黄冈兵法·同步学案

初三代数

主　编　南秀全
副主编　王　飞
编　者　盛春贤等

陕西师范大学出版社

目 录

第十二章 一元二次方程

12.1 用公式法解一元二次方程 …… 1

12.2 用因式分解法解一元二次方程 …… 10

12.3 一元二次方程根的判别式 …… 16

12.4 一元二次方程的根与系数的关系 …… 27

12.5 二次三项式的因式分解 …… 45

12.6 一元二次方程的应用 …… 51

12.7 可化为一元二次方程的分式方程 …… 63

12.8 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组 …… 82

12.9 由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组 …… 93

12.10 小结与复习 …… 103

第十三章 函数及其图象

13.1 平面直角坐标系 …… 126

13.2 函数 …… 136

13.3 函数的图象 …… 148

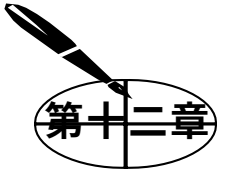
13.4 一次函数 …… 166

13.5 一次函数的图象和性质 …… 176

13.6 二次函数 $y = ax^2$ 的图象 …… 201

13.7　二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象 …… 212
13.8　反比例函数及其图象 …… 253
13.9　小结与复习 …… 281
第十四章　统计初步
14.1　平均数 …… 314
14.2　众数与中位数 …… 331
14.3　方差 …… 344
14.4　用计算器求平均数、标准差与方差 …… 361
14.5　频率分布 …… 368
14.6　实习作业 …… 395

答案与提示 …… 399



一元二次方程

12.1 用公式法解一元二次方程

学点探究分析

重点　一元二次方程的定义；用直接开平方法、配方法、求根公式法解数字系数的一元二次方程.

难点　用配方法推导一元二次方程的求根公式.

探究点　方程是解决实际问题常用的思想方法，实数运算、代数式的变形、几何问题以及市场经济等热点问题常常以一元二次方程为背景.与一元二次方程概念有关的问题通常有两种情形：一是考查一元二次方程的定义，如在方程未知数的系数、指数的位置设有字母，此时要注意二次项系数不为0.运用分类思想、掌握分类标准是形成探究能力的关键；二是考查一元二次方程根的定义，通过正用与逆用，达到激活思维的目的.

学习方法技巧

对于一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的概念的理解和各项系数的确定是用公式法解一元二次方程的基础，特别要注意隐含条件：二次项系数 $a\neq0$.

在一元二次方程的解法中，公式法是一般方法，适用于任意的一元二次方程；直接开平方法是特殊方法，在解符合方程左边是含未知数的完全平方式、右边是正常数的方程时，非常简便.如果题目没有特别要求，一般不使用配方法解方程.但配方法是一种非常重要的数学方法，在解许多数学问题时都有广泛的应用，应用配方法解一元二次方程时，首先要熟悉完全平方式的结构特点，“把二次项系数化为1”是配方法的前提，“方程两边都加上一次项系数一半的平方”是配方法的关键；应用公式法解一元二次方程时，首先要正确找出一元二次方程的各项系数，只有平时加强练习，才能准确熟练地使

用求根公式.

能力升级捷径

【例 1】　写出方程 $(1-2x)(3x+2)=3$ 中的二次项系数、一次项系数及常数项.

思维技巧　确定一元二次方程的二次项系数、一次项系数、常数项时，一定要把方程化为 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，然后确定 a、b、c. 其中二次项系数 a 可取正也可取负，但一般取正数. 这样做，不但可以减少错误，而且有利于今后的学习.

解　去括号，得 $3x+2-6x^2-4x=3$，

移项，合并同类项，得方程的一般形式 $6x^2+x+1=0$，

因此，二次项系数为 6，一次项系数为 1，常数项为 1.

同类变式　把关于 x 的方程 $ax^2-x-\sqrt{2}x+\sqrt{3}x^2+b=c$（$a$ 为有理数）化成一般形式，并指出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

解　由原方程得 $(a+\sqrt{3})x^2-(1+\sqrt{2})x+b-c=0$，

因为 a 为有理数，所以 $a+\sqrt{3}\neq 0$.

所以二次项系数为 $(a+\sqrt{3})$，一次项系数为 $-(1+\sqrt{2})$，常数项是 $(b-c)$.

【例 2】　判断关于 x 的方程 $x^2-mx(2x-m+1)=x$ 是不是一元二次方程. 如果是，指出其二次项系数、一次项系数及常数项.

思维技巧　因为题目所给的方程不是一般形式，所以先要化为一元二次方程的一般形式，又因为方程各项系数含有字母 m，所以要特别注意题目的表述，“关于 x 的方程……”与“关于 x 的一元二次方程……”是不同的，后者已知条件中有隐含条件：二次项系数不为 0；而前者则不受这一条件限制，往往需要分类讨论.

解　去括号，得 $x^2-2mx^2+m^2x-mx=x$，

移项，合并同类项，得 $(1-2m)x^2+(m^2-m-1)x=0$，

当 $1-2m=0$，即当 $m=\frac{1}{2}$ 时，原方程为 $-\frac{5}{4}x=0$，不是一元二次方程；

当 $1-2m\neq 0$，即当 $m\neq\frac{1}{2}$ 时，原方程是一元二次方程，此时，二次项系数为 $1-2m$，一次项系数为 m^2-m-1，常数项为 0.

激活思维　本例中方程的系数含有字母 m，当字母 m 发生变化时，方程未知数的最高次数也随之发生变化，因此，要掌握分类标准，对方程进行

分类研究.对于含字母系数的方程,学生往往有一种心理定势:视字母系数为常数,从而忽视分类讨论.

思维拓展　k 为何值时,关于 x 的方程 $(k^2-1)x^2+(k+1)x-2=0$ 是:(1)一元二次方程;(2)一元一次方程?

解　当 $k^2-1\neq 0$,即 $k\neq\pm 1$ 时,是一元二次方程;当 $k^2-1=0$,且 $k+1\neq 0$,即 $k=1$,原方程是一元一次方程.

【例3】　k 为何值时,关于 x 的方程 $(k-3)x^{k^2-2}+x^2+kx+1=0$ $(x\neq 0)$ 是一元二次方程?

思维技巧　例3是例2的延伸和拓展,既在未知数 x 系数位置含有字母,又在 x 指数的地方含有字母,同时在题目的表述上有区别.由于方程 $(k-3)x^{k^2-2}+x^2+kx+1=0$ 是一元二次方程,所以围绕 $(k-3)x^{k^2-2}+x^2$ 进行分类讨论.分 $k-3=0$ 或 $k^2-2=2$ 且 $k-3+1\neq 0$ 或 $k^2-2=0$ $(x\neq 0)$;或 $k^2-2=1$ 等情形进行探究,然后求出相应的 k 值.

解　当 $k-3=0$,即 $k=3$ 时,原方程是一元二次方程;

当 $k^2-2=2$ 且 $k-3+1\neq 0$,即 $k=-2$ 时,原方程是一元二次方程;

当 $k^2-2=0$ $(x\neq 0)$,即 $k=\pm\sqrt{2}$ 时,原方程是一元二次方程;

当 $k^2-2=1$,即 $k=\pm\sqrt{3}$ 时,原方程是一元二次方程.

综上所述,当 $k=-2$ 或3或 $\pm\sqrt{2}$ 或 $\pm\sqrt{3}$ 时,关于 x 的方程 $(k-3)x^{k^2-2}+x^2+kx+1=0$ 是一元二次方程.

激活思维　由于未知数 x 的系数和指数都含有字母,使题目变得异常复杂,抓住一元二次方程的概念建立相关知识之间的联系是关键.既要对指数进行分类讨论,又要对系数进行分类讨论,这正是此题比常规题灵活的地方.由于受字母系数和字母指数的影响,常常会出现分类的错误,在第一种情形下,易出现 $k-3\neq 0$ 的错误;因为 $x\neq 0$,对 $k^2-2=0$ 这种情形容易遗漏.

【例4】　(1)用直接开平方法解方程 $9x^2-25=0$;

(2)用配方法解方程 $2x^2-4x+1=0$;

(3)用公式法解方程 $4p=1-\frac{3}{2}p^2$.

思维技巧　根据平方根的概念,可用开平方法解形如 $x^2=c$ $(c\geqslant 0)$ 的方

程,开方要取“±”,切莫失根;当二次项系数为 1 时,才能配上“一次项系数一半的平方”,但需注意,配方时应在方程两边同时加上所配的那个数;用求根公式解方程,首先应将方程化简为一般形式,找各项系数时,要特别注意符号.

解　(1) 将原方程变形为 $x^2=\frac{25}{9}$,

两边开平方取正负,得 $x=\pm\frac{5}{3}$;

(2) 方程两边同时除以 2,得

$x^2-2x+\frac{1}{2}=0$,

移项,得 $x^2-2x=-\frac{1}{2}$,

配方,得 $x^2-2x+1^2=1^2-\frac{1}{2}$.

即　$(x-1)^2=\frac{1}{2}$,

所以 $x-1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) 原方程变形,得 $3p^2+8p-2=0$,

因为 $a=3,b=8,c=-2$,

$b^2-4ac=8^2-4\times3\times(-2)=88>0$,

所以 $p=\frac{-8\pm\sqrt{88}}{6}$,

因此,$p_1=\frac{\sqrt{22}-4}{3}$,$p_2=\frac{-\sqrt{22}-4}{3}$.

同类变式　用不同的方法解方程 $2x^2-5x+2=0$.

本题考查一元二次方程的解法.

解法一 (配方法):

将原方程变形 (二次项系数化为 1),得

$x^2-\frac{5}{2}x+1=0$,

即 $x^2-\frac{5}{2}x=-1$.

两边都加上 $\left(\frac{5}{4}\right)^2$,得 $x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=-1+\left(\frac{5}{4}\right)^2$.

即 $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，

$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4}$，

所以 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$.

解法二（公式法）：

因为 $a=2, b=-5, c=2$，

$b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times2=9$，

所以 $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\times2}=\frac{5\pm3}{4}$，

所以 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$.

【例 5】 若实数 x 满足条件 $(x^2+4x-5)^2=-|x^2-25|$，求 $\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{x^2-2x+1}$ 的值.

思维技巧 这是一道赋条件的求值问题，它是以方程为背景，正确求出 x 的值是关键. 利用非负数的性质，求出两个方程的相同的根，再求值.

解 因为 $(x^2+4x-5)^2=-|x^2-25|$，

所以 $(x^2+4x-5)^2+|x^2-25|=0$.

因为 x 为实数，

所以 $x^2+4x-5=0$ 且 $x^2-25=0$.

解方程 $x^2+4x-5=0$ 得，$x_1=-5$ 或 $x_2=1$.

解方程 $x^2-25=0$ 得，$x_3=5$ 或 $x_4=-5$.

因此 $x=-5$，

原式 $=|x+2|-|x-1|=|-5+2|-|-5-1|=3-6=-3$.

激活思维 此例从非负数的性质中寻找等量关系，得出两个一元二次方程，然后灵活选取方法解方程. 以一元二次方程为背景，把非负数的性质与根式结合在一起，有助于活跃学生的思维.

同类变式 已知关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-3)x-1=0$，问：

(1) m 取何值时，它是一元二次方程，并求出此方程的解；

(2) m 取何值时，它是一元一次方程.

根据一元二次方程和一元一次方程的定义可知此方程为一元二次方程

的条件是：$m^2+1=2$ 且 $m+1\neq 0$ 此方程为一元一次方程的条件是：$m+1=0$ 且 $m-3\neq 0$ 或者 $m^2+1=1$ 且 $(m+1)+(m-3)\neq 0$.

解　(1) 当 $m^2+1=2$ 且 $m+1\neq 0$ 时，方程为一元二次方程.

由 $m^2+1=2$ 解得 $m_1=1, m_2=-1$.

又因为 $m+1\neq 0$，所以 $m\neq -1$，只能取 $m=1$.

所以 $m=1$ 时，方程是一元二次方程.

此时，方程为 $2x^2-2x-1=0$，

解得 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

(2) 由 $m+1=0$ 且 $m-3\neq 0$，得 $m=-1$，这时方程为一元一次方程；

另外，当 $m^2+1=1$ 且 $(m+1)+(m-3)\neq 0$ 时，即当 $m=0$ 时，该方程也是一元一次方程.

故当 $m=-1$ 或 $m=0$ 时，方程为一元一次方程.

思维拓展　已知 $(m^2-1)x^2-(m+1)x+8=0$ 是关于 x 的一元一次方程.

(1) 求代数式 $199(m+x)(x-2m)+3m$ 的值；

(2) 求关于 y 的方程 $m|y|=x$ 的解.

解　(1) 因为 $(m^2-1)x^2-(m+1)x+8=0$ 是关于 x 的一元一次方程，

所以 $\begin{cases} m^2-1=0, \\ m+1\neq 0, \end{cases}$ 所以 $m=1, x=4$.

所以 $199(m+x)(x-2m)+3m=199(1+4)(4-2)+3\times 1=1993$.

(2) 由 (1) 知，$|y|=4$，所以 $y=\pm 4$.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) 一元一次方程 $2x^2+4x-1=0$ 的二次项系数、一次项系数及常数项之和为_____.

(2) 若 $kx^2+x=3x^2+1$ 是一元二次方程，则 k 的取值范围是_____.

(3) (重庆市，2002) 方程 $x^2-5x+3=0$ 的解是_____.

(4) (天津市，2002) 若关于 x 的方程 $x^2-ax-3a=0$ 的一个根是 -2，则它的另一个根是_____.

(5) (永州，2001) 若 $x=-\frac{1}{2}$ 是方程 $kx^2-x-2=0$ 的一个根，则 $k=$_____.

(6) (湖南邵阳市，2001) 已知关于 x 的方程：$x^2-3x+c=0$ 有一个解是 $x=1$，则 $c=$_____，它的另一个解是_____.

(7) (厦门市，2002) 一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 的根是_____.

(8) (海南省，2002) 如果分式 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的值为零，那么 $x=$_____.

(9) 当 $y=$_____ 时，代数式 y^2+7y+6 的值与 $y+1$ 的值相同.

(10) 若 $x^2+x-2=3$，则 $2x^2+2x+1$ 等于_____.

(11) 已知 $x=-1$ 是方程 $x^2-ax+6=0$ 的一个根，则 $\sqrt{a^2-1}=$_____.

(12) 若 $(x^2+2x-3)^0=x^2-3x+3$，则 $x=$_____.

2. 选择题

(1) 在下列方程中，一元二次方程的个数是 (　　)

$3x^2+7=0$；$ax^2+bx+c=0$；$(x-2)(x+3)=x^2-1$；$x^2-5\sqrt{x}+4=0$；$x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$；$2x^2-5\sqrt{2}x=(x-2)^2$；$3x^2-\frac{4}{x}+6=0$.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(2) (武汉市，2002) 一元二次方程 $x^2-4=0$ 的根为 (　　)

A. $x=2$　　B. $x=-2$

C. $x_1=2, x_2=-2$　　D. $x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}$

(3) 下列方程是一元二次方程的是 (　　)

A. $(x-1)x=x^2$　　B. $ax^2+bx+c=0$

C. $2x^2+\frac{1}{x}+1=0$　　D. $x^2=1$

(4) 一元二次方程 $-5x^2+x-3=0$，把二次项系数变为正数，且使方程的根不变的是 (　　)

A. $5x^2-x+3=0$　　B. $5x^2-x-3=0$

C. $5x^2+x-3=0$　　D. $5x^2+x+3=0$

(5) 若 $ax^2-5x+3=0$ 是一元二次方程，则不等式 $3a+6>0$ 的解是(　　)

A. $a>-2$　　B. $a<-2$

C. $a>-2$ 且 $a\neq 0$　　D. $a>\frac{1}{2}$

(6) 已知 x^2+3x+5 的值为 9，则代数式 $3x^2+9x-2$ 的值为(　　)

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

(7) (杭州市，2002) 已知 2 是关于 x 的方程 $\frac{3}{2}x^2-2a=0$ 的一个解，则 $2a-1$ 的值是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

(8) (北京市东城区，2002) 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+x+a^2-1=0$ 的一个根是 0，则 a 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. $\frac{1}{2}$

(9) 关于 x 的方程 $(m^2-m-2)x^2+mx+m=0$ 是一元二次方程的条件是(　　)

A. $m\neq 1$　　B. $m\neq -1$ 且 $m\neq 2$

C. $m\neq 2$　　D. $m\neq 1$ 且 $m\neq 2$

(10) 多项式 $a^2+4a-10$ 的值等于 11，则 a 的值为(　　)

A. 3 或 7　　B. -3 或 7　　C. 3 或 -7　　D. -3 或 -7

(11) (甘肃省，2002) 方程 $(m+2)x^{|m|}+3mx+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则(　　)

A. $m=\pm 2$　　B. $m=2$　　C. $m=-2$　　D. $m\neq\pm 2$

(12) (重庆市，2001) 下面是某同学在一次测验中解答的填空题：

① 若 $x^2=a^2$，则 $x=a$；

② 方程 $2x(x-1)=x-1$ 的解为 $x=0$；

③ 若直角三角形有两边长分别为 3 和 4，则第三边的长为 5.

其中答案完全正确的题目个数为(　　).

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

3. 选用适当方法解下列方程

(1) $\frac{3}{4}x^2-1.5=0$；　　(2) $4t+21=t^2$；

(3) $(3x-1)(x+5)=-5$；　　(4) $2x^2-5x+2=0$.

4. 关于 x 的方程 $(2m^2+m-3)x^{m+1}+5x=13$ 可能是一元二次方程吗？为什么？$(2m^2+m-3)x^{m-1}+5x=13$ 呢？

5. 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2+3x+m^2-3m-4=0$ 的一根为零，求 m 的值.

6. 已知 c 为实数，并且方程 $x^2-3x+c=0$ 的一个根的相反数是方程 $x^2+3x-c=0$ 的一个根，求方程 $x^2+3x-c=0$ 的根和 c 的值.

7. (孝感市，1998) 解关于 x 的方程 $(a-1)x^2-2ax+a=0$.

探究能力测试

8. (1) 如表：方程 1，方程 2，方程 3，…是按照一定规律排列的一列方程，解方程 3，并将它的解填在表中的空白处；

序号	方　　程	方程的解	
1	$x^2-2x-3=0$	$x_1=-1$	$x_2=3$
2	$x^2-4x-12=0$	$x_1=-2$	$x_2=6$
3	$x^2-6x-27=0$	$x_1=$ ____	$x_2=$ ____
…	…	…	…

(2) $x_1=-10$，$x_2=30$ 是不是 (1) 中所给的一列方程中的一个方程的两个根？

(3) 请写出这列方程中第 k 个方程；

(4) 用你探究的规律，解答下列两个方程.

① $x^2+102x-36\times18=0$；

② $x^2-9x-324=0$.

12.2　用因式分解法解一元二次方程

学点探究分析

重点　用因式分解法解一元二次方程.

难点　熟练地进行因式分解.

探究点　在一元二次方程的几种解法中,因式分解法运用较多,其方法简便、快捷、灵活.在解含字母系数的一元二次方程时应观察其特点,尽量使用因式分解法.由于一元二次方程的求解过程受字母取值范围的影响,因此,在解方程时,要注意对其字母条件进行探究,用因式分解法解一元二次方程有一定局限性,当因式分解的结果不易看出时,可考虑用其他方法.

学习方法技巧

因式分解法是特殊方法,只适用于解具有某些特点的一元二次方程,因此,抓住方程的特点是一个关键,再者,要透彻理解因式分解法解方程的理论根据,切记方程的右边必须是 0,而左边则需化为两个一次因式的积的形式,此外,熟练地对多项式进行因式分解又是一个关键.

能力升级捷径

【例 1】　解方程 $(x+5)(x-1)=7$.

思维技巧　在解方程 $(x+5)(x-1)=7$ 时,容易把它与 $(x+5)(x-1)=0$ 的解法混淆.一般地,方程 $(x-a)(x-b)=0$ 与"$x-a=0$ 或 $x-b=0$"是同义的.但是,"若 $a\times b=c\times d$,则 $a=c$ 或 $b=d$"却是一个错误的命题.例如 $2\times5=1\times10$,但 $2\neq1$,$5\neq10$.所以,要使用因式分解法解方程时,需将方程右边化为零.

解　把原方程的右边化为 0,得

$x^2+4x-12=0$,

分解因式,得 $(x-2)(x+6)=0$,

所以 $x_1=2$,$x_2=-6$.

同类变式　用因式分解法解下列方程:

(1) $3(x-5)^2=2(5-x)$;

(2) $4(3x-1)^2-9(3x+1)^2=0$.

解　(1) 原方程可变形为 $3(5-x)^2-2(5-x)=0$,

$(5-x)[3(5-x)-2]=0$,

$(5-x)(13-3x)=0$,

所以 $5-x=0$ 或 $13-3x=0$.

所以 $x_1=5, x_2=\frac{13}{3}$.

(2) 原方程可变形为

$[2(3x-1)+3(3x+1)][2(3x-1)-3(3x+1)]=0$,

整理后,得 $(3x+5)(15x+1)=0$,

所以 $3x+5=0$ 或 $15x+1=0$,

所以 $x_1=-\frac{5}{3}, x_2=-\frac{1}{15}$.

思维拓展　方程 $(m-2)x^{m^2-5m+8}+(m-3)x+5=0$,求当 m 取何值时是一元二次方程,并求此方程的解.

解　当 $m^2-5m+8=2$ 且 $m-2\neq 0$ 时,方程为一元二次方程,由 $m^2-5m+8=2$ 得 $m^2-5m+6=0$,即 $(m-2)(m-3)=0$,

解得 $m_1=2, m_2=3$.

又因为 $m-2\neq 0$,得 $m\neq 2$,

所以 $m=3$ 时,原方程为一元二次方程.

把 $m=3$ 代入原方程,得 $x^2+5=0$,此方程无解.

【例 2】　(宜昌市,2002) 阅读下题的解答过程,请判断其是否有错,若有错误,请你写出正确解答.

已知:m 是关于 x 的方程 $mx^2-2x+m=0$ 的一个根,求 m 的值.

解　把 $x=m$ 代入原方程,化简得 $m^3=m$,两边同除以 m,得 $m^2=1$.

所以 $m=1$,把 $m=1$ 代入原方程检验可知,$m=1$ 符合题意.

答:m 的值是 1.

思维技巧　近几年来,各地中考试卷以阅读题的形式出现频率较高,背景、形式多样,或提供全新的阅读材料,介绍新知识,考查学以致用的能力;或定义新思路,新方法,考查理解、应变能力;或是给出解答过程,判断正误,考查相关知识的易错点.此例正是考查解方程过程中,容易出错的相关知识.

答:有错.

解　把 $x=m$ 代入原方程，化简得 $m^3-m=0$，

分解因式得 $m(m+1)(m-1)=0$，

所以 $m=0$ 或 $m+1=0$ 或 $m-1=0$.

所以 $m_1=0, m_2=-1, m_3=1$.

把 m 的三个值代入原方程检验，均符合题意.

答：m 的值是 $0, -1, 1$.

激活思维　这是一道查寻解题过程是否错误的阅读理解题，“方程两边同时除以不为零的代数式，所得方程与原方程同解”，其中，“不为零”易被学生忽视，本题正是抓住了这一点，以考查学生思维的缜密性.

同类变式　(大连市，2001) 阅读材料：为解方程 $(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将 x^2-1 视为一个整体，然后设 $x^2-1=y$，则 $(x^2-1)^2=y^2$，原方程化为 $y^2-5y+4=0$，　①

由① $(y-4)(y-1)=0$，得 $y_1=1, y_2=4$，

当 $y=1$ 时，$x^2-1=1, x^2=2$，

所以 $x=\pm\sqrt{2}$，当 $y=4$ 时，$x^2=5$，

所以 $x=\pm\sqrt{5}$，

所以原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{5}, x_4=-\sqrt{5}$.

解答问题　(1) 填空：在由原方程得到①的过程中，利用_____法达到降次的目的，体现了_____的数学思想.

(2) 解方程 $x^4-x^2-6=0$.

答：(1) 换元　转化

(2) 设 $x^2=y$，则原方程变为 $y^2-y-6=0$，

$(y-3)(y+2)=0$. 所以 $y_1=3, y_2=-\sqrt{2}$ (舍去)，

所以 $x^2=3, x=\pm\sqrt{3}$.

思维拓展　(绍兴市，2002) 若一个三角形的边长均满足方程 $x^2-6x+8=0$，则此三角形的周长为_____.

【分析】　先用因式分解法求方程 $x^2-6x+8=0$ 的两根，再根据方程的根是三角形的边长分情况讨论，结合三角形三边关系求出周长.

解　由方程 $x^2-6x+8=0$ 得

$(x-2)(x-4)=0$，解之 $x_1=2, x_2=4$.

当三角形三边长都为 2 时,其周长为 6;

当三角形三边长都为 4 时,其周长为 12;

当三角形底边为 2,腰长为 4 时,其周长为 10;

当三角形底边为 2,腰长为 2 时,不符合三角形三边关系,此三角形不存在.

因此,三角形周长为 6,10,12.

【例 3】 在高尔夫球比赛中,某运动员打出的球在空中飞行高度 h (m) 与打出后飞行的时间 t (s) 之间的关系是 $h=-t(t-7)$. 求:

(1) 经过多少秒钟,球飞行的高度为 10 m;

(2) 经过多少秒钟,球又落到地面.

思维技巧 运用数学知识解决实际问题,首先从实际问题中获取必要的信息,通过分析、处理有关信息,建立数学模型,然后解决这个数学问题,最后解答原问题. 此例可通过球在空中运动的规律,建立两个方程.

解 (1) 依题意有 $10=-t(t-7)$,

整理得 $t^2-7t+10=0$.

因式分解得 $(t-2)(t-5)=0$,

解之 $t_1=2, t_2=5$.

因此,当经过 2 s 或 5 s 时,球飞行的高度是 10 m.

(2) 当 $h=0$ 时,有 $-t(t-7)=0$,

解之 $t_1=7, t_2=0$ (不合题意舍去).

因此,经过 7 s 后,球又落到地面.

激活思维 由于现实生活中信息的来源是多种多样的,提供信息的方式往往各不相同,因此从实际问题中获取并分析、处理信息是十分重要的一步,正确地建立数学模型是一个关键. 由于缺乏从实际问题中收集、处理信息的能力,学生思维活动容易出现障碍,从而不能很好地建立数学模型,只有善于从实际问题中收集、处理信息,弄清数学知识与实际问题的结合点,才能恰当地建立数学模型.

同类变式 一跳水运动员从 10 m 高台上跳水,设他在起跳后第 t s 离水面的高度为 h m,h 与 t 具有如下关系:$h=-5(t-2)(t+1)$. 求运动员从起跳到入水所用的时间.

解 依题意知 $-5(t-2)(t+1)=0$,

解之 $t_1=2, t_2=-1$,

因为 $t>0$，所以 $t_2=-1$（不合题意，舍去），

所以 $t=2$.

答 运动员从起跳到入水所用的时间为 2 s.

思维拓展　（太原市，2002）生物兴趣小组的学生，将自己收集的标本向本组其他成员各赠送一件，全组共互赠了 182 件，求全组有多少名学生.

【分析】　对“全组共互赠了 182 件”的理解是关键，若设全组有 x 名同学，则每名学生给其他 $(x-1)$ 名学生各赠送一件，共送 $(x-1)$ 件，那么 x 名学生共赠送 $x(x-1)$ 件.

解　设全组有 x 名同学，

依题意列方程　$x(x-1)=182$，

整理得，$x^2-x-182=0$，

因式分解得　$(x-14)(x+13)=0$，

所以 $x_1=14$，$x_2=-13$（舍去）

答：全组共有 14 名学生.

综合能力测试

基础能力测试

1．填空题

(1)（浙江绍兴，2002）方程 $x(x-2)=0$ 的根是_____.

(2)（河南省，2002）如果分式$\frac{x^2-7x-8}{x+1}$的值为 0，则 $x=$_____.

(3)（昆明市，2002）若分式$\frac{x^2-x-6}{x+2}$的值为 0，则 $x=$_____.

(4)（镇江市，2002）若代数式 $(x-2)(x+1)$ 的值等于零，则 $x=$_____.

(5)（吉林省，2000）一元二次方程 $x^2+4x-12=0$ 的根是_____.

(6)（吉林省，2001）方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的两根为 x_1，x_2，且 $x_1>x_2$，则 x_1-2x_2 的值等于_____.

(7)（河南省，2000）已知 x 的二次方程 $4x^2+4kx+k^2=0$ 的一个根是 -2，那么 $k=$_____.

(8) 用因式分解法解方程 $3x^2-x-2=0$，得 $x_1=$_____，$x_2=$_____.

⑼ 已知方程 $(x+a)(x-3)=0$ 和方程 $x^2-2x-3=0$ 是同解方程，则 $a=$_____.

⑽ 方程 $(x-2)^2=x-2$ 的根是_____.

⑾ 方程 $(x+1)(x+3)=15$ 的两根为 x_1,x_2，则 x_1+2x_2 的值是_____.

⑿ 两个连续偶数的积是 168，则这两个偶数是_____.

2．选择题

⑴ (辽宁省，2001) 方程 $x^2-2x=0$ 的根是（　　）

A. $x_1=0,x_2=2$　　B. $x_1=0,x_2=-2$

C. $x=0$　　D. $x=2$

⑵ (浙江金华，2002) 方程 $x(x+1)(x-2)=0$ 的根是（　　）

A. $-1,2$　　B. $1,-2$

C. $0,-1,2$　　D. $0,1,-2$

⑶ (内蒙古，2000) 方程 $2x(x-3)=5(x-3)$ 的根是（　　）

A. $x=\frac{5}{2}$　　B. $x=3$

C. $x_1=3$ 或 $x=\frac{5}{2}$　　D. $x=-\frac{5}{2}$

⑷ (温州市，2000) 方程 $x^3-5x^2+6x=0$ 的根是（　　）

A. $0,-2,-3$　　B. $0,2,3,$

C. $0,1,-6$　　D. $0,-1,-6$

⑸ 方程 $x^2-a^2=(x-a)^2$ $(a\neq0)$ 的根是（　　）

A. a　　B. 1 或 a　　C. 0　　D. 0 或 a

⑹ 设 x_1,x_2 是方程 $6x^2-13x+5=0$ 的两根，那么 $(x_1+1)(x_2+1)$ 的值是（　　）

A. $\frac{7}{3}$　　B. -2　　C. -1　　D. 以上都不对

⑺ (宁夏，2002) 如果 a 是关于 x 的方程 $x^2+bx+a=0$ 的根，并且 $a\neq0$，则可求出（　　）的值.

A. ab　　B. $\frac{b}{a}$　　C. $a+b$　　D. $a-b$

⑻ (宁夏，2002) 已知 $7x^2+5y^2=12xy$，并且 $xy\neq0$，则可求出（　　）的值.

A. xy　　B. $\frac{x}{y}$　　C. $x+y$　　D. $x-y$

(9) 关于 x 的方程 $(m^2-m-2)x^2+mx+m=0$ 是一元二次方程的条件是(　　)

A. $m\neq1$　　B. $m\neq-1$ 且 $m\neq2$

C. $m\neq2$　　D. $m\neq1$ 且 $m\neq2$

(10) 如果 $(1-m^2-n^2)(m^2+n^2)=-6$,则 $m^2+n^2=$(　　)

A. 2　　B. -2,3　　C. 3　　D. 2,-3

3. (德阳市,2002) 解方程:$4x^2-4x-3=0$.

4. 解方程:$\frac{1}{4}y^2+\frac{5}{2}y-6=0$.

5. 解方程:$3x(1-x)=2x-2$.

6. 解方程:$(2t+1)^2+3(2t+1)+2=0$.

探究能力测试

7. 参加会议的人两两彼此握手,有人统计一共握了 66 次手,到会的人数是多少?

8. 小涵同学把皮球竖直往上抛,皮球上升的高度 h (m) 与抛出后的时间 t (s) 的关系是 $h=25t-5t^2$,几秒钟后它在离抛出点 20 m 高的地方?

12.3　一元二次方程根的判别式

学点探究分析

重点　一元二次方程根的判别式的应用.

难点　判定含有字母系数的一元二次方程根的情况和确定字母取值.

探究点　一元二次方程的根的判别式是揭示根的性质与系数间联系的一个重要定理,是解决与一元二次方程相关问题的有力工具,许多表面与一元二次方程无关的数学问题,可以通过构造一元二次方程,把原问题转化为讨论方程的根的性质,然后用判别式来解. 解题时,注意判别式定理和逆定理的区别和灵活运用.

学习方法技巧

涉及用判别式判断方程根的个数问题，一般都要设法把判别式的值与完全平方式建立起联系，从而应用完全平方式的非负性来确定判别式的大小. 根据方程根的情况，用判别式确定方程中字母系数的取值范围，如果从正面去直接求解，思维往往会受阻，因此，多用逆向求解.

能力升级捷径

【例 1】 不解方程，判别下列关于 x 的一元二次方程的根的情况：

(1) $(2x-1)^2+x(x+2)=0$；(2) $mx^2-2mx+m+1=0$ $(m\neq 0)$.

思维技巧 在应用根的判别式时，应先将方程化成一般形式. 一元二次方程的根的情况是由 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号决定的，所以，在判断一元二次方程根的情况时，应想尽办法判断出“Δ”的符号，然后根据判别式定理判定根的情况，尤其是当方程系数中含有字母时，一般利用配方法将“Δ”化成完全平方式或完全平方式加上 (或减去) 一个常数，再根据完全平方式非负性判断“Δ”的符号，从而决定方程的根的情况，有时还需要对字母进行讨论.

解 (1) 整理方程，得 $5x^2-2x+1=0$，

因为 $a=5, b=-2, c=1$，

所以 $\Delta=(-2)^2-4\times 5\times 1=-16<0$.

所以原方程没有实数根.

(2) 因为 $a=m, b=-2m, c=m+1$，

所以 $\Delta=(-2m)^2-4m(m+1)$

$=4m^2-4m^2-4m=-4m$.

因为 $m\neq 0$，所以当 $-4m>0$，即 $m<0$ 时，原方程有两个不相等的实数根；当 $-4m<0$，即 $m>0$ 时，原方程没有实数根.

同类变式 判断关于 x 的二次方程的根的情况：

$x^2-2kx+4(k-1)=0$ (k 为常数).

解 $\Delta=(-2k)^2-4\times 1\times 4(k-1)$

$=4k^2-16k+16=4(k-2)^2\geqslant 0$.

所以方程有实数根.

【例 2】 若关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2-2(m+2)x+1=0$ 有实数根，求

m 的取值范围.

思维技巧　运用判别式解题,其实质是将问题转化为解方程、解不等式.含字母系数的方程问题,在没有指明是二次方程时,要考虑是一次方程的可能,至于是否要分类讨论,要看清题目的条件,一般设问方式有两种:(1) 前置式,即"二次方程";(2) "后置式",即"两实数根",这都表明是二次方程,不需讨论,但切不可忽视一次项系数不为零的要求.此题中没有给出方程的次数(前置式),也没有指明方程的根的个数(后置式),因此应考虑方程为二次方程和一次方程两种情况.

解　本题有两种情况:

(1) 若方程是一元二次方程,并且有实根,则必有

$$\begin{cases} m^2-1\neq 0, \\ \Delta=[-2(m+2)]^2-4(m^2-1)\geqslant 0. \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} m\neq \pm 1, \\ m\geqslant -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

即 $m\geqslant -\dfrac{5}{4}$ 且 $m\neq \pm 1$.

(2) 若方程为一次方程,则 $\begin{cases} m^2-1=0, \\ -2(m+2)\neq 0. \end{cases}$

解得 $m=\pm 1$.

综合(1)、(2),得 $m\geqslant -\dfrac{5}{4}$ 时,原方程有实数根.

激活思维　本题考查含字母系数的方程的分类讨论,易误认为所给方程是一元二次方程,而用 $\Delta\geqslant 0$,且 $m^2-1\neq 0$ 来解,而不考虑分类或分类没有按同一标准进行,或最后不善于综合几种情况得出结论.

同类变式　k 为何值时,关于 x 的方程 $(k-1)x^2-(2k+1)x+k+1=0$ 有实数根?

解　(1) 当 $k-1=0$ 时,即 $k=1$,原方程有实数根为 $x=\dfrac{2}{3}$.

(2) 当 $\begin{cases} k-1\neq 0 \\ \Delta\geqslant 0 \end{cases}$ 时,即 $\begin{cases} k-1\neq 0, \\ (2k+1)^2-4(k-1)(k+1)\geqslant 0. \end{cases}$

解这个不等式组,得 $k\geqslant -\dfrac{5}{4}$ 且 $k\neq 1$.

综上所知，当 $k \geqslant -\frac{5}{4}$ 时，方程有实数根.

思维拓展　(漳州市，2002) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+2-m=0$，① (1) 若方程有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围；(2) 请你利用 (1) 所得的结论，任取 m 的一个数值代入方程①，并用配方法求出此方程的两个实数根.

思路分析　由判别式 $\Delta>0$，解含 m 的不等式，再在 m 的取值范围内，任取 m 的一个值，代入方程①配方求解.

解　(1) 因为方程有两个不相等的实数根，

所以 $\Delta>0$，$\Delta=4-4(2-m)=4m-4>0$，所以 $m>1$；

(2) 例 取 $m=2$，代入方程① 得 $x^2+2x=0$，

配方，得 $x^2+2x+1^2=1^2$，$(x+1)^2=1$，

开平方，得 $x+1=\pm 1$，

所以 $x_1=0$，$x_2=-2$.

【例 3】　(黑龙江，2000) 当 m 是什么整数时，关于 x 的一元二次方程 $mx^2-4x+4=0$ 与 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的解都是整数？

解　由题意，得

$$\begin{cases}(-4)^2-4m\times 4\geqslant 0,\\(-4m)^2-4(4m^2-4m-5)\geqslant 0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}m\leqslant 1,\\m\geqslant -1\frac{1}{4}.\end{cases}$

所以 $-1\frac{1}{4}\leqslant m\leqslant 1$.

又因为 m 是整数，

所以 m 为 -1，0，1.

(1) 当 $m=-1$ 时，方程 $mx^2-4x+4=0$ 没有整数根；

(2) 当 $m=0$ 时，方程 $mx^2-4x+4=0$ 不是一元二次方程；

(3) 当 $m=1$ 时，方程 $mx^2-4x+4=0$ 和方程 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 均有整数解. 故 m 只能取 1.

【例 4】　(黑龙江省，2002) 是否存在这样的非负整数 m，使关于 x 的一元二次方程 $m^2x^2-(2m-1)x+1=0$ 有两个实数根，若存在，请求出 m 的

值 若不存在，请说明理由.

思维技巧　这是一道常见的“是否存在”型探究题. 首先由题意，可得 $m^2\neq0$，且判别式 $\Delta\geqslant0$，由此可确定 m 的取值范围，进而由 m 为非整数来探究这样的 m 是否存在.

解　不存在.

由题意得 $m^2\neq0$，所以 $m\neq0$.

又 $\Delta=[-(2m-1)]^2-4m^2\geqslant0$，解得 $m\leqslant\frac{1}{4}$.

因为 m 为非负整数，所以这样的 m 不存在.

激活思维　此例首先从题设的结论“一元二次方程有两个实数根”入手，由它的等价条件判别式 $\Delta\geqslant0$，得出 m 的取值范围，再由一元二次方程中隐含条件二次项系数不为零，和题设“m 为非负整数”去发现问题，探求 m 的存在性.

同类变式　(杭州市，2001) 若方程 $x^2+2px-q=0$ (p，q 是实数) 没有实数根. (1) 求证：$p+q<\frac{1}{4}$；(2) 试写出上述命题的逆命题；(3) 判断 (2) 中逆命题是否正确，若正确请加以证明；若不正确，请举一反例证明.

解　(1) 证明：由题意，方程的判别式 $\Delta=4p^2+4q<0$，得 $q<-p^2$，

所以 $p+q<-p^2+p=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$.

所以有 $p+q<\frac{1}{4}$ 成立.

(2) 该命题的逆命题为：如果 $p+q<\frac{1}{4}$，则方程 $x^2+2px-q=0$ (p，q 是实数) 没有实数根.

(3) (2) 中的逆命题不正确. 如：

当 $p=1$，$q=-1$ 时，$p+q<\frac{1}{4}$，但原方程 $x^2+2px-q=0$ 有实数根 $x=-1$.

思维拓展　(北京市海淀区，2002) 已知：关于 x 的方程 $(n-1)x^2+mx+1=0$，①有两个相等的实数根.

(1) 求证：关于 y 的方程 $m^2y^2-2my-m^2-2n^2+3=0$，②必有两个不相等的实数根；

(2) 若方程① 的一根的相反数恰好是方程② 的一个根，求代数式 m^2n+12n 的值.

解　(1) 因为方程①有两个相等的实数根，

所以 $\begin{cases} n-1\neq 0, \\ \Delta_1 = m^2-4(n-1)=0. \end{cases}$

所以　$m^2=4(n-1)$ 且 $m\neq 0$，则 $n-1>0$.

由方程②，有 $\Delta_2 = 4m^2-4m^2(-m^2-2n^2+3)$

$=4m^2(1+m^2+2n^2-3)$

$=4m^2(1+4n-4+2n^2-3)$

$=4m^2(2n^2+4n-6)$

$=8m^2(n+3)(n-1)$.

因为 $n-1>0$ 且 $m\neq 0$，所以 $8m^2>0$，$n+3>0$.

所以 $8m^2(n+3)(n-1)>0$，即　$\Delta_2>0$，

所以方程②必有两个不相等的实数根.

(2) 由 $m^2=4(n-1)$ 可得 $n-1=\frac{m^2}{4}$，

将 $n-1=\frac{m^2}{4}$ 代入方程① 得 $\frac{m^2}{4}x^2+mx+1=0$，

解得 $x_1=x_2=-\frac{2}{m}$.

因为方程①的一根的相反数是方程②的一个根，由根的定义，得 $m^2\cdot\left(\frac{2}{m}\right)^2-2m\cdot\left(\frac{2}{m}\right)-m^2-2n^2+3=0$.

整理，得 $-m^2-2n^2+3=0$，即 $-2n^2-4(n-1)+3=0$，

所以 $2n^2+4n=7$，

所以 $m^2n+12n=n(m^2+12)=n(4n-4+12)=4n^2+8n=2(2n^2+4n)=14$.

【例 5】　已知关于 x 的方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$，

(1) 求证：无论 k 取何实数值，方程总有实数根；

(2) 若等腰△ABC 的一边长 $a=6$，另两边长 b、c 恰好是这个方程的两个根，求此三角形的三边长.

思维技巧　此题是一元二次方程与三角形结合的一道题目，建立根的判别式、根的定义与三角形三边关系等知识间的联系是一个关键，根据等腰三角形的定义，运用分类思想确定 a、b、c 三者的关系，是解决此题的又一个

关键.

证明　(1) 因为 $\Delta=[-(3k+1)]^2-4(2k^2+2k)$

$=9k^2+6k+1-8k^2-8k$

$=k^2-2k+1=(k-1)^2\geqslant 0$,

所以无论 k 取何实数值,方程总是有实数根.

解　(2) 因为$\triangle ABC$ 为等腰三角形,$a=6$,b、c 恰好是方程两个根.

所以当 $b=c$ 时,则方程有两个相等实数根,所以 $\Delta=(k-1)^2=0$,所以 $k=1$,

此时原方程为 $x^2-4x+4=0$,$x_1=x_2=2$,

所以 $b=c=2$.

又　$b+c=4<a$,

所以 $a=6$,$b=c=2$,不合题意,舍去.

若 b、c 中有一条边与 a 相等,不妨设 $b=a=6$,

因为 b 是方程的根,

所以 $6^2-(3k+1)\times 6+2\times k^2+2\times k=0$,

整理得,$k^2-8k+15=0$.

解之,$k_1=3$,$k_2=5$.

当 $k=3$ 时,原方程为 $x^2-10x+24=0$,

解之,$x_1=4$,$x_2=6$,所以三角形三边长为 6,6,4;

当 $k=5$ 时,原方程为 $x^2-16x+60=0$,

解之,$x_1=6$,$x_2=10$,

所以三角形的三边长为 6,6,10.

综合上知,符合条件的三角形三边长为 6,6,4 和 6,6,10.

激活思维　当方程系数中含有字母时,用判别式判定根的情况,一般利用配方法将"Δ"化成完全平方式或完全平方式加上 (或减去) 一个常数,根据完全平方式的非负性判断"Δ"的符号,从而决定方程根的情况.此例中,学生易忽视等腰三角形这一条件的不确定性,从而出现解答不完整的错误,或直接根据求根公式用 k 表示三角形两边,从而使计算繁琐.若巧用根的判别式和根的定义求 k,问题就会迎刃而解.

同类变式　(荆门市,2001) 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$.

(1) 求证:无论 k 取任何实数值,方程总有实数根;

⑵ 若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=1$，另两边长 b、c 恰好是这个方程的两个根，求△ABC 的周长.

⑴ 证明 因为 $\Delta=[-(k+2)]^2-4\times2k=k^2-4k+4=(k-2)^2\geqslant0$，

所以原方程总有两实数根.

⑵ 求△ABC 的周长，只要利用“△ABC 为等腰三角形”这一条件，求出 b 或 c 即可.

分两种情况讨论：

① $b=c$ 时，因为 b、c 是方程的根，

所以 $\Delta=(k-2)^2=0$，所以 $k=2$.

原方程变为 $x^2-4x+4=0$.

解得 $x_1=x_2=2$，所以 $b=c=2$.

此时 a、b、c 符合三角形三边的关系，故△ABC 的周长为 5.

② b、c 中有一个与 a 相等时，不妨设 $b=a=1$，

因为 b 是方程的根，所以 $1^2-(k+2)\times1+2k=0$.

解得 $k=1$，所以方程化为 $x^2-3x+2=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=2$，

所以 $c=2$. 这与 $a+b>c$ 矛盾，故 a 不能为腰.

所以△ABC 的周长为 5.

思维拓展 （贵州省，1997）已知等腰三角形的两边长 a、b 是方程 $x^2-kx+12=0$ 的两根，另一条边 $c=4$，求 k 的值.

解 分类讨论：

⑴ 当 c 为底边时，则 a，b 是方程 $x^2-kx+12=0$ 的两相等实数根.

所以 $\Delta=k^2-48=0$，$k=\pm4\sqrt{3}$.

而当 $k=-4\sqrt{3}$ 时，方程 $x^2+4\sqrt{3}x+12=0$ 有两相等的负实根，不符合题意，舍去；

当 $k=4\sqrt{3}$ 时，三角形三边分别为 $2\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$，4，符合题意.

⑵ 当 c 为腰长时，则 a、b 有一个与 c 相等，即方程 $x^2-kx+12=0$ 有一个根为 4.

由根的定义知 $4^2-k\times4+12=0$，所以 $k=7$.

此时，三角形三边长为 3，3，4，符合题意.

综合上知，k 为 $4\sqrt{3}$ 或 7.

综合能力测试

基础能力测试

1．填空题

(1) (北京怀柔，2002) 判断关于 x 的方程 $x^2-2mx-1=0$ 的根的情况是_____.

(2) (成都市，2001) 已知关于 x 的方程 $x^2-mx+2=0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值是_____.

(3) (辽宁省，2001) 关于 x 的方程 $x^2-6x+m=0$ 有两个相等的实数根，则 $m=$_____.

(4) (北京宣武区，2001) 关于 x 的方程 $mx^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，那么 m 的取值范围是_____.

(5) (荆门市，2000) 关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2-(2k+1)x+1=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是_____.

(6) 若一元二次方程 $kx^2+2x-1=0$ 没有实数根，则 k 的取值范围是_____.

(7) 若方程 $2x^2-2x+3a-4=0$ 有两个不相等的实数根，则 $|a-2|-\sqrt{a^2+16-8a}=$_____.

(8) 若方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 没有实数根，则 k 的最小整数值是_____.

(9) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+\sqrt{3k+1}\cdot x+2k-1=0$ 有实数根，则 k 的取值范围是_____.

(10) (甘肃省，2000) 在一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 中，若系数 b 和 c 可在 1，2，3，4，5，6 中取值，则其中有实数解的方程的个数是_____.

2．选择题

(1) (广西，2003) 关于 x 的方程 $x^2+(3m-1)x+2m^2-m=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个相等的实数根　　B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 有两个实数根

(2) (武汉市,2003) 不解方程,判别方程 $5x^2-7x+5=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

(3) (北京市,2003) 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2-6x+9=0$ 有两个不相等的实数根,那么 k 的取值范围是(　　)

A. $k<1$　　B. $k\neq 0$　　C. $k<1$ 且 $k\neq 0$　　D. $k>1$

(4) (四川省,2002) 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{4}x^2-(m-3)x+m^2=0$ 有两个不相等的实数根,那么 m 的最大整数值是(　　)

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

(5) (重庆市,2003) 下列一元二次方程中,没有实数根的是(　　)

A. $x^2+2x-1=0$　　B. $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$

C. $x^2+\sqrt{2}x+1=0$　　D. $-x^2+x+2=0$

(6) (河北省,2001) 在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 中,若 a 与 c 异号,则方程(　　)

A. 有两个不相等的实数根　　B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 根的情况无法确定

(7) (北京崇文区,2001) 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2-2mx+m=0$ 有两个实数根,那么 m 的取值范围是(　　)

A. $m>0$　　B. $m\geqslant 0$

C. $m>0$ 且 $m\neq 1$　　D. $m\geqslant 0$ 且 $m\neq 1$

(8) (河南省,2001) 已知一直角三角形的三边 a、b、c,$\angle B=90^\circ$,那么关于 x 的方程 $a(x^2-1)-2cx+b(x^2+1)=0$ 的根的情况为(　　)

A. 有两个相等的实数根　　B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 无法确定

(9) 当 k 不小于 $-\frac{1}{4}$ 时,方程 $(k-2)x^2-(2k-1)x+k=0$ $(k\neq 2)$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根　　B. 有两个相等的实数根

C. 有两个实数根　　D. 以上都不正确

(10) 若方程 $3x(kx-1)=x^2-1$ 没有实数根，则 k 的最小整数值是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. 0

(11) 方程 $x^2+a=ax$ 有等根时，实数 a 的可取数值的个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 大于 2

(12) 关于 x 的方程 $kx^2-6x+3=0$ 有实数根，则 k 的非负整数值是(　　)

A. 0，1，2　　B. 1，2　　C. 1，2，3　　D. 0，1，2，3

(13) (南阳，2002) 若方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 没有实数根，则 k 的最小整数值是(　　)

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. 不存在

(14) 设 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $m=(2ax_0+b)^2$ 的关系是(　　)

A. $\Delta>m$　　B. $\Delta=m$　　C. $\Delta<m$　　D. 不能确定

3. (江西省，2003) 已知关于 x 的方程 $x^2-m=2x$ 有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围.

4. 若 m 满足不等式 $8m>9$，求证方程 $(m-1)x^2-2(m+1)x-(m+7)=0$ 有两个不等的实数根.

5. 设 a、b、c 为三角形三边，关于 x 的方程 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$，判断此方程根的情况.

探究能力测试

6. 已知方程 $x^2-2x+k+3=0$ 有两个不等实根，试判定 $(k-1)x^2+2(k+1)x+k+1=0$ 有无实数根.

7. 已知 m 为整数，关于 x 的三个方程：$x^2-mx+n-\frac{3}{4}=0$，①　$x^2+(m+3)x+n=0$，②　$x^2-(m+1)x+n=0$，③　满足：方程①有二等根，方程②有二不等实根，方程③无实根. 求 m、n 的值.

12.4 一元二次方程的根与系数的关系

学点探究分析 重点 一元二次方程根与系数关系的应用.

难点 利用根与系数的关系确定一元二次方程中字母系数的取值.

探究点 韦达定理形式简单,两个等式的左边都是两根的对称式,一般涉及整式、分式、根式及不等式的任何一个对称式都可用这两个基本的对称式表示.应用韦达定理的前提条件是一元二次方程有两个实数根,所以,应用韦达定理解题时,往往与判别式结合起来使用,建立诸多联系,注意知识间的结合点,是学好本节的一个关键.许多探究性问题都离不开韦达定理,利用根的定义、韦达定理探究解含方程的非对称性问题是近年来中考试卷中的一种新题型.

学习方法技巧 运用韦达定理解题时,应注意如下几个基本方法:一是设而不求;二是由于它的两个等式左边是基本对称式,常常采用整体代换;三是有时需构造二次方程、对偶式,为韦达定理应用创设条件,从而使问题获解;四是应用韦达定理解题时,必须满足判别式 $\Delta \geqslant 0$.事实上,韦达定理与判别式经常是结合在一起使用的.

能力升级捷径 【例 1】 (广西壮族自治区,1996)请按照下列要求写出两种解法:已知方程 $5x^2 + kx - 6 = 0$ 的一个根是 2,求它的另一个根及 k 的值.

思维技巧 这是韦达定理的应用之一:求方程中字母系数的值的问题.一种思路是用韦达定理先求出另一个根,再求 k;另一种思路是先用根的定义求出 k 值,然后再求另一根.

解法一 设方程的另一根是 x_1,根据根与系数关系有:$2x_1 = -\frac{6}{5}$,

所以 $x_1 = -\frac{3}{5}$,又因为 $x_1 + 2 = -\frac{k}{5}$,

所以 $k = -7$.

解法二　根据根的定义，把 $x=2$ 代入原方程，得

$5\times2^2+2k-6=0$，

所以 $k=-7$.

设另一个根为 x_2，

则 $x_2+2=\frac{7}{5}$，所以 $x_2=-\frac{3}{5}$.

激活思维　此题重在考查对一元二次方程根与系数关系的深刻理解，一味套用求根公式的定势思维对解决本题有负面影响.

同类变式　请用两种方法解答下题：

方程 $2x^2+mx+3=0$ 的一个根是 $\frac{1}{2}$，求另一根及 m 的值.

解法一　将 $x_1=\frac{1}{2}$ 代入原方程，得

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m+3=0$，$m=-7$，

所以原方程即为 $2x^2-7x+3=0$.

解得　$x_1=\frac{1}{2}$；$x_2=3$.

所以另一根为 $x_2=3$，m 的值为 -7.

解法二　设方程的另一根为 x_2，

根据韦达定理有
$$\begin{cases}\frac{1}{2}+x_2=-\frac{m}{2}, & ①\\ \frac{1}{2}\cdot x_2=\frac{3}{2}. & ②\end{cases}$$

由②解得 $x_2=3$.

将 $x_2=2$ 代入①得 $m=-7$.

所以方程的另一根是 3，m 的值是 -7.

【例 2】　(浙江金华，2002) 设 α、β 是方程 $x^2+2x-9=0$ 的两个实数根，求 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 和 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ 的值.

思维技巧　观察根与系数关系中的两个等式左边的结构，它是关于两个根的基本对称式. 不解方程，利用定理求关于两根待定式的值的问题，把待求式转化为符合根与系数关系中的两个基本对称式是解此类题的关键. 设而不求，整体代换，正是利用根与系数关系求代数式值的巧妙之处.

解 依题意得 $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-9$，

所以 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{-9}=\frac{2}{9}$.

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-9\times(-2)=18$.

激活思维 不解方程，利用根与系数关系求关于两根的对称式的值是根与系数关系的应用之一. 但往往会有学生用求根公式先求出两根，然后直接代入待求式，进行繁琐冗长的运算，有时很难计算出正确结果，没有抓住根与系数关系中两个等式的结构特点和不善于转化，不善于运用整体代换思想去解决问题，要熟练掌握如下转化：

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$，

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$，

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$，

$x_1x_2^2+x_2x_1^2=x_1x_2(x_1+x_2)$，

$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2$ 等.

同类变式 (山西省太原市，2002) 已知 x_1，x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m+1)x+(m^2+1)=0$ 的两个实数根.

(1) 用含 m 的代数式表示 $x_1^2+x_2^2$；

(2) 当 $x_1^2+x_2^2=15$ 时，求 m 的值.

解 (1) 由题设得 $x_1+x_2=-(2m+1)$，$x_1\cdot x_2=m^2+1$，

因为 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$，

所以 $x_1^2+x_2^2=[-(2m+1)]^2-2(m^2+1)=2m^2+4m-1$.

(2) 由 (1)，得 $2m^2+4m-1=15$，

解得 $m_1=-4$，$m_2=2$.

检验，当 $m=-4$ 时，原方程没有实数根；

当 $m=2$ 时，原方程有实数根，所以 $m=2$.

思维拓展 (四川省，2002) 已知 x_1，x_2 是一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两个实数根.

(1) 是否存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$ 成立？若存在，求

出 k 的值;若不存在,请说明理由.

(2) 求使 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的 k 的整数值.

解　(1) 因为一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 有两个实数根,则有 $k\neq 0$,且 $\Delta=(-4k)^2-4\times 4k(k+1)=-16k\geqslant 0$,

所以 $k<0$.

又 x_1,x_2 是方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两根,

所以 $x_1+x_2=1$,$x_1x_2=\frac{k+1}{4k}$.

所以 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2$

$=2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2=-\frac{k+9}{4k}$.

若 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$,则有 $-\frac{k+9}{4k}=-\frac{3}{2}$,

所以 $k=\frac{9}{5}$.

而 $k<0$,所以不存在实数 k,使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$;

(2) 因为 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}-2$

$=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-4=\frac{4k}{k+1}-4=-\frac{4}{k+1}$,

所以要使 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数,只须 $k+1$ 能整除 4.

而 k 为整数,故 $k+1$ 只能取 $\pm 1,\pm 2,\pm 4$.

因为 $k<0$,所以 $k+1<1$.

所以 $k+1$ 只能取 $-1,-2,-4$.

所以 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的 k 的整数值为 $-2,-3,-5$.

【例 3】　(宁夏,2001) 若 m、n 是关于 x 的方程 $x^2+(p-2)x+1=0$ 的两个实数根,则代数式 $(m^2+mp+1)(n^2+np+1)$ 的值等于_____.

思维技巧　例 3 是例 2 的延伸和拓展,代数式 $(m^2+mp+1)(n^2+np+1)$ 也是关于两根 m、n 的对称式,且含有有待定系数 p,比较复杂.对于这个对称式,变形是一个关键,也是一个难点.

方法一:将代数式展开,并整理配成含 $m+n$,$m\cdot n$ 的对称式;方法二:

利用方程根的定义，把繁琐的对称式 $(m^2+mp+1)(n^2+np+1)$ 转化为简单对称式 方法三 根据待求式的特点，利用根与系数关系，巧换、巧代.

解法一　将代数式展开，并整理，

由根与系数关系知：$m+n=2-p$，$mn=1$，

所以　$(m^2+mp+1)(n^2+np+1)$

$=(mn)^2+p^2mn+pmn(m+n)-2nm+(m+n)^2+p(m+n)+1$

$=1+p^2+p(2-p)-2+(2-p)^2+p(2-p)+1$

$=4$.

解法二　因为 m、n 是已知方程的两根，

由方程的根的定义知

$m^2+(p-2)m+1=0$；

$n^2+(p-2)n+1=0$.

所以 $m^2+mp+1=2m$，

$n^2+np+1=2n$.

又因为 $mn=1$，

所以 $(m^2+mp+1)(n^2+np+1)=2m\cdot 2n=4mn=4$.

解法三　由根与系数关系知

$m+n=2-p$，

所以 $m+n+p=2$，且 $mn=1$，

所以　$(m^2+mp+1)(n^2+np+1)$

$=(m^2+mp+mn)(n^2+np+mn)$

$=m(m+p+n)n(n+p+m)$

$=mn(m+n+p)^2=1\times 2^2=4$.

激活思维　求一元二次方程根的对称式的值的关键在于熟练地将已知的根的对称式变形，使它转化为含 x_1+x_2 和 x_1x_2（基本对称式）的式子，解法一是一般的方法，计算量大，极易出错. 解法二是利用根的定义、根的对称式迅速化简，巧妙而又简洁. 巧就巧在利用根的定义，把待求式 $(m^2+mp+1)(n^2+np+1)$ 化为 $2m\cdot 2n$. 解法三是运用根与系数关系，先将 $1=mn$ 代入，再因式分解和整体代入，同样简捷，巧妙. 妙就妙在将“1”用“mn”代换，使“$(m^2+mp+1)\cdot(n^2+np+1)=(m^2+mp+mn)(n^2+np+mn)=mn(m+n+p)^2$”这一变形过程. 总之，对于较复杂的根的对称式的求值或

相关问题，要先观察待求式与已知方程的关系，找出其中内在联系，达到化繁为简的目的.

同类变式　1.（盐城市，1999）已知方程 $x^2-1840x+2002=0$ 的两根为 m、n，则 $(m^2-1841m+2002)(n^2-1841n+2002)=$_____.

解　因为 m、n 是方程 $x^2-1840x+2002=0$ 两根，

所以 $m^2-1840m+2002=0$，$n^2-1840n+2002=0$.

因此原式 $=[(m^2-1840m+2002)-m][(n^2-1840n+2002)-n]$

$=(-m)(-n)=mn=2002$.

2.（海淀区，2001）已知关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x+k^2+2k-1=0$.　①

(1) 求证：对于任意实数 k，方程①总有两个不相等的实数根；

(2) 如果 a 是关于 y 的方程

$y^2-(x_1+x_2-2k)y+(x_1-k)(x_2-k)=0$　②的根，其中 x_1，x_2 为方程①的两个实数根，求代数式 $\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a+1}\right)\div\frac{4}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a}$ 的值.

(1) 证明　因为 $\Delta=4(k+1)^2-4(k^2+2k-1)$

$=4k^2+8k+4-4k^2-8k+4=8>0$，

所以对于任意实数 k，方程①总有两个不相等的实数根.

(2) 因为 x_1，x_2 为方程①的两个实数根，

所以 $x_1+x_2=2(k+1)$，$x_1\cdot x_2=k^2+2k-1$.

所以 $x_1+x_2-2k=2(k+1)-2k=2$，

$(x_1-k)(x_2-k)$

$=x_1x_2-k(x_1+x_2)+k_2$

$=k^2+2k-1-2k(k+1)+k^2=-1$.

所以方程②为 $y^2-2y-1=0$.

因为 a 是方程②的根，

所以 $a^2-2a-1=0$.

所以 $a\neq0$，$a+1\neq0$，$a^2=2a+1$，

所以 $\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a+1}\right)\div\frac{4}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a}$

$=\frac{a+1-a^2}{a(a+1)}\cdot\frac{a+1}{4}\cdot\frac{a^2-1}{a}$

$$=\frac{(a+1-a^2)(a^2-1)}{4a^2}$$
$$=\frac{[a+1-(2a+1)](2a+1-1)}{4a^2}$$
$$=\frac{(-a)(2a)}{4a^2}$$
$$=-\frac{1}{2}.$$

【例 4】 (荆州市,1998) 已知关于 x 的一元二次方程 $(1-2k)x^2-2\sqrt{k+1}x-1=0$ 有两个不相等的实数根,k 为实数. (1) 求 k 的取值范围;(2) 若方程两根倒数和比两根倒数积小 1. 求 k 的值.

思维技巧 已知方程两个根满足某种关系,确定方程中的字母系数的取值或取值范围,要列出字母所受限制的各种条件,特别要注意隐含条件在解题中的作用,根与系数关系往往与根的判别式结合在一起使用. 由满足条件的等式、不等式组成的混合组来确定字母的取值或取值范围.

解 (1) 依题意,得 $\begin{cases}1-2k\neq 0,\\(-2\sqrt{k+1})^2-4(1-2k)(-1)>0,\\k+1\geqslant 0.\end{cases}$

所以 $-1\leqslant k<2$ 且 $k\neq\frac{1}{2}$.

(2) 设原方程的两根为 x_1,x_2,则

$$x_1+x_2=\frac{2\sqrt{k+1}}{1-2k},$$
$$x_1x_2=\frac{-1}{1-2k}.$$

因为 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1x_2}=-1$,

所以 $\frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2}=-1$,

所以 $\frac{\frac{2\sqrt{k+1}}{1-2k}-1}{\frac{-1}{1-2k}}=-1.$

整理得 $\sqrt{k+1}=1-k$,

两边平方,整理得 $k^2-3k=0$,

所以 $k_1=0, k_2=3$.

经检验，$k=0$ 是方程的根，$k=3$ 是增根.

又由 (1) 知，0 在 k 的取值范围之内，

所以 $k=0$ 即为所求.

激活思维　本题综合了一元二次方程根的判别式和根与系数的关系、二次根式的定义、一元二次方程的概念和不等式组的解法等知识. 受思维单向性的影响，学生解答此类题时，往往只顾及根的判别式，而易忽视“$1-2k\neq 0$”及“$k+1\geqslant 0$”这两个隐含条件；再者，由于不善于运用联系的观点，因此，在第 (2) 问中，往往不考虑第 (1) 问的结果，不能正确地对 k 的值进行取舍，导致错解.

同类变式　1. (扬州市，2002) 已知关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2+(1-2k)x+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 当 k 为何值时，$|x_1+x_2|-2x_1x_2=-3$.

解　(1) 由题意有 $\begin{cases} k\neq 0, \\ (1-2k)^2-4k^2>0. \end{cases}$ 解之得 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

(2) 由根与系数关系得 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2k-1}{k^2}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{k^2}. \end{cases}$

因为 $k<\frac{1}{4}$，所以 $2k-1<0$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{2k-1}{k^2}<0$.

又因为 $|x_1+x_2|-2x_1x_2=-3$，所以 $-\dfrac{2k-1}{k^2}-\dfrac{2}{k^2}=-3$.

解得 $k_1=-\frac{1}{3}, k_2=1$.

由 (1) 知 $k=-\frac{1}{3}$.

2. (大连市，2002) 已知关于 x 的一元二次方程 $(m^2-1)x^2-(2m-1)x+1=0$ (m 为实数) 的两个实数根的倒数和大于零，求 m 的值.

解　因为 $m^2-1\neq 0$，所以 $m\neq \pm 1$，　①

因为所给方程有两个实数根，

所以 $\Delta=[-(2m-1)]^2-4(m^2-1)=-4m+5\geqslant 0$，

所以 $m\leqslant\frac{5}{4}$. ②

设 x_1,x_2 为所给方程的两根，则 $x_1+x_2=\frac{2m-1}{m^2-1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{1}{m^2-1}$，

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{2m-1}{m^2-1}}{\frac{1}{m^2-1}}=2m-1$.

依题意 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>0$，所以 $2m-1>0$，所以 $m>\frac{1}{2}$. ③

综合①、②、③，得 $\frac{1}{2}<m\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $m\neq 1$.

思维拓展 （天津市，2001）若方程 $m^2x^2-(2m-3)x+1=0$ 的两个实数根的倒数和是 S，求 S 的取值范围.

解 由 $\begin{cases}[-(2m-3)]^2-4m^2=-12m+9\geqslant 0,\\ m^2\neq 0.\end{cases}$

得 $m\leqslant\frac{3}{4}$ 且 $m\neq 0$. ①

设方程 $m^2x^2-(2m-3)x+1=0$ 两实数根为 x_1,x_2，

则 $x_1+x_2=\frac{2m-3}{m^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{1}{m^2}$，

$S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2m-3$.

由①知，$2m-3\leqslant-\frac{3}{2}$，且 $2m-3\neq-3$，

即 $S\leqslant-\frac{3}{2}$ 且 $S\neq-3$.

【例 5】 （河南省，2001）已知关于 x 的方程 $4x^2+4bx+7b=0$ 有两个相等的实数根，y_1,y_2 是关于 y 的方程 $y^2+(2-b)y+4=0$ 的两根，求以 $\sqrt{y_1}$，$\sqrt{y_2}$ 为根的一元二次方程.

思维技巧 不解已知方程，求作新方程，使它的根与原方程的根有某种关系的问题，是根与系数关系的应用之一. 由于以 x_1,x_2 为根的一元二次方程总可化为：$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$，所以，本题的实质就是求 $p=-(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})$，$q=\sqrt{y_1y_2}$ 两个代数式的值的问题.

解　因为方程 $4x^2+4bx+7b=0$ 有两个相等的实数根，

所以 $\Delta=16b^2-16\times7b=0$，即 $b^2-7b=0$.

解得 $b_1=0$，$b_2=7$.

当 $b=0$ 时，关于 y 的方程可化为 $y^2+2y+4=0$.

显然 $\Delta=4-16=-12<0$，故方程无解.

当 $b=7$ 时，关于 y 的方程可化为 $y^2-5y+4=0$.

解得 $y_1=4$，$y_2=1$.

所以 $\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}=3$，$\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}=2$.

所以以 $\sqrt{y_1}$，$\sqrt{y_2}$ 为根的一元二次方程为 $z^2-3z+2=0$.

激活思维　本题是逆用根与系数关系定理求作一元二次方程. 要构造以 $\sqrt{y_1}$，$\sqrt{y_2}$ 为根的一元二次方程，首先要确定 b 的取值，利用判别式求出 b 的值，再代入关于 y 的方程，得到对应的两个方程，其中一个方程 $y^2+2y+4=0$ 无实数根，这是命题者有意设计的陷阱. 若不注意，便有可能得出 $y_1+y_2=-2$，$y_1y_2=4$ 的错误结论，所以利用根与系数关系解题时，必须注意前提——方程有实数根，即判别式 $\Delta\geqslant0$. 这正是在解题过程中思维活动的盲点之一.

同类变式　1.（重庆市，2002）已知一元二次方程 $2x^2+3x-5=0$，不解方程，求以该方程的两根的倒数为根的一元二次方程.

解　设 x_1，x_2 是方程 $2x^2+3x-5=0$ 的两根，

则有 $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$，$x_1x_2=-\frac{5}{2}$.

依题意知 $\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_2}$ 是新方程 $y^2+py+q=0$ 两根，

$$-p=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$$，所以 $p=-\frac{3}{5}$，

$$q=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=-\frac{2}{5}$$，

因此所求作的新方程为 $y^2-\frac{3}{5}y-\frac{2}{5}=0$，

即 $5y^2-3y-2=0$.

2.（巴中市，2002）如图 12－1 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\tan A-\tan B=2$，斜边上的高 $CD=1$，求以 AD、BD 为根的一元二次方程.

思路分析 要求以 AD、BD 为根的一元二次方程,就是要求 $AD+BD$ 与 $AD\cdot BD$ 的值. 由射影定理 $AD\cdot BD=CD^2=1$,再结合已知条件 $\tan A-\tan B=2$,可得 $BD-AD=2$,从而 $BD+AD=\sqrt{(BD-AD)^2+4BD\cdot AD}$,问题可解.

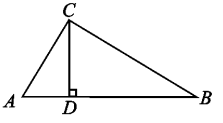


图 12-1

解 因为 $\angle ACB=90^\circ$,$CD\perp AB$,由射影定理得:

$$CD^2=AD\cdot BD=1,\tan A-\tan B=\frac{CD}{AD}-\frac{CD}{BD}=\frac{BD-AD}{AD\cdot BD}=2,\text{所以 } BD-AD=2.$$

又 $BD>AD$,所以 $BD+AD=\sqrt{(BD-AD)^2+4BD\cdot AD}=2\sqrt{2}$.

所以所求方程为:$x^2-2\sqrt{2}x+1=0$.

思维拓展 (杭州市,2002)已知某二次项系数为 1 的一元二次方程的两个实数根为 p,q,且满足关系式 $\begin{cases}p+q(p+1)=5,\\ p^2q+pq^2=6.\end{cases}$ 试求这个一元二次方程.

解 设此一元二次方程为 $x^2+bx+c=0$,

由根与系数关系有:

$p+q=-b$,$pq=c$, ①

因为 $\begin{cases}p+q(p+1)=5,\\ p^2q+pq^2=6.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}(p+q)+pq=5,\\ pq(p+q)=6.\end{cases}$

可见,以 $p+q$,pq 为根的一元二次方程为 $t^2-5t+6=0$,

解得 $t_1=2$,$t_2=3$.

所以 $\begin{cases}p+q=2,\\ pq=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p+q=3,\\ pq=2.\end{cases}$

由①知 $\begin{cases}b=-2,\\ c=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=-3,\\ c=2.\end{cases}$

所以所求的一元二次方程为 $x^2-3x+2=0$ 或 $x^2-2x+3=0$,而方程 $x^2-2x+3=0$ 无实数解,应舍去.

因此,所求方程为 $x^2-3x+2=0$.

【例 6】 (济南市,2001)已知关于 x 的方程 $k^2x^2+(2k-1)x+1=0$ 有

两个不相等的实数根 x_1，x_2.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 是否存在实数 k，使方程的两实数根互为相反数？如果存在，求出 k 的值 如果不存在，请说明理由.

解 (1) 根据题意，得 $\Delta=(2k-1)^2-4k^2>0$，

解得 $k<\frac{1}{4}$，

所以当 $k<\frac{1}{4}$ 时，方程有两个不相等的实数根.

(2) 存在. 如果方程的两实数根 x_1，x_2 互为相反数，则 $x_1+x_2=-\frac{2k-1}{k^2}=0$，　　①

解得 $k=\frac{1}{2}$. 经检验 $k=\frac{1}{2}$ 是方程①的解.

所以当 $k=\frac{1}{2}$ 时，方程的两实根 x_1 与 x_2 互为相反数.

读了上面的解答过程，请判断是否有错误？如果有，请指出错误之处，并直接写出正确答案.

思维技巧　阅读探求题是近几年中考试卷中出现的一种新题型，本题是一道以一元二次方程为依托，涉及判别式、根与系数关系等知识的综合题，也是查寻解题过程是否错误的阅读理解题，能充分暴露思维过程，通过阅读、观察、推理、归纳，从判别式、字母系数的限制条件等方面去查寻错误.

解　(1) 漏掉 $k\neq0$，正确答案为 :当 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

(2) $k=\frac{1}{2}$ 不满足 $\Delta>0$，正确答案为 :不存在实数 k，使方程的两实根互为相反数.

激活思维　这道题的设计抓住了解题过程中易出现的思维漏洞 :运用根的判别式时易忽视二次项系数不为零的条件 (即 $k\neq0$) 运用根与系数关系时，不注意方程是否存在实数根，即忽视 $\Delta\geqslant0$ 为前提条件. 先阅读后评判，改变了解题者的角色，即由原来的解答者变为评判者，激发学生去积极思维.

同类变式　(三明市，2002) 这是一名学生编制的初中数学练习题 :“x_1，x_2 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个实数根，求 ${x_1}^2+{x_2}^2$ 的值. ”另一位初三学

生的解答是："因为 $x_1+x_2=x_1x_2=2$，所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x\backslash -2)^2-2x_1x_2=2^2-2\times2=0$."

(1) 针对练习题和解答的正误作出判断，再简要说明理由；

(2) 只把原练习题中的方程进行变式，其他条件不变，改求 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值.

解 (1) 练习题和解答都是错误的.

错误的原因是：

因为 $\triangle=(-2)^2-4\times1\times2=-4<0$，

所以方程 $x^2-2x+2=0$ 没有实数根，本题无解.

(2) 例如将方程变成为"$x^2-2x-2=0$"

因为 $\triangle=(-2)^2-4\times1\times(-2)=12>0$，

且 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-2$.

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{-2}=-1$.

思维拓展 (荆门市，2002) 阅读下面范例，按要求解答问题.

已知实数 a，b，c 满足 $a+b+2c=1$，$a^2+b^2+6c+\frac{3}{2}=0$，求 a、b、c 的值.

解法一 由已知得 $a+b=1-2c$， ①

$(a+b)^2-2ab+6c+\frac{3}{2}=0$. ②

将 ①代入②，整理得 $4c^2+2c-2ab+\frac{5}{2}=0$，所以 $ab=2c^2+c+\frac{5}{4}$. ③

由①、③可知，a、b 是关于 t 的方程 $t^2-(1-2c)t+2c^2+c+\frac{5}{4}=0$ ④

的两个实数根.

所以 $\triangle=(1-2c)^2-4\left(2c^2+c+\frac{5}{4}\right)\geqslant0$，即 $(c+1)^2\leqslant0$.

而 $(c+1)^2\geqslant0$，所以 $c+1=0$，$c=-1$.

将 $c=-1$ 代入④，得 $t^2-3t+\frac{9}{4}=0$，$t_1=t_2=\frac{3}{2}$，即 $a=b=\frac{3}{2}$，

所以 $a=b=\frac{3}{2}$，$c=-1$.

解法二 因为 $a+b+2c=1$，$a+b=1-2c$，设 $a=\frac{1-2c}{2}+t$，$b=\frac{1-2c}{2}-t$. ①

因为 $a^2+b^2+6c+\frac{3}{2}=0$，所以 $(a+b)^2-2ab+6c+\frac{3}{2}=0$. ②

将①代入②，得 $(1-2c)^2-2\left(\frac{1-2c}{2}+t\right)\left(\frac{1-2c}{2}-t\right)+6c+\frac{3}{2}=0$，

整理，得 $t^2+(c^2+2c+1)=0$，即 $t^2+(c+1)^2=0$，所以 $t=0$，$c=-1$.

将 t、c 的值同时代入①，得 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{3}{2}$.

所以 $a=b=\frac{3}{2}$，$c=-1$.

解法一是构造一元二次方程解决问题，若两实数 x、y 满足 $x+y=m$，$xy=n$，则 x、y 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-mt+m=0$ 的两个实数根，然后利用判别式求解.

解法二是采用均值换元解决问题，若实数 x、y 满足 $x+y=m$，则可设 $x=\frac{m}{2}+t$，$y=\frac{m}{2}-t$. 一些问题根据条件，若合理运用这种换元技巧，则能使问题顺利解决.

下面给出两个问题，解答其中任意一题：

(1) 用另一种方法解答范例中的问题；

(2) 选用范例中的一种方法解答下列问题：

已知实数 a，b，c 满足 $a+b+c=6$，$a^2+b^2+c^2=12$. 求证：$a=b=c$.

解　(1) 由已知等式消去 c，得

$a^2+b^2+3(1-a-b)+\frac{3}{2}=0$，即 $a^2+b^2-3a-3b+\frac{9}{2}=0$.

所以 $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2=0$，所以 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{3}{2}$.

于是由 $a+b+2c=1$，得 $c=-1$，故 $a=b=\frac{3}{2}$，$c=-1$.

(2) 由已知得 $a+b=6-c$， ①

$(a+b)^2+c^2-2ab=12$， ②

将①代入②，得 $(6-c)^2+c^2-2ab=12$，即 $ab=c^2-6c+12$， ③

由①、③可知，a，b 是关于 t 的方程 $t^2-(6-c)t+c^2-6c+12=0$ ④

的两个实数根，

所以 $\Delta=(6-c)^2-4(c^2-6c+12)\geqslant 0$，

化简，得 $(c-2)^2\leqslant 0$，而 $(c-2)^2\geqslant 0$，

所以 $c=2$.

将 $c=2$ 代入④，解得 $t_1=t_2=2$，即 $a=2$，$b=2$，

故 $a=b=c$.

综合能力测试

基础能力测试

1．填空题

(1) (辽宁省，2003) 若方程 $x^2+x-1=0$ 的两根分别为 x_1、x_2，则 $x_1^2+x_2^2=$_____.

(2) (广西，2003) 如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两根分别为 $\sqrt{2}-1$，$\sqrt{2}+1$，那么 $p=$_____，$q=$_____.

(3) (新疆维吾尔自治区，2001) 关于 x 的方程 $4x^2+kx-6=0$ 的一个根是 3，另一根是 x_1，则 $k=$_____，$x_1=$_____.

(4) (黄冈市，2002) 如果 a，b 是方程 $x^2+x-1=0$ 的两个实数根，那么代数式 $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ 的值是_____.

(5) (河南省，2002) 若 m、n 是方程 $x^2+2002x-1=0$ 的两个实数根，则 m^2n+mn^2-mn 的值是_____.

(6) (深圳市，2002) 如果实数 a，b 满足 $(a+1)^2=3-3(a+1)$，$3(b+1)=3-(b+1)^2$，那么 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值为_____.

(7) (上海市，2001) 如果 x_1，x_2 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个根，那么代数式 $(x_1+1)(x_2+1)$ 的值是_____.

(8) (北京西城区，2001) 若方程 $x^2-2x+k=0$ 的两根的倒数和是 $\frac{8}{3}$，则 $k=$_____.

(9) (温州市，2001) 若 x_1，x_2 是方程 $x^2-2x+m=0$ 的两个实数根，且 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$，则 m 的值等于_____.

(10) (连云港市，2001) 若 a、b 是关于 x 的方程 $x^2-mx-1=0$ 的两实数根，则 $(a-b)^2=$_____. (用含 m 的代数式表示)

(11) (贵阳市，2001) 已知关于 x 的方程 $x^2-4x+k-1=0$ 的两根之差等于 6，那么 $k=$_____.

(12) (呼和浩特市,2001) 已知 x_1 和 x_2 为一元二次方程 $2x^2-2x+3m-1=0$ 的两个实根,并且 x_1 和 x_2 满足不等式 $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2-4}<1$,则实数 m 的取值范围是_____.

(13) (新疆,2000) 设方程 $x^2-3x-2=0$ 的两根分别为 x_1,x_2,以 ${x_1}^2$,${x_2}^2$ 为根的一元二次方程是_____.

(14) (山东聊城,2000) 已知关于 x 的方程 $x^2+mx+m=0$ 的两个实数根的平方和等于 3,则 $m=$_____.

(15) (四川内江,2000) 如果 m,n 是两个不相等的实数,且满足 $m^2-2m=1$,$n^2-2n=1$,那么代数式 $2m^2+4n^2-4n+1999=$_____.

2. 选择题

(1) (青海省,2002) 若 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-3=0$ 的两个根,则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值是 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. 0　　D. ±3

(2) (辽宁省,2002) 若 x_1,x_2 是方程 $2x^2-4x+1=0$ 的两个根,则 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ 的值为 (　　)

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

(3) (四川眉山,2002) 以 -2,1 为根的一元二次方程是 (　　)

A. $x^2+x-2=0$　　B. $x^2-x-2=0$

C. $x^2+x+2=0$　　D. $x^2-x+2=0$

(4) (淄博市,2002) 若 $ab\neq1$,且有 $5a^2+2002a+9=0$ 及 $9b^2+2002b+5=0$,则 $\frac{a}{b}$ 的值是 (　　)

A. $\frac{9}{5}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $-\frac{2002}{5}$　　D. $-\frac{2002}{9}$

(5) (昆明市,2002) 已知 α、β 是方程 $2x^2-3x-1=0$ 的两个实数根,则 $(\alpha-2)(\beta-2)$ 的根是 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{13}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

(6) (广西壮族自治区,2001) 方程 $x^2+3x-6=0$ 与 $x^2-6x+3=0$ 所

有根的乘积为（　　）

A. -18　　B. 18　　C. -3　　D. 3

(7) (北京市昌平区,2001) 若方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个实数根为 x_1,x_2,则$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$的值是（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 6　　D. -6

(8) (福州市,2003) 已知 α、β 满足$\alpha+\beta=5$ 且 $\alpha\beta=6$,以 α、β 为两根的一元二次方程是（　　）

A. $x^2+5x+6=0$　　B. $x^2-5x+6=0$

C. $x^2-5x-6=0$　　D. $x^2+5x-6=0$

(9) (杭州市,2000) 若 x_1,x_2 是方程 $x^2+3x-5=0$ 的两个根,则 $(x_1+1)(x_2+1)$ 的值为（　　）

A. -7　　B. -1

C. $-1+\sqrt{29}$　　D. $-1-\sqrt{29}$

(10) (三明市,2000) 已知 α 和 β 是方程 $2x^2+3x-4=0$ 的两个实数根,则 $\alpha+\alpha\beta+\beta$ 的值是（　　）

A. -7　　B. $-3\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 7

(11) (杭州市,2003) 设 x_1,x_2 是关于 x 的方程$x^2+px+q=0$ 的两根,x_1+1,x_2+1 是关于 x 的方程$x^2+qx+p=0$ 的两根,则 p,q 的值分别等于（　　）

A. $1,-3$　　B. $1,3$

C. $-1,-3$　　D. $-1,3$

(12) (河北省,2002) 已知一个直角三角形的两条直角边的长恰好是方程 $2x^2-8x+7=0$ 的两个根,则这个直角三角形的斜边长是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 3　　C. 6　　D. 9

(13) (四川眉山市,2001) 一元二次方程 $x^2-3x-1=0$ 与 $x^2-x+3=0$ 的所有实数根的和等于（　　）

A. 2　　B. -4　　C. 4　　D. 3

(14) (天门、仙桃、潜江,2002) 若 a、b 是方程$x^2+2x-2002=0$ 的两个不相等的实数根,则 a^2+3a+b 的值是（　　）

A. -2002　　B. 2002　　C. 2001　　D. 2000

(15) (浙江台州,2000) 已知方程 $x^2-(m-1)x+(m-7)=0$ 有一个正根,一个负根,那么 (　　)

A. $m>7$　　B. $m>1$　　C. $m<1$　　D. $m<7$

3. (江苏盐城,2002) 设 α、β 是关于 x 的方程 $kx^2+2(k-2)x+k+4=0$ 的两个实数根,且 α、β 满足 $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=5$,求 k 的值.

4. (江苏省南京市,2002) 已知关于 x 的方程 $x^2-kx-2=0$.

(1) 求证:方程有两个不相等的实数根;

(2) 设方程的两根为 x_1,x_2,如果 $2(x_1+x_2)>x_1x_2$,求 k 的取值范围.

5. (重庆市,2002) 已知 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $x^2-kx+5(k-5)=0$ 的两个正实数根,且满足 $2x_1+x_2=7$,求实数 k 的值.

6. (河南省,2003) 已知关于 x 的方程 $x^2+(4k+1)x+2k-1=0$.

(1) 求证此方程一定有两个不相等的实数根;

(2) 若 x_1,x_2 是方程的两个实数根,且 $(x_1-2)(x_2-2)=2k-3$,求 k 的值.

7. (福州市,2003) 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+1)x+\frac{1}{4}k^2+1=0$.

(1) k 取什么值时,方程有两个实数根;

(2) 如果方程的两个实数根 x_1、x_2 满 $|x_1|=x_2$.求 k 的值.

8. (呼和浩特市,2002) 已知方程 $(x-1)(x-2)=k^2$,其中 k 为实数且 $k\neq0$,不解方程证明:

(1) 这个方程有两个不相等的实数根;

(2) 方程的一个根大于 1,另一根小于 1.

9. (广州市,2002) 当 a 取何值时,关于未知数 x 的方程 $ax^2+4x-1=0$ 只有正实数根?

10. (北京市海淀区,2000) 已知关于 x 的方程 $x^2+3x+a=0$, ①的两个实数根的倒数和等于 3,关于 x 的方程 $(k-1)x^2+3x-2a=0$, ②有实数根且 k 为正整数,求代数式 $\frac{k-1}{k-2}$ 的值.

11. (南通市,2002) 已知 x_1,x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(m+2)x+2m^2-1=0$ 的两个实数根,且满足 $x_1^2-x_2^2=0$,求 m 的值.

12．若实数 m、n、l 满足 $m-n=8$，$mn+l^2+16=0$，求证：$m+n+l=0$.

探究能力测试

13．（山东菏泽，2001）已知关于 x 的方程 $x^2+(8-4m)x+4m^2=0$.

（1）若方程有两个相等的实数根，求 m 的值，并求出这时方程的根；

（2）是否存在正数 m，使方程的两个实数根的平方和等于 136？若存在，请给出满足条件的 m 的值，若不存在，请说明理由.

14．（厦门市，2000）已知：$\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+3)x+k^2+3k+2=0$ 的两个实数根，第三边 BC 的长为 5.

（1）k 为何值时，$\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形？

（2）k 为何值时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，并求 $\triangle ABC$ 的周长.

15．（北京市海淀区，2000）已知：关于 x 的方程 $x^2+3x-m=0$ 的两个实数根的平方和等于 11，求证：关于 x 的方程 $(k-3)x^2+kmx-m^2+6m-4=0$ 有实数根.

16．（北京市，2003）已知：关于 x 的方程 $x^2-2mx+3m=0$ 的两个实数根是 x_1，x_2，且 $(x_1-x_2)^2=16$. 如果关于 x 的另一个方程 $x^2-2mx+6m-9=0$ 的两个实数根都在 x_1 和 x_2 之间，求 m 的值.

12.5 二次三项式的因式分解

重点　利用求根公式分解二次三项式.

难点　二次三项式分解的灵活应用.

探究点　二次三项式分解公式为 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $(a\neq 0)$. 公式的左边与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 左边结构完全相同，右边是含方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两实根的乘积式，因此二次三项式的分解与一元二次方程有着十分密切的关系，但要注意两者的区别，判别式在二次三项式中的作用有类似于它在一元二次方程中的作用. 判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 值的正负决定二次三项式 ax^2+bx+c 在实数范围内是否能进行分解，在实际处理问题时，要注意二次三项式与一元二次方程两者的相互转化.

学习方法技巧

建立一元二次方程、求根公式、判别式等知识与二次三项式的联系，理解用根与系数关系和求根公式推导二次三项式分解过程是学好本节内容的一个关键. 注意它与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的知识点间的内在联系和思维的迁移，逆用 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 进行灵活解题.

能力升级捷径

【例 1】　在实数范围内分解因式

(1) $2x^2+3x-4$；(2) $2x^2-2\sqrt{2}x-5$；

(3) $4x^2y^2+xy-1$；(4) $5x^2+xy-2y^2$.

思维技巧　当二次三项式用乘法公式和十字相乘法很难分解时，常用求根公式法将二次三项式 ax^2+bx+c 分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$，但不能漏乘二次项系数 a，同时还要注意符号问题和代数式的恒等变形.

解 (1) 令 $2x^2+3x-4=0$，

用求根公式求出方程两根为 $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}$，$x_2=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}$，

所以 $2x^2+3x-4=2\left(x-\dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}\right)$，

即 $2x^2+3x-4=2\left(x-\dfrac{\sqrt{41}-3}{4}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{41}+3}{4}\right)$；

用同样方法可得：

(2) $2x^2-2\sqrt{2}x-5=2\left(x-\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}\right)$；

(3) $4x^2y^2+xy-1=4\left(xy-\dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}\right)\left(xy+\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$

$=\left(2xy-\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}\right)\left(2xy+\dfrac{\sqrt{17}+1}{4}\right)$.

(4) $5x^2+xy-2y^2=5\left(x-\dfrac{\sqrt{41}-1}{10}y\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{41}+1}{10}y\right)$.

激活思维　这四个小题都是二次三项式的分解. 第 (3) 小题中，把 xy 看成整体；第 (4) 小题在分解过程中，切莫把 y 漏掉.

同类变式　在实数范围内分解因式

(1) $2x^2-8x+5$；

(2) $12x^2-7\sqrt{2}xy+2y^2$；

(3) $4x^2y^2-8xy+1$.

解 (1) 因为方程 $2x^2-8x+5=0$ 的两根是 $x_1=\frac{4+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\frac{4-\sqrt{6}}{2}$，

所以 $2x^2-8x+5=2\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)\left(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)$.

(2) 因为关于 x 的方程 $12x^2-7\sqrt{2}xy+2y^2=0$ 的两根为

$x_1=\frac{\sqrt{2}}{3}y$，$x_2=\frac{\sqrt{2}}{4}y$.

所以 $12x^2-7\sqrt{2}xy+2y^2=12\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}y\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}y\right)$

$=(3x-\sqrt{2}y)(4x-\sqrt{2}y)$.

(3) 因为关于 xy 的方程 $4(xy)^2-8xy+1=0$ 的两根为

$(xy)_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，$(xy)_2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

所以 $4x^2y^2-8xy+1=4\left(xy-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(xy-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

$=(2xy-2-\sqrt{3})(2xy-2+\sqrt{3})$.

思维拓展 在实数范围内分解下列各式

(1) $-3x^2-2xy+4y^2$；

(2) $x^2-4xy+4y^2-10x+20y+24$.

解 (1) 因为方程 $-3x^2-2xy+4y^2=0$ 两根为

$x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}y$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}y$.

所以 $-3x^2-2xy+4y^2=-3\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{3}y\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{3}y\right)$.

(2) 因为 $x^2-4xy+4y^2-10x+20y+24=0$，

即 $(x-2y)^2-10(x-2y)+24=0$，

所以 $x-2y=4$ 或 $x-2y=6$，

即 $x^2-4xy+4y^2-10x+20y+24$

$=(x-2y-4)(x-2y-6)$.

【例2】 当 k 为何值时，二次三项式 $4x^2-kx+3$ 是一个完全平方式.

思维技巧 二次三项式 ax^2+bx+c 因式分解后的结果是 $a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实数根，又因为对

于任意正数 a 都有 $a=(\sqrt{a})^2$，所以 ax^2+bx+c 能否是一个完全平方式，关键在于 $(x-x_1)$ 与 $(x-x_2)$ 是否相同，即 x_1 和 x_2 是否相等，因此二次三项式 ax^2+bx+c 是完全平方式的条件是判别式 $\Delta=0$.

解　令　$4x^2-kx+3=0$，

当　$\Delta=(-k)^2-4\times4\times3=k^2-48=0$，

即　$k=\pm4\sqrt{3}$ 时，二次三项式 $4x^2-kx+3$ 是一个完全平方式.

激活思维　二次三项式的因式分解与一元二次方程的两根有着内在联系，而一元二次方程两实根的情况又离不开根的判别式，要使二次三项式是一个完全平方式，就是要它所对应的一元二次方程有两相等实根，进而得出判别式 $\Delta=0$. 学生解答此题时，往往由于思维不能有效迁移，只好用完全平方公式猜结果，常常遗漏 $k=-4\sqrt{3}$.

同类变式　已知二次三项式 $3x^2+4x+m$，当 m 为何值时，(1) $3x^2+4x+m$ 能在实数范围内因式分解；(2) $3x^2+4x+m$ 不能在实数范围内因式分解；(3) $3x^2+4x+m$ 是完全平方式.

解　因为　$\Delta=b^2-4ac=16-12m$，

所以　(1) 当 $16-12m\geqslant0$　即 $m\leqslant\frac{4}{3}$ 时，$3x^2+4x+m$ 能在实数范围内因式分解；

(2) 当 $16-12m<0$　即 $m>\frac{4}{3}$ 时，$3x^2+4x+m$ 不能在实数范围因式分解；

(3) 当 $16-12m=0$，即 $m=\frac{4}{3}$ 时，$3x^2+4x+m$ 是完全平方式.

思维拓展　k 取何值时，方程 $x^2-4mx+4x+3m^2-2m+4k=0$ (m 为有理数) 的根为有理数？

分析　根据一元二次方程的求根公式知，若使方程的根为有理数，则需使原方程的判别式 Δ (可视为关于 m 的二次三项式) 是一个完全平方式，即 $\sqrt{b^2-4ac}$ 为有理数，又根据二次三项式因式分解公式，若使 Δ 是完全平方式，则关于 m 的方程 $\Delta=0$ 的根 $m_1=m_2$，即方程 $\Delta=0$ 的判别式 $\Delta_1=0$，进而可求得 k 的值.

解　原方程化为一般形式，得

$$x^2-4(m-1)x+(3m^2-2m+4k)=0.$$

要使方程有有理根，只需使 Δ 为关于 m 的完全平方式.

因为 $\Delta=[-4(m-1)]^2-4\times1\times(3m^2-2m+4k)$

$=4m^2-24m-16k+16.$

要使 $\Delta=4m^2-24m-16k+16$ 是关于 m 的完全平方式.

则 $\Delta_1=(-24)^2-4\times4(-16k+16)=0.$

$6^2+16k-16=0$，所以 $k=-\frac{5}{4}$.

因此，当 $k=-\frac{5}{4}$ 时，方程有有理根.

综合能力测试

基础能力测试

1．填空题

(1) (南京市，2003) 在实数范围内分解因式：$x^2-2\sqrt{3}x+3=$_____.

(2) 若二次三项式 x^2-mx+1 在实数范围内能分解因式，则 m 的取值范围是_____.

(3) 解方程 $4x^2+8x-1=0$，得 $x_1=$_____，$x_2=$_____，则 $4x^2+8x-1$ 分解因式为_____.

(4) 解关于 x 的方程 $3x^2+4xy-4y^2=0$，得 $x_1=$_____，$x_2=$_____，则 $3x^2+4xy-4y^2$ 可分解因式为_____.

(5) 方程 $3x^2+bx+c=0$ 的两个根为 1 和 2，则分解因式 $3x^2+bx+c=$_____.

(6) 已知 3 和 4 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根，则分解因式 $x^2+bx+c=$_____.

(7) 若方程 $-x^2+ax+c=0$ 的两个实数根为 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$，则 $-x^2+ax+c$ 分解因式的结果是_____.

(8) $x^2y^2-2\sqrt{2}xy-3$ 在实数范围内分解因式是_____.

(9) 如果 $x^2+kx+5(k-5)$ 是关于 x 的完全平方式，那么 k 的值为_____.

(10) 在实数范围内分解因式 $(x+2y)^2-4(x+2y)+3=$_____.

2．选择题

(1) (山东聊城，2001) 关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx+n=0$ 的两根为 a_1，a_2，则 x^2-mx+n 可分解为（　　）

A．$(x-a_1)(x-a_2)$　　B．$(x+a_1)(x+a_1)$

C．$(x-a_1)(x+a_2)$　　D．$(x+a_1)(x-a_2)$

(2) (武汉市，2000) 一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 3，4，那么二次三项式 x^2+px+q 可分解为（　　）

A．$(x+3)(x-4)$　　B．$(x-3)(x+4)$

C．$(x-3)(x-4)$　　D．$(x+3)(x+4)$

(3) 在实数范围内分解因式：$2x^2-4x-3=$（　　）

A．$\left(x+1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

B．$\left(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

C．$2\left(x+1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

D．$2\left(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

(4) 分解因式：$3x^2+2xy-y^2=$（　　）

A．$(3x+y)(x-y)$　　B．$3\left(x-\frac{1}{3}y\right)(x+y)$

C．$(3x+y)(x+y)$　　D．$(3x-y)(x+y)$

(5) 分解因式：$3x^2+7x+2=$（　　）

A．$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)$　　B．$(3x+1)(x+2)$

C．$\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+2)$　　D．$(3x+1)(3x+6)$

(6) (西安市，1998) 把 $2x^2-8xy+5y^2$ 分解因式得（　　）

A．$(x-5y)(2x-y)$　　B．$\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}y\right)\left(x+\frac{4-\sqrt{6}}{2}y\right)$

C．$2\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)\left(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)$　　D．$2\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}y\right)\left(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}y\right)$

(7) 已知方程 $2x^2-5x-k=0$ 的两个根是 $x_1=3$，$x_2=-\frac{1}{2}$，那么 $-2x^2+5x+k$ 分解因式得（　　）

A. $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$　　B. $-2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

C. $-(x-3)(x+1)$　　D. $-(x-3)(2x+1)$

(8) 在实数范围内分解因式：$(m-2)x^2-(2m+1)x-(3m-1)$，正确的答案是（　　）

A. $(x+1)[(m-2)x+(3m-1)]$

B. $(x-1)[(m-2)x+(3m-1)]$

C. $(x+1)[(m-2)x-(3m-1)]$

D. $(x-1)[(m-2)x-(3m-1)]$

3. 在实数范围内分解因式：

(1) $3x^2-10x+7$；

(2) $-2x^2+8xy-y^2$；

(3) $x^2+2(3-\sqrt{2})x+11-6\sqrt{2}$；

(4) $(x^2-5x)^2+2(x^2-5x)-24$.

