \angle A = \angle A & \overbrace{AE=AD} \\
 (\quad) & (\text{公共角}) & \uparrow \\
 \overbrace{AB=AC} & \overbrace{AE = \frac{1}{2}AB} & \overbrace{AD = \frac{1}{2}AC} \\
 (\text{已知}) & (\text{已知}) & (\text{已知})
 \end{array}
 \end{array}$$

(说明：本例前进行的语言翻译训练，有助于学生较顺利地写出本例中的“已知”、“求证”。但是，本例中设计了利用两次三角形全等证明，进一步训练分析能力。在后续等腰三角形性质的教学中，本例又可以由 $\angle ABC = \angle ACB$ ，证得 $\triangle DBC \cong \triangle ECB$ (SAS)，再由 $\angle DBC = \angle ECB$ 证得 $OB=OC$ ，从而作为“简化”思维的训练题。

例 2 求证：全等三角形对应角的平分线相等。

例 3 求证：等腰三角形两个底角相等。

(1) 实验：在一张白纸上画一个等腰三角形，并把它剪下来，把两腰叠在一起。

(2) 观察两底是否相等？

(3) 分析：要证明等腰三角形的两个底角相等。就要使它们成为两个全等三角形的对应角。从上面的实验可以看出：那条折痕把等腰三角形分成的两个三角形是全等的。

(4) 思考：折痕应该怎样画出来？

(说明：设计本例，可以让学生进一步熟悉文字题的解题步骤。本例的实验，为添置辅助线创设情景，而且实质上已提出并证明了后续“等腰三角形的性质”。此外，“边边边”判定三角形全等，如果作为定理（而不是公理），那么为这个定理的证明也作好了铺垫。）

三、小结

解文字题的一般步骤：

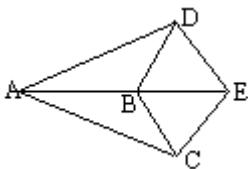
1. 根据题意画出图形。
2. 根据图形用符号语言写出“已知”和“求证”。
3. 证明。

四、作业

1. 求证：有两个角及其中一个角的平分线对应相等的两个三角形全等。

2. 求证：全等三角形对应边上的高相等。

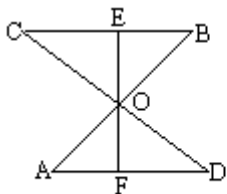
3. 已知：如图，AE 为 $\angle DAC$ 的平分线，B 为 AE 上的一点。 $\angle DBE = \angle CBE$ 。



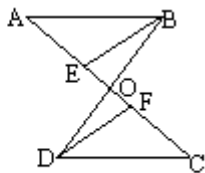
求证： $CE = DE$ 。

4. 已知：如图，AB、CD 互相平分于点 O，过点 O 作直线交 AD、BC 于点 F、E。

求证： $OE = OF$ 。



(第4题)



(第5题)

5. 已知：如图， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ， $BE \parallel DF$ 。

求证： $BE = DF$ 。

三角形全等的判定III教案设计

【教学目的】

1. 使学生了解三角形的稳定性及其在实际中的应用。
2. 使学生掌握并能正确应用三角形全等的判定III。

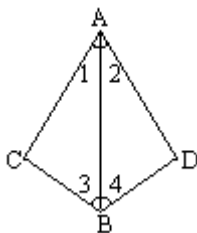
【教学重点和难点】

1. 边边边定理的证明。
2. 三角形全等的判定 I、II、III 及推论的综合应用。

【教学过程】

一、复习提问

如图 A, 要判定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 全等。已经具备的条件是_____, 在下列横线上, 写出还需要的两个条件, 并在括号内写出由这三个条件判定两个三角形全等的依据 (共有六种不同的填法);



1. $AC=AD$, $\angle 2=\angle 1$ (SAS);
2. _____, _____, ();
3. _____, _____, ();
4. _____, _____, ();
5. _____, _____, ();
6. _____, _____, ()。

(说明: 这是结合全等三角形判定的几种方法, 对

分析能力的又一次渗透，本题对分析过程中的发散思维的要求又进了一步。同时又对全等三角形判定的几种方法进行了比较和辨析。)