探究能力测试

4. k 为何值时，二次三项式 $x^2-2(k+1)x+k+7$ 是一个完全平方式.

5. 求证：当关于 x 的二次三项式 $x^2+2x-(m+9)$ 不能在实数范围内分解因式时，关于 y 的二次三项式 $y^2+my-2m+5$ 一定能在实数范围内分解因式.

6. 已知：$\sqrt{6}x^2-xy-\sqrt{6}y^2=0$，且 $xy>0$，求 $\frac{2x-\sqrt{6}y}{\sqrt{3}x-y}$ 的值.

12.6　一元二次方程的应用

重点　列方程解应用题.

难点　找出已知量与未知量之间的等量关系.

探究点　近年来各地中考试卷中出现了一元二次方程与退耕还林问题、环境保护问题、利润问题、市场经济问题等为情景的试题，从数学趣题中寻求等量关系，探究新的数学思想和思维规律. 启迪人们对当今社会的热点

问题、焦点问题的关注和思考，探索解决这些问题的方法与途径.

学习方法技巧　一元二次方程的应用常常以当今社会所关注的热点问题和焦点问题为素材. 这类问题虽然贴近生活，却不拘一格，因此平时热心关注社会，积累生活经验是学好本节内容的一个前提. 在较复杂的社会背景中，运用方程的思想，寻找等量关系，列出方程，是一个关键.

能力升级捷径　【例 1】 2000 年 4、5 月份，我国大部分地区出现了飞尘扬沙和风暴天气，有关专家指出，这主要是由于乱砍滥伐树木，使生态环境遭到严重破坏所致，因此，保护森林资源已成为目前一项十分紧迫的任务，为了有效地控制沙尘暴等恶劣天气对人类生存环境的破坏，我国北方某地决定加快植树造林的速度，计划用两年的时间将防风林的面积，从现在的 2 万亩扩大到 2.42 万亩，求平均每年增长的百分率.

思维技巧　这是一道以保护生态资源为背景的有关增长率问题的应用题. 增长率是指增长数与基准数的比. 如果设基准数为 a，增长率为 x，那么第一次增长后的量为 $a(1+x)$. 这一数量又是第二次增长的基准数，增长两次的量是 $a(1+x)+a(1+x)x=a(1+x)^2$.

解　设每年的增长率为 x.

根据题意，得

$2(1+x)^2=2.42$，

解得　$x_1=0.1=10\%$，$x_2=-2.1$（不合题意舍去）.

答：平均每年增长的百分率为 10%.

激活思维　把列方程解增长率的数学问题置于北方某地区 2000 年 4、5 月份气候这一实际问题之中，既考查了数学知识，又启迪人们去思考飞尘扬沙和风暴等恶劣天气对人类生存环境的破坏，这种现象是怎样形成？又该怎样去治理？……这些问题对学生的发展很有益处.

同类变式　（广州市，2003）2003 年 2 月 27 日《广州日报》报道：2002 年底广州市自然保护区覆盖率（即自然保护区面积占全市面积的百分比）为 4.65%，尚未达到国家 A 级标准. 因此，市政府决定加快绿化建设，力争到 2004 年底自然保护区覆盖率达到 8% 以上. 若要达到最低目标 8%，则广州

市自然保护区面积的年平均增长率应是多少？(结果保留三位有效数字)

解　设广州市总面积为 1,广州市自然保护区面积年平均增长率为 x,根据题意,得

$1\times4.65\%\times(1+x)^2=1\times8\%$.

$(1+x)^2\approx1.720$.

$\because\quad x>0\qquad\therefore\quad 1+x>0\qquad\therefore\quad 1+x\approx1.312.\qquad x=0.312.$

答 要达到最低目标,自然保护区面积的年平均增长率应为 31.2%.

思维拓展　(云南曲靖,2000)"坡耕地退耕还林还草"是国家对解决西部地区水土流失生态问题、帮助广大农民脱贫致富提出的一项战略措施,某村长为带领全村群众自觉投入坡耕地退耕还林行动,率先垂范,1999 年将自家的坡耕地全部退耕,并于当年承包 20 亩坡耕地的还林还草及管护任务,而实际完成的亩数增加的百分率为 x,如果保持这一增长率不变,2000 年村长可完成 28.8 亩坡耕地还林还草的任务.

(1) 求增长率 x;

(2) 如果该村有 30 户人家,每户均以村长 2000 年可完成的亩数为准,则全村 2000 年可完成坡耕地还林还草任务多少亩?如果国家按每亩坡耕地 230 元(折算资金)给予补助,则国家将对该村投入补助资金多少万元?

解　(1) 依题意,得

$$20(1+x)^2=28.8,$$

解之,得　$x_1=0.2,x_2=-2.2$(舍去),

所以　$x=0.2=20\%$.

(2) $30\times28.8=864$(亩)

$864\times230=198720$(元)≈19.87(万元)

答 增长率为 20%　全村 2000 年可完成坡耕地还林还草任务 864 亩,国家对该村投入补助资金约 19.87 万元.

【例 2】　(吉林省,2000)如图 12－2,某小区规划在一个长为 40 m,宽为 26 m 的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的甬路,使其中两条与 AB 平行,另一条与 AD 平行,其余部分种草,若使每一块草坪的面积为 144 m^2,求甬路的宽度?

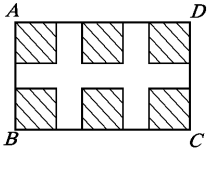


图 12－2

思维技巧　如果从总面积中减去各条甬路面

积,来列方程很繁,不妨把各小块矩形草坪平移后拼成一大块矩形草坪整体思考,问题便显得轻而易举.

解　设甬路宽为 x m,

依题意列方程　$(40-2x)(26-x)=144\times 6$.

解得　$x=2$.

答:甬路宽为 2 m.

激活思维　解答这类问题时,若从单个单个小块去思考时,列方程往往很复杂,不妨从整体去思考,运用等积变形.这种化归的方法、整体代换的思想常常可使问题巧解.

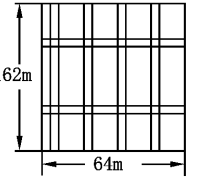


图 12－3

同类变式　一块矩形耕地大小尺寸如图 12－3 所示,要在这块地上沿东西和南北方向分别挖 2 条和 4 条水渠,如果水渠的宽相等,而且要保证余下的可耕地面积为 9600 m^2,那么水渠应挖多宽?

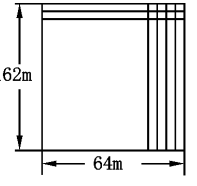


图 12－4

分析　本题考查应用方程知识解决实际问题的能力.这类问题的特点是,挖渠所占用土地面积只与挖渠的条数、渠道的宽度有关,而与渠道的位置无关,为了研究问题方便可分别把沿东西和南北方向挖的渠道移动到一起(最好靠一边),如图 12－4 所示,那么剩余可耕的长方形土地的长为 $(162-2x)$ m,宽为 $(64-4x)$ m.

解　设水渠应挖 x m 宽,依题意,得

$$(162-2x)(64-4x)=9600,$$

化简,得　$x^2-97x+96=0$,

解得　$x_1=1$,$x_2=96$(舍去).

答:水渠应挖 1 m 宽.

思维拓展　(泉州市,2002)某中学有一块长为 a m,宽为 b m 的矩形场地,计划在该场地上修筑宽都为 2 m 的两条互相垂直的道路,余下的四块矩形小场地建成草坪.

(1)如图 12－5,请分别写出每条道路的面积(用含 a 或含 b 的代数式

表示)；

(2) 已知 $a:b=2:1$，并且四块草坪的面积之和为 312 m^2，试求原来矩形场地的长与宽各为多少米？

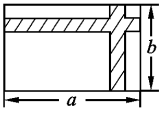


图 12－5

(3) 在(2)的条件下，为进一步美化校园，根据实际情况，学校决定对整个矩形场地作如下设计(要求同时符合下述两个条件)：

条件① 在每块草坪上各修建一个面积尽可能大的菱形花圃(花圃各边必须分别与所在草坪的对角线平行)，并且其中有两个花圃的面积之差为 13 m^2；

条件② 整个矩形场地(包括道路、草坪、花圃)为轴对称图形.

请你画出符合上述设计方案的一种草图(不必说明画法与根据)，并求出每个菱形花圃的面积.

解 (1) 这两条道路的面积分别为 $2a$ m^2 与 $2b$ m^2. (2) 设 $b=x$ m，$a=2x$ m，依题意得：$x\cdot 2x-(2x+4x-4)=312$. 整理得：$x^2-3x-154=0$，解得：$x_1=14$，$x_2=-11$(舍去). 所以 $b=14$，$a=2x=28$. 即矩形的长为 28 m，宽为 14 m. (3) 符合设计方案的一种草图如图 12－6(1)所示，其中四个菱形花

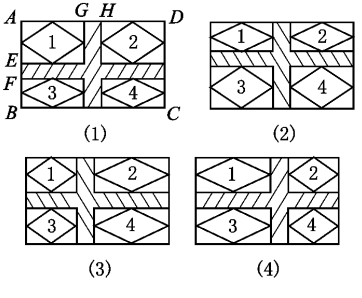


图 12－6

圃中，第 1 个与第 2 个，第 3 个与第 4 个花圃的面积分别相等. 设 $AE=x$，则 $FB=14-2-x=12-x$ (m)，$AG=\frac{28-2}{2}=13$ (m). 依题意得：$\frac{1}{2}\times 13\cdot x-$

$\frac{1}{2}(12-x)\times 13=13$，解得：$x=7$（m），所以大菱形花圃面积为$\frac{1}{2}\times 7\times 13=45.5$（$m^2$），小菱形花圃面积为$\frac{1}{2}\times(12-7)\times 13=32.5$（$m^2$）．（注：其他符合设计方案的三种花圃见下面图 12－7（2）、（3）、（4），同上法仍可求得大、小花圃的面积分别为 45.5 m^2 与 32.5 m^2）

【例 3】　某商店从厂家以每件 21 元的价格购进一批商品，该商品可以自行定价，若每件商品售价为 a 元，则可卖出（350－10a）件，但物价局限定每次商品加价不能超过进价的 20%，商店计划要赚 400 元，需要卖出多少件商品？每件商品应售价多少元？

思维技巧　商品价格的上涨与下跌对获得利润有直接影响，也是市场经济条件下经常发生的事情．熟悉有关背景，了解有关政策是必要的．列方程解此题，要注意题设中物价局规定．

解　设每件商品应售价 x 元，才能使商店赚 400 元，根据题意，得 $(x-21)(350-10x)=400$，

整理，解得 $x_1=25$，$x_2=31$．

又因为　$21\times(1+20\%)=25.2$，而 $x_1<25.2$，$x_2>25.2$，

所以　$x=25$．

当 $x=25$ 时，$350-10x=350-10\times 25=100$．

答：该商店要卖出 100 件商品，每件售 25 元．

激活思维　市场经济为试题创作和思维拓展提供了广阔的空间．一种商品的价格如何调整（上浮或下降）才能达到最大效益，是经营者首先关心的问题．本题具有浓郁的生活气息，既学到了知识，又受到了教育，也培养了本分经营的意识．

同类变式　将进货单价为 40 元的商品按 50 元出售时，能卖 500 个，已知该商品每涨价 1 元，其销售量就要减少 10 个，为了赚 8000 元利润，售价应定为多少，这时应进货为多少个？

此题属于经营问题．设商品单价为（50＋x）元，则每个商品得利润［（50＋x）－40］元，因为每涨价 1 元，其销售量会减少 10 个，则每个涨价 x 元，其销售量会减少 10x 个，故销售量为（500－10x）个．为了赚得 8000 元利润，则应有（500－10x）［（50＋x）－40］＝8000．

解　设每个商品涨价 x 元，则销售价为（50＋x）元，销售量为（500－

$10x$)个.

根据题意,得 $(500-10x)[(50+x)-40]=8000$,

整理,得 $x^2-40x+300=0$,

解得 $x_1=10, x_2=30$.

经检验,$x_1=10, x_2=30$ 都符合题意.

当 $x=10$ 时,$50+x=60, 500-10x=400$;

当 $x=30$ 时,$50+x=80, 500-10x=200$.

所以,要想赚 8000 元,售价为 60 元或 80 元,若售价为 60 元,则进货量应为 400 个;若售价为 80 元,则进货量应为 200 个.

思维拓展 (黄冈市,2002)黄冈百货商店服装柜在销售中发现:"宝乐"牌童装平均每天可售出 20 件,每件赢利 40 元.为了迎接"六一"国际儿童节,商场决定采取适当的降价措施,扩大销售量,增加赢利,减少库存.经市场调查发现:如果每件童装每降价 4 元,那么平均每天就可多售出 8 件.要想平均每天在销售这种童装上赢利 1200 元,那么每件童装应降价多少元?

解 设每件童装应降价 x 元,根据题意,得

$$(40-x)(20+2x)=1200,$$

整理得 $x^2-30x+200=0$,

解得 $x_1=10, x_2=20$.

因要尽快减少库存,故 x 应取 20.

答:每件童装应降价 20 元.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (大连市,2000)大连市某乡无公害蔬菜的产量在两年内从 20 t 增加到 35 t,设这两年无公害蔬菜产量的年平均增长率为 x,根据题意,列出方程为_____.

(2) (安徽省,2002)某校去年对实验器材的投资为 2 万元,预计今明两年的投资总额为 8 万元,若设该校这两年在实验器材投资上的平均增长率为 x,则可列方程:_____.

(3) (大连市,2001)我市某企业为节约用水,自建污水净化站.3月份净化污水3000 t,5月份增加到3630 t,则这两个月净化污水的量平均每月增长的百分率为_____.

(4) 已知长方形的周长为36 cm,它的面积为65 cm^2,则长方形的长比宽多_____.

(5) 在三个连续奇数中,最大数与最小数的平方和恰好是中间一个数的10倍,则此三个数是_____.

(6) 有一个三角形的面积为30 cm^2,其一边比这边上的高的4倍少1 cm,那么这一边的长是_____,高是_____.

(7) 直角三角形斜边同它的一条直角边的比等于13∶12,而另一条直角边的长等于15 cm,则这个三角形的周长是_____.

(8) 要用一条长24 cm的铁丝围成一个斜边长是10 cm的直角三角形,则这条直角边的长分别为_____.

2. 选择题

(1) (太原市,2002)生物兴趣小组的学生,将自己收集的标本向本组其他成员各赠送一本,全组共互赠了182本.如果全组有x名同学,则根据题意列出的方程是(　　)

A. $x(x+1)=182$　　B. $x(x-1)=182$

C. $2x(x+1)=182$　　D. $x(x-1)=182\times2$

(2) (南通市,2002)某厂今年3月的产值为50万元,5月上升到72万元,这两个月平均每月增长的百分率是多少?

若设平均每月增长的百分率为x,则列出的方程是(　　)

A. $50(1+x)=72$　　B. $50(1+x)+50(1+x)^2=72$

C. $50(1+x)\times2=72$　　D. $50(1+x)^2=72$

(3) (黑龙江省,2002)哈尔滨市政府为了申办2010年冬奥会,决定改善城市容貌,绿化环境,计划经过两年时间,绿地面积增加44%,这两年平均每年绿地面积的增长率是(　　)

A. 19%　　B. 20%　　C. 21%　　D. 22%

(4) (合肥市,2001)某农场粮食产量是:1998年为1200万斤,2000年为1452万斤,如果平均每年增长率为x,则x需满足的方程是(　　)

A. $1200(1+x)^2=1452$　　B. $1200(1+2x)=1452$

C. $1200(1+x\%)^2=1452$　　D. $1200(1+x\%)=1452$

(5) (济南市,2001)某超市一月份的营业额为200万元,一月、二月、三月的营业额共1000万元,如果平均每月增长率为x,则由题意列方程应为(　　)

A. $200(1+x)^2=1000$　　B. $200+200\cdot2\cdot x=1000$

C. $200+200\cdot3\cdot x=1000$　　D. $200[1+(1+x)+(1+x)^2]=1000$

(6) (龙岩,2001)若两数和为-7,积为12,则这两个数是(　　)

A. 3和4　　B. 2和6

C. -3和-4　　D. 2和-9

(7) (天津市,2002)制造一种产品,原来每件的成本是100元,由于连续两次降低成本,现在的成本是81元,则平均每次降低成本(　　)

A. 8.5%　　B. 9%　　C. 9.5%　　D. 10%

(8) (安徽省,2003)党的十六大提出全面建设小康社会,加快推进社会主义现代化,力争国民生产总值到2020年比2000年翻两番.在本世纪的头二十年(2001年~2020年),要实现这一目标,以十年为单位计算,设每个十年的国民生产总值的增长率都是x,那么x满足的方程为(　　)

A. $(1+x)^2$　　B. $(1+x)^2=4$

C. $1+2x=2$　　D. $(1+x)+2(1+x)=4$

(9) 如图12-7,从正方形铁片上截去2 cm宽的一条长方形,余下的面积是48 cm^2,则原来的正方形铁片的面积是(　　)

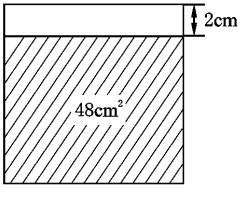


图12-7

A. 8 cm^2

B. 36 cm^2

C. 6 cm^2

D. 64 cm^2

(10) 已知三角形的两边长分别是1和2,第三边的数值是方程$2x^2-5x+3=0$的根,那么这个三角形的周长为(　　)

A. 4　　B. $4\frac{1}{2}$　　C. 4或$4\frac{1}{2}$　　D. 不能确定

(11) 某商品连续两次降价 10% 后价格为 a 元，该商品的原价应为（　　）元.

A. $\frac{a}{1.1^2}$　　B. 1.1^2a　　C. $\frac{a}{0.81}$　　D. 0.9^2a

(12) 利用墙的一边，再用 13 m 的铁丝网围三边，围成一个面积为 20 m^2 的长方形，求这个长方形的两边长，设墙的对边长为 x m，可得方程（　　）

A. $x(13-x)=20$　　B. $x\cdot\frac{13-x}{2}=20$

C. $x\left(13-\frac{1}{2}x\right)=20$　　D. $x\cdot\frac{13-2x}{2}=20$

3. (甘肃，2001) 某校办工厂今年元月份生产课桌椅 1000 套. 二月份因春节放假，减产 10%，三月份、四月份产量逐月上升，四月份产量达到 1296 套，求三、四月份产量的平均增长率.

4. (南京市，2001) 某农户种植花生，原来种植的花生亩产量为 200 kg，出油率为 50% (即每 100 kg 花生可加工成花生油 50 kg). 现在种植新品种花生后，每亩收获的花生可加工成花生油 132 kg，其中花生出油率的增长率是亩产量的增长率的$\frac{1}{2}$，求新品种花生亩产量的增长率.

5. (北京石景山，2002) 某商厦二月份的销售额为 100 万元，三月份销售额下降了 20%. 商厦从四月份起改进经营措施，销售额稳步上升，五月份销售额达到了 135.2 万元，求四、五两月的平均增长率.

6. (北京市西城区，2002) (1) 据 2001 年中国环境状况公报，我国由水蚀和风蚀造成的水土流失面积达 356 万 km^2，其中风蚀造成的水土流失面积比水蚀造成的水土流失面积多 26 万 km^2. 问水蚀与风蚀造成的水土流失面积各多少？

(2) 某省重视治理水土流失问题，2001 年治理了水土流失面积 400 km^2，该省逐年加大治理力度，计划今明两年每年治理水土流失面积都比前一年增长一个相同的百分数，到 2003 年底，使这三年治理的水土流失面积达到 1324 km^2，求该省今明两年治理水土流失面积每年增长的百分数？

7. (内蒙古，2001) 某商厦今年一月份销售额为 60 万元，二月份由于种种原因，经营不善，销售额下降 10%，以后加强改进管理，经减员增效，大大激发了全体员工的积极性，月销售额大幅度上升，到四月份销售额猛增到 96 万元，求三、四月份平均每月增长的百分率是多少？(精确到 0.1%)

8．(大连市，2001) 某大学为改善校园环境，计划在一块长 80 m、宽 60 m 的矩形场地的中央建一矩形网球场，网球场占地面积为 3500 m^2，四周为宽度相等的人行步道，求人行步道宽度．

9．(四川省，2000) 如图 12－8，某单位决定对一块长 30 m、宽 20 m 的矩形空地进行绿化，计划在这块矩形空地的中间划出一块小矩形种花，四周剩下的空地留作道路，要求四周道路的宽度要一样，并且种花的面积是原矩形空地面积的一半，求道路的宽度．(精确到 0.1 m；参考数据：$\sqrt{10}=3.16$，$\sqrt{11}=3.32$，$\sqrt{12}=3.46$，$\sqrt{13}=3.61$，$\sqrt{14}=3.74$，$\sqrt{15}=3.87$)

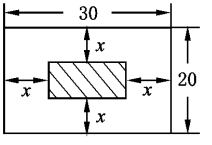


图 12－8

10．(宁夏，2000) 王老师把 500 元钱按一年定期存入银行，到期后，取出了 300 元捐给了灾区，剩下的 200 元和应得的利息又全部按一年定期存入，由于利息下调，第二次存款的年利率是第一次存款年利率的 $\frac{3}{5}$，这样到期后可得利息 15 元．求第一次存款的年利率 (注：不考虑利息税)．

探究能力测试

11．(随州市，2002) 某工厂从今年 1 月份起，每月生产收入是 22 万元，但在生产过程中会引起环境污染，若再按现状生产，将会受到环保部门的处罚，每月罚款 2 万元．如果投资 111 万元治理污染，治污系统可在 1 月份启用，这样，该厂不但不受处罚，还可降低生产成本，使 1 至 3 月份的生产收入以相同的百分率逐月增长．

经测算，投资治污后，1 月份生产收入为 25 万元，1 至 3 月份生产累计收入可达 91 万元；3 月份以后，每月生产收入稳定在 3 月份的水平．

(1) 求出投资治污后，2 月、3 月每月生产收入增长的百分率；(以下数据供参考：$3.64=1.91^2$，$11.56=3.40^2$)

(2) 如果把利润看作是生产累计收入减去治理污染的投资额或环保部门罚款额，试问：治理污染多少个月后，所投资金开始见成效 (即治污后所获利润不小于不治污情况下所获利润)？

12．(河南，2000)某企业1998年初投资100万元生产适销对路的产品，1998年底将获得的利润与年初的投资的和作为1999年初的投资，到1999年底，两年共获得利润56万元．已知1999年的年获利率比1998年的年获利率多10个百分点(即：1999年的年获利率是1998年的年获利率与10%的和)．求1998年和1999年的年获利率各是多少？

13．(咸阳，2000)2000年4、5月份，我国大部分地区出现了飞尘扬沙和风暴天气，有关专家指出，这主要是由于乱砍滥伐树木，使生态环境遭到严重破坏所致，因此，保护森林资源已成为目前一项十分紧迫的任务．某地区原有森林面积50万公顷，因人为毁林，到1999年底森林面积已减少了10%，为此，当地政府决定从2000年开始大力开展植树造林，计划在两年内使森林面积增加到64.8万公顷．

(1) 求该地区1999年底森林面积为多少万公顷？

(2) 求该地区从2000年开始的两年内森林面积平均每年的增长率为多少？

14．(重庆市，2001)阅读下面材料 在计算 $3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$ 时，我们发现，从第一个数开始，以后的每个数与它的前一个数的差都是一个相同的定值．具有这种规律的一列数，除了直接相加外，我们还可以用公式 $S=na+\frac{n(n-1)}{2}\times d$ 来计算它们的和．

(公式中的 n 表示数的个数，a 表示第一个数的值，d 表示这个相差的定值)

那么　$3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$

$$=10\times 3+\frac{10(10-1)}{2}\times 2$$

$$=120.$$

用上面的知识解决下列问题：

为保护长江，减少水土流失，我市某县决定对原有的坡荒地进行退耕还林．从1995年起在坡荒地上植树造林，以后每年又以比上一年多植相同面积的树木改造坡荒地，由于每年因自然灾害、树木成活率、人为破坏等因素的影响，都有相同数量的新坡荒地产生，下表为1995、1996、1997三年的坡荒地面积和植树的面积的统计数据．假设坡荒地全部种上树后，不再水土流失形成新的坡荒地，问到哪一年，可以将全县所有的坡荒地全部种上树木．

	1995 年	1996 年	1997 年
每年植树的面积 (亩)	1000	1400	1800
植树后坡荒地的实际面积 (亩)	25200	24000	22400

15. (宁夏,2001) 编一道关于增长率的一元二次方程应用题,并解答.

编题要求:

(1) 题目完整,题意清楚.

(2) 题意与方程的解都要符合实际.

12.7 可化为一元二次方程的分式方程

学点探究分析 重点 用去分母或换元法解分式方程和列方程解应用题.

难点 用换元法解分式方程,对增根的理解,列方程解应用题.

探究点 近年来各地中考试卷中出现了列分式方程解决市场经济问题、方案设计与选择等问题的题目.因此,需认真探究分式方程的解法和根的情况,寻找发现其解题规律.

学习方法技巧 将分式方程转化为整式方程,所用的方法是去分母和换元法.前者是一般方法,后者是特殊方法.分式方程解法的选择顺序是先特殊后一般,即先考虑能否用换元法解,若不能,再用去分母法,抓住方程自身的特点是用换元法解分式方程的关键,验根是解分式方程中不可缺少的一步.解分式方程前,可分析方程的形式特点,从中探寻规律,发现巧解.能用方程眼光认识世界,用方程知识和方程思想处理生活周围的问题是学好本节的又一个关键.

能力升级捷径 【例 1】 (龙岩市,2002,陕西省,2001) 解方程

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}.$$

思维技巧 观察方程的结构,显然可用去分母法把分母去掉,这是常规

思路.但仔细观察方程的特点,若采用拆项法,把$\frac{4}{x^2-1}$拆成$\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$,原方程变为$\frac{x-2}{x-1}=0$,从而 $x=2$.

解法一　去分母,得

$x(x+1)-2(x-1)=4$,

整理得　$x^2-x-2=0$,

解之　$x=2, x=-1$.

验根知　$x=-1$ 是增根.

因此　原方程的根为 $x=2$.

解法二　将原方程右边拆开,得

$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$,

即　$\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x-1}$.

所以　$\frac{x-2}{x-1}=0$,　所以　$x=2$.

验根知　$x=2$ 是原方程的根.

激活思维　比较方法一、二,方法一按常规思路化分式方程为整式方程,容易产生增根,因此需要验根.方法二通过拆项,使之部分项相互抵消,变为$\frac{x-2}{x-1}=0$,从而 $x=2$,获得简解.

同类变式　(北京市石景山区,2002)解方程:$\frac{10}{x^2+x-6}+\frac{2}{x+3}=1$.

解　原方程变为$\frac{10}{(x+3)(x-2)}+\frac{2}{x+3}=1$,

即$\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x+3}=1$,

所以　$\frac{2}{x-2}=1$,　$x-2=2$,　$x=4$.

验根知,$x=4$ 是原方程的根.

【例 2】　解方程　$\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x-1}=\frac{1}{x-4}-\frac{2}{x-3}$.

思维技巧　此分式方程中每项分式的分子都为常数.根据这一特点,除用常规去分母法外,还可把方程两边两项分别通分,化为分子相同的两个分式,再求解 或把原方程作适当变形.设$\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}=k$,得方程组,先求出 k,进而求原方程的根.

解法一　去分母，得

$3(x-1)(x-3)(x-4)-4(x-2)(x-3)(x-4)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)-2(x-1)(x-2)(x-4)$，

整理，得　$2x^2-15x+25=0$，

解这个方程，得 $x_1=5, x_2=\frac{5}{2}$.

经检验 $x_1=5$ **和** $x_2=\frac{5}{2}$ **都是原方程的根.**

解法二　将方程的两边分别计算，得

$$\frac{-x+5}{(x-1)(x-2)}=\frac{-x+5}{(x-3)(x-4)}.$$

显然，当 $-x+5=0$ **时，即** $x=5$ **时，方程左右两边的分母皆不为** 0**，且左、右两边相等，表示** $x=5$ **满足方程，因此，**$x=5$ **是原方程的一个根.**

而当 $-x+5\neq 0$**，即** $x\neq 5$ **时，由于方程左右两边的分子相等，要想左右两边的分式也相等，只需分母相等，即**

$(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$，

整理得　$4x=10$，

解得　$x=\frac{5}{2}$.

经检验，$x_1=5$ **和** $x_2=\frac{5}{2}$ **都是原方程的根.**

解法二先将方程两边通分，经化简后得到了两个分子相同的分式，此时，不能随便在方程两边同时除以 $-x+5$**，要讨论** $-x+5$ **是否为零.**

解法三　原方程变形为$\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}=\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x-4}$，

设$\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}=k$.

通分，得　$\frac{5x-13}{x^2-5x+6}=\frac{5x-17}{x^2-5x+4}=k$，

所以
$$\begin{cases}5x-13=k(x^2-5x)+6k, & ①\\ 5x-17=k(x^2-5x)+4k. & ②\end{cases}$$

①－②，**得**　$k=2$.

由 $k=2$，**得** $2x^2-15x+25=0$，

解之，得 $x_1=5, x_2=\frac{5}{2}$.

经检验 $x_1=5, x_2=\frac{5}{2}$ **都是原方程的根.**

同类变式　解方程$\frac{x-8}{x-10}+\frac{2x-8}{x-6}=\frac{x-5}{x-7}+\frac{2x-14}{x-9}$.

解法一　移项后，得

$$\frac{x-8}{x-10}-\frac{x-5}{x-7}=\frac{2(x-7)}{x-9}-\frac{2(x-4)}{x-6},$$

两边分别通分后，得

$$\frac{x^2-15x+56-x^2+15x-50}{(x-10)(x-7)}=\frac{2(x^2-13x+42-x^2+13x-36)}{(x-9)(x-6)},$$

即　$\frac{1}{(x-10)(x-7)}=\frac{2}{(x-9)(x-6)}$，

两边都乘以$(x-6)(x-7)(x-9)(x-10)$，得

$$x^2-15x+54=2x^2-34x+140,$$

即　$x^2-19x+86=0$.

解得　$x_1=\frac{19+\sqrt{17}}{2}$，$x_2=\frac{19-\sqrt{17}}{2}$.

经检验，x_1、x_2都是原方程的根.

解法二　把每个分式的分子除以分母，得

$$1+\frac{2}{x-10}+2+\frac{4}{x-6}=1+\frac{2}{x-7}+2+\frac{4}{x-9},$$

即　$\frac{1}{x-10}+\frac{2}{x-6}=\frac{1}{x-7}+\frac{2}{x-9}$，

移项，得$\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-7}=\frac{2}{x-9}-\frac{2}{x-6}$，

两边分别通分，整理得

$$\frac{1}{(x-10)(x-7)}=\frac{2}{(x-9)(x-6)}.$$

以下同解法一，略.

思维拓展　解方程$\frac{x-8}{x-10}+\frac{x-4}{x-6}=\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-9}$.

解　将原方程转化为$\frac{1}{x-10}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-9}$，左右两边分别通分，整理得

$$(2x-16)\left[\frac{1}{(x-10)(x-6)}-\frac{1}{(x-7)(x-9)}\right]=0,$$

因为　$\frac{1}{(x-10)(x-6)}-\frac{1}{(x-7)(x-9)}\neq 0$，

所以　$2x-16=0$，$x=8$.

经检验　$x=8$是原方程的解.

【例3】 (山东威海,2001)解方程 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{7(x^2+1)}{2x}+\frac{5}{2}=0$.

思维技巧 观察方程,可将$\frac{7(x^2+1)}{2x}$变形为$\frac{7}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$,从而可用换元法求解.

解 将原方程变形为 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{7}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{2}=0$,

即 $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$.

设 $x+\frac{1}{x}=y$,则有 $2y^2-7y+5=0$,

解得 $y_1=\frac{5}{2}$,$y_2=1$.

当 $y=\frac{5}{2}$时,$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$,$x+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{2}$,

所以 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{2}$.

当 $y=1$ 时,$x+\frac{1}{x}=1$,即 $x^2-x+1=0$.

此方程无解.

经检验 $x_1=2$,$x_2=\frac{1}{2}$都是原方程的根.

激活思维 在解此方程过程中,关键是抓住了方程自身的特点,进行适当变形,正确换元.在解方程 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$时,熟练地运用课本上习题的结论,简化了解题过程.

同类变式 (天津市,2003)解方程 $\frac{6}{x^2+x}=x^2+x+1$.

解 设 $x^2+x=y$,则原方程化为 $y^2+y-6=0$.

解得 $y_1=-3$,$y_2=2$.

当 $y_1=-3$ 时,有 $x^2+x=-3$.

即 $x^2+x+3=0$,此方程无实根.

当 $y_2=2$ 时,有 $x^2+x=2$,即 $x^2+x-2=0$,

解得 $x_1=1$,$x_2=-2$.

经检验,$x_1=1$,$x_2=-2$ 均是原方程的根.

所以,原方程的根是 $x_1=1$,$x_2=-2$.

思维拓展 解方程$\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}=-\frac{1}{x^2-13x-8}$.

解　设 $x^2-8=y$，则原方程可化为：

$$\frac{1}{y+11x}+\frac{1}{y+2x}+\frac{1}{y-13x}=0,$$

去分母，整理得 $3y^2-147x^2=0$，解得 $y=\pm 7x$.

当 $y=7x$ 时，$x^2-8=7x$，解得 $x_1=8, x_2=-1$；

当 $y=-7x$ 时，$x^2-8=-7x$，解得 $x_3=-8, x_4=1$.

经检验，$x_1=8, x_2=-1, x_3=-8, x_4=1$ 均是原方程的根.

所以　原方程的根为 $x_1=8, x_2=-1, x_3=-8, x_4=1$.

【例 4】　(烟台，1998) 如果方程 $\frac{x+7}{x-1}+\frac{1}{x}-\frac{4x+k}{x^2-x}=0$ 只有一个实数根(等根视为一根)，则 k 的值是(　　)

A. -5　　B. -1 或 4　　C. -5 或 -1　　D. -5 或 -1 或 4

思维技巧　先将分式方程转化为整式方程 $x^2+4x-k-1=0$①，由 $\Delta=4k+20=0$，即 $k=-5$. 至此，问题似乎已经解决. 但是，方程①和原方程同解吗？如果 0 或 1 是方程①的一个根，那么原分式方程的根的情形又如何呢？

正确答案 D.

激活思维　分式方程有一个根的条件是十分复杂的问题，如本题中出现的两种情况：(1) 有一个增根，一个是方程的根；(2) 原分式方程化为整式方程后，所得方程只有一个根.

同类变式　当 a 取什么整数时，方程 $\frac{x}{x-2}+\frac{x-2}{x}+\frac{2x+a}{x(x-2)}=0$ 恰好有一个实根？

解　原方程化为 $\frac{2x^2-2x+4+a}{x(x-2)}=0$，

(1) 若 $x\neq 0$，且 $x\neq 2$，则 $2x^2-2x+4+a=0$，

因为　原分式方程恰有一个实根，

所以　$\Delta=0$，

即　$\Delta=(-2)^2-4\times 2\times(4+a)=-28-8a=0$，

所以　$a=-\frac{7}{2}$，但这时 a 不是整数，舍去.

(2) 若方程 $2x^2-2x+4+a=0$ 有一个根为 $x=0$，

则 $a=-4$，另一根为 $x=1$.

经检验，$x=1$ 是原分式方程的根.

(3) 若方程 $2x^2-2x+4+a=0$ 有一个根为 $x=2$，

则 $a=-8$,另一根为 -1.

经检验 $x=-1$ 是原分式方程的根.

可见,当 $a=-4$ 时,原方程恰有一个实根 $x=1$;当 $a=-8$ 时,原方程恰有一个实根 $x=-1$.

思维拓展 (聊城市,2000)已知关于 x 的方程 $x^2+2x+\frac{m^2-1}{x^2+2x-2m}=0$,其中 m 为实数.

(1) 当 m 为何值时,方程没有实数根?

(2) 当 m 为何值时,方程恰有三个互不相等的实数根?求出这三个实数根.

解 (1) 令 $x^2+2x-2m=y$,

则原方程化为 $y^2+2my+m^2-1=0$,

解得 $y_1=-m+1$,$y_2=-m-1$ (显然 $m=\pm1$ 时,原方程有实数根),

由此得 $x^2+2x-m-1=0$, ①

或 $x^2+2x-m+1=0$. ②

对于①,由 $\Delta_1=2^2-4(-m-1)<0$ 得,$m<-2$;

对于②,由 $\Delta_2=2^2-4(-m+1)<0$,得 $m<0$,

所以 当 $m<-2$,原方程没有实数根.

(2) 由(1)可得:

当 $m=-2$ 时,方程①有两个相等的实数根,但此时,方程②没有实数根,不合题意;

当 $m=0$ 时,方程②有两个相等的实数根 $x=-1$,此时方程①有两个不相等的实数根 $x=-1\pm\sqrt{2}$.

所以 当 $m=0$ 时,原方程有三个互不相等的实数根

$x_1=-1$,$x_2=-1+\sqrt{2}$,$x_2=-1-\sqrt{2}$.

【例 5】 (山东淄博市,2000) (1) 如下表,方程 1,方程 2,方程 3,…是按照一定规律排列的一列方程.解方程 1,并将它的解填在表中的空白处;

(2) 若方程 $\frac{a}{x}-\frac{1}{x-b}=1$ $(a>b)$ 的解是 $x_1=6$,$x_2=10$,求 a、b 的值.该方程是不是(1)中所给出的一列方程中的一个方程?如果是,它是第几个方程?

(3) 请写出这列方程中的第 n 个方程和它的解,并验证所写出的解适合第 n 个方程.

序号	方　　程	方程的解	
1	$\frac{6}{x}-\frac{1}{x-2}=1$	$x_1=$____	$x_2=$____
2	$\frac{8}{x}-\frac{1}{x-3}=1$	$x_1=4$	$x_2=6$
3	$\frac{10}{x}-\frac{1}{x-4}=1$	$x_1=5$	$x_2=8$
…	…	…	…

思维技巧　本题通过观察三个分式方程中常数 a、b 及根的特点，探索、归纳出一般性规律，注意了观察能力及类比、联想等数学方法的考查.

解　(1) $x_1=3$，$x_2=4$；

(2) 将 $x_1=6$，$x_2=10$ 代入 $\frac{a}{x}-\frac{1}{x-b}=1$，

可得方程组 $\begin{cases}\frac{a}{6}-\frac{1}{6-b}=1,\\ \frac{a}{10}-\frac{1}{10-b}=1.\end{cases}$

化简可得 $\begin{cases}ab=60,\\ a+b=17.\end{cases}$

因为　$a>b$，所以　$a=12$，$b=5$.

经检验知，$a=12$，$b=5$ 满足方程组.

这显然是表中系列方程之一，是其中第 4 个方程：$\frac{12}{x}-\frac{1}{x-5}=1$，

(3) 由表中规律可以猜测第 n 个方程是：

$\frac{2(n+2)}{x}-\frac{1}{x-(n+1)}=1$　(n 是自然数)　　⊛

方程的解为：　$x_1=n+2$，$x_2=2(n+1)$.

验证 解方程 (⊛)，去分母并整理可得：

$x^2-[(n+2)+2(n+1)]x+2(n+1)(n+2)=0$，

所以　$x_1=n+2$，$x_2=2(n+1)$.

激活思维　解答第 (1) 问时，或观察表格中两根的规律，猜想出 $x_1=3$，$x_2=4$，再代入方程检验 或直接解分式方程 1. 第 (2) 问是第 (1) 问逆用. 运用逆向思维去思考，先化分式方程为一元二次方程 (含字母 a、b)，再运用根与系数关系求出 a、b，然后根据一列方程的规律作出判断. 第 (3) 问是在找到规律后，写出一般式，是第 (1) 问的拓展.

同类变式　阅读下列材料，解答问题：

因为 $\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$，$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$，$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$，…，$\frac{1}{17\times19}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$.

所以 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19}\right)=\frac{9}{19}$.

⑴ 在和式$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots$中，第六项为_____，上述求和的方法是：通过逆用分数的_____法则，将和式中各分数转为两个实数之差，使得除首尾两项外的中间各项可以_____，从而达到求和的目的.

⑵ 解方程：$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{9}{40}$.

解　⑴ $\frac{1}{11\times13}$　减法　抵消

⑵ 因为 $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{9}{40}$，

所以 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{9}{40}$.

所以 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}=\frac{9}{20}$.

即 $1-\frac{1}{n+1}=\frac{9}{10}$.

$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{10}$，所以 $n+1=10$.

所以 $n=9$.

经检验 $n=9$ 是原方程的根.

因此原方程的根为 $n=9$.

思维拓展　阅读并解答

解关于 x 的方程：$x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$，通过去分母可得 $x_1=c$，$x_2=\frac{1}{c}$，分析观察它的特殊结构，发现：方程左右结构一样，左、右两项乘积相等. 是否凡是符合这两个结论的方程都可以用上述结论呢？我们再看一例：解方程

$\frac{2(x^2+1)}{x+1}+\frac{6(x+1)}{x^2+1}=7$，观察$\frac{2(x^2+1)}{x+1}$与$\frac{6(x+1)}{x^2+1}$之和为 7，之积是 12，因为 $3+4=7$，$3\times4=12$，从而得出简便且具有创造性的结论$\frac{2(x^2+1)}{x+1}=3$ 或$\frac{2(x^2+1)}{x+1}=4$（解略），因此凡是具有上面例子特征的方程都可以用上述方法求解.

问题　利用上述结论，解方程

$$x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}.$$

解　因为　$x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$，

所以　$(x-1)+\frac{1}{x-1}=(a-1)+\frac{1}{a-1}$.

由阅读部分知

$x-1=a-1$　或　$x-1=\frac{1}{a-1}$，

所以　$x=a$，$x=\frac{a}{a-1}$.

经检验知　$x=a$，$x=\frac{a}{a-1}$是原方程的根.

【例 6】　（哈尔滨，2001）“丽园”开发公司生产的 960 件新产品，需要精加工后，才能投放市场. 现有甲、乙两个工厂都想加工这批产品，已知甲工厂单独加工完这批产品比乙工厂单独加工完这批产品多用 20 天，而乙工厂每天比甲工厂多加工 8 件产品，公司需付甲工厂加工费用每天 80 元，乙工厂加工费用每天 120 元.

（1）求甲、乙两个工厂每天各能加工多少件新产品.

（2）公司制定产品加工方案如下：可以由每个厂家单独完成；也可以由两个厂家同时合作完成. 在加工过程中，公司需派一名工程师每天到厂进行技术指导，并负担每天 5 元的误餐补助费.

请你帮助公司选择一种既省时又省钱的加工方案. 并说明理由.

思维技巧　把课本知识与实际生活结合起来，进行方案设计，选择最佳方案，是近年中考中的新型题目，从题目中可知有三种设计方案：即由甲厂或乙厂单独完成，或由两个厂家同时合作完成. 通过计算分别算出每一种方案的费用，从中选择省时省钱的一种加工方案.

解　（1）设甲工厂每天能加工 x 件产品，则乙工厂每天能加工 $(x+8)$ 件产品.

依题意，得$\frac{960}{x}=\frac{960}{x+8}+20$，

解得 $x_1=16$，$x_2=-24$（舍），

所以 $x+8=24$.

(2) 甲工厂单独加工完这批新产品所需的时间为

$960\div16=60$（天），

所需费用为 $80\times60+5\times60=5100$（元）.

乙工厂单独加工完这批新产品所需的时间为

$960\div24=40$（天），

所需费用为 $120\times40+5\times40=5000$（元）.

设他们合作完成这批新产品所用时间为 y 天，于是

$y\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{40}\right)=1$，

解得 $y=24$（天）.

所需费用为 $(80+120)\times24+5\times24=4920$（元）.

通过比较，选择甲、乙两家工厂合作加工完这批新产品比较合适.

激活思维 此题源于课本、异于课本，围绕课本上的内容，设置新的情境，给出若干信息，提出解决问题的要求，寻求恰当的解决方案. 这类题目形式多样、方法灵活，取材广泛，既考查了数学知识、数学思想方法和应用能力，又考查了阅读、观察、比较、分析和归纳的综合能力. 由于阅读理解能力不够，学生往往对此题中工程师的误餐费不能正确理解.

同类变式 (包头市，2000) 甲、乙两个工程队各有 20 人，两队合做某项工程，10 天后，因甲队另有任务，乙队再单独做 2 天才完成. 如果单独完成这项工程，甲队比乙队可以快 4 天. 假设厂家需付甲队的日费用每人 100 元，需付乙队的日费用每人 90 元. 若从甲、乙两队中选出一个工程队来完成此项工程，请你通过计算比较选哪个工程队节省费用.

(提示：各队总费用 = 每人的日费用 × 人数 × 单独完成的天数)

解 设甲队单独完成此项工程需 x 天，乙队单独完成此项工程需 $(x+4)$ 天.

依题意有 $\frac{10}{x}+\frac{10}{x+4}+\frac{2}{x+4}=1$，

解得 $x_1=20$，$x_2=-2$（舍去）.

经检验，$x_1=20$ 是原方程的根.

所以 甲队总费用 $=100\times20\times20=40000$（元）；

乙队总费用 $=90\times20\times(20+4)=43200$（元）.

甲、乙两队的总费用通过比较，甲队低于乙队.

因此，选甲队.

思维拓展　(重庆市，2000) 某工程由甲、乙两队合做 6 天完成，厂家需付甲、乙两队共 8700 元；乙、丙两队合做 10 天完成，厂家需付乙、丙两队共 9500 元；甲、两两队合做 5 天完成全部工程的 $\frac{2}{3}$，厂家需付甲、丙两队共 5500 元.

(1) 求甲、乙、丙各队单独完成全部工程各需多少天？

(2) 若工期要求不超过 15 天完成全部工程，问可由哪队单独完成此项工程花钱最少？请说明理由.

解　(1) 设甲队单独做 x 天完成，乙队单独做 y 天完成，丙队单独做 z 天完成，则

$$\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1,\\ \frac{10}{y}+\frac{10}{z}=1,\\ \frac{5}{x}+\frac{5}{z}=\frac{2}{3}.\end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases}x=10,\\ y=15,\\ z=30.\end{cases}$

(2) 设甲队做一天应付给 a 元，乙队做一天应付给 b 元，丙队做一天应付给 c 元，则有

$$\begin{cases}6(a+b)=8700,\\ 10(b+c)=9500,\\ 5(a+c)=5500.\end{cases}$$

解方程组，得 $\begin{cases}a=800,\\ b=650,\\ c=300.\end{cases}$

因为　$10a=8000$ (元)，$15b=9750$ (元).

所以　由甲队单独完成此工程花钱最少.

答　略.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) 方程 $x-\frac{2}{2-x}=\frac{x}{x-2}$ 去分母，整理得_____，原方程的根为_____.

(2) 分式方程 $\frac{x^2-2x}{(x-2)(x+1)}=0$ 的增根是_____.

⑶ 分式方程$\frac{x}{x-1}+\frac{k}{x-1}-\frac{1}{x+1}=0$有增根$x=1$,则$k$的值为_____.

⑷ 当$a=$____时,去分母解x的方程$\frac{a}{x-2}=\frac{x}{x-2}-2$时会产生增根.

⑸ (北京市昌平区,2002)设$y=\frac{x}{x-1}$时,分式方程$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x-1}\right)+6=0$可转化为整式方程_____.

⑹ (沈阳市,2002)解方程$\frac{x+3}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{5}{2}$时,设$y=\frac{x+3}{x^2-1}$,则原方程化成整式方程是_____.

⑺ (漳州市,2002)用换元法解分式方程$x^2-x-\frac{12}{x^2-x}-4=0$时,若设$x^2-x=y$,则原方程可变形为关于$y$的方程是_____.

⑻ (河北省,2002)北京至石家庄的铁路长392 km,为适应经济发展,自2001年10月21日起,某客运列车的行车速度每小时比原来增加40 km,使得石家庄至北京的行车时间缩短了1 h.如果设该列车提速前的速度为x km/h,那么为求x所列出的方程为_____.

⑼ (厦门市,2001)为改善生态环境,防止水土流失,某村拟在荒坡上种植960棵树,由于青年志愿者的支援,每日比原计划多种20棵,结果提前4天完成任务,原计划每天种多少棵?解:设原计划每天种x棵,根据题意得方程_____.(注:不解方程)

⑽ (江苏南通,2000)甲做90个机器零件所用的时间和乙做120个所用的时间相等,又知每小时甲乙两人一共做35个机器零件,问甲乙每小时各做多少个机器零件.在这个问题中,如果设甲每小时做x个机器零件,则由题意,可列出方程为_____.

⑾ (青岛市,2000)先阅读下列解方程$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{5x}{x-1}+6=0$的过程,然后填空:

解 (第一步)设$y=\frac{x}{x-1}$,则原方程可化为$y^2-5y+6=0$.

(第二步)解这个方程得$y_1=2$,$y_2=3$.

(第三步)当$y_1=2$时,$\frac{x}{x-1}=2$,则$x_1=2$;

当$y_2=3$时,$\frac{x}{x-1}=3$,则$x_2=\frac{3}{2}$.

(第四步)所以原方程的根为$x_1=2$,$x_2=\frac{3}{2}$.

以上解题过程中的第一步用的是_____法；上述解题过程不完整，缺少的一步是_____.

2．选择题

(1) (北京市海淀区，2003) 用换元法解方程 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-\left(x+\frac{2}{x}\right)=1$，设 $y=x+\frac{2}{x}$，则原方程可化为（　　）

A．$y^2-y-1=0$　　B．$y^2+y+1=0$

C．$y^2+y-1=0$　　D．$y^2-y+1=0$

(2) (广州市，2003) 将方程 $\frac{x^2-4}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}$ 去分母并化简后得到的方程是（　　）

A．$x^2-2x-3=0$　　B．$x^2-2x-5=0$

C．$x^2-3=0$　　D．$x^2-5=0$

(3) (太原市，2002) 设 $y=x^2-x+1$，则方程 $x^2-x+1=\frac{2}{x^2-x}$ 可变形为（　　）

A．$y^2-y-2=0$　　B．$y^2+y+2=0$

C．$y^2+y-2=0$　　D．$y^2-y+2=0$

(4) (北京市朝阳区，2002) 用换元法解方程 $\frac{1}{2x^2-3}-8x^2+12=0$，下列换元过程中，原方程变形不正确的是（　　）

A．设 $\frac{1}{2x^2-3}=y$，则 $y-\frac{4}{y}=0$　　B．设 $2x^2-3=y$，则 $\frac{1}{y}-4y=0$

C．设 $8x^2-12=y$，则 $\frac{4}{y}-y=0$　　D．设 $\frac{1}{2x^2-3}=y$，则 $y-\frac{1}{4y}=0$

(5) (江苏盐城，2002) 解方程 $x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$，设 $y=x+\frac{1}{x}$，那么原方程变形为（　　）

A．$y^2-3y=0$　　B．$y^2-3y+2=0$

C．$y^2-3y-4=0$　　D．$y^2-3y+4=0$

(6) (山东烟台，2003) 已知 x 为实数，且 $\frac{3}{x^2+3x}-(x^2+3x)=2$．那么 x^2+3x 的值为（　　）

A．1　　B．-3 或 1　　C．3　　D．-1 或 3

(7) (河北省，2003) 赵强同学借了一本书，共 280 页，要在两周借期内读

完.当他读了一半时,发现平均每天要多读 21 页才能在借期内读完.他读前一半时,平均每天读多少页?如果设读前一半时,平均每天读 x 页,则下面所列方程中,正确的是(　　)

A. $\frac{140}{x}+\frac{140}{x-21}=14$　　B. $\frac{280}{x}+\frac{280}{x+21}=14$

C. $\frac{140}{x}+\frac{140}{x+21}=14$　　D. $\frac{10}{x}+\frac{10}{x+21}=1$

(8) (吉林省,2002)某农场开挖一条长 480m 的渠道,开工后,每天比原计划多挖 20m,结果提前 4 天完成任务,若设原计划每天挖 xm,那么求 x 时所列方程正确的是(　　)

A. $\frac{480}{x}-\frac{480}{x+20}=4$　　B. $\frac{480}{x}-\frac{480}{x+4}=20$

C. $\frac{480}{x-20}-\frac{480}{x}=4$　　D. $\frac{480}{x-4}-\frac{480}{x}=20$

(9) (宁夏,2002)某化肥厂计划在 x 天内生产化肥 120t,由于采用了新技术,每天多生产化肥 3t,实际生产 180 吨与原计划生产 120t 的时间相等.那么适合 x 的方程是(　　)

A. $\frac{120}{x}+3=\frac{180}{x}$　　B. $\frac{120}{x}-3=\frac{180}{x}$

C. $\frac{120}{x}=\frac{180}{x+3}$　　D. $\frac{120}{x-3}=\frac{180}{x}$

(10) (苏州市,2003)为了绿化荒山,某村计划在荒山上种植 1200 棵树.原计划每天种 x 棵,由于邻村的支援,每天比原计划多种了 40 棵,结果提前 5 天完成了任务,则可以列出方程为(　　)

A. $\frac{1200}{x}-\frac{1200}{x+40}=5$　　B. $\frac{1200}{x-40}-\frac{1200}{x}=5$

C. $\frac{1200}{x+40}-\frac{1200}{x}=5$　　D. $\frac{1200}{x}-\frac{1200}{x-40}=5$

(11) (苏州市,2002)某农场挖一条 960m 长的渠道,开工后每天比原计划多挖 20m,结果提前 4 天完成了任务.若设原计划每天挖 xm,则根据题意列出方程(　　)

A. $\frac{960}{x}-\frac{960}{x+20}=4$　　B. $\frac{960}{x+20}-\frac{960}{x}=4$

C. $\frac{960}{x}-\frac{960}{x-20}=4$　　D. $\frac{960}{x-20}-\frac{960}{x}=4$

(12) (贵阳市,1997)已知一汽船在顺流中航行 46 km 和逆流中航行 34 km共用去的时间,正好等于它在静水中航行 80 km 用去的时间,并且水流速度是 2 km/h,求汽船在静水中的速度.若设汽船在静水中的速度为

x km/h，则所列下列方程正确的是（　　）

A. $\frac{46}{x-2}+\frac{34}{x+2}=\frac{80}{x}$　　B. $\frac{46}{x+2}+\frac{34}{x-2}=\frac{80}{x}$

C. $\frac{80}{x+2}=\frac{46}{x}-\frac{34}{x-2}$　　D. $\frac{34}{x+2}=\frac{80}{x-2}+\frac{46}{x}$

3. 解下列方程

(1) (常州市，2002) $\frac{x^2-3}{x-3}=\frac{6}{x-3}$；

(2) (宁波市，2002) $\frac{2x}{2x-1}+\frac{5}{1-2x}=3$；

(3) (泉州市，2002) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x}{x+1}\right)-6=0$；

(4) (黄冈市，2003) 解方程：$\frac{6}{(x+1)(x+2)}-\frac{2}{x-2}=1$.

(5) (北京市，2003) 用换元法解方程　$x^2-3x+5+\frac{6}{x^2-3x}=0$.

(6) (陕西省，2003) 用换元法解方程　$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-2\left(\frac{x}{x+1}\right)-8=0$.

(7) (河南省，2003) 解方程 $2x^2-4x-\frac{3}{x^2-2x-1}=3$.

(8) (北京市西城区，2001) $\frac{1}{1-x}-2=\frac{3x-x^2}{1-x^2}$；

4. (河南省，2003) 在防治“SARS”的战役中，为防止疫情扩散，某制药厂接到了生产 240 箱过氧乙酸消毒液的任务. 在生产了 60 箱后，因为任务紧急，需要加快生产，每天比原来多生产 15 箱，结果 6 天就完成了任务. 求加快速度后每天生产多少箱消毒液.

5. (北京市朝阳区，2002) 某空调厂的装配车间，原计划用若干天组装 150 台空调，厂家为了使空调提前上市，决定每天多组装 3 台，这样提前 3 天超额完成了任务，总共比原计划多组装 6 台，问原计划每天组装多少台？

6. (四川眉山，2002) 某校初三学生照毕业相，如果照每张相片的收费降低 0.5 元，那么 50 元钱可以照相的张数就会增加 5 张. 求原来照一张相片的价格是多少元.

7. (吉林省，2003) 如图 12－9，小明家、王老师家、学校在同一条路上. 小明家到王老师家的路程为 3 km，王老师家到学校的路程为 0.5 km. 由于小明的父母战斗在抗“非典”第一线，为了使他能按时到校，王老师每天骑自行

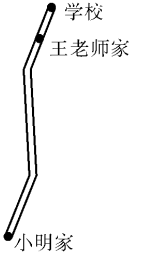


图 12－9

车接小明上学.已知王老师骑自行车的速度是步行速度的3倍,每天比平时步行上班多用了20 min.问王老师的步行速度及骑自行车的速度各是多少?

8.(福州市,2002)为落实"珍惜和合理利用每一寸土地"的基本国策,某地区计划经过若干年开发"改造后可利用土地"360 km^2,实际施工中,每年比原计划多开发2 km^2,按此进度预计可提前6年完成开发任务,问实际每年可开发多少?

9.(北京市海淀区,2002)某市为了进一步缓解交通拥堵现象,决定修建一条从市中心到飞机场的轻轨铁路,为使工程能提前3个月完成,需要将原定的工作效率提高12%.问原计划完成这项工程用多少个月.

10.(辽宁省,2002)某书店老板去批发市场购买某种图书.第一次购书用100元,按该书定价2.8元出售,并很快售完.由于该书畅销,第二次购书时,每本的批发价已比第一次高0.5元,用去了150元,所购书数量比第一次多10本.当这批书售出$\frac{4}{5}$时,出现滞销,便以定价的5折售完剩余的图书.试问该老板第二次售书是赔钱了,还是赚钱了(不考虑其他因素)?若赔钱,赔多少?若赚钱,赚多少?

11.(北京市昌平区,2002)2001年底我国加入WTO.从2002年开始,部分小汽车的价格开始了大幅度下调,现急需大量某型号汽车,生产此型号小汽车的某车间,增加了设备改进了技术,每小时装配的车辆比改进技术前增加了2辆;后来装配40辆车所用的时间比改进技术前装配30辆车所用的时间还少2 h.问此车间在改进技术后每小时装配多少辆小汽车?

12.(北京市崇文区,2001)用价值为100元的甲种涂料与价值为240元的乙种涂料配制成一种新涂料,其每千克的售价比甲种涂料每千克的售价少3元,比乙种涂料每千克的售价多1元,求这种新涂料每千克售价多少元.

13.(山东济南,2001)小王在超市用24元钱买了某种品牌的牛奶若干盒.过一段时间再去该超市,发现这种牛奶进行让利销售,每盒让利0.4元,他同样用24元钱比上次多买2盒,求他第一次买了多少盒这种牛奶?

14.(福州市,2003)为了营造人与自然和谐共处的生态环境,某市近年加快实施城乡绿化一体化工程,创建国家城市绿化一体化城市.某校甲、乙两班师生前往郊区参加植树活动.已知甲班每天比乙班少种10棵树,甲班种150棵树所用的天数比乙班种120棵树所用的天数多2天.求甲、乙两班每天各植树多少棵?

15.(湘潭市,2003)便民服装店的老板在株洲看到一种夏季衬衫,就用

8000 元购进若干件，以每件 58 元的价格出售，很快售完，又用 17600 元购进同种衬衫，数量是第一次的 2 倍，每件进价比第一次多了 4 元，服装店仍按每件 58 元出售，全部售完，问该服装店这笔生意盈利多少元？

16．（南京市，2003）某灯具店采购了一批某种型号的节能灯，共用去 400 元．在搬运过程中不慎打碎了 5 盏，该店把余下的灯每盏加价 4 元全部售出，然后用所得的钱又采购了一批这种节能灯，且进价与上次相同，但购买的数量比上次多了 9 盏．求每盏灯的进价．

17．（山东省，2003）2003 年，在党和政府的领导下，我国进行了一场抗击“非典”的战斗．为了控制疫情的蔓延．某卫生材料厂接到上级下达赶制 19.2 万只加浓抗病毒口罩的任务，为使抗病毒口罩早日到达防疫第一线，开工后每天比原计划多加工 0.4 万只，结果提前 4 天完成任务．该厂原计划每天加工多少万只口罩？

18．（桂林市，2002）某农场用甲、乙两种水泵抽取 960 m^3 的水来灌溉农田，已知乙每小时所抽取的水比甲每小时多 20 m^3，因此，甲单独完成抽水工作比乙单独完成抽水工作多用 4 h．

（1）分别求甲、乙两种水泵每小时能抽取多少立方米的水？

（2）已知甲种水泵每小时耗电 2 度，乙种水泵每小时耗电 2.5 度，在单独完成抽取 960 m^3 的水进行灌溉的情况下，哪种水泵的总耗电量较小？

探究能力测试

19．（山西省，2002）阅读下列材料：

关于 x 的方程：

$x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{1}{c}$；

$x-\frac{1}{x}=c-\frac{1}{c}$ $\left(即\ x+\frac{-1}{x}=c+\frac{-1}{c}\right)$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=-\frac{1}{c}$；

$x+\frac{2}{x}=c+\frac{2}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{2}{c}$；

$x+\frac{3}{x}=c+\frac{3}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{3}{c}$；

……

（1）请观察上述方程与解的特征，比较关于 x 的方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}$（$m\neq 0$）与它们的关系，猜想它的解是什么，并利用“方程的解”的概念进行验证．

(2) 由上述的观察、比较、猜想、验证,可以得出结论:

如果方程的左边是未知数与其倒数的倍数的和,方程右边的形式与左边完全相同,只是把其中的未知数换成了某个常数,那么这样的方程可以直接得解.

请用这个结论解关于 x 的方程:

$x+\frac{2}{x-1}=a+\frac{2}{a-1}$.

20. (河南省,2002) 某村计划开挖一条长 1500 m 的水渠,渠道的断面为等腰梯形,渠道深 0.8 m,下底宽 1.2 m,坡角为 45° (如图 12-10). 实际开挖渠道时,每天比原计划多挖土 20 m^3,结果比原计划提前 4 天完工,求原计划每天挖土多少?

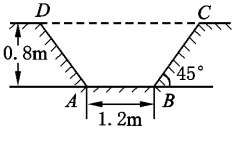


图 12-10

21. (河南省,2001) 近几年我省高速公路建设有了较大的发展,有力地促进了我省的经济建设. 正在修建中的某段高速公路要招标,现有甲、乙两个工程队. 若甲、乙两队合做,24 天可以完成,需费用 120 万元;若甲单独做 20 天后,剩下的工程由乙做,还需 40 天才能完成,这样需费用 110 万元. 问:

(1) 甲、乙两队单独完成此项工程,各需多少天?

(2) 甲、乙两队单独完成此项工程,各需多少万元?

22. (四川省,2002) 我市向民族地区的某县赠送一批计算机,首批 270 台将于近期起运,经与某物流公司联系,得知用 A 型汽车若干辆刚好装完,用 B 型汽车不仅可少用 1 辆,而且有一辆车装车差 30 台计算机才装满.

(1) 已知 B 型汽车比 A 型汽车每辆可多装 15 台,求 A、B 两种型号的汽车各能装计算机多少台?

(2) 已知 A 型汽车的运费是每辆 350 元,B 型汽车的运费是每辆 400 元,若运送这批计算机同时用这两种型号的汽车,其中 B 型汽车比 A 型汽车多用 1 辆,所用运费比单独用任何一种型号的汽车都要节省,按这种方案需 A、B 两种型号的汽车各多少辆?运费多少元?

12.8　由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组

学点探究分析

重点　代入法解方程组.

难点　用代入法解方程组的方法以及与二元二次方程组有关的综合问题.

探究点　按教学大纲的基本要求,关于二元二次方程组的问题主要是以解方程组的形式出现.但是纵观近几年中考试题,一是强调数学思想和方法(转化的思想、降次、消元思想方法)的运用;二是以二元二次方程组为轴心,与一元二次方程根的判别式、根与系数关系以及几何问题等相结合,出现了一些新题型.

学习方法技巧

由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组,通常用代入法求解,特殊情况 $\begin{cases}x+y=a,\\xy=b\end{cases}$ 下,可灵活运用根与系数关系构造一元二次方程求解.解二元二次方程组的基本思想是转化,化二元为一元,化二次为一次.转化的基本方法与策略是降次和消元.建立方程组与一元二次方程判别式、根与系数关系、几何等知识的联系是学好本节的关键.

能力升级捷径

【例 1】　(绍兴市,2000)解方程组

$$\begin{cases}x^2-2xy-3y^2=5, & ①\\x+y=1. & ②\end{cases}$$

此方程组是"二·一"型的,所以可用代入法解.如果仔细观察方程组的特点,会发现另一种解法:方程①可化为 $(x-3y)(x+y)=5$,从而得到 $x-3y=5$,这样,原方程组就转化为一个二元一次方程组 $\begin{cases}x-3y=5,\\x+y=1.\end{cases}$

解法 1　由②,得　$y=1-x$,　③

将③代入①得　$x^2-2x(1-x)-3(1-x)^2=5$,

整理,得 $4x=8$,所以　$x=2$.

将 $x=2$ 代入③,得

$y=1-2=-1$，

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

解法 2　由①得 $(x-3y)(x+y)=5$，　④

将②代入④，得 $x-3y=5$，　⑤

将②与⑤组成新的方程组 $\begin{cases}x-3y=5,\\x+y=1.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

激活思维　此方程组虽然是（Ⅰ）类方程组（“二·一”型），但是，抓住方程组的特点，便可以突破“消元”模式，通过“整体代入”而将原方程组转化为二元一次方程组，十分简捷.

同类变式　（南京市，2003）解方程组 $\begin{cases}x-y=0 & ①\\x^2+2xy=12 & ②\end{cases}$

解　由①得 $y=x$　③，将③代入②，得　$x^2+2x^2=12$.

解得　$x=\pm 2$. 当 $x=2$ 时，$y=2$. 当 $x=-2$ 时，$y=-2$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-2,\\y=-2.\end{cases}$

【例 2】　（兰州市，2002 新疆，2001）解方程组 $\begin{cases}x+y=3, & ①\\xy=-10. & ②\end{cases}$

思维技巧　仔细观察这个方程组，不难发现，此方程组除可用代入法解外，还可用加减消元法和根与系数关系，通过构造一个以 x、y 为根的一元二次方程来求解.

解法一　代入消元法

由①得 $y=3-x$，　③代入②，得 $x(3-x)=-10$，

解这个一元二次方程，得 $x_1=5$，$x_2=-2$.

再代入③，得 $y_1=-2$，$y_2=5$，故原方程组的解为：

$\begin{cases}x_1=5,\\y_1=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=5.\end{cases}$

解法二　加减消元法

由 $xy=-10$ 知 $x\neq 0$，①$\times x$ −②，得　$x^2-3x-10=0$，

解得 $x_1=5$，$x_2=-2$.

以下同解法一.

解法三　利用根与系数的关系.

由 $x+y=3, xy=-10$,知 x、y 是方程 $z^2-3z-10=0$ 的两根,解这个方程,得

$z_1=5, z_2=-2.$

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=5,\\y_1=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=5.\end{cases}$

激活思维　符合 $\begin{cases}x+y=a,\\xy=b\end{cases}$ 形式的方程组,可用多种不同的方法求解,一般多用根与系数关系构造一元二次方程解答.有些方程组通过适当变形可转化为这一形式,此时,亦可借助此法求解,但要注意防止漏解.

同类变式　已知方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\x^2-y^2=5.\end{cases}$ ①
②

则 $xy=$_____.

解　由②得 $(x+y)(x-y)=5$, ③

把①代入③,得 $x-y=1$, ④

由①与④联立,得

$\begin{cases}x+y=5,\\x-y=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

所以 $xy=3\times2=6.$

思维拓展　方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\x+y=5.\end{cases}$ ①
②

的解是(　　)

A. $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=-2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=-2\end{cases}$

C. $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\y_2=1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=2\end{cases}$

解法一　由②得 $y=5-x$, ③

把③代入①,得 $x^2+(5-x)^2=13$,

所以　$x_1=2, x_2=3.$

把 $x_1=2, x_2=3$ 分别代入②,得

$y_1=3, y_2=2,$

所以方程组的解为 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=2.\end{cases}$

故选 D.

解法二　将②的两边平方，得

$x^2+2xy+y^2=25$，　③

①代入③，得 $xy=6$，　④

由②与④联立，得

$\begin{cases}x+y=5,\\xy=6\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=2.\end{cases}$

故选 D.

【例 3】　(安徽省，2000) 一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=4;\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=-2,\\y=-4.\end{cases}$ 试写出符合要求的方程组_____. (只要填写一个即可)

思维技巧　此题是结论不唯一的开放性的题目，首先从方程组的两个解入手，考察两个解中的 x、y 的值具有怎样的关系式？从而可构造出符合要求的方程组.

答：$\begin{cases}y=2x,\\xy=8;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=2x,\\x^2+y^2=20;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}xy=8,\\x^2+y^2=20;\end{cases}$ …

激活思维　根据条件去探索结论，首先要多角度地去分析条件，以寻找发现问题的结论或实质. 本题的解答过程体现了逆向思维和创新思维的运用，从中我们可以领悟到探索解决问题的方法，有助于开阔视野，启迪思维.

同类变式　(陕西省，2002) 王老师在课堂上给出了一个二元方程 $x+y=xy$，让同学们找出它的解，甲写的解是 $\begin{cases}x=0,\\y=0;\end{cases}$ 乙写出的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=2;\end{cases}$ 你找出的与甲、乙不相同的一组解是_____

解　由于 $x+y=xy$ 是不定方程. 故可令 $x=m$，则有 $y=\frac{m}{m-1}$.

所以 $\begin{cases}x=m,\\y=\frac{m}{m-1}\end{cases}(m\neq1)$，是方程 $x+y=xy$ 的通解，当 $m=3$ 时，得 $\begin{cases}x=3,\\y=\frac{3}{2};\end{cases}$ …

【例 4】　(河北省，1997) 已知 a、b、c 是三角形三边长，若方程组 $\begin{cases}x^2-ax-y+b^2+ac=0,\\ax-y+bc=0\end{cases}$ 只有一组解，则这个三角形一定是_____.

思维技巧　这是方程组与几何相结合的综合问题.可设法消去 y,把方程组转化为一元二次方程,再用判别式 $\Delta=0$ 求解.

解　原方程组可化为 $x^2-2ax+b^2-bc+ac=0$,

由题意可得 $\Delta=0$,

即　$4a^2-4(b^2-bc+ac)=0$,

分解因式 $(a-b)(a+b-c)=0$,

由于 $a+b>c$,所以 $a=b$.

因此三角形是等腰三角形.

激活思维　通过消元将方程组转化为整式方程,然后借助于方程的有关知识,解决几何问题.既注重了数学思想方法,又考查了方程(组)知识的灵活运用.

同类变式　关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\x-y=k.\end{cases}$

(1) 当 k 取什么值时,方程组有实数解?

(2) 在以上 k 的取值范围内,k 取最大整数时,求这方程组的解.

方程组是否有实数解的问题可以转化为方程是否有实数解.第二个方程 $y=x-k$ 表明,如果 x 有实数值,y 就有实数值;x 没有实数值,y 也没有实数值.那么把 $y=x-k$ 代入第一个方程中,得到关于 x 的一元二次方程,这样就可以通过判别式求出 k 的取值范围.

解　(1) $\begin{cases}x^2+y^2=25, & ①\\x-y=k, & ②\end{cases}$

由②,得 $y=x-k$,代入①,得

$x^2+(x-k)^2=25$,所以　$2x^2-2kx+k^2-25=0$.

所以　$\Delta=4k^2-4\times2\times(k^2-25)=4(50-k^2)$.

$\Delta\geqslant0$,即 $4(50-k^2)\geqslant0$,$k^2\leqslant50$,

所以　$-5\sqrt{2}\leqslant k\leqslant5\sqrt{2}$.

所以　当 $-5\sqrt{2}\leqslant k\leqslant5\sqrt{2}$ 时,这个方程组有实数解.

(2) 适合 $-5\sqrt{2}\leqslant k\leqslant5\sqrt{2}$ 的最大整数 $k=7$,

所以　$\begin{cases}x^2+y^2=25, & ①\\x-y=7. & ②\end{cases}$

把 $y=x-7$ 代入①式,得 $x^2-7x+12=0$.

则 $x_1=3$,$x_2=4$.所以　$y_1=-4$,$y_2=-3$.

所以　这个方程组的解为 $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=-4;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=4,\\y_2=-3.\end{cases}$

思维拓展 (泰州,2001)已知:方程组 $\begin{cases}x^2-(2k+1)y-4=0,\\ y=x-2.\end{cases}$

(1) 求证:不论 k 为何值时,此方程组总有实数解;

(2) 设等腰 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c,其中 $c=4$,且 $\begin{cases}x=a,\\ y=a-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=b,\\ y=b-2\end{cases}$ 是该方程组的两个解.求 $\triangle ABC$ 的周长.

(1) 由方程组转化为关于 x 的一元二次方程,利用判别式 Δ,配成非负数的形式.

(2) 利用根与系数关系和一元二次方程根的定义,注意分类思想的运用.

解 (1) 代入整理,得 $x^2-(2k+1)x+4k-2=0$.

易证 $\Delta=(2k-3)^2\geqslant 0$.

(2) 由题意及(1)知,a,b 是方程 $x^2-(2k+1)x+4k-2=0$ 的两根,

从而,$a+b=2k+1$.又 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,

所以 $a=b$,或 a、b 中有一个与 c 相等.

① 当 $a=b$ 时,$\Delta=0$,$k=\frac{3}{2}$,

所以 $a+b=2k+1=4=c$,不合题意,

所以 $a\neq b$.

② 不妨设 $a=4=c$,可求出 $k=\frac{5}{2}$,

所以 $a+b=2k+1=6>c$.

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c=10$.

【例5】 (盐城市,1997)已知方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x=0, & ①\\ kx-y-k=0. & ②\end{cases}$$ (x,y 为未知数)

(1) 求证:不论 k 取何实数,方程组总有两个不同的实数解;

(2) 设方程组的两个不同的实数解为 $\begin{cases}x=x_1,\\ y=y_1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=x_2,\\ y=y_2,\end{cases}$

求证:$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 是一个常数.

思维技巧 (1) 设法消 y 转化为一元二次方程,由判别式的值进行判断.(2) 利用方程解的定义.$y_1=k(x_1-1)$,$y_2=k(x_2-1)$,所以 $y_1-y_2=k(x_1-x_2)$,所以 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2$,用根与系数关系求解.

解　(1) 由②得　$y=kx-k$,代入①式得

$(k^2+1)x^2-2(k^2+1)x+k^2=0$,　③

因为　$\Delta=4(k^2+1)^2-4k^2(k^2+1)=4(k^2+1)>0$,

所以　不论 k 取何实数,方程组总有两个不同的实数解.

(2) 因为　方程组有两个不同的实数解为 $\begin{cases}x=x_1,\\y=y_1;\end{cases}$和 $\begin{cases}x=x_2,\\y=y_2,\end{cases}$

所以　$y_1=kx_1-k$,$y_2=kx_2-k$,

所以　$y_1-y_2=k(x_1-x_2)$,

所以　$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2+k^2(x_1-x_2)^2$

$=(1+k^2)(x_1-x_2)^2$.

又由③知,$x_1+x_2=\dfrac{2(k^2+1)}{k^2+1}=2$,$x_1x_2=\dfrac{k^2}{k^2+1}$,

所以　$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$=2^2-4\dfrac{k^2}{k^2+1}=\dfrac{4}{1+k^2}$.

所以　$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+k^2)\cdot\dfrac{4}{1+k^2}=4=$常数.

激活思维　此题是方程组与一元二次方程判别式、根与系数关系相结合的综合题.在(2)中,利用方程组的解的定义,把待证式 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 转化为 $(1+k^2)(x_1-x_2)^2$,是解决本题的关键.

同类变式　(泉州市,1997)已知方程组

$\begin{cases}x^2-y+a+2=0,&①\\x-y+1=0&②\end{cases}$的两个解为 $\begin{cases}x=x_1,\\y=y_1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=x_2,\\y=y_2.\end{cases}$且 x_1、x_2 是两个不等的正数.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若 $x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=8a^2-6a-11$,试求 a 的值.

(1) 利用消元思想,将问题转化为一元二次方程问题;再由 $x_1+x_2>0$,$x_1x_2>0$ 及 $\Delta>0$,可求出 a 的取值范围.(2) 运用根与系数关系及第(1)题结论,可求得 a 的值.

解　由②得 $y=x+1$,代入①

整理得,　$x^2-x+a+1=0$,

因为　x_1、x_2 是两个不等的正数,

所以　$x_1+x_2>0$,$x_1x_2>0$,

即　$x_1+x_2=1>0$,

$x_1x_2=\frac{a+1}{1}>0$，所以 $a>-1$.

又 $\Delta=1-4(a+1)>0$，

所以 $a<-\frac{3}{4}$.

综上可知 $-1<a<-\frac{3}{4}$；

(2) 因为 $x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=(x_1+x_2)^2-5x_1x_2$

$=1-5(a+1)$，

所以 $1-5(a+1)=8a^2-6a-11$，

$8a^2-a-7=0$，所以 $a=1$ 或 $a=-\frac{7}{8}$.

由①知 $-1<a<-\frac{3}{4}$，

所以 $a=-\frac{7}{8}$.

思维拓展 (湖北省十堰市，2002) 已知方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=m, & ①\\ x+y=2. & ②\end{cases}$$

(1) 当 m 取何值时，方程组有两个不同的实数解；

(2) 若 $\begin{cases}x=x_1,\\ y=y_1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=x_2,\\ y=y_2\end{cases}$ 是方程组的两个不同的实数解，且 $|x_1-x_2|=\sqrt{3}|y_1y_2|$，求 m 的值.

解 (1) 由②得 $y=2-x$，③

把③代入①得 $x^2+(2-x)^2=m$，

即 $2x^2-4x+4-m=0$. ④

因为 $\Delta=(-4)^2-4\times2(4-m)=-16+8m>0$，

所以 $m>2$，即当 $m>2$ 时，原方程组有两个不同的实数解.

(2) 由④得 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\frac{1}{2}(4-m)$，

同理可得 $2y^2-4y+4-m=0$，

所以 $y_1y_2=\frac{1}{2}(4-m)$.

因为 $|x_1-x_2|=\sqrt{3}|y_1y_2|$，所以 $(x_1-x_2)^2=3(y_1y_2)^2$，

所以 $2^2-4\times\frac{1}{2}(4-m)=3\times\left(\frac{4-m}{2}\right)^2$，

即 $3m^2-32m+64=0$，所以 $m_1=\frac{8}{3}$，$m_2=8$.

因为 $\frac{8}{3}>2$，$8>2$，所以 $m=\frac{8}{3}$ 或 8.

综合能力测试

基础能力测试

1．填空题

⑴ (安徽省，2001) 方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\y=x^2-2x-3\end{cases}$ 的解是_____.

⑵ (山东聊城，2001) 方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\xy-x-y+1=0\end{cases}$ 的解是_____.

⑶ (乐山，2001) 若 $\begin{cases}x=5,\\y=-2\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}x+y=m,\\xy=n\end{cases}$ 的一组解，则这个方程组的另一组解是_____.

⑷ (云南曲靖，2000) 解二元二次方程组 $\begin{cases}x+y=7,\\xy=12,\end{cases}$ 用代入消元法消去未知数 y，得到关于 x 的一元二次方程是_____.

⑸ 方程组 $\begin{cases}x=y^2,\\x=3y-k\end{cases}$ 有两组相同的解，则 k 的值为_____.

⑹ (镇江市，1998) 已知方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\x^2+y^2=13\end{cases}$ 的两组解为 $\begin{cases}x_1=a_1,\\y_1=b_1\end{cases}$；$\begin{cases}x_2=a_2,\\y_2=b_2.\end{cases}$ 则 $a_1b_2+a_2b_1$ 的值为_____.

⑺ (乌鲁木齐市，1998) 当 $m=$_____ 时，方程组 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=2x+m\end{cases}$ 有一个实数解，其解是_____.

⑻ (武汉市，1999) 方程组 $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12},\\\frac{1}{xy}=\frac{1}{12}\end{cases}$ 的解是_____.

2．选择题

⑴ (杭州市，2002) 方程组 $\begin{cases}y=x-5,\\x^2+y^2=17\end{cases}$ 的解为 (　　)

A. $\begin{cases}x=-1,\\y=-6;\end{cases}\begin{cases}x=-4,\\y=-9\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=-1,\\y=-6;\end{cases}\begin{cases}x=4,\\y=-1\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=1,\\y=-4;\end{cases}\begin{cases}x=-4,\\y=-9\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=1,\\y=-4;\end{cases}\begin{cases}x=4,\\y=-1\end{cases}$

⑵ 当 $m<-2$ 时，关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}x=my,\\y^2-x+1=0\end{cases}$ 的实数解的个数是（　　）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

⑶ 已知 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}ax+by=1,\\bx+ay=7\end{cases}$ 的解，则 $(a+b)(a-b)$ 的值为（　　）

A. $-\frac{35}{3}$　　B. $\frac{35}{3}$　　C. -16　　D. 16

⑷ 若方程组 $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=k,\\\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}\end{cases}$ 的两个未知数相等，则 k 值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. $\pm\sqrt{2}$　　D. ±2

⑸ 方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\x+y=2\end{cases}$ 的解是（　　）

A. $\begin{cases}x=3,\\y=-1\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=-1,\\y=3\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=3,\\y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=3\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=-1,\\y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=-3\end{cases}$

⑹ 已知 $x=3$，$y=2$ 是方程组 $\begin{cases}mx-ny=-1,\\mx^2+ny^2=17\end{cases}$ 的解，那么 m，n 的值是（　　）

A. $\begin{cases}m=1,\\n=2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}m=-\frac{1}{13},\\n=2\frac{8}{13}\end{cases}$　　C. $\begin{cases}m=\frac{8}{13},\\n=-\frac{1}{16}\end{cases}$　　D. $\begin{cases}m=0,\\n=1\end{cases}$

⑺ 若方程组 $\begin{cases}x^2-12y=0,\\x-3y=m\end{cases}$ 有两个相同的实数解，则 m 的值等于（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. ±1

⑻ 方程组 $\begin{cases}x+y=2,\\x^2+y^2=20\end{cases}$ 的解是（　　）

A. $\begin{cases}x_1=-4,\\y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\y_2=-4\end{cases}$　B. $\begin{cases}x_1=4,\\y_1=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=4\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=-4,\\y=2\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=2,\\y=-4\end{cases}$

(9) 已知 $x=3,y=2$ 是方程组 $\begin{cases}ax^2+by^2=17,\\bx-ay=4\end{cases}$ 的解，那么 a、b 的值是（　）

A. $\begin{cases}a=1,\\b=2\end{cases}$　B. $\begin{cases}a=-\frac{1}{13},\\b=2\frac{8}{13}\end{cases}$　C. $\begin{cases}a=\frac{8}{13},\\b=-\frac{1}{16}\end{cases}$　D. $\begin{cases}a=0,\\b=-1\end{cases}$

(10) 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}x^2+y=25,\\6x-y=k\end{cases}$ 无实数解，那么 k 的取值范围是（　）

A. $k>-34$　B. $k<-34$　C. $k\leqslant -34$　D. $k\geqslant -34$

3. (舟山市，2003) 解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\x+y=1.\end{cases}$

4. (北京市海淀区，2002) 解方程组 $\begin{cases}x^2-y^2=0,\\x+2y=3.\end{cases}$

5. (四川眉山，2002) 解方程组 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\2x+y=0.\end{cases}$

6. (黄冈市，2002) 解方程组 $\begin{cases}2x-y^2+6y-11=0,\\x-2y-1=0.\end{cases}$

7. (大连市，2002) 解方程组 $\begin{cases}x^2-2x+3y-5=0,\\x-y+1=0.\end{cases}$

8. (重庆市，2002) 解方程组 $\begin{cases}2x-y=5,\\\frac{2y}{x}-\frac{x}{y}=1.\end{cases}$

9. (北京市石景山区，2001) 解方程组 $\begin{cases}x=3y+8,\\xy+6x-5y=30.\end{cases}$

10. m 为何值时，方程组 $\begin{cases}y^2-4x-2y+1=0,\\y=mx+2\end{cases}$ (1) 有相同的两组实数解；(2) 有不同的两组实数解；(3) 没有实数解.

11. 已知直角三角形的周长为 $6+2\sqrt{14}$，斜边上的中线长为 3，求这个三角形面积.

12．当 a 为何值时，关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\x-y=a\end{cases}$ 有一个实数解，并求出这时方程组的解．

13．当 a 为何值时，关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}y^2-4x-2y+1=0,\\y=x+a\end{cases}$

(1) 有两个不相等的实数解？(2) 有唯一实数解？(3) 没有实数解？

探究能力测试

14．若一元二次方程组 $\begin{cases}x+y+k=0, & ①\\x^2-2x-y-1=0 & ②\end{cases}$ 没有实数解．求证：一元二次方程 $x^2+x+k=0$ 也没有实数根．

15．（南通市，2003）设方程组 $\begin{cases}x^2-x-y=0,\\y=2x-1\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=x_1,\\y=y_1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=x_2\\y=y_2.\end{cases}$ 求 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 和 $y_1\cdot y_2$ 的值．

12.9 由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组

学点探究分析

重点　掌握由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组的解法．

难点　理解解方程组变换过程中各方程之间的逻辑关系．

探究点　通过消元将解二元二次方程组转化为解一元二次方程，借助于一元二次方程有关知识解决有关问题，对特殊的二元二次方程组，可通过整体代换，用根与系数关系求解，其次列二元二次方程组解答应用题，越来越被人们关注．

学习方法技巧

对于“二·二型”方程组关键是消元与降次，通过观察方程组的特点，除常规解法外，还可以利用根与系数关系，构造方程求解，或设辅助未知数，利用整体代换，使解答过程简化．

当方程组中两个二元二次方程都可以分解为两个二元一次方程时，将

第一个二元二次方程分解所得到的每一个二元一次方程分别与第二个二元二次方程分解所得的第一个二元一次方程组成方程组，可得到四个二元一次方程组，解这四个二元一次方程组，所得的解都是原方程组的解.

“二·二型”方程组最多有四组解，解方程组时，既不要漏解，也不要增解.

能力升级捷径

【例 1】　(巴中市，2002) 解方程组

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0, & ① \\ 3x^2 + xy + x - 2y + 6 = 0. & ② \end{cases}$$

思维技巧　这是一个“二·二型”方程组. 解这类方程组时，首先要认真观察每个方程的特点，根据方程的特点，采取恰当方法把它转化为“一·二型”方程组求解. 显然方程①可因式分解.

解　由①得，$y = 2x$ 或 $y = -2x$.

所以　原方程组可化为

$$\begin{cases} y = 2x, \\ 3x^2 + xy + x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} y = -2x, \\ 3x^2 + xy + x - 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

解得原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

激活思维　解这类方程组的基本思想仍是“转化”. 转化的方法一般是“降次”、“消元”，根据方程的特点，运用因式分解，把“二·二型”方程组转化为“一·二型”方程组是关键.

同类变式　1. (南充市，2001) 解方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3x + 3y, & ① \\ x^2 - xy + y^2 = 27. & ② \end{cases}$

观察每个方程特点，方程①可因式分解.

解　方程①可分解为 $(x + y)(x - y - 3) = 0$，

所以　$x + y = 0$ 或 $x - y - 3 = 0$.

因此原方程组可化为以下两个方程组

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 27; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

分别解这两个方程组，得原方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 6, \\ y_3 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -6. \end{cases}$$

2. 解方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, & ① \\ (x - y)^2 - 2(x - y) - 3 = 0. & ② \end{cases}$

观察方程②，把 $(x-y)$ 看成整体，那么方程②就可以看做是关于 $(x-y)$ 的一元二次方程，因此可分解为 $(x-y-3)(x-y+1)=0$. 由此可得到两个二元一次方程 $x-y-3=0$ 和 $x-y+1=0$.

这两个二元一次方程分别和方程①组成两个“二·一”型的方程组：

$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ x-y-3=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ x-y+1=0.\end{cases}$

分别解这两个方程组，就可得到原方程的解.

解　由②得 $(x-y-3)(x-y+1)=0$，

所以　$x-y-3=0$ 或 $x-y+1=0$.

所以　原方程组可化为两个方程组：

(1) $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ x-y-3=0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ x-y+1=0.\end{cases}$

用代入消元法解方程组 (1) 和 (2)，分别得

$\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{3},\\ y_1=-\dfrac{4}{3};\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=0.\end{cases}$

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{3},\\ y_1=-\dfrac{4}{3};\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=0.\end{cases}$

思维拓展　解方程组 $\begin{cases}x^2+3xy=28,\\ 2xy-y^2=7.\end{cases}$ ①②

解　由①－②×4，得 $x^2-5xy+4y^2=0$，

$(x-y)(x-4y)=0$，

所以　$x-y=0$ 或 $x-4y=0$，因此，原方程组可化为两个方程组

$\begin{cases}x-y=0,\\ 2xy-y^2=7;\end{cases}$　$\begin{cases}x-4y=0,\\ 2xy-y^2=7.\end{cases}$

解这两个方程组，得方程组的解为

$\begin{cases}x_1=\sqrt{7},\\ y_1=\sqrt{7};\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-\sqrt{7},\\ y_2=-\sqrt{7};\end{cases}$　$\begin{cases}x_3=4,\\ y_3=1;\end{cases}$　$\begin{cases}x_4=-4,\\ y_4=-1.\end{cases}$

【例 2】　解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=41,\\ xy=20.\end{cases}$ ①②

思维技巧　观察方程组特点，方程组中两方程的左边均为 x、y 的对称

式，且具有根与系数关系的结构特点，迅速联想到一元二次方程的根与系数关系.

解法一　由①+②×2，得 $(x+y)^2=81$，

所以，$x+y=9$ 或 $x+y=-9$.

原方程组组成两个新方程组

$\begin{cases}x+y=9,\\xy=20.\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-9,\\xy=20.\end{cases}$

由根与系数关系解这两个方程组，得

$\begin{cases}x_1=4,\\y_1=5;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=5,\\y_2=4;\end{cases}$　$\begin{cases}x_3=-4,\\y_3=-5;\end{cases}$　$\begin{cases}x_4=-5,\\y_4=-4.\end{cases}$

解法二　①−②×2，得 $(x-y)^2=1$，

所以 $x-y=1$ 或 $x-y=-1$，

①+②×2 得 $(x+y)^2=81$，所以 $x+y=9$ 或 $x+y=-9$.

原方程组组成四个新方程组为

$\begin{cases}x+y=9,\\x-y=1;\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=9,\\x-y=-1;\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-9,\\x-y=1;\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-9,\\x-y=-1.\end{cases}$

解这四个方程组，得

$\begin{cases}x_2=5,\\y_1=4;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=4,\\y_2=5;\end{cases}$　$\begin{cases}x_3=-4,\\y_3=-5;\end{cases}$　$\begin{cases}x_4=-5,\\y_4=-4.\end{cases}$

激活思维　解法一、二都是“二·二型”方程组的技巧性解法，特别是解法二结合完全平方式的应用，原方程组经转化变成四个二元一次方程组. 应用旧知识解决新知识，方法巧妙.

同类变式　解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=52,\\xy+x+y=34.\end{cases}$ ①　②

此方程组是“二·二”型方程组，因为方程①和②都不能分解为两个二元一次方程，所以需要寻找其他解法. 我们先考虑能否用换元法. 因为 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$. 所以，方程①可化为 $(x+y)^2-2xy=52$，显然此方程组具备换元条件，可以用换元法来解.

解　由①得 $(x+y)^2-2xy=52$.

设 $x+y=u$，$xy=v$，则原方程组可化为

$\begin{cases}u^2-2v=52,\\u+v=34.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}u_1=10,\\v_1=24;\end{cases}$　$\begin{cases}u_2=-12,\\v_2=46.\end{cases}$

即 $\begin{cases}x+y=10,\\xy=24\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=-12,\\xy=46.\end{cases}$

解 $\begin{cases}x+y=10,\\xy=24\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=4,\\y=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=6,\\y_2=4.\end{cases}$

解 $\begin{cases}x+y=-12,\\xy=46.\end{cases}$ 无解.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=4,\\y_1=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=6,\\y_2=4.\end{cases}$

思维拓展 已知 $\begin{cases}x=3\sqrt{2},\\y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=9,\\y=4\sqrt{2}\end{cases}$ 是方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两组解，求正数 a，b 的值.

解 因为 $\begin{cases}x=3\sqrt{2},\\y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=9,\\y=4\sqrt{2}\end{cases}$ 是方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的解，所以

$$\begin{cases}\frac{(3\sqrt{2})^2}{a^2}-\frac{2^2}{b^2}=1,\\\frac{9^2}{a^2}-\frac{(4\sqrt{2})^2}{b^2}=1.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}\frac{18}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1, & ①\\\frac{81}{a^2}-\frac{32}{b^2}=1. & ②\end{cases}$

②－①，整理得

$$\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=0,$$

由此得 $$a=\pm\frac{3}{2}b.$$

因为 $a>0$，$b>0$，

所以 $a=\frac{3}{2}b.$

③代入①，得 $b=2$（负值已舍去）.

所以 $a=\frac{3}{2}$， $b=3.$

于是 $\begin{cases}a=3,\\b=2.\end{cases}$

【例 3】 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}x^{2m-1}-2y=8,\\3x+5y^{n+6}=9\end{cases}$ 是二元二次方程组，求 m、n 的值.

思维技巧 解答此题，首先要明确什么是二元二次方程组. 根据二元二次方程组的定义知，当第一个方程中 $x^{2m-1}=x^2$ 时，第二个方程中，y^{n+6}

不论是二次项、一次项还是零次项，方程组都是二元二次方程组．同样，如果 $y^{n+6}=y^2$ 时，x^{2m-1} 也可以是二次项、一次项、零次项．

解　二元二次方程组中至少有一个方程为二次方程，另一个方程为二次方程或一次方程．

所以　当 $2m-1=2$，即 $m=\frac{3}{2}$ 时，$n+6=2$ 或 $n+6=1$ 或 $n+6=0$，这时 $n=-4$ 或 -5 或 -6．

当 $n+6=2$，即 $n=-4$ 时，$2m-1=2$ 或 $2m-1=1$ 或 $2m-1=0$，这时 $m=\frac{3}{2}$ 或 1 或 $\frac{1}{2}$．

综上所述，因此一共有以下五种情况：

$$\begin{cases}m_1=\frac{3}{2},\\ n_1=-4;\end{cases}\quad\begin{cases}m_2=\frac{3}{2},\\ n_2=-5;\end{cases}\quad\begin{cases}m_3=\frac{3}{2},\\ n_3=-6;\end{cases}\quad\begin{cases}m_4=1,\\ n_4=-4;\end{cases}\quad\begin{cases}m_5=\frac{1}{2},\\ n_5=-4.\end{cases}$$

激活思维　正确理解二元二次方程组的定义是解答此题的关键．解题过程中要注意分类思想的运用．受思维定势的影响，解答本题容易产生的错误是认为只有一个解 $\begin{cases}m=\frac{3}{2}\\ n=-4\end{cases}$，或 m、n 值搭配出现错误．

同类变式　已知关于 x、y 的方程组

$$\begin{cases}y=kx^2,\\ x^2+y-2kx-k+1=0\end{cases}\qquad\begin{matrix}①\\②\end{matrix}$$

恰有一个实数根，求实数 k 的值．

解　将①代入②得

$$(1+k)x^2-2kx+(1-k)=0,\qquad③$$

当 $1+k=0$，即 $k=-1$ 时，

方程③有实数根 $x=-1$，则 $y=-1$．

此时，原方程组有实数解为 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}$

当 $k+1\neq0$ 时，即 $k\neq-1$．

方程③　$\Delta=4k^2-4(1-k^2)=0$，

解之　$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．

综合以上可知，当 $k=-1,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，原方程组恰有一个实数解．

【例 4】 (武汉市,2001)为了将武汉市建设成为山水园林城市,决定建设“武汉外滩”.现将一工程发包给某城建公司,该公司甲、乙两工程队如果合做这项工程共需 4 个月 如果先由甲队单独做 3 个月,剩下的工程由乙队单独完成,那么,乙队所需的时间等于甲队单独完成这项工程所需的时间.求甲、乙两队单独完成这项工程各需几个月?

思维技巧 此题等量关系:① 甲、乙合作 4 个月完成总工作量 1;② 甲做 3 个月,乙做剩下的工作量的和为 1.

解 设甲、乙两工程队单独完成这项工程分别需 x,y 个月,依题意得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}, & ①\\[2ex] \dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{y}=1. & ②\end{cases}$$

由①得 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}$, ③

将③代入②得 $\dfrac{3}{x}+x\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}\right)=1.$

整理得 $x^2-8x+12=0$,解得 $x_1=2$,$x_2=6$,

所以 $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=-4;\end{cases}$(舍去) $\begin{cases}x_2=6,\\ y_2=12.\end{cases}$

经检验,$\begin{cases}x=6,\\ y=12\end{cases}$是方程组的解.

答:单独完成这项工程甲需 6 个月,乙需 12 个月.

激活思维 此例用 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}$ 代入方程②,达到消元的目的,而没有先去分母,把分式方程化为两个二元二次方程.注意了“整体代换”的运用.本题中乙队单独完成剩下工程所需的时间是间接给出的,这是解此题时的一个思维障碍.

同类变式 (武汉市,2002) 武汉市某校组织甲、乙两班学生参加“美化校园”的义务劳动.若甲班做 2 h,乙班做 3 h 则恰好完成全部工作的一半;若甲班先做 2 h 后另有任务,剩下工作由乙班单独完成,则乙班所用的时间恰好比甲班单独完成全部工作的时间多 1 h.问单独完成这项工作,甲、乙两班各需多少时间?

解 设单独完成这项工作,甲班需 x h,乙班需 y h,

根据题意，得$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{x+1}{y}=1.\end{cases}$

整理得 $x^2-9x+8=0$，解得 $x=8$ 或 1.

所以 $\begin{cases}x_1=8,\\ y_1=12;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=-2.\end{cases}$（舍去）

经检验，$\begin{cases}x=8,\\ y=12\end{cases}$是原方程组的解.

答：单独完成这项工作，甲班需 8 h，乙班需 12 h.

思维拓展　（山东威海，2001）某公司要改成股份制公司，职工投资总额需达 a 万元，计划由公司职工平均投资入股. 如果职工中有 4 人愿意每人投资 10 万元，那么剩下的职工平均每人可以少投资 0.5 万元；如果职工中有 6 人愿意每人投资 12 万元，那么剩下的职工平均每人可以少投资 1 万元. 如果职工中有 10 人不参加投资入股，那么剩下的职工平均每人需投资多少万元？

解　设该公司有职工 x 人，计划每人投资 y 万元，依题意有

$\begin{cases}xy=(x-4)(y-0.5)+4\times10,\\ xy=(x-6)(y-1)+6\times12.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=60,\\ y=3.\end{cases}$

所以　$3\times60\div(60-10)=3.6$（万元）

答：剩下职工平均每人需投资 3.6 万元.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1)（山西省，1999）解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=20,\\ (x-2y)(x-3y)=0\end{cases}$ 时，可先化为_____和_____两个方程组.

(2) 把方程 $4x^2-4xy-15y^2=0$ 分解为两个二元一次方程为_____.

(3) 解方程组 $\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0,&①\\ 3x^2+2xy=20,&②\end{cases}$ 先将方程①化为两个二元一次

方程_____,这样,原方程组可化为两个方程组_____.

(4) 方程组 $\begin{cases}3x^2-2xy-y^2=0,\\ x^2-y^2-2x=0\end{cases}$ 可化为_____个方程组来解,它们是_____.

2. 选择题

(1) (重庆市,1999) 方程组 $\begin{cases}4x^2-y^2=0,\\ 3x^2-xy+x+2y+6=0\end{cases}$ 的实数解的个数是(　　)

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. 0

(2) 解方程 $\begin{cases}x^2+y^2=20, & ①\\ (x-2y)(x-3y)=0 & ②\end{cases}$ 时,可先化②为_____和 $x=3y$ 两个方程组(　　)

A. $x=2y$　　B. $x=6y$　　C. $x=0$　　D. $y=0$

(3) 方程组 $\begin{cases}x^2-y^2=2,\\ 6xy=0\end{cases}$ 的解是(　　)

A. $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y=0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=0,\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=-\sqrt{2}\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=\pm\sqrt{2},\\ y=0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=0,\\ y=\sqrt{2}\end{cases}$; $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y=0\end{cases}$

(4) 二元二次方程组 $\begin{cases}y=x^2,\\ xy-3x+2y-6=0\end{cases}$ 的解的个数是(　　)

A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 6个

3. 解方程组

(1) (辽宁省,1997) $\begin{cases}x^2-4xy+3y^2=0,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}$

(2) (四川省,1996) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ (x-y)^2-6(x-y)+5=0.\end{cases}$

(3) (湖南怀化市,2001) $\begin{cases}x^2-y^2=0,\\ y^2=2x.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}(x+y-1)(x-y-3)=0,\\ 3x^2+4y^2=16.\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2=4,\\ x^2-xy-y^2=0.\end{cases}$

(6) $\begin{cases}4x^2-y^2+2y-1=0,\\ x^2-y^2-x-y=0.\end{cases}$

4. (山东菏泽,2001) 某人买 a m 纯棉布和 b m 涤纶布共花了 60 元,一年后价格调整,纯棉布价格上调的百分数正好与涤纶布价格下调的百分数相等,调整后买 a m 纯棉布需 36 元,买 b m 涤纶布只需 18 元. 那么原来买 a m 纯棉布需多少元?一年后纯棉布价格上调的百分率是多少?

探究能力测试

5. (大连市,1999) 阅读 解方程组 $\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0, & ①\\ x^2+y^2=10. & ②\end{cases}$

解　由①得 $(x-y)(x-2y)=0$,

所以　$x-y=0$ 或 $x-2y=0$,

所以　原方程组可化为两个方程组

$\begin{cases}x-y=0;\\ x^2+y^2=10;\end{cases}$　　$\begin{cases}x-2y=0,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}$

解这两个方程组,得原方程组的解为

$\begin{cases}x_1=\sqrt{5},\\ y_1=\sqrt{5};\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-\sqrt{5},\\ y_2=-\sqrt{5};\end{cases}$　$\begin{cases}x_3=2\sqrt{2},\\ y_2=\sqrt{2};\end{cases}$　$\begin{cases}x_4=-2\sqrt{2},\\ y_4=-\sqrt{2}.\end{cases}$

填空 第一步中,运用_____法将方程①化为两个二元一次方程,达到了_____的目的,由第一步到第二步,将原方程组化为两个由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组,体现了_____的数学思想,第二步中,两个方程组都运用_____法达到_____的目的,从而使方程组得以求解.

6. (杭州市,1999) 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}x^2-y=0, & ①\\ x^2+y^2-2ay+a^2-1=0 & ②\end{cases}$ 恰有两个不同的实数解,求实数 a 的范围.

7. 已知一元二次方程 $z^2+pz+q=0$ 的两个实数根满足方程组 $\begin{cases}x-xy+y=3,\\ x^2y+xy^2=-2\end{cases}$ 的解,求这个一元二次方程.

12.10 小结与复习

学点探究分析

重点 一元二次方程的解法、根的判别式，根与系数的关系及应用，一元二次方程的应用.

难点 一元二次方程的应用、根与系数关系的灵活运用.

探究点 与一元二次方程有关的综合题和一元二次方程的应用问题是中考命题的热点之一，同时也是难点之一. 题型多样，以教材上的例题、习题为基础，以社会关注的热点问题为背景，从中寻找题中的等量关系，以解决方程(组)应用问题，既有对常用的数学思想、解题方法的探究，又有对收集和处理信息的能力、阅读理解能力、获取新知识的能力、创新实践能力的考查.

学习方法技巧

(1) 根据方程特点，灵活选用解法，特别是换元法. 根与系数关系是在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实根的前提下推导出来的，因此在综合性较强的问题中，要注意 $\Delta\geqslant 0$ 且 $a\neq 0$ 这两个隐含条件.

(2) 随着经济类应用题的“火爆”，方程应用题富有创意的改动，复习时，要对课本上典型例题、习题予以足够重视，如把工程问题和日常生活、生产中的问题结合在一起，把增长率问题与当今社会纳税、利息、分期付款等问起联系起来.

(3) 学会用分类思想来处理问题.

【例 1】 (1) (西安市，2000) 用直接开平方法解方程 $(x-3)^2=8$ 得方程的根为 (　　)

A. $x=3+2\sqrt{2}$　　B. $x=3-2\sqrt{2}$

C. $x_1=3+2\sqrt{2}, x_2=3-2\sqrt{2}$　　D. $x_1=3+2\sqrt{3}, x_2=3-2\sqrt{3}$

(2) (江西省) 用配方法解关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 时，此方程可变形为 (　　)

A. $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$　　B. $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{4q-p^2}{4}$

C. $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$　　D. $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{4q-p^2}{4}$

(3) (河南省，2002) 如果分式 $\frac{x^2-7x-8}{x+1}$ 的值为 0，则 $x=$ _____

_____.

解　(1) 因为 $(x-3)^2=8$　所以　$x-3=\pm 2\sqrt{2}$，

所以　$x=3\pm 2\sqrt{2}$.

因此选 C. 注意开平方取正负.

(2) 因为　$x^2+px+q=0$，

所以　$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$，

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$.

所以选 A.　注意方程两边加上一次项系数一半的平方.

(3) 由 $x^2-7x-8=0$　得　$(x-8)(x+1)=0$，

所以　$x_1=8, x_2=-1$，又 $x+1\neq 0$，

所以　$x=8$.

注意　分式有意义时，分母不为零.

同类变式　(浙江省，2002) 解方程：$x=\sqrt{x+2}$.

解　因为　$x=\sqrt{x+2}$，所以　两边平方得

$x^2=x+2$，即 $x^2-x-2=0$，$(x-2)(x+1)=0$，

所以　$x_1=2$ 或 $x_2=-1$.

又因为　$x=\sqrt{x+2}\geqslant 0$，　所以　$x>0$，

因此原方程的根为 $x=2$.

思维拓展　(南宁市，2002) 已知 $\frac{x^2+4x+3}{x+1}=0$，先化简后求 $\frac{x^2}{x-3}+\frac{9}{3-x}$ 的值.

解　因为　$\frac{x^2+4x+3}{x+1}=0$，　所以　$x^2+4x+3=0$，

所以　$(x+1)(x+3)=0$，　所以　$x_1=-1$ 或 $x_2=-3$.

又　$x+1\neq 0$，

所以　$x=-3$.

$$\frac{x^2}{x-3}+\frac{9}{3-x}=\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}=\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3.$$

当 $x=-3$ 时，原式 $=-3+3=0$.

【例 2】　(绍兴市，2002) 已知 α 是锐角，且 $\tan\alpha$，$\cot\alpha$ 是关于 x 的一元二

次方程 $x^2-kx+k^2-8=0$ 的两个实数根，求 k 的值.

分析　此题给出了两实根蕴含的倒数关系，即 $k^2-8=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.

解　因为　$\tan\alpha$，$\cot\alpha$ 是方程两实根，

所以　$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=k^2-8=1$，

解得　$k_1=3$，$k_2=-3$.

又因为 α 是锐角，所以　$\tan\alpha+\cot\alpha=k>0$，

所以只能取 $k=3$，

此时 $\Delta=k^2-4(k^2-8)>0$，　所以 k 的值为 3.

同类变式　(德阳市，2002) 如果关于 x 的一元二次方程 $2x^2+4x+3k=0$ 的两根 x_1，x_2 的平方和等于 7，求 k 的值.

解　由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=\frac{3k}{2}$，

由题意得，因为　$x_1^2+x_2^2=7$，

所以　$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7$，即 $(-2)^2-3k=7$，

所以　$k=-1$.

此时，$\Delta=16-24k=16-24(-1)=40>0$，

所以 k 的值为 -1.

思维拓展　(海南省，2002) 对关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$.

(1) 当 a、c 异号时，试证明该方程必有两个不相等的实数根；

(2) 当 a、c 同号时，该方程要有实数根，还须满足什么条件？请你找出一个 a、c 同号且有实数根的一元二次方程，然后解这个方程.

解　(1) 因为 a、c 异号，所以 $ac<0$，所以 $-4ac>0$，

又 $b^2\geqslant0$，　所以　$\Delta=b^2-4ac>0$.

所以当 a、c 异号时，方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 必有两个不相等的实数根.

(2) 当 a、c 同号时，该方程要有实数根，还需满足 $b^2-4ac\geqslant0$.

同学们能否写出一个符合条件的一元二次方程，然后解出这个方程的根呢？

【例 3】　(河北省，2001) 已知等腰三角形的三边长为 a、b、c，且 $a=c$. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$ 的两根之差为 $\sqrt{2}$，则等腰三角形的一个底角是 (　　)

A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°

分析　本题考查的知识点较多，要注意充分应用等腰三角形和解直角

三角形的知识解题.

解　设 x_1、x_2 是方程 $ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$ 的两根，

则 $x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，

从而　$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{2b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}$.

因为　$x_1-x_2=\sqrt{2}$，$a=c$，

所以　$\frac{2b^2}{a^2}-4=2$，

所以　$b^2=3a^2$，$b=\sqrt{3}a$.

若过 B 作底边 AC 上的高 BD（如图 12－11），

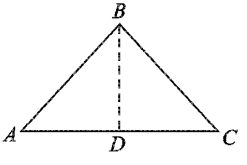


图 12－11

则有 $\cos A=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

从而$\angle B=30°$.　　选 B.

同类变式　已知关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2-4x+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1 和 x_2.（1）求 k 的取值范围；（2）当方程两根之积的倒数等于两根之和的 4 倍时，求$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$的值.

思路分析　本题综合考查根的判别式和根与系数关系的应用，解题时应注意到方程中二次项系数是含 k 的代数式，应不等于 0.

解　（1）因为　方程有两个不相等的实数根，

所以　$\Delta=(-4)^2-4(k-1)\times1=20-4k>0$，

所以　$k<5$.

又因为　$k-1\neq0$，所以　$k\neq1$.

所以 k 的取值范围是 $k<5$ 且 $k\neq1$.

（2）依题意，得　$\frac{1}{x_1x_2}=4(x_1+x_2)$，

又因为 $x_1x_2=\frac{1}{k-1}$，$x_1+x_2=\frac{4}{k-1}$，

所以 $k-1=4\times\frac{4}{k-1}$，解得 $k_1=5$，$k_2=-3$.

由(1)知 $k<5$，所以 $k=-3$.

所以 $x_1x_2=-\frac{1}{4}$，$x_1+x_2=-1$，

所以 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$

$=\frac{(-1)^2-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{-\frac{1}{4}}=-6.$

在利用根的判别式、根与系数关系解题时，一定要注意原方程必须是一元二次方程，即要限定二次项系数不为0，一般题目中或直接指明方程的类型，或以方程有两个实数根暗示. 特别是当方程最高项系数是一个没有具体指明的字母时，得依字母的不同取值对方程的类型进行讨论，再根据不同类型的方程做出结论. 在解题时，许多人往往易把方程有实数根与方程有两个实数根等同起来，其实这是个错误.

思维拓展 (黄冈市，2000)已知关于 x 的方程为 $(k-2)x^2-2(k-1)x+(k+1)=0$，且 $k\leqslant 3$. (1) 求证：此方程总有实数根；(2) 当方程有两个实数根，且两实数根的平方和等于4时，求 k 的值.

(1) 证明 当 $k=2$ 时，方程为一次方程 $-2x+3=0$，显然它有一个实数根为 $x=\frac{3}{2}$.

当 $k\neq 2$ 时，方程为一元二次方程，且

$\Delta=[-2(k-1)]^2-4(k-2)(k+1)=4(3-k)$，

因为 $k\leqslant 3$，所以 $3-k\geqslant 0$，即 $\Delta\geqslant 0$，

此时，方程有两个实数根.

综上，原方程总有实数根.

(2) 设方程两实数根为 x_1，x_2，则

$x_1+x_2=\frac{2(k-1)}{k-2}$，$x_1x_2=\frac{k+1}{k-2}$，

又因为 $x_1^2+x_2^2=4$，即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4$，

所以 $\left[\frac{2(k-1)}{k-2}\right]^2-2\times\frac{k+1}{k-2}=4.$

整理得 $k^2-5k+4=0$，解得 $k_1=1$，$k_2=4$.

因为　$k\leqslant 3$，所以　$k=1$.

【例 4】　解方程（组）：

(1)　$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}+\dfrac{2}{2-x}=1$；

(2)　(北京市崇文区，2002) 用换元法解方程　$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)-6\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)=1$；

(3)　(天门市，2002)　$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8},\\ x+y=12;\end{cases}$

(4)　$\begin{cases}x^2+2xy+y^2-4=0,\\ (x-y)^2-2(x-y)-24=0.\end{cases}$

解　(1) 方程两边同乘以 $(x+2)(x-2)$　得

$x-2+4x-2(x+2)=x^2-4$，

整理得　$x^2-3x+2=0$，

解之　$x_1=1, x_2=2$，

经验根知　$x=2$ 是增根.

所以原方程的根为 $x=1$.

(2) 原方程变为　$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)-\dfrac{6}{x+\dfrac{2}{x}}=1$.

设 $x+\dfrac{2}{x}=y$，则有 $y-\dfrac{6}{y}=1$，

即　$y^2-y-6=0$，　解之　$y_1=3, y_2=-2$.

当 $y=3$ 时，有 $x+\dfrac{2}{x}=3$，即　$x^2-3x+2=0$，

所以　$x_1=2, x_2=1$.

当 $y=-2$ 时，有 $x+\dfrac{2}{x}=2$，即　$x^2-2x+2=0$.

因为　$\Delta=4-8=-4<0$，所以此方程无实根.

经检验知　$x_1=2, x_2=1$ 是原方程的根.

(3) 因为　$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8}, & ①\\ x+y=12, & ②\end{cases}$

所以　由①得　$\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{8}$，即　$\dfrac{12}{xy}=\dfrac{3}{8}$，

所以　$xy=32$.

因此原方程组变为　$\begin{cases}x+y=12,\\ xy=32.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=4,\\y=8\end{cases}$或 $\begin{cases}x=8,\\y=4.\end{cases}$

经检验知 $\begin{cases}x=4,\\y=8\end{cases}$；$\begin{cases}x=8,\\y=4\end{cases}$都是原方程组的解.

(4) 原方程组变为 $\begin{cases}(x+y+2)(x+y-2)=0,\\(x-y-6)(x-y+4)=0.\end{cases}$

即为 $\begin{cases}x+y+2=0,\\x-y-6=0\end{cases}$；$\begin{cases}x+y+2=0,\\x-y+4=0\end{cases}$；$\begin{cases}x+y-2=0,\\x-y-6=0\end{cases}$；$\begin{cases}x+y-2=0,\\x-y+4=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-4\end{cases}$；$\begin{cases}x=-3,\\y=1\end{cases}$；$\begin{cases}x=4,\\y=-2\end{cases}$；$\begin{cases}x=-1,\\y=3.\end{cases}$

同类变式 (1) (荆州市,2002) 解方程：$\dfrac{x^2-6}{x-4}+\dfrac{2(x-4)}{x^2-6}=3.$

提示 设 $\dfrac{x^2-6}{x-4}=y.$

(2) (呼和浩特市,2002) 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=1,\\\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{25}{y^2}=25.\end{cases}$

提示 原方程组可变为 $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=1,\\\left(\dfrac{2}{x}\right)^2+\left(\dfrac{5}{y}\right)^2=25.\end{cases}$

思维拓展 (乌鲁木齐,2002) 若实数 a、b 满足 $|a+2|+(b-5)^2=0$,解关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}x+y=1-a,\\xy=-2b.\end{cases}$

解 由 $|a+2|+(b-5)^2=0$ 得

$\begin{cases}a+2=0,\\b-5=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=-2,\\b=5.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x+y=3,\\xy=-10.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=-2\end{cases}$；$\begin{cases}x=-2,\\y=5.\end{cases}$

【例 5】 m 为何值时,$\dfrac{2}{x}-\dfrac{x-m}{x^2-x}=1+\dfrac{1}{x-1}$无实数解？

思路分析 将分式方程化为一元二次方程时,要使分式方程无实数根,可转化为下列情况讨论：(1) 一元二次方程无实数根；(2) 一元二次方程有实数根,但均是分式方程的增根.

解 方程两边同乘以 $x(x-1)$,得

$x^2-x+2-m=0,$ ①

当方程无实数解时，

所以　$\Delta=1+4m-8<0$，即 $m<\frac{7}{4}$.

又当方程①的两根为 0 和 1 时，原方程只有增根（即没有实根），此时 $m=2$.

所以　$m<\frac{7}{4}$ 或 $m=2$.

同类变式　k 为何值时，利用去分母解方程 $\frac{1}{x+2}-\frac{k}{2-x}=1-\frac{4x}{x^2-4}$ 时会产生增根.

解　去分母，整理原方程为

$x^2-(5+k)x-2-2k=0$，　①

原方程增根必满足 $x^2-4=0$，即 $x=\pm2$，

把 $x=-2$ 代入方程①，不成立，所以 $x=-2$ 不是方程①的解，即原方程不会产生增根 $x=-2$.

把 $x=2$ 代入方程①得 $4k=-8$，$k=-2$，

故当 $k=-2$ 时，原方程有增根 $x=2$.

思维拓展　已知解方程 $\frac{4x}{4-x^2}+1=\frac{k-k^2}{x-2}+\frac{1}{x+2}$ 时，不会产生增根，求实数 k 的取值范围.

解　将方程去分母，得

$(x+2)(k-k^2)=x^2-5x-2$，　①

若方程产生增根，则 $(x+2)(x-2)=0$，

所以　$x_1=2$，$x_2=-2$.

当 $x=-2$ 时，①即为 $0\cdot(k-k^2)=12$，矛盾.

当 $x=2$ 时，①即为 $4(k-k^2)=-8$，

所以　$k=-1$ 或 $k=2$.

所以当 $k\neq-1$ 或 $k\neq2$ 时，原方程不会有增根.

【例 6】　（德阳市，2002）放假了，小芳去图书馆借了一本 320 页的科技图书，小芳通过计算发现如果平均每天比原计划多看 4 页书，可以提前 4 天归还，但是在借书期限内小芳要耽搁 6 天参加夏令营活动. 问她平均每天至少比原计划多看几页书才能按时归还？（结果保留整数）

解　设小芳原计划每天看书 x 页，得

$$\frac{320}{x}-\frac{320}{x+4}=4,$$

解得　$x_1=16$，$x_2=-20$（舍去）.

经检验，$x_1=16$ 是原方程的根且符合题意.

所以借书的天数为 $\frac{320}{x}=\frac{320}{16}=20$（天）.

要少看 6 天，平均每天看书为 $\frac{320}{14}=22\frac{6}{7}\approx23$.

所以每天多看 $23-16=7$（页）.

答：平均每天要比原计划至少多看 7 页书才能按时归还.

同类变式　（连云港市，2002）随着城市人口的不断增加，美化城市、改善人们的居住环境已成为城市建设的一项重要内容. 某城市计划到 2004 年要将该城市的绿地面积在今年的基础上增加 44%，同时要求该城市到 2004 年人均绿地的占有量在今年的基础上增加 21%，为保证实现这个目标，这两年该城市人口的年平均增长率应控制在多少以内（精确到 1%）？

解　设 2001 年该城市的人口总量为 m，绿地总面积为 n，这两年该城市人口的平均增长率至多为 x，则有

$$\frac{n(1+44\%)}{m(1+x)^2}-\frac{n}{m}=21\%\cdot\frac{n}{m},$$

解得 $x\approx9\%$.

答：略.

思维拓展　甲乙两公司都准备单独承租业主 M 沿街楼房一座，甲公司的条件是：每年租金 29 万元；乙公司的条件是：第一年租金 20 万元，以后每年租金比前一年按相同的百分率增加，且乙公司三年内的总租金比甲公司多 2 千元. 如果承租年限为三年，并于租用之日缴纳第一年租金，以后每满一年缴纳下一年租金.

(1) 乙公司后两年的租金分别是多少万元？

(2) 如果业主 M 将所得第一年租金以二年期存入银行，第二年租金以一年期存入银行，到第三次缴完租金时，考虑到存款利息收入，该业主把沿街房租给哪一家比较合算？为什么？

注：(1) 现行银行一、二年定期存款利率如下表：

存期	一年	二年
年利率	2.25%	2.43%

(2) 存款到期后国家征收利息的 20% 作为利息税；

(3) 本题暂不考虑其他税费.

解　(1) 在乙公司的条件下，设以后每年租金比前一年增加的百分数为 x，则

$20+20(1+x)+20(1+x)^2=29\times3+0.2$，

解得　$x_1=0.4$，$x_2=-3.4$（舍去），

所以　$20(1+x)=28$，$20(1+x)^2=39.2$.

即乙公司后两年的租金分别是 28 万元和 39.2 万元.

(2) 设将甲公司前两年的租金分别存入银行，存期分别为二年和一年，则两年的税后利息和为

$29\times(0.0243\times2+0.0225)\times(1-20\%)=1.64952$（万元）

所以至第三年缴完租金时，甲公司三年租金与前两年的税后利息的和为：

$W_1=29\times3+1.64952=88.64925$（万元）

同样可得，至第三年缴完租金时，乙公司三年租金与前两年的税后利息的和为：

$W_2=20+28+39.2+1.2816=88.4816$（万元）

因为　$W_1-W_2=0.16792>0$，

所以如果考虑利息，业主 M 将沿街房租给甲公司比较合算.

【例 7】　(桂林市，2003) 某公司需在一个月 (31 天) 内完成新建办公楼的装修工程. 如果由甲、乙两个工程队合做，12 天可完成；如果由甲、乙两队单独做，甲队比乙队少用 10 天完成.

(1) 求甲、乙两工程队单独完成此项工程所需的天数.

(2) 如果请甲工程队施工，公司每日需付费用 2000 元；如果请乙队施工，公司每日需付费用 1400 元. 在规定时间内：A. 请甲队单独完成此项工程；B. 请乙队单独完成此项工程；C. 请甲、乙两队合作完成此项工程. 以上三种方案哪一种花钱最少？

解　(1) 设乙队单独完成此项工程需用 x 天. 依题意得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-10}=\frac{1}{12}.$$

去分母，整理得　$x^2-34x+120=0$.

解这个方程得　$x_1=4$，$x_2=30$.

经检验，知 $x_1=4$，$x_2=30$ 都是原方程的解.

因为 $x=4$ 不合题意，所以只取 $x=30$.

所以单独完成此项工程甲队需 20 天，乙队需 30 天.

(2) 因为，请甲队需　$2000\times20=40000$ 元；

请乙队需　$1400\times30=42000$ 元；

请甲、乙两队合作需 $(2000+1400)\times 12=40800$ 元.

所以单独请甲队完成此项工程花钱最少.

同类变式　(武汉市,2003) 小明家准备装修一套新住房,若甲、乙两个装饰公司,合做需 6 周完成,需工钱 5.2 万元;若甲公司单独做 4 周后,剩下的由乙公司来做,还需 9 周才能完成,需工钱 4.8 万元. 若只选一个公司单独完成,从节约开支角度考虑,小明家是选甲公司、还是乙公司?请你说明理由.

解　设甲公司单独完成需 x 周,需要工钱 a 万元,乙公司单独完成需 y 周,需要工钱 b 万元.

依题意得 $\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=1,\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=1.\end{cases}$　解之,得 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{10},\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{15}.\end{cases}$　即 $\begin{cases}x=10,\\ y=15.\end{cases}$

经检验:$\begin{cases}x=10,\\ y=15.\end{cases}$是方程的根,且符合题意.

又 $\begin{cases}6\left(\dfrac{a}{10}+\dfrac{b}{15}\right)=5.2\\ 4\times\dfrac{a}{10}+9\times\dfrac{b}{15}=4.8\end{cases}$　解之,得 $\begin{cases}a=6,\\ b=4.\end{cases}$

即甲公司单独完成需工钱 6 万元,乙公司单独完成需工钱 4 万元.

答:从节约开支角度考虑,应选乙公司单独完成.

思维拓展　(厦门市,2001) 某玩具厂计划生产一种玩具熊猫,每日最高产量为 40 只,且每日产出的产品全部售出. 已知生产 x 只玩具熊猫的成本为 k (元),售价每只为 p (元),且 k,p 与 x 的关系式分别为 $k=500+30x$,$p=170-2x$.

(1) 当日产量为多少时,每日获得的利润为 1750 元;

(2) 当日产量为多少时,可获得最大利润?最大利润是多少?

解　(1) 根据题意得 $1750=px-k$,

所以　$(170-2x)x-(500+30x)=1750$,

整理得　$x^2-70x+1125=0$,

$(x-25)(x-45)=0$,

所以　$x_1=25$,$x_2=45$ (不合题意,舍去).

(2) 由题意知,利润为

$$\begin{aligned}px-k&=-2x^2+140x-500\\&=-2(x^2-70x+250)\end{aligned}$$

$=-2[(x-35)^2-975]$

$=-2(x-35)^2+1950$，

所以当 $x=35$ 时，最大利润为 1950.

答 略.

【例 8】 (厦门市，2000) 设 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+kx+2=0$ 的两个根. (1) 求证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{k}{2}=0$.

(2) 如果关于 x 的方程 $x^2+kx+2=0$ 及方程 $x^2-x-2k=0$ 均有实数根，问方程 $x^2+kx+2=0$ 与方程 $x^2-x-2k=0$ 是否有相同的根，若有，请求出这个相同的根；若没有，请说明理由.

分析 对“是否存在”型的探索性问题，一般的解题步骤是：先假设结论某一方面成立，进行演算推理，若推出矛盾，即否定先前假设；若推出合理，说明假设正确，可概括为“假设——推理——否定或肯定假设——得出结论”. 是利用逆向思维去解决问题.

(1) 证明：因为 x_1，x_2 是方程 $x^2+kx+2=0$ 的两个根，

所以 $x_1+x_2=-k$，$x_1\cdot x_2=2$，

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{k}{2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{k}{2}=\frac{-k}{2}+\frac{k}{2}=0$.

(2) 解 设方程 $x^2-x-2k=0$ 与方程 $x^2+kx+2=0$ 有相同的根 α，则可得 $\begin{cases}\alpha^2-\alpha-2k=0,\\ \alpha^2+k\alpha+2=0,\end{cases}$

所以 $k\alpha+2+\alpha+2k=0$，

$\alpha(k+1)+2(k+1)=0$，

即 $(\alpha+2)(k+1)=0$.

若 $k+1=0$，则 $k=-1$，

此时，方程 $x^2+kx+2=0$

即为 $x^2-x+2=0$ (注：也可代入另一方程)，

其判别式 $\Delta=1-8=-7<0$ (不合题意)，

所以 $k\neq-1$，即 $k+1\neq0$.

所以 $\alpha+2=0$，即 $\alpha=-2$.

所以两个方程有相同的根 -2.

同类变式 (河南省，2000) 关于 x 的方程 $x^2-(5k+1)x+k^2-2=0$，是否存在负数 k，使方程的两个实数根的倒数和等于 4？若存在，求出满足条件 k 的值；若不存在，说明理由.

解　设方程的两个实数根是 x_1、x_2，由根与系数关系，得

$x_1+x_2=5k+1$，$x_1x_2=k^2-2$.

又因为　$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}$，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$，

所以　$\frac{5k+1}{k^2-2}=4$.

所以　$4k^2-5k-9=0$.

解这个方程，得　$k_1=-1$，$k_2=\frac{9}{4}$（不合题意，舍去）.

当 $k=-1$ 时，原方程的判别式

$\Delta=b^2-4ac=[-(5k+1)]^2-4(k^2-2)$

$=4^2-4(1-2)=20>0$.

所以存在满足条件的负数 k，$k=-1$.

思维拓展　（珠海市，2000）关于 x 的方程 $x^2-(2a-1)x+(a-3)=0$.

（1）求证：无论 a 为任何实数，该方程总有两个不等的实数根；

（2）以该方程的两根为一直角三角形的两直角边长，已知该三角形斜边上的中线长为 $\frac{\sqrt{35}}{2}$，求实数 a 的值.

（1）证明　方程根的判别式 $\Delta=[-(2a-1)]^2-4(a-3)=4(a-1)^2+9$，

无论 a 为任何实数，$(a-1)^2\geqslant 0$，

所以　$\Delta>0$，

所以方程总有两个不等的实数根.

（2）解　设方程两根为 x_1，x_2，由根与系数的关系知

$$\begin{cases}x_1+x_2=2a-1,\\ x_1x_2=a-3,\end{cases}$$

依题意，得 $\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}=\frac{\sqrt{35}}{2}$，

所以　$x_1^2+x_2^2=35$，

即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=35$.

所以　$(2a-1)^2-2(a-3)=35$，

整理得　$2a^2-3a-14=0$，

解得　$a=-2$ 或 $\frac{7}{2}$.

当 $a=-2$ 时，$x_1+x_2=-5<0$，不合题意，舍去；

所以 a 的值为 $\frac{7}{2}$.

【例 9】（上海市闵行区，1998）已知关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$. (1) 求证：无论 k 取什么实数值，这个方程总有实数根；(2) 若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=-4$，另两边的长为 b，c 恰好是这个方程的两个根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

思路分析　本题考查一元二次方程与几何知识的综合应用，对知识的横向联系要求较高.

(1) 证明　$\Delta=[-(2k+1)]^2-4\times4\left(k-\frac{1}{2}\right)$

$=4k^2-12k+9=(2k-3)^2$，

因为无论 k 取何值，$(2k-3)^2\geqslant0$，

所以结论成立.

(2) 解　因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，

所以有两条边长相等.

若 $b=c$，因为 b，c 都是所给方程的根，

所以 $\Delta=0$ 即 $(2k-3)^2=0$，所以　$k=\frac{3}{2}$.

所以 $b+c=2k+1=3+1=4$.

因为 $a=4$，这时 $b+c=a$，不合题意，

所以不存在这种情况.

若 b，c 中有一条与 a 相等，不妨设 $b=a=4$.

因为 b 是所给方程的根，

所以 $4^2-4(2k+1)+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$，

所以 $k=\frac{5}{2}$，$b+c=2k+1=6$，$c=2$.

因为 $a+b=8>c$，所以 $\triangle ABC$ 周长为 10.

本例涉及等腰三角形，故得分类讨论，并要依据三角形边与边之间关系进行合理的取舍.

同类变式　在等腰三角形 ABC（非等边三角形）中，已知 $a=3$，b、c 是关于 x 的方程 $x^2+mx+2-\frac{1}{2}m=0$ 的两个根，试求 $\triangle ABC$ 的周长.

解　(1) 若 a 为腰，不妨设 $b=a=3$. 因为 b、c 是方程 $x^2+mx+2-$

$\frac{1}{2}m=0$ 的根，将 $b=3$ 代入得

$9+3m+2-\frac{1}{2}m=0$，解得 $m=-\frac{22}{5}$.

又因为 $b+c=-m$，所以 $b+c=\frac{22}{5}=4.4$.

所以 $a+b+c=3+4.4=7.4$.

(2) 若 a 为底边，则 b、c 为腰，由题设可得

$$\begin{cases} b+c=-m, \\ bc=2-\frac{m}{2}, \\ b=c. \end{cases}$$

解得 $m=-4$ 或 $m=2$ (不合题意，舍去).

所以 $b+c=4$，故 $a+b+c=7$.

综合 (1)、(2)，$\triangle ABC$ 的周长为 7.4 或 7.

思维拓展 (荆州市，1997) 已知 $\triangle ABC$ 中，$BC=6$ cm，$CA=8$ cm，$\angle C=90°$，动点 P 从点 C 出发，以每秒 1 cm 的速度沿 CA、AB 运动到点 B. (1) 设 P 从 C 开始运动的距离为 x cm，$\triangle BCP$ 的面积为 y cm^2，试用 x 代数式表示 y. (2) 从 C 出发几秒时，$S_{\triangle BCP}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

分析 此题容易忽视 P 运动至 AB 边的情形，这样就导致失解.

解 (1) 当点 P 在 CA 边上时，$0\leqslant x\leqslant 8$ 如图 12－12 (1)，

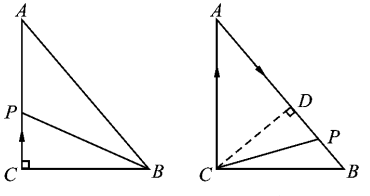


图 12－12

则 $y=S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}BC\cdot CP=\frac{1}{2}\times 6x=3x$.

当点 P 在 AB 边上时，因 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

所以　$8<x\leqslant 18$.

作 $CD\perp AB$，垂足为 D，如图 12－12 (2)，

则 $S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}BP\cdot CD$，

因为　$x=CA+AP$，$\angle ACB=90°$，

$AB\cdot CD=AC\cdot BC$，

所以　$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{8\times 6}{10}=\frac{12}{5}$，

$PB=AB+CA-(CA+AP)=18-x$，

所以　$y=\frac{1}{2}\times 4.8(18-x)=\frac{12}{5}(18-x)$.

所以　$y=\begin{cases}3x & (0\leqslant x\leqslant 8),\\ \frac{12}{5}(18-x) & (8<x\leqslant 18).\end{cases}$

(2) 因为　$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 6\times 8=6$.

所以　当点 P 在 CA 边上时，令 $3x=6$，得 $x=2$；

当点 P 在 AB 边上时，令 $\frac{12}{5}(18-x)=6$，

得　$x=15.5$

即从 C 出发 2 s 或 15.5 s 时，$S_{\triangle BCP}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

【例 10】　(北京市房山区，2002) 已知关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+\frac{ac+bc}{2}=0$，$a$、$b$、$c$ 分别为锐角三角形 ABC 中角 A、B、C 的对边.

(1) 若 x_1、x_2 是方程的两个实数根，且 $(x_1-x_2)^2=a^2$，又 $b=2$，$c=\frac{3}{2}$，求 a 的长.

(2) 若 $a=2c-b$，且原方程与方程 $4x^2-6cx-4c^2(\sin A-1)=0$ 有一个相同的根，求 $\frac{\sin C}{\sin B}$ 的值.

解　(1) 因为 x_1、x_2 是方程 $x^2-(a+b)x+\frac{ac+bc}{2}=0$ 的两个实数根.

所以　$x_1+x_2=a+b$，　$x_1\cdot x_2=\frac{ac+bc}{2}$，

因为　$(x_1-x_2)^2=a^2$，

所以　$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=a^2$，

所以　$(a+b)^2-4\cdot\frac{ac+bc}{2}=a^2$，

因为 $b=2, c=\frac{3}{2}$,

所以 $a=2$.

(2) 因为 $a=2c-b$,

所以 $a+b=2c$,代入原方程,得 $x^2-2cx+c^2=0$,解得 $x_1=x_2=c$.

将 $x=c$ 代入方程 $4x^2-6cx-4c^2(\sin A-1)=0$,

得 $4c^2-6c^2-4c^2(\sin A-1)=0$.

解得 $\sin A=\frac{1}{2}$.

因为 A 为锐角,所以 $\angle A=30°$.

在 $\triangle ABC$ 中,作 $BD\perp AC$ 于点 D (如图 12-13),则

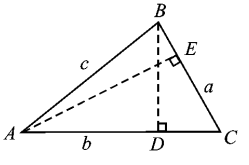


图 12-13

$$\begin{aligned} a^2 &= BD^2+DC^2 \\ &= (c\sin A)^2+(b-c\cos A)^2 \\ &= c^2\sin^2 A+b^2-2bc\cos A+c^2\cos^2 A \\ &= c^2+b^2-\sqrt{3}bc, \qquad ① \end{aligned}$$

把 $a=2c-b$ 代入①,得

$$c=\frac{4-\sqrt{3}}{3}b,$$

所以 $\frac{c}{b}=\frac{4-\sqrt{3}}{3}$.

如图,过 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E.

所以 $AE=c\sin B$, $AE=b\sin C$,

所以 $c\sin B=b\sin C$,

所以 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}$,

所以 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{4-\sqrt{3}}{3}$.

同类变式　(武汉市,2000)在$\triangle ABC$中,a、b、c分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边,且$c=5\sqrt{3}$,若关于x的方程$(5\sqrt{3}+b)x^2+2ax+(5\sqrt{3}-b)=0$有两个相等的实数根,又方程$2x^2-(10\sin A)x+5\sin A=0$的两实数根的平方和为6,求$\triangle ABC$的面积.

解　因为方程$(5\sqrt{3}+b)x^2+2ax+(5\sqrt{3}-b)=0$有两相等实根,

所以　$\Delta=(2a)^2-4(5\sqrt{3}+b)(5\sqrt{3}-b)=0$,所以　$a^2+b^2=75$.

因为　$c^2=75$,所以　$a^2+b^2=c^2$.

所以$\triangle ABC$是直角三角形,且$\angle C=90°$.

设x_1,x_2是方程$2x^2-(10\sin A)x+5\sin A=0$的两实数根,则$x_1+x_2=5\sin A$,$x_1x_2=\frac{5}{2}\sin A$.

因为　$x_1^2+x_2^2=6$,而$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$,

所以　$(5\sin A)^2-5\sin A-6=0$.

解得$\sin A=\frac{3}{5}$或$\sin A=-\frac{4}{5}$(舍去)

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$c=5\sqrt{3}$,所以　$a=c\cdot\sin A=3\sqrt{3}$.

$b=\sqrt{c^2-a^2}=4\sqrt{3}$,　所以　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=18$.

思维拓展　1.(北京东城区,2002)在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,斜边$c=5$,两直角边的长a、b是关于x的一元二次方程$x^2-mx+2m-2=0$的两根,求$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中较小锐角的正弦值.

解　因为a、b是方程$x^2-mx+2m-2=0$的两个根,

所以$a+b=m$,$ab=2m-2$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,由勾股定理得$a^2+b^2=c^2$,

而　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,$c=5$,

所以　$(a+b)^2-2ab=5^2$,　即　$m^2-2(2m-2)=25$.

解关于m的方程,得$m_1=7$,$m_2=-3$.

因为　a、b是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的两条直角边的长,

所以　$a+b=m>0$,

所以　$m=7$.

此时,原方程为$x^2-7x+12=0$,

解这个方程,得$x_1=3$,$x_2=4$.

不妨设$a=3$,则$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$.

所以 Rt△ABC 中较小的锐角的正弦值为$\frac{3}{5}$.

2. (四川省绵阳市,2002) 已知△ABC 的一边为 5,另两边恰是方程 $x^2-6x+m=0$ 的两个根. (1) 求实数 m 的取值范围;(2) 当 m 取最大值时,求△ABC 的面积.

解 (1) 设△ABC 的两边为 x_1,x_2,则 $|x_1-x_2|<5$,

$x_1+x_2=6$,$x_1x_2=m$,

$\Delta=(-6)^2-4m\geqslant 0$.

由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $m\leqslant 9$.

又 $0\leqslant|x_1-x_2|<5$

所以 $(x_1-x_2)^2<25$,即 $(x_1+x_2)^2<25+4x_1x_2$.

将 x_1+x_2 和 x_1x_2 代入上式,得 $36<25+4m$,

所以 $m>\frac{11}{4}$.

故 $\frac{11}{4}<m\leqslant 9$,此即为所求 m 的取值范围.

(2) 由上知,m 的最大值为 9. 代入已给方程,得

$x^2-6x+9=0$,解得 $x_1=x_2=3$.

表明三角形 ABC 是等腰三角形,底边长为 5,其上的高为 $h=\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

所以△ABC 的面积

$S=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{5\sqrt{11}}{4}$平方单位.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (黄冈市,2003) 关于 x 的方程 $k^2x^2+(2k-1)x+1=0$ 有实数根,则下列结论正确的是(　　)

A. 当 $k=\frac{1}{2}$ 时方程两根互为相反数

B. 当 $k=0$ 时方程的根是 $x=-1$

C. 当 $k=\pm 1$ 时方程两根互为倒数

D. 当 $k\leqslant\frac{1}{4}$ 时方程有实数根

(2) (山西省,2003) 下面是李刚同学在一次测验中解答的填空题,其中答对的是(　　)

A. 若 $x^2=4$,则 $x=2$.

B. 方程 $x(2x-1)=2x-1$ 的解为 $x=1$.

C. 若 $x^2+2x+k=0$ 两根的倒数和等于 4. 则 $k=-\frac{1}{2}$.

D. 若分式 $\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ 的值为零,则 $x=1,2$.

(3) (大连市,2001) 方程 $x^2-x+2=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根　　B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 不能确定

(4) (十堰市,2001) 若实数 a、b 满足 $a^2-8a+5=0$,$b^2-8b+5=0$,则 $\frac{b-1}{a-1}+\frac{a-1}{b-1}$ 的值为(　　)

A. -20　　B. 2　　C. 2 或 -20　　D. 2 或 20

(5) (河北省,2001) 已知等腰三角形的三边长为 a、b、c 且 $a=c$. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$ 的两根之差为 $\sqrt{2}$,则等腰三角形的一个底角是(　　)

A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°

(6) (十堰市,2001) 用换元法解方程:$\frac{x^2-2}{x+3}-\frac{6x+18}{x^2-2}+1=0$ 可设 $y=\frac{x^2-2}{x+3}$,从而原方程可化为(　　)

A. $y^2-y-1=0$　　B. $y^2-6y+1=0$

C. $y^2+y-6=0$　　D. $y^2+y-1=0$

(7) (襄樊市,2001) 方程组 $\begin{cases}x^2+2y^2=6\\mx-y=3\end{cases}$ 有一个实数解,则 m 可以取的值是(　　)

A. ±1　　B. $\pm\frac{1}{2}$　　C. ±2　　D. 0 或 1

(8) (黄石市,2000) 甲、乙两班学生参加植树造林,已知甲班每天比乙班多植树 5 棵,甲班植树 80 棵所用天数与乙班植树 70 棵所用天数相等,若设甲班每天植树 x 棵,则依题意列出的方程是(　　)

A. $\frac{80}{x-5}=\frac{70}{x}$　　B. $\frac{80}{x}=\frac{70}{x+5}$

C. $\frac{80}{x+5}=\frac{70}{x}$　　D. $\frac{80}{x}=\frac{70}{x-5}$

(9) (潜江市,2000) 使关于 x 的分式方程 $a^2-\frac{2x+4}{x-2}=\frac{2a^2}{2-x}$ 产生增根的 a 的值是(　　)

A. 2　　B. -2　　C. ± 2　　D. 与 a 无关

(10) 实验中学校内新增造林绿化面积 2003 年底比 2002 年初新增造林绿化面积翻一番,问连续两年新增造林绿化面积平均增长率约是(　　)

A. 10%　　B. 20%　　C. 41%　　D. 无法计算

2. 填空题

(1) 如果方程 $x^2-(\sqrt{2}+m)x+\sqrt{6}=0$ 的一个根是 $\sqrt{2}$,那么 $m=$_____.

(2) 关于 x 的方程 $(m-\sqrt{3})x^{m^2-1}-x+3=0$,当 $m=$_____时,是一元二次方程.

(3) (十堰市,2000) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-3\sqrt{k}x-1=0$ 有实数根,则 k 的取值范围是_____.

(4) (十堰市,2000) 东风汽车公司 1997 年上交国税 20 亿元,经过设备改造和技术革新,使 1998 年和 1999 年上交国税比前一年增长一个相同的百分数,因此,这三年总计上交国税达到 140 亿元,这个增长的百分数为_____.

(5) (天门市,2000) 若方程 $x^2-2x-3=0$ 的两根是 x_1,x_2,则代数式 $x_1^2+x_2^2-2x_1-2x_2$ 的值是_____.

(6) 已知 a、b 是关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x+1=0$ 的两根,则 $(1+ma+a^2)(1+mb+b^2)$ 的值是_____.

(7) 如果关于 x 的方程 $2x^2+mx-1=0$ 的两根分别是 $x_1=-1,x_2=\frac{1}{2}$,那么二次三项式 $2x^2-mx-1$ 分解因式的结果是_____.

(8) (四川省内江,2002) 已知 $a+b=-8,ab=8$,化简 $b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}=$_____.

3. 解下列方程(组):

(1) $(x+2)^2+6(x+2)-91=0$;

(2) $x^2-(1+2\sqrt{3})x-3+\sqrt{3}=0$；

(3) $2x+\frac{2}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}-6=0$；

(4) $\begin{cases}2x-y-1=0,\\ x^2-2y^2-3x+y+17=0.\end{cases}$

4. (鄂州市,2000) 已知关于 x 的方程 $kx^2+(2k-1)x+k-2=0$. (1) 若方程有实根,求 k 的取值范围. (2) 若此方程两实根为 x_1,x_2,且 $x_1^2+x_2^2=3$,求 k 的值.

解　(1) 依题意得,$\Delta\geqslant 0$,所以　$(2k-1)^2-4k(k-2)\geqslant 0$,解得 $k\geqslant-\frac{1}{4}$,所以　k 的取值范围是 $k\geqslant-\frac{1}{4}$.

(2) 依题意得：$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3$,

即：$\left(-\frac{2k-1}{k}\right)^2-2\cdot\frac{k-2}{k}=3$,

化简得 $k^2=1$,所以　$k=\pm 1$.

上面解答有无错误？若有指出错误之处,并直接写出正确答案.

5. (荆州市,2000) 直角$\triangle ABC$ 的三条边 a、b、c 均满足方程 $x^2-mx+\sqrt{2}=0$,求$\triangle ABC$ 的面积.

6. (随州市,仙桃市,2000) 已知关于 x 的方程 $4x^2-4kx+k^2+4k=0$ 的两实根 x_1 和 x_2 满足 $(x_1-1)(x_2-1)=\frac{109}{100}$,求 k 的值.

7. (宁波市,2003) 据报道,2003 年第一季度宁波完成国内生产总值 (GDP) 354 亿元,比杭州少 45 亿元,宁波和杭州构成了全省经济的第一集群,绍兴 (230 亿元) 和温州 (227.5 亿元) 两城市组成了第二集群,第三集群有台州 (194.4 亿元)、嘉兴 (167.6 亿元)、金华 (161.7 亿元).

(1) 求杭州、宁波、绍兴、温州、台州、嘉兴、金华等七市今年第一季度 (GDP) 的平均值 (精确到 1 亿元)；

(2) 宁波市 2003 年第三季度 GDP 达到 407 亿元,那么平均每季度增长的百分率是多少 (精确到 0.1%)？

8. (北京市海淀区,2001) 为了参加北京市申办 2008 年奥运会的活动,某班学生争取到制作 240 面彩旗的任务,有 10 名学生因故没能参加制作,因此这班的其余学生人均要比原计划多做 4 面彩旗才能完成任务,问这个班有多少名学生？

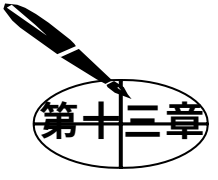
探究能力测试

9. (宜昌市,2000) 湖北省清江干流梯级开发中,某水电工程仅用 42 个月的建设工期就于 2000 年 4 月 30 日建成了全部主体工程开始发电,而"水利枢纽工程行业建设工期定额"规定:类似工程的建设工期为 66 个月至 78 个月;该工程建成后,每年收益 5 亿元. 如果将每年收益的 5 亿元全部用于归还银行贷款及利息 (其中建成后的第一年贷款利息为 1 亿元),那么与按"水利枢纽工程行业建设工期定额"规定的最短建设工期比较,到那时已归还了 41% 的贷款. 试问截至 2000 年 4 月 30 日该工程贷款的数额是多少?

10. (重庆市,1999) 1998 年,湖北抗洪抢险中,某部队奉命派甲排跑步前往离驻地 90 km 的公安县抢险,1 h 45 min 后,因险情加重,又增派乙连乘车前往支援. 已知乙连比甲排每小时快 28 km,恰好在全程的$\frac{1}{3}$处追上甲排. (1) 求乙连的行进速度及追上甲排的时间;(2) 当乙连追上甲排时,上级改令甲排前往离此 24 km 的石首市执行紧急任务,且要求甲排与乙连同时到达各自的指定地点. 试求甲排每小时应加快多少千米?

11. 已知 α、β ($\alpha>\beta$) 是方程 $x^2-x-2=0$ 的两根,不解方程,求代数式 $\alpha^2-2\beta-1$ 的值.

12. (吉林省,2000) 已知关于 x 的方程 $x^2-2(m-2)x+m^2=0$. 问:是否存在实数 m,使方程两个实数根的平方和等于 56. 若存在,求出 m 的值;若不存在,请说明理由.



函数及其图象

13.1　平面直角坐标系

新教材同步学案

学点探究分析

重点　掌握平面内点的坐标的概念，根据坐标确定点和由点求坐标.

难点　理解平面内点与有序实数对之间的一一对应关系.

探究点　根据坐标确定点和由点确定坐标是考查的热点内容，尤其是利用数形结合思想，在平面直角坐标系中对特殊位置的点及其坐标特征进行探究，对几何图形及其代数特征进行探究，往往使题目具有较强的综合性，并且对知识面的宽度和广度也提出了更高要求.

学习方法技巧

“平面直角坐标系”一节是在数轴的基础上，为了实际问题的需要而建立起来的，是学习全章的基础，也是后面学习函数的图象以及一些具体的函数图象的基础. 要注意这种知识的前后关系，重视对本节知识的深刻理解与反复训练. 熟悉掌握各类点的坐标特点，特别是坐标轴上的点的规律，数形结合是本节最显著的特点，对于特殊几何图形顶点坐标的求法，应注意点的坐标与有关线段长的关系，点在各个象限的符号变化规律.

能力升级捷径

【例 1】　在坐标平面上标出以下各点的位置：$A(2,1)$，$B(1,2)$，$C(-1,2)$，$D(-2,-1)$，$E(0,3)$，$F(-3,0)$.

思维技巧　本题考查由点的坐标确定平面坐标系中点的位置，形成数形结合的能力. 解答本题应了解坐标的表示法和坐标平面上由坐标确定点的位置的方法.

解　如图 13－1.

激活思维　根据点的坐标确定点在平面直角坐标系中的位置时，要注意哪个数据表示横坐标，哪个数据表示纵坐标，不能弄错顺序，如 (2,1) 和

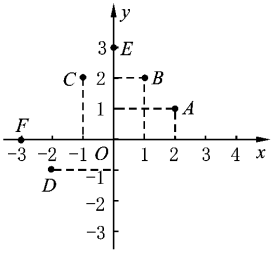


图 13－1

(1,2) 中,数据顺序不同,点 A 和 B 的位置就不同.

同类变式 指出下列各点所在象限或坐标轴:$A\ (-\sqrt{5},0)$,$B\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$,$C\left(\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$,$D\ (0,0)$,$E\ (0,3)$,$F\ (\sqrt{2}-\sqrt{3},\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

解 点 A 在 x 轴上;点 B 在第三象限;点 C 在第一象限;点 D 在 x 轴上,也在 y 轴上,即坐标原点;点 E 在 y 轴上;点 F 在第二象限.

思维拓展 (山东聊城,2002) 如图 13－2 是我市市区几个旅游景点的示意图 (图中每个小正方形的边长为 1 个单位长度),请以某景点为原点,画出直角坐标系,并用坐标表示下列景点的位置.

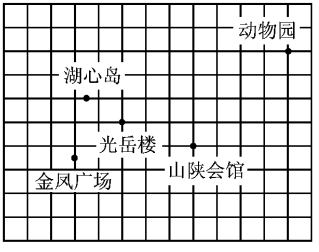


图 13－2

光岳楼_____;金凤广场_____;动物园_____.

解 如图 13－3 所示建立直角坐标系.

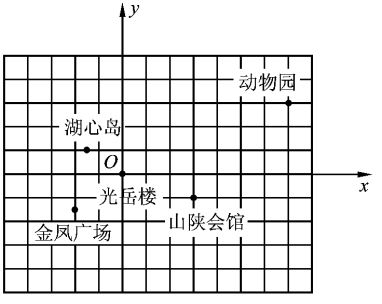


图 13－3

所以　光岳楼 (0,0)，金凤广场 (－2，－1.5)，动物园 (7,3)

【例 2】　已知点 A 与点 B (1，－6) 关于 y 轴对称，求点 A 关于原点的对称点 C 的坐标.

思维技巧　本题考查特殊点的坐标的求法，解题时应记住特殊点的坐标的变化规律，或根据平面直角坐标系，自己探索有关对称点的坐标特征，再应用于解题中.

解　因为点 A 和点 B (1，－6) 关于 y 轴对称.

所以 A 点坐标为 (－1，－6).

又因为点 C 和点 A 关于原点对称，

所以点 C 坐标为 (1,6).

激活思维　求特殊点的坐标时，可以不必死记变化规律. 解题时可通过画出平面直角坐标系，选取一些简单的点，借助坐标平面找出相应对称点坐标，从中总结规律再解题.

同类变式　点 P 关于 y 轴的对称点的坐标是 (2，－1)，则点 P 关于原点的对称点的坐标是_____.

解　点 P 的坐标是 (－2，－1)，则它关于原点的对称点的坐标是 (2,1).

思维拓展　1. 点 A (2，____) 关于 x 轴的对称点在第一、三象限坐标轴夹角平分线上.

解　A (2，－2).

2. 写出点 P (－1,2) 关于原点的对称点 P' 到 x 轴，y 轴，原点的距离.

解　$P'(1,-2)$，到 x 轴，y 轴距离分别为 2，1；到原点距离为 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

【例 3】　在平面直坐标系中，若点 $P(3k-9,1-k)$ 在第三象限内且是整点，求 P 点坐标.

思维技巧　根据第三象限内点的特点，建立关于 k 的一个不等式组，求出 k 的取值范围. 最后由整点性质，确定 k 值，进而求出 P 点坐标.

解　由第三象限点的坐标特征得：

$\begin{cases}3k-9<0,\\1-k<0.\end{cases}$ 解这个不等式组，得 $1<k<3$.

由于 P 为整点，所以 k 为整数，即 $k=2$，

所以点 P 的坐标是 $(-3,-1)$.

激活思维　在直角坐标系中，点与点的坐标是一一对应的，整点就是横坐标和纵坐标均为整数的点，所以 k 为整数.

同类变式　若点 $A(-4,1-2m)$ 关于原点对称的点在第一象限，则 m 的取值应为（　　）

A. $m\neq\frac{1}{2}$　　B. $m<\frac{1}{2}$

C. $m>\frac{1}{2}$　　D. 以上说法都不对

点 $A(-4,1-2m)$ 关于原点对称的点是 $A'(4,2m-1)$，因为 A' 点在第一象限，所以 $2m-1>0$，即 $m>\frac{1}{2}$.

解　选 C.

思维拓展　已知方程 $ax^2+2x+c=0$ $(a\neq0)$ 有两个正实根，则 $P(a,c)$ 在第（　　）象限内.

A. 一　　B. 二　　C. 三　　D. 四

解　根据一元二次方程根与系数的关系可知两根之和为 $-\frac{2}{a}$，两根之积为 $\frac{c}{a}$，又因为方程有两个正实根，故 a，c 同号，且 a 为负数，则 $c<0$，选 C.

【例 4】　等腰直角三角形的直角顶点 C 在 y 轴的负半轴上，斜边 AB 在 x 轴上，且点 A 在点 B 的左侧，直角边 $AC=\sqrt{2}$，则顶点 A、B、C 的坐标分别是什么？

思维技巧　解这类问题应先根据几何图形求出有关线段的长度，然后

由题意确定点的坐标符号，从而得出点的坐标.

解　如图 13－4，因为△ACB 是等腰直角三角形，且 $AC=\sqrt{2}$.

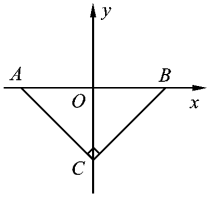


图 13－4

所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2$.

因为 $CO\perp AB$ 于 O，所以　CO 为等腰 Rt△ACB 的 AB 边的垂直平分线.

所以 A、B 关于原点对称，又因为点 A 在点 B 的左侧.

所以 $A(-1,0)$，$B(1,0)$.

因为 $CO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2=1$，且 C 点在 y 轴负半轴.

所以 C 点的坐标是 $(0,-1)$.

激活思维　把两坐标轴的垂直关系与等腰直角三角形某些特殊线段有机联系在一起，运用数形结合的思想和等腰三角形性质求解.

同类变式　在直角坐标系中，(1) 画出以 $A(0,0)$，$B(3,4)$，$C(3,-4)$ 为顶点的△ABC，并判断三角形的形状；(2) 画出以 $A(-3,3)$，$B(-3,-1)$，$C(2,-1)$，$D(2,3)$ 为顶点的四边形 $ABCD$，并判断四边形的形状.

解　(1) 等腰三角形；(2) 矩形. (图形略)

思维拓展　已知等边△ABC 的两个顶点的坐标为 $A(-4,0)$，$B(2,0)$，试求：(1) 点 C 的坐标；(2) △ABC 的面积.

解　(1) $C(-1,3\sqrt{3})$ 或 $(-1,-3\sqrt{3})$；(2) $S_{\triangle ABC}=9\sqrt{3}$.

【例 5】　一个菱形较短的对角线的长是 2，有一个内角是 120°，取两条对角线所在的直线为坐标轴，求四个顶点的坐标.

思维技巧　由于题目没指明哪条对角线在哪个轴上，所以，有两种可能，需要分别讨论研究.

解　第一种情况，以较长对角线所在直线为 x 轴，另一条对角线所在直线为 y 轴，建立直角坐标系如图 13－5.

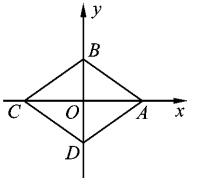


图 13－5

因为　$BD=2$，所以　$OB=OD=1$，

则 $B(0,1)$，$D(0,-1)$.

又因为∠$ABC=120°$，所以∠$ABO=60°$，

因为 $OA = OB \cdot \tan\angle ABO = 1 \times \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

所以 $A(\sqrt{3},0)$.

因为 $OC = OA = \sqrt{3}$，所以 $(-\sqrt{3},0)$.

即四个顶点的坐标分别是

$A(\sqrt{3},0)$，$B(0,1)$，$C(-\sqrt{3},0)$，$D(0,-1)$.

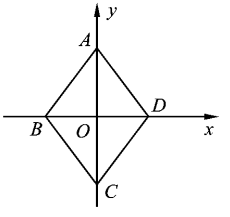


图 13－6

第二种情况，以较短对角线所在直线为 x 轴，另一条对角线所在直线为 y 轴建立直角坐标系（如图 13－6），同理可得到菱形的四个顶点的坐标是

A. $(0,\sqrt{3})$，　　B. $(-1,0)$，

C. $(0,-\sqrt{3})$，　　D. $(1,0)$.

激活思维　由于图形在坐标平面中放置的方式不同，所得图形上点的坐标也不同. 正确合理建立直角坐标系有助于减轻计算量.

同类变式　如图 13－7，正六边形 $OABCDE$ 的边长为 a，求各顶点的坐标.

正六边形是关于 x 轴的对称图形，只要求出图中 O、A、B、C 点坐标，可由对称性求出 D、E 点的坐标.

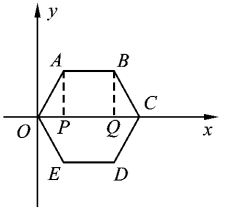


图 13－7

解　作 $AP \perp x$ 轴于 P，作 $BQ \perp x$ 轴于 Q.

因为六边形 $OABCDE$ 是正六边形，

所以 $\angle EOA = 120^\circ$，$\angle OAP = 30^\circ$，$OP = \frac{1}{2}a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APO$ 中，

$$AP = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

所以　$A\left(\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，容易得出 $B\left(\frac{3}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$O(0,0)$，$C(2a,0)$.

由对称性，得出 $E\left(\frac{1}{2}a,-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$D\left(\frac{3}{2}a,-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

【例 6】　(徐州市,2001) 如图 13－8 在直角坐标系中,第一次将△OAB 换成△OA_1B_1,第二次将△OA_1B_1 变换成△OA_2B_2,第三次将△OA_2B_2 变换成△OA_3B_3.

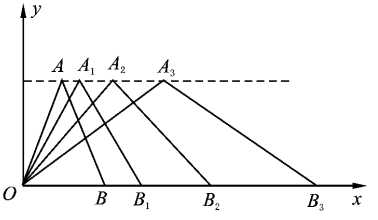


图 13－8

已知 A (1,3),A_1 (2,3),A_2 (4,3),A_3 (8,3);B (2,0),B_1 (4,0),B_2 (8,0),B_3 (16,0).

① 观察每次变换前后的三角形有何变化,找出规律,按此变换规律再将△OA_3B_3 变换成△OA_4B_4,则 A_4 的坐标是_____,B_4 的坐标是_____.

② 若按第 (1) 题找到的规律将△OAB 进行了几次变换,得到△OA_nB_n,比较每次变换中三角形顶点坐标有何变化,找出规律,推测 A_n 的坐标是_____,B_n 的坐标是_____.

思维技巧　① 分别观察点 A,A_1,A_2,A_3 和 B,B_1,B_2,B_3 的两坐标,发现规律,得出 A_4,B_4 的坐标.第②小题从第①题找到规律后,推广到一般猜测 A_n、B_n 的坐标.

解　(1) (16,3),(32,0)　(2) (2^n,3),(2^{n+1},0).

激活思维　通过三角形变换,即三角形顶点坐标按某一规律变化,观察、归纳,猜想得出结论.再由特殊到一般,对结论进行推广,既活跃思维,又使解题增添乐趣.把找数的规律,通过三角形变换的方式,置于平面直角坐标系里,使题目具有新意.

同类变式　(黔东南州,2001) 如图 13－9 在直角坐标系中,已知点 A (4,0)、B (4,4),∠OAB = 90°,有直角三角形与 Rt△ABO 全等且以 AB 为公共边,请写出这些三角形未知顶点的坐标_____.

解　(8,0),(8,4),(0,4).

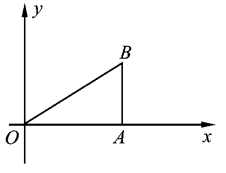


图 13－9

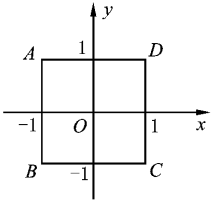


图 13－10

思维拓展 (徐州市,2001) 正方形 $ABCD$ 在平面直角坐标系中的位置如图 13－10,在平面内找点 P,使△PAB、△PBC、△PCD、△PDA 同时为等腰三角形,这样的点 P 有几个?作出这些点(保留作图痕迹,不写作法),并写出它们的坐标(不必写出解答过程).

解 这样的 P 点共有九个,其坐标分别为 $(0,0)$,$(0,\sqrt{3}-1)$,$(0,-\sqrt{3}+1)$,$(0,1+\sqrt{3})$,$(0,-1-\sqrt{3})$,$(\sqrt{3}-1,0)$,$(-\sqrt{3}+1,0)$,$(1+\sqrt{3},0)$,$(-1-\sqrt{3},0)$.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (达州市,2003) 对任何实数 x,点 $(x,x-1)$ 一定不在第_____象限.

(2) (济宁市、宁波市,2003) 已知 a 是整数,点 $A(2a+1,2+a)$ 在第二象限,则 $a=$_____.

(3) (汕头市,2003) 已知点 M 与点 $N(-1,3)$ 关于坐标原点对称,则 M 的坐标是_____.

(4) (广东省) 与点 $P(3,-4)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为_____;与点 $Q(-3,4)$ 关于原点对称的点的坐标为_____.

(5) (兰州市,2003) 如图 13－11,在直角坐标系中,有四点 $A(-8,3)$、$B(-4,5)$、$C(0,n)$、$D(m,0)$,当四边形 $ABCD$ 的周长最短时,$\frac{m}{n}$ 的值为_____.

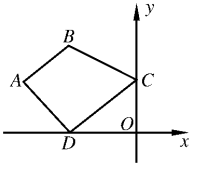


图 13－11

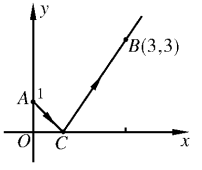


图 13－12

(6) (荆门市,2003) 如图 13－12,一束光线从 y 轴上点 A (0,1) 出发,经过 x 轴上点 C 反射后经过点 B (3,3),则光线从点 A 到点 B 所经过的路程长是_____.

(7) (贵阳市,2002) 若点 M $(1+a, 2b-1)$ 在第二象限,则点 N $(a-1, 1-2b)$ 在第_____象限.

(8) (甘肃省,2002) 已知点 P 在第二象限,它的横坐标与纵坐标的和为 1,点 P 的坐标是_____ (写出符合条件的一个点即可)

(9) (扬州市,2000) 点 P 关于 y 轴的对称的点坐标是 $(-3, 5)$,则点 P 的坐标是_____.

(10) 已知点 Q $(2m^2+4, m^2+m+6)$ 在第一象限的角平分线上,则 $m=$_____.

(11) 等边三角形一个顶点的坐标为 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$,顶点 C 与顶点 B 关于 y 轴对称,顶点 A 的坐标是_____.

(12) 矩形 $ABCD$ 中,$AB=5$,$BC=2$,以矩形的对称中心为原点,对称轴为坐标轴建立直角坐标系,用点的坐标表示各顶点的坐标为_____.

2. 选择题

(1) (安徽省,2003) 点 P $(m, 1)$ 在第二象限内,则点 Q $(-m, 0)$ 在 (　　)

A. x 轴正半轴上　　B. x 轴负半轴上

C. y 轴正半轴上　　D. y 轴负半轴上

(2) (黄冈市,2003) 在直角坐标系中,点 P $(2x-6, x-5)$ 在第四象限,则 x 的取值范围是 (　　)

A. $3<x<5$　　B. $-3<x<5$

C. $-5<x<3$　　D. $-5<x<-3$

(3) (贵阳市,2003) 对任意实数 x,点 P $(x, -2x^2+6x)$ 一定不在 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

(4) (辽宁省,2003) 在平面直角坐标系中,点 $P(-1,1)$ 关于 x 轴的对称点在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

(5) (甘肃省,2003) 点 $M(3,-4)$ 关于 x 轴的对称点 M' 的坐标是(　　)

A. $(3,4)$　　B. $(-3,-4)$　　C. $(-3,4)$　　D. $(-4,3)$

(6) (江西省,2003) 如图 13-13 数轴上表示 1、$\sqrt{2}$ 的对应点分别为 A、B,点 B 关于点 A 的对称点为 C,则点 C 所表示的数是(　　)

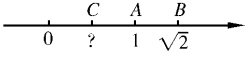


图 13-13

A. $\sqrt{2}-1$　　B. $1-\sqrt{2}$

C. $2-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}-2$

(7) (济南市,2003) 如图 13-14,在直角坐标系中 $\triangle ABC$ 各顶点坐标分别为 $A(0,\sqrt{3})$、$B(-1,0)$、$C(1,0)$,若 $\triangle DEF$ 各顶点坐标分别为 $D(\sqrt{3},0)$、$E(0,1)$、$F(0,-1)$,则下列判断正确的是(　　)

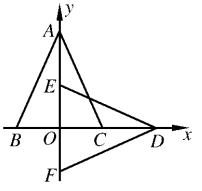


图 13-14

A. $\triangle DEF$ 由 $\triangle ABC$ 绕 O 点顺时针旋转 $90°$ 得到

B. $\triangle DEF$ 由 $\triangle ABC$ 绕 O 点逆时针旋转 $90°$ 得到

C. $\triangle DEF$ 由 $\triangle ABC$ 绕 O 点顺时针旋转 $60°$ 得到

D. $\triangle DEF$ 由 $\triangle ABC$ 绕 O 点顺时针旋转 $120°$ 得到

(8) 已知点 P 坐标为 $(2-a,3a+6)$,且点 P 到两坐标轴的距离相等,则点 P 的坐标是(　　)

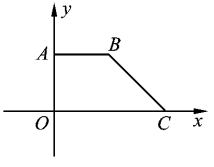


图 13-15

A. $(3,3)$　　B. $(3,-3)$

C. $(6,-6)$　　D. $(3,3)$ 或 $(6,-6)$

3. 如图 13-15,四边形 $AOCB$ 是直角梯形,$AB/\!/OC$,$OA=10$,$AB=9$,$\angle OCB=45°$,求点 A,B,C 的坐标及直角梯形 $AOCB$ 的面积.

探究能力测试

4．(镇江，2001) 如图 13－16，一机器人在点 A 处发现一个小球自点 B 处沿 x 轴向原点 O 方向匀速滚来，机器人立即从 A 处匀速直线前进，去截小球．

(1) 若小球滚动速度与机器人行走速度相等，试在图中标出机器人最快能截住小球的位置 C (尺规作图，不写分析、作法，保留作图痕迹)．

(2) 若点 A 的坐标为 $(2,\sqrt{5})$，点 B 的坐标为 $(10,0)$，小球滚动速度为机器人行走速度的 2 倍，问机器人最快可在何处截住小球？求出该处点的坐标．

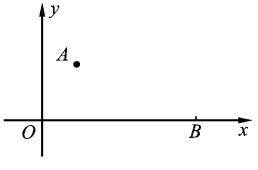


图 13－16

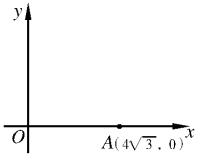


图 13－17

5．(昆明市，2003) 如图 13－17，已知：点 O 的坐标为 $(0,0)$，点 A 的坐标为 $(4\sqrt{3},0)$，点 P 在第一象限，且 $\cos\angle OPA=\frac{1}{2}$．

(1) 求出点 P 的坐标 (一个即可)；

(2) 当点 P 的坐标是多少时，$\triangle OPA$ 的面积最大，并求出 $\triangle OPA$ 面积的最大值 (不要求证明)．

13.2 函　数

学点探究分析

重点　函数的定义及相关概念，掌握自变量的取值范围的确定方法和函数值的求法．

难点　函数概念的理解．

探究点　近几年，中考在几何图形和实际问题中建立函数关系，即构建函数模型解决一类与函数有关的应用题方面做了一些探索．对函数思想、数

形结合思想以及解决实际问题的能力、社会活动能力、发现问题能力等也进行了考查.

学习方法技巧 函数是在同一变化过程中,两个变量之间的因果关系.要深刻领会“唯一确定”四个字的含义.自变量取值范围的确定是一个难点,特别是与实际问题有关的函数.用解析式表示实际问题时,应视变量 x、y 为已知数,建立 x、y 之间的数量关系;列表法表示函数自变量 x 如何取值是一个关键,也是一个难点;连线作图是图象法表示函数的难点,应做适当的重复练习,对于构建函数模型解决与生产生活、市场经济相关的应用题和利用几何图形建立函数关系的问题,首先应弄清题意、找出其内在联系,这类题型体现了时代对学习数学的要求.

能力升级捷径 【例 1】 下面各题中都有两个函数,它们是同一个函数吗?为什么?

(1) $y=x$ 和 $y=\dfrac{x^2}{x}$;

(2) $y=\pi x^2$ 与 $S=\pi r^2$,其中 $x\geqslant 0$,$r\geqslant 0$;

(3) $y=x+2$ 与 $y=(\sqrt{x+2})^2$.

思维技巧 一个函数的完整内容有三点:① 两个变量;② 一个对应关系;③ 自变量取值范围.若两个函数是同一函数,必须满足条件:两个函数中自变量的取值范围必须相同;从自变量到函数的对应规律必须相同.二者缺一不可.

解 (1) 不是同一函数,因为它们自变量 x 的取值不同,在 $y=x$ 中,x 的取值范围是一切实数,而在 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 中,x 的取值范围是不等于零的所有实数.

(2) 是同一函数.首先,它们的自变量取值范围完全相同,都是非负数($x\geqslant 0$,$r\geqslant 0$);其次,它们的自变量与函数的对应规律相同,都是自变量的值的平方的 π 倍就是所对应的函数值,所不同的仅是表示函数和自变量的字母不同,这既不影响它们的自变量的取值范围,也不影响它们自变量与函数的对应规律,故是同一函数.

(3) 不是同一函数.因为它们自变量 x 的取值范围不同,在 $y=x+2$ 中,x 的取值是一切实数,而在 $y=(\sqrt{x+2})^2$ 中,x 的取值范围是 $x\geqslant -2$.

激活思维 根据函数的概念,从自变量的取值和对应规律上去寻求答

案.考察是否是同一函数,切莫仅从表面形式上去判定,更不能用化简后的函数去比较.注意分式、根式性质的应用.

同类变式　下列函数的图像与 $y=x$ 的图象完全一致的是(　　)

A. $y=\frac{x^2}{x}$　　B. $y=\sqrt[3]{x^3}$　　C. $y=|x|$　　D. $y=(\sqrt{x})^2$

解　选B

思维拓展　圆的周长是 C,圆的面积是 S.

(1) S 是 C 的函数吗?为什么?

(2) C 是 S 的函数吗?为什么?

解　(1)(2)都是,符合函数的定义,(1)中 $S=\pi\cdot\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2=\frac{C^2}{4\pi}$,(2)中 $C=2\sqrt{\pi S}$.

【例2】　求下列函数中自变量取值范围:

(1) $y=x^2-x-1$;

(2) (北京市西城区,2002) $y=\frac{1}{2x-1}$;

(3) (盐城,2001) $y=2+\sqrt{x+3}$;

(4) (宿迁市,2002 太原市,2001) $y=\frac{\sqrt{1-x}}{x-2}$.

思维技巧　解答这类题,先分析各解析式的结构特征,把自变量所有受制约的条件一一找出来,然后解不等式组,确定自变量取值范围.

解　(1) 自变量 x 取全体实数;

(2) 由题意得 $2x-1\neq0$,$x\neq\frac{1}{2}$;

(3) 由 $x+3\geqslant0$ 得,$x\geqslant-3$;

(4) 由 $\begin{cases}1-x\geqslant0,\\x-2\neq0,\end{cases}$ 得 $x\leqslant1$.

激活思维　求函数自变量的取值范围时,考虑问题要全面,根据函数表达式各个部分要有意义的要求,列出限制自变量 x 的条件,最后求出公共部分.求解时,要综合应用不等式的知识和配方法等数学方法.

同类变式　求函数 $y=\frac{(x-3)^0-\sqrt{x-3}}{x^2-7x+10}$ 的自变量 x 的取值范围.

解　由题设知,作为分母的 $x^2-7x+10$ 应不等于0,即 $x\neq2$,且 $x\neq5$;作为零指数幂的底数 $x-3$ 应不等于0,即 $x\neq3$;作为被开方数的 $x-3$ 应不小于0,即 $x\geqslant3$.综合以上各种情形可知,自变量 x 的取值范围是 $x>3$ 且 x

$\neq 5$.

思维拓展 求函数 $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+\sqrt{2-x}}$ 自变量 x 的取值范围.

解 易看出 $x+3\geqslant 0$，$2-x\geqslant 0$，即 $-3\leqslant x\leqslant 2$，且要 $x+\sqrt{2-x}\neq 0$，当 $x+\sqrt{2-x}=0$ 时，可解得 $x_1=-2$，$x_2=1$，经检验 $x=1$ 是方程的增根，$x=-2$ 是方程的根，故 $x\neq -2$ 时，$x+\sqrt{2-x}\neq 0$. 由此可得 x 的取值范围为 $-3\leqslant x\leqslant 2$，且 $x\neq -2$.

【例 3】 如图 13－18，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=7$，P 是 BC 边上与 B 点不重合的动点，过点 P 的直线交 CD 的延长线于 R，交 AD 于 Q（Q 与 D 不重合），且 $\angle RPC=45^\circ$，设 $BP=x$，梯形 $ABPQ$ 的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数关系，并求出自变量 x 的取值范围.

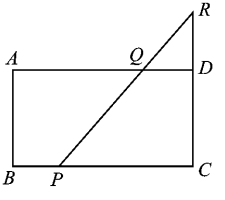


图 13－18

思维技巧 本题考查几何量间函数关系式的确定，并求几何问题中的自变量的取值范围，应联想到相应的矩形性质（如对边平行）、相似三角形的性质.

解 矩形 $ABCD$ 中，有

$AD=BC=7$，$AB=DC=4$，$\angle C=90^\circ$，

因为 $\angle RPC=45^\circ$，

所以 $\angle R=45^\circ=\angle RPC$.

所以 $PC=RC$. 因为 $BP=x$，

所以 $PC=7-x$，因为 $AD/\!/BC$，

所以 $\dfrac{QD}{PC}=\dfrac{RD}{RC}$.

所以 $QD=RD=RC-DC=3-x$，

所以 $AQ=AD-QD=7-(3-x)=4+x$.

因为 $S_{梯形ABPQ}=\dfrac{1}{2}(AQ+BP)\cdot AB$，

所以 $y=4x+8$.

当 Q 与 D 重合时，$PC=DC=4$，$BP=3$.

因为 P 与 B 不重合，Q 与 D 不重合，

所以自变量 x 的取值范围是 $0<x<3$.

激活思维 求几何量中函数关系式自变量的取值范围时，可以把自变

量所代表的几何量推到两个极端位置，求出相应值，再结合几何量实际意义加以确定，如本例中的自变量首先可以肯定大于0，再由 Q 与 D 重合这个特殊位置求出 BP 的长，因 Q 与 D 不重合，故 x 应小于特殊位置时的 BP 值.

同类变式　(四川省，2000) 某小汽车的油箱可装汽油 30 L，原装有汽油 10 L，现再加汽油 x L. 如果每升汽油价 2.6 元，求油箱内汽油的总价 y (元) 与 x (L) 之间的函数关系式，并写出自变量的取值范围.

解　依题意，得 $y=2.6x+26$. 因为油箱原装有汽油 10 L，油箱总共能装 30L，所以 $0\leqslant x\leqslant 20$.

思维拓展　(黔东南州，2001) 某校初二 (1) 班准备外出进行野外考察活动，需要租用一辆大客车一天. 现有甲、乙两辆客车的租用方案，分别是：甲车每天租金 180 元，另按实际行驶路程每千米加收 2 元；乙车每天租金 140 元，另按实际行驶路程每千米加收 2.5 元.

(1) 分别写出租用甲车、乙车所需费用 $y_{甲}$、$y_{乙}$ (单位：元) 与行驶路程 x (单位：km) 的函数关系式；

(2) 试就不同的行驶路程讨论选择哪一辆车费用较低.

解　(1) 依题意可写出：

$y_{甲}=2x+180$，$y_{乙}=2.5x+140$.

(2) 若 $y_{甲}=y_{乙}$，则

$2x+180=2.5x+140$，

解得　$x=80$.

所以 当 $x=80$ km 时，

$y_{甲}=y_{乙}$，两车费用相同；

当 $x>80$ km 时，

$y_{甲}<y_{乙}$，甲车费用较低；

当 $x<80$ km 时，

$y_{甲}>y_{乙}$，乙车费用较低.

【例 4】　(呼和浩特市，2002) 等腰$\triangle ABC$ 周长为 10 cm，底边 BC 长为 y cm，腰长为 x cm. (1) 写出 y 关于 x 的函数关系式；(2) 求 x 的取值范围；(3) 求 y 的取值范围.

思维技巧　利用$\triangle ABC$ 周长为 10 cm，建立 y 与 x 的函数关系式. 确立自变量 x 的范围要注意三角形三边关系. 由 x 取值范围确定函数值范围.

解　(1) 由 $x+x+y=10$ 得 $y=10-2x$.

(2) 因为 x、y 为线段，所以 $x>0$，$y>0$，

所以　$10-2x>0$，所以 $0<x<5$.

又　x、y 为三角形边长，

所以有 $x+x>y$，即 $2x>10-2x$，

所以　$x>2.5$　故 $2.5<x<5$.

⑶ 由 $2.5<x<5$，

得　$5<2x<10$，

所以 $-10<-2x<-5$.

所以　$0<10-2x<5$.

所以 y 的取值范围是 $0<y<5$.

激活思维　本题考查几何量间函数关系式的建立，应注意等腰三角形性质的应用. 在确定自变量取值范围时，易忽视了三角形两边之和大于第三边这一制约条件，从而扩大自变量 x 的取值范围. 关于函数值的范围的确定，本例采取了拼凑法，即从 $2.5<x<5$ 出发，运用不等式性质凑成.

同类变式　已知等腰三角形周长为 20 cm，⑴ 写出底边长 y 与腰长 x 之间的函数关系式；⑵ 指出自变量取值范围；⑶ 求函数 y 的取值范围.

解　⑴ $y=20-2x$；

⑵ 由题设知 $\begin{cases}y>0,\\2x>y.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+20>0,\\2x>-2x+20.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x<10,\\x>5.\end{cases}$ 所以 x 的范围是 $5\text{ cm}<x<10\text{ cm}$.

⑶ 因为 $5<x<10$，所以 $10<2x<20$，

$-20<-2x<-10$，$0<20-2x<10$.

因此　$0<y<10$ (cm).

思维拓展　已知铁丝的密度是 7.8 g/cm^3，直径为 d cm，铁丝的质量为 m g，长度是 l cm，求 l 与 m 之间的函数关系.

解　由物理公式知　$m=7.8V$.

其中　$V=\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot l=\frac{\pi d^2 l}{4}$.

所以　$m=7.8\cdot\frac{\pi d^2 l}{4}=1.95\pi d^2 l$.

所以　$l=\frac{m}{1.95\pi d^2}$，这即是 l 与 m 之间的函数关系，其中 m 是自变量，l 是 m 的函数，自变量 m 的取值范围是 $m\geqslant 0$.

【例 5】　已知函数 $y=\frac{m^2-6m+1}{4x}$，当 $x=2$ 时，$y=-1$. ⑴ 确定此函

数；⑵ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 的值.

思维技巧　本题考查函数式的确定和函数值的求法. 解题关键是函数定义的应用，其中，⑴ 实际是解方程，⑵ 实际是求代数式的值.

解　⑴ 当 $x=2$，$y=-1$ 时，有

$-1=\frac{m^2-6m+1}{4\times 2}$，即 $m^2-6m+9=0$，

所以 $(m-3)^2=0$，所以 $m=3$.

把 $m=3$ 代入 $y=\frac{m^2-6m+1}{4x}$，得

$y=-\frac{2}{x}$，自变量取值范围是 $x\neq 0$ 的全体实数.

⑵ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=-\frac{2}{\frac{1}{2}}=-4$.

答　⑴ 此函数关系式为 $y=-\frac{2}{x}$ $(x\neq 0)$；

⑵ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 的值是 -4.

激活思维　已知自变量与它的函数间的某些对应值，求它的解析式，采取先设出式子中的未知系数，再根据条件求出未知系数，从而写出这个式子的方法叫待定系数法.

同类变式　已知函数 $y=2x^2+5x-3$，求当 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时的函数值.

解法一　当 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，

$$y=2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+5\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}-3=\frac{6-2\sqrt{5}}{2}+\frac{5(\sqrt{5}-1)}{2}-\frac{6}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}.$$

解法二　当 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$x^2+x-1=0$，则

$y=2(x^2+x-1)+3x-1=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$.

思维拓展　已知 $y=\frac{2x+4}{x-3}$，求：⑴ 当 x 取 1，-1，$\sqrt{3}$ 时的函数值.

⑵ 当 $y=-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，-2 时的 x 的值.

解 (1) 当 $x=1$ 时，$y=\frac{2\times1+4}{1-3}=-3$；

当 $x=-1$ 时，$y=\frac{2\times(-1)+4}{(-1)-3}=-\frac{1}{2}$；

当 $x=\sqrt{3}$ 时，$y=\frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}-3}=-\frac{9+5\sqrt{3}}{3}$.

(2) 当 $y=-\frac{1}{3}$ 时，$\frac{2x+4}{x-3}=-\frac{1}{3}$，解得 $x=-\frac{9}{7}$；

当 $y=\frac{1}{3}$ 时，$\frac{2x+4}{x-3}=\frac{1}{3}$，解得 $x=-3$；

当 $y=-2$ 时，$\frac{2x+4}{x-3}=-2$，解得 $x=\frac{1}{2}$.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) 设在一个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一的值与它对应，则说_____是自变量_____的函数.

(2) 圆面积 S 与直径 D 之间的关系是 $S=\frac{1}{4}\pi D^2$，其中变量是_____，常量是_____.

(3) (汕头市、随州市，2003) 已知函数 $y=\frac{1}{x^2-4}$，自变量 x 的取值范围是_____.

(4) (海南省、贵阳市) 函数 $y=\sqrt{x-2}$ 中自变量的取值范围是_____.

(5) (山西省，2003) 函数 $y=\frac{\sqrt{x+3}}{|x|+2}$ 中的自变量 x 的取值范围是_____.

(6) (河南省，2003) 函数 $y=\sqrt{x+4}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

(7) (金华市，2002) 某中学要在校园内划出一块面积是 $100\ \mathrm{m}^2$ 的矩形土地做花圃，设这个矩形的相邻两边的长分别为 x m 和 y m，那么 y 关于 x 的函数解析式是_____.

(8) (浙江省丽水，2002) 我国是一个严重缺水国家，大家应倍加珍惜水资源，节约用水. 据测试，拧不紧的水龙头每秒钟会滴下 2 滴水，每滴水约

0.05 mL，小明同学在洗手时，没有把水龙头拧紧，当小明离开 x h 后水龙头滴了 y mL 水，试写出 y 关于 x 的函数关系式_____.

(9) (云南曲靖，2002) 公民的月收入超过 1000 元时，超过部分须依法缴纳个人所得税，当超过部分在 500 元以内 (含 500 元) 时税率为 5%，那么公民每月所纳税款 y (元) 与月收入 x (元) 之间的函数关系式是_____，自变量取值范围是_____，某人月收入为 1360 元，则该人每月应纳税_____元.

(10) (广西，2001) 观察下列各正方形图案，每条边上有 n ($n\geqslant 2$) 个圆点，每个图案中圆点的总数是 S.

图 13－19

$n=2$，$S=4$　$n=3$，$S=8$　$n=4$，$S=12$

按此规律推断出 S 与 n 的关系式为_____.

(11) 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=\sqrt{4x+22}$ 的函数值是_____

(12) 已知函数 $y=x^2+2x-2$，当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 时函数值为_____

2. 选择题

(1) (安徽省，2003) 函数 $y=\frac{x}{1-x}$ 中自变量 x 的取值范围是 (　　)

A. $x\neq 0$　　B. $x\neq 1$

C. $x>1$　　D. $x<1$ 且 $x\neq 0$

(2) (四川省，2003) 函数 $y=-\sqrt{2x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是 (　　)

A. $x\geqslant\frac{1}{2}$　　B. $x<\frac{1}{2}$　　C. $x\neq\frac{1}{2}$　　D. $x\leqslant\frac{1}{2}$

(3) (兰州市，2003) 函数 $y=\frac{x}{\sqrt{x+5}}$ 中自变量 x 的取值范围是 (　　)

A. $x>5$　　B. $x>-5$ 或 $x\neq 0$

C. $x\geqslant -5$　　D. $x\geqslant -5$ 且 $x\neq 0$

⑷ (南通市,2003)函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 中,自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant -1$　　B. $x>0$

C. $x>-1$,且 $x\neq 0$　　D. $x\geqslant -1$,且 $x\neq 0$

⑸ (北京市海淀区,2002)根据图 13－20 所示的程序计算函数值,若输入的 x 值为 $\frac{3}{2}$,则输出的结果为(　　)

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

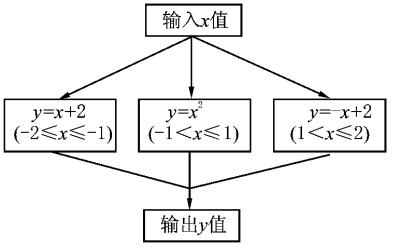


图 13－20

⑹ (北京市石景山区,2001)在函数 $y=\frac{x}{\sqrt{x-2}-1}$ 中,自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x>2$　　B. $x\geqslant 2$

C. $x>2$ 且 $x\neq 3$　　D. $x\geqslant 2$ 且 $x\neq 3$

⑺ (四川省,2001)下列函数中,自变量 x 的取值范围选取错误的是(　　)

A. $y=2x^2$ 中,x 取全体实数

B. $y=\frac{1}{x+1}$ 中,x 取 $x\neq -1$ 的实数

C. $y=\sqrt{x-2}$ 中,x 取 $x\geqslant 2$ 的实数

D. $y=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 中,x 取 $x\geqslant -3$ 的实数

⑻ 若函数 $y=\frac{1}{x^2+2x+C}$ 的自变量 x 取值范围是一切实数,则 C 的

取值范围是（　　）

A．$C>1$　　B．$C=1$　　C．$C<1$　　D．$C\leqslant 1$

(9)（镇江市，2001）函数 $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$ 的自变量 x 的取值范围在数轴上表示应为（　　）

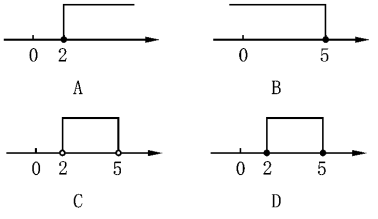


图 13－21

(10) 下列说法不正确的是（　　）

A．函数 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 中，$\frac{4}{3}$ 是常量，r 是自变量，V 是 πr 的函数

B．代数式 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 是它所含字母 r 的函数

C．公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 可以看做球的体积是球的半径的函数

D．函数 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，当 $r=0$ 时，$V=0$

(11) 下列函数中，与 $y=x$ 表示同一个函数的是（　　）

A．$y=\frac{x^2}{x}$　　B．$y=\sqrt{x^2}$

C．$y=(\sqrt{x})^2$　　D．$y=\sqrt[3]{x^3}$

(12) 已知函数 $(x-3)(y+2)=-3$，用 y 表示 x 的函数是（　　）

A．$x=-\frac{3(y+1)}{y+2}$ $(y\neq -2)$　　B．$x=\frac{3(y-1)}{y+2}$ $(y\neq -2)$

C．$x=3\cdot\frac{y+1}{y+2}$ $(y\neq -2)$　　D．$x=\frac{3y+9}{y+2}$ $(y\neq -2)$

(13) 已知函数 $y=\frac{2x-1}{x+2}$，当 $x=m$ 时的函数值为 1，则 m 的值为（　　）

A．1　　B．3　　C．-3　　D．-1

3．已知函数 $y=\frac{k}{x+1}$，且当 $x=-2$ 时，$y=-3$，(1) 求 k 的值；(2) 当 x

$=\frac{1}{2}$时，求 y 的值.

4. 已知函数 $y=\sqrt{5-x}+\frac{4x}{x-5}$. (1) 求自变量 x 的取值范围；(2) 求当 $x=1$ 时的函数值.

5. 已知 $y=y_1-y_2$，$y_1=\frac{k_1}{x+1}$ ($k_1\neq0$)，$y_2=k_2(x-2)$ ($k_2\neq0$)，且当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=-2$ 时，$y=8$. (1) 求 y 与 x 之间的函数关系式；(2) 当 $y=-2$ 时，求 x 的值.

6. 在边长为 12 cm 的正方形铁皮上，以正方形一边上的某条线段长为直径，剪下一个半圆，写出剩余面积 S (cm^2) 和半圆的半径 R (cm) 之间的关系.

7. (泰州市，2002) 为了加强公民的节水意识，某市制定了如下用水收费标准：每户每月的用水不超过 10 t 时，水价为每吨 1.2 元；超过 10 t 时，超过的部分按每吨 1.8 元收费. 该市某户居民 5 月份用水 x t ($x>10$)，应交水费 y 元，求 y 关于 x 的函数关系式.

探究能力测试

8. (济南市，2001) 某商店售货时，在进价的基础上加一定利润. 其数量 x 与售价 y 如下表所示，请你根据表中所提供的信息，列出售价 y 与数量 x 的函数关系式，并求出当数量是 2.5 kg 时的售价是多少元？

数量 x (kg)	1	2	3	4	5	…
售价 y (元)	8+0.4	16+0.8	24+1.2	32+1.6	40+2.0	…

9. (新疆，2001) 某同学将父母给的零用钱按每月相等的数额存放在储蓄盒内，准备捐给希望工程，盒内原有 40 元，2 个月后盒内有 80 元.

(1) 求盒内钱数 y (元) 与存钱月数 x 之间的函数关系式 (不要求写出 x 的取值范围)；

(2) 按上述方法，该同学几个月能存够 200 元.

10. 已知池中有 600 m^3 的水，每小时抽 50 m^3.

(1) 写出剩余水的体积 Q (m^3) 与时间 t (h) 之间的函数关系式；

(2) 求出自变量 t 的取值范围；

(3) 8 h 后，池中还有多少水；

(4) 几小时后，池中还有 100 m^3 的水？

13.3　函数的图象

学习探究分析

重点　理解函数图象的概念，已知函数解析式，用描点法画其图象.

难点　较复杂的函数图象的画法，关键是善于找特殊点，描绘图象的主要特征.

探究点　掌握函数的三种表示方法，近年来中考数学中出现了不少“图文信息”新型试题，即运用图景、图象、图表及一定的文字说明提供文字的情景，通过对图表的解读、分析和判断，弄清所研究的对象和隐含的数量关系，然后再根据图象、图表的特征及相关知识解决贴近社会、贴近学生、贴近生活的实际应用问题. 这类题已由最初的一维图表（单图象、单图表）形式向二维图表（双图象、双图表、单图象 + 单图表）形式发展. 既考查数形结合的思想方法、抽象思维能力和阅读、观察、归纳等综合分析能力，又有助于活跃思维.

学习方法技巧

由于函数的图象是数形结合的具体体现，画函数的图象和利用函数图象解决相关问题，体现了数形结合的思想方法. 形成数形结合解决问题的能力是学好本节的一个关键，中考数学中出现了越来越多的贴近社会、贴近学生、贴近生活的、形式多样的图文信息题. 读图识表是前提，弄清图象、图表所描述的内容，仔细分析图象、图表中各相关量的变化规律及大小关系，以及它们之间的内在联系又是一个关键. 解决这类问题，往往需要善于逆向思维、善于“建模”并注意分类思想的运用.

能力升级捷径

【例 1】　某校办工厂现在年产值是 15 万元，计划今后每年增加 2 万元. (1) 写出年产值 y（万元）与年数 x 之间的函数关系式；(2) 画出函数的图象；(3) 求 5 年后的产值.

思维技巧　本题考查求函数解析式、求函数值和画函数的图象. 在求函数解析式时，依据解析式，列表、描点、连线画出函数图象；画图象时，应注意自变量取值范围，特别是画实际问题的函数图象时，一定不能忽视自变量的实际意义.

解　(1) 函数关系式为 $y=15+2x$ ($x\geqslant 0$)；

(2) 列表：

x	0	1	2	3	4	5	6
$y=15+2x$	15	17	19	21	23	25	27

描点连线，得出函数图象如图 13－22.

(3) 当 $x=5$ 时，$y=15+2\times 5=25$.

所以　5 年后的产值是 25 万元.

注 求 5 年后的产值，也可以从函数图象上观察到 $x=5$ 时，$y=25$.