二、新课

1. 引入新课

两个三角形中有三对元素对应相等的可能情况有：

- (1) 有且只有一条边对应相等 $\begin{cases} \text{角边角,} \\ \text{角角边;} \end{cases}$
- (2) 有且只有两条边对应相等 $\begin{cases} \text{边角边,} \\ \text{边边角;} \end{cases}$
- (3) 有三条边对应相等——边边边；
- (4) 有三个角对应相等——角角角。

在这六种情况中，我们学过的全等三角形的判定定理有：

- (1) 边角边；
- (2) 角边角；
- (3) 角角边，并且我们曾经用画反例说明了“有两边和一角对应相等的两个三角形全等（边边角）”是假命题。现在我们来研究：

(1) 有三个角对应相等的两个三角形全等吗？

(2) 有三边对应相等的两个三角形全等吗？

2. 我们用“两块形状相同，但大小不同的直角三角板，它们的三个角对应相等，但这两块三角尺叠合起来不重合。

这个反例说明“有三个角对应相等的三角形全等”是假命题。

3. 边边边公理

研究“有三条边对应相等的三角形是否全等？”，同

学们自然会想到，用根据已知条件画两个三角形，并用这两个三角形叠合的事实来说明命题的真假性。我们用已学过的全等三角形的判定方法论证“有三边对应相等的两个三角形全等”是真命题。

如图 B。

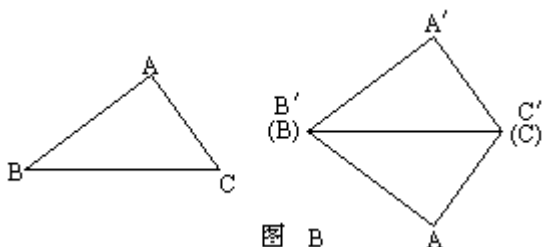


图 B

已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $AB=A'B'$ ， $BC=B'C'$ ， $AC=A'C'$ 。

求证： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

分析：应用已学过的“边角边”公理推证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，那么还要找一个角相等的条件。为了使两个三角形之间建立联系，于是我们设法把两个三角形拼合在一起。因为 $BC=B'C'$ ，所以可以使 BC 与 $B'C'$ 重合，并且把 A 和 A' 放在 BC 的两旁，连结 AA' 就得到了两个等腰三角形，再应用上节课例3的结论，就可得到 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ，从而可证得 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

（说明：这里把“边边边”判定三角形全等的方法改为定理，其原因是前面已为“证明”作了铺垫；二是上述证明过程本身就是判定三角形全等的一次应用，又能让学生体会研究几何图形性质的一种方法——图形拼合的方法。）

4. 三角形的稳定性

(1) 用教具（取三根长度适当的木条，用铆钉把它们钉成一个三角形框架和四根木条钉成的框架）进行演

示：

三角形的三条边的长度固定后，三角形的形状大小也固定了；四根木条钉成的框架，形状大小不能固定。

(2) 试用你学过的知识解释上述现象。

(3) 三角形的稳定性。

(4) 试举例说明三角形的稳定性在生产和生活中的应用。

5. 例题

例 1 已知：A、C、D、F 四点在同一条直线上， $AB=DE$ ， $BC=EF$ ， $AF=DC$ 。

求证： $AB \parallel DE$ 。

例 2 把图 C (1) 分别变换成图 C (2)、(3) 后，上述“证明”的过程有否变化？有什么变化？

(说明：以上两例中设计了一组变化图形而基本保持论证方法不变的练习，这也是思维训练的一种方法，它有助于熟悉基本定理的应用，掌握常用的方法。同时，由于图形的变化而引起论证中的局部变化，如 $AF=DC$ 的应用，这也有利于提高思维的严密性和一定的灵活性。)

例 3 已知： $AB=CD$ ， $AD=BC$ ， $AE=CF$ 。

求证： $BE=DF$ 。

(说明：本例 (1) 是从复杂图形中识别简单图形的练习。这种训练有助于提高学生正确、灵活的识图能力。本例 (2) 采用只给条件而不给结论的形式，要求学生探索尽可能多的结论，有助于提高学生的独立思考能力和思维素质。)