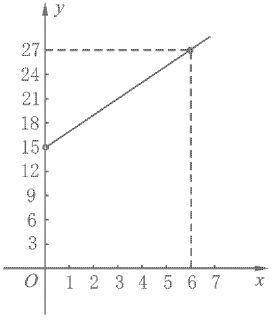


图 13－22

激活思维　此例题三个小题的解答过程体现了函数的三种表示方法(解析法、列表法、图象法)之间的联系及其优缺点. 根据函数的解析式画出图象，通过读图，解决有关的实际问题. 需要特别强调的是，画实际问题的函数图象时，一定要注意问题的实际意义. 掌握函数图象的画法是形成数形结合思想的基础.

同类变式　设 $U=x+1$，$y=\frac{U}{2}$，(1) 当 $x=1$ 时，分别求出 U、y 的值；(2) 当 $y=-5$ 时，分别求 U、x 的值；(3) y 是不是 x 的函数？若是，写出 y 与 x 之间的函数关系式，并画出这个函数的图象.

解　(1) 当 $x=1$ 时，$U=1+1=2$，$y=\frac{2}{2}=1$；

(2) 当 $y=-5$ 时，$-5=\frac{U}{2}$；

所以　$U=-10$，$-10=x+1$，所以　$x=-11$；

(3) 因为　$y=\frac{U}{2}$，又 $U=x+1$，

所以　$y=\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，$y$ 是 x 的函数. 列表：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

描点、连线得图 13－23.

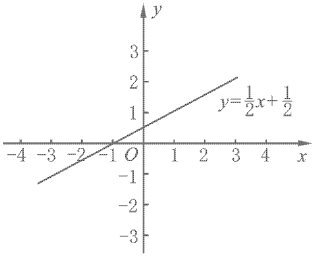


图 13－23

思维拓展　(1) 用描点法在同一坐标系中画出 $y=x$ 与 $y=\frac{4}{x}$ 的图象；(2) 求出两图象的交点坐标，并利用图象加以检验.

解　(1) 分别列表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
$y=\frac{4}{x}$	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	4	2	$\frac{4}{3}$	1

分别描点、连线(如图 13－24).

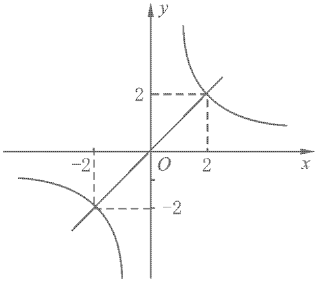


图 13－24

(2) 联立方程组$\begin{cases} y=x, \\ y=\dfrac{4}{x}. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=-2. \end{cases}$

所以　两函数图象的交点坐标为(2,2)和(－2,－2).从图象上也可看出,$y=x$ 和 $y=\dfrac{4}{x}$ 的图象都经过(2,2)和(－2,－2).

【例 2】　(南平市,2002)某机动车出发前油箱内有油 42L,行驶若干小时后,途中在加油站加油若干升.油箱中余油量 Q(L)与行驶时行 t(h)之间的函数关系如图 13－25 所示,根据下图回答问题:

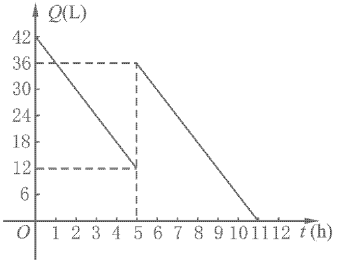


图 13－25

(1) 机动车行驶几小时后加油？答：_____h

(2) 加油前油箱余油量 Q 与行驶时间 t 的函数关系式是_____；此函数自变量 t 的取值范围是_____；

(3) 中途加油_____L；

(4) 如果加油站距目的地还有 230 km，车速为 40 km/h，要到达目的地，油箱中的油是否够用？请说明理由.

思维技巧　通过图象提供信息、收集处理信息，并且解决实际问题的题目，近几年中考当中出现越来越多，是提高综合素质能力的体现. 读懂图，理解其题意尤为重要.

解　(1) 从图象上看机动车行驶 5h 后加油.

(2) 由图象知，行驶 5 h，耗油 $42-12=30$ (L)，平均每小时耗油 6 (L).

所以 Q 和 t 的关系式为 $Q=42-6t$，其中 $0\leqslant t\leqslant 5$.

(3) 中途加油 $36-12=24$ (L).

(4) 因为加油后油箱里的油可供行驶 $11-5=6$ (h) 或 $\frac{36}{6}=6$ (h).

所以剩下的油可行驶 $6\times 40=240$ (km)，

因为 $240>230$，所以油箱中的油够用.

激活思维　由阅读图象来获得信息，并利用信息解决有关问题，其题目形式多样，灵活，取材广泛. 既考查了数学思想方法 (数形结合思想)，又考查了阅读、观察比较、分析和处理信息的综合能力. 一改以前形式单一，缺少情景数学题的弊端.

同类变式　1. (江苏省盐城市，2001) 新中国成立后，社会安定，我国人口数量逐年增加，人均资源不足的矛盾日益突出，为实施可持续发展战略，我国把实行计划生育作为一项基本国策. 如图 13-26 是我国人口数量增长图，试根据图象信息，回答下列问题：

(1) 1950 年到 1990 年我国人口增加了_____亿，2000 年我国人口数量为_____亿；

(2) 实行计划生育政策前我国人口平均每 5 年增长 10%，由于实行了计划生育，我国从 1990 年到 2000 年这十年间就少出生了_____亿人；

(3) 1990 年到 2000 年这十年间，我国人口平均每 5 年的增长率约是多少？(以下数据供参考：$1.1^2=1.21$，$1.087^2=1.182$)

解　(1) 由图象观察知 5.6，13；

(2) $11(1+10\%)^2-13=0.31$；

(3) 设平均每 5 年的增长率为 x，

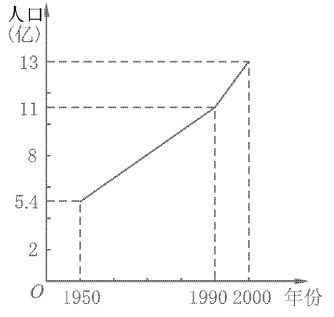


图 13－26

依题意，得 $11(1+x)^2=13$，

解得 $x_1=0.087$，$x_2=-2.087$（舍去）.

答 略.

2. （潍坊市，2000）2000 年 3 月 21 日出版的《南方周末》报上刊登一幅××市自来水公司年度利润表（如图 13－27），观察该图表知，下列四个说法中错误的是（　　）

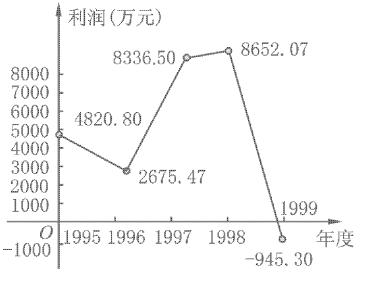


图 13－27

A. 1996 年的利润比 1995 年的利润增长 －2145.33 万元

B. 1997 年的利润比 1996 年的利润增长 5679.03 万元

C. 1998 年的利润比 1997 年的利润增长 315.57 万元

D. 1999 年的利润比 1998 年的利润增长 −7706.77 万元

答 选 D

【例 3】 (1) 已知点 $A\left(\frac{4}{25},b\right)$ 在函数 $y=5x-\sqrt{5-x}$ 的图象上. 求 b 的值.

(2) 已知点 $B(4,2)$ 在函数 $y=2x+b$ 的图象上,试判断点 $C(-2,3)$ 是否在此函数的图象上.

思维技巧　若点在函数的图象上,则点的坐标满足方程 (函数关系式);反之,若点的坐标满足方程 (函数关系式),则点在函数的图象上. 据此,可分别以 A、B 的坐标代替相应函数表达式中的 x、y,通过方程求出 b 值,然后,以 C 的坐标代替 $y=2x+b$ 中的 x、y,以检验等式是否成立.

解　(1) 因为点 $A\left(\frac{4}{25},b\right)$ 在函数 $y=5x-\sqrt{5-x}$ 的图象上,

所以 $b=5\times\frac{4}{25}-\sqrt{5-\frac{4}{25}}=\frac{4}{5}-\frac{11}{5}=-\frac{7}{5}$.

(2) 因为点 $B(4,2)$ 在函数 $y=2x+b$ 的图象上,

所以当 $x=4$ 时,$y=2$,即 $2=2\times4+b$,

解得 $b=-6$.

所以函数关系式为 $y=2x-6$.

又因为当 $x=-2$ 时,$y=2\times(-2)-6=-10\neq3$,

所以点 $C(-2,3)$ 不在此函数的图象上.

激活思维　解答此题运用了“点在图象上”⇔“点的坐标满足函数解析式”这一基本思想,体现了数与形的统一性与和谐美,这类题有助于促进学生的双向思维.

同类变式　若点 $P(2,7)$ 在函数 $y=ax^2+b$ 的图象上,且当 $x=-\sqrt{3}$ 时,$y=5$.

(1) 求 a,b 的值;(2) 如果点 $\left(\frac{1}{2},m\right)$ 和点 $(n,7)$ 也在函数的图象上,求 m,n 的值.

解　(1) 因为　点 $P(2,7)$ 在函数 $y=ax^2+b$ 的图象上,

所以　$7=4a+b$. 同理 $5=(-\sqrt{3})^2a+b$.

所以　$a=2$,$b=-1$.　所以　$y=2x^2-1$.

(2) 依题意,有 $\begin{cases}m=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1,\\7=2n^2-1\end{cases}$　所以　$\begin{cases}m=-\frac{1}{2},\\n=\pm2.\end{cases}$

思维拓展 求函数 $y=x^2+x-2$ 与 $y=3x+1$ 的图象的交点坐标.

解 将两个解析式方程联立,组成方程组

$$\begin{cases}y=x^2+x-2,\\ y=3x+1,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=-2,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=10.\end{cases}$$

所以函数 $y=x^2+x-2$ 与函数 $y=3x+1$ 的图象的交点坐标为 $(-1,-2)$ 和 $(3,10)$.

【例 4】 已知某一函数的图象如图 13-28,根据图象:

(1) 确定自变量 x 的取值范围;

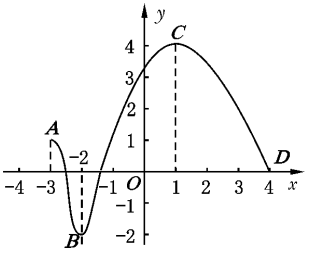


图 13-28

(2) 求当 $x=0,-3$ 时,y 的对应值;

(3) 求当 $y=0,3$ 时,对应的 x 的值;

(4) 当 x 为何值时,函数值 y 最大?

(5) 当 x 为何值时,函数值 y 最小?

(6) 当 y 随 x 的增大而增大时,求相应的 x 的值在什么范围内?

(7) 当 y 随 x 的增大而减小时,求相应的 x 的值在什么范围内?

思维技巧 此题是单图象的信息题,解答此题的关键是要会识图,从图象中得到有关信息,解决有关问题.

函数图象上每一点的横坐标都是自变量 x 的一个值,自变量 x 的取值范围就是图象上最左边端点 A 的横坐标到最右边端点 D 的横坐标,即 $-3\leqslant x\leqslant 4$. 函数 y 的最大值就是图象上最高点 C 的纵坐标,最小值就是最低点 B 的纵坐标. 函数图象从左到右观察,从 A 到 B 呈"下降"状,这时 y 随 x 的增大而减小;从 B 到 C 呈"上升"状,这时 y 随 x 的增大而增大;从 C 到 D 又呈"下降"状,这时 y 随 x 的增大而减小.

解　(1) 自变量 x 的值范围是 $-3\leqslant x\leqslant 4$；

(2) 当 $x=0$ 时，$y=-3.3$，当 $x=-3$ 时，$y=1$；

(3) 当 $y=0$ 时，$x=-2.5$，-1.4 和 4，当 $y=3$ 时，$x=-0.3$，2.1；

(4) 当 $x=1$ 时，y 的值最大，此时 $y=4$；

(5) 当 $x=-2$ 时，y 的值最小，此时 $y=-2$；

(6) 当 y 随 x 的增大而增大时，相应的 x 的值在 $-2<x<1$ 内；

(7) 当 y 随 x 的增大而减小时，相应的 x 的值在 $-3<x<-2$ 或 $1<x<4$ 内.

激活思维　借助于图象语言来解决问题，直观、形象、简捷，且利用图象观察的数值往往是近似值，因此，正确画出函数图象和准确识图至关重要.

同类变式　已知函数 $y=3x-2$，求：

(1) 函数图象与 x 轴、y 轴的交点坐标；

(2) 当 x 取什么值时，函数值是正数、零、负数？

解　(1) 因为函数图象与 x 轴交点既在图象上，又在 x 轴上.

所以此交点的纵坐标为 0，即 $y=0$.

所以 $3x-2=0$，得 $x=\frac{2}{3}$.

所以函数图象与 x 轴的交点坐标是 $\left(\frac{2}{3},0\right)$.

又因为函数图象与 y 轴的交点在 y 轴上.

所以此交点的横坐标为 0，即 $x=0$.

所以 $y=3\times 0-2$ 得 $y=-2$.

所以函数图象与 y 轴的交点是 $(0,-2)$.

(2) 函数值大于 0，即 $y>0$，从而 $3x-2>0$，得 $x>\frac{2}{3}$；

函数值等于 0，即 $y=0$，从而 $3x-2=0$，得 $x=\frac{2}{3}$；

函数值小于 0，即 $y<0$，从而 $3x-2<0$，得 $x<\frac{2}{3}$；

综上，当 $x>\frac{2}{3}$ 时，$y>0$；当 $x=\frac{2}{3}$ 时，$y=0$；当 $x<\frac{2}{3}$ 时，$y<0$.

思维拓展　(江苏镇江市，2002) 甲、乙两人 (甲骑自行车，乙骑摩托车) 从 A 城出发到 B 城旅行，如图 13-29 表示甲、乙两人高开 A 城的路程与时间之间的函数图象. 根据图象，你能得到关于甲、乙两人旅行的哪些信息？

答题要求：

(1) 请至少提供四条信息. 如由图 13-29 可知：甲比乙早出发 4h (或乙

比甲迟出发 4 h)；甲离开 A 城的路程与时间之间的函数图象是一条折线段，说明甲做变速运动.

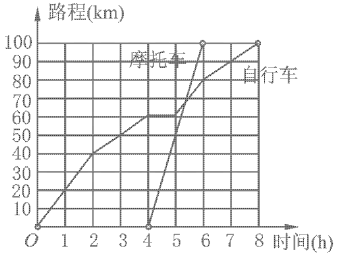


图 13－29

(2) 请不要再提供“(1)”中已列举的信息.

解　此题是一道开放性试题，结论不唯一.

图象提供的信息如：两城市间相距 100 km；本次旅行甲用了 8 h；本次旅行乙用了 2 h；乙做匀速运动 (图象是一条直线段)；甲比乙晚到 2 h (或乙比甲早到 2 h)；甲途中休息了 1 h；本次旅行甲的平均速度为 12.5 km/h；本次旅行乙的平均速度为 50 km/h；甲出发约 5.3 h 后与乙相遇；

甲出发 3 h 后走了全程的一半；

乙出发 1 h 后走了全程的一半；等等.

【例 5】　(辽宁省，2000) 某单位急需用车，但又不准备买车，他们准备和一个体车主或一国有出租车公司其中的一家签订月租车合同. 设汽车每月行驶 x km，应付给个体车主的月费用是 y_1 元，应付给出租车公司的月费用是 y_2 元，y_1、y_2 分别与 x 之间的函数关系图象 (两条射线) 如图 13－30，观察图象回答下列问题：

(1) 每月行驶的路程在什么范围内时，租国有公司的车合算？

(2) 每月行驶的路程等于多少时，租两家车的费用相同？

(3) 如果这个单位估计每月行驶的路程为 2300 km，那么这个单位租哪家的车合算？

思维技巧　此题是一道图文信息题，利用函数图象解决当前市场经济中如何租用汽车问题. 形式新颖，有利于考查数学思想方法、数学应用能力及观察比较、分析和归纳的综合能力.

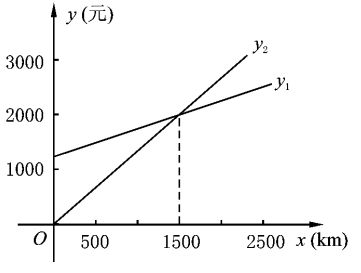


图 13－30

解　(1) 每月行驶的路程小于 1500 km 时，租国有公司的车合算.

[或当 $0 \leqslant x < 1500$ km 时，租国有公司的车合算].

(2) 每月行驶的路程等于 1500 km 时，租两家车的费用相同.

(3) 如果每月行驶的路程为 2300 km，那么这个单位租个体车主的车合算.

同类变式　(江苏无锡，2001) 某人从甲地出发，骑摩托车去乙地，途中因车出现故障而停车修理，到达乙地时正好用了 2 h. 已知摩托车行驶的路程 s (km) 与行驶的时间 t (h) 之间的函数关系由图 13－31 的图象 $ABCD$ 给出. 若这辆摩托车平均每行驶 100 km 的耗油量为 2 L，根据图中给出的信息，从甲地到乙地，这辆摩托车共耗油_____L.

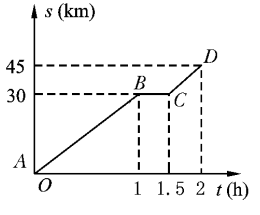


图 13－31

由图象观察得知，当 $1\text{ h} \leqslant t \leqslant 1.5$ h，路程 s 均为 30 km，说明摩托车在这段时间里因出现故障而停车修理，摩托车行驶了 45 km 只用 1.5 h，所耗

油升数不难求出.

解 0.9

思维拓展 (苏州市,2000)某开发区为改善居民的住房条件,每年都新建一批住房,人均住房面积逐年增加(人均住房面积 $=\frac{\text{该区住房总面积}}{\text{该区人口总数}}$,单位:$m^2$/人).该开发区1997至1999年,每年年底人口总数和人均住房面积的统计结果分别如下图:

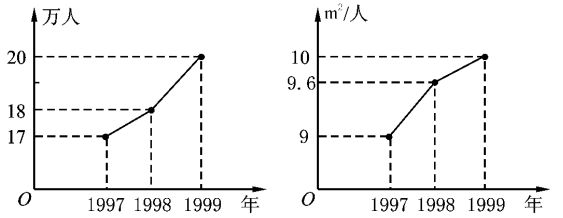


图 13－32

请根据下面两图所提供的信息解答下面的问题:

(1)该区1998年和1999年两年中,哪一年比上一年增加的住房面积多?多增加多少万平方米?

答:_____年比上一年增加的住房面积多,多增加_____万平方米.

(2)由于经济发展需要,预计到2001年底,该区人口总数将比1999年底增加2万.为使到2001年底该区人均住房面积达到11 m^2/人,试求2000年和2001年这两年该区住房总面积年平均增长率应达到百分之几.

解 (1)1999,7.4

(2)设住房总面积年平均增长率应达到 x,则

$$200(1+x)^2=11\times(20+2).$$

解之,得 $x_1=0.1=10\%$,$x_2=-2.1$(舍去).

答:2000年和2001年这两年该区住房总面积的年平均增长率应达到10%.

综合能力测试

基础能力测试

1．填空题

(1) (北京市怀柔区,2002) 若点 $A(a,3)$ 在函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象上,则 a 的值是_____.

(2) (南京市,2002) 点 $A(1,m)$ 在函数 $y=2x$ 的图象上,则点 A 关于 y 轴的对称的点的坐标是_____.

(3) 已知点 $(2,k)$ 在函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象上,则 $k=$_____.

(4) 已知点 $(m+1,m^2)$ 在函数 $y=x^2+2x$ 的图象上,则 $m=$_____.

(5) 已知函数 $y=ax^2+bx$ 的图象经过 $A(1,-1)$,$B(2,0)$ 两点,则 $a=$_____,$b=$_____.

(6) 设有 7 个点:$P_1(1,1)$,$P_2(0,0)$,$P_3(-1,-1)$,$P_4(-1,1)$,$P_5(1,-1)$,$P_6(8,2\sqrt{2})$,$P_7(2\sqrt{2},8)$,这些点中在函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象上的有_____.

(7) 函数 $y=\frac{1}{2}x^3+4$ 的图象与 x 轴交点坐标为_____,与 y 轴交点坐标为_____.

(8) (无锡市,2000) 已知 A 地在 B 地的正南方 3 km 处,甲、乙两人同时分别从 A、B 两地向正北方向匀速直行,他们与 A 地的距离 s (km) 与所行的时间 t (h) 之间的函数关系由图 13－33 中的 AC 和 BD 给出,当他们行了3 h 的时候,他们之间的距离为_____ (km).

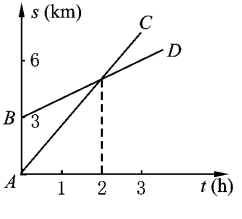


图 13－33

2．选择题

⑴ 若函数 $y=ax+2$ 的图象与函数 $y=bx-3$ 的图象交于 x 轴上某一点，那么 $a:b$ 的值等于（　　）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

⑵ 下列各点中，在函数 $y=\frac{1}{2}x-1$ 的图象的点是（　　）

A. $(-3,-2)$　　B. $(-4,-3)$　　C. $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right)$　　D. $\left(5,\frac{1}{2}\right)$

⑶ 如果点 $(1,2)$ 同时在函数 $y=ax+b$ 与 $y=\frac{x-b}{a}$ 的图象上，则有序实数对 (a,b) 为（　　）

A. $(-3,-1)$　　B. $(-3,1)$　　C. $(1,-3)$　　D. $(-1,3)$

⑷ 图象经过点 $M(\sqrt{2},2)$ 的函数是（　　）

A. $y=x+\sqrt{2}$　　B. $y=|x|$　　C. $y=\frac{2}{x}$　　D. $y=x^2$

⑸ 铅笔每支售价 0.15 元，在坐标平面上表示 1 支到 50 支铅笔售价的图象是（　　）

A. 一条直线段　　B. 一条直线

C. 一组有限的不同点　　D. 以上答案都不是

⑹ 下列各点中，既在函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象上，又在函数 $y=x+\frac{3}{4}$ 的图象上的点是（　　）

A. $\left(\frac{1}{4},1\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$　　C. $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$

⑺ （郴州市，2003）如图 13－34 是郴州市春季某一天的气温随时间变化的图象，根据图象可知，在这一天中最高气温与达到最高气温的时间是（　　）

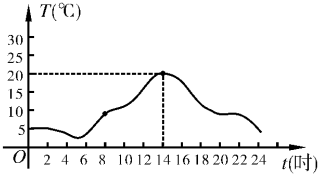


图 13－34

A. 25 ℃,16 时　　B. 10 ℃,6 时

C. 20 ℃,14 时　　D. 15 ℃,18 时

(8) (重庆市,2001)某产品的生产流水线每小时可生产 100 件产品,生产前没有产品积压.生产 3h 后安排工人装箱,若每小时装产品 150 件,未装箱的产品数量 y 是时间 t 的函数,那么,这个函数的大致图象只能是图 13－35中的(　　)

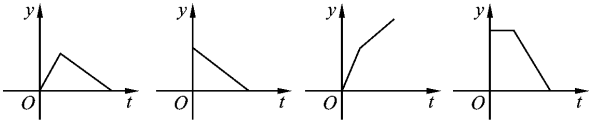


图 13－35

(9) (北京市朝阳区,2001)某中学团支部组织团员举行申奥登山活动.他们以 a km/h 的速度登山,行进一段时间后队伍开始休息,由于前面山坡变陡,休息后他们以 b km/h ($0<b<a$) 的速度继续前进,直达山顶.那么他们登山的路程 s (km) 与时间 t (h) 之间的函数图象大致是图 13－36 中的(　　)

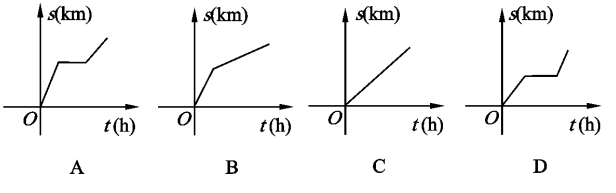


图 13－36

(10) (厦门市,2002 年)张大伯出去散步,从家走了 20 min,到一个离家 900 m 的阅报亭,看了 10 min 报纸后,用了 15 min 返回到家,下面图象中能表示张大伯离家时间与距离之间关系的是(　　)

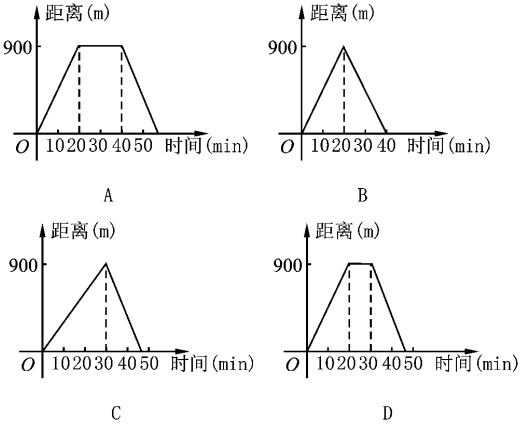


图 13－37

3．不作函数 $y=-\frac{1}{3}x^2-2$ 的图象，回答下列问题：

(1) 点 $(-3,-5)$，$(-3,5)$，$(0,-2)$，$(\sqrt{3},-3)$ 是否在图象上；

(2) 若点 $(-\sqrt{3},b)$ $(a,-5)$ 在图象上，求 a，b 的值.

4．根据画函数图象的一般步骤，画函数 $y=x+1$ 的图象，并根据图象回答：

(1) x 为何值时，y 的值为 0；

(2) y 为何值时，x 的值为 0；

(3) x 为何值时，$y>0$；

(4) 当 x 逐渐增大时，y 值有何相应变化？

5．观察图象 13－38，回答下列问题：

(1) 自变量 x 的取值范围；

(2) 函数值 y 的取值范围；

(3) 当 $x=0,-3$ 时，y 的值；

(4) 当 $y=0,3$ 时，x 的值；

(5) 当 y 随 x 的增大而增大时，x 的取值范围；

⑹ 当 y 随 x 的增大而减小时，x 的取值范围.

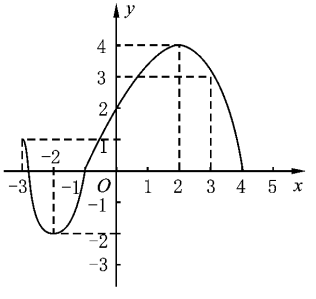


图 13－38

6．(长沙市，2003) 如图 13－39 表示长沙市 2003 年 6 月份某一天的气温随时间变化的情况，请观察此图回答下列问题：

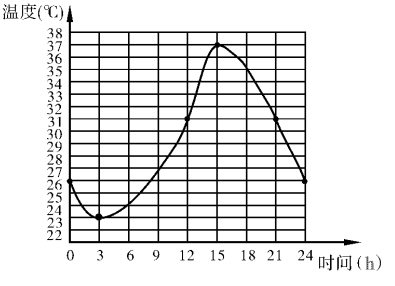


图 13－39

⑴ 这天的最高气温_____摄氏度；

⑵ 这天共有_____个小时的气温在 31 摄氏度以上；

⑶ 这天在_____(时间) 范围内温度在上升；

⑷ 请你预测一下，次日凌晨 1 点的气温大约是多少摄氏度？

答：_____

探究能力测试

7. 甲每小时走 5 km，乙每小时走 6 km，甲、乙二人从同地出发，甲出发 2h 后，乙开始追甲，设乙走的时间为 t (h).

(1) 分别将甲、乙二人所走的路程 $s_{甲}$、$s_{乙}$ 表示为时间 t 的函数关系式，并作出图象；

(2) 求乙追上甲的时间和地点，并用图象验证.

8. (三明市，2001) 如图 13－40，是函数 $y=-\frac{1}{2}x+5$ 的一部分图象，利用图象回答：

(1) 自变量 x 的取值范围；

(2) 当 x 取什么值时，y 取最小值？最小值为多少？

(3) 在 (1) 中 x 的取值范围内，y 随 x 的增大而怎样变化？

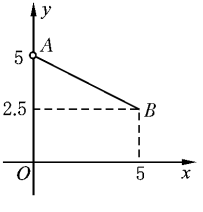


图 13－40

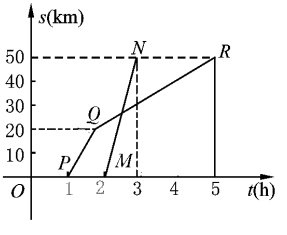


图 13－41

9. (连云港市，2000) A、B 两地相距 50 km，甲于某日下午 1 时骑自行车从 A 地出发驶往 B 地，乙也于同日下午骑摩托车从 A 地出发驶往 B 地. 图中折线 PQR 和线段 MN 分别表示甲和乙所行驶的里程 s 与该日下午时间 t 之间的关系，试根据图 13－41 填空：

(1) 甲出发_____h，乙才出发.

(2) 乙行驶_____h 就追上甲，这时两人离 B 地还有_____km.

10. (青海省，2001) 填表并观察下列两个函数的变化情况：

x	1	2	3	4	5	…
$y_1=10+2x$						
$y_2=5x$						

(1) 在同一个直角坐标系中画出这两个函数的图象,比较它们有什么不同;

(2) 预测哪一个函数值先到达 100.

13.4　一次函数

学习探究分析

重点　理解一次函数和正比例函数的定义,确定正比例函数和一次函数的解析式.

难点　确定实际问题中的函数解析式,尤其是一次函数的应用.

探究点　根据实际问题中的条件,确定正比例函数和一次函数的解析式,是考查的热点.以市场经济为背景,以一次函数为载体的综合性应用题,由于其贴近生活、贴近社会,与方程、不等式等知识联系紧密,对学生的能力要求较高,所以逐渐成为命题者所喜欢的题型,尤其值得重视.

学习方法技巧

掌握正比例函数和一次函数的定义是确定其解析式的基础.在确定一次函数解析式时,不能忽视 $k\neq0$ 和实际问题的条件限制.一次函数的应用题具有题材广泛、形式多样、文字长、综合性强等特点,因此读题、读图、读表能力是解决问题的前提,通过阅读弄清各量之间的内在联系,建立函数关系是一个关键.

能力升级捷径

【例 1】　在 $y=(n^2-1)x^{n^2+n-1}$ 中,当常数 n 为何值时,y 是 x 的正比例函数?

思维技巧　本题考查正比例函数的定义:$y=kx$ (k 为不等于 0 的常数),通过观察、对比、归纳,要使函数为正比例函数,必须满足 $n^2-1\neq0$,且 $n^2+n-1=1$,即 $\begin{cases}n^2-1\neq0,\\ n^2+n-1=1.\end{cases}$

解　要使 y 是 x 的正比例函数,必须

$n^2-1\neq0$ 且 $n^2+n-1=1$.

即　$n\neq\pm1$,且 $n=-2$,或 $n=1$.

由此得　$n=-2$.

所以当 $n=-2$ 时,y 是 x 的正比例函数.

激活思维 掌握正比例函数的定义是解答此题的关键，当函数中的自变量系数或指数含字母时，一定要注意定义中的隐含条件.

同类变式 已知 $y=(m^2-7m+12)x^{m^2-9m+19}$，当 m 为何值时，y 是 x 的正比例函数？

解 $\begin{cases}m^2-9m+19=1,\\ m^2-7m+12\neq 0\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}m=3\text{ 或 }m=6,\\ m\neq 3\text{ 且 }m\neq 4\end{array}\right\}\Rightarrow m=6.$

所以当 $m=6$ 时，

$y=(m^2-7m+12)x^{m^2-9m+19}$ 是 x 的正比例函数.

思维拓展 若函数 $y=(k^2+2k)x^{k^2+k-1}$ 是正比例函数，求作以方程 $y^2-14ky+3+k=0$ 两根的算术平方根为根的一元二次方程.

解 因为函数 $y=(k^2+2k)x^{k^2+k-1}$ 是正比例函数.

所以 $\begin{cases}k^2+k-1=1,\\ k^2+2k\neq 0,\end{cases}$

解得 $k=1$.

所以方程 $y^2-14ky+3+k=0$ 可化为

$y^2-14y+4=0$.

因为 $\Delta=(-14)^2-4\times 4>0$，

所以设方程 $y^2-14y+4=0$ 两实根为 y_1,y_2. 由根与系数的关系知：

$y_1+y_2=14,y_1y_2=4$.

设所求方程的两根为 x_1,x_2，

则 $x_1+x_2=\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}=\sqrt{(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})^2}$

$=\sqrt{(y_1+y_2)+2\sqrt{y_1y_2}}=\sqrt{14+2\sqrt{4}}$

$=3\sqrt{2}$，

$x_1x_2=\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}=\sqrt{y_1y_2}=\sqrt{4}=2.$

所以所求作的一元二次方程为 $x^2-3\sqrt{2}x+2=0$.

【例 2】 当 $m=$_____时，函数 $y=(m+3)x^{2m-1}+4x-5$ 是一次函数.

思维技巧 本题考查一次函数的定义：$y=kx+b$（$k\neq 0$，k、b 为常数），通过对比、观察、分析，对字母系数、指数进行分类讨论.

解 当 $2m-1=1$，即 $m=1$ 时，显然 $m+3+4=8\neq 0$，此时函数为 $y=8x-5$，符合题意；当 $m+3=0$ 时，函数为 $y=4x-5$ 也符合题意.

所以 $m=1$ 或 $m=-3$.

激活思维　本例在自变量系数、指数中都有字母 m，运用分类思想，通过对字母 m 的讨论，可加深对一次函数定义的理解，明确正比例函数是一次函数的特例，而一次函数却未必是正比例函数. 解决这类问题，要全面考虑，既要注意指数，又要注意系数.

同类变式　已知函数 $y=(m-2)x^{m^2-3}+5$，当 m 为何值时，它是一次函数，并求出这个一次函数解析式.

解　$\begin{cases}m-2\neq 0,\\ m^2-3=1\end{cases}$ 时，函数 $y=(m-2)x^{m^2-3}+5$ 为一次函数.

解之得 $m=-2$.

所以当 $m=-2$ 时，已知函数是一次函数，其解析式为：$y=-4x+5$.

思维拓展　(云南省，1998) 当 $m=$_____ 时，函数 $y=(m+3)x^{2m+1}+4x-5$ $(x\neq 0)$ 是一个一次函数.

解　(1) 当 $m+3=0$ 即 $m=-3$ 时，$y=4x-5$；

(2) 当 $m+3\neq 0$ 时，若 $2m+1=1$ 即 $m=0$ 时，$y=7x-5$；又因 $x\neq 0$，若 $2m+1=0$ 即 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$y=4x-\frac{5}{2}$.

所以 $m=-3$ 或 0 或 $-\frac{1}{2}$.

【例 3】　已知 $y+m$ 与 $x-n$ 成正比例 (其中 m，n 是常数). (1) 求证 y 是 x 的一次函数；(2) 如果 $x=-1$ 时，$y=-15$；$x=7$ 时，$y=1$，求这个一次函数的解析式.

思维技巧　本题考查一次函数的定义和一次函数的解析式的求法. 证明一次函数时要紧扣定义，注意比例系数与自变量指数的讨论；求一次函数解析式时，实际是求函数值知识的应用.

证明　(1) 因为　$y+m$ 与 $x-n$ 成正比例，

设 $y+m=k(x-n)$ (k 为常数，且 $k\neq 0$)，

整理得 $y=kx-(kn+m)$.

因为其中 k，m，n 都是常数，

所以 $-(kn+m)$ 也是常数. 又因为 $k\neq 0$，

所以 y 是 x 的一次函数.

解　(2) 因为 $y=kx-(kn+m)$ 是一次函数.

所以设 $b=-(kn+m)$ 可得 $y=kx+b$.

把 $x=-1$，$y=-15$ 和 $x=7$，$y=1$ 代入上式，得

$\begin{cases}-15=-k+b\\1=7k+b\end{cases}$，解得 $k=2$，$b=-13$.

所以所求的解析式为 $y=2x-13$.

激活思维　此例很好地说明了正比例函数与一次函数有着密切的联系，利用换元法，设 $-(kn+m)=b$，可以减少未知数的个数，根据 x，y 的两组对应值便可求出 k 和 b，从而得到解析式，而无需求出 m、n 的值；可见，换元法可以使问题简单化，这是整体思想的运用，在证明一次函数时，要注意比例系数不等于 0.

同类变式　已知 $y=p+z$，这里 p 是一个常数，z 与 x 成正比例，且 $x=2$ 时，$y=1$；$x=3$ 时，$y=-1$. (1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式；(2) 如果 x 的取值范围是 $1\leqslant x\leqslant 4$，求 y 的取值范围.

解　(1) 因为 z 与 x 成正比例，

所以设 $z=kx$ ($k\neq 0$ 且 k 为常数)，则 $y=p+kx$.

由题意可得 $\begin{cases}2k+p=1,\\3k+p=-1.\end{cases}$　所以 $\begin{cases}k=-2,\\p=5.\end{cases}$

所以　$y=-2x+5$.

(2) 根据 $1\leqslant x\leqslant 4$，分别把 $x_1=1$，$x_2=4$ 代入 $y=-2x+5$ 中，$y_1=3$，$y_2=-3$，故 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，有 $-3\leqslant y\leqslant 3$.

【例 4】　(山西省太原市，2001) 某商场计划投入一笔资金采购一批紧俏商品，经过市场调查发现，如果月初出售，可获利 15%，并可用本和利再投资其他商品，到月末又可获利 10%；如果月末出售可获利 30%，但要付出仓储费用 700 元，请问根据商场的资金状况，如何购销获利较多？

思维技巧　这是一道一次函数和不等式知识在经济决策中的应用题. 通过几种方案的比较，结合商场的资金状况，确定购销方案，首先建立函数关系，然后进行比较，还可以用作差法进行比较.

解　方法一　设商场投资 x 元，在月初出售，到月末可获利 y_1 元；在月末出售，可获利 y_2 元；

根据题意，得 $y_1=15\%x+10\%(x+15\%x)=0.265x$，

$y_2=30\%x-700=0.3x-700$.

(1) 当 $y_1=y_2$ 时，$0.265x=0.3x-700$，$x=20000$；

(2) 当 $y_1<y_2$ 时，$0.265x<0.3x-700$，$x>20000$；

(3) 当 $y_1>y_2$ 时，$0.265x>0.3x-700$，$x<20000$；

方法二　由方法一知

$y_1=0.265x$，$y_2=0.3x-700$.

$y_1-y_2=0.625x-(0.3x-700)=-0.035(x-20000)$.

(1) 当 $x<20000$ 时，$y_1>y_2$；

(2) 当 $x=20000$ 时，$y_1=y_2$；

(3) 当 $x>20000$ 时，$y_1<y_2$.

答：当商场投资为 20000 元时，两种销售方式获利相同；当商场投资超过 20000 元时，第二种销售方式获利较多；当商场投资不足 20000 元时，第一种销售方式获利较多.

激活思维　在实际生产经营中，投资、获利是经营者首先关注的问题，其方案往往有许多情况，选择最佳方案需要比较和论证. 解决这类问题，首先要针对实际问题建立合适的数学模型，函数、不等式知识，常常可作为有效的数学模型. 没有一定的分析梳理能力，很难将实际问题转化为数学问题.

同类变式　(福州市，2002；泰州市，2000) 某移动通讯公司开设两种业务："全球通"：先缴 50 元月租费，然后每通话 1 跳次，再付 0.4 元；"神州行"：不缴月租费，每通话 1 跳次，付话费 0.6 元 (本题的通话均指市内通话). 若设一个月内通话 x 跳次，两种方式的费用分别为 y_1 元和 y_2 元.

(跳次：1 min 为 1 跳次，不足 1 min 按 1 跳次计算，如 3.2 min 为 4 跳次)

(1) 写出 y_1、y_2 与 x 之间的函数关系式；

(2) 一个月通话多少跳次时，两种费用相同？

(3) 某人估计一个月内通话 300 跳次，应选择哪种合算？

解　(1) 依题意有 $y_1=50+0.4x$，$y_2=0.6x$.

(2) 当两种费用相同时，$y_1=y_2$，即 $50+0.4x=0.6x$，$x=250$.

(3) 某人一个月估计通话 300 跳次，则

"全球通"费用为 $y_1=50+0.4\times300=170$ (元)，

"神州行"的费用为 $y_2=0.6\times300=180$ (元).

因为 $y_1<y_2$，所以应选择"全球通"合算.

思维拓展　1. (鄂州市，2002) 从鄂州到武汉有新旧两条公路可走. 一辆最多可载乘客 19 人的依维柯汽车在这两条公路上行驶时有关数据如下表：

	路程 (km)	耗油量 (L/100km)	票价 (元/人)	过路费 (元/辆)	油价 (元/L)
新路	60	14	16	20	2.9
旧路	64	10	12	5	2.9

(说明：1L/100km 表示汽车每行驶 100 km 耗油 1 L)

(1) 如果用 y_1 (元)、y_2 (元) 表示汽车从鄂州到武汉分别走新路、旧路时司机的收入,仅就上表数据求出 y_1、y_2 与载客人数 x (人) 之间的函数关系式.

(2) 你认为司机应选择哪条公路才能使收入较多?

解 (1) $y_1=16x-20-2.9\times14\times\frac{60}{100}=16x-44.36$,

$$y_2=12x-5-2.9\times10\times\frac{64}{100}=12x-23.56.$$

(2) $y_1-y_2=4x-20.8$.

当 $y_1-y_2>0$,即 $4x-20.8>0$ 时,$x>5.2$;

当 $y_1-y_2<0$,即 $4x-20.8<0$ 时,$x<5.2$;

因此,当人数为 6 人至 19 人时,选择新路载客收入较多,

当人数不多于 5 人时,选择旧路载客收入较多.

2. (江苏省无锡市,2001) 某果品公司欲请汽车运输公司或火车货运站将 60 t 水果从 A 地运到 B 地. 已知汽车和火车从 A 地到 B 地的运输路程均为 s km,这两家运输单位在运输过程中,除都要收取运输途中每吨每小时 5 元的冷藏费外,要收取的其他费用及有关运输资料由下表给出:

运输工具	行驶速度 (km/h)	运费单位 (元/t·km)	装卸总费用 (元)
汽车	50	2	3000
火车	80	1.7	4620

(1) 请分别写出这两家运输单位运送这批水果所要收取的总费用 y_1 (元) 和 y_2 (元) (用含 s 的式子表示);

(2) 为减少费用,你认为果品公司应选择哪家运输单位运送这批水果更为合算?

(说明:"1 元/t·km"表示"每吨每千米 1 元")

解 (1) 不妨设汽车运输公司的总费用为 y_1,火车货运站收取的总费用为 y_2,则有

$$y_1=3000+2\times60s+5\times\frac{s}{50}\times60=3000+126s\ (\text{元}).$$

$$y_2=4620+1.7\times60s+5\times\frac{s}{80}\times60=4620+105.75s\ (\text{元}).$$

(2) 由 $y_1>y_2$,得 $3000+126s>4620+105.75s$.

解得 $s>80$.

所以当运送路程超过 80 km 时,选择火车货运站运送较合算;

当运送路程等于 80 km 时，选择汽车运输公司或火车货运站运送的费用一样；

当运送路程小于 80 km 时，选择汽车运输公司运送较合算.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) 已知函数 $y=mx^{m^2-m-1}+m^2-1$，当 $m=$_____时，表示 y 是 x 的正比例函数，此时函数关系式为_____；当 $m=$_____时，表示 y 是 x 的一次函数，此时函数解析式为_____.

(2) 如果 $y=(m^2-1)x$ 是正比例函数，则 m 的取值范围是_____.

(3) 某种国库券的年利率为 9.18%，则存满三年的本息和 y 与本金 x 之间的函数关系式为_____.

(4) 一个长 120 m，宽 100 m 的矩形场地要扩建成一个正方形场地，设长增加 x m，宽增加 y m，则 y 与 x 的函数关系式是_____，自变量的取值范围是_____，且 y 是 x 的_____函数.

(5) 已知 $y=(m^2-m)x^{m^2-3m+1}+m-3$ 是一次函数，则 $m=$_____.

(6) 某油箱中有油 20L，油从管道中均匀流出，100 min 可以流尽，则油箱中剩油量 Q(L) 与流出时间 t(min) 之间的函数关系式是_____，自变量 t 的取值范围是_____.

(7) (西安市，2000) 弹簧挂上物体后会伸长，测得一弹簧的长度 y(cm) 与所挂物体的质量 x(kg) 有下面关系：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16

那么弹簧总长 y(cm) 与所挂物体质量 x(kg) 之间的函数关系式为_____.

(8) (聊城市，2000) 某地“市话”的收费标准为：(1) 通话时间在三分钟以内(包括三分钟)，话费为 0.22 元；(2) 通话时间超过三分钟的，超过部分的话费按每分钟 0.22 元计. 在一次通话中，如果通话时间超过三分钟，那么

话费 y (单位:元) 与通话时间 x (x 取整数,单位 min) 之间的函数关系式为_____.

2. 选择题

(1) 下列函数中,正比例函数是(　　)

A. $y=-3x$　　B. $y=-3x+3$

C. $y=-3x^2$　　D. $y=\dfrac{-3}{x}$

(2) 下面各题,成正比例关系的有(　　)

A. 人的身高与体重

B. 正三角形面积与它的边长

C. 买同一种练习本所需的钱数和所买的本数

D. 从甲地到乙地,所用时间和行驶的速度

(3) 下列各函数式,y 与 x 一定成正比例函数关系的是 (其中 k 为常数)(　　)

A. $y=x+k$　　B. $y=kx$

C. $y=\sqrt{k^2+1}\cdot x$　　D. $y=3x^3$

(4) 下列比例式中,变量 y 与 x 成正比例的是(　　)

A. $x:\sqrt{y}=2:3$　　B. $(x+1):2=y:3$

C. $2x:3=3:2y$　　D. $2:3x=3:(-2y)$

(5) 下列命题正确的是(　　)

A. 正方形面积为 S,边长为 a,则 S 与 a 成正比例

B. 正方形面积为 S,周长为 c,则 S 与 c 成正比例

C. 正方形的周长为 c,边长为 a,则 c 是 a 的正比例函数,但不是一次函数

D. 正方形的周长为 c,边长为 a,则 c 是 a 的一次函数,也是正比例函数

(6) 若函数 $y=(3m-2)x^2+(1-2m)x$ (m 为常数) 是正比例函数,则 m 的值为(　　)

A. $m>\dfrac{2}{3}$　　B. $m<\dfrac{1}{2}$　　C. $m=\dfrac{2}{3}$　　D. $m=\dfrac{1}{2}$

(7) (北京市石景山区,2001) 据调查,苹果园地铁自行车存车处在某星期日的存车量为 4000 辆次,其中变速车存车费是每辆一次 0.30 元,普通车存车费是每辆一次 0.20 元.若普通车存车数为 x 辆次,存车费总收入为 y 元,则 y 关于 x 的函数关系式是(　　)

A. $y=0.10x+800$ $(0\leqslant x\leqslant 4000)$

B. $y=0.10x+1200$ $(0\leqslant x\leqslant 4000)$

C. $y=-0.10x+800$ $(0\leqslant x\leqslant 4000)$

D. $y=-0.10x+1200$ $(0\leqslant x\leqslant 4000)$

(8) (山东省威海市,2001) 图 13－42 是温度计的示意图,左边的刻度表示摄氏温度,右边的刻度表示华氏温度,华氏 (℉) 温度 y 与摄氏温度 (℃) x 之间的函数关系式为 (　　)

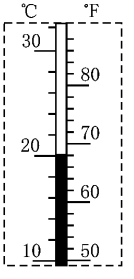


图 13－42

A. $y=\frac{9}{5}x+32$

B. $y=x+40$

C. $y=\frac{5}{9}x+32$

D. $y=\frac{9}{5}x+31$

3. 汽车从距 A 站 300 km 的 B 处,以每小时 60 km的速度开向 A 站. (1) 写出开出时间 t (h) 与汽车离 A 站的距离 s km 之间的函数关系式 (t 是自变量);(2) 写出自变量的取值范围;(3) 汽车开出多久离 A 站为 100 km?

4. 某工人上班后用 15 min 做准备工作,从开始上班到第一小时末共生产了 150 个零件,依此速度生产下去,求生产零件的个数 Q 与时间 t (h) 之间的函数关系式 (假定工作时间为 8 h).

5. 已知 y_1 与 x 成正比例,y_2 是 x 的一次函数,设 $y=y_1+y_2$,当 $x=3$ 时,$y=9$;当 $x=4$ 时,$y=1$. 求 y 与 x 的函数关系式.

6. 某水果批发市场规定,批发苹果不少于 100 kg 时,批发价为 2.5 元/kg. 小王携带现金 3000 元到该市场采购苹果,并以批发价买进. 若购得苹果 x kg,付款后的剩余金额为 y 元,试写出 y 与 x 之间的函数关系式,并指出自变量的取值范围.

7. 某辆摩托车的油箱可装汽油 10 L,原装有汽油 2 L,现再加汽油 x L.

(1) 若每升汽油 2.3 元,求出油箱内的汽油总价 y 与 x 之间的函数关系式,写出 x 的取值范围;

(2) 该摩托车上坡每升汽油可行驶 a km,下坡每升汽油可行驶 b km,若加满油上坡行驶 s km 后,按原路返回原地 (中途不加汽油),s 的最大值是多少?

探究能力测试

8. (绍兴,2002)某学校需刻录一批电脑光盘,若电脑公司刻录,每张需8元(包括空白光盘费);若学校自刻,除租用刻录机需120元外,每张还需成本4元(包括空白光盘费).问刻录这批电脑光盘,到电脑公司刻录费用省,还是自刻费用省?请说明理由.

9. (陕西省,2003)为了学生的身体健康,学校课桌、凳的高度都是按一定的关系科学设计的.小明对学校所添置的一批课桌、凳进行观察研究.于是,他测量了一套课桌与凳子相对应的四档高度,得到如下数据:

档次 / 高度	第一档	第二档	第三档	第四档
凳高 x (cm)	37.0	40.0	42.0	45.0
桌高 y (cm)	70.0	74.8	78.0	82.8

(1) 小明经过对数据探究,发现:桌高 y 是凳高 x 的一次函数,请你求出这个一次函数的关系式;(不要求写出 x 的取值范围)

(2) 小明回家后,测量了家里的写字台和凳子,写字台的高度为77 cm,凳子的高度为43.5 cm,请你判断它们是否配套;说明理由.

10. (郴州市,2003)某市宽带上网的收费有流量方式(按在网上所接收和发送的信息量收费)、时长方式(按在网上的时间收费)等几种不同的方式.其中流量方式的收费标准是:基本月租费75元,赠送900 M流量(即每月流量在900 M以内的不再收费).超过900 M的,超过部分按流量分段收费,具体规定为:流量不超过400 M时,每兆收费 a 元;超过400 M时,不超过部分每兆收费 a 元,超过部分每兆收费 c 元.(兆(M)是信息量的计量单位)某单位今年4、5月份上网的流量和费用如下表:

月 份	流量(M)	费用(元)
4	1200	135
5	1400	165

(1) 求 a、c 的值;

(2) 设该单位某月上网的流量为 x (M),费用为 y (元),写出流量超过1300M时,y 与 x 之是的函数关系式.

13.5　一次函数的图象和性质

学习探究分析

重点　一次函数的图象和性质及待定系数法.

难点　一次函数性质的理解和应用.

探究点　一次函数的图象和性质一直是中考考查的热点,应用一次函数的图象与性质解决实际问题的题目越来越多.其中大量渗透了数形结合思想、分类思想、函数思想、方程思想等,对一次函数的图象和性质有较高的要求.

学习方法技巧

掌握一次函数的图象与性质是学好本节的前提,具有一定的阅读能力、识图、识表能力和收集处理信息能力,才能正确处理好文字与图象、图表等形式间的关系,才能学会用数学的眼光去认识世界,用数学方法去分析周围的问题,把实际问题转化为数学问题.

能力升级捷径

【例 1】　已知一次函数 $y=(2m+4)x+(3-n)$.求:(1) m、n 是什么数时,y 随 x 的增大而增大;(2) m、n 是什么数时,函数图象与 y 轴的交点在 x 轴的下方;(3) m,n 是什么数时,函数的图象经过原点;(4) 若 $m=-1$,$n=2$ 时,求此一次函数的图象与两个坐标轴的交点坐标;(5) 若图象经过一、二、三象限,求 m、n 的取值范围.

思维技巧　形如 $y=kx+b$ ($k\neq0$,k,b 为常数) 的函数是一次函数,它的图象是一条直线,有了这一结论才产生了用两点法画一次函数图象的特殊方法.一次函数的性质由两个待定字母 k、b 来决定.因此解答此题主要就是对 k、b 的符号进行研究.

解　(1) 因为 y 随 x 的增大而增大,所以 $2m+4>0$,解得 $m>-2$.

所以当 $m>-2$,n 是任何实数时,y 随 x 的增大而增大.

(2) 因为图象与 y 的交点在 x 轴的下方,

所以 $\begin{cases}2m+4\neq0,\\3-n<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m\neq-2,\\n>3.\end{cases}$

所以当 $m\neq-2$ 且 $n>3$ 时,图象与 y 轴的交点在 x 轴下方.

(3) 因为图象经过原点,所以 $\begin{cases}2m+4\neq0,\\3-n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m\neq-2,\\n=3.\end{cases}$

所以当 $m\neq -2$ 且 $n=3$ 时,图象经过原点.

(4) 把 $m=-1$,$n=2$ 代入 $y=(2m+4)x+(3-n)$ 中得,$y=2x+1$.

令 $x=0$,解得 $y=1$,所以图象与 y 轴交点为 $(0,1)$;

令 $y=0$,解得 $x=-\frac{1}{2}$,所以图象与 x 轴的交点为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

(5) 因为图象经过一、二、三象限,

所以 $\begin{cases}2m+4>0,\\3-n>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m>-2,\\n<3.\end{cases}$

当 $m>-2$ 且 $n<3$ 时,图象经过一、二、三象限.

激活思维 初接触具体函数的图象,要从图象上观察函数的性质是比较困难的,可以借助于图象作一些数、形转化的练习.对一次函数而言,牢记 k、b 的符号是关键.

同类变式 已知一次函数 $y=(3-k)x-2k^2+18$.

(1) k 为何值时,它的图象经过原点;

(2) k 为何值时,它的图象经过 $(0,-2)$;

(3) k 为何值时,它的图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方;

(4) k 为何值时,它的图象平行于直线 $y=-x$;

(5) k 为何值时,y 随 x 的增大而减小.

解 (1) 由 $\begin{cases}-2k^2+18=0\\3-k\neq 0\end{cases}\Rightarrow k=-3$,即 $k=-3$ 时,直线过原点;

(2) 将 $(0,-2)$ 代入 $y=(3-k)x-2k^2+18$,得

$-2k^2+18=-2$,解得 $k=\pm\sqrt{10}$.

所以当 $k=\pm\sqrt{10}$ 时,直线经过点 $(0,-2)$;

(3) 当 $-2k^2+18>0$,即 $-3<k<3$ 时,直线与 y 轴的交点在 x 轴上方;

(4) 由 $\begin{cases}3-k=-1\\-2k^2+18\neq 0\end{cases}\Rightarrow k=4$.

所以当 $k=4$ 时,直线 $y=(3-k)x-2k^2+18$ 与直线 $y=-x$ 平行.

(5) 当 $3-k<0$ 即 $k>3$ 时,y 随 x 的增大而减小.

思维拓展 一次函数 $y=(m^2-4)x+(1-m)$ 和 $y=(m-1)x+m^2-3$ 的图象分别与 y 轴交于点 P 和 Q,若 P、Q 关于 x 轴对称,则 $m=$_____.

解 因为点 P 与点 Q 关于 x 轴对称,所以 $1-m$ 与 m^2-3 互为相反数.

即 $(1-m)+(m^2-3)=0$,

解得 $m_1=-1$,$m_2=2$.

又由一次函数的定义可知 $\begin{cases}m^2-4\neq 0,\\1-m\neq 0.\end{cases}$ 即 $m\neq\pm 2$，且 $m\neq 1$，

故 m 的值只能是 -1.

【例 2】　确定下列一次函数解析式.

(1) 过点 $(0,-1)$ 和 $(2,1)$；

(2) 图象平行于正比例函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象，且过点 $(4,7)$；

(3) 图象过点 $P(0,-2)$，且与两坐标轴截得的直角三角形的面积为 3.

思维技巧　确定一次函数解析式，常用待定系数法，其一般过程，可简称为：一列，二化，三解，四还原. 一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 中含有两个待定字母 k、b，设法建立含 k、b 的两个方程，解方程组即可.

解　(1) 设所求解析式为 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$，依条件有 $\begin{cases}-1=0+b,\\1=2k+b.\end{cases}$

解得 $b=-1$，$k=1$.

所以　$y=x-1$ 为所求.

(2) 一次函数的图象平行于正比例函数

$y=\frac{1}{2}x$ 的图象，

所以可设一次函数的解析式为

$y=\frac{1}{2}x+b$.

又因为点 $(4,7)$ 在其上，所以有 $7=\frac{1}{2}\times 4+b$，得 $b=5$.

故 $y=\frac{1}{2}x+5$ 为所求.

(3) 设一次函数的解析式为 $y=kx+b$，如图 13－43，由于一次函数的图象过点 $P(0,-2)$，得 $b=-2$，所以这个一次函数的解析式为 $y=kx-2$.

令 $y=0$，得 $x=\frac{2}{k}$，则一次函数的图象和 x 轴交于点 $\left(\frac{2}{k},0\right)$. 由它与两坐标轴截得的直角三角形面积为 3，得 $\frac{1}{2}\times|-2|\times\left|\frac{2}{k}\right|=3$，得 $k=\pm\frac{2}{3}$.

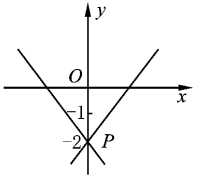


图 13－43

所以这个一次函数的解析式为 $y=\frac{2}{3}x-2$

或 $y=-\frac{2}{3}x-2$.

激活思维 待定系数法确定函数的解析式是本章的重要内容之一,应熟练掌握,本例前两题揭示了这类问题常见的两种题型的解法,第(3)题带有综合性,条件比较隐蔽,采用了数形结合的方法进行分析,在表示三角形面积时,容易忽视对$\frac{2}{k}$取绝对值,而致失去一解,因此,解题时要注意思维的严谨性.

同类变式 如图 13-44,一次函数 $y=kx+b$ 的图象过 $A(2,4)$,$B(0,2)$ 两点,且与 x 轴相交于点 C.

(1) 求这个一次函数的解析式.

(2) 求 $\triangle AOC$ 的面积.

解 (1) 将点 $A(2,4)$,$B(0,2)$ 两点坐标代入 $y=kx+b$,得

$\begin{cases}4=2k+b,\\2=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=2.\end{cases}$

所以该一次函数的解析式为 $y=x+2$.

(2) 令 $y=0$,由 $y=x+2$ 求得 $x=-2$,

所以点 C 的坐标为 $(-2,0)$.

所以 $OC=|-2|=2$.

作 AD 垂直 x 轴于 D,则 $AD=|y_A|=4$,

所以 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.

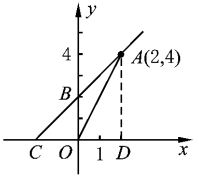


图 13-44

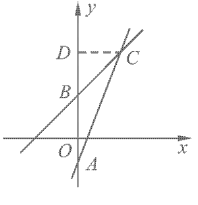


图 13-45

思维拓展 求直线 $y=3x-2$ 与直线 $y=2x+3$ 及 y 轴所围成的图形的面积.

解 如图 13-45,解方程组 $\begin{cases}y=3x-2,\\y=2x+3.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=5,\\y=13.\end{cases}$

所以交点为 $C(5,13)$.

直线 $y=3x-2$ 与直线 $y=2x+3$ 分别与 y 轴交点为 $A(0,-2)$、$B(0,3)$.

所以 $AB=5$，高 $CD=5$，所以 $S_{\triangle ABC}=12.5$.

【例 3】　如图 13－46，已知直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A 和点 B，以 AB 为边在第一象限作等边 $\triangle ABC$，如果在第一象限内有一点 $P\left(m,\frac{1}{2}\right)$，且 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积，求 m 的值和点 C 的坐标.

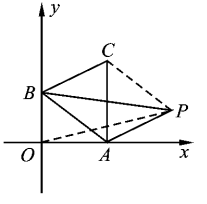


图 13－46

思维技巧　由直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$，易求出 A、B 两点的坐标，进而得知 $\angle OAB=30°$，又 $\triangle ABC$ 为等边三角形，利用三角函数知识解直角三角形求解，或由 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$，可知点 P 在过点 C 且与直线 AB 平行的直线上，先求出 C 点坐标，再求直线 PC 的解析式，最后代入求值.

解法一　由 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 知 $A(\sqrt{3},0)$，$B(0,1)$，

$AB=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

所以 $S_{\triangle APB}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

连结 OP，则 $S_{\triangle APB}=S_{\triangle POB}+S_{\triangle POA}-S_{\triangle AOB}$

即 $\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 1\cdot m+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1$，

解得 $m=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

又因为　$OB=1$，$AB=2$，$OB=\frac{1}{2}AB$，

所以 $\angle BAO=30°$，而 $\angle BAC=60°$，所以 $\angle CAO=90°$，

所以点 C 坐标是 $(\sqrt{3},2)$.

解法二　因为　$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BAC}$，可知点 P 在过点 C 且与直线 AB 平行的直线上.

因为 $A(\sqrt{3},0)$，$B(0,1)$.

又因为 $OA=\sqrt{3}$，$OB=1$，$AB=2$.

易知$\angle BAO=30°$，

因为$\triangle ABC$是等边三角形，

所以$\triangle BAC=60°$.

因为$\angle OAC=90°$，所以C点坐标是$(\sqrt{3},2)$.

设直线PC的解析式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$，把C点坐标代入得$2=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+b$，

所以$b=3$.

所以直线PC的解析式是$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$.

把$x=m$，$y=\frac{1}{2}$代入得，$m=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

注 本题也可直接求出PC与y轴交点D的坐标是$(0,3)$，直接写出PC的解析式$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$.

激活思维 本例用了多种方法解决一次函数问题，解法1利用了面积相等，建立m的方程，求出m的值；解法2利用了轨迹的思想，点P在过C点与AB平行的直线上，先求出C点坐标，再求直线PC的解析式，最后代入求值，对同一问题从不同角度去观察，找出不同的解决问题的方法，更能锻炼创新思维的能力.

同类变式 (陕西咸阳市，2000)已知一次函数$y=kx+b$ $(k\neq0)$的图象与x轴交点A的横坐标是$\sqrt{16}$的算术平方根，图象与y轴交点B的纵坐标是不等式组$\begin{cases}5x-4>3(x-4)\\x+2<0\end{cases}$的整数解.

(1) 求该一次函数的解析式，并画出其图象；

(2) 设点O是坐标原点，以O为圆心的圆的半径为r，当r取何值时，直线AB与$\odot O$相切？

解 (1) 依题意知$A(2,0)$.

由$\begin{cases}5x-4>3(x-4)\\x+2<0\end{cases}$，解得$-4<x<-2$，

即$B(0,-3)$.

所以经过$A(2,0)$，$B(0,-3)$两点的直线解析式为$y=\frac{3}{2}x-3$.

图象略.

(2) 由(1)知$OA=2$，$OB=3$，$AB=\sqrt{13}$.

过 O 点作 $OC\perp AB$，

由于 $\frac{1}{2}AO\cdot BO=\frac{1}{2}AB\cdot OC$，

所以 $OC=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\frac{6}{\sqrt{13}}=\frac{6}{13}\sqrt{13}$.

因此当 $r=\frac{6}{13}\sqrt{13}$ 时，直线 AB 与 $\odot O$ 相切.

【例 4】　(黑龙江省，2002) 某气象研究中心观测一场沙尘暴从发生到结束的全过程. 开始时风速平均每小时增加 2 km/h，4 h 后沙尘暴经过开阔荒漠地，风速变为平均每小时增加 4 km/h. 一段时间，风速保持不变. 当沙尘暴遇到绿色植被区时，其风速平均每小时减 1 km/h，最终停止. 结合风速与时间的图象 (如图 13－47) 回答下列问题：

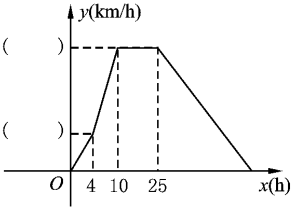


图 13－47

(1) 在 y 轴左侧括号内填入相应的数值；

(2) 沙尘暴从发生到结束，共经过多少小时？

(3) 求出当 $x\geqslant 25$ 时，风速 y (km/h) 与时间 x (h) 之间的函数关系式.

思维技巧　这是一道一次函数图象信息题. 解决这类问题，要从图象提供的已知条件中出发经过周密观察，认真分析，运用一次函数相关知识，找到解题途径，读懂图象是解题关键.

解　(1) 8，32.

(2) 由题意得 $\frac{32}{1}=32$ (h)，

所以 $25+32=57$ (h).

所以沙尘暴从发生到结束共经过 57 h.

(3) 设所求函数解析式为 $y=kx+b$，

由图象知，该函数图象过点 (25，32) 和 (57，0) 则有 $\begin{cases}25k+b=32,\\57k+b=0,\end{cases}$ 解之，得 $k=-1$，$b=57$. 所以 $y=-x+57$ $(25\leqslant x\leqslant 57)$.

激活思维 一次函数图象信息题类型很多，内容很丰富. 读出有关信息，对观察能力、分析能力及知识的掌握都有较高的要求. 而分段函数图象的大量出现，使相关知识点增多，综合性增强，难度加大，对培养思维能力十分有益，对学生的综合能力提出了更高要求.

同类变式 (山东淄博，2002) 一家小型放影厅的赢利额 y (元) 同售票数 x 之间的关系如图 13－48 所示. 保险部门规定：超过 150 人时，要缴纳公安消防保险费 50 元. 试根据关系图回答下列问题：

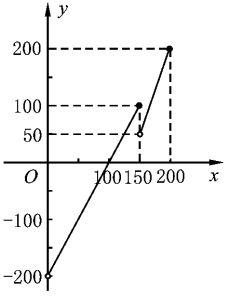


图 13－48

(1) 当售票数 x 满足 $0<x\leqslant 150$ 元，赢利额 y (元) 与 x 之间的函数关系式是_____.

(2) 当售票数 x 满足 $150<x\leqslant 200$ 元，赢利额 y (元) 与 x 之间的函数关系式是_____.

(3) 当售票数 x 为_____时，不赔不赚；当售票数 x 满足_____时，放影厅要赔本；若放影厅要获得最大利润 200 元，此时售票数 x 应为_____.

(4) 当售票数 x 满足_____时，此时利润比 $x=150$ 时多.

注：将结果直接填在题中横线上，不要求写解答过程.

解 (1) 由图象知，当 $0<x\leqslant 150$ 时，函数图象过点 (150，100)，(0，－200)，设此一次函数解析式为 $y=kx+b$，用待定系数法不难求出 $y=2x-200$ ($0<x\leqslant 150$ 的整数).

(2) 从图象观察知，函数 $y=mx+n$ 经过 (150，50)，(200，200) ($150<x\leqslant 200$ 的整数)

即 $\begin{cases}50=150m+n,\\200=200m+n.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=-400.\end{cases}$

所以 $y=3x-400$ ($150<x\leqslant 200$ 的整数).

(3) 由图象上,在 $y=2x-200$ 中,令 $y=0$,$x=100$,

所以当 $x=100$ 时,不赔不赚.

当 $0\leqslant x<100$ 时,$y<0$,放影厅要赔本.

要放影厅获最大利润 200 元时,$x=200$.

(4) 由图象知,要使利润比 $x=150$ 时多,即 $100<y\leqslant 200$,此时由 $y=3x-400$ 得 $100<3x-400\leqslant 200$,

所以 $167\leqslant x\leqslant 200$. ($x$ 为整数)

【例 5】　(河北省,2001) 阅读理解题

甲乙两辆汽车在一条公路上匀速行驶,为了确定汽车的位置,我们用数轴 Ox 表示这条公路,原点 O 为零千米路标 (如图 13-49) 并作如下约定:

①速度 $v>0$,表示汽车向数轴正方向行驶;

速度 $v<0$,表示汽车向数轴负方向行驶;

速度 $v=0$,表示汽车静止.

②汽车位置在数轴上的坐标 $s>0$,表示汽车位于零千米路标的右侧;

汽车位置在数轴上的坐标 $s<0$,表示汽车位于零千米路标的左侧;

汽车位置在数轴上的坐标 $s=0$,表示汽车恰好位于零千米路标处.

遵照上述约定,将这两辆汽车在公路上匀速行驶的情况,以一次函数图象的形式画在了同一直角坐标系中,如图 13-50.

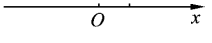


图 13-49

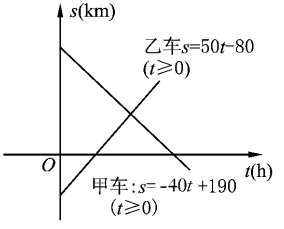


图 13-50

请解答下列问题:

(1) 就这两个一次函数图象所反映的两汽车在这条公路上行驶的状况填写如下表格.

问项 / 车别 / 结论	行驶方向	速度的大小 (km/h)	出发前的位置
甲车			
乙车			

(2) 甲乙两车能否相遇？如能相遇，求相遇时的时刻及在公路上的位置 如不能相遇，请说明理由.

思维技巧　此题是一道阅读理解题，文字篇幅较长，既有图象，又有表格，仔细阅读，弄清题意，遵守约定是解题的关键.

解　(1) 甲车：x 轴负方向 (向左)，40，零千米路标右侧 190 km 处；

乙车：x 轴正方向 (向右)，50，零千米路标左侧 80 km 处.

(2) 甲乙两车能相遇.

设经过 t h 两车相遇，由 $\begin{cases} s=-40t+190, \\ s=50t-80, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} t=3, \\ s=70. \end{cases}$

所以经过 3 h 两车相遇，相遇在零千米路标右侧 70 km 处.

激活思维　这是一道集文字、图象、表格于一体的阅读理解题. 仔细阅读文字，正确领会题意，正确识图，找出内在联系，方能填写表格，探究甲乙两车相遇的“可能性”或“存在性”，需要自觉运用数形结合思想，对问题进行分析、转化、探索和尝试. 题目的情景虽较熟悉，设问也不很难，但使思维得到了充分地暴露，体现了一次函数的图象与性质应用的广泛性.

同类变式　(广西，2001) 广西各城镇打市内电话都按时收费，并于 2001 年 3 月 21 日起对收费办法作了调整. 调整前的收费办法：以 3 min 为计时单位 (不足 3 min 按 3 min 计)，每个计时收 0.2 元；调整后的收费方法：3 min 内 (含 3 min) 收 0.2 元，以后每加 1 min 加收 0.1 元.

(1) 根据调整后的收费办法，求电话费 y (元) 与通话时间 t (min) 之间的函数关系式 ($t>3$ 时设 t min 表示正整数).

提示：分 $t\leqslant 3$ 和 $t>3$ 两种情况.

填空：①当 $t\leqslant 3$ 时，$y=$_____；

②当 $t>3$ 时 (t 表示正整数)，$y=$_____.

(2) 对 (1)，在图 13－51 中，试画出 $0<t\leqslant 6$ 的函数的图象.

(3) 就 $0<t\leqslant 6$，求 t 为何值时，调整前和调整后的电话费相同，并求出其相应的收费 y (元).

根据题意，(1) 调整后的收费方法，3min 内 (含 3 min) 收费为 0.2 元，超过

3 min，收费 $y=0.2+0.1(t-3)$．⑵ 由于是分段函数，画函数图象时一要注意自变量 t 的取值范围，二要注意 t 在 $3<t\leqslant 6$ 内取整，因此图象是几个点．

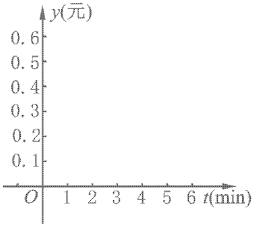


图 13－51

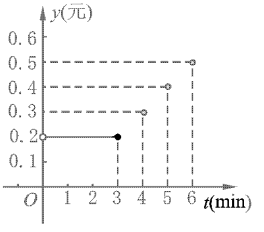


图 13－52

⑶ 显然 $t\leqslant 3$ 时，调整前和调整后收费均为 0.2 元，当 $3<t\leqslant 6$ 时，调整前收费为 0.4 元，调整后按 $y=0.2+0.1(t-3)$ 计算，即 $0.4=0.2+0.1(t-3)$

所以 $t=5$．

解　⑴ ①0.2；②$0.2+0.1(t-3)=0.1t-0.1$．

⑵ 如图 13－52．

⑶ 当 $t\leqslant 3$ 时，$y=0.2$；当 $t=5$ 时，$y=0.4$．

思维拓展　1．（十堰市，2002）十堰市广电局与长江证券公司联合推出广电宽带网业务，用户通过宽带网可以享受新闻点播、点击武当、影视欣赏、股市大户室等项服务．其上网费用的方式有：方式一，每月 80 元包干；方式二，每月上网时间 x（h）与上网费 y（元）的函数关系用图 13－53 中的折线段表示；方式三，以 0 为起点，每小时收费 1.6 元，月收费不超过 120 元．若设一用户每月上网 x h，月上网总费为 y 元．

⑴ 根据图 13－53，写出方式二中 y 与 x 的函数关系式（$0\leqslant x\leqslant 100$）；

⑵ 试写出方式三中，y 与 x 的函数关系式（$0\leqslant x\leqslant 75$）；

⑶ 试问此用户每月上网 60 h，选用哪种方式上网，其费用最少？

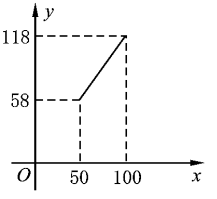


图 13－53

解　⑴ 由图可知

当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，$y=58$；

当 $50\leqslant x\leqslant 100$ 时，设 $y=kx+b$，

因为直线过 (50,58),(100,118) 两点,

所以 $\begin{cases}58=50k+b;\\118=100k+b;\end{cases}$

所以 $k=1.2, b=-2.$

所以 $y=1.2x-2\ (50\leqslant x\leqslant 100).$

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 75$ 时,$y=1.6x.$

(3) 当 $x=60$ 时,按方式一,其费用为 80 元;按方式二,其费用为 $y=1.2\times 60-2=70$ 元;按方式三,其费用为 $y=1.6\times 60=96$ 元.

因为 $96>80>70$,所以此用户应选择方式二上网,其费用最少.

2. (甘肃省,2001) 某市 20 位下岗职工在近郊承包 50 亩土地办农场.这些地可种蔬菜、烟叶或小麦,种这几种农作物每亩地所需职工数和产值预测如下:

作物品种	每亩地所需职工数	每亩地预计产值
蔬菜	$\frac{1}{2}$	1100 元
烟叶	$\frac{1}{3}$	750 元
小麦	$\frac{1}{4}$	600 元

请你设计一个种植方案,使每亩地都种上农作物,20 位职工都有工作,且使农作物预计总产值最多.

解 设种植蔬菜 x 亩,烟叶 y 亩,则小麦有 $(50-x-y)$ 亩.

依题意,有 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}(50-x-y)=20.$

整理,得 $y=90-3x.$

若设预计总产量为 W,则

$$W=1100x+750y+600(50-x-y)$$
$$=500x+150y+30000.$$

把 $y=90-3x$ 代入,得 $W=43500+50x$

又因为 $y=90-3x\geqslant 0, 50-x-y\geqslant 0,$

所以 $20\leqslant x\leqslant 30$,且为偶数.

由一次函数的性质可知,当 $x=30$ 时,$y=0, 50-x-y=20, W_{最大}=45000$ (元).

此时种蔬菜的人数为 15 人,种小麦的人数为 5 人.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (甘肃省,2003)一个函数的图象过点(1,2),且 y 随 x 的增大而增大,则这个函数的解析式为_____(任写一个).

(2) (兰州市,2003)一次函数图象经过点 $P(2,4)$、$Q(-1,5)$,则其函数解析式为_____.

(3) (黑龙江省,2003)已知一次函数 $y=kx+2$,请你补充一个条件:_____,使 y 随 x 的增大而减小.

(4) (济南市,2003)一次函数 $y=kx+b$ 的自变量的取值范围是 $-3\leqslant x\leqslant 6$,相应函数值的取值范围是 $-5\leqslant y\leqslant -2$,则这个函数的解析式为_____.

(5) (天津市,2000)若直线 $y=-x+a$ 和直线 $y=x+b$ 的交点坐标为 $(m,8)$,则 $a+b=$_____.

(6) (甘肃省,2001)长途汽车客运公司规定旅客可随身携带一定重量的行李,如果超过规定,则需要购买行李票,行李费用 y(元)是行李重量 x(kg)的一次函数,其图象如图 13-54 所示,则 y 与 x 之间的函数关系式是_____,自变量 x 的取值范围是_____.

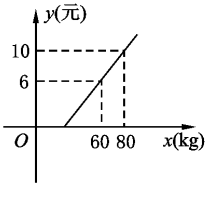


图 13-54

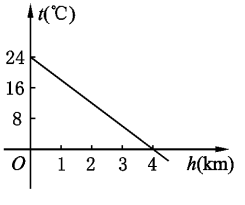


图 13-55

(7) (大连市,2000)在空中,自地面算起,每升高 1 km,气温下降若干度(℃).某地空中气温 t(℃)与高度 h km 间的函数的图象如图 13-55,观察图象可知:该地地面气温为_____℃,当高度 h _____km 时,气温低于 0 ℃.

(8) (吉林省,2001)小刚、爸爸、爷爷同时从家中出发到达同一目的地后又立即返回.小刚去时骑自行车,返回时步行;爷爷去时步行,返回时骑自行车;爸爸往返都步行.三人步行的速度不等,小刚与爷爷骑自行车的速度相

等，每个人走的路程与时间的关系分别是图 13－56 中的一个，走完一个往返，小刚用_____min，爸爸用_____min，爷爷用_____min.

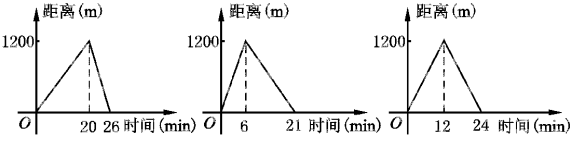


图 13－56

⑼ (黑龙江省，2002) 某一次函数的图象经过点 (－1，2)，且函数 y 的值随自变量 x 的增大而减小，请你写出一个符合上述条件的函数关系式：_____.

⑽ (济南市，2002) 如图 13－57，已知直线 $y=-x+6$ 与 x 轴交于点 A、与 y 轴交于点 B，点 P 为 x 轴上可移动的点，且点 P 在点 A 的左侧，$PM\perp x$ 轴，交直线 $y=-x+6$ 于点 M. 有一个动圆 O'，它与 x 轴、直线 PM 和直线 $y=-x+6$ 都相切，且在 x 轴的上方，当 $\odot O'$ 与 y 轴也相切时，点 P 的坐标是_____.

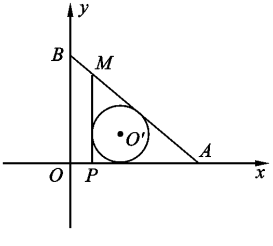


图 13－57

2．选择题

⑴ (甘肃省，2003) 结合正比例函数 $y=4x$ 的图象回答：当 $x>1$ 时，y 的取值范围是 (　　)

A. $y<1$　　B. $1\leqslant y<4$　　C. $y=4$　　D. $y>4$

(2) (杭州市,2003)一次函数 $y=x-1$ 的图象不经过(　　)

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

(3) (甘肃省,2003)在地表以下不太深的地方,温度 y(℃)与所处的深度 x(km)之间的关系可以近似用关系式 $y=35x+20$ 表示,这个关系式符合的数学模型是(　　)

A. 正比例函数　B. 反比例函数

C. 二次函数　D. 一次函数

(4) (山东省,2003)若 $A(a,6)$、$B(2,a)$、$C(0,2)$ 三点在同一条直线上,则 a 的值为(　　)

A. 4 或 -2　B. 4 或 -1　C. -4 或 1　D. -4 或 2

(5) (淄博市,2003)国际上通常用恩格尔系数(记作 n)来衡量一个国家和地区人民生活水平的状况,它的计算公式:$n=\frac{x}{y}$(x:家庭食品支出总额,y:家庭消费支出总额),各种家庭类型的 n 如下表:

家庭类型	贫困	温饱	小康	富裕
n	$n>60\%$	$50\%<n\leqslant 60\%$	$40\%<n\leqslant 50\%$	$30\%<n\leqslant 40\%$

已知王先生居住地 2002 年比 1997 年食品价格上升了 5%,该家庭在 2002 年购买食品和 1997 年完全相同的情况下多支出 200 元,并且 $y=2x+3600$(单位:元),则该家庭 2002 年属于(　　)

A. 贫困　B. 温饱

C. 小康　D. 富裕

(6) (安徽省,2003)如图 13－58,在 $\square ABCD$ 中,$AC=4$,$BD=6$,P 是 BD 上任一点,过 P 作 $EF/\!/AC$,与平行四边形的两条边分别交于点 E、F,设 $BP=x$,$EF=y$,则能反映 y 与 x 之间关系的图象为(　　)

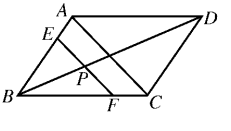


图 13－58

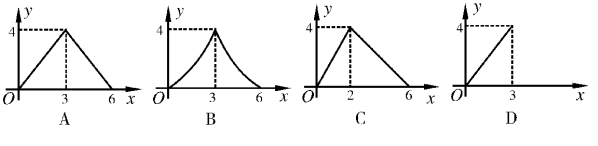


图 13－59

(7) (北京市,2003)三峡工程在2003年6月1日至6月10日下闸蓄水期间,水库水位由106 m升至135 m,高峡平湖初现人间.假设水库水位匀速上升,那么下列图象中,能正确反映这10天水位h(m)随时间t(天)变化的是(　　)

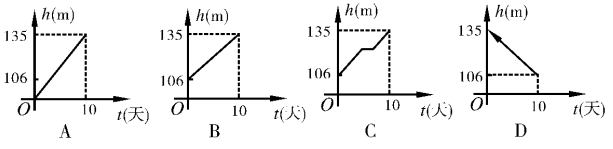


图13－60

(8) (青岛市,2003)一列火车从青岛站出发,加速行驶一段时间后开始匀速行驶,过了一段时间,火车到达下一个车站,乘客上下车后,火车又加速,一段时间后再次开始匀速行驶,图13－61中(　　)图可以近似地刻画出火车在这段时间内的速度变化情况.

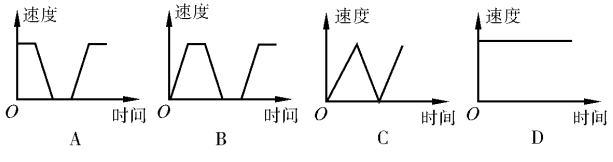


图13－61

(9) (常州市,2003)某人骑车外出,所行的路程s(km)与时间t(h)的函数关系如图13－62所示,现有下列四种说法:

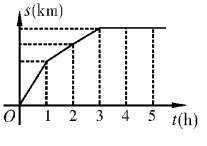


图13－62

① 第3小时中的速度比第1小时中的速度快;

② 第3小时中的速度比第1小时中的速度慢;

③ 第3小时后已停止前进;

④ 第3小时后保持匀速前进.

其中说法正确的(　　)

A. ②③　　B. ①③　　C. ①④　　D. ②④

(10) (陕西省,2003)星期天晚饭后,小红从家里出去散步,图13－63描述了她散步过程中离家的距离s(m)与散步所用时间t(min)之间的函数关系.依据图像,下面描述符合小红散步情景的是(　　)

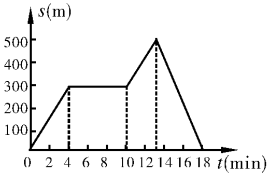


图 13－63

A. 从家出发，到了一个公共阅报栏，看了一会儿报，就回家了

B. 从家出发，到了一个公共阅报栏，看了一会儿报后，继续向前走了一段，然后回家了

C. 从家出发，一直散步（没有停留），然后回家了

D. 从家出发，散了一会儿，就找同学去了，18 min 后才开始返回

(11) (烟台市，2003) 开发区某消毒液生产厂家自 2003 年初以来，在库存为 m ($m>0$) 的情况下，日销售量与产量持平，自 4 月底抗击“非典”以来，消毒液需求量猛增，在生产能力不变的情况下，消毒液一度脱销，图 13－64 中表示 2003 年初至脱销期间，时间 t 与库存量 y 之间函 数关系的图象是（　　）

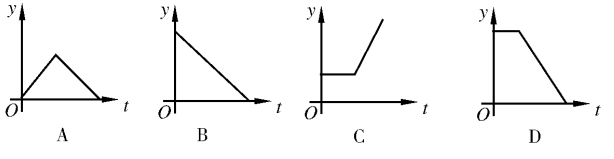


图 13－64

(12) (海南省，2003) 某芒果园的果树上挂满了成熟的芒果，一阵微风吹过，一个熟透的芒果从树上掉了下来. 图 13－65 中四个图象，能表示芒果下落过程中速度与时间变化关系的图象只可能是（　　）

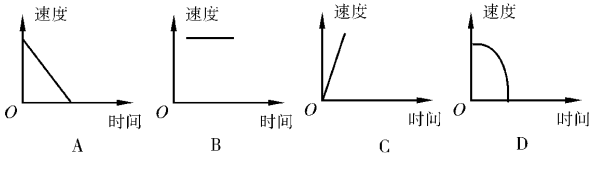


图 13－65

(13) (河北省,2003)向放在水槽底部的烧杯注水(流量一定,注满烧杯后,继续注水,直至注满水槽.水槽中水面上升高度 h 与注水时间 t 之间的函数关系,图象大致是图 13－66 中的(　　)

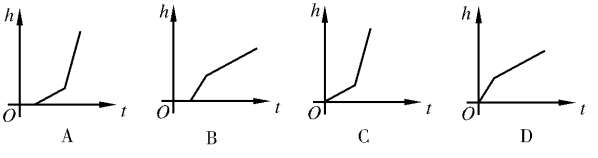


图 13－66

(14) (武汉市,2003)小李以每千克 0.8 元的价格从批发市场购进若干千克西瓜到市场去销售,在销售了部分西瓜之后,余下的每千克降低 0.4 元,全部售完.销售金额与卖瓜的千克数之间的关系如图 13－67 所示,那么小李赚了(　　)

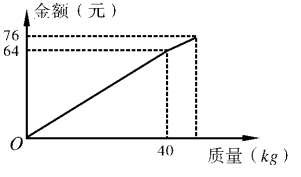


图 13－67

A. 32 元　　B. 36 元　　C. 38 元　　D. 44 元

(15) (河南省,2001)已知一次函数 $y=2x+a$ 与 $y=-x+b$ 的图象都经过 $A(-2,0)$,且与 y 轴分别交于 B、C 两点,则 $\triangle ABC$ 的面积为(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

3. (三明市,2003)已知 $y-1$ 与 x 成正比例,且 $x=2$ 时,$y=5$,写出 y 与 x 之间的函数关系式;当 $x=-1$ 时,求 y 的值;当 $y=0$ 时,求 x 的值.

4. (贵阳市,2003)已知正比例函数 $y=k_1x$ 的图象与一次函数 $y=k_2x-9$ 的图象交于点 $P(3,-6)$.

(1) 求 k_1、k_2 的值;

(2) 如果一次函数与 x 轴交于点 A,求 A 点的坐标.

5. (上海市,2003) 如图 13－68,已知:一条直线经过点 $A(0,4)$、$B(2,0)$,将这条直线向左平移与 x 轴负半轴、y 轴负半轴分别交于点 C、D,使 $DB=DC$.

求:以直线 CD 为图象的函数解析式.

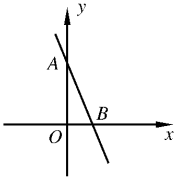


图 13－68

6. (山西省太原市,2002) 某城市为了尽快改善职工住房条件,积极鼓励个人购房和积累建房基金,决定住公房的职工按基本工资的高低交纳建房公积金.办法如下:

每月基本工资(元)	交纳公积金比率(%)
100 元以下(含 100 元)	不交纳
100 元至 200 元(含 200 元)	交纳超过 100 元部分的 5%
200 元至 300 元(含 300 元)	100 元至 200 元部分交纳 5%,超过 200 元以上部分交纳 10%
300 元以上	100 元至 200 元部分交纳 5%,200 元至 300 元部分交纳 10%,超过 300 元以上部分交纳 15%

(1) 某职工每月交纳公积金 72 元,求他每月的基本工资;

(2) 设每月基本工资为 x 元,交纳公积金后实得金额为 y 元,试写出当 $100<x\leqslant 200$ 时,y 与 x 之间的关系式.

7. (山东省济南市,2002) 科学家通过实验探究出一定质量的某气体在体积不变的情况下,压强 p(kPa) 随温度 t(℃) 变化的函数关系式是 $p=kt+b$,其图象是如图 13－69 所示的射线 AB.

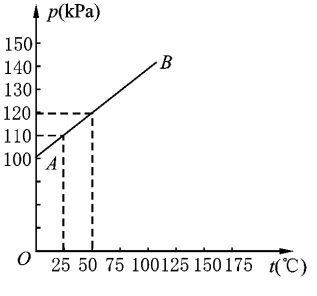


图 13－69

(1) 根据图象求出上述气体的压强 p 与温度 t 的函数关系式；

(2) 求出当压强 p 为 200kPa 时，上述气体的温度.

8. (吉林省，2002) 一农民带了若干千克自产的土豆进城出售，为了方便，他带了一些零钱备用，按市场价售出一些后，又降价出售，售出土豆千克数与他手中持有的钱数 (含备用零钱) 的关系如图 13－70 所示，结合图象回答下列问题：

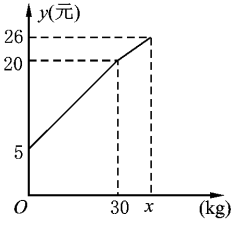


图 13－70

(1) 农民自带的零钱是多少？

(2) 降价前他每千克土豆出售的价格是多少？

(3) 降价后他按每千克 0.4 元将剩余土豆售完，这时他手中的钱 (含备用零钱) 是 26 元，问他一共带了多少千克土豆.

9. (四川内江，2002) 汽车的油箱中的余油量 Q (L) 是它行驶的时间 t (h) 的一次函数，某天该汽车外出，刚开始行驶时，油箱中有油 60 L，行驶了 4 h 后，发现已耗油 20 L.

(1) 求油箱中的余油 Q (L) 与行驶时间 t (h) 的函数关系式.

(2) 求这个实际问题中时间 t 的取值范围，并在直角坐标系中画出此函数图象.

(3) 从开始算起，如果汽车每小时行驶 40 km，当油箱中余油 20 L，该汽车行驶了多少千米？

10. (资阳市，2003) 如图 13－71 所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$，有一点 P 在 BC 上运动 (P 不与 B、C 重合)，设 $PB=x$，图形 $APCD$ 的面积为 y，写出 y 与 x 之间的函数关系，并画出它的图象.

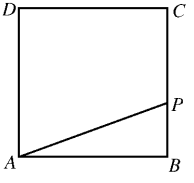


图 13－71

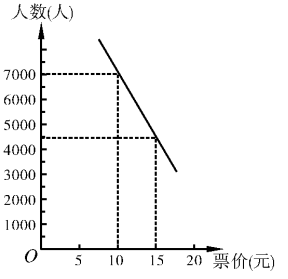


图 13－72

11. (辽宁省,2003) 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观.如果游客过多,对馆中的珍贵文物会产生不利影响.但同时考虑到文物的修缮和保存费用问题,还要保证一定的门票收入.因此,博物馆采取了涨浮门票价格的方法来控制参观人数.在该方法实施过程中发现:每周参观人数与票价之间存在着如图 13－72 所示的一次函数关系.在这样的情况下,如果确保每周 4 万元的门票收入,那么每周应限定参观人数是多少?门票价格应是多少元?

12. (南宁市,2003) 南宁市某中学环保兴趣小组对南湖清除淤泥工程进行调查,并从《南宁晚报》中收集到下列数据:

南湖南积 (m^2)	淤泥平均厚度 (m)	每天清淤泥量 (m^3)
162 万	0.7	0.6 万

根据上表解答下列问题:

(1) 请你按体积 = 面积 × 高来计算,南湖的淤泥量大约有多少万立方米?

(2) 设清除淤泥 x 天后,剩余的淤泥量为 y 万立方米,求 y 与 x 的函数关系.(不要求写出 x 的取值范围)

(3) 为了使南湖的生物链不遭破坏,仍需保留一定量的淤泥.若需保留的淤泥量约为 22 万立方米,求清除淤泥所需天数.

13. (杭州市,2003) 转炉炼钢产生的棕红色烟尘会污染大气,某装置可通过回收棕红色烟尘中的氧化铁从而降低污染,该装置的氧化铁回收率与

其通过的电流有关，现经过试验得到下列数据：

通过电流强度 (A)	1	1.7	1.9	2.1	2.4
氧化铁回收率 (%)	75	79	88	87	78

如图 13－73 建立直角坐标系，用横坐标表示通过的电流强度，纵坐标表示氧化铁回收率.

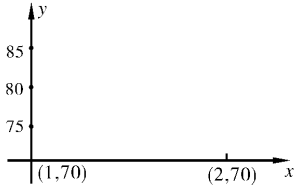


图 13－73

(1) 将试验所得数据在如图所给的直角坐标系中用点表示；(注：该图中坐标轴的交点代表点 (1,70))

(2) 用线段将题 (1) 所画的点从左到右顺次连接，若用此图象来模拟氧化铁回收率 y 关于通过电流 x 的函数关系，试写出该函数在 $1.7 \leqslant x \leqslant 2.4$ 时的表达式；

(3) 利用题 (2) 所得函数关系，求氧化铁回收率大于 85% 时，该装置通过的电流应该控制的范围 (精确到 0.1 A).

探究能力测试

14. (黄冈市，2003) 在全国抗击“非典”的斗争中，黄城研究所的医学专家们经过日夜奋战，终于研制出一种治疗非典型肺炎的抗生素. 据临床观察：如果成人按规定的剂量注射这种抗生素，注射药液后每毫升血液中的含药量 y (μg) 与时间 t (h) 之间的关系近似地满足如图 13－74 所示的折线.

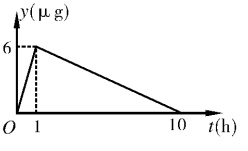


图 13－74

(1) 写出注射药液后每毫升血液中含药量 y 与时间 t 之间的函数关系式及自变量的取值范围.

(2) 据临床观察：每毫升血液中含药量不少于 4 μg 时，控制“非典”病情

是有效的.如果病人按规定的剂量注射该药液后,那么这一次注射的药液经过多长时间后控制病情开始有效?这个有效时间有多长?

(3) 假若某病人一天中第一次注射药液是早晨6点钟,问怎样安排此人从6:00～20:00注射药液的时间,才能使病人的治疗效果最好?

15. (北京市西城区,2001)某工厂生产某种产品,每件产品的出厂价为50元,其成本价为25元.因为在生产过程中,平均每生产一件产品有0.5 m^3污水排出,所以为了净化环境,工厂设计两种方案对污水进行处理,并准备实施.

方案1:工厂污水先净化处理后再排出,每处理1 m^3污水所用原料费为2元,并且每月排污设备损耗费为30000元;

方案2:工厂将污水排到污水厂统一处理,每处理1m^3污水需付14元的排污费.

问:(1) 设工厂每月生产x件产品,每月利润为y元,分别求出依方案1和方案2处理污水时,y与x的函数关系式;(利润=总收入-总支出).

(2) 设工厂每月生产量为6000件产品时,你若作为厂长在不污染环境、又节约资金的前提下应选用哪种处理污水的方案,通请过计算加以说明.

16. (辽宁省,2001)我省是水资源比较贫乏的省份之一,为了加强公民的节水和用水意识,合理利用水资源,各地采用价格调控手段达到节约用水的目的,某市规定如下收费标准:每户每月的用水不超过6 m^3时,水费按每立方米a元收费;超过6 m^3时,不超过的部分每立方米仍按a元收费,超过的部分的每立方米按c元收费.

该市某户今年3、4月份的用水量和水费如下表所示:

月份	用水量(m^3)	水费(元)
3	5	7.5
4	9	27

设每户每月用水量为x(m^3),应交水费为y(元).

(1) 求a、c的值,并写出用水不超过6 m^3和超过6 m^3时,y与x之间的函数关系式;

(2) 若该户5月份的用水量为8 m^3,求该户5月份的水费是多少元?

17. (陕西省咸阳,2000)现由甲、乙两个氮肥厂向A、B两地运送化肥,已知甲厂可调出50 t化肥,乙厂可调出40 t化肥,A地需30 t化肥,B地需60 t化肥,两厂到A、B两地的路程和运费如下表(表中运费栏"元/t·km"表示每吨化肥运送1 km所需人民币).

	路程 (km)		运费 (元/t·km)	
	甲厂	乙厂	甲厂	乙厂
A 地	10	8	6	6
B 地	12	10	5	4

根据题意,请设计出合理的运送方案,使所需的总运费最低,并求出最低的总运费.

18. (福州市,2002) 已知直线 $y = kx + b$,与 x 轴、y 轴分别交于 $B(4,0)$、$C(0,12)$ 两点.

(1) 求 k、b 的值.

(2) 如果 $P(x,y)$ 是线段 BC 上的动点,O 为坐标原点,是否存在这样的点 P,使 $\triangle POB$ 为等腰三角形?若存在,求出所有满足条件的 P 点坐标;若不存在,请说明理由.

19. (丽水市,2002) 如图 13－75,直线 $y_1 = kx + b$ 经过点 $P(5,3)$,且分别与已知直线 $y_2 = 3x$ 交于点 A、与 x 轴交于点 B,设点 A 的横坐标为 m ($m > 1$ 且 $m \neq 5$).

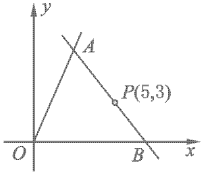


图 13－75

(1) 用含 m 的代数式表示 k;

(2) 写出 $\triangle AOB$ 的面积 S 关于 m 的函数解析式;

(3) 在直线 $y_2 = 3x$ 上是否存在点 A,使得 $\triangle AOB$ 面积最小?若存在,请求出点 A 的坐标;若不存在,请说明理由.

20. (南通市,2003) 某果品公司急需将一批不易存放的水果从 A 市运到 B 市销售. 现有三家运输公司可供选择,这三家运输公司提供的信息如下:

运输单位	运输速度 (km/h)	运输费用 (元/km)	包装与装卸时间 (h)	包装与装卸费用 (元)
甲公司	60	6	4	1500
乙公司	50	8	2	1000
丙公司	100	10	3	700

解答下列问题：

(1) 若乙、丙两家公司的包装与装卸及运输的费用总和恰好是甲公司的2倍，求 A、B 两市的距离 (精确到个位)；

(2) 如果 A、B 两市的距离为 s (km)，且这批水果在包装与装卸以及运输过程中的损耗为 300 元/h，那么要使果品公司支付的总费用 (包装与装卸费用、运输费用及损耗三项之和) 最小，应选择哪家运输公司？

21. (广东省，2003) 某人从 A 城出发，前往离 A 城 30 km 的 B 城. 现在在三种车供他选择：① 自行车，其速度为 15 km/h；② 三轮车，其速度为 10 km/h；③ 摩托车，其速度为 40 km/h.

(1) 用哪些车能使他从 A 城到达 B 城的时间不超过 2 h，请说明理由.

(2) 设此人在行进途中离 B 城的路程为 s km，行进时间为 t h，就 (1) 所选定的方案，试写出 s 与 t 的函数关系式 (注明自变量 t 的取值范围)，并在下图所给的平面直角坐标系中画出此函数的图象.

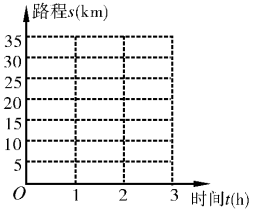


图 13－76

22. (菏泽市，2002) 已知直线 $y=\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A、B，又 P、Q 两点的坐标分别为 $P(0,-1)$，$Q(0,k)$，其中 $0<k<4$，再以 Q 点为圆心，PQ 的长为半径作圆，则当 k 取何值时，$\odot Q$ 与直线 AB 相切？

13.6 二次函数 $y=ax^2$ 的图象

学点探究分析

重点 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质.

难点 根据图象概括二次函数 $y=ax^2$ 的性质.

探究点 根据图象概括二次函数 $y=ax^2$ 的性质.如判定 a 的大小、函数的增减性、最值问题等.中考数学中出现了运用二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质解决实际问题的题目,其形式多种多样,有要求解决几何问题的,有要求解决市场经济问题的,特别是当 $y=ax^2$ 与一次函数结合在一起的题目,考查的知识点十分广泛,技巧性很强,能力要求较高,是当前中考的热点题型之一.

学习方法技巧

首先要能够熟练地画出二次函数 $y=ax^2$ 的图象,并能够借助于图象的对称性、升降情况,判断函数的特性.对实际问题,要特别注意自变量 x 的取值往往受实际情况的限制.

能力升级捷径

【例 1】 已知函数 $y=(k+2)x^{k^2+k-4}$ 是关于 x 的二次函数.

(1) 求 k 的值;

(2) k 为何值时,抛物线有最低点?最低点是什么?在此前提下,当 x 在哪个范围内取值时,y 随 x 的增大而增大?

思维技巧 此题考查二次函数 $y=ax^2$ 的定义、图象和性质.由定义知 $k^2+k-4=2$ 且 $k+2\neq 0$.不要忽视隐含条件 $k+2\neq 0$,并要注意"且"的用法,不能用"或"替代.还要理解抛物线最低点的概念.抛物线 $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ 增减性是以 y 轴为界的.

解 (1) 由已知得 $\begin{cases}k+2\neq 0,\\ k^2+k-4=2.\end{cases}$ 即 $k=2$ 或 $k=-3$.

所以当 $k=2$ 或 $k=-3$ 时,已知函数为二次函数.

(2) 若抛物线有最低点,则开口向上,

所以 $k+2>0$.由①知,$k=2$.最低点是 $(0,0)$;当 $x\geqslant 0$ 时,y 随 x 的增大而增大.

激活思维 此题综合性较强,要根据抛物线的性质和题目要求选择字

母取值.特别要注意隐含条件的挖掘.解决这类题时考虑要周全.

同类变式　已知函数 $y=(m^2+m)x^{m^2-m}$ 是关于 x 的二次函数.

(1) 求 m 的值；

(2) 此函数是否存在最低点和最高点,若存在,求出最低点或最高点；

(3) 画图说明函数的增减性.

解　(1) 由题意得

$\begin{cases} m^2+m\neq 0, \\ m^2-m=2. \end{cases}$ 解得 $m=2$.

(2) 由 (1) 知,$m=2$ 时,$m^2+m>0$,抛物线开口向上,函数存在最低点而没有最高点.此时最低点坐标为 $(0,0)$.

(3) 当 $m=2$ 时,二次函数为 $y=6x^2$.

自变量 x 的取值范围是全体实数.

列表：

x	…	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	…
$y=6x^2$	…	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6	…

描点 $(0,0)$,$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,$(1,6)$,$(-1,6)$.

用光滑曲线从左到右连结各点,即得 $y=6x^2$ 的图像.

由图象 13－77 知,当 $x>0$ 时,y 随 x 增大而增大；当 $x<0$ 时,y 随 x 增大而减小.

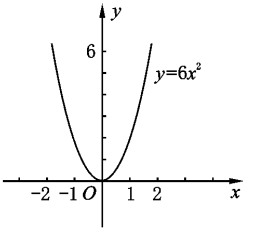


图 13－77

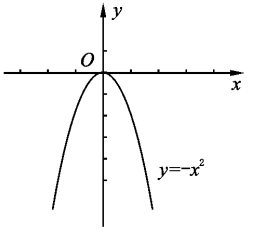


图 13－78

思维拓展　画出 $y=-x^2$ 的图象并根据图象回答下列问题：

⑴ 当 $x=1$ 时,求 y 的值;

⑵ 当 $y=-4$ 时,求对应的 x 的值;

⑶ 当 x 为何值时,y 的值小于零?

解 列表、描点,连线得 $y=-x^2$ 的图象 13-78.

由图象可知:

⑴ 当 $x=1$ 时,$y=-1$;

⑵ 当 $y=-4$ 时,$x=\pm 2$;

⑶ 当 $x\neq 0$ 时,y 的值小于 0.

【例 2】 分别求符合下列条件的抛物线 $y=ax^2$ 的解析式:

⑴ 通过点 $(-3,2)$;

⑵ 与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 开口大小相等,方向相反;

⑶ x 由 1 增加到 2 时,函数值减少 4.

思维技巧 此例确定二次函数 $y=ax^2$ 的解析式,建立关于 a 的一个方程即可.

解 ⑴ 因为 $a\cdot(-3)^2=2$,所以 $a=\frac{2}{9}$.

所以抛物线的解析式为 $y=\frac{2}{9}x^2$.

⑵ 因为与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 开口大小相等,方向相反,

所以 $a=-\frac{1}{2}$.

所以抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

⑶ 当 $x=1$ 时,$y=a$;$x=2$ 时,$y=4a$. $a-4=4a$,

所以 $a=-\frac{4}{3}$.

所以抛物线的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x^2$.

激活思维 此例给出了在不同的条件下,求二次函数 $y=ax^2$ 解析式的方法,特别是两条抛物线 $y=a_1x^2$ 与 $y=a_2x^2$,若开口大小相等,则 $|a_1|=|a_2|$,解析式中 a 的值的大小既决定了抛物线开口方向,又决定了抛物线形状大小. 第 ⑵ 小题还可以叙述为:将已知抛物线图象沿 x 轴对折,或绕顶点旋转 180°.

同类变式 直线 $y=2x+3$ 与抛物线 $y=ax^2$ 交于 A、B 两点,已知 A 点的横坐标是 3,求 A、B 两点坐标及抛物线的解析式.

解　把 $x=3$ 代入 $y=2x+3$ 中，$y=2\times3+3=9$，

所以　A 点坐标是 $(3,9)$.

把 $x=3$，$y=9$ 代入 $y=ax^2$，得 $a=1$.

所以　所求抛物线的解析式为 $y=x^2$.

解 $\begin{cases}y=2x+3,\\y=x^2.\end{cases}$　得 $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=9;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=1.\end{cases}$

显然，B 点坐标为 $(-1,1)$.

【例 3】　已知正方形的周长是 C cm，面积为 S cm^2. (1) 求 S 与 C 之间的函数关系式；(2) 画出图象；(3) 根据图象，求出 $S=1$ cm^2 时，正方形的周长；(4) 根据图象，求出 C 取何值时，$S\geqslant4$cm^2.

思维技巧　本题考查二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质在实际问题中的应用. 在实际问题中，建立正确的函数关系是关键.

解　(1) 根据题意，知 $S=\frac{1}{16}C^2$ $(C>0)$.

(2) 列表：

C	2	4	6	8
$S=\frac{1}{16}C^2$	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4

描点、连线 (如图 13－79 所示).

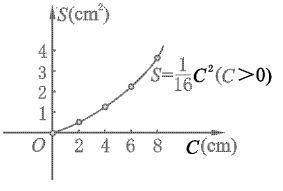


图 13－79

(3) 根据图象知，$S=1$ cm^2 时正方形的周长是 4 cm.

(4) 根据图象知，当 $C\geqslant8$ cm 时，$S\geqslant4$ cm^2

激活思维　解这类题目要注意：(1) 自变量的取值范围；(2) 画图象时，x 应在取值范围内取值，而图象往往是抛物线的一部分；(3) 横、纵轴字母应为题目的字母而不要习惯地写 x，y；(4) 由于横、纵轴表示的量单位不一致

(如此例中横轴是 cm,纵轴是 cm^2),所以横轴和纵横选取的单位长度可不一致.根据具体情况而定.

同类变式　如图 13－80,桥拱是抛物线形,上面有一点 P 的坐标为 $(2,-1)$,当水位线在 AB 位置时,水面宽 12 m,求水面离桥顶高度 h.

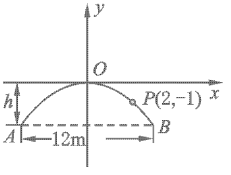


图 13－80

解　设抛物线解析式为 $y=ax^2$.

由题意得 $4a=-1$,$a=-\frac{1}{4}$.

即 $y=-\frac{1}{4}x^2$.

因为　$\frac{AB}{2}=6$,

所以　B 点坐标为 $(6,-h)$.

所以　$-\frac{1}{4}\times 6^2=-h$,$h=9$.

思维拓展　(绍兴,2001)某种产品的年产量不超过 1000 t,该产品的年产量(单位:t)与费用(单位:万元)之间函数的图象是顶点在原点的抛物线的一部分(如图 13－81 所示),该产品的年销售量(单位:t)与销售单价(单位:万元/t)之间函数的图象是线段(如图 13－82 所示).若生产出的产品都能在当年销售完,则年产量是_____t 时,所获毛利润最大(毛利润＝销售额－费用).

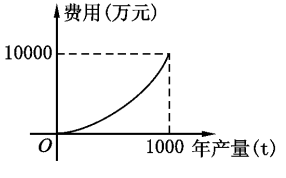


图 13－81

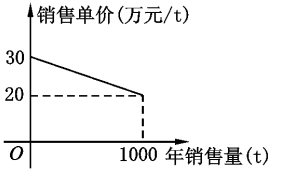


图 13－82

解　设该产品的年产量为 x t,费用为 y_1 万元.

由图 13－81 知,$y_1=ax^2$,又点(1000,10000)在抛物线上,

所以　$10000=a\times 1000^2$,所以　$a=\frac{1}{100}$.

所以　$y_1=\frac{1}{100}x^2$.

因为生产出的产品都能在当年销售完,所以年销售量为 x t,设销售单价为 y_2 万元/t.

由图 13－82 知,$y_2=kx+30$.

又因为　(1000,20) 在直线上,

所以　$20=1000k+30$,所以　$k=-\frac{1}{100}$,

所以　$y_2=-\frac{1}{100}x+30$.

则毛利润 $W=\left(-\frac{1}{100}x+30\right)\cdot x-\frac{1}{100}x^2$.

$W=-\frac{1}{50}x^2+30x$.

因为　$a=-\frac{1}{50}<0$,抛物线开口向下,W 有最大值.

配方得:$y=-\frac{1}{50}(x-750)^2+11250$.

即当 $x=750$ 时,W 最大.

【例 4】　已知一次函数 $y=kx+b$ 与二次函数 $y=ax^2$ 的图象如图 13－83,其中 $y=kx+b$ 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A (2,0)、B (0,2);与二次函数图象的交点为 P、Q,P、Q 的纵坐标之比为 1∶4,求这两个函数的解析式.

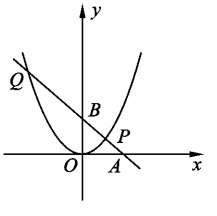


图 13－83

思维技巧　此题是一次函数与二次函数的综合应用题.先求出一次函数解析式,再利用两函数图象交点的纵坐标之比为 1∶4.建立方程组求解.

解　把 A (2,0),B (0,2) 两点的坐标分别代入一次函数 $y=kx+b$,得 $\begin{cases}0=2k+b,\\2=b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=2.\end{cases}$

所以一次函数的解析式为 $y=-x+2$.

设 P 点坐标为 (x_1,y_1),Q 点坐标为 (x_2,y_2),则 $y_1:y_2=1:4$.

所以　$ax_1^2:ax_2^2=1:4$,

所以　$x_1:x_2=1:2$ 或 $x_1:x_2=(-1):2$.

又 Q 点在第二象限，则只能 $x_1:x_2=(-1):2$，

所以 $x_2=-2x_1$.

所以 Q 点的坐标是 $(-2x_1,4y_1)$.

把 P，Q 两点的坐标分别代入 $y=-x+2$ 中得 $\begin{cases}y_1=-x_1+2,\\4y_1=2x_1+2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=1.\end{cases}$

所以 P 点坐标为 $(1,1)$.

把 P 点坐标代入 $y=ax^2$ 得，$a=1$.

所以二次函数的解析式为 $y=x^2$.

激活思维 要想求二次函数解析式，必须确定抛物线上一点的坐标. P、Q 两纵坐标之比为 $1:4$ 的灵活运用是解本题的关键.

同类变式 函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 与直线 $y=2x-3$ 交于点 $(1,b)$，求：

(1) a 和 b 的值；

(2) 求抛物线 $y=ax^2$ 的解析式，并求顶点坐标和对称轴；

(3) x 在什么范围内时，二次函数 $y=ax^2$ 中的 y 随 x 的增大而增大；

(4) 求抛物线与直线 $y=-2$ 的两交点及顶点构成的三角形的面积.

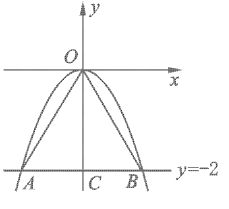


图 13－84

解 (1) 将 $x=1$，$y=b$ 代入 $y=2x-3$，解得 $b=-1$.

所以 交点坐标是 $(1,-1)$，再将 $x=1$，$y=-1$ 代入 $y=ax^2$，解得 $a=-1$，所以 $a=-1$，$b=-1$.

(2) 抛物线的解析式为 $y=-x^2$. 顶点坐标为 $(0,0)$，对称轴为直线 $x=0$ (即 y 轴)，如图 13－84.

(3) 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

(4) 设直线 $y=-2$ 与抛物线 $y=-x^2$ 相交于 A、B 两点.

由 $\begin{cases}y=-2,\\y=-x^2.\end{cases}$ 解得 $A(-\sqrt{2},-2)$，$B(\sqrt{2},-2)$，

所以 $|AB|=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$，$|OC|=2$.

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2=2\sqrt{2}$.

思维拓展　如图 13－85 所示，已知直线 AB 过 x 轴上一点 A (2，0)，且与抛物线 $y=ax^2$ 相交于 B、C 两点，B 点坐标为 (1，1)．(1) 分别求直线 AB 和抛物线 $y=ax^2$ 的解析式；(2) 若抛物线上有一点 D (在第一象限内)，使得 $S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}$，求 D 点坐标．

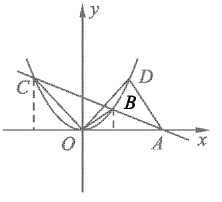


图 13－85

解　(1) 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，由题意，有 $\begin{cases}2k+b=0,\\k+b=1,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}k=-1\\b=2.\end{cases}$　所以直线 AB 解析式为 $y=-x+2$，把 $x=1$，$y=1$ 代入 $y=ax^2$，得 $a=1$，所以抛物线的函数解析式为 $y=x^2$．

(2) 设 D 点坐标为 (x,x^2)．

因为 C 是直线 $y=-x+2$ 与抛物线 $y=x^2$ 交点，

所以解方程组 $\begin{cases}y=-x+2,\\y=x^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=4.\end{cases}$

所以点 C 坐标为 $(-2,4)$．

因为　$S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}$，

所以　$\frac{1}{2}\times2\times x^2=\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times2\times1$，

即 $x^2=3$．所以　$x=\pm\sqrt{3}$，因为　D 在第一象限内，

所以 D 点坐标为 $(\sqrt{3},3)$．

综合能力测试

基础能力测试

1．填空题

(1) $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图象是_____，对称轴是_____，顶点坐标是_____，当 $a>0$ 时，开口向_____，当 $a<0$ 时，开口向_____．

(2) 当 $a>0$ 时，在抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴左侧 y 随 x 的增大而_____，而在对称轴的右侧是 y 随着 x 的增大而_____，此时函数 $y=ax^2$ 当 $x=$_____时的值最_____，是_____．

⑶ 若 $y=(m^2+m)x^{m^2-2m-1}$是二次函数，则 $m=$_____.

⑷ 二次函数 $y=-\frac{3}{2}x^2$，当 $x_1>x_2>0$ 时，y_1 与 y_2 的大小为_____.

⑸ 当 y 与 x^2 成正比例，且当 $x=3$，$y=-18$，则 y 与 x 之间的函数关系式是_____.

⑹ 在边长为 4 m 的正方形中间挖去一个边长为 x m 的小正方形，剩下的四方框形的面积为 y，y 与 x 之间的函数关系是_____.

⑺ 小明存入银行人民币 200 元，年利率为 x，两年到期，本利为 y 元，y 与 x 之间的函数关系是_____，若年利率为 7%，两年到期的本利共_____元.

⑻ 二次函数的图象如图 13－86 所示，则它的解析式为_____，如果另一函数的图象与该图象关于 x 轴对称，那么它的解析式是_____.

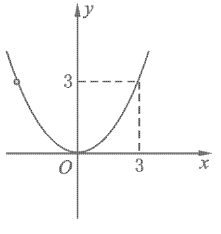


图 13－86

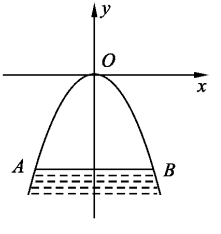


图 13－87

⑼ 已知 y 与 x^2 成正比例，并且当 $x=1$ 时，$y=2$，则函数 y 的解析式是_____，并求当 $x=-3$ 时 $y=$_____，当 $y=8$ 时 $x=$_____.

⑽ (陕西，2001) 某涵洞是抛物线形，它的截面如图 13－87 所示. 现测得水面宽 $AB=1.6$ m，涵洞顶点 O 到水面的距离为 2.4 m. 在图中直角坐标系内，涵洞所在的抛物线的函数解析式是_____.

2. 选择题

⑴ 下列结论正确的是（　　）

A. 二次函数的取值范围是非零实数

B. 二次函数自变量的取值范围是所有实数

C. 形如 $y=ax^2+bx+c$ 的函数叫二次函数

D. 二次方程是二次函数的特例

⑵ 圆面积公式 $S=\pi R^2$，S 与 R 之间的关系是（　　）

A. 正比例函数　　B. 一次函数

C. 二次函数　　D. 以上答案都不对

⑶ 下列函数中，不是二次函数的是（　　）

A. $y=1-\sqrt{2}x^2$　　B. $y=2(x-1)^2+4$

C. $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$　　D. $y=(x-2)^2-x^2$

⑷ 观察函数 $y=x^2$ 的图象，则下列判断中正确的是（　　）

A. 若 a、b 互为相反数，则 $x=a$ 和 $x=b$ 的函数值相同

B. 对于同一个自变量 x，有两个函数值和它对应

C. 对任一个实数 y，有两个 x 和它对应

D. 对任意实数 x，都有 $y>0$

⑸ 在同一坐标系中，抛物线 $y=4x^2$，$y=\frac{1}{4}x^2$，$y=-\frac{1}{4}x^2$ 的共同特点是（　　）

A. 关于 y 轴对称，抛物线开口向上

B. 关于 y 轴对称，y 随 x 的增大而增大

C. 关于 y 轴对称，y 随 x 的增大而减小

D. 关于 y 轴对称，抛物线顶点在原点

⑹ 如图 13－88，函数 $y=ax^2$ 与 $y=-ax+b$ 的图象可能是（　　）

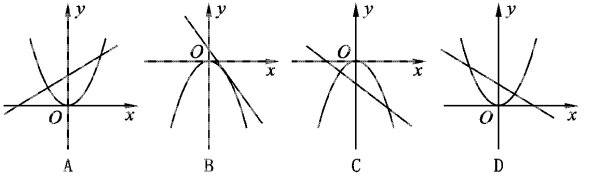


图 13－88

⑺ 在半径为 4 cm 的圆中，挖去一个半径为 x cm 的圆面，剩下一个圆环的面积 y cm^2，则 y 与 x 的函数关系式为（　　）

A. $y=\pi x^2-4$　　B. $y=\pi(2-x)^2$

C. $y=-(x^2+4)$　　D. $y=-\pi x^2+16\pi$

(8) 若 $y=(2-m)x^{m^2-3}$ 是二次函数，且图象的开口向上，则 $m=$（　　）

A. $\pm\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $-\sqrt{5}$　　D. 0

(9) (咸阳市，2000) 某工厂的大门是一抛物线型水泥建筑物，大门的地面宽度为 8 m，两侧距地面 3 m 高处各有一个壁灯，两壁灯之间的水平距离为 6 m，如图 13－89 所示，则厂门的高为（　　）(水泥建筑物厚度不计，精确到0.1 m)

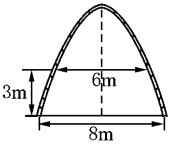


图 13－89

A. 6.9 m　　B. 7.0 m

C. 7.1 m　　D. 6.8 m

(10) (济南市，2002) 若一抛物线 $y=ax^2$ 与四条直线 $x=1$，$x=2$，$y=1$，$y=2$ 围成正方形有公共点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 1$　　B. $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$

C. $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$　　D. $\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 2$

3. 已知直线 AB 过点 $A(-3,0)$，且与抛物线 $y=ax^2$ 相交于 B、C 两点，若 B 点坐标为 $(-1,1)$.

(1) 求直线和抛物线所表示的函数解析式；

(2) 求 C 点坐标.

4. 已知抛物线 $y=-ax^2$ 与直线 $y=kx+1$ 交于两点，其中一点坐标是 $(1,4)$，求另一点的坐标.

5. 已知抛物线 $y=x^2$ 上有一点 A，A 点的横坐标是 -1，过点 A 作 $AB\parallel x$ 轴，交抛物线于另一点 B，求 $\triangle AOB$ 的面积.

6. 抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=kx+3$ 交于 $\left(x_1,\frac{9}{2}\right)$ 和 $(x_2,2)$，其中 x_1，x_2 ($x_1>x_2$) 是方程 $x^2-x-6=0$ 的两根，求抛物线与直线的解析式.

7. 如图 13－90，点 P 是抛物线 $y=x^2$ 上在第一象限内的一个点，点 A 的坐标是 $(3,0)$.

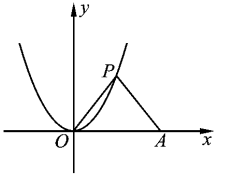


图 13－90

(1) 令点 P 的坐标为 (x,y)，求

$\triangle OPA$ 的面积 S 与 y 的关系式.

(2) S 是 y 的什么函数？S 是 x 的什么函数？

8. 同一平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2$ 和直线 $y=x+2$ 相交于两点 A，B，而抛物线和直线 $y=2x+b$ 相交于两点 B，C，已知 A (2，4)，求 B，C 的坐标.

探究能力测试

9. 二次函数 $y=x^2$ 的图象和一次函数 $y=\sqrt{5}x+5$ 的图象的交点的横坐标为 α、β ($\alpha<\beta$)，求 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 的值.

10. 平面直角坐标系的原点为 O，在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上取一点 P，在 x 轴上取一点 A，使 $OP=PA$，过 A 作 x 轴的垂线与直线 OP 交于 Q，当 $\triangle APQ$ 成正三角形时，求 $\triangle APQ$ 的面积.

13.7　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象

学点探究分析

重点　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质的理解及灵活应用.

难点　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质.

探究点　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象这一节内容教材上要求虽然不高，但其图象和性质的运用，特别是在实际问题中的运用正成为考查的热点，与方程、几何等相结合的综合题常作为中考的压轴题，贴近生活、解决市场经济问题的题目逐年呈上升趋势.

学习方法技巧

掌握二次函数图象的画法，是灵活运用其性质的前提，能由图象“看”出其性质，据性质画出其图象，对二次函数解析式的配方，是基本技能，要能熟练地求出各种形式抛物线的顶点，能针对不同条件，巧设抛物线的解析式、简化解题过程、与函数方程、几何等知识的沟通，是学好本节的又一个关键. 应用题的阅读、理解和数学建模，是运用二次函数解决实际问题的难点.

能力升级捷径

【例 1】 (遵义市,2000) 已知二次函数 $y=2x^2-4x-6$,(1) 求此函数图象的开口方向、对称轴方程、顶点坐标、并画出图象;

(2) 求此函数图象与 x 轴、y 轴的交点坐标及以此三点为顶点的三角形面积;

(3) x 为何值时,$y>0$?

思维技巧 (1) 利用配方法将 $y=2x^2-4x-6$ 写成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式,或直接用公式计算,求出对称轴方程、顶点坐标. (2) 令 $y=0$,通过解方程,求出抛物线与 x 轴两交点坐标,进而求出两交点的距离,或利用根与系数关系求 x 轴上两交点的距离 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$. 注意点的坐标与线段之间的相互转换。(3) 利用图象,直接写出函数值 $y>0$ 的 x 的取值范围.

解 (1) ①用配方法

因为 $y=2x^2-4x-6=2(x^2-2x)-6$

$=2(x-1)^2-8.$

因为 $a=2>0$,所以此函数图象的开口向上;对称轴方程为 $x=1$;顶点坐标为 $(1,-8)$.

②用公式法

因为 $a=2>0$,所以此函数图象的开口向上.

$-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times2}=1$,所以对称轴方程为 $x=1$.

$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times2\times(-6)-(-4)^2}{4\times2}=-8.$

或当 $x=1$ 时,$y=2\times1^2-4\times1-6=-8.$

因此,顶点坐标为 $(1,-8)$.

(2) 令 $y=0$,得 $2x^2-4x-6=0$,

解之 $x_1=-1$,$x_2=3.$

所以抛物线与 x 轴两交点为 $(-1,0)$,$(3,0)$;

又 $x=0$ 时,$y=-6$,

所以抛物线与 y 轴交点为 $(0,-6)$

所以函数图象为图 13-91 所示.

由上知 $|AB|=|3-(-1)|=4$,

$OC=|-6|=6$,

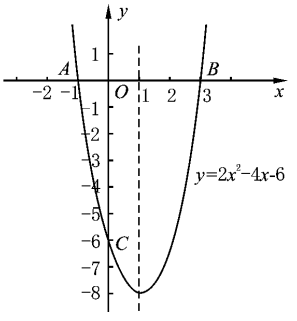


图 13－91

所以　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$.

另解　设 $y=2x^2-4x-6$ 与 x 轴两交点的横坐标为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=2$，$x_1\cdot x_2=-6$.

所以　$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4+12}=4$.

所以　$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$.

(3) 由图象观察，当 $x>3$ 或 $x<-1$ 时，$y>0$.

激活思维　此例介绍了如何用配方法、公式法求抛物线的对称轴和顶点坐标. 其中，求顶点坐标还可以通过求函数值的方法求解. 求同轴上两点间的距离，可以用解方程的方法，也可直接利用根与系数求出 $|x_1-x_2|$（注意不是 $|x_1+x_2|$）. 运用数形结合思想，通过观察图象，直接写出 $y>0$ 时 x 的取值范围，从而使问题简单化.

同类变式　(大连市，2002) 已知二次函数 $y=x^2+4x+5$.

(1) 将所给的二次函数化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，并写出它的图象的顶点坐标；

(2) 在平面直角坐标系中画出经过点 (2，3) 和上述二次函数图象顶点的直线，并求出这条直线的解析式.

解　(1) $y=x^2+4x+5=x^2+4x+4+1$，

所以　$y=(x+2)^2+1$.

所以函数图象的顶点坐标为 $(-2,1)$.

⑵ 经过点 $(-2,1)$ 和 $(2,3)$ 画直线.

设直线的解析式为 $y=kx+b$,

所以 $\begin{cases}1=-2k+b,\\3=2k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\b=2.\end{cases}$

所以直线的解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x+2$.

思维拓展 1. (浙江丽水,2002) 已知二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ $(a\neq0)$ 的图象经过原点,当 $x=1$ 时,函数 y 的最小值为 -1.

⑴ 求这个二次函数的解析式,并在平面直角坐标系中画出函数图象的草图;

⑵ 若这个二次函数的图象与 x 轴的交点为 A、B,顶点为 C,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

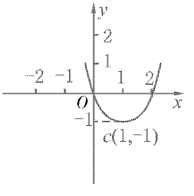


图 13-92

解 ⑴ 依题意有 $y=a(x-1)^2-1$,又此抛物线经过原点,

所以 $0=a(0-1)^2-1$, $a=1$.

所以 $y=x^2-2x$. 图象如图 13-92.

⑵ 因为 $AC=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{2}$, $AB=2$,

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$.

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

2. 如图 13-93,已知抛物线 $y=x^2-6x+8$ 与 x 轴交于 A、B 两点. ⑴ 通过配方,求抛物线的对称轴和顶点坐标;⑵ 利用图象,说出 x 取哪些值时,函数值 $y\leqslant0$;⑶ 如果平行于 x 轴的直线与抛物线交于点 C、点 D,且点 C 的横坐标为 5,画出直线 CD,并求梯形 $ABCD$ 的面积.

解 ⑴ $y=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$

所以对称轴 $x=3$,顶点坐标为 $(3,-1)$.

⑵ 令 $x^2-6x+8=0$ 解得与 x 轴两交点坐标为 $A(2,0)$, $B(4,0)$,抛物线与 y 轴交点 $(0,8)$.

观察图象,知,当 $2\leqslant x\leqslant4$ 时, $y\leqslant0$.

⑶ 当 $x=5$ 时, $y=5^2-6\times5+8=3$,

则直线 CD 过点 $C(5,3)$ 且平行于 x 轴.

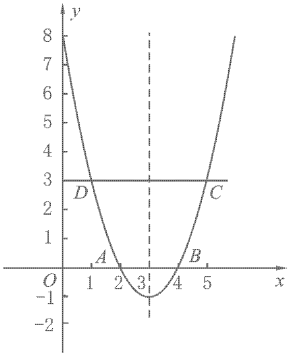


图 13－93

由抛物线的对称性知 $D(1,3)$

$CD=4$，$AB=2$.

所以梯形 $ABCD$ 面积为 $\frac{1}{2}(4+2)\times 3=9$.

【例 2】　(随州市，2001) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 13－94 所示，且 $OA=OC$，则由抛物线的特征写出如下含有 a、b、c 三个字母的等式或不等式：① $\frac{4ac-b^2}{4a}=-1$，② $ac+b+1=0$，③ $abc>0$，④ $a-b+c>0$，其中正确结论的序号是_____ (把你认为正确的都填上)

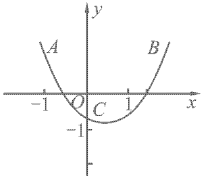


图 13－94

思维技巧　解这类题，主要通过观察图象进行回答，注意开口方向，与 x 轴交点，对称轴位置，x 轴上的特殊点 $(1,0)$，$(-1,0)$ 等.

解　由图象 13－94 知抛物线顶点的纵坐标是 -1，故①正确.

设点 C 的坐标为 $(0,c)$，

因为 $OA=OC$，所以 A 点坐标为 $(C,0)$，

即当 $x=c$ 时，$y=0$，

所以 $ac^2+bc+c=0$，

因为 $c\neq 0$，

所以 $ac+b+1=0$，故②也正确.

因为抛物线开口向上，所以 $a>0$.

又因为抛物线的顶点在第四象限，

所以 $x=-\frac{b}{2a}>0$，所以 $b<0$，

而 $c<0$，所以 $abc>0$，故③正确.

当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c$，

由图象知点 $(-1,a-b+c)$ 在第二象限，

故 $a-b+c>0$，④也正确.

综上知，应填①②③④.

激活思维 这是一道典型的数形结合题. 其一般方法是：由开口方向决定 a 的符号，因为抛物线与 y 轴交于 $(0,c)$，所以由抛物线与 y 轴交点的纵坐标决定 c 的符号. 由顶点横坐标 $-\frac{b}{2a}$ 的符号及 a 的符号来决定 b 的符号. $a+b+c$ 的符号由函数在 $x=1$ 时函数值决定. $a-b+c$ 的符号由 $x=-1$ 时函数值决定. 由抛物线与 x 轴交点的个数决定 b^2-4ac 的符号. 此例中，由于附加了 $OA=OC$ 这个条件，使之可确定 $ac+b+1$ 的符号情况。

同类变式 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 13－95 所示，确定下列各式的符号：(1) a；(2) b；(3) c；(4) $\Delta=b^2-4ac$；(5) $a+b+c$；(6) $a-b+c$.

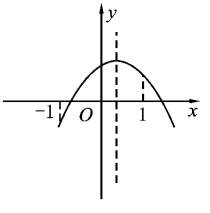


图 13－95

本题考查二次函数图象的位置与 a,b,c 及 Δ 的关系，解题应注意观察抛物钱的开口方向，对称轴和与 x 轴、y 轴交点的情况.

解 (1) 因为开口方向向下，所以 $a<0$.

(2) 因为对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在原点的右侧，所以 $-\frac{b}{2a}>0$，又 $a<0$，因此 $b>0$；

(3) c 是抛物线和 y 轴交点的纵坐标，交点在原点的上方，所以 $c>0$；

(4) 抛物线与 x 轴有两个交点，所以 $\Delta=b^2-4ac>0$；

(5) 当 $x=1$ 时，$y=ax^2+bx+c=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c$. 表明图象

上横坐标为 1 的点，其纵坐标值为 $a+b+c$. 从图象上不难看出，横坐标为 1 的点在 x 轴的上方，因此，其纵坐标大于零，即 $a+b+c>0$；

(6) 当 $x=-1$ 时，$y=ax^2+bx+c=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=a-b+c$. 从图象上可以看出，横坐标为 -1 的点在 x 轴的下方，因此，其纵坐标小于零，即 $a-b+c<0$.

思维拓展　(武汉市，2002) 为了备战世界杯，中国足球队在某次训练中，一队员在距离球门 12 m 处的挑射，正好射中了 2.4 m 高的球门横梁. 若足球运动的路线是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (如图 13－96)，则下列结论：①$a<-\frac{1}{60}$；②$-\frac{1}{60}<a<0$；③$a-b+c>0$；④$0<b<-12a$. 其中正确的结论是 (　　)

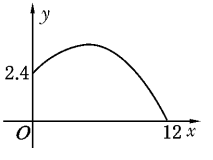


图 13－96

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

解　由题意得点 (12，0)，(0，2.4) 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 图象上，

所以 $\begin{cases}0=144a+12b+c\\2.4=c\end{cases}$

即 $60a+5b+1=0$.

又　$x=-\frac{b}{2a}>0$，而 $a<0$，所以　$b>0$，

所以　$5b=-60a-1>0$，所以　$a<-\frac{1}{60}$.

所以　$a-b+c=a+\frac{60a+1}{5}+2.4=13a+2.6$，显然，其符号不确定；

由 $60a+5b+1=0$ 知　$60a+5b=-1<0$.　所以　$12a+b<0$.

所以　$0<b<-12a$　故选 B.

[例 3]　(黄石市，2001)　关于 x 的两个函数 $y=x^2+2mx+m^2$ 和 $y=mx-m$ ($m\neq0$) 在同一坐标系中的图象可能是 (　　)

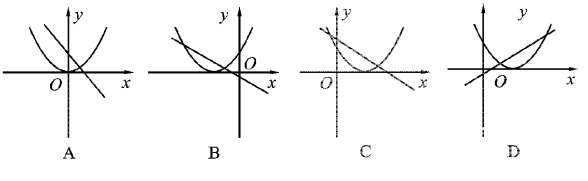


图 13－97

思维技巧 根据系数的符号判定函数图象的位置或函数的性质，求解这类问题，关键是沟通函数性质与图象特征的联系. 确实将“数”、“形”结合起来.

解 抛物线 $y=x^2+2mx+m^2=(x+m)^2$，其对称轴是 $x=-m$，则 $m\neq 0$，可排除 A.

对于 B. 因为 $x=-m<0$，所以 $m>0$.

而此时直线 $y=mx-m$ 不经过第二象限，故可排除 B. 同法可排除 D.

因此选 C.

激活思维 观察图象，以某一个函数图象位置得出字母的符号，再与另一个函数图象相对照，逐一排除，或先对字母符号进行讨论，再对照两个函数图象，逐一排除，从而找到正确答案. 数形结合思想与分类讨论是解决这类问题的法宝.

同类变式 函数 $y=ax^2+bx+c$ 和 $y=ax+b$ 在同一坐标系中正确的示意图（图 13－98）是（ ）

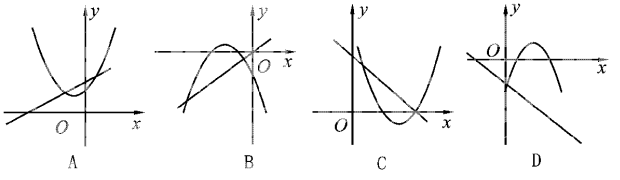


图 13－98

A 中直线 $y=ax+b$ 经过第一、二、三象限，$a>0$，$b>0$；抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向上，$a>0$，又其顶点在第二象限，$-\frac{b}{2a}<0$，得 $b>0$，故选 A.

解 选 A.

此题中排除其他结论的方法是：

B 中，直线 $y=ax+b$ 经过第一、二、三象限，$a>0$，$b>0$；而抛物线开口向下，$a<0$，与前者矛盾.

同理，可排除结论 C.

D 中，直线 $y=ax+b$ 经过第二、三、四象限，$a<0$，$b<0$；抛物线开口向下，$a<0$，但抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在第一象限，$-\frac{b}{2a}>0$，则 $b>0$，与 $b<0$ 矛盾，故结论 D 也不成立.

思维拓展　1. 抛物线与直线在同一个直角坐标系中如图 13－99 所示，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 点均在抛物线上，点 $P_3(x_3,y_3)$ 在直线上，其中 $-2<x_1<x_2$，$x_3<-2$，则（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$

B. $y_3<y_1<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$

D. $y_2<y_1<y_3$

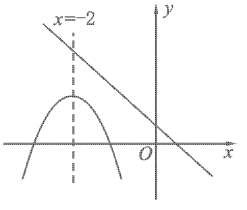


图 13－99

解　选 D.

2. 画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$ 的图象，并根据图象说出 x 在哪个范围时，y 随 x 的增大而增大；x 取何值时，y 随 x 的增大而减小？函数 y 有最大值还是有最小值，最值是多少？

解　$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(x+3)^2+2$.

所以　顶点为 $A(-3,2)$，对称轴为 $x=-3$.

令 $y=0$，求出抛物线与 x 轴交点坐标是 $B(-5,0)$，$C(-1,0)$.

令 $x=0$，求出抛物线与 y 轴交点是 $\left(0,-\frac{5}{2}\right)$，再作出点 D 关于对称轴 $x=-3$ 的对称点 $E\left(-6,-\frac{5}{2}\right)$，将 E、B、A、C、D 五点连成光滑曲线，便得二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$ 的图象（如图 13－100）.

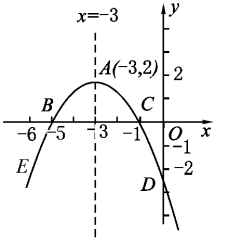


图 13－100

从图象可以看出，在对称轴的左侧，即当 $x<-3$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而减小，因为抛物线开口向下，顶点 A 是抛物线的最高点，所以，y 有最大值，当 $x=-3$ 时，$y_{最大值}=2$.

【例 4】　已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 满足以下条件，求函数解析式：

(1) 图象经过两点 $A(1,0)$，$B(0,-3)$，且对称轴是直线 $x=2$；

⑵ 图象顶点是 $(-2,3)$ 且过 $(-1,5)$ 点；

⑶ 图象与 x 轴交于 $(-2,0)$、$(4,0)$ 两点且顶点为 $\left(1,-\frac{9}{2}\right)$；

⑷ 图象顶点是 $M(1,16)$ 且与 x 轴交于两点，已知两交点相距 8 个单位.

思维技巧 求抛物线的解析式时，要根据不同的已知条件，选用不同的形式. 若给出一般的三个点，常设一般式 $y=ax^2+bx+c$；若给出了顶点、对称轴，一般设为 $y=a(x-h)^2+k$；若给出与 x 轴两交点坐标，一般设为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$. 不论哪种形式，都要建立三个方程，选择恰当的形式，往往可使计算大大简化.

解 ⑴ 设所求解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

因为抛物线经过两点 $A(1,0)$、$B(0,-3)$.

所以 $\begin{cases}a+b+c=0,\\ c=-3.\end{cases}$

所以 $a+b=3$.

又因为对称轴是 $x=2$，

所以 $-\frac{b}{2a}=2$.

解方程组 $\begin{cases}a+b=3,\\ -\frac{b}{2a}=2.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=4.\end{cases}$

所以 $a=-1$，$b=4$，$c=-3$.

所以所求函数解析式为 $y=-x^2+4x-3$.

⑵ 设所求二次函数为 $y=a(x-h)^2+k$，

因为顶点为 $(-2,3)$，所以 $y=a(x+2)^2+3$.

将 $(-1,5)$ 代入上式，可得

$5=a(-1+2)^2+3$. 所以 $a=2$.

所以所求解析式为 $y=2(x+2)^2+3=2x^2+8x+11$.

⑶ 设所求二次函数解析式为 $y=a(x+2)(x-4)$，

因为顶点坐标为 $\left(1,-\frac{9}{2}\right)$，

所以 $-\frac{9}{2}=a(1+2)(1-4)$ 所以 $a=\frac{1}{2}$.

所以所求二次函数解析式为 $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$，

即 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$.

(4) 设图象与 x 轴交于 A，B 两点，

因为顶点 M 坐标为 (1，16)，对称轴方程为 $x=1$，又 A、B 两点关于直线 $x=1$ 对称，且 A、B 两点距离 8 个单位，

所以 A 点坐标为 $(-3,0)$，B 点坐标为 $(5,0)$.

设所求的二次函数解析式为 $y=a(x+3)(x-5)$.

又图象过 $M(1,16)$，

所以　$16=a(1+3)(1-5)$. 得 $a=-1$.

所以函数解析式为 $y=-(x+3)(x-5)$.

即　$y=-x^2+2x+15$.

激活思维　此例是求二次函数解析式的三种形式的灵活应用，仔细分析所给的条件的特点，选择不同的形式，达到简化的目的.

同类变式　1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(1,0)$，$(-5,0)$，顶点纵坐标为 $\frac{9}{2}$，求这个二次函数的解析式.

解　方法一　由题意，得 $\begin{cases} a+b+c=0, \\ 25a-5b+c=0, \\ 4a-2b+c=\frac{9}{2}. \end{cases}$

解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$，$c=\frac{5}{2}$.

所以二次函数的解析式是 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$.

方法二　由题意，得 $y=a(x-1)(x+5)$，把 $x=-2$，$y=\frac{9}{2}$ 代入得 $a(-2-1)(-2+5)=\frac{9}{2}$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

所以二次函数解析式是 $y=-\frac{1}{2}(x-1)(x+5)$.

即　$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$.

方法三　因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过 x 轴上的点 $(1,0)$、$(-5,0)$，由抛物线的对称性可知，对称轴是直线 $x=-2$.

所以抛物线的顶点是 $\left(-2,\frac{9}{2}\right)$，

所以可设函数解析式为 $y=a(x+2)^2+\frac{9}{2}$，

把 $x=1$，$y=0$ 代入，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

所以二次函数解析式是 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+\frac{9}{2}$.

即 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}$.

2.（荆州市，2002）如图 13－101，已知一抛物线与 x 轴的交点是 $A(-1,0)$、$B(m,0)$，且经过第四象限的 $C(1,n)$，而 $m+n=-1$，$mn=-12$，求此抛物线的解析式.

解 因为点 $(1,n)$ 在第四象限，所以 $n<0$.

由 $m+n=-1$，$m\cdot n=-12$ 得 $m=3$，$n=-4$.

设抛物线的解析式 $y=a(x+1)(x-3)$，

将 $x=1$，$y=-4$ 代入，得 $a=1$.

所以抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

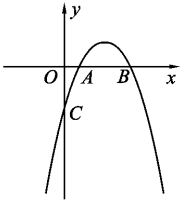


图 13－101

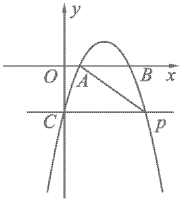


图 13－102

思维拓展 （江西省，2002）如图 13－102，已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点分别为 $A(m,0)$ $B(n,0)$，且 $m+n=4$，$\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$.

(1) 求此抛物线的解析式；

(2) 设此抛物线与 y 轴的交点为 C，过 C 作一条平行于 x 轴的直线交抛物线于另一点 P，求 $\triangle ACP$ 的面积 $S_{\triangle ACP}$.

解 (1) 由 $\begin{cases}m+n=4,\\ \frac{m}{n}=\frac{1}{3}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\ n=3.\end{cases}$

则函数解析式为 $y=-(x-1)(x-3)$，

即 $y=-x^2+4x-3$.

(2) 抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 与 y 轴相交于 $C(0,-3)$，

令 $y=-3$，则有 $-3=-x^2+4x-3$，

整理，得 $x^2-4x=0$，

解之，得 $x_1=0$，$x_2=4$. 所以　点 P 坐标为 $(4,-3)$，

$CP=4$.

所以　$S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}\cdot CP\cdot OC=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$.

【例 5】　(青岛市，2001 年) 阅读下面的文字后，解答问题.

“已知：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(0,a)$，$B(1,-2)$，□. 求证：这个二次函数图象的对称轴是直线 $x=2$.”题目中的矩形框部分是一段被墨水染污了无法辨认的文字.

(1) 根据现有的信息，你能否求出题目中二次函数的解析式？若能，写出求解过程；若不能，说明理由.

(2) 请你根据已有信息，在原题中的矩形框内，填加一个适当的条件，把原题补充完整.

思维技巧　这是一道探求条件的函数开放性题目，知果寻源，且结论不唯一.

解　(1) 因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(0,a)$，$B(1,-2)$，且二次函数图象的对称轴为直线 $x=2$，

所以 $\begin{cases} a=c, \\ -2=a+b+c, \\ -\dfrac{b}{2a}=2. \end{cases}$　解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-4, \\ c=1. \end{cases}$

所以能求出题目中二次函数的解析式，所求解析式为 $y=x^2-4x+1$.

(2) 可供补充的内容有 (任选其一即可)：

①$a=1$ (或 $b=-4$ 或 $c=1$) 与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$. ②与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$. ③与 x 轴的交点坐标为 $(2-\sqrt{3},0)$ (或 $(2+\sqrt{3},0)$). ④最值为 -3. ⑤顶点坐标为 $(2,-3)$. ⑥$b^2-4ac=12$.

激活思维　像本题这样要运用逆向思维，打破常规的固定解题模式，解题过程中常存在以下几个问题：一是不会把对称轴方程 $x=2$ 作为已知条件去用；二是，用了“$x=2$”这个条件，但点的坐标为 $(0,a)$，并没有完全给出. 从表面上看，好像差条件，从而做出“无法求出”的错误结论. 解答本题，有助于培养学生的逆向思维、求异思维品质.

同类变式　(北京市东城区，2002) 有一个二次函数的图象，三位学生分别说出了它的一些特点：

甲:对称轴是直线 $x=4$;

乙:与 x 轴两个交点的横坐标都是整数;

丙:与 y 轴的交点的纵坐标也是整数,且以这三个交点为顶点的三角形面积为 3.

请你写出满足上述全部特点的一个二次函数解析式.

解 设二次函数解析式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

从甲所言,可知 $x_1+x_2=8$.

由乙所述,x_1,x_2 均为整数,不妨取 $x_1=1$,则 $x_2=7$.

所以 $y=a(x-1)(x-7)=a(x^2-8x+7)$,

令 $x=0$,则 $y=7a$.

依据丙指出的特点,知

$\frac{1}{2}\times(x_2-x_1)\times 7a=3$ 所以 $a=\frac{1}{7}$.

所以 $y=\frac{1}{7}(x^2-8x+7)=\frac{1}{7}x^2-\frac{8}{7}x+1$.

同理,可得出 $y=\frac{1}{7}x^2-\frac{8}{7}x+1$ 或 $y=\frac{1}{5}x^2-\frac{8}{5}x+3$ 或 $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x-3$.

思考,$x_1+x_2=8$,x_1,x_2 可取哪些整数?

【例 6】 (荆州市,2001)设二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0,b>0)$ 的图象经过 $(0,y_1)$,$(1,y_2)$ 和 $(-1,y_3)$ 三点,且满足 $y_1^2=y_2^2=y_3^2=1$.

(1)求这个二次函数的解析式;

(2)设这个二次函数的图象与 x 轴的两个交点为 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$,$x_1<x_2$,C 为顶点,连结 AC、BC,动点 P 从 A 点出发沿折线 ACB 运动,求 $\triangle ABP$ 的面积的最大值;

(3)当点 P 在折线 ACB 上运动时,是否存在点 P 使 $\triangle APB$ 的外接圆的圆心在 x 轴上?请说明理由.

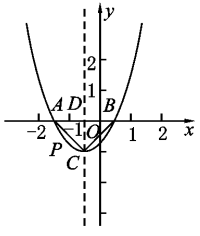


图 13-103

思维技巧 (1)由题目中给出的点 $(0,y_1)$,$(1,y_2)$,$(-1,y_3)$ 和 $y_1^2=y_2^2=y_3^2=1$,不难建立含 a、b、c 的三个方程. (2)由于抛物线与 x 轴的两交点间的距离为定值,当 P 点运动到顶

点时，$\triangle ABP$ 的面积最大；⑶ 要使 $\triangle APB$ 的外心在 x 轴上，即要判定存在一点 P，使 $\angle APB=90°$ 即可.

解　⑴ 由已知，得

$(a+b+c)^2=(a-b+c)^2=c^2=1$. 结合 $a>0$，$b>0$，解得 $a=1$，$c=-1$，$b=1$. 所以　二次函数的解析式为 $y=x^2+x-1$.

⑵ 二次函数 $y=x^2+x-1$ 的顶点 C 的坐标是 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$.

显然，当动点 P 从 A 点出发，沿折线 ACB 运动至顶点 C 时，$\triangle ABP$ 的面积最大.

易知 A、B 两点的坐标是

$\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2},0\right)$、$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},0\right)$.

$AB=|x_2-x_1|=\sqrt{5}$.

所以 $\triangle ABP$ 面积的最大值是 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{8}\sqrt{5}$.

⑶ 设二次函数的对称轴交 x 轴于点 D，则

$AD=BD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$CD=\frac{5}{4}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$\tan\angle DAC=\frac{CD}{AD}=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$，

所以　$\angle DAC>45°$.

因为　$CA=CB$，所以　$\angle ACB<90°$.

所以 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

所以在折线 ACB 上一定存在点 P，使 $\angle APB=90°$，即存在点 P 使 $\triangle APB$ 的外接圆的圆心在 x 轴上.

激活思维　本题将“坐标系——函数——几何——运动（动点）——三角函数”结合于一体，题目综合性较强，涉及的知识点也较多，既有静，又有动，既有常规问题的解答，又有对点的存在性问题的探究，对灵活运用数学知识的综合能力有较高的要求.

同类变式　（江苏省无锡市，2001）已知直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$（$m>0$）与 x 轴、y 轴分别交于点 C 和点 E，过 E 点的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 D，如果 $\triangle CDE$ 恰为一等边三角形.

⑴ 求 b 的值；

⑵ 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点分别为 $A(x_1,0)$、

$B(x_2,0)$ $(x_1<x_2)$，问是否存在这样的实数 m，使$\angle AEC=90°$？如果存在，求出此时 m 的值 如果不存在，请说明理由.

解 ⑴依题意 $E(0,m)$，$C(\sqrt{3}m,0)$，$CE=2m$.

所以 $\angle OCE=30°$，又$\triangle CDE$ 为等边三角形，

所以 $CD\perp x$ 轴，即 $D(\sqrt{3}m,2m)$.

则此抛物线可设为

$y=a(x-\sqrt{3}m)^2+2m$.

又抛物线过点 $E(0,m)$，

所以 $m=a(0-\sqrt{3}m)^2+2m$

所以 $a=-\dfrac{1}{3m}$.

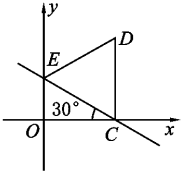


图 13－104

所以抛物线解析式为 $y=-\dfrac{1}{3m}(x-\sqrt{3}m)^2+2m=-\dfrac{1}{3m}x^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+m$.

所以 $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

⑵若$\angle AEC=90°$，

因为 $\angle ACE=30°$，$CE=2m$，

所以 $\cos\angle ACE=\dfrac{CE}{AC}$，即 $AC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}m$.

又因为 $AC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|$，

所以 $4\times\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}m\right)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$.

由 $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$c=m$，可得 $16(am)^2+3am-1=0$.

因为 $am=-\dfrac{1}{3}$，所以 $16(am)^2+3am-1=0$ 不能成立.

即不存在这样的实数 m，使$\angle AEC=90°$.

思维拓展 1.（镇江市，2002）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$、$B(3,0)$、$C(0,3)$ 三点.

⑴求抛物线的解析式和顶点 M 的坐标，并在给定的直角坐标系中画出这条抛物线.

⑵若点 (x_0,y_0) 在抛物线上，且 $0\leqslant x_0\leqslant 4$，试写出 y_0 的取值范围.

⑶设平行于 y 轴的直线 $x=t$ 交线段 BM 于点 P（点 P 能与点 M 重合，不能与点 B 重合），交 x 轴于点 Q，四边形 $AQPC$ 的面积为 S.

(Ⅰ)求 S 关于 t 的函数关系式以及自变量 t 的取值范围.

(Ⅱ)求 S 取得最大值时点 P 的坐标.

(Ⅲ)设四边形 $OBMC$ 的面积为 S',判断是否存在点 P,使得 $S=S'$.若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

解　(1)由题意,得 $\begin{cases}a-b+c=0,\\9a+3b+c=0,\\c=3.\end{cases}$

解得 $a=-1,b=2,c=3$.

所以　抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$,顶点 M 的坐标为 $(1,4)$.

(2)由图象知:当 $0\leqslant x_0\leqslant 4$ 时,$-5\leqslant y_0\leqslant 4$.

(3)(ⅰ)直线 BM 的解析式为 $y=-2x+6$.

由方程组 $\begin{cases}x=t,\\y=-2x+6,\end{cases}$ 得点 P 的坐标为 $(t,-2t+6)$.

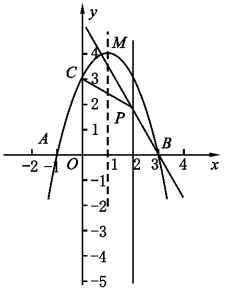


图 13-105

则 $S=S_{\triangle AOC}+S_{四边形OQPC}$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times 3+\frac{1}{2}(3+6-2t)\cdot t$$

$$=-t^2+\frac{9}{2}t+\frac{3}{2},1\leqslant t<3.$$

(Ⅱ)由于 $1\leqslant t<3$,故当 $t=-\dfrac{\frac{9}{2}}{2\times(-1)}=\dfrac{9}{4}$ 时,S 有最大值,此时点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{3}{2}\right)$.

(Ⅲ)方法一:$S'=S_{\triangle OMC}+S_{\triangle OBM}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 1+\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=\dfrac{15}{2}$.

假设存在满足条件的点 P,则由 $S'=S$ 确定的关于 t 的方程必有实数根.①

而由 $S'=S$,得 $-t^2+\dfrac{9}{2}t+\dfrac{3}{2}=\dfrac{15}{2}$,即 $2t^2-9t+12=0$,其根的判别式 $\Delta=(-9)^2-4\times 2\times 12=-15<0$,这与①矛盾,

所以不存在这样的点 P.

方法二:由(Ⅱ)知,当 $t=\dfrac{9}{4}$ 时,$S_{最大值}=\dfrac{4\times(-1)\times\frac{3}{2}-(\frac{9}{2})^2}{4\times(-1)}=\dfrac{105}{16}$.

又 $S'=S_{\triangle OMC}+S_{\triangle OBM}=\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{15}{2}$，

所以 $S_{最大值}<S'$，这与 $S'=S$ 矛盾.

所以不存在这样的点 P.

2. (随州市，2002) 已知开口向上的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的一个交点是点 A (4，0)，另一个交点是点 B，与 y 轴交于点 C，且该抛物线顶点的横坐标为 1，$\triangle AOC$ 的面积为 6.

(1) 求出点 B 和点 C 的坐标；

(2) 求出该抛物线的解析式；

(3) 在以 A、B、C 三点为顶点的 $\triangle ABC$ 中，设点 M 是 AC 边上的一个动点，过点 M 作 $MN\parallel AB$，交 BC 于点 N. 试问：在 x 轴上是否存在点 P，使得 $\triangle PMN$ 为等腰直角三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

解 (1) 因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的一个交点为 A (4，0)，且它的对称轴为直线 $x=1$.

所以 由其对称性知 B (−2，0).

由题意，点 C 的坐标为 (0，c)，$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC=\frac{1}{2}\times4\times|c|=6$.

所以 $c=3$ 或 -3.

又抛物线的开口向上，所以取 $c=-3$，即 C (0，−3).

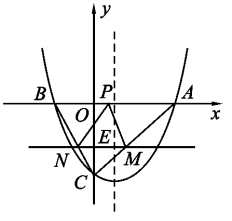


图 13−106

(2) 由题意，设所求抛物线的解析式为 $y=a(x-4)(x+2)$，把 C (0，−3) 代入，得 $a=\frac{3}{8}$.

所以所求抛物线的解析式为 $y=\frac{3}{8}(x-4)(x+2)$，

即 $y=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x-3$.

(3) 设满足条件的点 P 存在，MN 交 y 轴于点 E.

①当 MN 为等腰直角三角形 PMN 的一腰时，过点 M 作 $MP\perp x$ 轴于点 P，设 $MN=a$，则 $MP=EO=a$，

因为 $MN\parallel AB$，所以 $\frac{MN}{AB}=\frac{CE}{CO}$，即 $\frac{a}{6}=\frac{3-a}{3}$，$a=2$.

所以过点 E 且平行于 x 轴的直线 MN 可记为 $y=-2$.

又过点 $A(4,0)$、$C(0,-3)$ 的直线为 $y=\frac{3}{4}x-3$.

所以　$M\left(\frac{4}{3},-2\right)$，$P$ 点坐标为 $\left(\frac{4}{3},0\right)$.

若过点 N 作 $NP_1\perp x$ 轴于 P_1，易求出点 P_1 的坐标为 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

②当 MN 为等腰直角三角形 PMN 的底边时，设 $MN=b$，则 $EO=\frac{1}{2}b$.

所以　$\frac{b}{6}=\frac{3-\frac{1}{2}b}{3}$，$b=3$，所以　$MN=3$，$EO=\frac{3}{2}$.

在 $y=\frac{3}{4}x-3$ 中，当 $y=-\frac{3}{2}$ 时，$x=2$，即 $M\left(2,-\frac{3}{2}\right)$.

由 $MN=3$，$M\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ 知 MN 中点的坐标为 $F\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

过点 F 作 $FP_2\perp x$ 轴于 P_2，则 $P_2\left(\frac{1}{2},0\right)$.

所以满足条件的点 P 的坐标为 $\left(\frac{4}{3},0\right)$ 或 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2},0\right)$

3. (哈尔滨市，2001) 已知，如图 13－107，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，它们的横坐标分别为 -1 和 3，与 y 轴交点 C 的纵坐标为 3，$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为点 M.

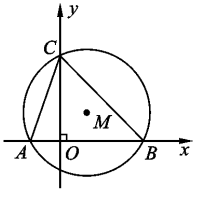


图 13－107

(1) 求这条抛物线的解析式；

(2) 求图象经过 M、A 两点的一次函数解析式；

(3) 在 (1) 中的抛物线上是否存在点 P，使过 P、M 两点的直线与 $\triangle ABC$ 的两边 AB、BC 的交点 E、F 和点 B 所组成的 $\triangle BEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

解　(1) 依题意可设抛物线的解析式 $y=a(x+1)(x-3)$.

又抛物线过点 $C(0,3)$，

所以 $3=a(0+1)(0-3)$，$a=-1$.

即抛物线解析式为 $y=-(x+1)(x-3)$.

或 $y=-x^2+2x+3$.

(2) 因为　$A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3)$，

所以△BOC 为等腰直角三角形.

延长 CM 交⊙M 于 D,连 AD,如图 13－108,则△CAD 为等腰直角三角形,

因为 $AC=\sqrt{10}$,所以 $CD=2\sqrt{5}$.

作弦 AB 的弦心距 MG,因为 $AB=4$,所以 $BG=2$.所以 $OG=1$,

$MG=\sqrt{BM^2-BG^2}=\sqrt{5-4}=1$.

所以 $M(1,1)$.

因此经过 M、A 两点的一次函数解析式为$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

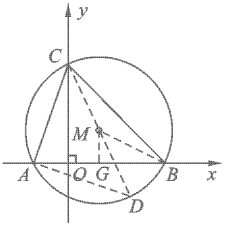


图 13－108

(3)依题意知,当 $ME\parallel AC$ 时,△BEF 与△ABC 必定相似.

因为直线 AC 的解析式为 $y=3x+3$,

所以易求得直线 ME 的解析式为 $y=3x-2$.

联立 $\begin{cases}y=3x-2,\\ y=-x^2+2x+3.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2},\\ y_1=\frac{-7+3\sqrt{21}}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2},\\ y_2=\frac{-7-3\sqrt{21}}{2}.\end{cases}$

故存在 $P_1\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2},\frac{-7+3\sqrt{21}}{2}\right)$,$P_2\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2},\frac{-7-3\sqrt{21}}{2}\right)$ 符合题目条件.

当 ME 与 AC 不平行时,只要$\frac{BE}{BC}=\frac{BF}{AB}$,便可保证△$BEF$∽△$BCA$.

设过 E、F 点的直线解析式为 $y=kx+b$,

因为 M 点在 EF 上,所以 $1=k+b$,$b=1-k$,

所以 $y=kx+(1-k)$.

过 B、C 两点直线解析式为 $y=-x+3$,

易求得 $E\left(\frac{k-1}{k},0\right)$ 所以 $BE=3-\frac{k-1}{k}=\frac{2k+1}{k}$,

联立 $\begin{cases}y=kx+(1-k),\\ y=-x+3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{k+2}{k+1},\\ y=\frac{2k+1}{k+1},\end{cases}$.

即 $F\left(\frac{k+2}{k+1},\frac{2k+1}{k+1}\right)$，所以　$BF=\sqrt{2}\cdot\frac{2k+1}{k+1}=\frac{\sqrt{2}(2k+1)}{k+1}$.

由 $\frac{BE}{BC}=\frac{BF}{AB}$，得 $\frac{\frac{2k+1}{k}}{3\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}(2k+1)}{k+1}}{4}$

即 $(2k+1)(k-2)=0$，所以　$k=2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$（不合题意舍去）.

所以直线 EF 的解析式为 $y=2x-1$.

联立 $\begin{cases}y=2x-1,\\ y=-x^2+2x+3,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}$　$\begin{cases}x=-2,\\ y=-5.\end{cases}$

所以存在点 $P_3(2,3)$，$P_4(-2,-5)$ 符合题意.

综上知，存在点 P_1，P_2，P_3，P_4 符合题意.

【例 7】　（河北省，2000）某跳水运动员进行 10 m 跳台跳水训练，身体（看成一点）在空中的运动路线是如图 13－109 所示坐标系下经过原点 O 的一条抛物线（图中标出的数据为已知条件）.

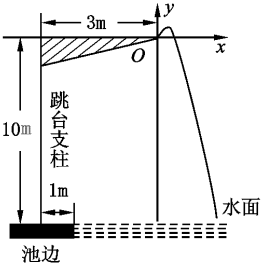


图 13－109

在跳某个规定动作时，正常情况下，该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$ m，入水处距池边的距离为 4 m，同时，运动员在距水面高度为 5 m 以前，必须完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势，否则就会出现失误.

(1) 求这条抛物线的解析式；

(2) 在某次试跳中，测得运动员在空中的运动路线是 (1) 中的抛物线，且运动员在空中调整好入水姿势时，距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m，问此次跳水

会不会失误？并通过计算说明理由.

思维技巧　这是二次函数在体育运动方面的应用.解答此类问题的关键是将实际问题转化为数学问题,建立数学模型.

解　(1)在给定的直角坐标系下,设最高点为 A,入水点为 B,抛物线的解析式为：$y=ax^2+bx+c$.由题意 知,O、B 两点的坐标依次为 $(0,0)$,$(2,-10)$,且顶点 A 的纵坐标为 $\frac{2}{3}$,

所以 $\begin{cases} c=0, \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{2}{3}, \\ 4a+2b+c=-10. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-\frac{25}{6}, \\ b=\frac{10}{3}, \\ c=0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\frac{3}{2}, \\ b=-2, \\ c=0. \end{cases}$

因为抛物线对称轴在 y 轴右侧,

所以　$-\frac{b}{2a}>0$.又因为抛物线开口向下,

所以　$a<0$,

所以　$b>0$.所以　$a=-\frac{25}{6}, b=\frac{10}{3}, c=0$.

所以抛物线的解析式为 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$.

(2)当运动员在空中距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m 时,

即 $x=3\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}$ 时,

$y=\left(-\frac{25}{6}\right)\times\left(\frac{8}{5}\right)^2+\frac{10}{3}\times\frac{8}{5}=-\frac{16}{3}$.

所以此时运动员距水面的高为 $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}<5$.

因此,此次试跳会出现失误.

激活思维　对于实际生活中的问题,建立二次函数模型是关键.利用特殊点求出二次函数的解析式是基本方法.

同类变式　1.(菏泽市,2002)如图 13－110 表示近 5 年来某市的财政收入情况,图中 x 轴上的 1,2,…5 依次表示第 1 年,第 2 年,…,第 5 年,即 1997 年,1998 年,…2001 年.可以看出,图中的折线近似于抛物线的一部分.

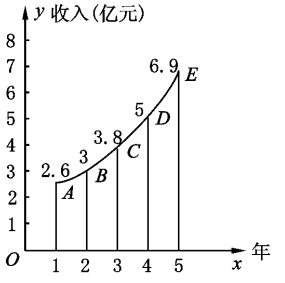


图 13－110

(1) 请你求出过 A、C、D 三点的二次函数的解析式.

(2) 分别求出当 $x=2$ 和 $x=5$ 时 (1) 中的二次函数的函数值,并分别与 B、E 两点的纵坐标相比较.

(3) 利用 (1) 中的二次函数的解析式预测今年该市的财政收入.

思路分析　(1) 从题意知,此折线近似于抛物线的一部分,说明是与二次函数有关的应用问题,首先要求出二次函数的解析式,而读懂图象正确写出 A (1,2.6),C (3,3.8),D (4,5) 尤为重要. (2)、(3) 两小题借助函数解析式解决实际问题.

解　(1) 设所求二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

由图象知 A,C,D 三点的坐标分别为 (1,2.6),(3,3.8),(4,5),代入 $y=ax^2+bx+c$,得

$$\begin{cases} a+b+c=2.6, \\ 9a+3b+c=3.8, \\ 16a+4b+c=5. \end{cases}$$

解得 $a=0.2$,$b=-0.2$,$c=2.6$.

所以　所求二次函数的解析式为 $y=0.2x^2-0.2x+2.6$.

(2) 由解析式知,当 $x=2$ 时,$y=3$,此时所求函数值与 B 点纵坐标的误差为 0 亿元.

当 $x=5$ 时,$y=6.6$,

此时所求函数值与 E 点纵坐标的误差为 0.3 亿元.

(3) 把 $x=6$ 代入解析式,得 $y=8.6$,

所以预测 2002 年该市的财政收入约为 8.6 亿元.

2. (吉林省,2001) 如图 13－111,一位运动员在距篮下 4 m 处跳起投篮,球运行的路线是抛物线,当球运行的水平距离为 2.5 m 时,达到最大高度 3.5 m,然后准确落入篮圈,已知篮圈中心到地面的距离为 3.05 m.

(1) 建立如图所示的直角坐标系,求抛物线的解析式.

(2) 该运动员身高 1.8 m,在这次跳投中,球在头顶上方 0.25 m 处出手,问:球出手时,他跳离地面的高度是多少?

(抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$)

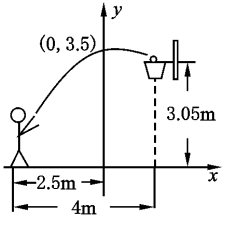


图 13－111

解 (1) 依题意,知抛物线顶点坐标为 (0,3.5),故可设其解析式为 $y=ax^2+3.5$.

又因为点 (1.5,3.05) 在抛物线上,

所以 $3.05=1.5^2a+3.5$,解得 $a=-0.2$.

所以 $y=-0.2x^2+3.5$.

(2) 当 $x=-2.5$ 时,

$y=-0.2\times(-2.5)^2+3.5=2.25$.

$2.25-1.8-0.25=0.20$ (m).

答:球出手时,他距离地面高度是 0.20 m.

思维拓展 1. (兰州市,2002 年) 如图 13－112,这是某次运动会开幕式上点燃火炬时在平面直角坐标系中的示意图,在地面有 O、A 两个观测点,分别测得目标点火炬 C 的仰视角为 α、β,$OA=2$ m,$\tan\alpha=\frac{3}{5}$,$\tan\beta=\frac{2}{3}$,位于点 O 正上方 2 m 处的 D 点发射装置,可以向目标 C 发射一个火球点燃火炬,该火球运行的轨迹为一抛物线,当火球运行到距地面最大高度 20 m 时,相应的水平距离为 12 m (图中 E 点).

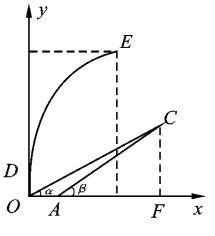


图 13－112

(1) 求火球运行轨迹的抛物线对应的函数解析式.

⑵ 说明按⑴中轨迹运行的火球能否点燃目标 C.

解　⑴ 由已知得 $D(0,2)$，$E(12,20)$，且 E 为顶点，故可设抛物线解析式为：

$y=a(x-12)^2+20$.

把 D 点坐标代入，得 $2=a(0-12)^2+20$，所以 $a=-\frac{1}{8}$.

所以火球运行轨迹的抛物线对应的函数解析式为

$y=-\frac{1}{8}(x-12)^2+20$，即 $y=-\frac{1}{8}x^2+3x+2$.

⑵ 设 C 点坐标为 (x_1,y_1)，如图 13－112 所示，过 C 作 CF 垂直 x 轴，垂足为 F. 则在 $\mathrm{Rt}\triangle OFC$ 中，$OF=x_1$，$CF=y_1$，所以 $\tan\alpha=\frac{CF}{OF}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{3}{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFC$ 中，$CF=y_1$，$AF=x_1-2$，所以 $\tan\beta=\frac{CF}{AF}=\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{2}{3}$.

联立得 $\begin{cases}\frac{y_1}{x_1}=\frac{3}{5},\\ \frac{y_1}{x_1-2}=\frac{2}{3}.\end{cases}$　解之，得 $\begin{cases}x_1=20,\\ y_1=12.\end{cases}$

即 C 点坐标为 $(20,12)$，代入函数解析式 $y=-\frac{1}{8}x^2+3x+2$ 验证，符合解析式，所以 C 点在此抛物线上，即火球能到达 C 点（火炬处），能够点燃目标.

2. （郑州市，2002）图 13－113 是某市一处十字路口立交桥的横断面在平面直角坐标系中的示意图. 横断面的地平线为 x 轴，横断面的对称轴为 y 轴，桥拱的 DGD' 部分为一段抛物线，顶点 G 的高度为 8 m，AD 和 $A'D'$ 是两侧高为 5.5 m 的支柱，OA 和 OA' 为两个方向的汽车通行区，宽都为 15 m，线段 CD 和 $C'D'$ 为两段对称的上桥斜坡，其坡度为 1∶4.

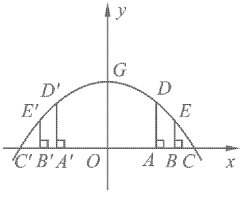


图 13－113

⑴ 求桥拱 DGD' 所在抛物线的解析式及 CC' 的长.

⑵ BE 和 $B'E'$ 为支撑斜坡的立柱，其高都为 4 m，相应的 AB 和 $A'B'$ 为两个方向的行人及非机动车的通行区，试求 AB 和 $A'B'$ 的宽.

⑶ 按规定汽车通过该桥时，载货最高处和桥拱之间的距离不得小于 0.4 m.

今有一大型运货汽车，装载某大型设备后，其宽为 4 m，车载大型设备的顶部与地面的距离均为 7 m，它能否从 OA（或 OA'）区域安全通过？请说明理由.

解 (1) 设 DGD' 所在的抛物线的解析式为 $y=ax^2+k$，将点 G (0，8) 及点 D (15，5.5) 分别代入，得方程组 $\begin{cases}k=8,\\15^2a+k=5.5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=8,\\a=-\dfrac{1}{90}.\end{cases}$

所以 DGD' 所在抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{90}x^2+8$.

因为 $i=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{1}{4}$，且 $AD=A'D'=5.5$，

所以 $AC=4AD=4\times5.5=22$，$OA=15$，

所以 $CC'=2(AO+AC)=2(15+22)=74$ (m).

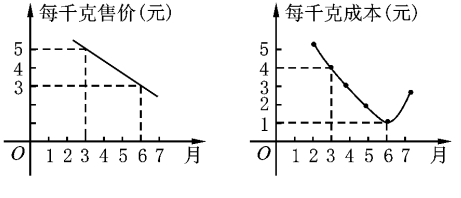
(2) 因为 $i=\dfrac{EB}{BC}=\dfrac{1}{4}$，所以 $BC=4BE=4\times4=16$，$BE=4$.

所以 $AB=A'B'=AC-BC=22-16=6$ (m).

(3) 答：该大型货车可以从 OA（或 OA'）区域安全通过. 因为在 $y=-\dfrac{1}{90}x^2+8$ 中，当 $x=4$ 时，$y=7\dfrac{37}{45}$，且 $7\dfrac{37}{45}-(7+0.4)=\dfrac{19}{45}>0$，

所以该大型货车装载某大型设备后，可以从 OA（或 $O'A'$）区域安全通过.

【例 8】 (金华市、衢州市，2001) 某瓜果基地市场部为指导该基地某种蔬菜的生产和销售，在对历年市场行情和生产情况进行了调查的基础上，对今年这种蔬菜上市后的市场售价和生产成本进行了预测，提供了两个方面的信息，如图 13－114 所示.



甲　　乙

图 13－114

注：甲、乙图中的每个实心黑点所对应的纵坐标分别指相应月份的售价和成本，生产成本 6 月份最低。图甲中的图象是线段，图乙中的图象是抛物

线段.

请你根据图象提供的信息说明：

(1) 在3月份出售这种蔬菜，每千克的收益是多少元？(收益 = 售价 − 成本)

(2) 哪个月出售这种蔬菜，每千克的收益最大？说明理由.

思维技巧　此题是同时运用一次函数、二次函数的图象及其性质来解答的应用题. 要善于从图象中建立两个函数间的联系，利用“收益 = 售价 − 成本”建立函数关系，是解答此题的关键.

解　(1) 从甲图知，3月份出售这种蔬菜，每千克的售价为5元，从乙图知，3月份购买这种蔬菜的成本为每千克4元，根据收益 = 售价 − 成本，易知在3月份出售这种蔬菜，每千克的收益是1元.

(2) 设图甲中图象的函数关系式为 $y_{甲}=kx+b$，图乙中图象的函数关系式为 $y_{乙}=a(x+m)^2+n$，则每千克收益为 $y=y_{甲}-y_{乙}$ (元).

由图象知：点 $(3,5)$，$(6,3)$ 在 $y=kx+b$ 的图象上，

所以 $\begin{cases}5=3k+b,\\3=6k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{2}{3},\\b=7.\end{cases}$

所以 $y_{甲}=-\dfrac{2}{3}x+7.$

抛物线 $y_{乙}=a(x+m)^2+n$ 的顶点坐标为 $(6,1)$，又过点 $(3,4)$，

所以 $y_{乙}=a(x-6)^2+1$，

所以 $4=a(3-6)^2+1$，$a=\dfrac{1}{3}$.

所以 $y_{乙}=\dfrac{1}{3}(x-6)^2+1.$

所以 $y=y_{甲}-y_{乙}=-\dfrac{2}{3}x+7-\dfrac{1}{3}(x-6)^2-1$，

所以 $y=-\dfrac{1}{3}(x-5)^2+\dfrac{7}{3}.$

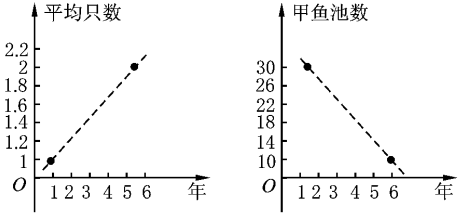
所以　当 $x=5$ 时，y 值最大.

答：5月份出售这种蔬菜，每千克收益最大.

同类变式　(荆州市，2000) 甲、乙两人连续6年对某县农村甲鱼养殖业的规模 (产量) 进行调查，提供了两个方面的信息，如图13−115甲、乙所示.

甲调查表明：每个甲鱼池平均出产量从第一年1万只甲鱼上升到第6年2万只；

乙调查表明：甲鱼池个数由第1年30个减少到第6年10个.



甲　　乙

图 13－115

请你根据提供的信息说明：

(1) 第 2 年甲鱼池的个数及全县出产甲鱼的总数.

(2) 到第 6 年这个县的甲鱼养殖业的规模比第 1 年是扩大了还是缩小了？说明理由.

(3) 哪一年的规模最大？说明理由.

解 (1) 第 2 年甲鱼池的个数为 26 个，全县出产甲鱼的总数为 $26\times1.2=31.2$ (万只).

(2) 规模缩小.

原因是 第 1 年出产甲鱼总数 30 万只，而第 6 年出产甲鱼总数为 20 万只.

(3) 由图甲知直线 $y_{甲}=kx+b$ 经过点 (1,1) 和点 (6,2)，可求得 $k=0.2$，$b=0.8$.

所以 $y_{甲}=0.2(x+4)$.

同理可得图乙直线 $y_{乙}=4\left(-x+\frac{17}{2}\right)$.

设第 x 年规模最大，即求

$$y_{甲}\cdot y_{乙}=0.2(x+4)\times4\left(-x+\frac{17}{2}\right)$$

$$=-0.8x^2+3.6x+27.2 \text{ 的最大值.}$$

当 $x=-\frac{3.6}{2\times(-0.8)}=2\frac{1}{4}\approx2$ 时.

$y_{甲}\cdot y_{乙}=-0.8\times4+3.6\times2+27.2=31.2$ 最大

即第二年规模最大，为 31.2 万只.

思维拓展 (黄石市，2001) 一蔬菜基地种植的某种绿色蔬菜，根据今年

的市场行情,预计从 5 月 1 日起的 50 天内,它的市场售价 y_1 与上市的时间 x 的关系可用图 13－116 (1) 的一条线段表示;它的种植成本 y_2 与上市时间 x 的关系可用图 13－116 (2) 中抛物线的一部分来表示.

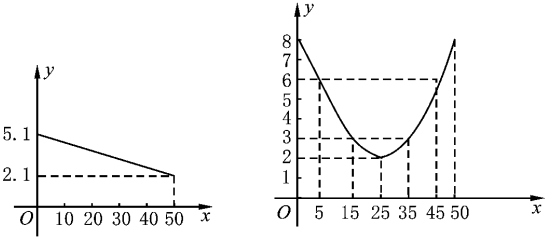


图 13－116

(1) 求出图 13－116 (1) 中表示的市场售价 y_1 与上市的时间 x 的函数关系式.

(2) 求出图 13－116 (2) 中表示的种植成本 y_2 与上市时间 x 的函数关系式.

(3) 假定市场售价减去种植成本为纯利润,问哪天上市的这种绿色蔬菜既不赔本也不赚钱? (市场售价和种植成本的单位:元/kg,时间单位:天,$12^2=144$,$13^2=169$,$14^2=196$).

解　(1) 由图 13－116 (1) 知,直线经过 (50,2.1),(0,5.1) 两点,所以函数解析式为 $y_1=-\frac{3}{50}x+5.1$ $(0\leqslant x\leqslant 50)$.

(2) 观察图 13－116 (2) 知,抛物线的顶点为 (25,2),且过点 (5,6).

设抛物线解析式为 $y_2=a(x-25)^2+2$,

将 $x=5$,$y_2=6$ 代入得

$6=a(5-25)^2+2$,$a=\frac{1}{100}$,

所以　$y_2=\frac{1}{100}(x-25)^2+2$

即　$y_2=\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{33}{4}$ $(0\leqslant x\leqslant 50)$,

(3) 依题意有

$y=y_1-y_2=-\frac{1}{100}(x^2-44x+315)$ $(0\leqslant x\leqslant 50)$

当 $y=0$ 时，即 $-\frac{1}{100}(x^2-44x+315)=0$，

解得 $x=9$ 或 $x=35$ 时，

即从 5 月 1 日起第 9 天或第 35 天上市的这种绿色蔬菜既不赔本也不赚钱.

综合能力测试

基础能力训练

1．填空题

(1) (江苏盐城，2002) 抛物线 $y=x^2-2x+3$ 的顶点坐标为_____.

(2) (山西省，2002) 若点 $P(1,a)$ 和 $Q(-1,b)$ 都在抛物线 $y=-x^2+1$ 上，则线段 PQ 的长是_____.

(3) (黑龙江省，2002) 若二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $(-4,0)$、$(2,6)$，则这个二次函数的解析式为_____.

(4) (金华市，2002) 函数 $y=ax^2-ax+3x+1$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点，那么 a 的值和交点坐标分别为_____.

(5) (山西省，2003) 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象如图 13－117 所示，则函数值 $y<0$ 时，对应 x 的取值范围是_____.

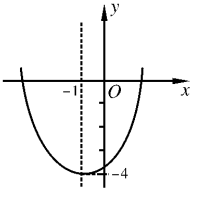


图 13－117

(6) (天津市，2003) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=2$，且经过点 $(1,4)$ 和点 $(5,0)$，则该抛物线的解析式为_____.

(7) (黑龙江省，2003) 已知抛物线 $y=ax^2+x+c$ 与 x 轴交点的横坐标为 -1，则 $a+c=$_____.

(8) (宁波市，2003) 已知抛物线 $y=x^2+x+b^2$ 经过点 $\left(a,\frac{1}{4}\right)$ 和 $(-a,y_1)$，则 y_1 的值是_____.

(9) (北京市海淀区，2003) 已知二次函数 $y=kx^2+(2k-1)x-1$ 与 x 轴交点的横坐标为 x_1、x_2 $(x_1<x_2)$，则对于下列结论：①当 $x=-2$ 时，$y=1$；②当 $x>x_2$ 时，$y>0$；③方程 $kx^2+(2k-1)x-1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2；④$x_1<-1$，$x_2>-1$；⑤$x_2-x_1=\frac{\sqrt{1+4k^2}}{k}$，其中所有正确的结论是_____ (只需填写序号).

(10) (苏州市,2001) 已知抛物线 $y=x^2+(m-1)x-\frac{1}{4}$ 的顶点的横坐标是 2,则 m 的值是_____.

(11) (荆州市,2001) 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象过点 $A(c,0)$,且关于直线 $x=2$ 对称,则这个二次函数的解析式可能是_____. (只要求写出一个可能的解析式)

(12) (温州市,2001) 已知抛物线 $y=x^2+2(k+1)x-k$ 与 x 轴有两个交点,且这两个交点分别在直线 $x=1$ 的两侧,则 k 的取值范围是_____.

(13) (黑龙江省,2001) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(1,0)$,$(-1,-6)$,$(2,6)$,则该抛物线与 y 轴交点的纵坐标为_____.

(14) (常州市,2001) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 13-118 所示,①这个二次函数的解析式是_____;②当 $x=$_____时,$y=3$;③根据图象回答:当 x _____时,$y>0$.

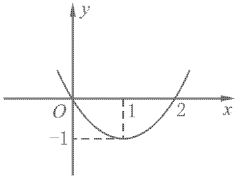


图 13-118

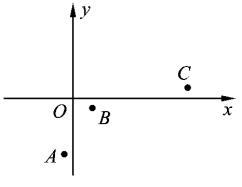


图 13-119

(15) (苏州市,2001) 如图 13-119,A、B、C 是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$) 的图象上的三点.根据图中给出的三点位置情况,可得 a、c、Δ ($\Delta=b^2-4ac$) 与零的大小关系是:

a ____ 0,c ____ 0,Δ ____ 0 (填入“$>$”、“$<$”或“$=$”)

(16) (台州,2001) 平面上,经过点 $A(2,0)$,$B(0,-1)$ 的抛物线有无数条,请写出其中一条确定的抛物线的解析式 (不含字母系数):_____ (写成一般式).

(17) (大连市,2000) 已知二次函数 $y=x^2+(a-b)x+b$ 的图象如图 13-120,那么化简 $\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}+|b|}{a}$ 的结果是_____.

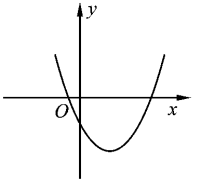


图 13－120

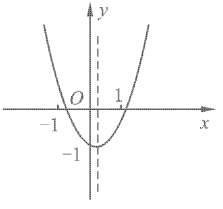


图 13－121

(18) (包头市,2000) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$) 的图象如图 13－121,则由抛物线的特征可以得到含有 a、b、c 三个字母的等式或不等式为_____ (只需写出一个你认为正确的即可).

2. 选择题

(1) (北京市海淀区,2003) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 13－122 所示,则下列结论正确的是 (　　)

A. $a>0,b<0,c>0$　　B. $a<0,b<0,c>0$

C. $a<0,b>0,c<0$　　D. $a<0,b>0,c>0$

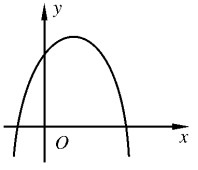


图 13－122

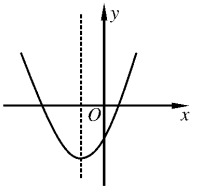


图 13－123

(2) (天津市,2003) 如图 13－123,已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象,则一次函数 $y=ax+bc$ 的图象不经过 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(3) (淄博市,2003) 周长是 4 m 的矩形,它的面积 S (m^2) 与一边长 x (m) 的函数图象大致是图 13－124 中的 (　　)

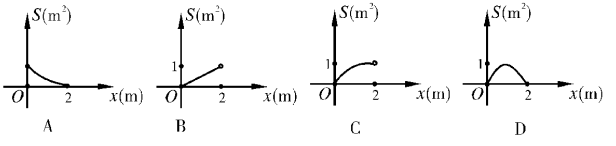


图 13－124

(4) (兰州市,2003) 已知如图 13－125,直线 $y=x$ 与二次函数 $y=ax^2-2x-1$ 的图象的一个交点 M 的横坐标为 1,则 a 的值为(　　)

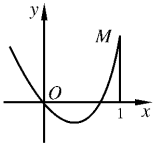


图 13－125

A. 2　　B. 1　　C. 3　　D. 4

(5) (杭州市,2003) 把抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的图象向右平移 3 个单位,再向下平移 2 个单位,所得图象的解析式是 $y=x^2-3x+5$,则有(　　)

A. $b=3,c=7$　　B. $b=-9,c=-15$

C. $b=3,c=3$　　D. $b=-9,c=21$

(6) (岳阳市,2003) 二次函数 $y=-2x^2+4x-5$ 的对称轴、顶点坐标分别是(　　)

A. 直线 $x=1$,$(1,-3)$　　B. 直线 $x=-1$,$(-1,-3)$

C. 直线 $x=1$,$(1,3)$　　D. 直线 $x=-1$,$(-1,3)$

(7) (武汉市,2003) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ 经过点 $(-1,0)$,且满足 $4a+2b+c>0$. 以下结论:① $a+b>0$;② $a+c>0$;③ $-a+b+c>0$;④ $b^2-2ac>5a^2$. 其中正确的个数有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(8) (武汉市、益阳市,2003) 若二次函数 $y=ax^2+c$,当 x 取 x_1、x_2 $(x_1\neq x_2)$ 时,函数值相等,则当 x 取 x_1+x_2 时,函数值为(　　)

A. $a+c$　　B. $a-c$　　C. $-c$　　D. c

(9) (厦门市,2003) 已知以 $(-1,0)$ 为圆心,1 为半径的 $\odot M$ 和抛物线 $y=x^2+6x+11$,现有两个命题:

(1) 抛物线 $y=x^2+6x+11$ 与 $\odot M$ 没有交点;

(2) 将抛物线 $y=x^2+6x+11$ 向下平移 3 个单位,则此抛物线与 $\odot M$ 相交.

则以下结论正确的是(　　)

A. 只有命题 (1) 正确　　B. 只有命题 (2) 正确

C. 命题(1)、(2)　　D. 命题(1)、(2)都不正确

(10)(黄冈市,2002)已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 13－126 所示,那么下列判断正确的是(　　)

A. $abc>0$　　B. $b^2-4ac>0$

C. $2a+b>0$　　D. $4a-2b+c<0$

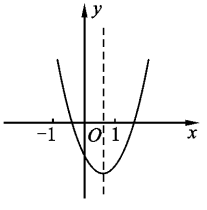


图 13－126

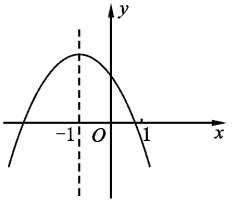


图 13－127

(11)(哈尔滨市,2002)已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 13－127 所示,下列结论中:①$abc>0$;②$b=2a$;③$a+b+c<0$;④$a-b+c>0$.正确的个数是(　　)

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

(12)(北京市西城区,2001)无论 m 为任何实数,二次函数 $y=x^2+(2-m)x+m$ 的图象总经过的点是(　　)

A. (1,3)　　B. (1,0)　　C. (－1,3)　　D. (－1,0)

(13)(湖州,2001)已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 中,$4a-b=0$,$a-b+c>0$,抛物线与 x 轴有两个不同的交点,且这两个交点之间的距离小于 2,则下列判断错误的是(　　)

A. $abc<0$　　B. $c>0$　　C. $4a>c$　　D. $a+b+c>0$

(14)(武汉市,2001)已知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 13－128 所示,则下列关系式中成立的是(　　)

A. $0<-\frac{b}{2a}<1$　　B. $0<-\frac{b}{2a}<2$,但 $-\frac{b}{2a}$ 与 1 无法比较大小

C. $1<-\frac{b}{2a}<2$　　D. $-\frac{b}{2a}=1$

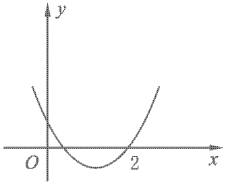


图 13－128

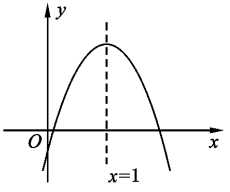


图 13－129

(15) (福州市,2001) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图象如图 13－129 所示,下列结论:

①$c<0$,②$b>0$,③$4a+2b+c>0$,④$(a+c)^2<b^2$,其中正确的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(16) (宁波市,2001) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 13－130,则在下列等式中,成立的个数是(　　)

①$abc<0$;②$a+b+c<0$;

③$a+c>b$;④$a<\frac{c-b}{2}$.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

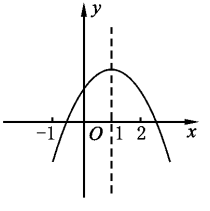


图 13－130

(17) (连云港,2001) 已知函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$,给出下列四个判断:①$a>0$;②$2a+b=0$;③$b^2-4ac>0$;④$a+b+c<0$. 以其中三个判断作为条件,余下一个判断作为结论,可得到四个命题,其中真命题的个数有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(18) (黑龙江省,2001) 在同一直角坐标系中,一次函数 $y=5x+4$ 与二次函数 $y=x^2+3x+5$ 的图象(　　)

A. 有一个交点　　B. 有两个交点

C. 无交点　　D. 有无数个交点

(19) (江苏省泰州,2001) 抛物线 $y=x^2-(2m-1)x-2m$ 与 x 轴的两个交点坐标分别为 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$,且 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=1$,则 m 的值为(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $\pm\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

(20) (盐城市,2001) 由于被墨水污染,一道数学题仅能见到如下文字:

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 (1,0) ……求证这个二次函数的图象关于直线 $x=2$ 对称.

根据现有信息,题中的二次函数不具有的性质是 (　　)

A. 过点 (3,0)

B. 顶点是 (2,-2)

C. 在 x 轴上截得的线段长是 2

D. 与 y 轴的交点是 (0,3)

3. (太原市,2003) 在图 13-131 所示的平面直角坐标系中,画出二次函数 $y=x^2-2x$ 的图象.

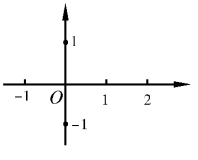


图 13-131

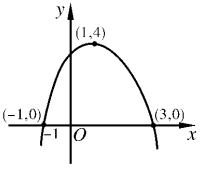


图 13-132

4. (兰州市,2003) 二次函数图象如图 13-132 所示,求它的解析式.

5. (南京市,2003) 已知二次函数 $y=ax^2-2$ 的图象经过点 (1,-1). 求这个二次函数的解析式,并判断该函数图象与 x 轴的交点的个数.

6. (南通市,2003) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A (1,-4)、B (-1,0)、C (-2,5) 三点.

(1) 求抛物线的解析式并画出这条抛物线;

(2) 直角坐标系中点的横坐标与纵坐标均为整数的点称为整点. 试结合图象,写出在第四象限内抛物线上的所有整点的坐标.

7. (天津市,2003) 已知抛物线 $y=x^2-2x-8$.

(1) 求证:该抛物线与 x 轴一定有两个交点;

(2) 若该抛物线与 x 轴的两上交点分别为 A、B,且它的顶点为 P,求 $\triangle ABC$ 的面积.

8. (厦门市,2003) 已知抛物线 $y=x^2+(2k+1)x-k^2+k$.

(1) 求证:此抛物线与 x 轴总有两个不同的交点.

(2) 设 x_1、x_2 是此抛物线与 x 轴两个交点的横坐标,且满足 $x_1^2+x_2^2=-2k^2+2k+1$.

① 求抛物线的解析式；

② 设点 $P(m_1,n_1)$、$Q(m_2,n_2)$ 是抛物线上两个不同的点，且关于此抛物线的对称轴对称，求 m_1+m_2 的值.

9. (苏州市，2003) 已知抛物线 $y=x^2+(1-2a)x+a^2$ $(a\neq 0)$ 与 x 轴交于两点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ $(x_1\neq x_2)$.

(1) 求 a 的取值范围，并证明 A、B 两点都在原点 O 的左侧；

(2) 若抛物线与 y 轴交于点 C，且 $OA+OB=OC-2$，求 a 的值.

10. (海南省，2003) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向下，并且经过 $A(0,1)$ 和 $M(2,-3)$ 两点.

(1) 若抛物线的对称轴为直线 $x=-1$，求此抛物线的解析式；

(2) 如果抛物线的对称轴在 y 轴的左侧，试求 a 的取值范围；

(3) 如果抛物线与 x 轴交于 B、C 两点，且 $\angle BAC=90°$，求此时 a 的值.

11. (北京市怀柔，2002) 已知抛物线与 x 轴交于 $A(2,0)$、$B(6,0)$ 两点，且顶点到 x 轴的距离等于 2，又抛物线与 y 轴的负半轴相交.

(1) 求此抛物线的解析式.

(2) 若经过 A、B 两点的圆与直线 $y=2x-2$ 相切，求此圆的圆心坐标.

12. (山东聊城，2002) 如图 13－133，已知抛物线 $y=-\frac{1}{7}x^2+bx+c$ 和 x 轴正半轴相交于 A、B 两点，$AB=4$，P 为抛物线上的一点，它的横坐标为 9，$\angle PBO=135°$，$\cot\angle PAB=\frac{7}{3}$.

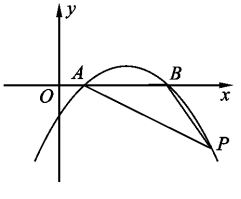


图 13－133

(1) 求点 P 的坐标；

(2) 求抛物线的解析式.

探究能力测试

13. (辽宁省,2003) 某公司推出了一种高效环保型洗涤用品,年初上市后,公司经历了从亏损到盈利的过程.下面的二次函数图象(部分)刻画了该公司年初以来累积利润 s (万元)与销售时间 t (月)之间的关系(即前 t 个月的利润总和 s 与 t 之间的关系).