三、小结

判定两个三角形全等的方法(除了根据定义判定外)有 SAS、ASA、AAS、SSS 四种。在每种判定方法中需要有

三对元素对应相等的条件，并且其中至少有一对元素是边。

四、作业

1. 已知：点 A、C、B、D 在同一条直线上， $AC=BD$ ， $AM=CN$ ， $BM=DN$ 。求证 $AM \parallel CN$ ， $BM \parallel DN$ 。

2. 已知： $AB=AC$ ， $EB=EC$ ，AE 的延长线交 BC 于 D。求证： $BD=CD$ 。

3. 已知： $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 的顶点 A 和 D 在 BC 的同旁， $AB=DC$ ， $AC=DB$ ，AC 和 DB 相交于点 O。求证： $OA=OD$ 。

4. 已知： $AB=AC$ ， $DB=DC$ ，E 是 AD 的延长线上一点。求证： $BE=CE$ 。

三角形全等判定的应用教案设计

【教学目的】

1. 使学生较熟练地掌握三角形全等的判定。
2. 使学生能综合应用学过的三角形全等的判定方法，培养分析问题和解决问题的能力。
3. 使学生初步学会添置辅助线证明两个三角形全等。

【教学重点和难点】

1. 三角形全等判定方法的综合应用。
2. 准确地添加辅助线。

【教学过程】

一、复习提问

1. 三角形全等的判定方法有哪几种？
2. 下列说法正确吗？

(1) 三角形全等条件中，至少需要一对边对应相等；

(2) 三角形全等条件中, 至少需要一对角对应相等。

3. 通过上题的辨析, 你认为判定两个三角形全等时, 首先应寻找的条件是什么?

4. 如果两个三角形已有两对边对应相等的条件, 那么判定它们全等的第三个条件可以怎样考虑?

二、例题

例 1 判断下列各组三角形是否全等?

(1) 腰长相等, 且有一个角是 20° 的两个等腰三角形;

(2) 腰长相等且有一个角是 100° 的两个等腰三角形;

(3) 两个锐角相等的直角三角形;

(4) 两条直角边相等的两个直角三角形。

(说明: 为区分全等三角形的几种判定方法, 本例编排了一组既有联系, 又易于发生混淆的问题, 有利于学生在掌握单一知识的基础上掌握类同的知识。)

例 2 已知: $AB=AE$, $AC=AD$, $AC \perp AD$, $AB \perp AE$ 。

(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle AED$ 。

下面的“证明”是否正确, 如有错误加以改正:

证明: $\because AC \perp AD$, $AB \perp AE$ (已知)

$\therefore \angle CAD = 90^\circ$, $\angle BAE = 90^\circ$ (垂直的定义)。

$\therefore \angle CAD = \angle BAE$ (等量代换)。

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AED$ 中:

$AB=AE$ (已知),

$\angle CAD = \angle BAE$ (已证),

$AC=AD$ (已知),

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED$ (SAS)。

(2) 求证: $BC \perp BE$ 。

(说明：本例(1)中，设计了学生几何学习中思维不慎密的一种常见毛病，通过辨析，使这类错误可以得到及时纠正、克服。设计本例(2)是为了渗透图形变换的思想方法： $\triangle ABC$ 绕着 A 点旋转 90° ，即可与 $\triangle AED$ 重合，所以 BC 也同时绕着 A 点旋转 90° 与 AE 重合，故 $BC \perp ED$ 。)

例 3 已知： $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ 。AC，BD 相交于点 O。

(1) 若要证明 $OA=OC$ ， $OB=OD$ ，就要证明哪一对三角形全等？而要证明这对三角形全等，又应先证明另外哪一对三角形全等？

例 4 已知： $AD=BC$ ， $AB=CD$ 。

求证： $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ 。

(说明：例 3 设计了两个层次：第一层次是对发散思维的又一次渗透；第二层次

要求学生在探索尽可能多的结论的基础上，独立分析这些结论导出的先后和层次。事实上通过例 3 的研究，准确的添置辅助线解例 4 也就“水到渠成”。同时也是“把研究四边形的问题转化为研究三角形的问题”。这种“问题转化”的思想方法的早渗透，为后续四边形学习作好准备。)

例 5 已知： AD 、 BC 相交于点 O，过点 O 的直线分别交 AC 、 BD 于点 E、F，且 $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ 。

求证： $\triangle COE \cong \triangle DOF$ 。

(说明：本例以“三角形全等”的形式给出条件，并不常见。题设中没有给出与结论直接有关的条件。本题对分析能力的要求较高，它有助于提高学生掌握“要什么找什么”的分析能力。)

三、小结

1. 对于较复杂问题,常常需要一方面从已知的条件入手,想“可知”的结论;另一方面从要证明的结论出发,想“需知”的条件,当“可知”与“需知”一致时,证题的途径就沟通了。

2. 要证明线段或角相等,常常先证三角形全等。当图形中找不到这些线段或角所在的三角形时,应考虑添置适当的辅助线,构造出以这些线段或角为元素的三角形,再设法证明这样的三角形全等。

四、作业

1. 已知: $A、F、C、D$ 在一条直线上, $AB=DE$, $BC=EF$, $AF=CD$ 。求证: $BF=CE$ 。

2. 已知: $AB=AE$, $\angle B=\angle E$, $BC=ED$, F 是 CD 的中点
求证: $AF \perp CD$ 。

3. 求证:如果两个三角形的两条边和其中一边上的中线对应相等,那么这两个三角形全等。

4. 求证:全等三角形对应边上的中线相等。

5. 求证:如果延长 $\triangle ABC$ 的中线 AD 至 A' , 使 $DA' = AD$, 那么 $A'C = AB$ 。

直角三角形全等的判定教案设计

【教学目的】

1. 使学生能熟练地应用判定一般三角形全等的方法判定两个直角三角形全等。

2. 使学生掌握斜边、直角边公理及其应用。

【教学重点和难点】

斜边、直角边公理的应用。

【教学过程】

一、复习提问

1. 三角形全等的判定方法有哪几种？
2. 三角形按角的分类？

二、新课

1. 引入新课

前面我们学习了判定两个三角形全等的四种方法——SAS, ASA, AAS, SSS；我们也知道，“有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等”。这些结论适用于所有的各类三角形。

我们在三角形分类时，还学过了一些特殊三角形（如直角三角形）。特殊三角形全等的判定是否会有一般三角形不适用的特殊方法呢？

我们知道 斜边和一对锐角相等的两个直角三角形，可以根据“ AAS ”判定它们全等；一对直角边和一对锐角相等的两个直角三角形，可以根据“ ASA ”或“ AAS ”判定它们全等；两对直角边相等的两个直角三角形，可以根据“ SAS ”判定它们全等。

如果两个直角三角形的斜边和一对直角边相等（边角），这两个三角形是否可能全等呢？

(1)，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，若 $AB=A'B'$ ， $AC=A'C'$ ， $\angle C=\angle C'=Rt\angle$ ，这时 $Rt\triangle ABC$ 与 $Rt\triangle A'B'C'$ 是否全等？

研究这个问题，我们先做一个实验：

把 $Rt\triangle ABC$ 与 $Rt\triangle A'B'C'$ 拼合在一起（教师演示）如图 A (2)，因为 $\angle ACB=\angle A'C'B'=Rt\angle$ ，所以 B、C (C')、B' 三点在一条直线上，因此， $\triangle ABB'$ 是一个等腰三角形，于是根据“三角形全等的判定 II (二)”例 3，可以知道 $\angle B=\angle B'$ 。根据 AAS 公理可知 $Rt\triangle A'B'$

$C' \cong \text{Rt}\triangle ABC$ 。

下面，我们再用画图的方法来验证：

画一个 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使 $\angle C=90^\circ$ ，直角边 AC 的长为 2cm ，斜边 AB 的长为 3cm 。