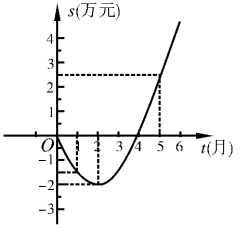


图 13－134

根据图象提供的信息,解答下列问题:

(1) 由已知图象上的三点坐标,求累积利润 s (万元)与时间 t (月)之间的函数的关系式;

(2) 求截止到几月末公司累积利润可达到 30 万元;

(3) 求第 8 个月公司所获利润是多少万元?

14. (嘉兴市,2003) 如图 13－135,有长为 24 m 的篱笆,一面利用墙(墙的最大可用长度 a 为 10 m),围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃的宽 AB 为 x (m),面积为 S (m^2).

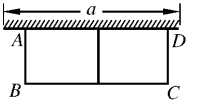


图 13－135

(1) 求 S 与 x 的函数关系式;

(2) 如果要围成面积为 45 m^2 的花圃,AB 的长是多少米?

(3) 能围成面积比 45 m^2 更大的花圃吗?如果能,请求出最大面积,并说明围法;如果不能,请说明理由.

15. 如图 13－136,是某防空部队进行射击训练时在平面直角坐标系中的示意图,在地面 O、A 两个观测点测得空中固定目标 C 的仰角分别是 α 和 β,$OA = 1$ km,$\tan\alpha = \frac{9}{28}$,$\tan\beta = \frac{3}{8}$.位于 O 点正上方 $\frac{5}{3}$ km D 点处的直升飞机向目标 C 发射防空导弹,该导弹运行到距地面最大高度 3 km 时,相应的水平距离为 4 km (即图中 E 点).(1) 若导弹运行轨道为一抛物线,求该抛物线的解析

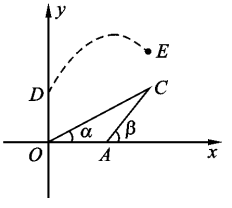


图 13－136

式；(2) 说明按 (1) 中的轨道运行导弹能否击中目标 C 的理由.

16. (随州市，2001) 某商场今年五月销售一种新产品，其进价是每件 80 元，售价是每件 120 元，当月销售 600 件. 六月份，经市场调查知：该产品的售价每降低 1 元时，每月的销售量将增加 60 件，但每件的最低售价不能低于 106 元. 为增加利润减少库存，商场决定适当降低该产品的售价.

(1) 写出六月份降低该产品的售价后，商场所获利润 y 和每件降低 x 元 (x 取整数) 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围；

(2) 每件产品降价多少元时，商场销售该产品所获利润比上月增加 50%？[注：利润 = 销售量 × (产品售价 − 产品进价)]

17. (甘肃省，2002) 某商场以每件 30 元的价格购进一种商品，试销中发现，这种商品每天的销售量 m (件) 与每件的销售价 x (元) 满足一次函数：$m = 162 - 3x$.

(1) 写出商场卖这种商品每天的销售利润 y 与每件的销售价 x 间的函数关系式；

(2) 如果商场要想每天获得最大的销售利润，每件商品的售价定为多少最合适？最大销售利润为多少？

18. (临沂市，2001) 汽车在行驶中，由于惯性作用，刹车后还要向前滑行一段距离才能停住，我们称这段距离为“刹车距离”，刹车距离是分析事故的一个重要因素，在一个限速 40 km/h 以内的弯道上，甲、乙两车相向而行，发现情况不对，同时刹车，但还是相碰了. 事后现场测得甲车的刹车距离为 12 m，乙车的刹车距离超过 10 m，但小于 12 m. 查有关资料知，甲种车的刹车距离 $s_{甲}$ (m) 与车速 x (km/h) 之间有如下关系：$s_{甲} = 0.1x + 0.01x^2$；乙种车的刹车距离 $s_{乙}$ (m) 与车速 x (km/h) 的关系如图 13 − 137 所示.

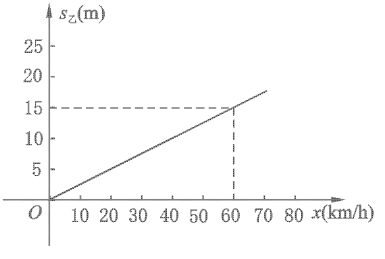
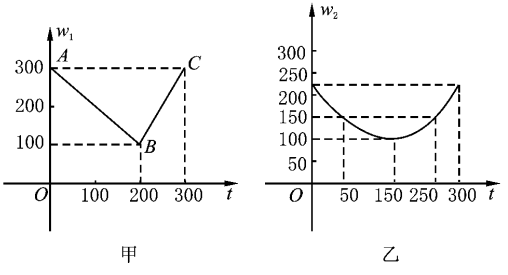


图 13 − 137

请你就两车的速度方面分析相碰的原因.

19. 黄冈市某蔬菜基地种植西红柿,由历年市场行情得知,从 2 月 1 日起的 300 天内,西红柿市场售价与上市时间的关系用图 13－138 甲的一条折线表示;西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 13－138 乙表示的抛物线段表示.



甲　　乙

图 13－138

(1) 写出图 13－138 甲表示的市场售价与时间的函数关系式;

(2) 写出图 13－138 乙表示的种植成本与时间的函数关系式;

(3) 认定市场售价减去种植成本为纯收益,问何时上市的西红柿纯收益最大?(注:市场售价和种植成本的单位:元/10^2kg,时间单位:天).

20. (济南市,2003) 某校研究性学习小组在研究有关二次函数及其图象性质的问题时,发现了两个重要的结论.一是发现抛物线 $y=ax^2+2x+3$ ($a\neq0$),当实数 a 变化时,它的顶点都在某条直线上;二是发现当实数 a 变化时,若把抛物线 $y=ax^2+2x+3$ 的顶点的横坐标减少$\frac{1}{a}$,纵坐标增加$\frac{1}{a}$,得到 A 点的坐标;若把顶点的横坐标增加$\frac{1}{a}$,纵坐标增加$\frac{1}{a}$,得到 B 点的坐标,则 A、B 两点一定仍在抛物线 $y=ax^2+2x+3$ 上.

(1) 请你协助探求出当实数 a 变化时,抛物线 $y=ax^2+2x+3$ 的顶点所在直线的解析式上;

(2) 问题 (1) 中的直线上有一个点不是该抛物线的顶点,你能找出它来吗?并说明理由;

⑶ 在他们第二个发现的启发下，运用“一般—特殊—一般”的思想，你还能发现什么？你能用数学语言将你的猜想表述出来吗？你的猜想能成立吗？若能成立，请说明理由.

21. (重庆市，2003) 已知抛物线 $y=-x^2+(m-4)x+2m+4$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点，与 y 轴交于点 C，且 $x_1<x_2$，$x_1+2x_2=0$. 若点 A 关于 y 轴的对称点是点 D.

⑴ 求过点 C、B、D 的抛物线的解析式；

⑵ 若 P 是 ⑴ 中所求抛物线的顶点，H 是这条抛物线上异于点 C 的另一点，且 $\triangle HBD$ 与 $\triangle CBD$ 的面积相等，求直线 PH 的解析式.

22. (黄冈市，2003) 已知二次函数的图象如图 13－139 所示.

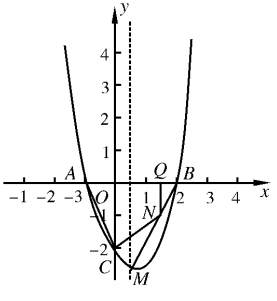


图 13－139

⑴ 求二次函数的解析式及抛物线顶点 M 的坐标；

⑵ 若点 N 为线段 BM 上的一点，过点 N 作 x 轴的垂线，垂足为点 Q. 当点 N 在线段 BM 上运动时 (点 N 不与点 B、点 M 重合)，设 NQ 的长为 t，四边形 $NQAC$ 的面积为 S，求 S 与 t 之间的函数关系式及自变量 t 的取值范围；

⑶ 在对称轴右侧的抛物线上是否存在点 P，使 $\triangle PAC$ 为直角三角形？若存在，求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

⑷ 将 $\triangle OAC$ 补成矩形，使 $\triangle OAC$ 的两个顶点成为矩形一边的两个顶点，第三个顶点落在矩形这一边的对边上，试直接写出矩形的未知的顶点坐标 (不需要计算过程).

13.8 反比例函数及其图象

学点探究分析

重点　反比例函数的概念、图象和性质.

难点　反比例函数图象的画法.

探究点　反比例函数图象上点 (x,y) 具有两坐标之积 $(xy=k)$ 为常数这一特性,即过双曲线上任意一点,向 x 轴所引垂线段的两端点及坐标原点所构成的三角形面积或向两坐标轴引垂线段所构成的矩形的面积均为常数.以此为基础的题目异常活跃,而且,以反比例函数及其图象为背景的综合问题和实际问题也越来越多.

学习方法技巧

掌握反比例函数的定义、图象与性质是学好本节的前提.沟通反比例函数与其他函数间的联系,尤其是与一次函数之间的联系,是学习的关键.数形结合思想、转化思想、方程方法是本节的基本思想方法.

能力升级捷径

【例 1】　当 n 取什么值时,$y=(n^2+2n)x^{n^2+n-1}$ 是反比例函数?它的图象在第几象限内?在每个象限内,y 随 x 的增大而增大或是减小?

思维技巧　本题考查反比例函数的定义与性质,根据反比例函数的定义 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$ 可知,要使 $y=(n^2+2n)x^{n^2+n-1}$ 是反比例函数,必须且只需 $n^2+2n\neq0$ 且 $n^2+n-1=-1$.

解　$y=(n^2+2n)x^{n^2+n-1}$ 是反比例函数,则

$$\begin{cases}n^2+2n\neq0,\\ n^2+n-1=-1.\end{cases}\quad\text{所以}\quad\begin{cases}n\neq0\text{ 且 }n\neq-2,\\ n=0\text{ 或 }n=-1.\end{cases}$$

故当 $n=-1$ 时,$y=(n^2+2n)x^{n^2+n-1}$ 是反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$.

因为　$k=-1<0$,

所以双曲线分别在二、四象限内,并且在每个象限内 y 随 x 的增大而增大.

激活思维　像一次函数一样，判断一个函数是否是反比例函数，惟一的标准就是看它是否符合定义，即形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为不等于 0 的常数）或 $y=kx^{-1}$（k 为不等于 0 的常数）. 另外，在应用反比例函数性质判断增减性时，不能忘了前提“在每一个象限内.”

同类变式　当 a 为何值时，$y=(2a+1)x^{a^2+a-1}$ 是反比例函数，且图象在第二、四象限.

解　因为 y 是 x 的反比例函数，

所以　$a^2+a-1=-1$.

又此函数图象在第二、四象限，

所以　$2a+1<0$.

综上可得 $a=-1$.

所以　$a=-1$ 时，函数解析式为 $y=-\frac{1}{x}$.

思维拓展　已知 $y=(2m-1)x^{m^2-2}$ 的图象是双曲线，且在每个象限内，y 随 x 的增大而增大，求 m 的值.

解　因为函数图象是双曲线，

所以　y 是 x 的反比例函数，

所以　$m^2-2=-1$ 且 $2m-1\neq 0$.

所以　$m_1=1$，$m_2=-1$.

又因为 y 随 x 的增大而增大，

所以　$2m-1<0$，所以　$m<\frac{1}{2}$.

故 $m=-1$.

【例 2】　（太原市，2001）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象如图 13－140 所示，则直线 $y=ax+b$ 与双曲线 $y=\frac{ab}{x}$ 在同一坐标系中的位置大致是如图 13－141 中的（　　）

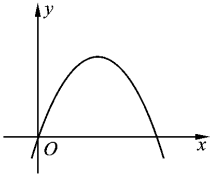


图 13－140

思维技巧　本题考查反比例函数图象与性质的应用，可依据二次函数的图象，先确定系数的符号；然后在同一直角坐标系内，考察一次函数和反比例函数图象的分布

情况.

解 观察图 13－140，可知 $a<0$，$c=0$，

因为 $-\frac{b}{2a}>0$，所以 $b>0$.

当 $a<0$，$b>0$ 时，函数 $y=ax+b$ 的图象有 A、D. 函数 $y=\frac{ab}{x}$ 的图象有 C、D，

所以图象在同一坐标系中的为 D.

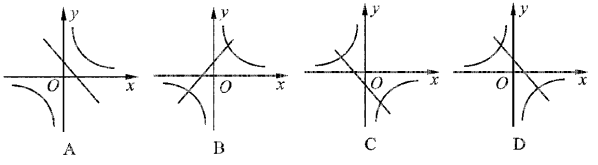


图 13－141

激活思维 此题虽然文字不多，但把三个函数的图象与性质有机地结合于一体，对数形结合的要求较高，有助于培养学生思维的灵活性.

同类变式 1. (青海省，2001) 如图 13－142，函数 $y_1=kx$，$y_2=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$) 在同一坐标系中的图象大致是（ ）

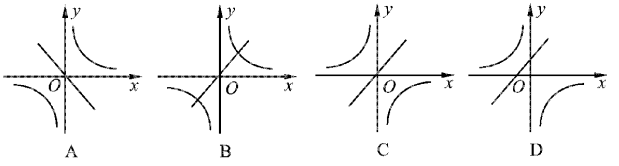


图 13－142

解 在 A 中，双曲线在第一、第三象限内，所以 $k>0$，而直线只过二、四象限，即 $k<0$，矛盾 在 B 中，双曲线在第一、三象限，$k>0$，而直线只过一、三象限，所以 $k>0$，正好一致. 故选 B.

另解 当 $k>0$ 时，直线 $y=kx$ 只过一、三象限，双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 也在第一、三象限内，因此选 B. 当 $k<0$，A、C、D 中两函数图象是矛盾的.

2. (哈尔滨市，2001) 如图 13－143，当 $k<0$ 时，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 和一

次函数 $y=kx-k$ 的图象大致是（　　）

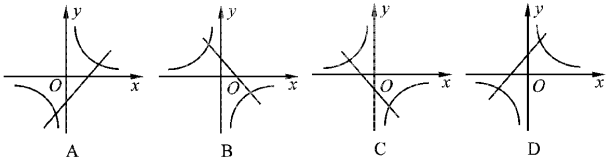


图 13－143

解　因为 $k<0$，所以 $y=\frac{k}{x}$ 图象在二、四象限，所以符合 $y=\frac{k}{x}$ 图象有 B、C.　因为 $k<0$，所以 $-k>0$，即 $y=kx-k$ 的图象经过一、二、四象限.

综合上知，符合条件的图象为 B.

思维拓展　1.（安徽省，2001）已知力 F 所做的功是 15 J，则力 F 与物体在力的方向上通过的距离 s 的图象大致是图 13－144 中的（　　）

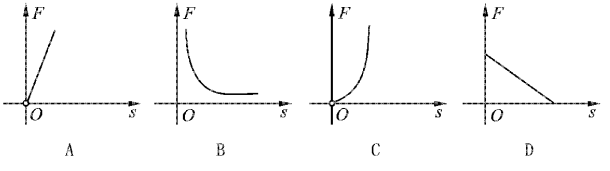


图 13－144

解　由 $W=Fs=15$，得 $F=\frac{15}{s}$ $(s>0)$

因此 $F=\frac{15}{s}$ $(s>0)$ 图象是反比例函数图象在第一象限的一支，故选 B.

2.（镇江市，2000）一给定的三角形被平行于一边的直线截成一个小三角形和一个梯形，若小三角形和梯形的面积分别是 y 和 x，则 y 关于 x 的函数的图象大致为图 13－145 中的（　　）

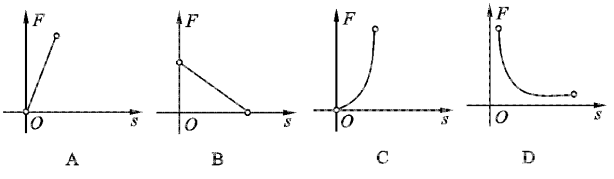


图 13－145

解　由题意可得 $y=s-x$（s 为给定三角形的面积）　$(0<x<s)$

由于 $0<x<s$，所以选 B.

【例 3】　已知 $y=y_1-y_2$，y_1 与 x 的算术平方根成正比例，y_2 与 x^2 成反比例，且当 $x=1$ 时，$y=0$，当 $x=2$ 时，$y=\frac{31}{4}$，求 y 与 x 间的函数关系式.

思维技巧　本题考查根据比例关系列函数解析式求值. 因为 y_1 与 x 的算术平方根成正比例，y_2 与 x^2 成反比例，所以设 $y_1=k_1\sqrt{x}$，$y_2=\frac{k^2}{x^2}$，将 y_1、y_2 分别代入 $y=y_1-y_2$，得 y 与 x 间的一般函数关系，再用待定系数法求出 k_1 和 k_2，进而写出 y 与 x 间的函数关系.

解　设 $y_1=k_1\sqrt{x}$，$y_2=\frac{k^2}{x^2}$，

则 $y=k_1\sqrt{x}-\frac{k_2}{x^2}$.

将 $\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=\frac{31}{4},\end{cases}$ 代入上式，

则 $\begin{cases}k_1-k_2=0,\\\sqrt{2}k_1-\frac{k_2}{4}=\frac{31}{4}.\end{cases}$

解得　$k_1=k_2=4\sqrt{2}+1$.

所以　$y=(4\sqrt{2}+1)\sqrt{x}-\frac{4\sqrt{2}+1}{x^2}$.

激活思维　(1) 依题意写出 y_1 与 x、y_2 与 x 间的一般函数关系为解题关键. y_1 与 $\sqrt{x}$ 成正比例不等于说 y_1 是 x 的正比例函数，y_2 与 x^2 成反比例也不等于说 y_2 是 x 的反比例函数.

(2) y_1、y_2 两个函数的比例系数不一定相同，因此在设 y_1、y_2 的一般函数关系时，比例系数应设为不同的字母 k_1 和 k_2.

同类变式　已知函数 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x 成反比例，且当 $x=1$ 时，$y=4$；当 $x=2$ 时，$y=5$. (1) 求 y 与 x 的函数关系式；(2) 当 $x=4$ 时，求 y 的值.

解　(1) 因为 y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x 成反比例，

所以　设 $y_1=k_1x$，$y_2=\frac{k_2}{x}$ $(k_1\neq0,k_2\neq0)$，

$y=k_1x+\frac{k_2}{x}$.　　①

因为　$x=1$ 时，$y=4$；$x=2$ 时，$y=5$，将它们的值分别代入①，

得方程组 $\begin{cases}k_1+k_2=4,\\ 2k_1+\dfrac{k_2}{2}=5.\end{cases}$　解得 $\begin{cases}k_1=2,\\ k_2=2.\end{cases}$

所以　$y=2x+\dfrac{2}{x}$.　　②

(2) 将 $x=4$ 代入②，得 $y=2\times4+\dfrac{2}{4}=8\dfrac{1}{2}$.

思维拓展　1.（陕西省，2001）已知关于 x 的方程 $x^2-4x+2t=0$ 有两个实数根.

(1) 求 t 的取值范围；

(2) 设方程的两个根的倒数和为 s，求 s 与 t 之间的函数关系式；

(3) 在直角坐标系内画出 (2) 中所得到的函数的图象.

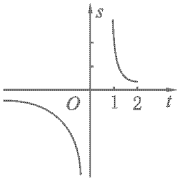


图 13－146

解　(1) 因为　关于 x 的方程 $x^2-4x+2t=0$ 有两个实数根，

所以　$\Delta=16-8t\geqslant0$，所以　$t\leqslant2$.

(2) 依题意有 $s=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$，

其中 x_1、x_2 是方程 $x^2-4x+2t=0$ 两根，

所以　$x_1+x_2=4$，$x_1\cdot x_2=2t$.

所以　$s=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{4}{2t}=\dfrac{2}{t}$ ($t\leqslant2$ 且 $t\neq0$).

(3) 因为　$t\leqslant2$，所以　$s=\dfrac{2}{t}$ 的图象是反比例函数图象一部分. 如图 13－146 所示.

2.（天津市，2002 年）如图 13－147，一次函数的图象与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，与反比例函数的图象交于 C、D 两点. 如果 A 点的坐标为 (2，0)，点 C、D 分别在第一、第三象限，且 $OA=OB=AC=BD$.

试求一次函数和反比例函数的解析式.

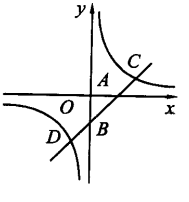


图 13－147

解　设一次函数的解析式为 $y=kx+b$ ($k\neq0$).

由 $OA=OB$，$A(2,0)$，得 $B(0,-2)$.

因为点 A、点 B 在一次函数的图象上，则有

$\begin{cases}2k+b=0,\\0+b=-2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1.\\b=-2.\end{cases}$

所以一次函数的解析式为 $y=x-2$.

过点 C 作 CE 垂直于 x 轴，垂足为 E.

因为 $OA=OB=AC=2$，

所以 $\triangle AEC$ 为等腰直角三角形.

所以 $AE=CE=\sqrt{2}$.

所以点 C 的坐标为 $(2+\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设反比例函数的解析式为 $y=\frac{m}{x}$.

因为点 C 在反比例函数的图象上，所以 $m=(2+\sqrt{2})\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2$.

所以反比例函数的解析式为 $y=\frac{2+2\sqrt{2}}{x}$.

【例 4】 (苏州市，2001) 如图 13－148，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象交于 A、B 两点.

(1) 利用图中条件，求反比例函数和一次函数的解析式；

(2) 根据图象写出使一次函数的值大于反比例函数的值的 x 的取值范围.

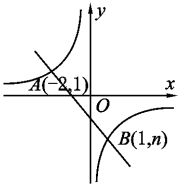


图 13－148

思维技巧 (1) 要求反比例函数 $y=\frac{m}{x}$，一次函数 $y=kx+b$ 的解析式，即是要建含 m、k、b 的三个方程. 观察图 13－148 知 $A(-2,1)$ 在双曲线上，不难求出 m. 又 $B(1,n)$ 在双曲线上，从而可求出 n，利用待定系数法，求过 A、B 两点的一次函数解析式.

(2) 根据图象 13－148 观察：一次函数的图象在反比例函数的图象上方时，一次函数的值大于反比例函数的值.

解 (1) 由图 13－148 中条件可知，双曲线经过点 $A(-2,1)$，

所以 $1=\frac{m}{-2}$，$m=-2$.

所以反比例函数的解析式为 $y=-\frac{2}{x}$.

又点 $B(1,n)$ 也在双曲线上，所以　$n=\frac{-2}{1}=-2$.

所以点 B 的坐标为 $(1,-2)$.

因为直线 $y=kx+b$ 经过点 A、B，

所以　$\begin{cases}1=-2k+b,\\-2=k+b.\end{cases}$　所以　$\begin{cases}k=-1,\\b=-1.\end{cases}$

所以一次函数的解析式为 $y=-x-1$.

(2) 当一次函数的图象在反比例函数的图象的上方时，一次函数的值大于反比例函数的值.

所以当 $x<-2$ 或 $0<x<1$ 时，一次函数的值大于反比例函数的值.

激活思维　点在图形上，则点的坐标满足表示图形的方程，这是解析几何的基本思想. 第 (2) 问突出体现图象法解题具有直观、简捷的优点.

同类变式　(黄冈市，2000) 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=2\\y=-x+b\end{cases}$，有一个实数解，且反比例函数 $y=\frac{1+b}{x}$ 的图象在每个象限内，y 随 x 的增大而增大，如果点 $(a,3)$ 在双曲线 $y=\frac{1+b}{x}$ 上，求 a 的值.

解　由已知 $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=2,&①\\y=-x+b,&②\end{cases}$

将②代入①，得 $2x^2+2(1-b)x+b^2-1=0$.

因为　原方程组有一个实数解，

所以　$\Delta=0$.

即 $[2(1-b)]^2-4\times2(b^2-1)=0$.

解之，得 $b=1$，$b=-3$.

因为反比例函数 $y=\frac{1+b}{x}$ 的图象在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大.

所以 $1+b<0$，所以　$b=-3$.

即反比例函数的解析式为 $y=-\frac{2}{x}$，

因为点 $(a,3)$ 在双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 上，

所以　$3=-\frac{2}{a}$，所以　$a=-\frac{2}{3}$.

思维拓展 1. (苏州市,2000) 已知:一次函数 $y=2x+k-3$ 和反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象都经过点 $A(n,2)$. (1) 求 n 的值和这个一次函数的解析式;(2) 在同一坐标系内画出这两个函数的图象 (不必列表);(3) 根据图象判断:使这两个函数的值都为非负数的自变量 x 的取值范围.

解 (1) 因为 $y=\frac{4}{x}$ 的图象过点 $A(n,2)$

所以 $2=\frac{4}{n}$,所以 $n=2$.

因为一次函数的图象过点 $A(2,2)$

所以 $2=4+k-3$,所以 $k=1$.

所以它的解析式为 $y=2x-2$.

(2) 两函数图象如图 13-149 所示.

(3) 观察图象 13-149 知 $x\geqslant 1$ 时,两个函数的值都为非负数.

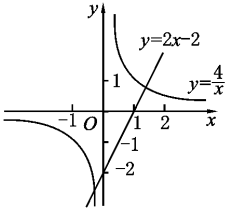


图 13-149

2. (乐山,2001) 已知:如图 13-150,矩形 $ABCD$ 的边 BC 在 x 轴上,E 是对角线 AC、BD 的交点,$EF\perp BC$,垂足为 F. 函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限的图象经过点 A、E 和点 $\left(8,\frac{1}{2}\right)$,设 EF 的长为 m.

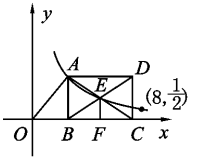


图 13-150

(1) 求函数 $y=\frac{k}{x}$ 的解析式;

(2) 求点 A 的坐标 (用 m 表示);

(3) 若 $\angle AOB=45°$,求 $\tan\angle EBF$ 的值.

解 (1) 因为 函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象经过 $\left(8,\frac{1}{2}\right)$,

所以 $k=xy=8\times\frac{1}{2}=4$.

所以反比例函数解析式为 $y=\frac{4}{x}$.

(2) 因为 $ABCD$ 为矩形,E 为对角线交点,$EF\perp BC$,$EF=m$,

所以 $AB=2m$.

所以 A 点的纵坐标为 $2m$.

又因为 A 在点 $y=\frac{4}{x}$ 上，

所以　$x=\frac{4}{y}=\frac{4}{2m}=\frac{2}{m}$.

因此 A 点的坐标为 $\left(\frac{2}{m},2m\right)$.

(3) 因为 $\angle AOB=45°$，所以点 A 在函数 $y=x$ 图象上，即 $\frac{2}{m}=2m$，所以 $m=\pm1$.

而点 A 在第一象限，所以 $m=1$，点 A 坐标为 $(2,2)$.

则点 E 的纵坐标为 1.

又 E 在 $y=\frac{4}{x}$ 的图象上，所以　$x=4$.

即点 E 坐标为 $(4,1)$.

所以 $BF=2$.

因此 $\tan\angle EBF=\frac{EF}{BF}=\frac{1}{2}$.

【例 5】　(1) 如图 13－151，A、B 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上关于原点 O 对称的任意两点，AC 平行于 y 轴，BC 平行于 x 轴，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则（　）

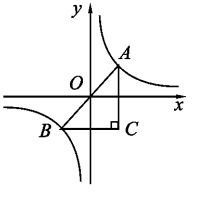


图 13－151

A. $S=1$　　B. $1<S<2$

C. $S=2$　　D. $S>2$

(2) 如图 13－152，在 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ 的图象上有三点 A、B、C，经过三点分别向 x 轴引垂线，交 x 轴于 A_1、B_1、C_1 三点，连结 OA、OB、OC，记 $\triangle OAA_1$、$\triangle OBB_1$、$\triangle OCC_1$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，则有（　）

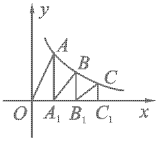


图 13－152

A. $S_1=S_2=S_3$　　B. $S_1<S_2<S_3$

C. $S_3<S_1<S_2$　　D. $S_1>S_2>S_3$

思维技巧　本例两个小题都是考查反比例函数性质的应用，即与双曲线上的点有关的几何图形的面积计算，充分利用双曲线上任一点的横坐标与纵坐标之积为常数这一性质，可以大大简化计算.

一般地，设 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$ 上任意一点，有：

(1) 设 P 作 x 轴的垂线,垂足为 A,则 $S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AP=\frac{1}{2}|x_0\cdot y_0|=\frac{1}{2}|k|$ 图 (13-153).

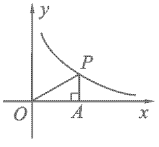


图 13-153

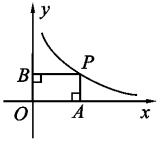


图 13-154

(2) 过 P 分别作 x 轴、y 轴的垂线,垂足分别为 A、B,则 $S_{矩形OAPB}=OA\cdot AP=|x_0\cdot y_0|=|k|$ (图 13-154).

(3) 设 $P(x_0,y_0)$ 关于原点的对称点是 $P'(-x_0,-y_0)$,作 P 作 x 轴的垂线与过 P' 作 y 轴的垂线交于 A 点,则

$$S_{\triangle PAP'}=\frac{1}{2}|AP\cdot AP'|=\frac{1}{2}|2x_0\cdot 2y_0|=2|k|$$ (图 13-155).

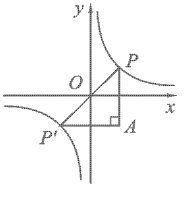


图 13-155

以上几点揭示了双曲线上的点构成的几何图形的一类性质.掌握好这些性质,对解题十分有益 (上面图仅以 P 点在第一象限为例).

解 (1) 由上述性质 (3) 知,$S_{\triangle ABC}=|k|=2$. 选 C.

(2) 根据性质 (1),可得

$$S_{\triangle AOA_1}=\frac{1}{2}|k|=\frac{1}{2},S_{\triangle BOB_1}=\frac{1}{2}|k|=\frac{1}{2},$$

$S_{\triangle COC_1}=\frac{1}{2}|k|=\frac{1}{2}$,即 $S_1=S_2=S_3$,故选 A.

过双曲线上任意一点,与这一点向 x 轴所引垂线的垂足及坐标原点所构成的三角形面积均相等,它作为一类基本图形应予熟记.类似例 5,分别由双曲线上三点 A、B、C 向 y 轴作垂线,得到三个三角形,它们的面积是怎样的呢 (图 13-156)?另

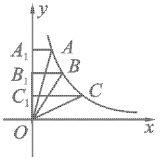


图 13-156

外还要说明的是，当问题中出现一些不规则的三角形时，可以设法转化成如图 13－153、图 13－154 所示的三角形求面积.

同类变式　1. 如图 13－157，P 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象上的一点，由 P 分别向 x 轴、y 轴引垂线，得阴影部分面积为 3，则这个反比例函数的解析式是_____.

解　由性质 (2)，知 $S_{矩形APCO}=|k|$，

所以　$|k|=3$.

又因为图象在二、四象限，

所以　$k=-3$，即解析式为 $y=-\frac{3}{x}$.

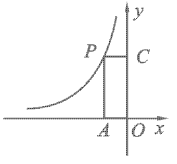


图 13－157

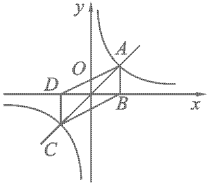


图 13－158

2. 如图 13－158，正比例函数 $y=kx$ $(k>0)$ 与反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象相交于 A、C 两点，过 A 作 x 轴的垂线，交 x 轴于 B，过 C 点作 x 轴的垂线，交 x 轴于点 D. 求证：当 k 取不同正数时，四边形 $ABCD$ 的面积是个常数.

证　可证得 $ABCD$ 是平行四边形，而由性质 (2) 可知 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}$，故 $S_{四边形ABCD}=4S_{\triangle AOB}=2$.

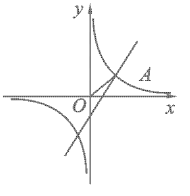


图 13－159

【例 6】　(吉林省，2001) 已知反比例函数 $y=\frac{k}{2x}$ 和一次函数 $y=2x-1$，其中一次函数的图象经过 (a,b)、$(a+1,b+k)$ 两点.

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 如图 13－159，已知点 A 在第一象限，

且同时在上述两个函数的图象上，求 A 点坐标；

(3) 利用 (2) 的结果，请问 在 x 轴上是否存在点 P，使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形？若存在，把符合条件的 P 点坐标都求出来 若不存在，请说明理由.

思维技巧 (1) 由已知条件建立 k、a、b 的等式，求出 k 值. (2) 利用 (1) 的结论，解方程组. (3) 注意分类思想的运用.

解 (1) 由条件可得 $b=2a-1$，$b+k=2(a+1)-1$，

所以 $2a-1=2a+1-k$.

所以 $k=2$.

因此所求的反比例函数解析式为 $y=\dfrac{1}{x}$.

(2) 解方程组 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x}, \\ y=2x-1 \end{cases}$ 得 $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$ (舍去).

从而 $y=1$，所以 点 A 的坐标为 (1，1).

(3) 若符合条件的点 P 存在，

$OA=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$OA$ 与 x 轴所夹的锐角为 $45°$.

① 若 OA 为底，则由 $\angle AOP_1=45°$，$OA=\sqrt{2}$，

$OP_1=P_1A$，得 $OP_1=1$，

所以点 P_1 的坐标为 (1，0)；

② 若 OA 为腰，AP 为底，则由 $OP=OA=\sqrt{2}$，

得 $P_2(-\sqrt{2},0)$，$P_3(\sqrt{2},0)$；

③ 若 OA 为腰，OP 为底，则由 $AO=AP=\sqrt{2}$，

得 $OP=2$，所以 $P_4(2,0)$.

因此这样的点有 4 个，分别是 (1，0)，$(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$，(2，0).

激活思维 此题利用图象把一次函数、反比例函数有机地结合在一起，综合性强较，特别是第 (3) 小题，既是一个“存在性”问题，又是一个分类讨论问题. 解这类题的一般思路是：先对结论做出肯定的假设，然后由肯定假设出发，结合已知条件或挖掘出隐含条件，辅以方程思想、数形结合思想等，进行正确的计算、推理，再对得出的结果进行分析检验，判断是否与题设、公理、定理等吻合，若无矛盾，说明假设正确，由此得出符合条件的数学对象存在；否则说明不存在.

同类变式 (江西省，2000) 如图 13－160，已知 C、D 是双曲线 $y=\dfrac{m}{x}$ 在第一象限内的分支上的两点，直线 CD 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点，设 C、

D 的坐标分别是 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，连结 OC、OD.

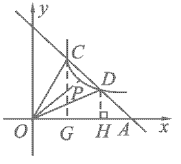


图 13－160

(1) 求证：$y_1<OC<y_1+\frac{m}{y_1}$；

(2) 若 $\angle BOC=\angle AOD=\alpha$，$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$OC=\sqrt{10}$，求直线 CD 的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下，双曲线上是否存在一点 P，使得 $S_{\triangle POC}=S_{\triangle POD}$？若存在，请给出证明；若不存在，请说明理由.

解　(1) 证明：过点 C 作 $CG\perp x$ 轴，垂足为 G，则 $CG=y_1$，$OG=x_1$.

因为点 $C(x_1,y_1)$ 在双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 上，

所以　$x_1=\frac{m}{y_1}$.

因为在 $\mathrm{Rt}\triangle OCG$ 中，$CG<OC<CG+OG$，

所以　$y_1<OC<y_1+\frac{m}{y_1}$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle GCO$ 中，$\angle GCO=\angle BOC=\alpha$，$\tan\alpha=\frac{OG}{CG}=\frac{1}{3}$，即 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{1}{3}$，$y_1=3x_1$.

因为　$OC^2=OG^2+CG^2$，$OC=\sqrt{10}$，

所以　$10={x_1}^2+{y_1}^2$，即 $10={x_1}^2+(3x_1)^2$.

解之，得 $x_1=\pm1$. 因为　负值不合题意，所以　$x_1=1$，$y_1=3$.

所以点 C 的坐标为 $(1,3)$.

因为点 C 在双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 上，所以　$3=\frac{m}{1}$，即　$m=3$.

所以，双曲线的解析式为 $y=\frac{3}{x}$.

过点 D 作 $DH\perp x$ 轴，垂足为 H. 则 $DH=y_2$，$OH=x_2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODH$ 中 $\tan\alpha=\frac{DH}{OH}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{1}{3}$，即 $x_2=3y_2$.

又　$y_2=\frac{3}{x_2}$，则 $3{y_2}^2=3$，

解之得　$y_2=\pm1$. 因为负值不合题意，所以　$y_1=1$，$x_2=3$.

所以点 D 的坐标为 $(3,1)$.

设直线 CD 的解析式为 $y=kx+b$.

则有 $\begin{cases}3=k+b,\\1=3k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=4\end{cases}$

所以　直线 CD 的解析式为 $y=-x+4$.

⑶ 双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 上存在点 P，使得 $S_{\triangle POC}=S_{\triangle POD}$，这个点 P 就是 $\angle COD$ 的平分线与双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 的交点.

证明 因为点 P 在 $\angle COD$ 的平分线上，

所以点 P 到 OC、OD 的距离相等.

又　$OD=\sqrt{OH^2+DH^2}=\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}=\sqrt{10}=OC$.

所以　$S_{\triangle POD}=S_{\triangle POC}$.

思维拓展　1.（宿迁市，2002）已知 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 是直线 $y=-x+2$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）的两个不同交点.

⑴ 求 k 的取值范围；

⑵ 是否存在这样的 k 值，使得 $(x_1-2)(x_2-2)=\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$？若存在，求出这样的所有 k 值；若不存在，请说明理由.

解　⑴ 由题意知方程组 $\begin{cases}y=-x+2,\\y=\frac{k}{x}\end{cases}$ 有两组不同的实数解 $\begin{cases}x=x_1,\\y=y_1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=x_2,\\y=y_2.\end{cases}$ 即方程 $-x+2=\frac{k}{x}$ 有两不同实数根 x_1，x_2，即方程 $x^2-2x+k=0$ 有两不同实数根 x_1，x_2.

所以　$\Delta=4-4k>0$，所以　$k<1$ 且 $k\neq0$.

⑵ 因为 x_1，x_2 是方程 $x^2-2x+k=0$ 的两不同实根，

所以　$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\x_1x_2=k.\end{cases}$

设存在这样的 k 值使 $(x_1-2)(x_2-2)=\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$，

即　$x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$　①

因为　$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=k$，

所以①式变为 $k-4+4=\frac{4-2k}{k}$，即 $k^2+2k-4=0$.

解得　$k=-1\pm\sqrt{5}$.

又因为　$k<1$ 且 $k\neq0$，所以　$k=-1-\sqrt{5}$.

所以存在 $k=-1-\sqrt{5}$ 使 $(x_1-2)(x_2-2)=\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ 成立.

2. (北京市东城区，2002) 已知：如图 13－161，一次函数图象经过第一、二、三象限，且与反比例函数的图象交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于点 D. $OB=\sqrt{10}$，$\tan\angle DOB=\frac{1}{3}$.

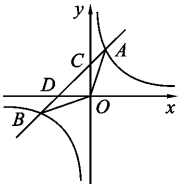


图 13－161

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 设点 A 的横坐标为 m，$\triangle ABO$ 的面积为 S，求 S 与 m 的函数的关系式，并写出自变量 m 的取值范围.

(3) 当 $\triangle OCD$ 的面积等于 $\frac{S}{2}$ 时，试判断过 A、B 两点的抛物线在 x 轴上截得的线段长能否等于 3. 如果能，求此时抛物线的解析式；如果不能，请说明理由.

解　(1) 过点 B 作 $BH\perp x$ 轴于点 H (如图 13－162). 在 $\mathrm{Rt}\triangle OHB$ 中，

因为　$\tan\angle HOB=\frac{BH}{HO}=\frac{1}{3}$，所以　$HO=3BH$.

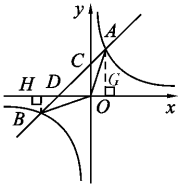
由勾股定理，得 $BH^2+HO^2=OB^2$.

又因为　$OB=\sqrt{10}$，

所以　$BH^2+(3BH)^2=(\sqrt{10})^2$.

因为　$BH>0$，所以　$BH=1$，$HO=3$.

所以点 $B(-3,-1)$.



设反比例函数的解析式为 $y=\frac{k_1}{x}$ $(k_1\neq0)$，

因为点 B 在反比例函数的图象上，所以 $k_1=3$.

图 13－162

所以反比例函数的解析式为 $y=\frac{3}{x}$.

(2) 设直线 AB 的解析式为 $y=k_2x+b$ $(k_2\neq0)$.

由点 A 在第一象限，得 $m>0$.

又由点 A 在函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象上，可求得点 A 的纵坐标为 $\frac{3}{m}$.

因为点 $B(-3,-1)$，点 $A\left(m,\frac{3}{m}\right)$，

所以 $\begin{cases}-3k_2+b=-1,\\ mk_2+b=\dfrac{3}{m}.\end{cases}$

解关于 k_2、b 的方程组，得$\begin{cases}k_2=\dfrac{1}{m},\\ b=\dfrac{3-m}{m}.\end{cases}$

所以　直线 AB 的解析式为 $y=\dfrac{1}{m}x+\dfrac{3-m}{m}$.

令 $y=0$，求得点 D 的横坐标为 $x=m-3$.

过点 A 作 $AG\perp x$ 轴于点 G（如图 13－162）.

$$\begin{aligned}S&=S_{\triangle BDO}+S_{\triangle ADO}\\&=\frac{1}{2}DO\cdot BH+\frac{1}{2}DO\cdot GA\\&=\frac{1}{2}DO\,(BH+GA)\\&=\frac{1}{2}(3-m)\left(1+\frac{3}{m}\right).\end{aligned}$$

即　$S=\dfrac{9-m^2}{2m}$（$0<m<3$）.

（3）过 A、B 两点的抛物线在 x 轴上截得的线段长不能等于 3.

证明如下：

$$S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}DO\cdot OC=\frac{1}{2}|m-3|\cdot\left|\frac{3-m}{m}\right|=\frac{(3-m)^2}{2m}.$$

由 $S_{\triangle OCD}=\dfrac{S}{2}$，得 $\dfrac{(3-m)^2}{2m}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9-m^2}{2m}$.

解得　$m_1=1$，$m_2=3$.

经检验，$m=1$，$m_2=3$ 都是这个方程的根.

因为　$0<m<3$，所以　$m=3$ 不合题意，舍去.

所以点 A（1，3）

设过 A（1，3）、B（－3，－1）两点的抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）.

所以　$\begin{cases}a+b+c=3,\\ 9a-3b+c=-1.\end{cases}$　由此得 $\begin{cases}b=1+2a,\\ c=2-3a.\end{cases}$

即 $y=ax^2+(1+2a)x+2-3a$.

设抛物线与 x 轴两交点的横坐标为 x_1，x_2.

则　$x_1+x_2=-\dfrac{1+2a}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2-3a}{a}$.

令　$|x_1-x_2|=3$，则 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9$.

即　$\left(-\frac{1+2a}{a}\right)^2-4\cdot\frac{2-3a}{a}=9$.

整理，得 $7a^2-4a+1=0$.

因为　$\Delta=(-4)^2-4\times7\times1=-12<0$，

所以方程 $7a^2-4a+1=0$ 无实数根.

因此过 A、B 两点的抛物线在 x 轴上截得的线段长不能等于 3.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1)（龙岩市，2003）反比例函数 $y=5x^{-1}$ 的图象必过点（1，_____）

(2)（南宁市，2003）如图 13－163，是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象，那么 k 与 0 的大小关系是 k _____ 0.

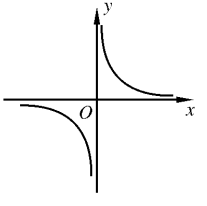


图 13－163

(3)（安徽省，2003）近视眼镜的度数 y（度）与镜片焦距 x（m）成反比例. 已知 400 度近视眼镜片的焦距为 0.25 m，则眼镜度数 y 与镜片焦距 x 之间的函数关系式是_____.

(4)（上海市，2003）在平面直角坐标系内，从反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）的图象上一点分别作 x、y 轴的垂线段，与 x、y 轴所围成的矩形面积是 12，那么该函数的解析式是_____.

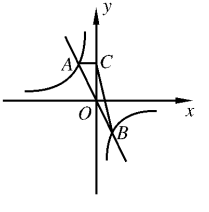


图 13－164

(5)（重庆市，2003）如图 13－164，函数 $y=-kx$（$k\neq0$）与 $y=-\frac{4}{x}$ 的图象交于 A、B 两点，过点 A 作 AC 垂直于 y 轴，垂足为点 C，则 $\triangle BOC$ 的面积为____.

(6)（杭州市，2002 年）对于反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 与二次函数 $y=-x^2+3$，请说出它们的两个相同点①_____；②_____. 再说出它们的两个不同点

①_____；②_____.

(7) (绍兴市,2002) 已知点 (1,3) 是双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 与抛物线 $y=x^2+(k+1)x+m$ 的交点,则 k 的值等于____.

(8) (重庆市,2002) 已知二次函数 $y=-4x^2-2mx+m^2$ 与反比例函数 $y=\frac{2m+4}{x}$ 的图象在第二象限内的一个交点的横坐标是 -2,则 m 的值是_____.

(9) (徐州市,2001) 已知函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 (2,3),则 $k=$_____.

10. (河北省,2001) 点 $A(a,b)$,$B(a-1,c)$ 均在函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上,若 $a<0$,则 b _____ c (填“>”或“<”或“=”).

(11) (重庆市,2001) 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与直线 $y=2x$ 和 $y=x+1$ 过同一点,则当 $x>0$ 时,这个反比例函数的函数值 y 随 x 的增大而_____ (填增大或减小).

(12) (南通市,2001) 设点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 都在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上,且 $x_1<x_2<0$,则 y_1 _____ y_2 (填“<”或“>”号).

(13) (大连市,2001) 若一次函数 $y=kx+b$ 的图象如图 13-165 所示,则抛物线 $y=x^2+kx+b$ 的对称轴位于 y 轴的_____侧;反比例函数 $y=\frac{kb}{x}$ 的图象在第_____象限内,在每一个象限内,y 随 x 的增大而_____.

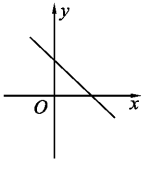


图 13-165

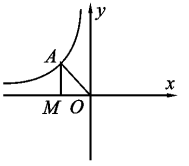
(14) (西安市,2000) 已知 y 与 $x-1$ 成反比例,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$y=-\frac{1}{3}$ 那么当 $x=2$ 时,y 的值为_____.

(15) (黄山,2000) 反比例函数 $y=kx^{1-2k}$,当 $x>0$ 时,y 随 x 的_____而增大.

(16) (包头市,2000) 以方程 $x^2+3x-4=0$ 的两个根为横、纵坐标的点,既在正比例函数 $y=k_1x$ ($k_1\neq0$) 的图象上,又在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ ($k_2\neq0$) 的图象上,则 $k_1k_2=$_____.

(17) (荆门市,2002) 如果一次函数 $y=mx+n$ 与反比例函数 $y=\frac{3n-m}{x}$ 的图象相交于点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$,那么该直线与双曲线的另一个交点为_____.

(18) (重庆市,2000) 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上有一点 $P(m,n)$,其坐标是关于 t 的一元二次方程 $t^2-3t+k=0$ 的两根,且 P 到原点的距离为 $\sqrt{13}$,则该反比例函数的解析式为_____.



(19) (嘉兴、舟山、衢州市,1999) 一个反比例函数在第二象限的图象如图 13-166,点 A 是图象上任意一点,$AM\perp x$ 轴,垂足为 M,O 是原点,如果 $\triangle AOM$ 的面积为 3,那么这个反比例函数的解析式为_____.

图 13-166

(20) (昆明市,2001) 一定质量的二氧化碳,其体积 V (m^3) 是密度 ρ (kg/m^3) 的反比例函数,请根据如图 13-167 中所给出的已知条件,写出当 $\rho=1.1\ kg/m^3$ 时二氧化碳的体积 $V=$_____m^3.

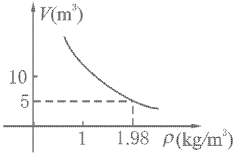


图 13-167

(21) (湖南省邵阳,2001) 三角形的面积是 12,三角形底边长 y 是高 x 的函数,在平面直角坐标系中,它的图象只能在第_____象限.

2. 选择题

(1) (北京市、宁波市,2003) 如果反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $P(-2,3)$,那么 k 的值是 (　　)

A. -6　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. 6

(2) (福州市,2003) 反比例函数 $y=-\frac{4}{x}$ 图象大致是 (　　)

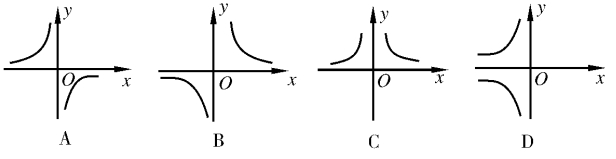


图 13－168

⑶ (汕头市,2003) 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象如图 13－169,则 $y=kx-2$ 的图象为 (　　)

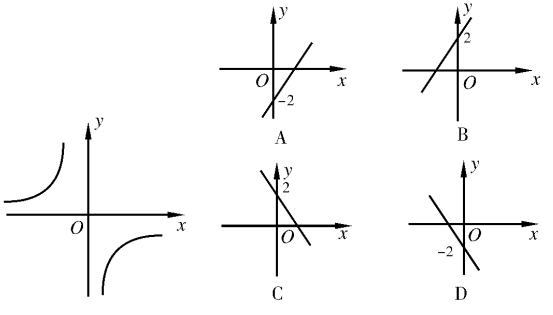


图 13－169　　图 13－170

⑷ (山西省,2003) 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大,那么一次函数 $y=kx-k$ 的图象经过 (　　)

A. 第一、二、三象限　　B. 第一、二、四象限

C. 第一、三、四象限　　D. 第二、三、四象限

⑸ (辽宁省,2003) 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、四象限,则反比例函数 $y=\frac{kb}{x}$ 的图象在 (　　)

A. 第一、二象限　　B. 第三、四象限

C. 第一、三象限　　D. 第二、四象限

⑹ (济南市,2003) 已知点 $(x_1,-1)$、$\left(x_2,-\frac{25}{4}\right)$、$(x_3,-25)$ 在函数 y

$=-\frac{1}{x}$的图象上，则下列关系式正确的是（　　）

A. $x_1<x_2<x_3$　　B. $x_1>x_2>x_3$

C. $x_1>x_3>x_2$　　D. $x_1<x_3<x_2$

⑺ （武汉市，2003）一次函数 $y=-kx+4$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象有两个不同的交点，点 $\left(-\frac{1}{2},y_1\right)$、$(-1,y_2)$、$\left(\frac{1}{2},y_3\right)$ 是函数 $y=\frac{2k^2-9}{x}$ 图象上的三个点，则 y_1、y_2、y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_2<y_3<y_1$　　B. $y_1<y_2<y_3$

C. $y_3<y_1<y_2$　　D. $y_3<y_2<y_1$

⑻ （南通市，2003）已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象如图 13－171 所示，则二次函数 $y=2k^2-x+k^2$ 的图象大致为图 13－172 中的（　　）

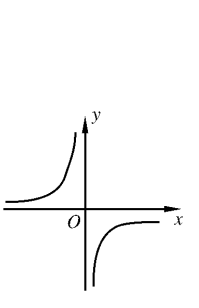


图 13－171

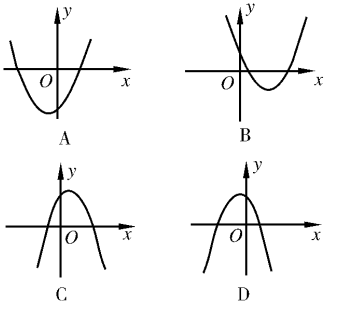


图 13－172

⑼ （兰州市，2003）设 $x<0$ 时，函数 $y=x$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 在一同直角坐标系中的大致图象是（　　）

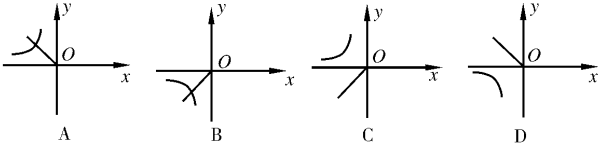


图 13－173

(10) (河北省,2003)在平面直角坐标系中,若一个点的横坐标与纵坐标互为相反数,则该点一定不在(　　)

A. 直线 $y=x$ 上　　B. 直线 $y=-x$ 上

C. 抛物线 $y=x^2$ 上　　D. 双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上

(11) (河南省,2003)如图 13－174,函数图象①、②、③的表达式应为(　　)

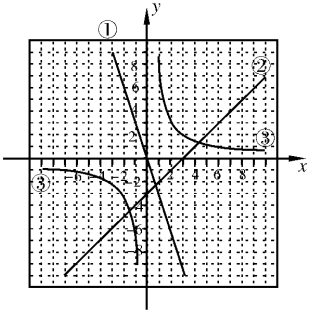


图 13－174

A. $y=-\frac{5}{2}x, y=x+2, y=-\frac{4}{x}$

B. $y=\frac{5}{2}x, y=-x+2, y=\frac{4}{x}$

C. $y=-\frac{5}{2}x, y=x-2, y=\frac{4}{x}$

D. $y=-\frac{5}{2}x, y=x-2, y=-\frac{4}{x}$

(12) (广东省,2003)如图 13－175,某个批比例函数的图象经过点 P,则它的解析式为(　　)

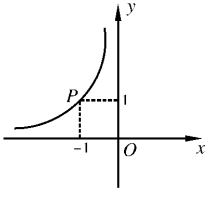


图 13－175

A. $y=\frac{1}{x}\ (x>0)$

B. $y=-\frac{1}{x}\ (x>0)$

C. $y=\frac{1}{x}\ (x<0)$

D. $y=-\frac{1}{x}$ $(x<0)$

(13) (淄博市,2003)如图 13－176,已知 A、B 两点是反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ $(x>0)$ 的图象上任意两点,过 A、B 两点分别作 y 轴的垂线,垂足分别为 C、D,连结 AB、AO、BO,则梯形 $ABDC$ 的面积与 $\triangle ABO$ 的面积比是(　　)

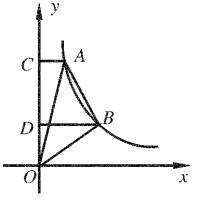


图 13－176

A. 2∶1　　B. 1∶2　　C. 1∶1　　D. 2∶3

(14) (黄石市,2001)已知 $y=y_1+y_2$,其中 y_1 与 x 成反比,且比例系数是 k_1,y_2 与 x^2 成正比,且比例系数是 k_2,若 $x=-1$ 时,$y=0$,则 k_1 与 k_2 的关系是(　　)

A. $k_1+k_2=0$　　B. $k_1-k_2=0$

C. $k_1\cdot k_2=1$　　D. $k_1\cdot k_2=-1$

(15) (荆州市,2001)下列四个函数:①$y=x+1$;②$y=\frac{3}{x}$;③$y=-x^2$;④$y=2x$ $(-1\leqslant x\leqslant 2)$,其中图象是中心对称图形,且对称中心是原点的共有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(16) (泰州,2001)下列函数中,当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大的函数是(　　)

A. $y=-2x$　　B. $y=-2x+2$

C. $y=-\frac{2}{x}$　　B. $y=-2x^2$

(17) (菏泽,2001)如图 13－177,P 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上一点,过 P 点分别向 x 轴,y 轴作垂线,所得到的图中阴影部分的面积为 6,则这个反比例函数的解析式为(　　)

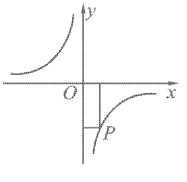


图 13－177

A. $y=-\frac{6}{x}$　　B. $y=\frac{6}{x}$

C. $y=-\frac{3}{x}$　　D. $y=\frac{3}{x}$

(18) (北京市石景山区,2001)已知函数 $y=k_1x$ 和 $y=\frac{k_2}{x}$,若常数 k_1、k_2 异号,且 $k_2>k_1$,则它们在同一坐标系中的图象大致是图 13－178

的(　　)

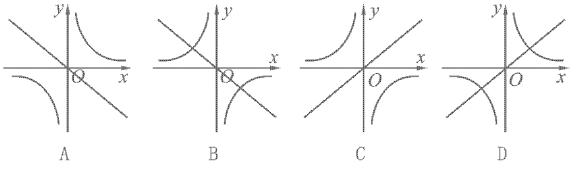


图 13－178

(19) (宜昌市,2001) 当 $x>0$ 时,两个函数的函数值 y 都随 x 的增大而减小的是(　　)

A. $y=3x$ 与 $y=\frac{1}{x}$　　B. $y=-3x$ 与 $y=-\frac{1}{x}$

C. $y=-2x+6$ 与 $y=\frac{1}{x}$　　D. $y=3x-15$ 与 $y=-\frac{1}{x}$

(20) (济南市,1999) 如图 13－179,A、B 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上关于原点 O 对称的任意两点,AC 平行于 y 轴,交 x 轴于点 C,BD 平行于 y 轴,交 x 轴于点 D,设四边形 $ADBC$ 的面积为 S,则(　　)

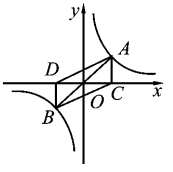


图 13－179

A. $S=1$　　B. $1<S<2$

C. $S=2$　　D. $S>2$

3. (甘肃省,2003) 已知一次函数 $y=kx+k$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图象在第一象限交于 $B(4,n)$,求 k、n 的值.

4. (兰州市,2003) 已知 $y=(m^2+2n)x^{m^2+m-1}$.

(1) 如果 y 是 x 的正比例函数,求 m 的值;

(2) 如果 y 是 x 的反比例函数,求 m 的值.

5. (南京市,2003) 一定质量的氧气,它的密率 ρ (kg/m^3) 是它的体积 V (m^3) 的反比例函数,当 $V=10$ m^3 时,$\rho=1.43$ kg/m^3.

(1) 求 ρ 与 V 的函数关系式;

(2) 求当 $V=2$ m^3 时氧气的密度 ρ.

6. (盐城市,2002) 若反比例函数的图象经过点 (1,3).

(1) 求该反比例函数的解析式；

(2) 求一次函数 $y=2x+1$ 与该反比例函数的图象的交点坐标.

7. (上海市,2002 年) 如图 13－180,直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 分别交 x 轴、y 轴于点 A、点 C,P 是该直线上在第一象限内的一点,$PB\perp x$ 轴,B 为垂足,$S_{\triangle ABP}=9$.

(1) 求点 P 的坐标.

(2) 设点 R 与点 P 在同一个反比例函数的图象上,且点 R 在直线 PB 的右侧.作 $RT\perp x$ 轴,T 为垂足,当 $\triangle BTR\backsim\triangle AOC$ 时,求点 R 的坐标.

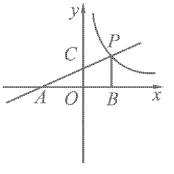


图 13－180

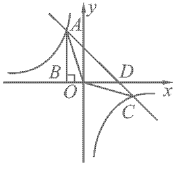


图 13－181

8. (成都市,2002) 如图 13－181,Rt$\triangle ABO$ 的顶点 A 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 与直线 $y=-x-(k+1)$ 在第二象限的交点.$AB\perp x$ 轴于 B,且 $S_{\triangle ABO}=\frac{3}{2}$.

(1) 求这两个函数的解析式.

(2) 求直线与双曲线的两个交点 A、C 的坐标和 $\triangle AOC$ 的面积.

探究能力测试

9. (金华市、衢州市,2003) 为了预防“非典”,某学校对教室采用药熏消毒.已知药物燃烧时,室内每立方米空气中的含药量 y (mg) 与时间 x (min) 成正比例药物燃烧完后,y 与 x 成反比例 (如图 13－182 所示).现测得药物 8 min 燃毕,此量室内空气中每立方米的含药量为 6 mg.请根据题中所提供的信息,解答下列问题：

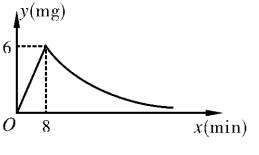


图 13－182

(1) 药物燃烧时 y 关于 x 的函数关系式为：_____,自变量 x 的取值范

围是：_____ 药物燃烧后 y 关于 x 的函数关系式为：_____；

⑵ 研究表明，当空气中每立方米的含药量低于 1.6 mg 时学生方可进教室，那么从消毒开始，至少需要经过_____ min 后，学生才能回到教室；

⑶ 研究表明，当空气中每立方米的含药量不低于 3 mg 且持续时间不低于 10 min 时，才能有效杀灭空气中的病菌，那么此次消毒是否有效？为什么？

10. (四川省，2003) 如图 13－183，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像与反例函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像交于 A、B 两点，且点 A 的横坐标和点 B 的纵坐标都是 -2. 求

⑴ 一次函数的解析式；

⑵ $\triangle AOB$ 的面积.

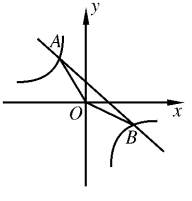


图 13－183

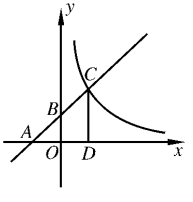


图 13－184

11. (天津市，2003) 如图 13－184，已知一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 的图象与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，且与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ $(m\neq 0)$ 的图象在第一限交于 C 点，CD 垂直于 x 轴，垂足为 D. 若 $OA=OB=OD=1$.

⑴ 求点 A、B、D 的坐标；

⑵ 求一次函数和反比例函数的解析式.

12. (福州市，2001) 如图 13－185，已知：正方形 $OABC$ 的面积为 9，点 O 为坐标原点，点 A 在 x 轴上，点 C 在 y 轴上，点 B 在函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0, x>0)$ 的图象上，点 $P(m,n)$ 是函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0, x>0)$ 的图象上的任意一点，过点 P 分别作 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为 E、F，并设矩形 $OEPF$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分的面积为 S.

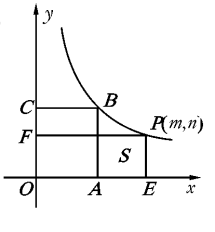


图 13－185

(1) 求 B 点坐标和 k 的值；

(2) 当 $S=\frac{9}{2}$ 时，求点 P 的坐标；

(3) 写出 S 关于 m 的函数关系式.

13. (吉林省，2002) 如图 13－186，已知 $(1,3)$ 在函数 $y=\frac{k}{x}$ $(x>0)$ 的图象上，矩形 $ABCD$ 的边 BC 在 x 轴上，E 是对角线 BD 的中点，函数 $y=\frac{k}{x}$ $(x>0)$ 的图象又经过 A、E 两点，点 E 的横坐标为 m. 解答下列问题：

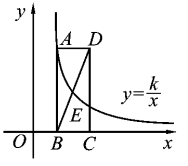


图 13－186

(1) 求 k 的值；

(2) 求点 C 的横坐标 (用 m 表示)；

(3) 当 $\angle ABD=45°$，求 m 的值.

14. (兰州市，2002) 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ 和一次函数 $y=-x+8$.

(1) 若一次函数和反比例函数的图象交于点 $(4,m)$，求 m 和 k.

(2) k 满足什么条件时，这两个函数图象有两个不同的交点？

(3) 设 (2) 中的两个交点为 A、B，试判断 $\angle AOB$ 是锐角还是钝角？

15. (昆明市，2002 年) 已知矩形 $ABCD$ 的面积为 36，以此矩形的对称轴为坐标轴建立平面直角坐标系，设点 A 的坐标为 (x,y) 其中 $x>0$，$y>0$.

图 13－187

(1) 求出 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

(2) 用 x、y 表示矩形 $ABCD$ 的外接圆的面积 S，并用下列方法，解答后面的问题.

方法 因为 $a^2+\frac{k^2}{a^2}=\left(a-\frac{k}{a}\right)^2+2k$ (k 为常数且 $k>0$，$a\neq 0$)，且 $\left(a-\frac{k}{a}\right)^2\geqslant 0$，所以 $a^2+\frac{k^2}{a^2}\geqslant 2k$.

所以当 $a-\frac{k}{a}=0$，即 $a=\pm\sqrt{k}$ 时，$a^2+\frac{k^2}{a^2}$ 取得最小值 $2k$.

问题：当点 A 在何位置时，矩形 $ABCD$ 的外接圆面积 S 最小？并求出 S 的最小值.

(3) 如果直线 $y=mx+2$ $(m<0)$ 与 x 轴交于点 P，与 y 轴交于点 Q，那

么是否存在这样的实数 m，使得点 P、点 Q 与 (2) 中求出的点 A 构成 $\triangle PAQ$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{6}$？若存在，请求出 m 的值；若不存在，请说明理由.

16. (江苏省泰州市，2002) 已知一次函数 $y=\frac{3}{4}x+m$ 的图象分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点，且与反比例函数 $y=\frac{24}{x}$ 的图象在第一象限内交于点 $(4,n)$，$CD\perp x$ 轴于 D.

(1) 求 m、n 的值，并在给定的直角坐标系中作出一次函数的图象.

(2) 如果点 P、Q 分别从 A、C 两点同时出发，以相同的速度沿线段 AD、CA 向 D、A 运动，设 $AP=k$. ①k 为何值时，以 A、P、Q 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 相似？②k 为何值时，$\triangle APQ$ 的面积取得最大值？并求出这个最大值.

13.9 小结与复习

学点探究分析

重点　几种常见函数的图象与性质.

难点　几种常见函数的性质在实际问题与综合问题中的应用.

探究点　与函数知识有关的实际问题是考查的热点，也是一个难点. 函数与几何、三角、方程、不等式等相结合的综合问题如动点问题、探索性问题等常作为中考压轴题. 合理构建函数模型，是解决这类问题的关键.

学习方法技巧

(1) 本章知识中函数图象与函数性质的研究渗透了数形结合的思想方法，求函数解析式时应用了待定系数法，并在求二次函数解析式时体现了配方法，实际解题中还应用了分类讨论的方法，这些数学思想方法应在学习中逐步体会并灵活应用.

(2) 本章知识是中考考查的重点知识，学习中应建立知识间的联系，如函数与方程间的联系，函数与几何、三角知识间的联系等.

(3) 函数知识在实际问题中应用是学习与考查的热点，体现了用数学的意识，要善于从对实际问题的分析中，建立合适、正确的函数模型，用函数知识解决生产、生活中的实际问题.

能力升级捷径

【例 1】 (湖北随州市,1999) 如图 13－188,已知边长为 2 的正方形 $OABC$ 在平面坐标系中位于 x 轴上方,OA 与 x 轴的正半轴的夹角为 60°,则 B 点坐标为(　　)

A. $(\sqrt{3}-2,\sqrt{3}+1)$

B. $(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-2)$

C. $(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$

D. $(1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$

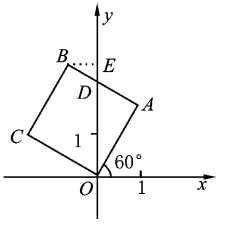


图 13－188

思维技巧　如何用好 60°是解此题的关键,根据直角坐标系中两坐标轴及正方形均具有垂直的性质,可结合 60°角构造直角三角形.求 B 点坐标,需先求 B 到 x 轴、y 轴的距离.

解　过 B 作 $BE\perp y$ 轴于 E,设 AB 交 y 轴于 D.在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中,$AO=2$,$\angle DOA=90°-60°=30°$,

所以　$AD=OA\tan 30°=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.$OD=\dfrac{OA}{\cos 30°}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中,$\angle BDE=60°$,$BD=AB-AD=2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以　$BE=BD\sin 60°=\left(2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}-1$.

$DE=BD\sin 30°=\left(2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)\times\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以　$OE=OD+DE=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=1+\sqrt{3}$.

因为 B 点在第二象限,所以 B 点坐标是 $(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$,故选 C.

激活思维　求坐标一般分两种情况:(1) 求交点,如直线与直线的交点等;(2) 求距离,再将距离换成坐标.通常作 x 轴或 y 轴的垂线,再利用三角函数知识,解直角三角形.要学会作辅助线构造直角三角形,本题属于第二种情形.若连 OB,则 OB 与 x 轴所夹的锐角为 75°,不是特殊角,不便于计算,过 B 作 BE 垂直 y 轴于 E,问题便转化为解 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle BED$.此外,还要注意将线段长转化为坐标.

同类变式　(吉林省,2000) 如图 13－189,边长为 2 cm 的正六边形 $ABCDEF$ 的中心在坐标原点上,点 B 在 x 轴的负半轴上.求出点 A、点 D、

点 E 的坐标；

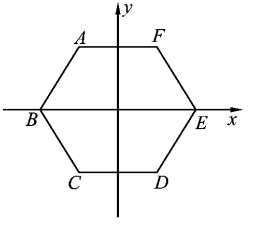


图 13－189

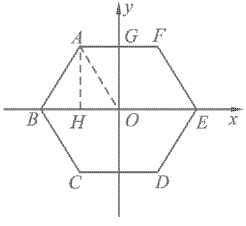


图 13－190

解 如图 13－190 所示，

设 AF 与 y 轴交于点 G，连结 OA，过点 A 作 $AH\perp x$ 轴，垂足为 H. 由已知 $AF=2$，得 $AG=1$，$AH=\sqrt{3}$.

所以 $A(-1,\sqrt{3})$.

同理知 $D(1,-\sqrt{3})$，$E(2,0)$.

思维拓展 (安徽省，1996) 如图 13－191，$\odot C$ 通过原点，并与两坐标轴分别相交于 A，D 两点，已知 $\angle OBA=30^\circ$，点 D 的坐标为 $(0,2)$. 求点 A 的坐标及圆心 C 的坐标.

解 连 AD，如图 13－192 所示.

因为 Ox 轴 $\perp Oy$ 轴，所以 AD 是 $\odot C$ 的直径.

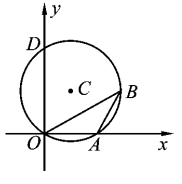


图 13－191

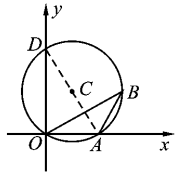


图 13－192

又因为 $\angle OBA=30^\circ$，所以 $\angle ODA=30^\circ$.

而点 D 的坐标为 $(0,2)$，所以 $OD=2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$\dfrac{OA}{OD}=\tan 30^\circ$，所以 $OA=OD\tan 30^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以点 A 坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$

所以点 C 的横坐标为 $\frac{1}{2}\cdot OA=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

点 C 的纵坐标为 $\frac{1}{2}\cdot OD=1$.

即点 C 坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$.

【例 2】　(黄冈市，2001) 已知，如图 13－193，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$，$BC=12$，F 为 BC 的中点，D 是 FC 上一点，过点 D 作 BC 的垂线交 AC 于点 G，交 BA 的延长线于点 E，如果设 $DC=x$，则

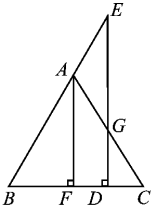


图 13－193

(1) 图中哪些线段 (如线段 BD 可记作 y_{BD}) 可以看成是 x 的函数 (如 $y_{BD}=12-x$ $(0<x<6)$)，请再写出其中的四个函数关系式；

(2) 图中哪些图形的面积 (如 $\triangle CDG$ 的面积记作 $S_{\triangle CDG}$) 可以看成是 x 的函数 (如 $S_{\triangle CDG}=\frac{2}{3}x^2$ $(0<x<6)$)，请再写出其中的两个函数关系式.

思维技巧　确定几何量之间的函数关系式，就是“几何问题代数化”. 通过数形转化，同时考查几何性质与函数知识，能力要求较高. 其基本方法是，首先根据已知条件和图形的有关度量性质确定各线段之间的数量关系，然后再经过适当的恒等变形，即可得到几何量之间的函数关系式，要注意的是自变量的取值范围要受图形制约，必须符合题意.

解　(1) $y_{DG}=\frac{4}{3}x$；$y_{GC}=\frac{5}{3}x$；$y_{AG}=-\frac{5}{3}x+10$；$y_{AE}=\frac{5}{3}(6-x)=-\frac{5}{3}x+10$；$y_{DE}=\frac{4}{3}(12-x)=-\frac{4}{3}x+16$；$y_{EG}=\frac{8}{3}(6-x)=-\frac{8}{3}x+16$；$y_{BE}=\frac{5}{3}(12-x)=-\frac{5}{3}x+20$ 等，其中 $0<x<6$.

(2) $S_{\triangle AEG}=\frac{4}{3}(6-x)^2=\frac{4}{3}x^2-16x+48$；

$S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}(12-x)^2=\frac{2}{3}x^2-16x+96$；

$S_{四边形AGDF}=\frac{2}{3}(36-x^2)=-\frac{2}{3}x^2+24$；

$S_{四边形ABDG}=-\frac{2}{3}x^2+48$；

$S_{四边形AFDE}=\frac{2}{3}(12-x)^2-24=\frac{2}{3}x^2-16x+72$；

$S_{凹四边形BEGC}=\frac{4}{3}(72-12x+x^2)=\frac{4}{3}x^2-16x+96$ 等，其中 $0<x<6$.

激活思维 确定几何量之间的函数关系式关键在于：(1) 要善于用自变量或已知几何量表示相关的几何量.这里不仅涉及线段的和差关系，更多地要善于观察、利用几何图形面积之间的关系及直角三角形中的勾股定理等；(2) 要善于应用图形的度量性质确定函数与自变量之间的数量关系 (平行线分线段成比例定理，相似三角形，面积公式等).

同类变式 1. (娄底，2001) 如图 13－194，P 是以 r 为半径的⊙O 外一点，PO 交⊙O 于 A，$\cos\angle OPT=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle TAP=120°$.

(1) 求证：PT 是⊙O 的切线；

(2) 过 P 点作⊙O 的割线 PC 交⊙于 B、C 两点，设 $PB=x$，$PC=y$，求 y 与 x 的函数关系式，并确定 x 的取值范围.

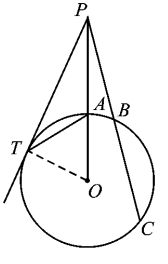


图 13－194

(1) 证明 连 OT，因为 $\cos\angle OPT=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle OPT=30°$，

因为 $\angle TAP=120°$，所以 $\angle PTA=30°$.

所以 $\angle TAO=60°$.

又因为 $OT=OA$，所以 $\triangle OTA$ 为等边三角形.

所以 $\angle ATO=60°$. 所以 $\angle PTO=90°$.

因此，PT 是⊙O 的切线.

(2) 解 由 (1) 知，PT 是⊙O 的切线，所以 $PT=\sqrt{3}r$.

由切割线定理，得 $PT^2=PB\cdot PC$，

所以 $xy=(\sqrt{3}r)^2=3r^2$.

故所求函数关系式是 $y=\frac{3r^2}{x}$.

作为割线上一段的 PB，其最小值是当 B 点与 A 点重合时 PB 的长，即 $PB=\frac{1}{2}PO=r$，最大值是当 B 点与 C 点重合时，即割线变成切线时的切线长 $PB=\sqrt{3}r$.

所以自变量 x 的取值范围是 $r \leqslant x \leqslant \sqrt{3}r$.

2. (南京市,2001) 如图 13－195,E、F 分别是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的点,$CE=1$,$CF=\frac{4}{3}$,直线 FE 交 AB 的延长线于 G,过线段 FG 上的一个动点 H 作 $HM \perp AG$,$HN \perp AD$,垂足分别为 M、N,设 $HM=x$,矩形 $AMHN$ 的面积为 y.

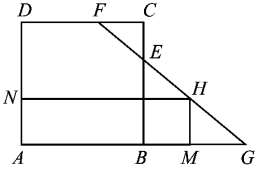


图 13－195

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 当 x 为何值时,矩形 $AMHN$ 的面积最大?最大面积是多少?

由 $y=S_{矩形AMHN}=HM \cdot HN$ 知,要确定 y 与 x 之间的函数关系式,只要用关于 x 的代数式表示 HN 即可.

解　(1) 由已知易知 $\triangle EFC \backsim \triangle EGB \backsim \triangle HGM$,

所以　$BG=4$,$\frac{MG}{MH}=\frac{CF}{CE}$.

所以　$MG=\frac{4}{3}MH=\frac{4}{3}x$.

故　$NH=AM=AG-MG=8-\frac{4}{3}x$.

于是,所求函数关系式 $y=x\left(8-\frac{4}{3}x\right)$,

即　$y=-\frac{4}{3}x^2+8x$ $(0<x\leqslant 4)$.

(2) 因为　$y=-\frac{4}{3}x^2+8x=-\frac{4}{3}(x-3)^2+12$,

所以当 $x=3$ 时,矩形 $AMHN$ 的面积最大,最大值为 12.

思维拓展　(北京市西城区,2001) 已知:在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,如图 13－196,

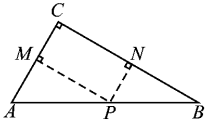


图 13－196

(1) $AB=c$，$\angle A=\theta$，用 c 和 θ 表示 BC、AC；(2) $AB=5$，$\sin A=\frac{4}{5}$，P 是 AB 上一动点（不与点 A、B 重合），过点 P 分别作 $PM\perp AC$ 于点 M，$PN\perp BC$ 于点 N，设 $\triangle AMP$ 的面积为 S_1，$\triangle PNB$ 的面积为 S_2，四边形 $CMPN$ 的面积为 S_3，$AP=x$，分别求出 S_1，S_2，S_3 关于 x 的函数解析式；(3) 试比较 S_1+S_2 与 S_3 的大小，并说明理由.

解 (1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=c$，$\angle A=\theta$，

因为 $\sin A=\frac{BC}{AB}$，

所以 $BC=AB\sin A=c\sin\theta$.

因为 $\cos A=\frac{AC}{AB}$，所以 $AC=AB\cos A=c\cos\theta$.

(2) 如图 13－196，过点 P 分别作 $PM\perp AC$ 于点 M，$PN\perp BC$ 于点 N，则四边形 $CMPN$ 是矩形.

因为 $\sin A=\frac{4}{5}$，由锐角三角函数定义，

所以 $\cos A=\frac{3}{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APM$ 中，因为 $AP=x$ $(0<x<5)$，

又 因为 $PM=AP\sin A=\frac{4}{5}x$，$AM=AP\cos A=\frac{3}{5}x$，

所以 $S_1=\frac{1}{2}PM\cdot AM=\frac{6}{25}x^2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBN$ 中，

因为 $PB=AB-AP=5-x$ $(0<x<5)$，

同理可得 $S_2=\frac{6}{25}(5-x)^2=\frac{6}{25}x^2-\frac{12}{5}x+6$.

在矩形 $CMPN$ 中，

因为 $PM=\frac{4}{5}x$，所以 $PN=\frac{3}{5}(5-x)$ $(0<x<5)$.

所以 $S_3=PM\cdot PN=\frac{12}{25}(5x-x^2)=-\frac{12}{25}x^2+\frac{12}{5}x$.

(3) 因为 $(S_1+S_2)-S_3=\frac{6}{25}[x^2+(5-x)^2-2(5x-x^2)]$

$=\frac{6}{25}(4x^2-20x+25)$

$=\frac{6}{25}(2x-5)^2\geqslant 0$，

所以　当 $x=\frac{5}{2}$，即 P 为 AB 中点时，$\frac{6}{25}(2x-5)^2=0$，此时 $S_1+S_2=S_3$.

当 $0<x<\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{2}<x<5$，即 P 不为 AB 中点时，$\frac{6}{25}(2x-5)^2>0$，此时 $S_1+S_2>S_3$.

【例 3】　如图 13－197，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 A、C 在 x 轴正半轴上，点 B 在 y 轴正半轴上，若此三角形腰长和腰上的高线的长分别是关于 x 的方程

$$x^2-(2m-1)x+m^2-5=0$$

的两个实数根，且 $\triangle ABC$ 的面积等于 10. 求经过 B，C 两点的直线的解析式.

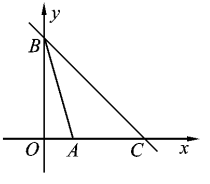


图 13－197

思维技巧　本题是考查一次函数与三角形结合的综合应用问题，利用根与系数关系和三角形面积，求出 B、C 两点坐标是关键.

解　设腰及腰上的高分别为 x_1、x_2.

则 $x_1+x_2=2m-1$，$x_1x_2=m^2-5$，

所以　$S_{\triangle ABC}=\frac{x_1x_2}{2}=\frac{m^2-5}{2}=10$，

故 $m=\pm 5$.

又 $x_1+x_x=2m-1>0$，有 $m=5$.

则原方程化为 $x^2-9x+20=0$.

又 $AB>OB$，

所以　$x_1>x_2$.

故 $x_1=5$，$x_2=4$.

即 $A(3,0)$，$B(0,4)$，$C(8,0)$.

因此，所求解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.

激活思维　本例中 $\triangle ABC$ 的腰长与高线长隐于方程之中，且图形中还暗含了腰长与腰上的高的大小关系，需经讨论方可得解. 从本例可以看出，正确挖掘题设中的隐含条件，是解题不出现偏差的前提，否则解题会陷入困境.

同类变式　(荆州市，2001) 如图 13－198，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，将此正

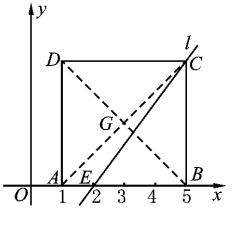


图 13－198

方形置于平面直角坐标系中，使 AB 在 x 轴的正半轴上，A 点的坐标是 $(1,0)$.

(1) 经过 C 点的直线 $y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$ 与 x 轴交于点 E，求四边形 $AECD$ 的面积.

(2) 若直线 l 经过点 E 且将正方形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分，求直线 l 的方程，并在坐标系中画出直线 l.

解 (1) 由 $\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=0$ 得 E 的坐标为 $(2,0)$.

因为四边形 $AECD$ 是直角梯形，

所以 $S_{四边形AECD}=\frac{1}{2}(AE+CD)\cdot AD=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10$.

(2) 因为过正方形对称中心的直线，总是将正方形分成面积相等的两部分，

所以连结 AC、BD 交于 G 点. 依题意可求 G 的坐标为 $(3,2)$. 所以 经过 G、E 两点的直线即为直线 l，设 l 的解析式为 $y=kx+b$，所以

$\begin{cases}2k+b=0,\\3k+b=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-4.\end{cases}$

所以所求直线 l 的方程为 $y=2x-4$.

思维拓展 (四川绵阳市，2002) 一个安有进水管和出水管的蓄水池，每单位时间内进水、出水的量分别是一定的. 若从某时刻开始的 4 h 内只进水，不出水，在随后的 8 h 内既进水又出水，得到时间 x (h) 与蓄水池内水量 y (m^3) 之间的关系如图 13－199 所示.

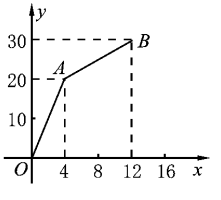


图 13－199

(1) 当 $4\leqslant x\leqslant 12$ 时，求 y 关于 x 的函数关系式；

(2) 如果 12 h 后只放水，不进水，求 y 随 x 而变化的关系式，并画出大致图象.

解 (1) 因为每单位时间内进水、出水的量分别是一定的，所以蓄水池内水量在单位时间内的变化 (不论是增长是还是减少) 也是一定的，即 y 与 x 具有一次函数关系，设为 $y=kx+b$ (k，b 是待定常数).

由图可知，当 $x=4$ 时，$y=20$ 当 $x=12$ 时，$y=30$.

所以 $\begin{cases}20=4k+b,\\30=12k+b.\end{cases}$

解之，得 $k=\frac{5}{4}$，$b=15$.

因此，y 关于 x 的函数关系式是 $y=\frac{5}{4}x+15$，$4\leqslant x\leqslant 12$.

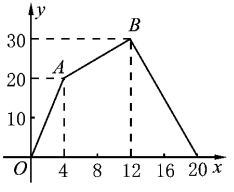


图 13－200

(2) 由图 13－200 可知，在第 4 h 时，蓄水池有水 20 m^3，则知进水管每小时进水 5 m^3. 从第 4 h 到第 12 h 这 8 h 内仅增加 10 m^3，而进水管实际进水 40 m^3，可知其中 30 m^3 已通过出水管排出. 从而出水管每小时出水 $\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$ m^3. 于是从 12 h 后只放水，不进水，则 $30\div\frac{15}{4}=8$ h 就放完.

由已知设当 $x\geqslant 12$ 时，y 随 x 而变化的关系为 $y=kx+b$.

当 $x=12$ 时，$y=30$ 当 $x=12+8=20$ 时，$y=0$.

所以 $\begin{cases}30=12k+b,\\0=20k+b.\end{cases}$

解这，得 $k=-\frac{15}{4}$，$b=75$.

因此，y 随 x 而变化的关系式为 $y=-\frac{15}{4}x+75$，$12\leqslant x\leqslant 20$.

【例 4】 (北京市，2000) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于不同的点 A、B，点 A 在点 B 的左边，与 y 轴交于点 C，若 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOC$ 的面积之和为 6，且这个函数的图象的顶点坐标为 $(2,-a)$. 求这个二次函数的解析式.

思维技巧　此题是利用三角形面积关系，求二次函数解析式的题目，根据题目特点，可设二次函数的解析式为三种不同的形式求解.

解法一　由题意，设 A、B 两点的坐标分别为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，$x_1<x_2$，C 点坐标为 $(0,c)$.

所以　x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根.

所以　$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

因为 $AB=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

所以 $AB=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$.

因为二次函数图象的顶点坐标为 $(2,-a)$，

所以 $\frac{4ac-b^2}{4a}=-a$.

由于 $a\neq0$，故去分母并整理，得

$b^2-4ac=4a^2$.

所以 $AB=\frac{\sqrt{4a^2}}{|a|}=\frac{2|a|}{|a|}=2$.

因为二次函数的图象的对称轴为 $x=2$，

所以 A、B 两点的坐标分别为 $(1,0)$，$(3,0)$.

所以 $AO=1$，$BO=3$，$OC=|c|$.

又 因为 $S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=6$，

所以 $\frac{1}{2}AO\cdot OC+\frac{1}{2}BO\cdot OC=6$.

所以 $\frac{1}{2}|c|+\frac{3}{2}|c|=6$.

解得 $c=\pm3$.

当 $c=3$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过 $(1,0)$，$(3,0)$，$(0,3)$ 三点，

所以 $\begin{cases}a+b+c=0,\\9a+3b+c=0,\\c=3.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}a=1,\\b=-4,\\c=3.\end{cases}$

所以二次函数解析式为 $y=x^2-4x+3$.

当 $c=-3$ 时，同理可求得 $y=-x^2+4x-3$.

所以所求的二次函数的解析式为 $y=x^2-4x+3$ 或 $y=-x^2+4x-3$.

解法二 因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的顶点坐标为 $(2,-a)$，

所以设二次函数的解析式为 $y=a(x-2)^2-a$.

则 $y=ax^2-4ax+3a$.

令 $ax^2-4ax+3a=0$.

因为　$a\neq0$，所以　$x^2-4x+3=0$.

解这个方程，得 $x_1=1$，$x_2=3$.

因为点 A 在点 B 的左边，

所以 A、B 两点的坐标分别为 $(1,0)$，$(3,0)$.

所以　$AO=1$，$BO=3$.

因为　$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=6$，

所以　$\frac{1}{2}AO\cdot OC+\frac{1}{2}BO\cdot OC=6$.

因为　$OC=|c|$，所以　$\frac{1}{2}|c|+\frac{3}{2}|c|=6$.

解得　$c=\pm3$.

所以 C 点坐标为 $(0,3)$ 或 $(0,-3)$

当 C 点坐标为 $(0,3)$ 时，

则　$3=a(0-2)^2-a$

所以　$a=1$.

所以二次函数解析式为 $y=x^2-4x+3$.

同理可求　$y=-x^2+4x-3$.

所以二次函数解析式为 $y=x^2-4x+3$ 或 $y=-x^2+4x-3$.

解法三　因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标为 $(2,-a)$，

所以　$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=2,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=-a,\end{cases}$　解得　$\begin{cases}b=-4a,\\ c=3a.\end{cases}$

所以　$y=ax^2-4ax+3a$，

即 $y=a(x-1)(x-3)$，

令　$y=0$，则 $a(x-1)(x-3)=0$.

因为　$a\neq0$，所以　$x_1=1$，$x_2=3$.

以下同解法二.

激活思维　用待定系数法求抛物线的解析式，方法较多，技巧性强. 可根据题目所给条件，灵活选用. 在求解过程中，结合抛物线有关性质（对称性），往往可使解答过程简捷.

同类变式　（辽宁省，2001）已知 如图 13－201，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点

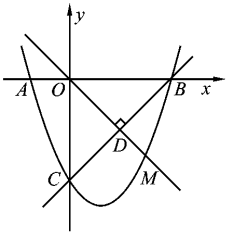


图 13－201

$A(-1,0)$，且经过直线 $y=x-3$ 与坐标轴的两个交点 B、C.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 求抛物线的顶点坐标；

(3) 若点 M 在第四象限内的抛物线上，且 $OM\perp BC$，垂足为 D，求点 M 的坐标.

解 (1) 由 $y=x-3$，可求出直线与坐标轴交点坐标分别为 $B(3,0)$，$C(0,-3)$

将 A、B、C 三点的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，得

$$\begin{cases}0=a-b+c,\\0=9a+3b+c,\\-3=c\end{cases}$$

解此方程组，得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=-3\end{cases}$

所以 $y=x^2-2x-3$ 为所求抛物线的解析式.

(2) 因为 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

所以抛物线的顶点坐标为 $(1,-4)$.

(3) 因为 $OB=3$，$OC=3$，

所以 $OB=OC$.

又因为 $OM\perp BC$，所以 OM 平分 $\angle COB$.

故可设点 M 坐标为 $(x,-x)$.

将 $M(x,-x)$ 代入 $y=x^2-2x-3$ 中，得 $-x=x^2-2x-3$，

整理得 $x^2-x-3=0$，解得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

因为点 M 在第四象限，

所以 $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，

所以 $M\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$.

思维拓展 (岳阳市，2002) 已知，如图 13-202，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴、y 轴都只有一个交点，分别为 A、B，且 $AB=2$，又关于 x 的方程 $x^2-(b+2ac)x+m=0$ $(m<0)$ 的两个实数根互为相反数.

(1) 求 ac 的值；

(2) 求二次函数的解析式；

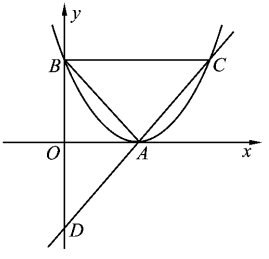


图 13－202

(3) 过 A 点的直线与二次函数图象相交于另一点 C，与 y 轴的负半轴相交于点 D，且使 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ABC$ 的面积相等，求此直线的解析式并求 $\triangle ABC$ 的面积.

解　(1) 因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴只有一个交点，

所以　$\Delta=b^2-4ac=0$. ①

又因为方程 $x^2-(b+2ac)x+m=0$ ($m<0$) 的两个实数根互为相反数，

所以 $b+2ac=0$. ②

① + ② × 2 得　$b^2+2b=0$.

因为点 A 是抛物线的顶点，$A\left(-\frac{b}{2a},0\right)$，由图可，$-\frac{b}{2a}>0$，$a>0$，所以 $b<0$.

故由 $b^2+2b=0$ 得 $b=-2$.

把 $b=-2$ 代入②，得 $ac=1$.

(2) 因为 $b=-2$，所以 A 点的坐标为 $A\left(\frac{1}{a},0\right)$，又 B 点的坐标为 $(0,c)$，

因为 $AB=2$，所以 $OA^2+OB^2=4$，即有 $\left(\frac{1}{a}\right)^2+c^2=4$，

$1+a^2c^2=4a^2$，所以　$4a^2=2$，所以　$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $ac=1$ 得 $c=\sqrt{2}$.

故所求二次函数解析式为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-2x+\sqrt{2}$.

(3) 解法一：A 点的坐标 $A(\sqrt{2},0)$，设 C 点的坐标为 $C(x_0,y_0)$.

因为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ABC$ 的面积相等，

所以 $S_{\triangle GBD}=2S_{\triangle ABD}$，即 $\frac{1}{2}BD\cdot x_0=2\times\frac{1}{2}BD\cdot\sqrt{2}$，所以 $x_0=2\sqrt{2}$.

又 C 点在抛物线上，

所以 $y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

所以点 C 的坐标为 $C(2\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+h$，它过 A、C 两点，

所以 $\begin{cases}\sqrt{2}k+h=0,\\ 2\sqrt{2}k+h=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow k=1,h=-\sqrt{2}$.

所以所求直线解析式为 $y=x-\sqrt{2}$.

又点 $C(2\sqrt{2},\sqrt{2})$，与点 $B(0,\sqrt{2})$ 的纵坐标相同，

所以 $BC/\!/Ox$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$（面积单位）.

解法二：过点 C 作 $CE\perp Ox$，垂足为 E，设 C 点坐标为 $C(x_0,y_0)$，

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$，以 AC、AD 为它们的底边，由于此两个三角形同高，

所以 $AC=AD$.

又 $\angle AOD=\angle AEC=90^\circ$，$\angle OAD=\angle EAC$，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle AOD\cong\mathrm{Rt}\triangle AEC$.

所以 $OA=AE=\sqrt{2}$. 所以 $OE=2OA=2\sqrt{2}$，即 $x_0=2\sqrt{2}$.

因为点 C 在抛物线上，所以 $y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

所以点 C 的坐标为 $C(2\sqrt{2},\sqrt{2})$.

以下与解法一相同，请同学们自己完成.

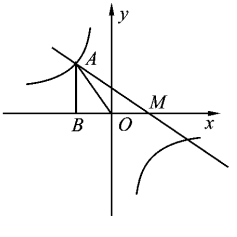


图 13－203

【例 5】 (盐城市，2000) 如图 13－203 所示，已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象

经过点$A(-\sqrt{3},b)$，过点A作$AB\perp Ox$轴于B，$\triangle AOB$的面积为$\sqrt{3}$.

(1) 求k和b的值；

(2) 若一次函数$y=ax+1$的图象经过点A，并且与x轴相交于点M，试求：$AO:AM$的值；

(3) 如果以AM为一边的正三角形AMP的顶点P在二次函数$y=-x^2+\sqrt{3}mx+m-9$的图象上，求m的值.

思维技巧　此题集一次函数、二次函数、反比例函数与三角形有关知识于一体，综合性较强. 寻求它们之间的联系，找准切入口，是解题的关键.

(1) 解　由点A在第二象限，得$b>0$，又$AB\perp Ox$轴于B，$S_{\triangle AOB}=\sqrt{3}$.

故$\frac{1}{2}|-\sqrt{3}|b=\sqrt{3}$，则$b=2$.

所以A点坐标为$(-\sqrt{3},2)$.

由反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点A，得$2=\frac{k}{-\sqrt{3}}$，即$k=-2\sqrt{3}$.

(2) 解　因为一次函数$y=ax+1$的图象经过点$A(-\sqrt{3},2)$，

所以　$2=a\cdot(-\sqrt{3})+1$，解得$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

从而一次函数的解析式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$.

令$y=0$，可求得M点的坐标为$(\sqrt{3},0)$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABO$中，得$AO=\sqrt{AB^2+BO^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABM$中，$BM=BO+OM=2\sqrt{3}$　得

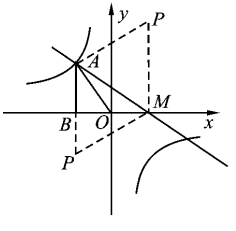
$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$，

所以　$AO:AM=\sqrt{7}:4$.

(3) 解　由(2)得，$\mathrm{Rt}\triangle ABM$中，因为$AB=2$，$AM=4$，所以$\angle BMA=30^\circ$.

因为　点A在第二象限，M在x轴的正半轴，且$\angle AMB=30^\circ$，$\angle AMP=60^\circ$，所以　点P的位置有两种情况：

① 点P在第一象限，此时，因为$\angle BMA=30^\circ$，$\angle AMP=60^\circ$，所以$\angle PMB=90^\circ$，从而点P的坐标为$(\sqrt{3},4)$，



13－204

由点 P 在二次函数 $y=-x^2+\sqrt{3}mx+m-9$ 的图象上，得 $m=4$.

② 点 P 在第三象限，可求得点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3},-2)$.

由点 P 在二次函数 $y=-x^2+\sqrt{3}mx+m-9$ 的图象上，得 $m=-5$.

综上所述：$m=4$ 或 $m=-5$.

激活思维 此例第 (3) 小题运用了分类思想，对点 P 的不同位置进行讨论.

同类变式 (烟台市，2002) 如图 13－205，点 A，B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，且点 A、B 的横坐标分别为 a，$2a$ $(a>0)$，$AC\perp x$ 轴，垂足为 C，且 $\triangle AOC$ 的面积为 2.

(1) 求该反比例函数的解析式；

(2) 若点 $(-a,y_1)$，$(-2a,y_2)$ 在该反例函数的图象上，试比较 y_1 与 y_2 的大小；

(3) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

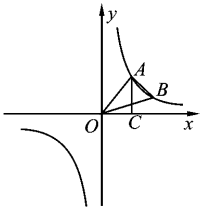


图 13－205

解 (1) 因为点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

所以可设点 A 的坐标为 $\left(a,\frac{k}{a}\right)$，

由 $\frac{1}{2}OC\cdot AC=2$，得 $\frac{1}{2}a\cdot\frac{k}{a}=2$，

即 $k=4$.

所以所求反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$.

(2) 因为 $a>0$，所以 $-2a<-a<0$，

因为点 $(-a,y_1)$，$(-2a,y_2)$ 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象上，且该函数的图象在第三象限，y 随 x 的增大而减小，所以 $y_1<y_2$.

(3) 作 $BD\perp x$ 轴，垂足为 D，

因为 B 点在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象上，

所以 B 点坐标为 $\left(2a,\frac{4}{2a}\right)$，

所以
$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=S_{\text{四边形}OABD}-S_{\triangle BOD}\\&=S_{\triangle AOC}+S_{\text{梯形}ACDB}-S_{\triangle BOD}\\&=2+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{2a}\right)(2a-a)-\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{4}{2a}=3.\end{aligned}$$

【例 6】　A 市和 B 市分别有某种库存机器 12 台和 6 台，现决定支援 C 村 10 台，D 村 8 台. 已知从 A 市运一台机器到 C 村和 D 村的运费分别是 400 元和 800 元，从 B 市调运一台机器到 C 村和 D 村的运费分别是 300 元和 500 元.