(1) 分析：画 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的关键在于根据条件先后确定三个顶点的位置。因为已知 $\angle C=90^\circ$ ，所以画出一个 $\text{Rt}\angle MCN$ 就确定了点 C ，又因为 AC 的长为 2cm ，所以只要用刻度尺在射线 CN 上量得 $CA=2\text{cm}$ ， A 的位置也可以确定。怎样确定点 B 呢？根据条件斜边 AB 的长为 3cm ，把刻度尺的零点与点 A 重合，转动刻度尺，使“ 3cm ”的标线刚好落在射线 CM 上，那么就可以确定点 B 的位置。在几何里，我们常常用工具——圆规来代替刻度尺，寻找点 B 更方便、更准确。

(2) 按照下面的画法画三角形：

- ①画 $\angle MCN=90^\circ$ ，
- ②在射线 CN 上取 $CA=2\text{cm}$ ，
- ③以 A 为圆心， 3cm 为半径画弧，交射线 CM 于点 B ，
- ④连结 AB （图 B）。

(3) 把 $\triangle ABC$ 剪下，两位同学比较一下，看看两人剪下的 $\text{Rt}\triangle$ 是否可以重合。

2. 上面的实验和操作，说明“斜边和直角边对应相等的两个直角三角形全等”。

这就是判定直角三角形的“斜边、直角边”公理（简称 HL）。

（说明：上述实验，实质上证明了 HL

定理，因此，画图的操作活动可以作为课前预习的要求。）

3. 例题

例 1 具有下列条件的 Rt

$\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ (其中 $\angle C = \angle C' = \text{Rt}\angle$) 是否全等? 如果全等, 在 () 里填写理由; 如果全等, 在 () 里打“ $\times$ ”:

(1) $AC=A'C'$, $\angle A = \angle A'$ ()

(2) $AC=A'C'$, $BC=B'C'$ ()

(3) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ ()

(4) $AB=A'B'$, $\angle B = \angle B'$ ()

(5) $AC=A'C'$, $AB=A'B'$ ()

例 2 已知 $\angle ACB = \angle BDA = \text{Rt}\angle$, 若要使 $\triangle ACB \cong \triangle BDA$, 还需要什么条件? 把它们分别写出来 (有几种不同的方法就写几种):

(说明: 设计本例要求学生执果索因, 缺什么, 找什么, 这既可帮助学生熟悉基本定理, 又是一种逆向思维的训练。)

例 3 已知: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, CD 、 $C'D'$ 分别是高, 并且 $AC=A'C'$, $CD=C'D'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ 。求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

完成下列分析:

例 4 已知: $AC \parallel DF$, $AC=DF$, $BE=CF$, $\angle B = \text{Rt}\angle$ 。

求证: $\triangle DEF$ 是 $\text{Rt}\triangle$ 。

(说明: 本题用三角形全等来判定一个三角形是直角三角形。它有助于提高思维的灵活性)

三、小结

由于直角三角形是特殊三角形，因而不仅可以应用判定一般三角形全等的四种方法，还可以应用“斜边、直角边”公理判定两个直角三角形全等。“HL”只能用于判定直角三角形全等，不能用于判定一般三角形全等。所以判定两个直角三角形全等的方法有五种：“SAS”、“ASA”、“AAS”、“SSS”、“HL”。

四、作业

1. 已知： $CE \perp AB$ ， $DF \perp AB$ ，垂足分别为 E、F。AC $\parallel$ DB，且 $AC=BD$ 。求证： $CE=DF$ 。

2. 已知： $\triangle ABC$ 是等腰三角形。AB=AC，AD 是高。求证：(1) $BD=DC$ ；(2) $\angle BAD=\angle CAD$ 。

3. 已知： $AB \perp AC$ ， $AC \perp DC$ ， $AD=BC$ 。求证：(1) $AB=CD$ ；(2) $AD \parallel CB$ 。

4. 已知： $PC \perp AO$ ， $PD \perp BO$ ，且 $PC=PD$ 。求证：点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上。

5. $\triangle ABC$ 的高 BD、CE 相交于点 O，若 $OD=OE$ ，AO 的延长线交 BC 于点 M，

要证明这几对直角三角形全等，可根据“ ”首先证明 $Rt\triangle \underline{\hspace{2cm}} \cong Rt\triangle \underline{\hspace{2cm}}$ ，或根据“ ”证明 $Rt\triangle \underline{\hspace{2cm}} \cong Rt\triangle \underline{\hspace{2cm}}$ 。