(1) 设 B 市运往 C 村机器 x 台，求总运费 W (元) 关于 x 的函数关系式；

(2) 若要求总运算不超过 9000 元，共有几种调运方案？

(3) 求出总运费最低的调运方案，最低运费是多少？

思维技巧　此题是利用函数的性质，解决市场经济中营销决策，探究调运方案的问题. 已知条件中的数据较多，可先整理数据，借助表格帮助理解.

由已知条件分析得下表：

	库存机器	支援 C 村	支援 D 村
B 市	6 台	x 台	$(6-x)$ 台
A 市	12 台	$(10-x)$ 台	$[8-(6-x)]$ 台

解　(1) 依题意得

$$W=300x+500(6-x)+400(10-x)+800[8-(6-x)]$$
$$=200x+8600\ (0\leqslant x\leqslant 6).$$

所以 W 与 x 的函数关系式为 $W=200x+8600\ (0\leqslant x\leqslant 6)$.

(2) 由 $W=200x+8600\leqslant 9000$，

得 $x\leqslant 2$，又因为　x 必须是正整数，

所以 x 可以取 0，1，2 三个数，共有三种调运方案.

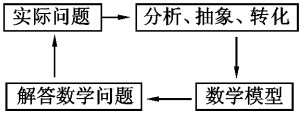
(3) 因为 $W=200x+8600$ 是一次函数，且 W 随 x 的增大而增大，

所以当 x 取最小值时，W 最小.

即当 $x=0$ 时，$W_{最小值}=200\times 0+8600=8600$ (元).

答：当从 A 市调运 10 台给 C 村，调 2 台给 D 村，从 B 市调 6 台给 D 村时，总运费最低，最低运费是 8600 元.

激活思维　这是一道由货物装运和经营中的利润问题而构建函数模型，进而解决问题的例子. 一般，解应用性数学问题，关键是将实际问题中内在、本质的联系，抽象、转化为数学问题，进而建立数学模型，通过对数学问题的求解得出实际问题的答案. 其程序可表示为



同类变式 (黄冈市,1998) 下表所示为装运甲、乙、丙三种蔬菜的重量及利润.某汽运公司计划装运甲、乙、丙三种蔬菜到外地销售 (每辆汽车按规定满载,并且每辆汽车只能装一种蔬菜).

	甲	乙	丙
每辆汽车能满装的吨数	2	1	1.5
每吨蔬菜可获利润 (百元)	5	7	4

(1) 若用 8 辆汽车装运乙、丙两种蔬菜 11 吨到 A 地销售,问装运乙、丙两种蔬菜的汽车各多少辆?

(2) 公司计划用 20 辆汽车装运甲、乙、丙三种蔬菜 36 吨到 B 地销售 (每种蔬菜不少于 1 车),如何安排装运,可使公司获得最大利润?最大利润是多少?

解 (1) 设装运乙种蔬菜的汽车有 x 辆,则装运丙种蔬菜的汽车为 $(8-x)$ 辆,依题意得 $x+1.5(8-x)=11$,解得 $x=2$.故装运乙、丙两种蔬菜的汽车有 2 辆、6 辆.

(2) 设装运甲、乙两种蔬菜的汽车分别有 x 辆、y 辆,则装运丙种蔬菜的汽车有 $20-(x+y)$ 辆.

依题意得 $2x+y+1.5[20-(x+y)]=36$.

于是 $x=y+12$ $(y\geqslant 1)$.

当 $y=1$ 时,$x=13$,丙为 6,所获利润为:

$13\times 2\times 5+1\times 1\times 7+6\times 1.5\times 4=173$ (百元);

当 $y=2$ 时,$x=14$,丙为 4,所获利润为:

$14\times 2\times 5+2\times 1\times 7+4\times 1.5\times 4=178$ (百元);

当 $y=3$ 时,$x=15$,丙为 2,所获利润为:

$15\times 2\times 5+3\times 1\times 7+2\times 1.5\times 4=183$ (百元);

当 $y=4$ 时,$x=16$,丙为 0,不合题意.

故公司应安排装运甲、乙、丙三种蔬菜的汽车分别为 15 辆、3 辆、2 辆,

可使公司获得最大利润，最大利润为 18300 元.

思维拓展　(河北省，1998) 某工厂现有甲种原料 360 kg，乙种原料 290 kg，计划利用这两种原料生产 A、B 两种产品，共 50 件. 已知生产一件 A 种产品，需用甲种原料 9 kg，乙种原料 3 kg，可获利润 700 元；生产一件 B 种产品，需用甲种原料 4 kg、乙种原料 10 kg，可获利润 1200 元.

(1) 按要求安排 A、B 两种产品的生产件数，有哪几种方案？请你给设计出来；

(2) 设生产 A、B 两种产品获总利润为 y (元)，其中一种的生产件数为 x，试写出 y 与 x 之间的函数关系式，并利用函数的性质说明 (1) 中哪种生产方案获总利润最大？最大利润是多少？

解　(1) 设安排生产 A 种产品 x 件，则生产 B 种产品 $(50-x)$ 件.

依题意得 $\begin{cases}9x+4(50-x)\leqslant 360,\\ 3x+10(50-x)\leqslant 290.\end{cases}$ 解得 $30\leqslant x\leqslant 32$.

故 x 的整数值只能取 30，31，32.

即生产的方案共有三种：

第一种生产方案：生产 A 种产品 30 件，B 种产品 20 件；第二种生产方案：生产 A 种产品 31 件，B 种产品 19 件. 第三种生产方案，生产 A 种产品 32 件，B 种产品 18 件.

(2) 设生产 A 种产品的件数为 x，则生产 B 种产品的件数为 $(50-x)$，依题意，得 $y=700x+1200(50-x)=-500x+60000$

其中 x 只能取 30，31，32.

因为 $-500<0$，所以此一次函数 y 随 x 的增大而减小.

所以当 $x=30$ 时，y 的值最大.

即按第一种生产方案安排生产，获总利润最大. 最大利润为：$-500\times 30+60000=45000$ (元).

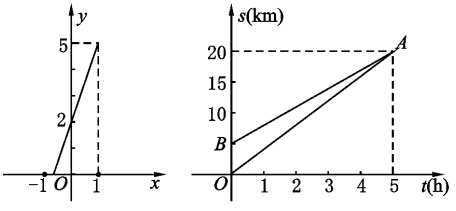
【例 7】　同学们都知道，一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 的图象是一条直线，它可以表示许多实际意义. 比如在图 13－206 (1) 中，x 代表时间 (h)，y 代表路程 (km)，那么从图象上可以看出，某人出发时 $(x=0)$ 离某地 (原点) 2 km. 出发 1 h 后，由 $x=1$ 时 $y=5$ 可知某人离某地 5 km，他走了 3 km.

在图 13－206 (2) 中，OA，BA 分别表示甲、乙两人的运动图象，请根据图象回答下列问题：

(1) 如果用 t 表示时间，s 表示路程，那么甲、乙两人各自的路程与时间的函数关系式是：

(甲) _____；

(乙)_____;



(1) (2)

图 13－206

(2) 甲的速度是____km/h;

(3) 两人同时出发,相遇时,甲比乙多走____km.

思维技巧 解答这类题最关键的是要能读懂图象的实际意义.由图(2)可得:甲从点 O 处出发,5 h 行驶 20 km;乙从离原点 5 km 处出发,5h 行驶的路程 $20-5=15$ (km).两人同时同向行进,相遇(实际是甲追上乙)时,甲比乙多走了 5 km.

解 (1)由图象可知甲、乙运动图象分别是正比例函数和一次函数,设它们的函数解析式分别为 $s=k_1t$ 和 $s=k_2t+b$.

把(5,20)代入 $s=k_1t$,得 $k_1=4$,

所以甲的路程与时间的函数关系式为 $s=4t$.

把(5,20)和(0,5)分别代入 $s=k_2t+b$,得

$$\begin{cases}20=5k_2+b,\\5=b,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k_2=3,\\b=5.\end{cases}$$

所以乙的路程与时间的函数关系式为 $s=3t+5$.

(2) 由图象可知:甲行驶 5 h 的路程是 20 km.

所以甲速度为 $20\div5=4$ (km/h).

(3) 甲比乙多走了 5 km.

激活思维 本题难度不大,但它一改行程问题用"线示法"表示相等关系的传统习惯,而用"一次函数的图象"表示相等关系.结合"形"认识数,打破了常规解题的思维模式.

同类变式 某电厂规定:本厂家属区的每户居民如果一个月的用电量

不超过 A 度，那么这个月这户只要交 10 元用电费. 如果超过 A 度，则这个月除了仍交 10 元用电费外，超过部分还要按每度$\frac{A}{100}$元交费.

(1) 该厂某户居民 12 月份用电 90 度，超过了规定的 A 度，则超过部分应交费____元 (用 A 表示).

(2) 下表是这户居民 3 月、4 月的用电情况和交费情况：

月份	用电量 (度)	交电费总数 (元)
3	80	25
4	45	10

根据上表的数据，求电厂规定的 A 度是多少？

试题提出的是社会实际问题，怎样用数学方法解决这个实际问题呢？在阅读时必须获取如下信息：(1) 应交电费分两部分：①基本电费为 10 元 (常量)，②超过规定的部分按每度$\frac{A}{100}$元交费；(2) 从所给表中应知，规定的用电量 A 的取值范围是 $45\leqslant A<80$.

解　(1) 超过部分应交电费$\frac{A(90-A)}{100}$.

(2) 依题意，得 $10+\frac{A}{100}(80-A)=25$.

解得　$A_1=30$，$A_2=50$.

因为从所给表中可知 $45\leqslant A<80$，所以 $A=30$ 不符合题意，应舍去.

所以该厂规定的 A 为 50 度.

思维拓展　某产品每件的成本是 120 元，试销阶段，每件产品的销售价 x (元) 与产品的日销量 y (台) 之间的关系如下表：

x (元)	130	150	165
y (台)	70	50	35

若日销售量 y 是销售价 x 的一次函数，为获得最大销售利润，每件产品的销售价应定为多少元？此时日销售利润是多少？

从 y 与 x 的三组对应值中选两组作为解题的条件，建立函数解析式. 而表中列举了三组条件，这增加了解题的迷惑性，解题时应善于排除迷惑性表面现象.

解　由表可得 $y=-x+200$.

设每日销售利润为 s 元，则有

$s=y(x-120)=-(x-160)^2+1600$.

因为 $\begin{cases}-x+200\geqslant 0,\\ x-120\geqslant 0,\end{cases}$

所以 $120\leqslant x\leqslant 200$.

故当每件产品的销售价定为 160 元，每日的销售利润最大，为 1600 元.

【例 8】 如图 13－207，已知抛物线 $y=-x^2-(m-4)x+3(m-1)$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点.

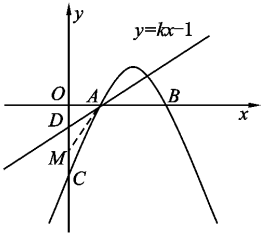


图 13－207

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 若 $m<0$，直线 $y=kx-1$ 经过点 A，与 y 轴交于点 D，且 $AD\cdot BD=5\sqrt{2}$，求抛物线的解析式.

(3) 若 A 点在 B 点的左边，在第一象限内 (2) 中所得的抛物线上是否存在一点 P，使直线 PA 平分 $\triangle ACD$ 的面积？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由.

思维技巧 本题是二次函数、一次函数及几何图形面积的综合问题. 需利用二次函数的性质、一元二次方程根的判别式来确定 m 的取值. 求出函数的解析式是关键，分析问题时可借助示意图来理解.

解 (1) 因为抛物线 $y=-x^2-(m-4)x+3(m-1)$ 与 x 轴有两个交点，所以 $\Delta>0$；

又由图象可知对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$ 抛物线在 y 轴上的截距 $c<0$，即 m 满足 $\begin{cases}\Delta=(x+2)^2>0,\\ -(m-4)>0,\\ 3(m-1)<0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\neq -2,\\ m<4,\\ m<1,\end{cases}$

解得 m 的取值范围是 $m<1$ 且 $m\neq-2$.

(2) 易求出抛物线与 x 轴的两交点的坐标为 $(1-m,0)$，$(3,0)$，又 $D(0,-1)$，由勾股定理可知

AD、BD 的长为 $\sqrt{(1-m)^2+1}$，$\sqrt{10}$.

因为　$AD\cdot BD=5\sqrt{2}$，

所以　$\sqrt{(1-m)^2+1}\cdot\sqrt{10}=5\sqrt{2}$，得 $m_1=-1$，$m_2=3$.

因为　$m<1$ 且 $m\neq-2$，故取 $m=-1$.

所以抛物线的解析式为 $y=-x^2+5x-6$.

(3) 假设在第一象限内，抛物线上存在点 P 使直线 PA 平分△ACD 的面积，则直线 PA 必过 DC 中点 M.

由 $D(0,-1)$，$C(0,-6)$ 可知 M 点坐标为 $\left(0,-\frac{7}{2}\right)$，

又由 $A(2,0)$，$B(3,0)$ 知，过 A、M 两点的直线 PA 的解析式为

$y=\frac{7}{4}x-\frac{7}{2}$.

由 $\begin{cases}y=\frac{7}{4}x-\frac{7}{2},\\ y=-x^2+5x-6\end{cases}$　得 $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=\frac{5}{4},\\ y_2=-\frac{21}{16}.\end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{4},-\frac{21}{16}\right)$.

但点 $\left(\frac{5}{4},-\frac{21}{16}\right)$ 不在第一象限，故在第一象限内抛物线上不存在点 P，使 PA 平分△ACD 的面积.

激活思维　探索性试题有两种主要表述形式：其一是，题目的结论不直接给出，需要通过观察、比较、分析、归纳、概括、推理、判断等一系列思维活动，逐步确定应有的结论. 其二是，要求拓展题目结论或探求新结论是否成立的问题. 这类问题构思精巧，知识覆盖面较大，综合性较强.

同类变式　已知二次函数 $y=x^2-(m^2+8)x+2(m^2+6)$.

(1) 求证：不论 m 取任何实数，此函数图象都与 x 轴有两个交点，且两个交点都在 x 轴的正半轴上.

(2) 假设这个函数的图象与 x 轴交于 B，C 两点，与 y 轴交于 A 点，若△ABC 的面积为 48，求 m 的值.

(3) 设抛物线的顶点为 P，是否存在实数 m，使△PBC 为等腰直角三角形，如果存在，求出 m 的值. 如果不存在，说明理由.

解 (1) 因为 $\Delta=(m^2+8)^2-8(m^2+6)=(m^2+4)^2>0$ 恒成立，
所以抛物线与 x 轴总有两个交点.
设这两个交点坐标为 $B(x_1,0)$，$C(x_2,0)$，
又因为 $x_1+x_2=m^2+8>0$，$x_1\cdot x_2=2(m^2+6)>0$，
所以 $x_1>0$，$x_2>0$.
所以两交点都在 x 轴的正半轴上.

(2) 因为 $BC=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{(m^2+8)^2-8(m^2+6)}$

$=\sqrt{(m^2+4)^2}=m^2+4$，

$OA=2(m^2+6)$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot OA=\frac{1}{2}(m^2+4)(2m^2+12)=48$.

解之得 $m=\pm\sqrt{2}$.

(3) 如图 13－208，假设存在满足条件的 m，则 $PM=\frac{1}{2}BC=\frac{m^2+4}{2}$.

又通过配方或利用顶点坐标公式，可求得 P 点坐标为 $\left(\frac{m^2+8}{2},\frac{(m^2+4)^2}{4}\right)$，即可得到 $\frac{(m^2+4)^2}{4}=\frac{m^2+4}{2}$，解之得 $m^2=-2$，显然无解，所以满足条件的 m 值不存在.

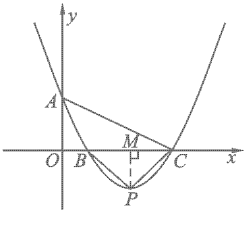


图 13－208

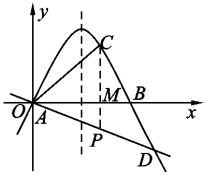


图 13－209

思维拓展 已知关于 x 的方程 $x^2-(2m-1)x+(m-3)^2=0$ 的两个实数根的平方和为 25. (1) 求 m 的值；(2) 在上述条件下，关于 x 的二次函数 $y=-x^2+(2m-1)x-(m-3)^2$ 的图象与 x 轴分别交于 A、B 两点（A 在 B 的左边），在该图象上有一点 C，位于对称轴的右侧，又在 x 轴的上方，且 $\triangle ABC$ 面积为 15，求点 C 的坐标；(3) 在 (2) 的条件下，若直线 $y=kx+b$ 与

二次函数图象交于A、D两点，且$AD\perp AC$，求k与b的值及点D的坐标(图13－209).

解　(1) 因为　方程$x^2-(2m-1)x+(m-3)^2=0$有两个实数根，

所以　$\Delta=[-(2m-1)]^2-4(m-3)^2\geqslant 0$，解得$m\geqslant\frac{7}{4}$.

设方程的两根为x_1和x_2.

则$x_1+x_2=2m-1$，$x_1,x_2=(m-3)^2$.

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2m-1)^2-2(m-3)^2=25$.

解得　$m=3$或$m=-7$，因$m\geqslant\frac{7}{4}$，所以取$m=3$.

(2) 当$m=3$时，二次函数解析式为$y=-x^2+5x=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$.所以图象与$x$轴交点为$A(0,0)$，$B(5,0)$，对称轴直线为$x=\frac{5}{2}$.

设点C坐标为(x_0,y_0)，由已知得$\frac{1}{2}AB\cdot|y_0|=15$.

所以$y_0=6$.又因为$y_0=-x_0^2+5x_0$，所以$6=-x_0^2+5x_0$.解得$x_0=2$或$x_0=3$，因为点C在对称轴右方，

所以取$x_0=3>\frac{5}{2}$，所以　C的坐标为$(3,6)$.

(3) 过C作$CM\perp x$轴于M，交AD于P，则$AM=3$，$CM=6$.

因为$AC\perp AD$，所以$\triangle ACM\backsim\triangle PAM$，

则$AM^2=CM\cdot MP$，所以$MP=\frac{AM^2}{CM}=\frac{3}{2}$.

所以$P\left(3,-\frac{3}{2}\right)$.

点$A(0,0)$，$P\left(3,-\frac{3}{2}\right)$在直线$y=kx+b$上，

解方程组$\begin{cases}0=b,\\-\frac{3}{2}=3k+b\end{cases}$得$\begin{cases}b=0,\\k=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以直线AD为$y=-\frac{1}{2}x$.

再解方程组$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x,\\y=-x^2+5x,\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=\frac{11}{4},\\y_2=-\frac{11}{4}.\end{cases}$

因为点A坐标为$(0,0)$，所以　点D坐标为$\left(\frac{11}{2},-\frac{11}{4}\right)$.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (海南省,2003) 用火柴棒按图 13－210 的方式搭一行三角形,搭一个三角形需 3 支火柴棒,搭 2 个三角形需 5 支火柴棒,搭 3 个三角形需 7 支火柴棒,照这样的规律搭下去,搭 n 个三角形需要 S 支火柴棒,那么 S 关于 n 的函数关系式是_____ (n 为正整数).

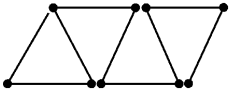


图 13－210

(2) (厦门市,2003) 某物体从上午 7 时至下午 4 时的温度 M (℃) 是时间 t (h) 的函数:$m = {}^{3} - 5t - 100$ (其中 $t = 0$ 表示中午 12 时,$t = 1$ 表示下午 1 时),则上午 10 时此物体的温度为_____℃.

(3) (杭州市,2003) 根据指令 $[s, A]$ ($s \geqslant 0, 0° < A < 180°$),机器人在平面上能完成下列动作:先原地逆时针旋转角度 A,再朝其面对的方向沿直线行走距离 s,现机器人在直角坐标系的坐标原点,且面对 x 轴正方向. (1) 若给机器人下了一个指令 $[4, 60°]$,则机器人应移动到_____;(2) 请你给机器人下一个指令_____,使其移动到点 $(-5, 5)$.

2. (黄冈市,2003) 同学们都做过《代数》课本第三册第 87 页第 4 题:某礼堂共有 25 排座位,第一排有 20 个座位,后面每一排都比前一排多 1 个座位,写出每排的座位数 m 与这排的排数 n 的函数关系式,并写出自变量 n 的取值范围.

答案是:每排的座位数 m 与这排的排数 n 的函数关系式是 $m = n + 19$;自变量 n 的取值范围是 $1 \leqslant n \leqslant 25$,且 n 是正整数.

上题中,在其他条件下不变的情况下,请探究下列问题:

(1) 当后面每一排都比前一排多 2 个座位时,则每排的座位数 m 与这排的排数 n 的函数关系式是_____ ($1 \leqslant n \leqslant 25$,且 n 是整数).

(2) 当后面每一排都比前一排多 3 个座位、4 个座位时,则每排的座位数 m 与这排的排数 n 的函数关系式分别是_____,_____ ($1 \leqslant n \leqslant 25$,且 n 是整数).

(3) 某礼堂共有 p 排座位,第一排有 a 个座位,后面每排都比前一排多

b 个座位，试写出每排的座位数 m 与这排的排数 n 的函数关系式，并指出自变量 n 的取值范围.

3. (北京市西城区，2001) 已知 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(-1,4)$，其顶点的横坐标是 $\frac{1}{2}$，与 x 轴分别交于 $B(x_1,0)$、$C(x_2,0)$ 两点 (其中 $x_1<x_2$)，且 $x_1^2+x_2^2=13$.

(1) 求此抛物线的解析式及其顶点 E 的坐标；

(2) 设此抛物线与 y 轴交于点 D，点 M 是抛物线上的点，若 $\triangle MBO$ 的面积为 $\triangle DOC$ 面积的 $\frac{2}{3}$ 倍，求点 M 的坐标.

4. (北京市宣武区，2001) 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2\left(m+\frac{5}{4}\right)x+2(m+1)$ 与 y 轴的正半轴交于点 C，与 x 轴交于 A、B 两点，并且点 B 在点 A 的右边，$\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle OAC$ 的面积的 3 倍.

(1) 求这条抛物线的解析式；

(2) 判断 $\triangle OBC$ 与 $\triangle OCA$ 是否相似，并说明理由.

5. (南通市，2001) 已知 m、n 是关于 x 的方程 $x^2+(2+\sqrt{3})x+2t=0$ 的两个根，且 $m^2+mn=4+2\sqrt{3}$，过点 $Q(m,n)$ 的直线 l_1 与直线 l_2 交于点 $A(0,t)$，直线 l_1、l_2 分别与 x 轴的负半轴交于点 B、C (如图 13－211)，$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(1) 求 m、n、t 的值；

(2) 求直线 l_1 与直线 l_2 的解析式；

(3) 若 P 为直线 l_2 上的点，且 $\triangle ABO$ 与 $\triangle ABP$ 相似，求点 P 的坐标.

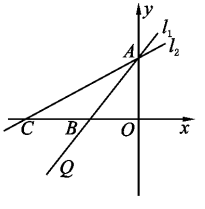


图 13－211

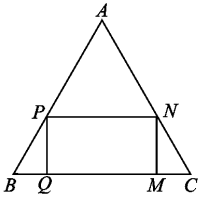


图 13－212

6. (宿迁市，2001) 如图 13－212，已知 矩形 $QMNP$ 的一边 QM 在边长为 2 的正三角形 ABC 的一边 BC 上，点 P、N 分别在 AB、AC 上，设 $MN=$

x，$S_{矩形QMNP}=y$. (1) 写出 x 的取值范围；(2) 用 x 表示 y；(3) 当 y 取得最大值时，求证：$S_{\triangle PAN}=S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle MNC}$

7. (青海省，2001) 在斜坡 A 处立一旗杆 AB (旗杆与水平面垂直)，一小球从斜坡 O 点抛出 (如图 13－213)，小球擦旗杆顶 B 而过，落地时撞击斜坡的落点为 C，已知 A 点与 O 点的距离 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m，旗杆 AB 高为 3 m，C 点的垂直高度为 3.5 m，C 点与 O 点的水平距离为 7 m，以 O 点为坐标原点，水平方向与竖直方向分别为 x 轴、y 轴，建立直角坐标系.

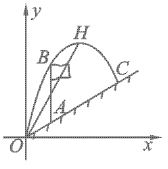


图 13－213

(1) 求小球经过的抛物线的解析式 (小球的直径忽略不计)；

(2) H 为小球所能达到的最高点，求 OH 与水平线 Ox 之间夹角的正切值.

探究能力测试

8. (四川省，2003) 东风商场文具部的某种毛笔每支售价 25 元，书法练习本第本售价 5 元. 该商场为销制定了两种惠办法 .

甲 :买一支毛笔就赠送一本书法练习本；

乙 :按购买金额打 9 折付款.

某校欲为校书法兴趣小组购买这种毛笔 10 支，书法练习本 x ($x\geqslant 10$) 本.

(1) 写出每种优惠办法实际付款金额 $y_{甲}$ (元)、$y_{乙}$ (元)、与 x (本) 之间的函数关系式；

(2) 比较购买同样多的书法练习本时，按哪种优惠办法付款更省钱；

(3) 如果商场允许任意选择一种优惠办法购买，也可以同时用两种优惠办法购买. 请你就购买这种毛笔 10 支和书法练习本 60 本设计一种最省钱的购买方案.

9. (河北省，2003) 某高科技发展公司投资 500 万，成功研制出一种市场需求量较大的高科技替代产品，并投入资金 1500 万元进行批量生产. 已知生产每件产品的成本为 40 元. 在销售过程中发现 :当销售单价定为 100 元时，处销售量为 20 万件 :销售单价每增加 10 元，年销售量将减少 1 万件. 设销售单价为 x (元)，年销售量为 y (万件)，年获利 (= 年销售额 － 生产成本 － 投资) 为 z (万元).

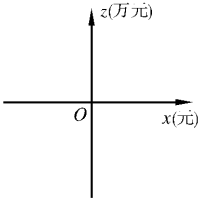


图 13－214

(1) 试写出 y 与 x 之间的函数关系式(不必写出 x 的取值范围)；

(2) 试写出 z 与 x 之间的函数关系式(不必写出 x 的取值范围)；

(3) 计算销售单价为 160 元时的年获利,并说明同样的年获利,销售单价可以定为多少元？相应的年销售量分别为多少万件？

(4) 公司计划:在第一年按年获利最大确定的销售单价进行销售;第二年年获利不低于 1130 万元.请你借助函数的大致图象,说明第二年的销售单价 x (元)应确定在什么范围内？

10. 某房地产公司要在一块地(图 13－215 中矩形 $ABCD$)上,规划建造一个小区公园(矩形 $GHCK$),为了使文物保护区△AEF 不被破坏,矩形公园的顶点 G 不能在文物保护区内,已知 $AB=200$ m,$AD=160$ m,$AE=60$ m,$AF=40$ m.

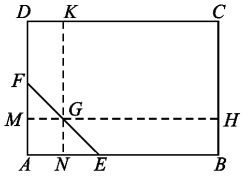


图 13－215

(1) 当矩形小区公园的顶点 G 恰是 EF 的中点时,求公园的面积.

(2) 当 G 在 EF 上什么位置时,公园面积最大？

11. 如图 13－216,在直径为 AB 的半圆内,划出一块三角形区域,使三角形的一边为 AB,顶点 C 在半圆周上,其他两边分别为 6 和 8.现在建造一个内接于△ABC 的矩形水池 $DEFN$,其中 DE 在 AB 上.如图的设计方案是使 $AC=8$,$BC=6$.

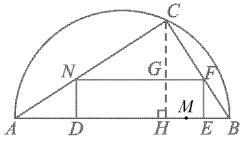


图 13－216

(1) 求△ABC 中 AB 边上的高 h；

(2) 设 $DN=x$,当 x 取何值时,水池 $DEFN$ 的面积最大？

(3) 实际施工时,发现在 AB 上距 B 点 1.85 的 M 处有一棵大树.这棵大树是否位于最大矩形水池的边上？如果在,为保护大树,请设计另外的方案,使内接于满足条件的三角形中欲建的最大矩形水池能避开这棵树.

12. (孝感市,2003)如图 13－217,已知直角坐标系内的梯形 $AOBC$,$AC/\!/OB$,AC、OB 的长分别是关于 x 的方程 $x^2-6mx+m^2+4=0$ 的两根,并且 $S_{\triangle AOC}:S_{\triangle BOC}=1:5$.

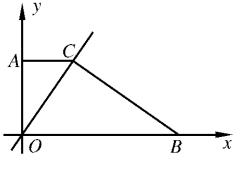


图 13－217

(1) 当 AC、OB 的长；

(2) 当 $BC\perp OC$ 时，求 OC 的长.

13. (武汉市，2003) 已知：二次函数 $y=x^2-2(m-1)x-1-m$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，$x_1<0<x_2$，与 y 轴交于点 C，且满足 $\frac{1}{AO}-\frac{1}{OB}=\frac{2}{CO}$.

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 是否存在着直线 $y=kx+b$ 与抛物线交于点 P、Q 使 y 轴平分 $\triangle CPQ$ 的面积？若存在，求出 k、b 应满足的条件；若不存在，请说明理由.

14. (鄂州市，2001) 已知直线 $y=2x-6$ 交 x 轴于 A，交 y 轴于 C，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、C 两点及 x 轴上另一点 B，且 $AB=1$，$\angle ABC$ 为钝角.

(1) 求抛物线解析式；

(2) 若点 D 的坐标为 $(-3,0)$，在直线 $y=2x-6$ 上求一点 P 使 $\triangle APD$ 与 $\triangle AOC$ 相似.

(3) 在 (1)、(2) 的条件下，在 x 轴上方的抛物线上是否存在点 M，使四边形 $APBM$ 的面积等于 $\triangle AMD$ 的面积的 $\frac{13}{6}$ 倍，如果存在，求出点 M 的坐标；如果不存在，请说明理由.

15. (黄冈市，2001) 已知一个二次函数的图象经过 $A(4,-3)$，$B(2,1)$ 和 $C(-1,-8)$ 三点.

(1) 求这个二次函数的解析式以及它的图象与 x 轴的交点 M，N (M 在 N 的左边) 的坐标；

(2) 若以线段 M、N 为直径作 $\odot G$，过坐标原点 O 作 $\odot G$ 的切线 OD，切点为 D，求 OD 的长；

(3) 求直线 OD 的解析式；

(4) 在直线 OD 上是否存在点 P，使得 $\triangle MNP$ 是直角三角形？如果存在，求出点 P 的坐标 (只需写出结果，不必写出解答过程)；如果不存在，请说明理由.

16. (常德市，2001) 如图 13-218，在直角坐标系 xOy 中，二次函数图象的顶点坐标为 $C(2,-1)$，且在 x 轴上截得的线段 AB 的长为 2.

(1) 求证：$\triangle ACB$ 是等腰直角三角形；

(2) 求二次函数的解析式；

(3) 在抛物线上是否存在点 P，使 $\triangle PAC$ 是等腰三角形，若存在，请求

出 P 点的坐标，不能求出时，请给出横坐标的范围；若不存在，请说明理由.

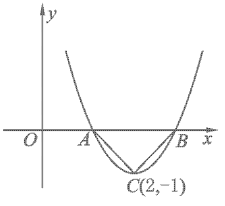


图 13－218

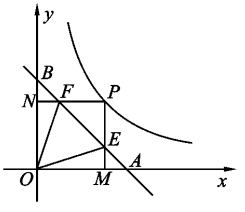


图 13－219

17. 如图 13－219，直线 AB 经过 $A(1,0)$，$B(0,1)$ 两点，动点 P 在双曲线 $y=\frac{1}{2x}$ $(x>0)$ 上运动，$PM\perp x$ 轴，$PN\perp y$ 轴，垂足分别为 M、N，PM，PN 与直线 AB 分别交于点 E、F，试尽可能多地找出图中的数量、位置关系.

18. (广安市，2002) 如图 13－220，一次函数 $y=-2x+6$ 的图象与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 C；二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的图象过 A、C 两点，并且与 x 轴交于另一点 B (B 在负半轴上)；

(1) 当 $S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle BOC}$ 时，求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式和此函数顶点坐标.

(2) 以 OA 的长为直径作 $\odot M$，试判定 $\odot M$ 与直线 AC 的位置关系，并说明理由.

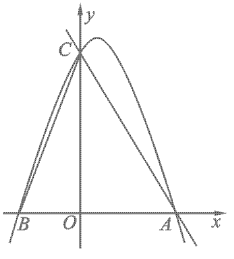


图 13－220

19. (杭州市，2002) 已知二次函数 $y=x^2+ax+a-2$，

(1) 证明 不论 a 取何值,抛物线 $y=x^2+ax+a-2$ 的顶点 Q 总在 x 轴的下方;

(2) 设抛物线 $y=x^2+ax+a-2$ 与 y 轴交于点 C,如果过 C 且平行于 x 轴的直线与该抛物线有两个不同交点,并设另一个交点为 D,问:$\triangle QCD$ 能否是等边三角形?若能,请求出相应的二次函数解析式;若不能,请说明理由;

(3) 在 (2) 题的已知条件下,又设抛物线与 x 轴的交点之一为点 A,则能使 $\triangle ACD$ 的面积等于 $\frac{1}{4}$ 的抛物线有几条?请证明你的结论.

20. (吉林省,2002) 如图 13-221,一单杠高 2.2 m,两立柱之间的距离为 1.6 m,将一根绳子的两端拴于立柱与铁杠结合处,绳子自然下垂呈抛物线状.

(1) 一身高 0.7 m 的小孩站在离立柱 0.4 m 处,其头部刚好触上绳子.求绳子最低点到地面的距离;

(2) 为供孩子们打秋千,把绳子剪断后,中间系一块长为 0.4 m 的木板.除掉系木板用去的绳子后,两边的绳子正好各为 2 m,木板与地面平行,求这时木板到地面的距离 (供选用数据:$\sqrt{3.36}\approx1.8$,$\sqrt{3.64}\approx1.9$,$\sqrt{4.36}\approx2.1$).

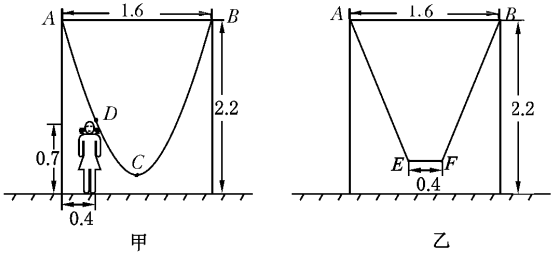


图 13-221

统计初步

14.1　平均数

新教材同步学案

学点探究分析

重点　平均数的概念及计算.

难点　理解用样本平均数来估计总体平均数.

探究点　用样本平均数估计总体平均数的方法解决实际问题.在题目形式上,往往是文字与表格相结合,对读题识表能力有较高的要求.需根据不同特点的数据,灵活运用平均数公式解决实际生活中的有关问题.

学习方法技巧

平均数的计算是本节的重点.首先要认识平均数的意义,掌握平均数几个公式的特点和使用条件,才能正确地选用计算公式,这也是解决关于平均数问题的关键.计算平均数在实际应用中非常广泛,一般并非单一地套公式进行计算,而是以当前的社会热点、焦点问题为背景,结合图表,因此,读题识表显得非常重要.有的问题还可能要用到列方程或通过恒等变形等知识,或用到整体代换思想.

能力升级捷径

【例 1】　求下列各组数据的平均数.

(1) 6,1,3,10,9,7.

(2) 29,39,31,37,38,36.

(3) 2,2,4,8,10,7,8,4,10,4,3,2,2,10,2.

思维技巧　这三个小题都是求平均数.(1) 组中有 6 个数据,大小比较分散,可选择定义法;(2) 组中的 6 个数据,都接近于 35,可用新数据法;(3) 中的数据较多,一些数据多次重复出现,宜采用加权平均数公式来求.

解　(1) $\bar{x}=\frac{1}{6}(6+1+3+10+9+7)=6$.

(2) 取 $a=35$,用原数据分别减去 35,得到新数据分别是:$-6,4,-4,2,$

3,1.

所以 $\overline{x'}=\frac{1}{6}(-6+4-4+2+3+1)=0$.

所以原数据的平均数是 $\bar{x}=\overline{x'}+a=0+35=35$.

(3) 数据中 2 出现 5 次,4 出现 3 次,8 出现 2 次,10 出现 3 次,故

$\bar{x}=\frac{1}{15}(2\times5+4\times3+8\times2+10\times3+7+3)=5.2$.

激活思维 求平均数共有三个公式,每个公式都有适合于其特点的一组数据.具体计算时,先应仔细观察数据的特点,再灵活选用公式,才会使计算简便.有时计算平均数时,会出现除不尽的情形,此时,一般结果保留的位数与原数据相同.

同类变式 1. (南京市,2001) 南京长江二桥连续七天的车流量 (每日过桥车辆次数) 分别为 (单位:千辆/日):

8.0	8.3	9.1	8.5	8.2	8.4	9.0

这七天平均车流量为_____千辆/日.

解 $\bar{x}=\frac{8.0+8.3+9.1+8.5+8.2+8.4+9.0}{7}=8.5$ (千辆/日).

此题还可采用其他方法求出平均数的大小.

2. (陕西省,2000) 在由 CCTV—3 举办的唱歌比赛中,由 12 位评委现场给每位歌手打分,然后将去掉其中的一个最高分和一个最低分之后的其余分数的平均数作为该歌手的成绩,已知 12 位评委给某位歌手打出的分数如下:

9.6, 9.2, 9.4, 9.3, 9.7, 9.6, 9.2, 9.3, 9.2, 9.5, 9.4, 9.5

那么这位歌手的最后得分是_____.

解 去掉一个最高分 9.7,去掉一个最低分 9.2 分,平均分为 $\frac{1}{10}(9.6+9.2+\cdots+9.4+9.5)=9.4$.

思维拓展 (南京市,2002) 某瓜农采用大棚栽培技术种植了一亩地的良种西瓜,这亩地产西瓜约 600 个,在西瓜上市前该瓜农随机摘下了 10 个成熟的西瓜,称重如下:

西瓜质量 (单位:kg)	5.5	5.4	5.0	4.9	4.6	4.3
西瓜数量 (单位:个)	1	2	3	2	1	1

计算这 10 个西瓜的平均质量，并根据计算结果估计这亩地的西瓜产量约是多少千克？

解　$\bar{x}=\frac{1\times5.5+2\times5.4+3\times5.0+2\times4.9+1\times4.6+1\times4.3}{1+2+3+2+1+1}=5.0$

$600\times5.0=3000$ (kg)

答：这 10 个西瓜的平均质量为 5.0 kg，估计这亩地的西瓜产量约为 3000 kg.

【例 2】　(哈尔滨市，2000) 一个地区某月前两周从星期一到星期五各天的最低气温依次是 (单位：℃)：x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 和 $x_1+1,x_2+2,x_3+3,x_4+4,x_5+5$. 若第一周这五天的平均最低气温为 7 ℃，则第二周这五天的平均最低气温为 (　　)

A. 7 ℃　　B. 8 ℃

C. 9 ℃　　D. 10 ℃

思维技巧　本题考查平均数的应用，当题设中平均数是已知时，应注意平均数定义的逆用.

解　因为　x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数为 7.

所以　$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\times5=35.$

所以第二周这五天的平均最低气温是

$$\bar{x}=\frac{(x_1+1)+(x_2+2)+(x_3+3)+(x_4+4)+(x_5+5)}{5}$$

$$=\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+(1+2+3+4+5)}{5}$$

$$=\frac{35+15}{5}=10.$$

因此应选 D.

激活思维　若数据 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的平均数是 $\bar{x}$，$y_1,y_2,\cdots y_n$ 的平均数是 $\bar{y}$，则新数据 $x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots x_n+y_n$ 的数据平均数为 $\bar{x}+\bar{y}$，切莫与新数据 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots x_n,y_n$ 平均数混淆，前者仍是 n 个数据，而后者是 $2n$ 个数据，故后者的平均数为 $\frac{1}{2}(\bar{x}+\bar{y})$.

同类变式　如果一组数据 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 平均数是 $\bar{x}$，则另一组数据 $x_1,x_2+1,x_3+2,x_4+3,x_5+4$ 的平均数是多少？

分析　一般设一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$，则另一组数据 $x_1,x_2+1,x_3+2,\cdots,x_n+(n-1)$ 的平均数 $\overline{x'}=\frac{1}{n}[(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(0$

$+1+2+\cdots+n-1)]=\bar{x}+\frac{1}{2}(n-1)$.

解 设新数据的平均数为$\overline{x'}$,则

$$\overline{x'}=\frac{1}{5}[x_1+(x_2+1)+(x_3+2)+(x_4+3)+(x_5+4)]$$

$$=\frac{1}{5}[(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+(1+2+3+4)]$$

$$=\frac{1}{5}(5\bar{x}+10)=\bar{x}+2.$$

思维拓展 已知:$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,1,2,3,4,5$ 的平均数为 4,求 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的平均数.

解 由 $4=\frac{1}{10}[(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+(1+2+3+4+5)]$

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4\times10-15.$

即 $\bar{a}=\frac{1}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=5.$

【例 3】 (大连市,2000)大连是一个严重缺水的城市,为鼓励市民珍惜每一滴水,某居委会表彰了 100 个节约用水模范户,5 月份这 100 户节约用水的情况如下表:

每户节水量(单位:t)	1	1.2	1.5
节水户数	52	30	18

那么,5 月份这 100 户平均节约用水_____(精确到 0.01 t).

思维技巧 本题考查加权平均数计算公式在实际问题中的应用,公式中 f_i 是出现数据 x_i $(i=1,2\cdots k)$ 的次数,公式中的分母为 $f_1+f_2+\cdots f_k=n$.并要注意平均数的意义.

解 由表知,数据 1 出现 52 次,数据 1.2 出现 30 次,数据 1.5 出现 18 次,共有 $52+30+18=100$ 个数据.

根据加权平均数公式:

$$\bar{x}=\frac{1\times52+1.2\times30+1.5\times18}{100}\approx1.15\ (t).$$

激活思维 读懂图表,掌握加权平均数公式的含义是关键.

同类变式 1. (太原市,2002)如图 14-1,是《中国教育报》今年报道的 1991 年~2001 年各年全国脱盲人数与女性脱盲人数统计柱状图.

请你根据图中提供的数据,回答下列问题:

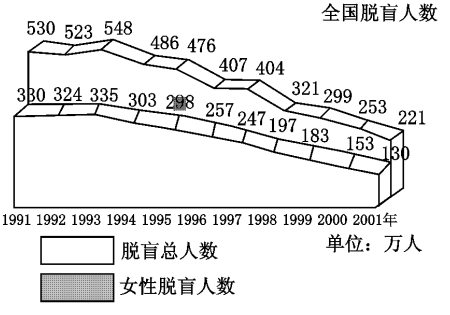


图 14－1

(1) 1999 **年全国脱盲人数为_____万人，其中女性为_____万人，男性为_____万人；**

(2) 求 2000 **年～**2001 **年这两年间男性脱盲人数的平均值.**

解　(1) 由图知 299，183，116.

(2) 由图，得 2000 **年、**2001 **年男性脱盲人数分别为** 100、91. **所以　这两年间男性脱盲人数的平均值为** $\frac{100+91}{2}=95.5$ **(万人).**

2. **(漳州市** 2002**) 先阅读表** 1、**表** 2，**再回答以下三个问题：**

世界人口城市化发展趋势表

表 1：

	城镇人口 (亿)		
	1980 **年**	1990 **年**	2000 **年**
世界	18.1	24.2	32.1
发展中地区	9.8	14.5	21.2
发达地区	8.3	9.7	10.9

表 2：

	城镇人口占总人口的比例 (%)		
	1980 年	1990 年	2000 年
世界	40.9	45.9	51.3
发展中地区	30.5	36.3	42.5
发达地区	70.7	75.9	80.3

资料来源 联合国《1980～2000 年世界城市人口和农村人口增长》.

(1) 根据表 1，1980 年、1990 年、2000 年这三年世界城镇人口的平均数为_____亿 (结果保留到小数点后第 1 位)；

(2) 根据表 1，计算发展中地区的城镇人口 2000 年这一年比 1990 年这一年增长百分之几 (精确到 0.1%)？

(3) 根据表 2，分析城镇人口占总人口的比例每隔十年变化趋势，可以预测今后十年内 (即 2001 年～2010 年) 发展中地区城镇人口增长速度将更加超过发达地区. 请简单说明理由.

解 (1) 24.8 (2) 设发展中地区 2000 年这一年比 1990 年这一年城镇人口增长百分率为 x，依题意，得 $14.5\times(1+x)=21.2$，$x=0.462$. 答：发展中地区 2000 年这一年比 1990 年这一年城镇人口增长 46.2%. (3) 因为 $36.3-30.5=5.8$，$42.5-36.3=6.2$. 所以发展中地区从 1980 年到 1990 年、与从 1990 年到 2000 年城镇人口占总人口比例的增长速度呈上升趋势. 因为 $75.9-70.7=5.2$，$80.3-75.9=4.4$，所以发达地区从 1980 年到 1990 年、从 1990 年到 2000 年城镇人口占总人口比例的增长速度呈下降趋势. 又因为 $5.8>5.2$，$6.2>4.4$，所以从 1980 年到 1990 年、从 1990 年到 2000 年发展中地区城镇人口增长的速度都超过发达地区. 因为 $5.8-5.2=0.6$，$6.2-4.4=1.8$，且 $1.8>0.6$，所以根据以上的结论，可以预测 2001 年到 2010 年发展中地区城镇人口增长的速度将更加超过发达地区.

3. 某地三所初级中学的初三年级学生在毕业考试中，数学平均成绩分别是 82，78，74，而参加考试的人数分别是 100，80，42，求这个地方三年级学生在这次考试中的数学平均成绩.

解 这次考试三年级学生的数学平均成绩为：

$$\bar{x}=\frac{100\times82+80\times78+42\times74}{100+80+42}=\frac{17548}{222}\approx79\ (\text{分}).$$

答：这次考试数学平均成绩约 79 分.

思维拓展　从 A、B 两麦地各抽取 10 株麦苗，测得它们的株高分别如下：(单位：cm)

A：76　90　84　86　81　87　86　82　85　83

B：82　84　85　89　79　80　91　89　79　74

问哪个麦地苗长得高.

将上面两组数据都分别减去 85，得出两组新的数据：

A'：−9　5　−1　1　−4　2　1　−3　0　−2

B'：−3　−1　0　4　−6　−5　6　4　−6　−11

计算这两组新数据平均数，得

$$\overline{x_{A'}}=\frac{1}{10}(-9+5-1+1-4+2+1-3+0-2)=-1,$$

$$\overline{x_{B'}}=\frac{1}{10}(-3-1+0+4-6-5+4-6-11)=-1.8,$$

所以　$\overline{x_A}=\overline{x_{A'}}+85=-1+85=84$ (cm)，

$\overline{x_B}=\overline{x_{B'}}+85=-1.8+85=83.2$ (cm).

因为$\overline{x_A}>\overline{x_B}$，所以 A 麦地麦苗长得高.

【例 4】　(1)(甘肃省，2001)某省有 7 万名学生参加初中毕业会考，要想了解这 7 万名学生的数学成绩，从中抽取了 1000 名考生的数学成绩进行统计分析，以下说法正确的是(　　)

A. 这 1000 名考生是总体的一个样本

B. 每位考生的数学成绩是个体

C. 7 万名考生是总体

D. 1000 名考生是样本容量

思维技巧　本题考查了总体、个体、样本、样本容量这四个概念，解答此类题的关键是弄清这些概念的本质.

解　总体、个体、样本都指的是统计的数据，样本容量只是个数，没有单位，因此，7 万名考生的数学成绩的全体是总体，所以 C 项是错误的；1000 名考生的数学成绩是总体的一个样本，所以 A 项也是错误的；由于 D 中所说的样本容量带有单位，因此，它也错误. 故应选样 B.

激活思维　分清题意中的总体、个体、样本时，要认准考察的对象，上例中考察的是 7 万名学生参加初中毕业会考的数学成绩，而不是 7 万名考生. 样本容量只是样本中个体的数目，是不能带单位的. 解这类题要理解：之所以用样本去估计总体情况，是因为总体包含的个体数往往很多，不可能一一

考察,而且,有时考察带有破坏性,如考察灯泡的使用寿命等.

同类变式　(四川省,2000)为了了解某市初三毕业生升学考试数学成绩的状况,从参加考试的学生中抽查了 1000 名学生数学成绩进行统计分析,在这个问题中,下面说法正确的是(　　)

A. 总体是指该市参加数学升学考试的全体学生

B. 个体是指 1000 名学生中的每一名学生

C. 样本容量是指 1000 名学生

D. 样本是指这 1000 名学生的数学升学考试成绩

解　选 D.

思维拓展　为了考察一个养鸡场里的鸡的生长情况,从中抽取 5 只,称得它们的重量.在这个问题中,总体、个体、样本、样本容量分别指的是什么?

解　在这个问题中,总体是指该养鸡场里所有鸡的体重的全体;个体是指每只鸡的体重;样本是指被抽查的 5 只鸡的体重;样本容量是 5.

【例 5】　(嘉兴市,3001)社会的信息化程度越来越高,计算机网络已进入普通百姓家,某市电信局对计算机拨号上网用户提供三种付费方式供用户选择(每个用户只能选择其中一种付费方式):甲种方式是按实际用时付费,每小时付信息费 4 元,另加付电话话费每小时 1 元 2 角;乙种方式是包月制,每月付信息费 100 元,同时加付电话话费每小时 1 元 2 角;丙种方式也是包月制,每月付信息费 150 元,但不必再另付电话话费,某用户为选择合适的付费方式,连续记录了 7 天中每天上网所花的时间(单位:min):

	第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
上网时间	62	40	35	74	27	60	80

根据上述情况,该用户选择哪种付费方式比较合适,请你帮助选择,并说明理由(每个月以 30 天计).

思维技巧　本题是利用样本平均数来解决实际问题的综合题目,文字篇幅较长,读懂题目.正确识表是关键.

解　该用户一个月上网的总时间约为:

$$t=\frac{62+40+35+74+27+60+80}{7}\times 30\div 60=27\ (\text{h}).$$

选择甲种付费方式每月应付费 $W_1=5.2\times 27=140.4$(元);

选择乙种付费方式每月应付费 $W_2=100+1.2\times 27=132.4$(元);

选择丙种付费方式每月应付费 $W_3=150$ 元.

因为 $W_2 < W_1 < W_3$.

所以该用户选择乙种付费方式比较恰当.

激活思维　统计知识与人们的日常生活、生产紧密相连.以样本平均数为基础,用样本去估计总体情况的综合应用问题,对培养学生应用数学的意识和处理数据的能力十分有益.

同类变式　某养鱼户搞池塘养鱼已三年,头一年放养鲢鱼苗 20000 尾,其成活率约为 70%,在秋季捕捞时,随意捞出 10 尾鱼,称得每尾的重量如下(单位 kg):0.8,0.9,1.2,1.3,0.8,0.9,1.1,1.0,1.2,0.8. (1) 根据样本平均数估计这塘鱼的总产量是多少千克? (2) 如果把这塘鲢鱼全部卖掉,某市场售价为每千克 4 元,那么能收入多少元?除去当年的投资成本 16000 元,第一年纯收入多少元? (3) 已知该养鱼户这三年纯收入为 132400 元,求第二年、第三年的纯收入平均每年的增长率是多少?

解　(1) 捞出 10 尾鱼,平均每尾鱼的重量

$$\bar{x} = \frac{0.8\times 3 + 1.2\times 2 + 0.9\times 2 + 1.0 + 1.1 + 1.3}{10} = 1.00\ (\text{kg})$$

则这塘鱼的总产量为 $1.00 \times 20000 \times 70\% = 14000$ (kg).

(2) 若将这些鲢鱼全部卖掉,所得收入为 $4 \times 14000 = 56000$ (元),

第一年纯收入为 $56000 - 16000 = 40000$ (元).

(3) 设这三年平均增长率为 x.

依题意有 $40000 + 40000(1 + x) + 40000(1 + x)^2 = 132400$.

解之 $x = 0.1 = 10\%$.

答 略.

思维拓展　(北京市东城区,2000) 为了保护环境,某校环保小组成员小明收集废电池,第一天收集 1 号电池 4 节,5 号电池 5 节,总重量 460 g;第二天收集 1 号电池 2 节,5 号电池 3 节,总重量为 240 g. (1) 求 1 号和 5 号电池每节分别重多少克? (2) 学校环保小组为估算四月份收集废电池的总重量,他们随意抽取了该月某 5 天每天收集废电池的数量,如下表:

1 号废电池(单位:节)	29	30	32	28	31
5 号废电池(单位:节)	51	53	47	49	50

分别计算两种废电池的样本平均数,并由此估算该月(30 天)环保小组收集废电池的总重量是多少千克?

解　(1) 设 1 号电池每节重 x g,5 号电池每节重 y g,则

$\begin{cases}4x+5y=460,\\2x+3y=240\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=90,\\y=20.\end{cases}$

(2) 1 号电池的样本平均数为

$$\bar{x}=\frac{29+30+32+28+31}{5}=30,$$

5 号电池的样本平均数为

$$\bar{y}=\frac{51+53+47+49+50}{5}=50.$$

所以　环保小组该月 (30 天) 收集废电池的总重量：

$(90\times30+20\times50)\times30=111$ (kg)

答 略.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (金华市、衢州市，2001) 随机抽查某商场四月份中 5 天的营业额，结果分别如下 (单位：万元)：3.4，2.9，3.0，3.1，2.6，试估计这个商场四月份的营业额大约是_____万元

(2) (湖州市，2001) 已知 n 个数据的和为 56，平均数为 8，则 $n=$_____.

(3) (北京市东城区，2001) 为了解初三 (1) 班学生的营养状况，随机抽取了 8 位学生的血样进行血色素检测，以此来估计这个班学生的血色素的平均水平，测得结果如下 (单位：g)：

13.8　12.5　10.6　11　14.7　12.4　13.6　12.2

则这 8 位学生血色素的平均值为_____g.

(4) (河南省，2001) 王老汉为了与客户签订购销合同，对自己的鱼塘中的鱼的总重量进行估计，第一次捞出 100 条，称得重量为 184 kg，并将每条鱼做出记号放入水中；当它们安全混合于鱼群后，又捞出 200 条，称得重量为 416 kg，且带有记号的鱼有 20 条，王老汉的鱼塘中估计有鱼_____条，共重_____kg.

(5) (长沙市，2000) 五位评委给初三甲班的文艺节目评分如下：9.5，9.8，9.7，9.0，9.5，那么甲班所得平均分是_____.

(6) (北京市海淀区，2000) 第一小组共 6 名学生，在一次“引体向上”的

测试中，他们分别做了 8，10，8，7，6，9 个，这 6 名学生平均每人做了_____(个).

(7) (南京市，2000) 某中学举行歌咏比赛，六名评委对某位选手打分如下：

77 分	82 分	78 分	95 分	83 分	75 分

去掉一个最高分和一个最低分后的平均是_____分.

(8) (甘肃省，2000) 某商场 4 月份随机抽查了 6 天的营业额，结果分别如下 (单位：万元)

2.8　3.2　3.4　3.7　3.0　3.1

试估算该商场 4 月份的总营业额大约是_____万元.

(9) (鄂州市，1996) 已知 $2,7,x,3y$ 四个数的平均数是 4.5；$7,y^2-3,7-2x,x-2y$ 四个数的平均数是 2，则 $x-y$ 等于_____.

(10) (湖州市，1998) 其商店选用售价为每千克 22 元的甲种糖 30 kg，每千克 20 元的乙种糖 20 kg，每千克 18 元的丙种糖 50 kg，混合成杂拌糖后出售，则这种杂拌糖平均每千克售价是_____元.

(11) 如果一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 5，那么数据 $(x_1+5),(x_2+5),\cdots,(x_n+5)$ 的平均数为_____.

(12) 如果一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 3，则 $6x_1+10,6x_2+10,\cdots,6x_n+10$ 的平均数为_____.

(13) 如果一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 $\bar{x}$，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数为 $\bar{y}$，则 $ax_1+by_1,ax_2+by_2,\cdots,ax_n+by_n$ 的平均数为_____.

(14) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 $\bar{x}$，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数是 $\bar{y}$，那么 $2x_1+y_1,2x_2+y_2,\cdots,2x_n+y_n$ 的平均数是_____.

(15) 样本 $a+0.2,a+0.3,a-0.1,a-0.2,a-0.3,a+0.1$ 的平均数 $\bar{x}=$_____.

(16) 如果一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$，a 为常数，那么 $x'_1=x_1-a$，$x'_2=x_2-a,\cdots,x'_n=x_n-a$ 的平均数 $\bar{x'}$_____.

(17) 如果一组数据 $6,x,2,4$ 的平均数为 5，那么 $x=$_____.

(18) 设样本为 $m+0.1,m+0.2,m+0.2,m-0.1,m-0.2,m+0.1$，则样本的平均数 $\bar{x}=$_____.

(19) 如果一组数据 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数是 3，那么另一组数据 $(x_1-2),(x_2-2),(x_3-2),(x_4-2),(x_5-2)$ 的平均数是_____.

(20) 一组数据 2,4,6,a,b 的平均数为 10,则 a,b 的平均数为_____.

(21) 一个班的 45 名学生中,14 岁的有 16 人,15 岁的有 17 人,16 岁的有 8 人,17 岁的有 4 人,那么这个班学生的平均年龄为_____.

(22) 有 3 个数据平均数是 6,另有 7 个数据平均数是 9,则这 10 个数据的平均数是_____.

(23) 已知数据 x_1,x_2,x_3 的平均数是 a,则数据 $2x_1$,$2x_2$,$2x_3$ 的平均数是_____;$3x_1-1$,$3x_2-1$,$3x_3-1$ 的平均数是_____.

(24) 已知 x_1,x_2,…,x_n 的平均数是 $\bar{x}$,求 ax_1+b,ax_2+b,ax_3+b,…,ax_n+b 的平均数 $\bar{y}=$_____.

(25) 某校学生在希望工程献爱心的活动中,将省下的零用钱为贫困山区失学儿童捐款,各班捐款数额如下(单位:元):99 101 103 97 98 102 96 104 95 105,则该校平均每班捐款为_____元.

(26) (甘肃省,2002) 某校初三年级在期中考试后,从全年级 200 名学生中抽取 20 名学生的考试成绩作为一个样本,用来分析全年级的考试情况,这个问题中的样本容量是_____.

(27) (聊城市,2002) 近几年,人们的环保意识逐渐增强,"白色污染"现象越来越受到人们的重视.下表是李昕同学对自己的家庭某一周内丢弃的塑料袋数目的统计:

星　　期	一	二	三	四	五	六	日
塑料袋个数	5	7	3	8	4	7	8

请你帮李昕估算一下,照这样下去,李昕家一年大约要丢弃_____个塑料袋(一年按 365 天计算).

(28) (昆明市,2002) 光明中学环保小组对某区 8 个餐厅一天的快餐饭盒使用个数做调查,结果如下:

125 115 140 270 110 120 100 140

① 这 8 个餐厅平均每个餐厅一天使用饭盒_____个;

② 根据样本平均数估计,若该区共有餐厅 62 个,则一天共使用饭盒_____个.

2. 选择题

(1) (大连市,2001) 数据 5,3,2,1,4 的平均数是(　　)

A. 2　　B. 5　　C. 4　　D. 3

(2) (邵阳市,2001) 有人对湖南省 山旅游区的旅游人数进行了 10 天统

计，结果有 3 天是每天 800 人，有 2 天是每天 1200 人，有 5 天是每天 700 人，那么这 10 天平均每天旅游的人数是（　　）

A. 830　　B. 850　　C. 900　　D. 800.

(3) (荆州市，2001) 已知 1，2，3，4，x_1，x_2，x_3 的平均数是 8，那么 $x_1+x_2+x_3$ 的值是（　　）

A. 14　　B. 22　　C. 32　　D. 46

(4) (泉州市，2001) 抽查了某学校在六月份某 5 天的日用电量，结果如下 (单位：度)：400　410　395　405　390

根据以上数据，估计该校六月份的总用电量为（　　）

A. 12400 度　　B. 12000 度　　C. 2000 度　　D. 400 度

(5) (北京市朝阳区，2001) 从鱼塘捕得同时放养的草鱼 240 尾，从中任选 9 尾，称得每尾鱼的质量分别是 1.5，1.6，1.4，1.6，1.3，1.2，1.7，1.8 (单位：kg)．依此估计这 240 尾鱼的质量大约是（　　）

A. 300 kg　　B. 360 kg　　C. 36 kg　　D. 30 kg

(6) (北京市崇文区，2001) 某校 5 个小组参加植树活动，平均每组植树 10 株，已知第一、二、三、五组分别植树为 9 株、12 株、9 株、8 株，那么第四小组植树（　　）

A. 12 株　　B. 11 株　　C. 10 株　　D. 9 株

(7) (包头市，2000) 为了考查一个学校学生参加课外体育活动的情况，调查了其中 40 名学生每天参加课外体育活动的时间，其中的 40 是这个问题的（　　）

A. 样本容量　　B. 一个样本　　C. 总体　　D. 个体

(8) (北京市朝阳区，2000) 如果数据 2，3，x，4 的平均数是 3，那么 x 等于（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 3.5　　D. 4

(9) (云南省，2000) 某学校生物兴趣小组 11 人到校外采集植物标本，其中 2 人每人采集到 6 件，4 人每人采集到 3 件，5 人每人采集到 4 件，则这个兴趣小组平均每人采集标本是（　　）

A. 3 件　　B. 4 件　　C. 5 件　　D. 6 件

(10) (遵义市，2000) 遵义中学举行“五、四”杯演讲比赛，由 7 位评委为每一名参赛学生的演讲分别打分．评分办法是：去掉一个最高分和一个最低分，将其余分数的平均分作为这名学生的最后得分．某学生演讲后，评委打分如下：9.64，9.73，9.72，9.77，9.73，9.68，9.70，该生最后得分（　　）

A. 9.710　　B. 9.711　　C. 9.712　　D. 9.713

(11) (广州市,2001)从一组数据中取出 a 个 x_1,b 个 x_2,c 个 x_3,组成一个样本,那么这个样本的平均数是(　　)

A. $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$　　B. $\frac{a+b+c}{3}$

C. $\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{3}$　　D. $\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$

(12) 有 10 个数据的平均数为 12,另有 20 个数据的平均数为 15,那么所有这 30 个数据的平均数是(　　)

A. 12　　B. 15　　C. 13.5　　D. 14

(13) 下表中,若平均数为 2,则 $x=$(　　)

分数	0	1	2	3	4
学生人数	x	5	6	3	2

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(14) 数据 a,b,c,d,a,b,a 的平均数是(　　)

A. $\frac{3a+2b+c+d}{7}$　　B. $\frac{a+b+c+d}{4}$

C. $\frac{a+b+c+d}{7}$　　D. $\frac{3a+2b+c+d}{4}$

(15) 有 m 个数的平均值是 x,n 个数的平均值是 y,则这 $m+n$ 个数的平均值是(　　)

A. $\frac{x+y}{2}$　　B. $\frac{x+y}{m+n}$

C. $\frac{mx+ny}{m+n}$　　D. $x+y$

(16). 有 n 个数,它们的和是 s,若将其中的每一个数增加 20,然后 5 倍之,再减少 20,所得到的 n 个数之和为(　　)

A. $s+20n$　　B. $5s+80n$

C. s　　D. $5s$

(17) 某水果公司对 1000 筐苹果考查等次,从中抽取 100 筐苹果检查,这个问题的正确分析是(　　)

A. 1000 筐苹果是总体

B. 100 筐苹果的等次是总体的一个样本

C. 1 个苹果是个体

D. 样本容量是 100 筐

(18) 为了解一批电视机的使用寿命,从中抽出 10 台进行试验,对于这个问题,下列说法中正确的是(　　)

A. 每台电视机的使用寿命是个体

B. 一批电视机是总体

C. 10 台电视机是总体的一个样本

D. 10 台电视机是样本的容量

(19) 为了估计一次考试的成绩,某教师在求出 38 名考生分数的样本平均数后,因为疏忽而把这个样本平均数和 38 个分数混在了一起,然后求出这 39 个分数的样本平均数,则后一个样本平均数与正确的样本平均数的比是(　　)

A. 1∶1　　B. 38∶39

C. 39∶38　　D. 2∶1

(20) A,B,C,D,E 五名学生在一次语文测验中的平均成绩是 80 分,而 A,B,C 三人的平均成绩是 78 分,那么下列说法一定正确的是(　　)

A. D,E 的成绩比其他三个都好

B. D,E 两人的平均成绩是 82 分

C. 最高分得主不是 A,B,C

D. D,E 中至少有 1 人成绩不少于 83 分

(21) (海淀区,2002) 为了让人们感受丢弃塑料袋对环境造成的影响,某班环保小组的六名同学记录了自己家中一周内丢弃的塑料袋的数量,结果如下(单位:个):

33　25　28　26　25　31

如果该班有 45 名学生,那么根据提供的数据估计本周全班同学各家总共丢弃塑料袋的数量约为(　　)

A. 900 个　　B. 1080 个

C. 1260 个　　D. 1800 个

(22) (泰州市,2002) 在青年业余歌手卡拉 OK 大奖赛中,8 位评委给某选手所评分数如下表,计分方法是:去掉一个最高分、去掉一个最低分,其余分数的平均分作为该选手的最后得分,则该选手最后得分是(精确到 0.01 分)(　　)

评委	1	2	3	4	5	6	7	8
评分	9.8	9.5	9.7	9.9	9.8	9.7	9.4	9.8

A. 9.70　　B. 9.71　　C. 9.72　　D. 9.73

3. (上海市,2002) 某中学初三年级共有学生 412 名,为了解这些学生数学学习的总体情况,在一次数学考试后,随机抽取了 20 名学生的试卷进行分析,这 20 名学生的数学成绩分别为:98,87,89,73,58,89,91,75,77,84,69,71,86,100,93,62,79,82,97,80 [注:这份试卷满分 100 分,60 分 (含 60 分) 以上为合格].

(1) 求这 20 名学生的平均成绩;

(2) 试估计该学校初三年级这次数学考试的合格率约为多少?

4. (聊城市,2001) 近年来,由于乱砍滥伐,掠夺性使用森林资源,我国长江、黄河流域植被遭到破坏,土地沙化严重,洪涝灾害时有发生. 沿黄河某地区为积极响应和支持"保护母亲河"的倡议,建造了长 100 km,宽 0.5 km 的防护林.

有关部门为统计这一防护林共约有多少棵树,从中选出 10 块 (每块长 1 km,宽 0.5 km) 进行统计,每块树木数量如下 (单位:棵):

65100　63200　64600　64700　67300

63300　65100　66600　62800　65500

请你根据以上数据计算这一防护林共约有多少棵树 (结果保留 3 个有效数字).

5. (南京市,2003) 公交 508 路总站设在一居民小区附近. 为了了解高峰时段从总站乘车出行的人数,随机抽查了 10 个班次的乘车人数,结果如下:

20　23　26　25　29　28　30　25　21　23

(1) 计算这 10 个班次乘车人数的平均数;

(2) 如果在高峰时段从总站共发车 60 个班次,根据上面的计算结果,估计在高峰时段从总站乘该路车出行的乘客共有多少人?

探究能力测试

6. (南宁市,2003) 图 14－2 是 2001 年南宁市年鉴记载的本市社会消费品零售总额 (亿元) 统计图.

请你仔细观察图中的数据,并回答平面问题.

(1) 图中所列的六年消费品零售总额的最大值与最小值的差是多少亿元?

(2) 求 1990 年、1995 年和 2000 年这三年社全消费品零售总额的平均数. (精确到 0.01)

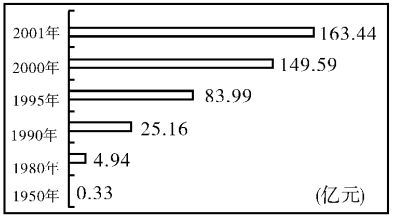


图 14－2

(3) 从图中你还可以发现哪些信息,请说出其中两个.

7. (南通市,1998) 小明家的鱼塘中养了某种鱼 2000 条,现准备打捞出售,为了估计鱼塘中的这种鱼的总质量,现从鱼塘中捕捞了三次,得到数据如下表:

	鱼的条数	平均每条鱼的质量
第一次捕捞	15	1.6 kg
第二次捕捞	15	2.0 kg
第三次捕捞	10	1.8 kg

(1) 鱼塘中这种鱼平均每条质量约是_____kg,鱼塘中所有这种鱼的总质量约是_____kg;若将这些鱼不分大小,按每千克 7.5 元的价格售出,小明家约可收入_____元.

(2) 若鱼塘中这种鱼的总质量是 (1) 中估计的值,现在鱼塘中的鱼分大鱼和小鱼两类出售,大鱼每千克 10 元,小鱼每千克 6 元,要使小明家的此项收入不低于 (1) 中估计的收入,问:鱼塘中大鱼总质量应至少有多少千克?

8. (新疆,2001) 一家电脑生产厂家在某城市三个经销本厂产品的大商场进行调查,产品的销量占这三个大商场同类产品销量的 40%,由此在广告中宣传,他们的产品在国内同类产品的销量占 40%.请你根据所学的统计知识,判断该宣传中的数据是否可靠:_____,理由是:_____.

14.2 众数与中位数

学点探究分析

重点 众数和中位数概念与作用.

难点 众数和中位数概念与作用.

探究点 用众数、中位数的概念解决实际问题,解释社会实际生活中有关现象.近来出现了一类以中位数、众数、平均数为背景的、开放性的、探究有关规律的题目,要求学生全方位地思考问题、分析问题、解决问题.与平均数一样,文字与表格相结合的题目越来越多.

学习方法技巧

众数和中位数这两个概念的理解及作用既是重点又是难点,众数不是出现的次数,而是出现次数最多的数据,所以一组数据的众数可能是一个,也可能多于一个;而确定中位数首先要把数据从小到大排列好,当数据的个数是奇数时,中位数就是最中间的一个,当数据的个数是偶数时,中位数就是最中间的两个数的平均数,无论哪种情况,中位数只有一个,特别是求以"权"形式出现的数据的中位数,容易出错,需先求出数据总个数.深刻理解众数、中位数概念,是解决这类问题的前提.此外还需提高阅读和识表能力.

能力升级捷径

【例 1】 (吉林省,2002) 2002 年世界杯足球赛时,中国队首场比赛的首发阵容名单和他们的身高如下表所示:

姓名	江津	李伟峰	范志毅	吴承瑛	孙继海	李 铁	马明宇	李小鹏	徐云龙	杨晨	郝海东
身高(m)	1.98	1.82	1.83	1.83	1.83	1.83	1.76	1.82	1.81	1.85	1.80

则这些运动员身高的众数和中位数分别是_____.

思维技巧 本题考查众数、中位数的概念及其计算.数据 1.83 出现次数最多,因此身高的众数为 1.83 m,将一组数据按大小依次排列,把处在最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的中位数,特别要注意,当数据的个数是偶数时中位数的计算方法.把 11 名运动员身高从高到低排序,处于最中间的是 1.83 m.

解 众数和中位数都是 1.83 m.

激活思维 解这类题,明确众数、中位数的概念是关键.特别要注意,中

位数的计算当数据个数是奇数或偶数时，计算方法不同．但首先要按大小排序，众数在一组数据中不一定是唯一的，有时有多个数据，平均数、众数与中位数有时会相同．

同类变式　1．（镇江市，2002）甲、乙、丙、丁四支足球队在世界杯预选赛中进球数分别为 9，9，x，7．若这组数据的众数与平均数恰好相等，则这组数据的中位数为（　　）

A．10　　B．9　　C．8　　D．7

解　依题意知，这组数据的众数可能为 9 或 7，而众数与平均数相等，故众数必为 9，故平均数为 9，$x=18-7=11$，由此可知中位数为 9，均选 B．

2．（广西，2001）某居民小区开展节约用水活动成效显著，据对该小区 200 户家庭用水情况统计分析，3 月份比 2 月份节约用水情况如下表所示：

节水量（m^3）	1	1.5	2
户　数	20	120	60

（1）填空：节水量的众数是_____．

（2）求 3 月份平均每户节约用水多少立方米？

解　（1）从表格知节水量为 1.5 m^3 有 120 户，最多，所以节水量众数为 1.5 m^3．

（2）$\bar{x}=\dfrac{1\times120+1.5\times120+2\times60}{20+120+60}=1.6\ m^3$．

答：3 月份平均每户节约用水 1.6 m^3．

思维拓展　（兰州市，2002）为了培养学生的环境保护意识，某校组织课外小组对该市做空气含尘调查，下面是一天每隔 2 小时测得的数据：0.03，0.04，0.03，0.02，0.04，0.01，0.03，0.03，0.04，0.05，0.01，0.03（单位：g/cm^3）

（1）求出这组数据的众数和中位数；

（2）若国家环保局对大气飘尘的要求为平均值不超过 0.025 g/cm^3，问这天该城市的空气是否符合国家环保局的要求？

解　（1）由众数的定义和题意知这组数据中 0.03 出现的最多（5 次），故数据的众数是 0.03．

因为原数据排列为 0.01，0.01，0.02，0.03，0.03，0.03，0.03，0.03，0.04，0.04，0.04，0.05，其中最中间的两个数据都是 0.03，所以这组数据的中位数是 0.03．

(2) 这天测得的数据平均数为 $\bar{x}=\frac{1}{12}(0.01\times2+0.02\times1+0.03\times5+0.04\times3+0.05)=0.03>0.025$.

因此这天该城市的空气不符合国家环保局的要求.

2. (吉林省,2001) 如图 14－3,公园里有甲、乙两群游客正在做团体游戏,两群游客年龄如下 (单位:岁):

甲群:13,13,14,15,15,15,15,16,17,17

乙群:3,4,4,5,5,6,6,6,54,57

图 14－3

解答下列各题 (直接填在横线上):

(1) 甲群游客的平均年龄是_____岁,中位数是_____岁,众数是_____岁,其中能较好反映甲群游客年龄特征的是_____;

(2) 乙群游客的平均年龄是_____岁,中位数是_____岁,众数是_____岁,其中能较好反映乙群游客年龄特征的是_____.

解 (1) 15,15,15,众数;

(2) 15,5.5,6,中位数和众数.

【例 2】 据报道,某公司的 33 名职工的月工资 (以元为单位) 如下:

职务	董事长	副董事长	董事	总经理	经理	管理员	职员
人数	1	1	2	1	5	3	20
工资	5500	5000	3500	3000	2500	2000	1500

(1) 求该公司职工月工资的平均数、中位数、众数;

(2) 假设副董事长的工资从 5000 元提升到 20000 元,董事长的工资从 5500 元提升到 30000 元,那么新的平均数、中位数、众数又是什么? (精确到元)

(3) 你认为哪个统计更能反映这个公司员工的工资水平?结合此问题谈一谈你的看法.

思维技巧 本题考查平均数、中位数、众数的实际应用.关键在于正确理解这些概念的实际意义.

解 (1) 平均数是

$$\bar{x}=1500+\frac{4000+3500+2000\times2+1500+1000\times5+500\times3+0\times20}{33}$$

$\approx 1500+591=2091$ (元)，

中位数是 1500 元，众数是 1500 元.

(2) 平均数是

$$\overline{x}=1500+\frac{28500+18500+2000\times2+1500+1000\times5+500\times3+0\times20}{33}$$

$=1500+1788=3288$ (元)，

中位数是 1500 元，众数是 1500 元.

(3) 在这个问题中，中位数或众数均能反映该公司员工的工资水平. 因为公司中少数人的工资额与大多数人的工资额差别较大，这样导致平均数与中位数偏差较大，所以平均数不能反映这个公司员工的工资水平.

激活思维　用统计知识对现实生活中的事例、现象做出合理的解释，从而帮助我们更好地认识社会、了解社会，这正体现了学习数学的意义.

同类变式　1. (吉林省，2000) 某餐厅共有 7 名员工，所有员工的工资情况如下表所示：　(单位：元)

人员	经理	厨师甲	厨师乙	会计	服务员甲	服务员乙	勤杂工
人数	1	1	1	1	1	1	1
工资额	3000	700	500	450	360	340	320

解答下列问题 (直接填在横线上)：

(1) 餐厅所有员工的平均工资是_____元；

(2) 所有员工工资的中位数是_____元；

(3) 用平均数还是用中位数描述该餐厅员工工资的一般水平比较恰当？答_____.

(4) 去掉经理的工资后，其他员工的平均工资是_____元，是否也能反应该餐厅员工工资的一般水平？答：_____.

解　(1) 810；　(2) 450；　(3) 中位数；　(4) 445，能

2. (青海省，2002) 某地区筹备召开中学生运动会，指定从某校初二年级 9 个班中抽取 48 名女生组成花束队，要求身高一致，现随机抽取 10 名初二某班女生体检 (各班女生人数均超过 20 人)，得身高如下 (单位：cm)：

165，162，158，157，162，162，154，160，167，155.

(1) 求这 10 名学生的平均身高；

(2) 问该校能否按要求组成花束队，试说明理由.

解　(1) 容易算出这 10 名学生的平均身高为 160.2 cm.

(2) 由于随机抽取 10 名初二某班女生体检，其身高的众数是 162 cm (共

3 人),可估计一个班(女生超过 20 人)至少有 6 名女同学身高超过 162 cm,这样估计全校 162 cm 的女生数为 $6\times9=54>48$. 因此该校能按要求组成花束队.

思维拓展 (北京市西城区,2001)某商店三、四月份出售同一品牌品种规格的空调销售台数如下表,根据表中数据回答:

规格 / 台数 / 月份	1 匹	1.2 匹	1.5 匹	2 匹
三月	12 台	20 台	8 台	4 台
四月	16 台	30 台	14 台	8 台

(1) 商店平均每月销售空调_____(台);

(2) 商店出售的各种规格的空调中,众数是_____(匹);

(3) 在研究六月份进货时,商店经理决定_____(匹)的空调要多进;_____(匹)的空调要少进.

解 (1) 56; (2) 1.2; (3) 1.2,2

【例 3】 (新疆,2000)某地举办体操比赛,由 7 位评委现场给运动员打分,已知 7 位评委给某运动员的评分如下:

评委	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	6 号	7 号
评分	9.2	9.8	9.6	9.5	9.5	9.4	9.3

请你利用所学的统计知识,给出这位运动员的最后得分. (精确到 0.01)

思维技巧 本题是较简单的开放性试题,确定运动员的最后得分的途径很多,依据的标准(规则)不同,答案也不一定相同,认真审题是关键.

解 第一,可以求 7 个评分的平均分 $\bar{x}\approx9.47$;第二,可去掉一个最高分和一个最低分后的其余分数的平均分 $\bar{x}=9.46$;第三,取 7 个评分的中位数 9.5;第四,取 7 个评分的众数 9.5. 这些都符合统计学原理.

激活思维 此题的背景是我们非常熟悉而且经常遇到的情形. 如何给运动员评分,首先要掌握标准(规则);其次是所学的统计知识哪些可以符合此题,这就要认真思考,找到解决问题的方法与途径.

同类变式 (三明市,2001)爱明商贸公司 10 名销售员,去年完成的销售额情况如下表:

销售额(单位:万元)	3	4	5	6	7	8	10
销售员人数(单位:人)	1	3	2	1	1	1	1

① 求销售额的平均数、众数、中位数(单位:万元).

② 今年公司为了调动员工积极性,提高年销售额,准备采取超额有奖的措施,请根据①的结果,通过比较,合理确定今年每个销售员统一的销售额标准是多少万元?

解　(1) 平均数 $\bar{x}=\frac{3+4\times3+5\times2+6+7+8+10}{10}=5.6$(万元);

众数是 4 万元;

因为　按大小依次将 10 个数据排列起来,处在正中间的两个数恰好都是 5,

所以　中位数为 5.

(2) 若规定平均数 5.6 万元为标准,则多数人无法或不可能超额完成,会挫伤员工积极性;

若规定众数 4 万元为标准,则绝大多数人不必努力就可以超额完成,不利于提高年销售额;

规定中位数 5 万为标准,多数人能完成或超额完成,少数人经过努力也能完成,所以 5 万元为标准较合理.

思维拓展　(青岛市,2002)鸿运公司有一名经理和 10 名雇员共 11 名员工,他们的月工资情况如下(单位:元):30000,2350,2350,2250,2250,2250,2250,2150,2050,1950,1850.

上述数据的平均数是_____元,中位数是_____元;通过上面得到的结果不难看出:用_____(填"平均数"或"中位数")能更准确地反映出该公司全体员工的月人均收入水平.

解　(1) $\bar{x}=\frac{30000+2350\times2+2250\times4+2150+2050+1950+1850}{11}$

$=4700$(元).

从大到小排列,处在最中间的是 2250,

所以中位数是 2250 元.

从 11 名员工的月工资看,都在 2250 元上下浮动,因此用中位数能更准确地反映该公司全体员工月人均收入情况.

2. (黄石市,2000)为了减轻学生过重的课业负担,合理布置作业量,数学教师对 15 名同学上周双休日完成作业情况进行调查统计,情况如下表所

示,根据表中提供的信息填空:

人数	1	1	2	1	2	1	4	2	1
完成作业量	25	20	14	11	10	9	8	7	6

(1) 双休日每人完成作业量的平均数、中位数,众数分别是_____.

(2) 运用以上三个统计量中的一个来确定双休日作业量,你认为:学有余力的同学应该用_____;学习暂有困难的同学应该用_____;数学教师应该用_____.

解 (1) 11,9,8

(2) 平均数,众数(或中位数),中位数

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (北京市昌平,2001) 在一次英语口试中,10 名学生的成绩(单位:分)分别为:70,90,80,50,80,80,60,100,80,90,则这些学生成绩的平均数为_____分,中位数_____分.

(2) (云南省曲靖,2001) 在数据 $-1,0,4,5,8$ 中插入一数据 x,使得该数据组的中位数为 3,则 $x=$_____.

(3) (四川省眉山,2001) 将 5 个整数从大到小排列,中位数是 4,如果这个样本中的惟一众数是 6,则这 5 个整数可能的最大的和是_____.

(4) (陕西省,2003) 华山鞋厂为了了解初中学生穿鞋的鞋情况,对永红中学初二(1)班的 20 名男生所穿鞋号统计如下表:

鞋号	23.5	24	24.5	25	25.5	26
人数	3	4	4	7	1	1

那么这 20 名男生鞋号数据平均数是____,中位数是____;在平均精简、中位数和众数中,鞋厂最感兴趣的是____.

(5) (烟台市,2003) 从甲、乙、丙三个厂家生产的同一种产品中各抽取 8 件产品,对其中使用寿命跟踪调查,结果如下:(单位:年)

甲:3,4,5,6,8,8,8,10

乙:4,6,6,6,8,9,10,13

丙：3，3，4，7，9，10，11，12

三个厂家在广告中都称该产品的使用寿命是 8 个，请根据结果判断厂家在广告中分别运用了平均数、众数、中位数中的哪一种集中趋势的特征数：

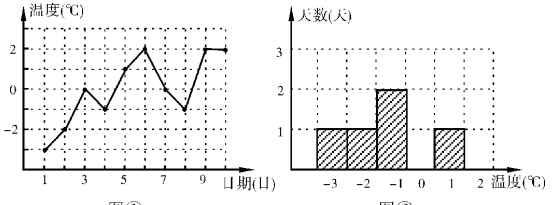
甲_____，乙_____，丙_____.

⑹ (黑龙江省，2003) 五个整正数从小到大排到，若这组数据的中位数是 4，唯一众数是 5，则这五个正整数的和为_____.

⑺ (吉林省，2003) 图①是某城市 3 月份 1～10 日的最低气温随时间变化的图象.

⑴ 根据图①提供的信息。在图②中补全直方图；

⑵ 这 10 天最低气温的众数是_____℃，最低气温中位数是_____℃，最低气温的平均数是_____℃，



图①　　图②

图 14－4

⑻ 数据 8，9，9，8，10，8，9，9，8，10，7，9，9，8，10，7 的众数是_____，中位数是_____，平均数是_____.

⑼ 一组数据 23，27，20，18，x，12，它们的中位数是 21，那么 x 是_____.

⑽ 已知数据 a，a，b，c，d，b，c，c，且 $a<b<c<d$，则这组数据的众数为_____，中位数为_____，平均数为_____.

⑾ 若一组数据中有偶数个数字，这组数据的中位数是指_____.

⑿ 若 $a>b>c>d$，数据 a，b，a，d，c，c，d，a，a，d 的众数是_____.

⒀ (北京市昌平，2002) 为了迎接 2008 年奥运会，昌平区某单位举办了英语培训班. 100 名职工在一个月内参加英语培训的次数如下表所示：

次数	4	5	6	7	8
人数	15	20	30	20	15

这个月每名职工平均参加英语培训的次数为_____;这个月每名职工参加英语培训次数的众数为_____.

(14) (北京市东城区,2002) 2002 年 5 月份,某市市区一周空气质量报告中某项污染指数的数据是:

31　35　31　34　30　32　31

这组数据的中位数是_____.

(15) (福州市,2002) 随机抽取某城市一年 (以 365 天计) 中的 30 天的日平均气温状况统计如下:

温度 x (℃)	10	14	18	22	26	30	32
天数 l	3	5	5	7	6	2	2

请根据上述数据填空:

① 该组数据的中位数是_____℃;

② 该城市一年中日平均气温为 26 ℃的约有_____天;

③ 若日平均气温在 17 ℃～23 ℃为市民"满意温度",则该城市一年中达到市民"满意温度"的约有_____天.

2. 选择题

(1) (北京市,2003) 在抗击"非典"时期的"课堂在线"学习动中,李老师从 5 月 8 日至 5 月 14 日在网上答题个数的记录如下表:

日期	5 月 8 日	5 月 9 日	5 月 10 日	5 月 11 日	5 月 12 日	5 月 13 日	5 月 14 日
答题个数	68	55	50	56	54	48	68

在李老师每天的答题个数所组成的这组数据中,众数和中位数依次是 (　　)

A. 68,55　　B. 55,68　　C. 68,57　　D. 55,57

(2) (合肥市,2001) 8 份试卷的得分分别是 76,85,92,95,92,98,90,92. 这组数据的众数是 (　　)

A. 3　　B. 95　　C. 90　　D. 92

(3) (北京市石景山区,2001) 下列说法中错误的是 (　　)

A. 如果一组数据的众数是 5,那么这组数据中出现次数最多的是 5

B. 一组数据的平均数一定大于其中的每一个数据

C. 一组数据的平均数、众数、中位数有可能相同

D. 一组数据的中位数有且只有一个

(4) (南京市,2000) 某青年排球队 12 名队员的年龄情况如下：

年龄 (单位 :岁)	18	19	20	21	22
人数	1	4	3	2	2

则这 12 名队员年龄的 (　　)

A. 众数是 20 (岁),中位数是 19 (岁)

B. 众数是 19 (岁),中位数是 19 (岁)

C. 众数是 19 (岁),中位数是 20.5 (岁)

D. 众数是 19 (岁),中位数是 20 (岁)

(5) (天津市,2000) 对于数据组 3,3,2,3,6,3,10,3,6,3,2. ① 这组数据的众数是 3 ;② 这组数据的众数与中位数的值不等 ;③ 这组数据的中位数与平均数的数值相等 ;④ 这组数据的平均数与众数的数值相等. 其中正确的结论有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(6). (北京市朝阳区,2002) 甲乙二人参加某体育项目训练,为了便于研究,把最近五次训练成绩分别用实线和虚线连结,如图 14－5 所示,下面的结论错误的是 (　　)

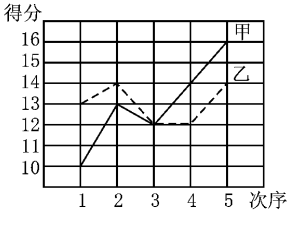


图 14－5

A. 乙的第二次成绩与第五次成绩相同 ;

B. 第三次测试甲的成绩与乙的成绩相同 ;

C. 第四次测试甲的成绩比乙的成绩多 2 分 ;

D. 五次测试甲的成绩都比乙的成绩高.

(7) (甘肃省,2002) 某电视台举办的秦腔电视大赛上,六位评委给 1 号选手的评分如下:90　96　91　96　95　94,这组数据的众数是(　　)

A. 94.5　　B. 95　　C. 96　　D. 2

(8) (天津市,2002) 在某次数学测验中,随机抽取了 10 份试卷,其成绩如下:85,81,89,81,72,82,77,81,79,83,则这组数据的众数、平均数与中位数分别为(　　)

A. 81,82,81　　B. 81,81,76.5　　C. 83,81,77　　D. 81,81,81

(9) (北京市石景山,2002) 第十届全国青年歌手大奖赛的 12 位评委为某位歌手打分的情况如下 (单位:分):

96.5　97.5　97.6　97.8　97.8　98.1

98.3　98.5　98.5　98.5　98.6　99.2

则下列结论不正确的是(　　)

A. 这组数据的众数为 98.5

B. 这组数据的中位数为 98.2

C. 这组数据的中位数为 98.1 和 98.3

D. 去掉一个最高分 99.2,去掉一个最低分 96.5,这位歌手的最后平均得分为 98.12 分

3. (安徽省,2000) 有 7 个数由小到大依次排列,其平均数是 38,如果这组数的前 4 个数的平均数是 33,后 4 个数的平均数是 42,求这 7 个数的中位数.

4. (山西省,2002) 某中学为了了解全校的耗电情况,抽查了 10 天中全校每天的耗电量,数据如下表 (单位:度):

度数	90	93	102	113	114	120
天数	1	1	2	3	1	2

(1) 写出上表中数据的众数和平均数;

(2) 由上题获得的数据,估计该校某月的耗电量 (按 30 天计);

(3) 若当地每度电的定价是 0.5 元,写出该校应付电费 y (元) 与天数 x (x 取正整数,单位:天) 之间的函数关系式.

探究能力测试

5. (上海市,2003) 某校初二年级全体 320 名学生在电脑培训前后参加了一次水平相同的考试,考分都以同一标准划分成“不合格”、“合格”、“优

秀”三个等级.为了了解电脑培训的效果,用抽签方式得到其中 32 名学生的两次考试考分等级,所绘制的统计图如图 14－6 所示.试结合图示信息回答下列问题：

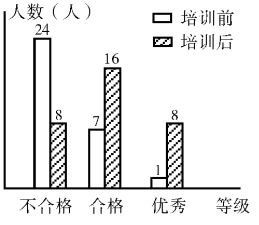


图 14－6

⑴ 这 32 名学生培训前考分的中位数所在的等级是_____,培训后考分的中位数所在的等级是_____.

⑵ 这 32 名学生经过培训,考分等级“不合格”的百分比由_____下降到_____.

⑶ 估计该校整个初二年级中,培训后考分等级为“合格”与“优秀”的学生共有_____名.

⑷ 你认为上述估计合理吗？理由是什么？

答：_____,理由_____.

6. (淄博市,2003) 大学生张军到某公司应聘时,了解该公司员工的月工资情况如下表：

员工	经理	副经理	职员 A	职员 B	职员 C	职员 D	职员 E	职员 F	杂工 G
月工资/元	6000	4000	1700	1300	1200	1100	1100	1100	500

在了解过程中,有三位公司员工对收入情况给出了三个说法：

甲 我的工资是 1200 元,在公司算中等收入；

乙 我们好几个人的工资都是 1100 元；

丙 我们公司员工收入很高,月平均工资为 2000 元。

请你用所学的统计知识回答下列问题：

⑴ 甲的说法中的数据 1200 元,我们称之为_____；

⑵ 乙的说法中的数据 1100 元,称之为_____；

⑶ 丙是用什么方法得出 2000 元的？_____；

(4) 甲、乙、丙三人的说法中,谁的说法可以较好地反映公司员工收入的一般水平?

7. (厦门市,2003) 某中学要召开运动会,决定从初三年级全部的 150 名的女生中选 30 人,组成一个彩旗方队 (要求参加方队的同学身高尽可能接近). 现在抽测了 10 名女生的身高,结果如下 (单位:cm):

166、154、151、167、162、158、158、160、162、162

(1) 依据样本数据估计,初三年级全体女生的平均身高约是多少厘米?

(2) 这 10 名女生的身高的中位数、众数各是多少?

(3) 请你依据本数据,设计一个挑选参加方队的女生的方案. (请简要说明)

8. (安徽省,2002) 某公司销售部有营销人员 15 人,销售部为了制定某种商品的月销售定额,统计了这 15 人某月的销售量如下:

每人销售件数	1800	510	250	210	150	120
人数	1	1	3	5	3	2

(1) 求这 15 位营销人员该月销售量的平均数、中位数和众数;

(2) 假设销售部负责人把每位营销员的月销售额定为 320 件,你认为是否合理,为什么?如不合理,请你制定一个较合理的销售定额,并说明理由.

9. (江西省,2002) 甲、乙两同学做"投球进筐"游戏. 商定:每人玩 5 局,每局在指定线外将一个皮球投往筐中,一次未进可再投第二次,以此类推,但最多只能投 6 次,当投进后,该局结束,并记下投球次数;当 6 次都未投进时,该局也结束,并记为"×". 两人五局投球情况如下:

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲	5 次	×	4 次	×	1 次
乙	×	2 次	4 次	2 次	×

(1) 为了计算得分,双方约定:记"×"的该局得 0 分,其他局得分的计算方法要满足两个条件:①投球次数越多,得分越低;②得分为正数. 请你按约定的要求,用公式、表格、语言叙述等方式,选取其中一种写出一个将其他局的投球次数 n 换算成得分 M 的具体方案;

(2) 请根据上述约定和你写出的方案,计算甲、乙两人的每局得分,并从平均分的角度来判断谁投得更好.

图 14－7

14.3　方差

学点探究分析

重点　方差的意义与计算.

难点　方差、标准差、总体方差等意义.

探究点　与平均数、众数及中位数等几个描述一组数据集中趋势的特征相比，方差与标准差主要反映的是一组数据的波动大小. 它们在实际生活中应用非常广泛，中考中常以表格与文字相结合的形式出现，对学生应用数学的意识和阅读理解能力要求较高.

学习方法技巧

⑴ 要理解并熟记方差和标准差的计算公式，特别是方差的简化公式，比较两组数据的波动大小的前提是平均数相同或接近，比较它们的方差（标准差）有很重要的实际意义.

⑵ 初步学会统计处理数据，用数据说话.

能力升级捷径

【例 1】 求下列各组数据的方差.

(1) 1 2 3 4 5 6 7 8 9;

(2) 11 12 13 14 15 16 17 18 19;

(3) 10 20 30 40 50 60 70 80 90;

(4) 501 500 508 506 510 509 500 493 494 494;

(5) −2 −1 0 1 2.

思维技巧 通常,根据定义计算一组数据的方差是很烦的,且容易出错.因此一定要学会用简化公式计算方差.不论用哪个公式计算方差,首先都要求出平均数.

解 (1) $\overline{x}=\frac{1}{9}(1+2+\cdots+9)=5$,

所以 $s^2=\frac{1}{9}[(1-5)^2+(2-5)^2+\cdots+(9-5)^2]\approx 6.7$.

(2) $\overline{x}=\frac{1}{9}(11+12+\cdots+19)=15$,

所以 $s^2=\frac{1}{9}[(11-15)^2+(12-15)^2+\cdots+(19-15)^2]\approx 6.7$.

(3) $\overline{x}=\frac{1}{9}(10+20+\cdots+90)=50$,

所以 $s^2=\frac{1}{9}[(10-50)^2-(20-50)^2+\cdots+(90-50)^2]\approx 670$.

(4) 取 $a=500$,将每个数据都减去 500 得一组新数据:

1 0 8 6 10 9 0 −7 −6 −6.

$\overline{x'}=\frac{1}{10}(1+0+8+6+10+9+0-7-6-6)=1.5$,代入公式得

$$s^2=\frac{1}{10}[1^2+0^2+8^2+6^2+10^2+9^2+0^2+(-7)^2+(-6)^2+(-6)^2-10\times 1.5^2]$$

$$=\frac{1}{10}[1+64+36+100+81+49+36+36-22.5]=38.05.$$

(5) $x=\frac{1}{5}(-2-1+0+1+2)=0$,

所以 $s^2=\frac{1}{5}[(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2-5\cdot 0^2]=2$.

激活思维 计算方差时,对于不同的数据,依据数据展现的特点,灵活运用不同的公式.在数据较小,较"整"时用方差公式 $s^2=\frac{1}{n}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n^2-n\overline{x^2})$ 计算较简便;当一组数据很大时,通过一个变换使参与计算的

数据变小，再用简化公式计算.

同类变式　(辽宁省，2001) 为了考察一个养鸡场里鸡的生长情况，从中抽取 5 只，称得它们的重量如下 (单位：kg)：3.0　3.4　3.1　3.3　3.2，在个问题中，样本方差 $s^2=$ _____.

解　(1) $\overline{x}=\dfrac{3.0+3.4+3.1+3.3+3.2}{5}=3.2.$

(2) $s^2=\dfrac{1}{5}[(3.0-3.2)^2+(3.4-3.2)^2+(3.1-3.2)^2+(3.3-3.2)^2+(3.2-3.2)^2]$

$=\dfrac{1}{5}(0.04+0.04+0.01+0.01+0)$

$=0.02.$

思维拓展　1. (山东省菏泽，2001) 已知一组数据 $-2,-1,0,x,1$ 的平均数是 0，那么这组数据的方差是_____.

解　因为　$-2,-1,0,x,1$ 的平均数是 0，

所以　$(-2)+(-1)+0+x+1=0.$

即　$x=2.$

因此这组数据为 $-2,-1,0,2,1.$

所以　$s^2=\dfrac{1}{5}[(-2)^2+(-1)^2+0^2+2^2+1^2-5\times0^2]=2.$

因此填 2.

2. (河南省，2001) 已知一个样本 $1,3,2,5,x$，它的平均数是 3，则这个样本的标准差是_____.

解　由题意知　$1+3+2+5+x=5\times3.$

所以　$x=4.$

所以　$s^2=\dfrac{1}{5}[(1-3)^2+(3-3)^2+(2-3)^2+(5-3)^2+(4-3)^2]$

$=2.$

所以　$s=\sqrt{2}.$

因此填 $\sqrt{2}$.

【例 2】　(南通市，2001) 如果一组数据 a_1、a_2……a_n 的方差是 2，那么一组新数据 $3a_1,3a_2$……$3a_n$ 的方差是 (　　)

A. 2　　B. 6　　C. 12　　D. 18

思维技巧　此题是考查两组相联系的数据之间的方差关系，掌握方差计算公式是关键.

解　设数据 $a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$ **的平均数为** $\overline{x}$**，则** $3x_1, 3x_2 \cdots\cdots 3x_n$ **的平均数为** $3\overline{x}$.

根据方差公式

$$\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]=2.$$

而数据 $3x_1, 3x_2 \cdots\cdots 3x_n$ **的方差**

$$s^2=\frac{1}{n}[(3x_1-3\overline{x})^2+(3x_2-3\overline{x})^2+\cdots+(3x_n-3\overline{x})^2]$$

$$=9\cdot\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$$

$$=9\times 2=18.$$

所以选 D.

激活思维　此题正用和逆用了方差公式. 一般若一组数据 $x_1, x_2 \cdots x_n$ **的方差为** s^2**，标准差为** s $(s>0)$**，则数据** $x_1+a, x_2+a, \cdots+x_n+a$ **的方差为** s^2**，标准差为** s **数据** $kx_1, kx_2, \cdots kx_n$ **的方差为** k^2s^2**，标准差为** $|k|s$ **数据** $ax_1+b, ax_2+b, \cdots ax_n+b$ **的方差为** a^2s^2**，标差为** $|a|s$**. 此例在解答过程中，还运用了整体代换思想.**

同类变式　如果样本 $x_1, x_2, \cdots x_5$ **的方差** $s^2=0.015$**，平均数** $\overline{x}=20$**，求样本** $2x_1, 2x_2, \cdots 2x_5$ **的平均数和方差.**

解　因为　样本 $x_1, x_2 \cdots x_5$ **的方差** $s^2=0.015$**，平均数为** $\overline{x}=20$**，**

所以　样本 $2x_1, 2x_2, \cdots 2x_5$ **的平均数为** $2\times 20=40$.

方差为 $4\times 0.015=0.06$.

思维拓展　1. 已知 $x_1, x_2, \cdots x_n$ **的标准差是** s**，计算** $ax_1-b, ax_2-b, \cdots ax_n-b$ $(a\neq 0, a, b$ **为常数)的标准差.**

解　设 $x_1, x_2, \cdots x_n$ **的平均数是** $\overline{x}$**，**

$ax_1-b, ax_2-b \cdots ax_n-b$ **的平均数是** $\overline{x'}$**，方差是** s^2.

$$\overline{x'}=\frac{1}{n}[(ax_1-b)+(ax_2-b)+\cdots+(ax_n-b)]$$

$$=\frac{1}{n}[a(x_1+x_2+\cdots+x_n)-nb]$$

$$=a\cdot\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-b=a\overline{x}-b.$$

$$s'=\sqrt{\frac{1}{n}[(ax_1-b)-(a\overline{x}-b)]^2+[(ax_2-b)-(a\overline{x}-b)]^2+\cdots+[(ax_n-b)-(a\overline{x}-b)]b^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}\left[a^2(x_1-\overline{x})^2+a^2(x_2-\overline{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\overline{x})^2\right]}$$

$$=|a|\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]}$$

$$=|a|s.$$

2．一组数据 $-1,-2,x,1,2$，其中 x 是小于 10 的非负整数，且数据的方差是整数，求数据的标准差．

解　$\overline{x}=\frac{1}{5}(-1-2+x+1+2)=\frac{1}{5}x$，

所以　$s^2=\frac{1}{5}\left[(-1)^2+(-2)^2+x^2+1^2+2^2-5\times\left(\frac{x}{5}\right)^2\right]$

$$=\frac{1}{5}\left(10+x^2-\frac{x^2}{5}\right)=2+\frac{4}{25}x^2.$$

又因为 x **是小于** 10 **的非负整数，**

所以 $x=0$ **或** 5．

当 $x=0$ **时，**$s^2=2$，$s=\sqrt{2}$；**当** $x=5$ **时，**$s^2=6$，$s=\sqrt{6}$．

【例 3】　从甲、乙两种玉米苗中各抽 10 株，分别测得它们的株高如下：(单位：cm)

甲：25　41　40　37　22　14　19　39　21　42

乙：27　16　44　27　44　16　40　40　16　40

问：(1) 哪种玉米的苗长得高？(2) 哪种玉米的苗长得齐？

思维技巧　本题考查方差知识在实际问题中的应用，看哪种玉米的苗长得高，只要比较甲、乙种玉米的均高即可；要比较哪种玉米的苗长得整齐，只要看两种玉米苗高的方差即可，因为方差是体现一组数据波动大小的特征数．

解　(1) $\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}(25+41+40+37+22+14+19+39+21+42)$

$$=\frac{1}{10}\times300=30\ (\text{cm}).$$

$$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{10}(27+16+44+27+44+16+40+40+16+40)$$

$$=\frac{1}{10}\times310=31\ (\text{cm}).$$

所以　$\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$．

(2) $s^2_{甲}=\frac{1}{10}[(25-30)^2+(41-30)^2+(40-30)^2+(37-30)^2]+(22-30)^2+(14-30)^2+(19-30)^2+(39-30)^2+(21-20)^2+(42$

$-30)^2$

$=\frac{1}{10}(25+121+100+49+64+256+121+81+81+144)$

$=\frac{1}{10}\times 1042=104.2\ (\text{cm}^2)$.

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}[(2\times 27^2+3\times 16^2+3\times 40^2+2\times 44^2)-10\times 31^2]$

$=\frac{1}{10}\times 1288=128.8\ (\text{cm}^2)$.

所以 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$.

答 乙种玉米的苗长得高，甲种玉米的苗长得整齐.

激活思维 方差反映了数据波动的大小. 当两组数据单位相同，平均数相近时，才可以用方差或标准差的大小说明离散程度（波动大小）的大小. 在实际问题中，体现“波动”的词不尽相同. 如本题中玉米长得齐还是不齐，正是一种波动的体现.

同类变式 1.（无锡市，2001）某班通过一次射击测试，在甲、乙两名同学中选出一名同学代表班级参加校射击比赛. 这两位同学在相同条件下各射靶 5 次，所测得的成绩分别如下（单位：环）：

甲：9.6　9.5　9.3　9.4　9.7

乙：9.3　9.8　9.6　9.3　9.5

根据测试成绩，你认为应该由_____代表班级参赛.

解 因为 $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}(9.6+9.5+9.3+9.4+9.7)=9.5$，

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}(9.3+9.8+9.6+9.3+9.5)=9.5$，

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}[(9.6-9.5)^2+(9.5-9.5)^2+(9.3-9.5)^2+(9.4-9.5)^2+(9.7-9.5)^2]$

$=0.02$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}[(9.3-9.5)^2+(9.8-9.5)^2+(9.6-9.5)^2+(9.3-9.5)^2+(9.5-9.5)^2]$

$=0.036$，

因为 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$，

所以甲同学射击的成绩比乙同学稳定.

因此，应填甲.

2. 甲、乙两名战士在相同条件下各射靶 10 次，每次命中的环数分别是：

甲：8,6,7,8,6,5,9,10,4,7

乙：6,7,7,8,6,7,8,7,9,5

(1) 分别计算以上两组数据的平均数；(2) 分别求出两组数据的方差；

(3) 根据计算结果，估计一下两名战士的射击情况.

解　(1) $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}(8+6+7+8+6+5+9+10+4+7)=7$(环)，

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}(6+7+7+8+6+7+8+7+9+5)=7$(环)，

(2) 解法1　由方差公式 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$ 得 $s^2_{甲}=3.0$(环^2)，$s^2_{乙}=1.2$(环^2).

解法2　由方差公式 $s^2=\frac{1}{n}[(x'^2_1+x'^2_2+\cdots+x'^2_n)-n\overline{x'}^2]$ 计算 $s^2_{甲}$，$s^2_{乙}$.

由于两组数据在7左右，所以选取 $a=7$.

$x'_{i甲}=x_{i甲}-7$	1	−1	0	1	−1	−2	2	3	−3	0
$x'^2_{i甲}=(x_{i甲}-7)^2$	1	1	0	1	1	4	4	9	9	0
$x'_{i乙}=x_{i乙}-7$	−1	0	0	1	−1	0	1	0	2	−2
$x'^2_{i乙}=(x_{i乙}-7)^2$	1	0	0	1	1	0	1	0	4	4

所以　$s^2_{甲}=\frac{1}{10}[(x'^2_{1甲}+x'^2_{2甲}+\cdots+x'^2_{10甲})-10\overline{x'}^2_{甲}]$

$=\frac{1}{10}(1+1+0+1+1+4+4+9+9+0-10\times0)$

$=\frac{1}{10}\times30=3.0$(环^2).

同样 $s^2_{乙}=1.2$(环^2).

(3) $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，说明甲、乙两战士的平均水平相当；又因为 $s^2_{甲}>s^2_{乙}$，说明甲战士射击情况波动大，因此乙战士比甲战士射击情况稳定.

思维拓展　1.（江西省，2000）一次实习作业课中，甲、乙两组学生各自对学校旗杆进行了5次测量，所得数据如下表所示：

所测得的旗杆高度(单位：m)	11.90	11.95	12.00	12.05
甲组测得的次数	1	0	2	2
乙组测得的次数	0	2	1	2

现已算得乙组所测得数据的平均数为 $\bar{x}_{乙}=12.00$，方差 $s^2_{乙}=0.002$.

(1) 求甲组所测得数据的中位数与平均数.

(2) 问哪一组学生所测得旗杆高度比较一致？

解 (1) 甲组学生所测得数据的中位数是 12.00，平均数

$$\overline{x}_{甲}=\frac{11.90+2\times12.00+2\times12.05}{5}=12.00.$$

(2) $s^2_{甲}=\frac{1}{5}[(11.90-12.00)^2+2\times(12.00-12.00)^2-2\times(12.05-12.00)^2]=0.003.$

因为 $s^2_{甲}>s^2_{乙}$，所以乙组学生所测得的旗杆高度比较一致.

2. (山东淄博，2002) 下面是中国 10 个中心城市 2001 年城市居民最低生活保障标准一览表 (单位，元/人，月)：

城 市	标 准	城 市	标 准
石家庄	182	青 岛	200
沈 阳	195	兰 州	156
南 京	180	拉 萨	170
杭 州	220	西 安	156
济 南	208	南 宁	183

在平均数、众数、中位数、方差这些特征数中，能反映这 10 个中心城市 2001 年城市居民最低生活保障标准的特征数是_____ (只需填出符合条件的一个即可).

解 方差是反映数据波动大小的特征数，而平均数、众数、中位数是反映数据集中趋势的特征数. 需要指出的是，只有当一组数据中不少数据多次重复出现时，众数才具有代表性，才能用它来描述这组数据的集中趋势. 显然本组数据的众数 156 元只出现 2 次，不能很好地反映 10 个中心城市居民最低生活保障标准. 故只有用平均数或中位数来客观反映，

平均数算得 $\overline{x}=185$ 元，中位数确定为 182.5 元.

3. (山东省济南市，2002) 某校从甲、乙两名优秀选手中选 1 名选手参加全市中学生田径百米比赛. 该校预先对这两名选手测试了 8 次，测试成绩如下表：

	1	2	3	4	5	6	7	8
选手甲的成绩 (s)	12.1	12.2	13	12.5	13.1	12.5	12.4	12.2
选手乙的成绩 (s)	12	12.4	12.8	13	12.2	12.8	12.3	12.5

根据测试成绩，请你运用所学过的统计知识做出判断，派哪一位选手参加比赛更好？为什么？

解　用样本方差的大小可以衡量甲、乙两名优秀选手百米赛成绩的稳定性. 分别计算，得$\overline{x}_{甲}=12.5$，$x_{乙}=12.5$，$s^2_{甲}=0.12$，$s^2_{乙}=0.10$.

因为 $s^2_{甲}>s^2_{乙}$，所以虽然甲、乙两人的平均成绩相等，但是乙的成绩较稳定，应该派乙选手参加比赛.

【例 4】　(荆门市，2001) 初三 (1) 班分甲、乙两组各选 10 名学生进行数学抢答赛，共有 10 道选择题，答对 8 题 (含 8 题) 以上为优秀，各组选手答对题统计如下：

答对题数	5	6	7	8	9	10	平均数 ($\overline{x}$)	中位数	众数	方差 (s^2)	优秀率
甲组选手	1	0	1	5	2	1	8	8	8	1.6	80%
乙组选手	0	0	4	3	2	1					

请你完成上表，再根据所学的统计知识，从不同方面评价甲、乙两组选手的成绩.

思维技巧　这道统计题设计得新颖别致，结论具有开放性. 要正确解答此题，首先要审好题，明确解题目标，要抓住“根据所学过的统计知识，……判断……谁优谁次，并说明理由”，否则会觉得无从下手；其次，要组织“判断”的结论，从平均数、中位数、众数、方差、优秀率比较几个方面去计算，分析.

解　乙组选手的各种数据依次是 8，8，7，1.0，60%.

以下从四个方面给出具体评价：

(1) 从平均数、中位数看都是 8 题，成绩均等；

(2) 从众数看，甲组 8 题，乙组 7 题，甲组成绩比乙组成绩好；

(3) 从方差看，甲组成绩差距大，乙组成绩相对稳定，差距不大；

(4) 从优秀率看，甲组优生比乙组优生多.

激活思维　这是一道统计初步的应用题. 其特点是：在没有提示的情况下，要求对甲、乙两组的成绩进行全方位计算和比较，而不是习惯性地从样本方差的大小去分析、决定哪一组的成绩优劣. 本题既要计算统计特征数，又要结合实际去分析. 而且在作出恰当的评估后，还需要组织正确的语言说明结论. 将阅读表格、数据处理、分类比较、分析判断、说理表述等很好地结合在一起，确是一道好题.

同类变式 （甘肃省 2002. 武汉市，2001） 甲、乙两班举行电脑汉字输入速度比赛，参加学生每分钟输入汉字的个数经统计计算后填入下表：

班级	参赛人数	中位数	方差	平均字数
甲	55	149	191	135
乙	55	151	110	135

某同学根据上表分析得出如下结论：① 甲、乙两班学生成绩的平均水平相同；② 乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数（每分钟输入汉字数≥150个为优秀）；③ 甲班的成绩的波动情况比乙班的成绩的波动大. 上述结论正确的是（ ）

A. ①②③ B. ①② C. ①③ D. ②③

解 由表格知$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}=135$. 又因为乙班中位数为 151，甲班中位数是 149，乙班成绩好于甲班成绩. $s^2_{甲}>s^2_{乙}$，甲班成绩比乙班波动大. 所以选 A.

思维拓展 1. （河北省，2002 年）甲、乙两人在相同条件下各射靶 10 次，每次射靶的成绩情况如图 14－8 所示：

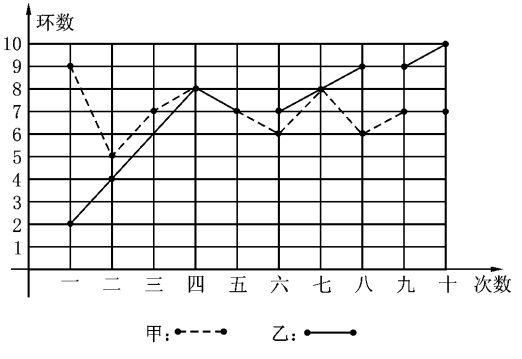


图 14－8

(1) 请填写下表：

	平均数	方差	中位数	命中 9 环以上次数
甲	7	1.2		1
乙		5.4		

(2) 请从下列四个不同的角度对这次测试结果进行分析：

① 从平均数和方差相结合看.

② 从平均数和中位数相结合看 (分析谁的成绩好些).

③ 从平均数和命中 9 环以上的次数相结合看 (分析谁的成绩好些).

④ 从折线图上两人射击命中环数的走势看 (分析谁更有潜力).

解 (1)

	平均数	方差	中位数	命中 9 环以上次数
甲	7	1.2	7	1
乙	7	5.4	7.5	3

(2) ① 因为平均数相同，$s_{甲}^2 < s_{乙}^2$，所以甲成绩比乙稳定.

② 因为平均数相同，甲的中位数＜乙的中位数，所以乙的成绩比甲好些.

③ 因为平均数相同，命中 9 环以上的次数甲比乙少，所以乙的成绩比甲好些.

④ 甲的成绩在平均数上下波动，而乙处于上升势头，从第 4 次以后就没有比甲少的情况发生，乙较有潜力.

2. (南宁市，2002) 甲、乙两班举行电脑汉字输入速度比赛，各选 10 名学生参加. 各班参赛学生每分钟输入汉字个数统计如下表：

输入汉字 (个)	132	133	134	135	136	137	众数	中位数	平均数 ($\bar{x}$)	方差 (s^2)
甲班学生 (人)	1	0	1	5	2	1	135	135	135	1.6
乙班学生 (人)	0	1	4	1	2	2				

请你填写上表中乙班学生的相关数据，再根据所学的统计学知识，从不同方面评价甲、乙两班学生的比赛成绩 (至少从两个方面进行评价).

解：134　134.5　135　1.8　评价：① 从众数看，甲班每分钟输入 135 字的人数最多，乙班每分钟输入 134 字的人数最多. ② 从中位数看，甲班每分

钟输入 135 字以上的人数比乙班多.③ 从方差看，$s^2_{甲} < s^2_{乙}$，甲班成绩波动小，比较稳定.④ 从最好成绩看，乙班速度最快的选手比甲班多 1 人.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (黄冈市，2001) 已知一组数据 1，2，1，0，－1，－2，0，－1，则这组数据的平均数为_____，中位数为_____，方差为_____.

(2) (甘肃省，2001) 甲、乙两人在相同的条件下练习射击，各射靶 5 次，命中的环数加下：

甲：7，8，6，8，6　　乙：9，5，6，7，8

那么两人中射击成绩比较稳定的是_____.

(3) (聊城市，2001) 某农科所在 8 个试验点对甲、乙两种玉米进行对比试验，这两种玉米在各试验点的亩产量如下 (单位：kg)：

甲：450　460　450　430　450　460　440　460

乙：440　470　460　440　430　450　470　440

在这些试验点中_____的产量比较稳定 (填“甲种玉米”或“乙种玉米”).

(4) (上海市，2001) 甲、乙两人比赛飞镖，两人所得平均环数相同，其中甲所得环数的方差为 15，乙所得环数如下：0，1，5，9，10. 那么成绩较为稳定的是_____ (填“甲”或“乙”).

(5) (常德市，2001) 甲、乙两个样本，甲样本的方差是 0.4，乙样本的方差是 0.2，那么甲、乙两个样本稳定性能较好的是_____.

(6) (北京昌平县，2000) 一组数据：1，2，2，4，6. 众数是_____，中位数是_____，平均数是_____，方差是_____.

(7) (湖南省邵阳，2000) 已知样本数据为 2，－1，0，－3，－2，3，1，则样本容量为_____，样本标准差为_____.

(8) (辽宁省，2000) 一名学生军训时连续射靶 10 次，命中的环数分别为：4，7，8，6，8，6，5，9，10，7. 这名学生射击环数的标准差是_____.

(9) (广东省，2000) 甲、乙两名同班同学的 5 次数学测验成绩 (满分 120 分) 如下：

甲：97　103　95　110　95　　乙：90　110　95　115　90

经计算，他们的平均分是 $\bar{x}_{甲}=100$，$\bar{x}_{乙}=100$；方差是 $s^2_{甲}=33.6$，$s^2_{乙}=55$，则这两名同学在这 5 次数学测验中成绩比较稳定的是_____同学.

(10) (宁夏，2002) 已知一个样本 1，4，2，5，3，那么这个样本的标准差是_____.

(11) (贵阳市，2002) 甲、乙两种产品进行对比试验，得知乙产品比甲产品的性能更稳定，如果甲、乙两种产品抽样数据的方差分别是 $s^2_{甲}$ 与 $s^2_{乙}$，则它们的方差的大小关系是_____.

(12) (黄冈市，2003) 现有 A、B 两个班级，每个班级各有 45 名学生参加一次测验，每名参加者可获得 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这几种不同的分值中的一种. 测试结果 A 班的成绩如下表所示，B 班的成绩如图 14－9 所示.

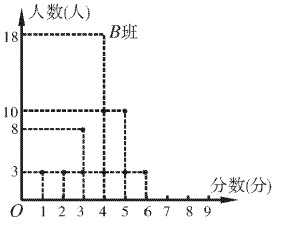


图 14－9

(1) 由观察所得，_____班的标准差较大；

(2) 若两班合计共有 60 人及格，问参加都最少获_____分才可以及格.

A 班

分数 (分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
人数 (人)	1	3	5	7	6	8	6	4	3	2

2. 选择题

(1) (贵阳市，2001) 甲、乙两个样本，甲样本的方差是 0.105，乙样本的方差是 0.055，那么样本 (　　)

A. 甲的波动比乙的波动大　　B. 乙的波动比甲的波动大

C. 甲、乙的波动大小一样　　D. 甲、乙的波动大小无法确定

(2) (南京市，2001) 人数相等的甲、乙两班学生参加了同一次数学测验，班组均分和方差如下：$\bar{x}_{甲}=80$，$\bar{x}_{乙}=80$，$s^2_{甲}=240$，$s^2_{乙}=180$，则成绩较为整

齐的是（　　）

A. 甲班　　B. 乙班

C. 两班一样整齐　　D. 无法确定

⑶ （四川省，2001）某工厂对一个生产小组的零件进行抽样调查．在 10 天中，这个生产小组每天出的次品数如下（单位：个）：

0，2，0，2，3，0，2，3，1，2

在这 10 天中，该生产小组生产零件所出的次品数的（　　）

A. 平均数是 2　　B. 众数是 3

C. 中位数是 1.5　　D. 方差是 1.25

⑷ （厦门市，2001）已知一组数据是 1，5，6，5，5，6，6，6．则下面结论正确的是（　　）

A. 平均数是 5　　B. 中位数是 5

C. 众数是 5　　D. 方差是 5

⑸ （广州市，2001）有甲、乙两种水稻，测得每种水稻各 10 穴的分蘖数后，计算出样本方差分别为 $s^2_{甲}=11$，$s^2_{乙}=3.4$，由此可估计（　　）

A. 甲种水稻分蘖比乙种水稻分蘖整齐

B. 乙种水稻分蘖比甲种水稻分蘖整齐

C. 甲、乙两种水稻分蘖整齐程度相同

D. 甲、乙两种水稻分蘖整齐程度不能比较

⑹ （四川省，2003）某中学人数相等的甲、乙两班同学参加了一次数学测验，班平均分和方差分别为 $\overline{x}_{甲}=82$ 分，$\overline{x}_{乙}=82$ 分；$s^2_{甲}=245$，$s^2_{乙}=190$．那么成绩较整齐的是（　　）

A. 甲班　　B. 乙班

C. 两班一样整齐　　D. 无法确定

⑺ （随州市，仙桃市，2000）甲、乙两个样本，甲的样本方差是 0.096，乙的样本方差是 0.102，那么甲和乙的波动大小是（　　）

A. 甲的波动比乙的波动大

B. 乙的波动比甲的波动大

C. 甲、乙的波动大小一样

D. 甲、乙的波动大小无法比较

⑻ （孝感市，2000）某校体卫组对甲乙两班学生进行一分钟跳绳次数测试，测试的有关统计数据如下表：

班级	测试人数	平均次数	中位数	众数	方差
甲班	50	136	120	132	151
乙班	50	135	123	132	128

下列判断错误的是（　　）

A. 甲班学生成绩比乙班学生成绩波动大

B. 若每分钟跳 120 次作为达标成绩，则乙班的达标率不低于甲班的达标率

C. 将甲班学生成绩按从高到低的顺序排列，则处在中间位置的成绩是每分钟跳 132 次

D. 甲班成绩数据的标准差比乙班成绩数据的标准差大

(9)（重庆市，2002）已知一组数据 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数是 2，方差是 $\frac{1}{3}$，那么另一组数据 $3x_1-2,3x_2-2,3x_3-2,3x_4-2,3x_5-2$ 的平均数和方差分别是（　　）

A. $2,\frac{1}{3}$　　B. 2，1　　C. $4,\frac{2}{3}$　　D. 4，3

(10)（盐城市，2002）如果将一组数据中的每一个数据都加上同一个非零常数，那么这组数据的（　　）

A. 平均数和方差都不变　　B. 平均数不变，方差改变

C. 平均数改变，方差不变　　D. 平均数和方差都改变

(11)（四川内江，2002）甲乙两人在相同情况下，各射靶 10 次，两人命中环数的平均数 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}=7$，方差 $s^2_{甲}=3,s^2_{乙}=2$，则射击成绩较稳定的是（　　）

A. 甲　　B. 乙

C. 一样　　D. 不能确定

(12)（荆州市，2002）甲、乙两名学生在参加今年体育中考前各作了 5 次立定跳远测试，两人的平均成绩相同，其中甲所测得成绩的方差是 0.005，乙所测得的成绩如下：2.20 m，2.30 m，2.30 m，2.40 m，2.30 m，那么甲、乙的成绩比较：（　　）

A. 甲的成绩更稳定　　B. 乙的成绩更稳定

C. 甲、乙的成绩一样稳定　　D. 不能确定谁的成绩更稳定

(13)（厦门市，2000）在某次体育活动中，统计甲、乙两班学生每分钟跳绳的成绩（单位：次）情况如下表：

班级	参加人数	平均次数	中位数	方差
甲班	55	135	149	190
乙班	55	135	151	110

下面有 3 个命题：

① 甲班学生的平均成绩高于乙班学生的平均成绩

② 甲班学生成绩的波动比乙班学生成绩的波动大

③ 甲班学生成绩优秀的人数不会多于乙班学生成绩优秀的人数 (跳绳次数≥150 次为优秀)，则正确命题是 (　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ②和③

3. (福建省龙岩市，2001) 某班有甲、乙两名同学，他们某学期的五次数学测验成绩如下：

甲：76　84　80　87　73　　乙：78　82　79　80　81

请问哪位同学的数学学习成绩比较稳定？

4. (河北市，1999) 甲、乙两台机床同时加工直径为 10 mm 的零件，为了检验产品的质量，从产品中随机抽出 6 件进行测量，测得数据如下 (单位：mm)

甲机床：99　100　98　100　100　103

乙机床：99　100　102　99　100　100

(1) 分别计算上述两组数据的平均数及方差；

(2) 根据 (1) 中计算结果，说明哪一台机床加工的零件更符合要求.

5. 有甲、乙两个新品种的水稻，在进行杂交配系时要比较出产量较高、稳定性较好的一种，种植后各抽取 5 块田获取数据，其亩产量分别如下表 (单位：kg)

	1	2	3	4	5
甲	52	50	51	49	53
乙	51	51	51	48	54

(1) 哪一种品种平均单产较高？

(2) 哪一种品种稳定性较好？

(3) 据统计，应选哪一种品种做杂交配系？

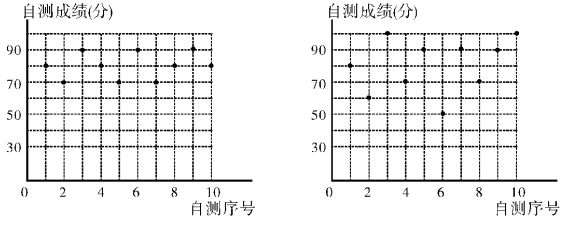
探究能力测试

6．(青岛市，2000) 两台机床同时生产直径为 10 的零件，为了检验产品质量，质量检验员从两台机床的产品中各抽出 4 件进行测量，结果如下：

机床甲	10	9.8	10	10.2
机床乙	10.1	10	9.9	10

如果你是质量检验员，在收集到上述数据后，你将通过怎样的运算来判断哪台机床生产的零件更符合要求？

7．(南通市，2003) 张明、王成两位同学初二学年 10 次数学单元自我检测的成绩 (成绩均为整数，且个位为 0) 分别如下图 14－10 所示：



张明同学　　王成同学

图 14－10

利用图中提供的信息，解答下列问题.

(1) 完成下表：

姓名	平均成绩	中位数	众数	方差 (s^2)
张明		80	80	
王成				260

(2) 如果将 90 分以上 (含 90 分) 的成绩视为优有，则优秀率高的同学是_____；

(3) 根据图表信息，请对你对两同学各提一条不超过 20 个字的学习建议.

8．(广西壮族自治区，2002) 甲乙两名射手在相同条件下打靶，射中的环数分别如图 1、图 2 所示.

利用图 1、图 2 提供的信息，解答下列问题：

(1) 填空，射手甲射中环数的众数是_____，平均数是_____；射手

乙射中环数的众数是_____,平均数是_____.

⑵ 如果要从甲、乙两名射手中选一名去参加射击比赛,应选谁去?简述理由.

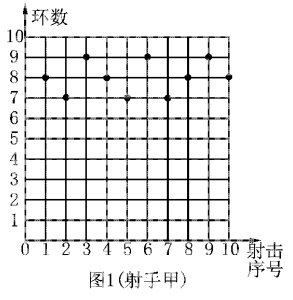


图1(射手甲)

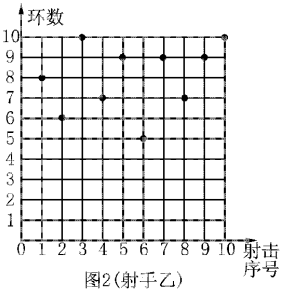


图2(射手乙)

图 14－11

14.4 用计算器求平均数、标准差与方差

学点探究分析

重点 用计算器求平均数、标准差与方差.

难点 熟练使用科学计算器处理有关数据.

由于计算机和计算器的出现和不断改进,使得处理数据的统计学得到了飞速的发展和广泛的应用.通过对本节的学习,可帮助学生进一步认识用计算器的优越性,从而更有利于计算器的普及.

用计算器处理有关数据的问题,将是未来中考命题的热点之一.

学习方法技巧

⑴ 提高运算能力除了笔算能力外,熟练运用计算器进行快捷运算也是一种运算能力.

⑵ 掌握计算器的功能和熟练使用计算器是学好这一节的关键.

⑶ 在计算器统计计算的前提下,可通过比较两组数据的标准差来比较它们的波动大小,而不必再转到相应方差的比较.学会用标准差来衡量一组数据波动大小方法处理实际问题.

能力升级捷径

【例 1】　用计算器求下面一组数据的平均数与标准差.(结果保留到小数点后第 2 位)

9.5　9.5　9.3　9.8　9.4　9.1　9.6　9.5　9.2　9.6

思维技巧　懂得科学计算器的有关基本知识,掌握计算器的使用方法是解此题的关键.

解

按键	显示	说明
1 [MODE]	0.	进入统计计算状态
9.5 [DATA]	1.	输入数据,显示数据个数
9.5 [DATA]	2.	
9.3 [DATA]	3.	
9.8 [DATA]	4.	
9.4 [DATA]	5.	
9.1 [DATA]	6.	
9.6 [DATA]	7.	
9.5 [DATA]	8.	
9.2 [DATA]	9.	
9.6 [DATA]	10.	
[RCL] [$\overline{x}$]	9.45.	这组数据的平均数
[RCL] [σx]	0.196214169.	这组数据的标准差

所以$\overline{x}=9.45$,$s=0.20$.

激活思维　用科学计算器进行统计计算.大体分为三个步骤:建立统计计算状态,输入数据,按键得出所要求的统计量:$\overline{x}$即平均数,σ 即为标准差(s).和上一节利用笔算求平均数,标准差相比较,用计算器非常简便,具有明显的优越性.此题中数据 9.5 出现了 3 次,9.6 出现 2 次,在求和过程中还可用 9.5 [STO] 3 [DATA] 程序运算.

同类变式　用计算器求下面一组数据的平均数与标准差:

9.9　10.3　9.8　10.1　10.4　10　9.8　9.7

解

按键	显示	说明
1 MODE	0	进入统计计算状态
9.9 DATA	1	输入数据,显示数据个数
10.3 DATA	2	
9.8 DATA	3	
10.1 DATA	4	
10.4 DATA	5	
10 DATA	6	
9.8 DATA	7	
9.7 DATA	8	
RCL $\overline{x}$	10	这组数据的平均数
RCL σx	0.234520788	这组数据的标准差

所以 $\overline{x}=10$,$s\approx0.235$.

思维拓展 某厂生产一批 40W 的灯泡,平均使用寿命为 1000h. 现从这批灯泡中随机抽出 12 只灯泡作为样品进行寿命检验,经过试验后,这 12 只灯泡的使用寿命分别为 987,1020,1003,995,1008,1038,980,1025,1014,1002,989,1016h. 求出这批抽检灯泡的寿命平均数和样本标准差.

解

按 键	显示
MODE 1	0
987 DATA 1020 DATA 1003 DADA	
995 DATA 1008 DATA 1038 DATA	
980 DADA 1025 DATA 1014 DATA	
1002 DATA 989 DADA 1016 DATA	
	12
RCL $\overline{x}$	1006.416667
RCL σx	16.37812736

所以　$\overline{x}=1006.42$　$s\approx16.4$.

从以上计算结果可以看出，抽样灯泡的平均寿命约为 1006 h. 样本标准差约为 16.4，偏差程度较小.

【例 2】　已知数据：0.65，1.5，−0.3，1.2，0.65，−2.6，3.9，1.2，0.7，1.2，0.65，−0.4，0.65，−0.4，−0.4. 用计算器求 n，$\overline{x}$，$\sum x$，$\sum x^2$，s.

思维技巧　此题数据中出现了负数和重复的数. 首先要学会用计算器处理负数和重复数据. 熟悉计算器的功能和会使用计算器是关键.

解　(1) 建立统计运算状态：

按键 [MODE] 1，显示 0.

(2) 整理数据：

−2.6，0.7，−0.4 (3 个)，−0.3，0.65 (4 个)，1.2 (3 个)，1.5，3.9.

(3) 输入数据：

[MODE] 1

[+/−] [2.6] [DATA] [+/−] [7] [DATA] [+/−] [0.4] [STO] 3 [DATA] [+/−] [3] [DATA] 0.65 [STO] 4 [DATA] 1.2 [STO] 3 [DATA] [1.5] [DATA] 3.9 [DATA].

(4) 计算结果：

	显示
[RCL] [$\overline{x}$]	0.453333333
[RCL] [$\sum x$]	6.8
[RCL] [$\sum x^2$]	31.29
[RCL] [σx]	1.371309188

所以 $n=15$，$\overline{x}=0.453$，$\sum x=6.8$，$\sum x^2=31.29$，$s\approx1.371$.

激活思维　用简捷的方法输入重复的数据，可以大大减少操作步骤，省时省力. 特别是当数据较多、较繁时，用计算器进行统计计算的优越性就会更加明显. 用计算器可以直接求出一组数据的平均数、标准差、容量、数据和及平方和，而不能直接求出方差. 要求方差需要再作一次平方运算.

同类变式　两种不同品种的水稻分别在各自的 6 块实验田上同时进行种植，其产量如下表所示.

假定生产条件相同，试研究这两个品种的收获率，并确定哪一个品种具有较大的稳定性和推广价值.

甲品种		乙品种	
试验田编号	平均亩产 (kg)	试验田编号	平均亩产 (kg)
1	500	1	560
2	475	2	502
3	550	3	448
4	450	4	604
5	525	5	400
6	499	6	456

解

按键 1 (甲品种)：	显　示
MODE 1	"STAT"0
500 DATA 475 DATA 550 DATA	
450 DATA 525 DATA 499 DATA	6
RCL $\overline{x}$	499.8333333
RCL σx	32.27701281
按键 2 (乙品种)：	
MODE 1	"STAT"0
560 DATA 502 DATA 448 DATA	
604 DATA 400 DATA 456 DATA	6
RCL $\overline{x}$	495
RCL σx	69.41421564

对以上计算结果进行对比,可以看出甲品种水稻平均亩产高于乙品种,且样本标准差小于乙品种.说明甲品种的各块实验田的产量都较为接近平均亩产数,即产量较为稳定,所以甲品种水稻比乙品种水稻具有更大的推广

价值.

思维拓展　从某年级学生数学考试中,随机抽取 54 个学生的考分如下:94　72　78　66　71　85　92　80　54　88　50　62　78　60　77

78　89　60　84　82　68　80　80　65　66　67　65　74　71　90

95　84　76　90　78　55　66　64　67　54　75　71　71　71　80

65　83　79　66　62　72　60　48.

求这 54 个数学成绩的平均分、样本方差及样本标准差,并作出以 5 分为间距的分数——人数直方图.

解　(1) 先进行数据处理,将 54 人的分数由低至高进行排列、分组:

48　50　54　54　55　60　60　60　62　62　64　65　65　65

66　66　66　66　67　67　68　71　71　71　71　71　72　72

72　74　75　76　77　78　78　78　78　79　80　80　80　80

82　83　84　84　85　88　89　90　90　92　94　95.

将以上分数以 5 分为间距,分为 10 个组,各组区间的频数为:

(45～50](2),(50～55](3),(55～60](3),(60～65)](6),(65～70](7),(70～75](10),(75～80](11),(80～85](5),(85～90](4),(90～95](3).

注:各区间左端的数据不计入本区间,而计入上区间.

(2) 输入数据

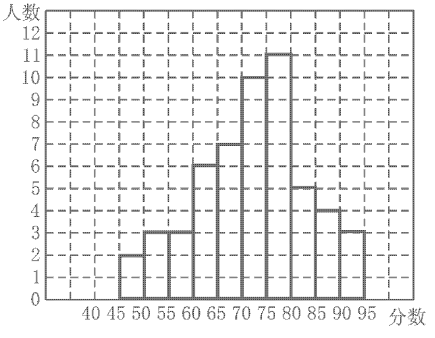
按键：　　显示

MODE 1　48 DATA 50 DATA 54 STO 2 DATA 55 DATA 60 STO 3 DATA 62 STO 2 DATA 64 DATA 65 STO 3 DATA 66 STO 4 DATA 67 STO 2 DATA 68 DATA 71 STO 5 DATA 72 STO 3 DATA 74 DATA 75 DATA 76 DATA 77 DATA 78 STO 4 DATA 79 DATA 80 STO 4 DATA 82 DATA 83 DATA 84 STO 2 DATA 85 DATA 88 DATA 89 DATA 90 STO 2 DATA 92 DATA 94 DATA 95 DATA

(3) 求出计算结果

RCL $\bar{x}$　　72.77777778 (平均分数)

RCL σx　　11.22937066 (样本标准差)



注：以上为以 5 分为间距的分数——人数直方图.

图 14－12

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) 用科学计算器进行统计运算的按键操作步骤有①_____ ②_____ ③_____ ④_____ ⑤_____.

(2) 在统计运算开始之前，先按_____键，使计算器进入统计运算状态.

(3) 求数据 9.3，9.3，9.3，9.3 之和，用计算器计算，最好的按键操作是_____.

(4) DATA 键在计算器建立统计运算状态后，是_____功能键.

(5) 在数据输入过程中，若误输入了数字，需要更正，然后重新输入正确数据，不需从头开始输入，应按_____键将其清除.

(6) 计算器进入统计运算状态后，求一组数据：－3，－7，12，10，－4 的和，其操作步骤是_____.

(7) 一般具有统计功能的计算器都可以直接求出一组数据的平均数与标准差，而不能直接求出_____.若要求_____，需要再作一次_____运算.

2. 用计算器分别计算：9.9，10.3，10，9.5，9.7，9.8，10.5，10，10.2，10 的

平均数、标准差.

探究能力测试

3. 某糖厂用甲、乙两台自动打包机包装糖果，开工后从所打的包中各抽出 9 包，称得重量如下 (单位：kg)

甲：99.3　98.7　98.5　100.5　99.7　99.5　102.1　100.5　101.5

乙：99.2　100.5　100.3　100.8　99.6　99.4　101.7　99.5　99.0

用计算器分别计算上面两个样本的平均数和方差，如果每包标准重量为 100kg，试说明采用哪台打包机包糖果，重量较符合标准.

4. 某中学生射击队要从甲、乙、丙三位射手中选拔一名参加某项比赛，选拔时在相同的条件下各射击 10 次，各人命中的环数如下：

甲：10　10　9　10　9　9　9　9　9　9

乙：10　10　10　9　10　8　8　10　8　8

丙：10　9　8　10　8　9　10　9　9　9

问应选哪一名选手参加比赛？请你用计算器计算说明之.

14.5　频率分布

学点探究分析

重点　绘制频率直方图.

难点　决定组距与组数.

探究点　涉及频率分布的试题常以社会热点为背景，形式多样，综合性较强. 近来出现了很多图、文、表结合的试题 对创新意识和实践能力要求较高.

学习方法技巧

(1) 直方图的特点是利用长方形面积的大小来反映频率的大小. 首先要掌握几个等量关系：① 各小组的频数之和等于数据总数；② 各小组的频率之和等于 1；③ 各组组距相等，即每个小长方形的宽都相等；④ 各小长方形的高 $=\frac{\text{频率}}{\text{组距}}=\frac{1}{\text{组距}\times\text{数据总数}}\times$ 频数，即小长方形的高与该组频数成正比；⑤ 小长方形的面积之和等于各小组的频率和 1.

(2) 依照课本中画直方图的五个步骤，对数据细心地整理，方能画出频率分布直方图.

(3) 组距的大小依赖于组数的多少,常分 5～12 组.

(4) 学会综合处理问题.

能力升级捷径

【例 1】 某中学同年级 40 名男生的体重数据如下 (单位:kg):

61 60 59 59 59 58 58 57 57 57 57 56 56 56 56 56
56 56 55 55 55 55 54 54 54 54 53 53 52 52 52 52
52 51 51 51 50 50 49 48

列出样本的频率分布表,绘出频率分布直方图.

思维技巧 本题考查列频率分布表和频率分布直方图的绘制.掌握绘图步骤,决定组距和组数是关键.在实际绘图时,如果通过计算各个频率与组距的比值去确定相应各个小长方形的高,是十分麻烦的.但利用小长方形的高与频数成正比这一性质,可使画图方法简便,即:如果用某一长度 h 表示频数为 1 的小长方形的高,那么频数为 k 的小长方形的高就是 kh.在频率分布表中,各组的频率之和等于 1,相应地,在频率分布直方图中,各小长方形的面积之和等于 1.

解 (1) 计算最大值与最小值的差:$61-48=13$;

(2) 决定组距与组数,取组距为 2;

$$\frac{\text{最大值}-\text{最小值}}{\text{组距}}=\frac{13}{2}=6\frac{1}{2},$$

所以共分成 7 组.

(3) 决定分点,使分点比数据多一位小数,并把第 1 小组的分点减小 0.5,即分成如下 7 组:

47.5～49.5 49.5～51.5 51.5～53.5 53.5～55.5 55.5～57.5 57.5～59.5 59.5～61.5

(4) 列出频率分布表如下:

分组	频数	频率
47.5～49.5	2	0.05
49.5～51.5	5	0.125
51.5～53.5	7	0.175
53.5～55.5	8	0.20
55.5～57.5	11	0.275

分组	频数	频率
57.5～59.5	5	0.125
59.5～61.5	2	0.05
合计	40	1.00

(5) 绘出频率分布直方图 (如图 14－13).

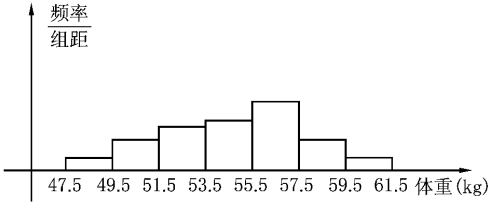


图 14－13

激活思维　分组组数的确定不仅与数据的多少有关,还与数据的取值情况有关,组数取得合适,数据的分布规律会呈现得较为清楚;组数定的不合适,数据的分布规律则呈现得较为模糊. 组数的决定方法是:设数据总数目为 n,一般地,当 $n\leqslant 50$ 则分为 5～8 组;当 $50\leqslant n\leqslant 100$ 则分为 8～12 组较为合适;分点的决定方法是:若数据为整数,则分点数据减去 0.5;若数据是小数点后一位的数,则分点减少 0.05,以此类推.

同类变式　(青岛市 2002) 光明中学为了了解本校中学生的身体发育情况,对某年级同龄的 40 名女学生的身高进行了测量,结果如下 (数据均为整数,单位:cm)

167,154,159,166,169,159,156,162,158,159,160,164,
160,157,161,158,153,158,164,158,163,x,157,162,
159,165,157,151,146,151,160,165,158,163,162,154,
149,168,164.

统计人员将上述数据整理后,列出了频率分布表如下并画出了频率分布直方图 (如图 14－14).

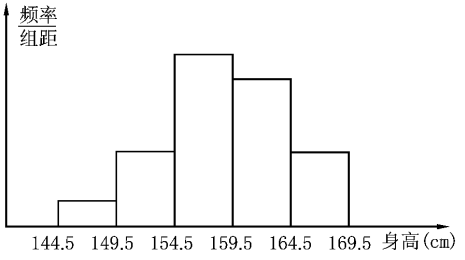


图 14－14

分　组	频数	频率
144.5～149.5	2	0.05
149.5～154.5	A	B
154.5～159.5	14	0.35
159.5～164.5	C	D
164.5～169.5	6	0.15
合　计	40	1

根据以上信息回答下列问题：

(1) 频率分布表中 $A=$_____，$B=$_____，$C=$_____，$D=$_____；

(2) 原数据中，x 的值可能是_____.

解　(1) 由频率分布直方图知，149.5～154.5 与 164.5～169.5 频数相同，所以 $A=6$，$B=0.15$.

$C=40-(2+6+14+6)=40-28=12$.

所以 $D=0.30$.

(2) 由题中 39 个已知数据看，在 149.5～154.5 只有 5 个. 因此 x 必在 149.5～154.5 内. 所以 x 可能为 150 或 151 或 152 或 153 或 154.

思维拓展　1. (黄冈市，2002) 在对某班的一次数学测验成绩进行统计分析，各分数段的人数如图 14－15 所示 (分数取正整数，满分 100 分)，请观察图形，并回答下列问题.

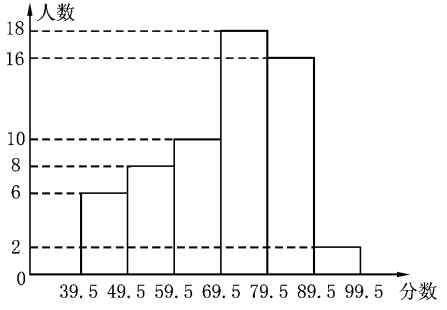


图 14－15

(1) 该班有_____名学生；

(2) 69.5～79.5 这一组的频数是_____，频率是_____

(3) 请估算该班这次测验的平均成绩.

解　(1) 该班共有学生数为 $2+6+8+10+16+18=60$ (人).

(2) 69.5～79.5 这一组的频数为 18. 频率 $=\frac{18}{60}=0.3$.

(3) 平均成绩 $\overline{x}=\frac{45\times6+55\times8+65\times10+75\times18+85\times16+95\times2}{60}$

$=71$ (分).

【例 2】　(辽宁省，2001) 为增强学生的身体素质，某校坚持长年的全员体育锻炼，并定期进行体能测试，如图 14－16 是将某班学生的立定跳远成绩 (精确到 0.01m) 进行整理后，分成 5 组，画出的频率分布直方图的一部分. 已知从左到右 4 个小组的频率分别是 0.05，0.15，0.30，0.35，第 5 小组的频数是 9.

(1) 请将频率分布直方图补充完整；

(2) 该班参加这次测试的学生有多少人？

(3) 若成绩在 2.00 m 以上 (含 2.00m) 的为合格，问该班成绩的合格率是多少？

(4) 这次测试中，你能肯定该班学生成绩的众数和中位数各落在哪一小组内吗？(只需写出能或不能，不必说明理由)

思维技巧　此题是用所学过的统计知识去解决实际问题. 首先根据题

意,把直方图补充完整.再根据频率与频数的关系,求出学生总人数.

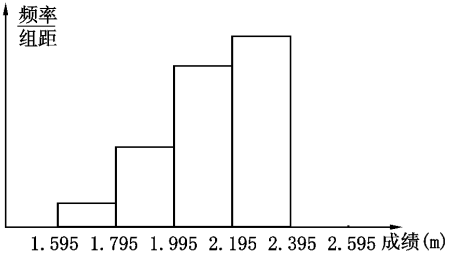


图 14－16

解 (1) 把直方图补充完整 (图 14－17).

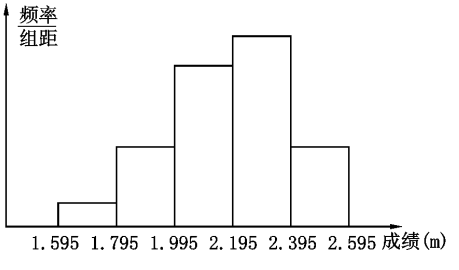


图 14－17

(2) 因为第 5 小组的频率是 0.15,频数是 9,

所以该班参加这次测试学生的人数是 $9\div0.15=60$ (人).

(3) 因为第 3、4、5 组的频率之和为 0.80,所以 该班成绩的合格率为 80%.

(4) 不能肯定众数和中位数各在哪一小组内.

同类变式 1. (黑龙江省,2002) 为了了解初三毕业生的体能情况,某校抽取了一部分初三毕业生进行一分钟跳绳次数测试,将所得数据整理后,画出频率分布直方图 (如图 14－18).图中从左到右各小组的小长方形的面积之比是 2∶4∶17∶15∶9∶3,第二小组的频数为 12.

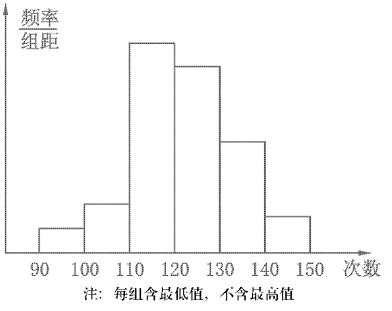


图 14－18

⑴ 填空：第二小组的频率是_____，在这个问题中，样本容量是_____；

⑵ 若次数在 110 以上（含 110 次）为达标，试估计该校初三毕业生的达标率约是多少？

⑶ 在这次测试中，学生跳绳次数的中位数落在哪个小组内？请说明理由.

解　本考题主要考查频率分布直方图，涉及频率与频数等方面的内容.

⑴ 由于频率分布直方图以图形面积的形式，反映了数据落在各个小组内的频率的大小，因此，第二小组的频率应为：

$\frac{4}{2+4+17+15+9+3}=0.08$；

再依据，频率$=\frac{\text{第二小组的频数}}{\text{样本容量}}$，

知，样本容量$=\frac{\text{第二小组的频数}}{\text{第二小组的频率}}=\frac{12}{0.08}=150.$

⑵ 由题图可估计该校初三毕业生的达标率约为$\frac{17+15+9+3}{2+4+17+15+9+3}\times 100\%=88\%$.

⑶ 由已知可得，各小组的频数依次为 6，12，51.45，27，9.

所以前三组的频数之和为 69，前四组的频数之和为 114，而 $69<\frac{150}{2}<114$，

所以学生跳绳次数的中位数落在第四小组内.

2. (河北省,2001) 某班同学参加环保知识竞赛,将学生的成绩 (得分取整数) 进行整理后分成五组,绘成频率分布直方图 (如图 14－19). 图中从左到右各小组的小长方形的高的比是 1∶3∶6∶4∶2,最右边一组的频数是 6. 结合直方图提供的信息,解答下列问题:

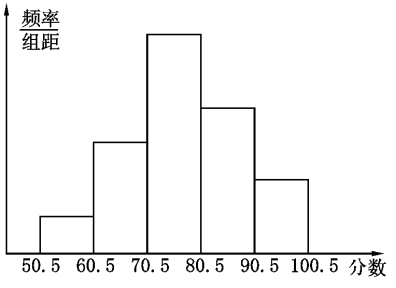


图 14－19

(1) 该班共有多少名同学参赛?

(2) 成绩落在哪组数据范围内的人数最多,是多少?

(3) 求成绩在 60 分以上 (不含 60 分) 的学生占全班参赛人数的百分率.

解 (1) 由直方图的意义可知,小长方形的高的比等于频数的比,由最右边一组的频数为 6,可得各组频数依次为 3,9,18,12,6. 从而共有 $3+9+18+12+6=48$ 个数据,即有 48 名学生参赛.

(2) 成绩落在 70.5～80.5 数据范围内的人数最多,为 18 人.

(3) 60 分以上 (不含 60 分) 的人数为 45 人,占全班参赛人数的百分率为 $(45\div48)\times100\%=93.75\%$.

思维拓展 1. (哈尔滨市,2001) 为了解某中学初中三年级 300 名男学生的身体发育情况,从中对 20 名男学生的身高进行了测量,结果如下:(单位:cm)

175 161 171 176 167 181 161 173 171 177
179 172 165 157 173 173 166 177 169 181

下表是根据上述数据填写的频率分布表的一部分:

分　　组	频数累计	频　数	频　率
156.5～161.5	下	3	0.15
161.5～166.5	丅	2	0.10
166.5～171.5	𠂆下	4	0.20
171.5～176.5	正一		0.30
176.5～181.5	正	5	
合计		20	1.00

(1) 请填写表中未完成的部分；

(2) 样本数据中，男生身高的众数是多少厘米？

(3) 根据表中数据整理与计算回答：该校初中三年级男学生身高在171.5～176.5 (cm) 范围内的人数为多少？

解　(1) 6，0.25

(2) 样本数据中，男生身高的众数是 173 (cm).

(3) 因为　男学生身高在 171.5～176.5 cm 范围内的频率是 0.30，

所以　$300\times0.30=90$ (人)

答 略

2. (苏州市，2001) 为了了解某中学初三年级 250 名学生升学考试的数学成绩，从中抽取了 50 名学生的数学成绩进行分析，求得$\overline{x}_{样本}=94.5$. 下面是 50 名学生数学成绩的频率分布表.

分　组	频数累计	频　数	频　率
60.5～70.5	下	3	a
70.5～80.5	正一	6	0.12
80.5～90.5	正𠂆下	9	0.18
90.5～100.5	正正正丅	17	0.34
100.5～110.5	正正	b	0.2
110.5～120.5	正	5	0.1
合　计		50	1

根据题中给出的条件回答下列问题.

⑴ 在这次抽样分析的过程中，样本是_____；

⑵ 频率分布表中的数据 $a=$_____，$b=$_____；

⑶ 估计该校初三年级这次升学考试的数学平均成绩约为_____分；

⑷ 在这次升学考试中，该校初三年级数学成绩在 $90.5\sim100.5$ 范围内的人数约为_____人.

解 ⑴ 50 名学生的数学成绩；

⑵ 由图表知，$a=\frac{3}{50}=0.06$，$b=10$；

⑶ 因为 $\overline{x}_{样本}=94.5$，

所以估计该校初三年级这次升学考试的数学平均成绩约为 94.5 分；

⑷ 由图表知，50 名学生中，在 $90.5\sim100.5$ 中频率为 0.34（17 人），那么在 250 名学生中，在 $90.5\sim100.5$ 范围内的人数约为 $17\times5=85$（人）.

答 略

【例 3】 （济南市，2001）如图 14－20 是某晚报“百姓热线”一周内接到热线电话的统计图. 其中有关环境保护问题的电话最多，共 70 个. 请回答下列问题：

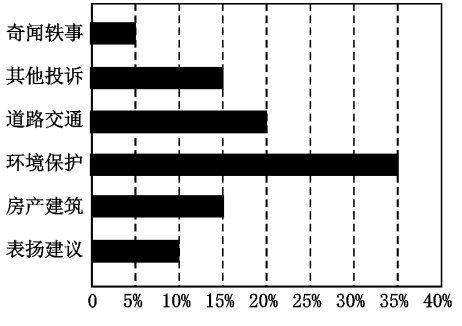


图 14－20

⑴ 本周“百姓热线”共接到热线电话多少个？

⑵ 有关道路交通问题的电话有多少个？

思维技巧 此题是常见的“频率分布直方图问题”，直方图是横着放置的. 识图，读懂题意，善于处理信息和数据是关键.

解　(1) $70 \div 35\% = 200$ (个).

(2) $200 \times 20\% = 40$ (个).

答 本周共接到热线电话 200 个,有关道路交通问题的电话 40 个.

激活思维　将较简单的"频率分布直方图问题"置于"百姓热线"电话新情境之中,并且将直方图横着放置,使题目焕发出新的活力,同时,增加了阅读理解的难度.因而,解答此类题无法套用现成的模式,必须仔细分析题意,积极探索,弄清题中蕴含着的内在联系.

同类变式　(新疆,2001) 如图 14－21,是我国运动员从 1984～2000 年在奥运会上获得奖牌数的统计图,请你根据统计图提供的信息,回答下列问题:

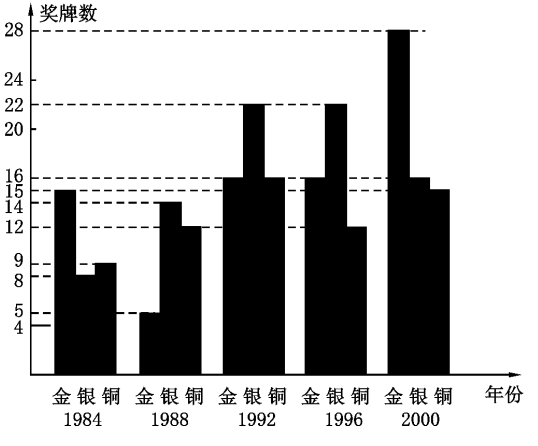


图 14－21

(1) 从 1984～2000 年五届奥运会我国运动员共获奖牌多少枚?

(2) 哪届奥运会我国运动员获得的奖牌总数最多?

(3) 根据以上统计,预测我国运动员在 2004 年奥运会上大约能获得多少枚奖牌?

解　(1) 根据统计图知:

1984 年共获奖牌数:$15 + 8 + 9 = 32$ (枚);

1988 年共获奖牌数:$5 + 14 + 12 = 31$ (枚);

1992 年共获奖牌数：16 + 22 + 16 = 54 (枚)；

1996 年共获奖牌数：16 + 22 + 12 = 50 (枚)；

2000 年共获奖牌数：28 + 16 + 15 = 59 (枚).

因此从 1984～2000 年五届奥运会我国运动员共获奖牌数为 32 + 31 + 54 + 50 + 59 = 226 (枚).

(2) 由 (1) 知，2000 年奥运会我国运动员获得的奖牌最多. (3) 略.

思维拓展 (江西省，2001) 从 2001 年 2 月 21 日 0 时起，中国电信执行新的电话收费标准，其中本地网营业区内通话费是：前 3 min 为 0.2 元 (不足 3 min 的按 3 min 计算)，以后每分钟加收 0.1 元 (不足 1 min 的按 1 min 计算). 上星期天，一位学生调查了 A、B、C、D、E 五位同学某天打本地网营业区内电话的通话时间情况，原始数据如表 1：

表 1

	A	B	C	D	E
第一次通话时间	3 min	3 min 45 s	3 min 55 s	3 min 20 s	6 min
第二次通话时间	0	4 min	3 min 40 s	4 min 50 s	0
第三次通话时间	0	0	5 min	2 min	0

表 2

时间段	频数累计	频数
$0<t\leqslant 3$		
$3<t\leqslant 4$		
$4<t\leqslant 5$		
$5<t\leqslant 6$		

(1) 问 D 同学这天的通话费是多少？

(2) 设通话时间为 t (min)，试根据表 1 填写频数 (落在某一时间段上的通话次数) 分布表 (表 2).

(3) 调整前执行的原电话收费标准是：每 3 min 为 0.2 元 (不足 3 min 的按 3 min 计算). 问：这五位同学这天的实际平均通话费，与用原电话收费标准算出的平均通话费相比，是增多了，还是减少了？若增多，多多少？若减

少，少多少？

解　(1) $(0.2+0.1)+(0.2+2\times0.1)+0.2=0.9$ (元)，

所以 D 同学这天通话费是 0.9 元.

(2) 表 2

时间段	频数累计	频数
$0<t\leqslant3$	丅	2
$3<t\leqslant4$	正	5
$4<t\leqslant5$	丅	2
$5<t\leqslant6$	一	1

(3) 设这五位同学这天的实际平均通话费为 $\overline{x}$ 元，按原电话收费标准算出的平均通话费 $\overline{x'}$ 元，则 $\overline{x}=\frac{1}{5}(2\times0.2+5\times0.3+2\times0.4+0.5)=0.64$，

$\overline{x'}=\frac{1}{5}(2\times0.2+8\times0.4)=0.72$，

$\overline{x'}-\overline{x}=0.72-0.64=0.08$ (元).

所以这五位同学这天的实际平均通话费比按原电话收费标准算出的平均通话费减少了 0.08 元.

综合能力测试

基础能力测试

1. 填空题

(1) (贵阳市，2003) 对某班 50 名学生的数学毕业成绩进行统计，90～99 分的人数有 10 名，这一分数段的频率为_____.

(2) (甘肃省，2003) 为了解中学生的身体发育情况，对某中学同龄的 60 名同学的身高进行了测量. 经统计，身高在 148.5～151.5 之间的频数为 3，则这一组的频为_____.

(3) (河北省，2003) 某中学举行了一次演讲比赛，分段统计参赛同学的成绩，结果如下表：(分数均为整数，满分为 100 分)

分数段 (分)	61～70	71～80	81～90	91～100
人数 (人)	2	8	6	4

请根据表中提供的信息，解答下列各题：

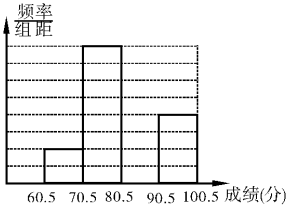


图 14－22

① 参加这次演讲比赛的同学共有_____人；

② 已知成绩 91～100 分的同学为优胜者，那么，优胜率为_____；

③ 所有参赛同学的平得分 M (分) 在什么范围内？答：_____；

④ 将成绩频率分布直方图补充完整.

(4) (盐城市，2001) 甲、乙两个小组各 10 名学生某次数学测验成绩如下 (单位：分)

甲组：76　90　84　86　81　87　86　82　85　83

乙组：82　84　85　89　79　80　91　89　79　74

回答下列问题：

① 甲组数据的众数是_____，乙组数据的中位数是_____；

② 若甲组数据的平均数为 $\overline{x}$，乙组数据的平均数为 $\overline{y}$，则 $\overline{x}$ 与 $\overline{y}$ 的大小关系是_____；

③ 经计算知：$s^2_{甲}=13.2$，$s^2_{乙}=26.36$，$s^2_{甲}<s^2_{乙}$. 这表明_____ (用简要的文字语言表达)；

④ 将甲、乙两组数据并成一组数据后，按照组距 4 分分组时，可以分成以下 5 组：

73.5～77.5，77.5～81.5，81.5～85.5，85.5～89.5，89.5～93.5，则其中 85.5～89.5 这一组的频数是_____，频率是_____.

(5) (常州市，2001) 为了了解小学生的体能情况，抽取了某小学同年级学生进行跳绳测试，将所得数据整理后，画出如图 14－23 所示的频率分布直方图. 已知图中从左到右前三个小组的频率分别是 0.1，0.3，0.4，第一小组的频数为 5，则第四小组的频率是_____，参加这次测试的学生是_____人.

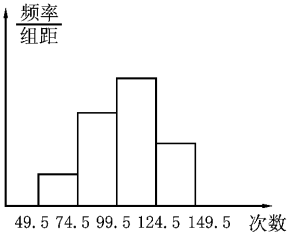


图 14－23

⑹ (宁波市，2001) 初三 (2) 班 50 人的一次考试成绩频率分布直方图如图 14－24，则 71～90 分之间有_____人.

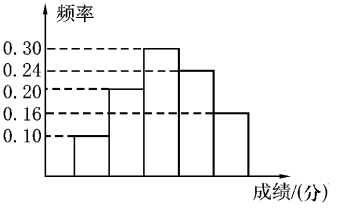


图 14－24

⑺ (鄂州市，2001) 某中学为了了解初二年级数学的学习情况，在全校初二学生中抽取了 50 名进行测试，将所得成绩 (成绩均为整数，满分 100 分) 整理后，列出如下表格，并画出如图 14－25 所示的频率分布直方图.

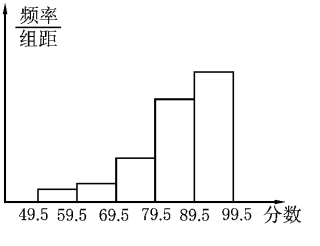


图 14－25

分　组	频　数	频　率
49.5～59.5		0.04
59.5～69.5	3	0.06
	7	0.14
79.5～89.5		
89.5～99.5	21	0.42

① 完成表中未填写的部分；

② 本次测试这 50 名学生的优秀率是多少？(成绩不低于 80 分为优秀)

答：_____.

③ 请你对该校初二年级数学的学习情况作一个简单的评价.

答：_____.

(8) (黄冈市,2000) 已知一个样本含 20 个数据：608　69　70　66　68　65　64　65　69　62　67　66　65　67　63　65　64　61　65　66　在列频率分布表时,如果取组距为 2,那么应分成_____组,64.5～66.5 这一小组的频率为_____,上述样本的样本容量是_____.

(9) (徐州市,2000) 图 14－26 是某班 50 名学生身高的频率分布直方图(精确到 1 cm),从左边起第一、二、三、四个小长方形的高的比是 1∶3∶5∶1.那么,身高 150 cm 以下 (不含 150cm) 的学生有_____人;身高 160 cm 及 160 cm以上的学生占全班学生人数的_____%.

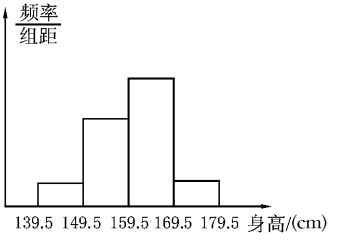


图 14－26

(10) (西安,2000) 初三某班 20 名男同学一次投掷标枪测验成绩如下：

(单位：m)

25　21　23　25　27　29　25　28　30　29

26　24　25　27　26　22　24　25　26　28

根据以上数据填写下面的频率分布表(填补剩余的空格部分)

分　组	频率累计	频数	频率
20.5～22.5	下	2	0.10
22.5～24.5	下	3	0.15
24.5～26.5			
26.5～28.5			
28.5～30.5	下	3	0.15
合计			

(11) (南通市，2002)为了了解小学生的素质教育情况，某县在全县各小学共抽取了200名五年级学生进行素质教育调查，将所得数据整理后，画出频率分布直方图(如图14－27)，已知图中从左到右前4个小组的频率分别为0.04，0.12，0.16，0.4，则第五小组的频数为_____.

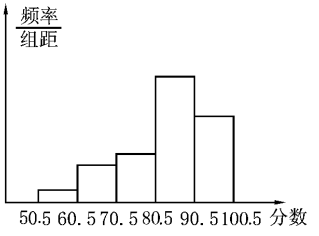
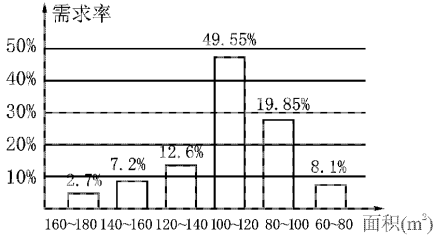


图14－27

(12) (济南市，2002)为了让市场开发出更多适合消费者需求的房屋，以引导理性开发、理性消费. 某房地产营销策划公司对2000位客户的需求进行了调查，并利用专业的软件进行统计分析后，绘出如图14－28所示的消

费者对需求面积的统计分布图 $\left(\text{其中,需求率}=\frac{\text{需求客户数}}{\text{被调查客户总数}}\right)$. 请你观察并计算需求面积在 100～140 (含 140、不含 100) m^2 的客户数是_____.



注:每组面积的取值范围中,含最高值,不含最低值

图 14－28

2. (威海市,2001) 某班有 n 名男同学,他们跳高成绩都在 1.10 m～1.59 m范围内. 如图 14－29 是根据他们跳高成绩绘制的频率分布直方图(不完整),从左至右各小组的频率分别是 0.12,0.20,0.32,…,第二组的频数为 5.

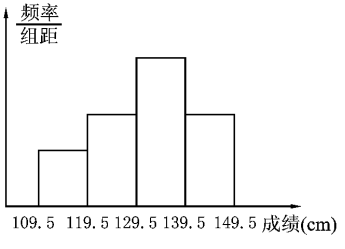


图 14－29

(1) 求 n;

(2) 求跳高成绩超过 1.395 m 的人数;

(3) 将频率分布直方图画完整.

3. (临沂市,2001) 某中学初三年级共 600 名学生,举行了一次数学测验,为了了解这次测验成绩的状况,从中抽取了 50 名学生的成绩,统计情况

见频率分布表.

分　组	频数统计	频数	频率
49.5～59.5	𝍸	4	0.08
59.5～69.5	正𝍸	8	0.16
69.5～79.5	正正	10	0.20
79.5～89.5	正正正—		0.32
89.5～99.5	正正𝍸	12	
合计		50	1.00

(1) 在这个问题中,总体和样本各指什么?

(2) 填写频率分布表中未完成的部分.

(3) 这次测验中该校初三全年级的学生成绩在 69.5～79.5 中的人数约是多少?

4. (昆明市,2003) 明湖区一中对初二年级女生仰卧起坐的测试成绩进行统计分析,将数据整理后,画出如下频率分布直方图,已知图中从左到右的第一、第二、第三、第四、第六小组的频率依次是 0.10、0.15、0.20、0.30、0.05,第五小组的频数是 36,根据所给的图填空:

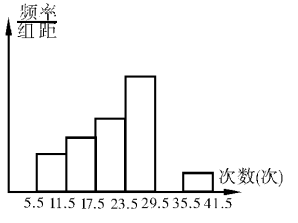


图 14－30

(1) 第五小组的频率是_____,请补全这个频率分布图;

(2) 参加这次测试的女生人数是_____,若次数在 24 (含 24 次) 以上为达标,(此标准为中考体育标准),则该校初二年级女生达标率为_____.

(3) 请你用统计知识,以中考体育标准对明湖区 12 所中学初二女生仰卧起坐成绩的达标率作一个估计.

5. (山西省,2003) 某班同学进行数学测验,将所得成绩 9 得分取整数进

行整理后分成五组，并绘制成频率分布直方图（如图 14－31）．请结合直方图提供的信息，回答下列问题．

⑴ 该班共有多少名学生？

⑵ 80.5～90.5 分这一分数段的频数、频率分别是多少？

⑶ 这次成绩中的中位数落在哪个分数段内？

⑷ 从左到右各小组的频率比是多少？

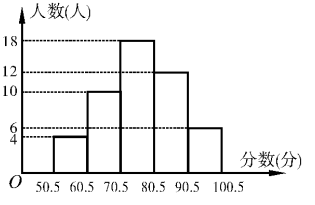


图 14－31

6．（辽宁省，2000）为了了解某中学初中三年级 175 名男学生的身高情况，从中抽测了 50 名男学生的身高，下面是数据整理与计算的一部分：

数据整理与计算	$x_{样本}=164$（cm）频率分布表		
	分　组	频　数	频　率
	147.5～151.5	1	0.02
	151.5～155.5	2	0.04
	155.5～159.5	4	0.08
	159.5～163.5	15	
		16	0.32
	167.5～171.5	5	0.10
	171.5～175.5		0.08
	175.5～179.5	3	0.06
	合计	50	

⑴ 在这个问题中，总体和样本各指什么？⑵ 填写频率分布表中未完

成的部分．(3) 根据数据整理与计算回答下列问题：

① 该校初中三年级男学生身高在 155.5～159.5 (cm) 范围内的人数约为多少？占多大比例？

② 估计该初中三年级男学生的平均身高．

7．(扬州市，2000) 对某班学生一次数学测验成绩进行统计分析，各分数段的人数如图所示 (分数取正整数)，请观察图 14－32 并回答下列问题：

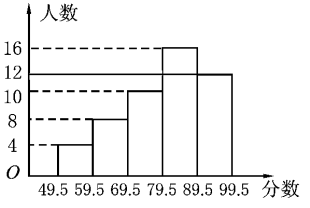


图 14－32

(1) 该班有多少名学生？

(2) 89.5～99.5 这一组的频数、频率分别是多少？

(3) 估算该班这次测验的平均成绩．

探究能力测试

8．(嘉兴市，2003) 某班的联欢会上，设有一个摇奖节目，奖品为钢笔、图书和糖果，标于一个转盘的相应区域上 (转盘被等分为四个区域，如图)．转盘可以自由转动．参与者转动转盘，当转盘停止时，指针落在哪一区域，就获得哪种奖品．则获得钢笔的概率为_____．

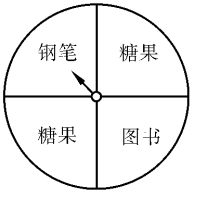


图 14－33

9．(重庆市，2003) 在举国上下众志成城抗击“非典”的斗争中，疫情变化牵动着全国人民的心．请根据下列疫情统计图表回答问题：

(1) 图 14－34 是 2003 年 5 月 11 日至 5 月 29 日全国疫情每天新增数据统计走势图，观察后回答：

① 每天新增确诊病例与新增疑似病人数之和超过 100 人的天数共有

_____天.

中国内地“非典”疫情新增数据走势图
（2003年5月11日至5月29日）

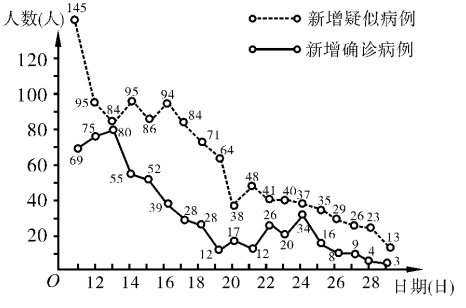


图 14－34

② 在本题的能统计中，新增确诊病例的人数的中位数是_____.

③ 本题在对新增确诊病例的统计中，样本是_____，样本容量是_____.

⑵ 下表是我国一段时间内全国确诊病例每天新增的人数与天数的频率统计表.（按人数分组）

每组人数	0～9	10～19	20～29	30～39	40～49	50～59
频数		4	5	1	0	2
频率	0.275	0.1		0.025	0	0.05

每组人数	60～69	70～79	80～89	90～99	100 以上	合计
频数	1	1	2	0	13	
频率	0.025	0.1	0.05	0		1.00

① 100 人以下的分组组距是_____.

② 填写本统计表中未完成的空格.

③ 在统计的这段时期中，每天新增确诊病例人数在 80 人以下的天数共

有_____天.

10.（上海市，2000）为制定本市七、八、九年级学生校服的生产计划，有关部分门准备对180名初中男生的身高做调查.现有三种调查方案：

(A) 测量少年体校中180名男子篮球、排球队员的身高；

(B) 查阅有关外地180名男生身高的统计资料；

(C) 在本市的市区和郊县各任选一所完全中学、两所初级中学，在这六所学校有关的年级(1)班中，用抽签的方法分别选出10名男生，然后测量他们的身高.

(1) 为了达到估计本市这三个年级男生身高分布的目的，你认为采用上述哪一种调查方案比较合理，为什么？（答案分别填在空格内）

答 选_____ 理由_____.

(2) 下表中的数据是使用某种调查方法获得的：

初中男生身高情况抽样调查表

人数 / 年级 / 身高(cm)	七年级	八年级	九年级	总计(频数)
143～153	12	3	0	
153～163	18	9	6	
163～173	24	33	39	
173～183	6	15	12	
183～193	0	0	3	

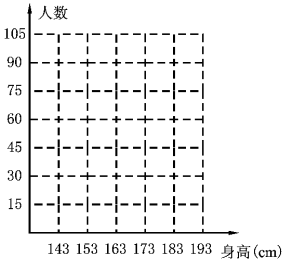


图 14－35

(注：每组可含最低值，不含最高值)

① 根据表中的数据填写表中的空格；

② 根据填写的数据绘制频数分布直方图.

11. (河北省,2000)为了解学生的身高情况,抽测某校 17 岁的 50 名男生的身高,数据如下(单位:m)

身高	1.57	1.59	1.60	1.62	1.63	1.64	1.65	1.66	1.68
人数	1	1	2	2	3	2	1	6	5
身高	1.69	1.70	1.71	1.72	1.73	1.74	1.75	1.76	1.77
人数	8	7	2	3	2	1	2	1	1

若将数据分成 7 组,取组距为 0.03 m,相应的频率分布表是:

分 组	频 数	频 率
1.565～1.595	2	0.04
1.595～1.625	4	0.08
1.625～1.655	6	0.12
1.655～1.685	11	0.22
1.685～1.715	17	0.34
1.715～1.745	6	0.12
1.745～1.775	4	0.08
合计	50	1

请回答下列问题：

(1) 样本数据中,17 岁男生身高的众数、中位数分别是多少？

(2) 依据样本数据,估计这所学校 17 岁的男生中,身高不低于 1.65 m 且不高于 1.70 m 的学生所占的百分比；

(3) 观察频率分布表,指出该校 17 岁的男生中,身高在哪个数据范围内的频率最大,如果该校 17 岁的男生有 350 人,那么在这个身高范围内的人数估计有多少人？

12. (辽宁省,2002)初中生的视力状况受到全社会的广泛关注,某市有关部门对全市 3 万名初中生视力状况进行了一次抽样调查,如图 14－36 是利用所得数据绘制的频数分布直方图(长方形的高表示该组人数),根据图中所提供的信息回答下列问题：

(1) 本次调查共抽测了多少名学生；

(2) 在这个问题中的样本指什么？

(3) 如果视力在 4.9～5.1 (含 4.9、5.1) 均属正常，那么全市有多少初中生的视力正常？

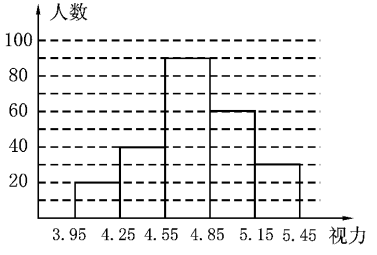


图 14－36

13. (聊城市，2002) 某校初三学生进行毕业体育测试. 下面是根据初三·一班男生的立定跳远成绩 (精确到 0.01 m) 绘制的频率分布直方图 (如图 14－37)，图中从左到右各小长方形的高之比是 1∶2∶5∶6∶4，最后一组的频数是 8. 根据直方图所表达的信息解答下列问题：

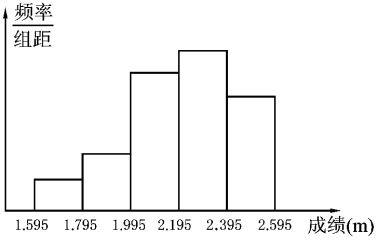


图 14－37

(1) 该班共有多少名男生？

(2) 若立定跳远的成绩在 2.00 m 以上 (包括 2.00 m) 为合格，求该班这项测试成绩的合格率 (精确到 0.1%).

14. (哈尔滨市，2002) 在育民中学举行的电脑知识竞赛中，将初三两个班参赛学生的成绩 (得分均为整数) 进行整理后分成五组，绘制出如下的频

率分布直方图(如图 14－38).已知图中从左到右的第一、第三、第四、第五小组的频率分别是 0.30、0.15、0.10、0.05,第二小组的频数是 40.

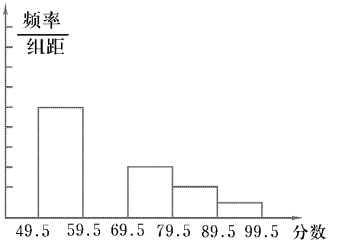


图 14－38

(1) 求第二小组的频率,并补全这个频率分布直方图;

(2) 求这两个班参赛的学生人数是多少;

(3) 这两个班参赛学生的成绩的中位数应落在第几小组内?(不必说明理由)

15. 某班同学参加公民道德知识竞赛,将竞赛所得成绩(得分取整数)进行整理后分成五组,并绘制成频率分布直方图(如图 14－39),请结合直方图提供的信息,解答下列问题:

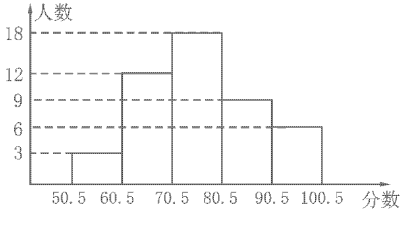


图 14－39

(1) 该班共有多少名学生?

(2) 60.5～70.5 这一分数段的频数、频率分别是多少?

(3) 这次竞赛成绩的中位数落在哪个分数段内?

(4) 根据统计图,提出一个问题,并回答你所提的问题.

16. (云南曲靖,2002)某市实行中考改革,需要根据该市中学生体能的实际状况重新制定中考体育标准,为此,抽取了 50 名初中毕业的女学生进行一分钟仰卧起坐次数测试,测试情况绘制成频率分布直方图(14－40)及表格如下:

次数	6	12	15	18	20	25	27	30	32	35	36
人数	1	1	7	18	10	5	2	2	1	1	2

(1) 求这次抽样测试数据的平均数、众数和中位数.

(2) 根据这一样本数据的特点,你认为该市中考女生一分钟仰卧起坐项目测试的合格标准次数应定多少次较为合适?请简要说明理由.

(3) 根据频率分布直方图,求(0.5～9.5)组的频率.

(4) 根据(2)中你认为合格的标准,试估计该市中考女生一分钟仰卧起坐项目测试的合格率是多少?

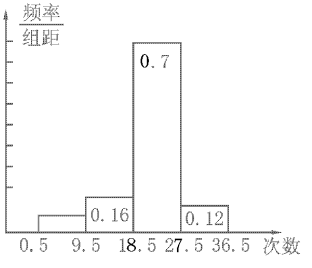


图 14－40

17. (临沂市,2002)某中学初二年级共 200 名学生.学校为了增强学生的环保意识,在本年级进行了一次环保知识测验.为了了解这次测验的成绩状况,从中抽取了 50 名学生的成绩,将所得数据整理后,画出如图 14－41 所示的频率分布直方图,已知:图中从左到右前三个小组的频率分别为 0.1,0.18,0.26.

(1) 在这个问题中,总体和样本各指什么?

(2) 图中第四个小组和第五个小组的频率各是多少?第五个小组的频数是多少?

(3) 这次测验中,初二全年级的学生成绩在 59.5～69.5 中的人数约是

多少？

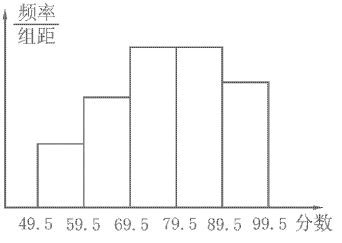


图 14－41

14.6 实习作业

学点探究分析

重点　按照实习作业的一般方法和步骤去完成.

难点　在完成实习作业过程中对有关数据的整理和处理.

探究点　课本知识和课外活动的有机结合是形成应用数学意识最好的方式之一,是时代对数学的要求.如何走出课堂进行调查、收集整理数据,为制定决策提供依据,是一个开放的课题,也是值得探究的问题.

学习方法技巧

首先要有认真、求实、负责的科学态度;其次要学好课本上的有关知识,这两点是学好本节的关键.掌握实习作业的一般方法和步骤也是非常重要的.统计里的实习作业,一般可分为三个步骤:⑴ 确定抽取样本的对象.为了使样本对总体的估计更加精确,所确定的抽取样本的对象应力求具有广泛代表性.⑵ 确定抽取样本的方法并抽取样本.课本在"读一读"中介绍了常用的"随机抽样"、"系统抽样"、"分层抽样"等三种方法.⑶ 计算和分析数据,写出实习报告.要求数据来源于实际、且计算准确无误.只有这样,方能保证结论具有参考价值,从而为作出决策提供依据.做一次实习作业一般分三个阶段.⑴ 做好准备工作.说明实习作业的具体要求,确定抽样的对象等;⑵ 外出抽取样本;⑶ 回校计算和整理数据,填写实习报告等.

能力升级捷径

【例】　完成下面的实习作业.

了解实验中学初中三年级男学生的身高情况.

可从其中的一所学校选取样本,样本容量为 50 ;计算样本平均数,并据此估计当地中学初中三年级男学生的身高 ;列样本频率分布表和绘频率分布直方图.

思维技巧　要解答此题,一是选样要有代表性,即随机抽取. 二是样本的数据收集要力求准确. 即要严格按要求测量 50 名学生的身高,然后按实习作业的一般方法和步骤进行整理、计算和分析、得出结论.

解　可按如下步骤完成上述实习作业:

⑴ 确定抽取样本的对象.

在本例中,确定当地一个初中三年级男学生人数超过了 50 的一所中学作为抽取样本的对象.

⑵ 确定抽取样本的方法并抽取样本.

假设该校初中三年级的男学生共有 193 人,为使所取样本具有客观性,方法较多,这里采取编号抽签法.

具体做法是 :将 193 名男学生依次编上号码 1,2,…,193,通过抽签得到容量为 50 的样本. 再查阅相应的 50 名男学生的身体检查表,抄录其身高数据.

⑶ 计算和分析数据,写出实习报告.

实习报告　　年　月　日

题目	了解当地初中三年级男学生的身高情况.		
具体要求	从其中的一个学校选取容量为 50 的样本 ;计算样本平均数,据此估计总体平均数 ;列频率分布表和绘频率分布直方图.		
样本来源	当地某所中学	样本容量	50
获取样本方法	将该校初中三年级的 193 名男学生依次编上号码 1,2,…,193,通过抽签得到 50 名男学生的编号,到校医疗室查阅他们的身体检查表,抄录其身高数据.		

题目	了解当地初中三年级男学生的身高情况.									
样本数据(单位：cm)	158	163	160	175	167	165	172	155	158	164
	170	166	148	164	171	166	165	162	159	179
	170	163	164	157	155	163	166	169	163	163
	171	161	166	165	164	167	169	172	173	154
	149	169	163	161	163	166	164	177	163	150

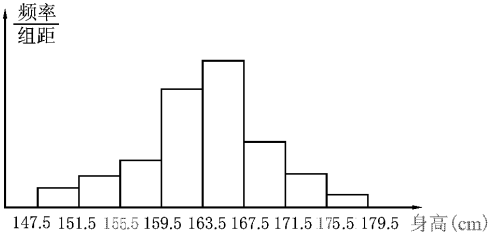
数据整理与计算

$\overline{x}_{样本} = 164$ (cm)

分组	频数累计	频数	频率
147.5～151.5	下	3	0.06
151.5～155.5	下	3	0.06
155.5～159.5	正下	4	0.08
159.5～163.5	正正下	12	0.24
163.5～167.5	正正正	15	0.30
167.5～171.5	正下	7	0.14
171.5～175.5	正下	4	0.08
175.5～179.5	下	2	0.04
合计		50	1.00

数据整理与计算

频率分布直方图：



(续上表)

结论	根据样本平均数可以估计,该地初中三年级男学生的平均身高约为 164 cm. 从样本频率分布表可以看到样本数据的分布情况.
负责人及参加人员	
计算者及复核者	
指导教师审核意见	
备注	

激活思维　实习作业是一种数学实践活动.首先要有一种认真、求实负责的态度;其次是如何把课本知识用于实践.例如:应该如何抽取样本、如何分析数据、如何写实习报告等问题,值得去探究.

同类变式　了解本校初中三年级学生(必要时将男生、女生分开)的某种数量指标(如体重、视力、某科考试成绩、某项体育运动成绩、每天课外学习时间等).要求用适当方法抽取一个容量为 50 的样本;求样本平均数,并据此估计相应的总体平均数;列频率分布表和绘频率分布直方图.

解　略.

综合能力测试

了解周围社会生活中的某项数量指标(如工厂某种零件的尺寸、某农作物的单株产量、某商店的日营业额、某路口的车流量等).要求用适当方法抽取一个容量为 40 的样本;计算样本平均数,并据此估计相应的总体平均数;列频率分布表和绘频率分布直方图.

答案与提示

第十二章　一元二次方程

12.1　用公式法解一元二次方程

[基础能力测试]

1．(1) 5　$a=2, b=4, c=-1$

(2) $k\neq 3$　一元二次方程中二次项系数 $a\neq 0$.

(3) $x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}, x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$　用公式法求根.

(4) 6　由方程根的定义,将 $x=-2$ 代入原方程,解得 $a=4$,则原方程为 $x^2-4x-12=0$,用配方法得 $(x-2)^2=16$,直接开平方解得另一个根为 $x=6$.

(5) $k=6$　将 $x=-\dfrac{1}{2}$ 代入方程,求出 k 值.

(6) 2,2　将 $x=1$ 代入方程求出 $c=2$,再用公式法解方程 $x^2-3x-2=0$.

(7) $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　用求根公式求方程的根.

(8) $x=-3$　由 $\begin{cases}x^2-9=0\\ x-3\neq 0\end{cases}$ 求得.

(9) $-5, -1$　依题意得方程 $y^2+7y+6=y+1$,解方程 $y^2+6y+5=0$.

(10) 11　由 $x^2+x-2=3$ 得 $x^2+x=5$. 运用整体代换.

(11) $4\sqrt{3}$　将 $x=-1$ 代入方程 $x^2-ax+6=0$,解得 $a=-7$,再将 $a=-7$ 代入 $\sqrt{a^2-1}$ 求值.

(12) 2　当 $x^2+2x-3\neq 0$ 时,解方程 $x^2-3x+3=1$,得 $x=1$ 或 2. 由于当 $x=1$ 时,$x^2+2x-3=0$,零的零次幂无意义,所以 $x=1$ 舍去.

2．(1) C　当 $a=0$ 时,$ax^2+bx+c=0$ 不是一元二次方程,$(x-2)(x+3)=x^2-1$ 整理后没有二次项;$x^2-5\sqrt{x}+4=0$ 不是有理方程. $3x^2-\dfrac{4}{x}+6=0$ 不是整式方程,而是分式方程.

(2) C　用直接开平方法求根. 注意开平方取正负.

(3) D　$(x-1)x=x^2$ 整理后,没有二次项,当 $a=0$ 时,$ax^2+bx+c=0$ 不是一元二次方程. $2x^2+\dfrac{1}{x}+1=$ 不是整式方程.

(4) A　方程两边的每项都要乘以 -1.

(5) C　解不等式 $3a+6>0$ 得 $a>-2$,由一元二次方程定义知 $a\neq 0$. 因此 $a>-2$ 且 $a\neq 0$.

(6) D　由 $x^2+3x+5=9$ 得 $x^2+3x=4$,故 $3x^2+9x=12$.

(7) C　将 $x=2$ 代入方程解得 $a=3$.

(8) B　由题意得 $a^2-1=0$,∴　$a=\pm 1$,又∵　$a-1\neq 0$,∴　$a=-1$.

(9) B　由一元二次方程定义知 $m^2-m-2\neq 0$,解得 $m\neq -1$ 且 $m\neq 2$.

(10) C　由题意得 $a^2+4a-10=11$,解方程 $a^2+4a-21=0$.

(11) B　由一元二次方程的定义知 $\begin{cases}|m|=2\\ m+2\neq 0\end{cases}$ 解得 $m=2$.

(12) A　① 开平方取正负,∴　$x=\pm a$　② 方程变形得 $2x^2-3x+1=0$ 用求根公式得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$　③ 当 4 为斜边时,有 $x^2+3^2=4^2$,解得 $x=\pm\sqrt{7}$,其中 $x=-\sqrt{7}$ 应舍去.

3. (1) 用直接开平方法,$x=\pm\sqrt{2}$.

(2) 用配方法或公式法,$x=7$ 或 $x=-3$.

(3) 用公式法,$x=0$ 或 $-\frac{14}{3}$.　(4) 用公式法:$x=2$ 或 $\frac{1}{2}$.

4. 方程 $(2m^2+m-3)x^{m+1}+5x=13$ 不能是一元二次方程. 因为当指数 $m+1=2$ 时,$m=1$,二次项系数 $2m^2+m-3=0$. $(2m^2+m-3)x^{m-1}+5x=13$ 可能是一元二次方程,因为当 $m-1=2$,即 $m=3$ 时,二次项系数 $2m^2+m-3\neq 0$.

5. $m=4$ 由题意知 $m^2-3m-4=0$　解得 $m=4$ 或 -1. 又因为 $m+1\neq 0$,即 $m\neq -1$,∴　$m=-1$ 舍去.

6. $x_1=0$,$x_2=-3$,$c=0$ 设 x_1 是方程 $x^2-3x+c=0$ 的一个根,则 $-x_1$ 为方程 $x^2+3x-c=0$ 的根,根据根的定义知 $x_1^2-3x_1+c=0$　① 从而,$(-x_1)^2+3(-x_1)-c=0$ 即 $x_1^2-3x_1-c=0$　②　① − ② 得 $2c=0$,$c=0$. 所以 $x^2+3x-c=0$ 为 $x^2+3x=0$,解方程得 $x_1=0$,$x_2=-3$.

7. 当 $a=1$ 时,原方程为 $-2x+1=0$,∴　$x=\frac{1}{2}$. 当 $a<0$ 时,方程无实数根;当 $a=0$ 时,$x_1=x_2=0$. 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时,$x_1=\frac{a+\sqrt{a}}{a-1}$,$x_2=\frac{a-\sqrt{a}}{a-1}$.

【探究能力测试】

8. (1) $x_1=-3, x_2=9$；

(2) 观察表中一列方程两个根的规律知 $x_1=-10, x_2=30$ 是 (1) 中所给出的一列方程中的一个方程的两个根；

(3) $x^2-k\times 2x-k^2\times 3=0$；

(4) ① $x^2+102x-36\times 18=0$ 可写成 $x^2+6x\times 17-6^2\times 18=0$，而 $x^2+17x-18=0$ 两根为 $x_1=1, x_2=-18$. 所以方程 $x^2+102x-36\times 18=0$ 两根为 $6, -108$； ② $x^2-9x+324=0$ 可写成 $x^2-9\times x-9^2\times 4=0$，而方程 $x^2-x-4=0$ 两根为 $\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}$，所以方程 $x^2-9x-324=0$ 的两根为 $\frac{9+9\sqrt{17}}{2}, \frac{9-9\sqrt{17}}{2}$.

12.2 用因式分解法解一元二次方程

【基础能力测试】

1. (1) $x=0$ 或 2 由 $x(x-2)=0$ 得 $x=0$ 或 $x-2=0$.

(2) 8 由 $x^2-7x-8=0$，$(x-8)(x+1)=0$，$x_1=8$；$x_2=-1$. 又 $x+1\neq 0$. 所以 $x=8$.

(3) 3 由 $x^2-x-6=0$ 解得 $x=3$ 或 -2，而 $x+2\neq 0$，∴ $x=3$.

(4) 2 或 -1 由 $(x-2)(x+1)=0$.

(5) 2 或 -6 由 $x^2+4x-12=0$ 得 $(x+6)(x-2)=0$.

(6) 0 由题意知 $x_1=2, x_2=1$. ∴ $x_1-2x_2=2-2\times 1=0$.

(7) $k=4$ 由方程根的定义得 $k^2-8k+16=0$. 解得 $k_1=k_2=4$.

(8) $x_1=1, x_2=-\frac{2}{3}$ 由 $3x^2-x-2=0$ 得 $(3x+2)(x-1)=0$.

(9) $a=1$. 由 $x^2-2x-3=0$ 得 $(x-3)(x+1)=0$ 与 $(x+a)(x-3)=0$ 比较.

(10) 2 或 3 $(x-2)^2=(x-2)\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$.

(11) -2 或 -10 由 $(x+1)(x+3)=15$ 得 $x^2+4x-12=0$ 即 $(x+6)(x-2)=0$，当 $x_1=-6$ 时，$x_2=2$；当 $x_1=2$ 时，$x_2=-6$.

(12) 12，14 或 -14，-12. 设两个连续偶数为 $2n$，$2(n+1)$，依题意有 $2n\cdot 2(n+1)=168$，$n(n+1)=42$，$n^2+n-42=0$，$n=-7$ 或 6. 从而可得解.

2. (1) A 由 $x^2-2x=0$ 得 $x(x-2)=0$ 即 $x_1=2, x_2=2$.

(2) C 由 $x(x+1)(x-2)=0$ 得 $x=0$ 或 $x+1=0$ 或 $x-2=0$.

(3) C　由 $2x(x-3)=5(x-3)$ 得 $(x-3)(2x+5)=0$.

(4) B　由 $x^3-5x^2+6x=0$ 知 $x(x-2)(x-3)=0$.

(5) A　原方程变形为 $(x-a)(x-a-x-a)=0$ 即 $-2a(x-a)=0$，

$\therefore\quad x=a$.

(6) D　由 $6x^2-13x+5=0$ 得 $(2x-1)(3x-5)=0$. $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{5}{3}$，

$(x_1+1)(x_2+1)=4$.

(7) C　直接由一元二次方程根的定义，得 $a^2+ba+a=0$，$a(a+b+1)=0$，$\because\quad a\neq 0$，$\therefore\quad a+b+1=0$. 即 $a+b=-1$.

(8) B　将 $7x^2+5y^2=12xy$ 恒等变形并分解因式，得 $(7x-5y)(x-y)=0\quad\because\quad xy\neq 0$，$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{5}{7}$ 或 $\frac{x}{y}=-1$.

(9) B　由 $m^2-m-2\neq 0$ 得 $(m-2)(m+1)\neq 0$.

(10) C　原方程变为 $(m^2+n^2)^2-(m^2+n^2)-6=0$，

$(m^2+n^2+2)(m^2+n^2-3)=0$. 注意 $m^2+n^2+2\neq 0$.

3. $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$　由 $4x^2-4x-3=0$ 得 $(2x-3)(2x+1)=0$.

4. 2 或 -12　原方程变形为 $y^2+10y-24=0$，即 $(y+12)(y-2)=0$.

5. 1 或 $-\frac{2}{3}$　由 $3x(1-x)=2x-2$ 得 $3x(1-x)+2(1-x)=0$，即 $(1-x)(3x+2)=0$.

6. -1，$-\frac{3}{2}$　原方程变为 $[(2t+1)+2][(2t+1)+1]=0$ 即 $(2t+3)(2t+2)=0$.

【探究能力测试】

7. 设到会人数为 x 人，则 x 个到会的人每人都握 $(x-1)$ 次手，共有 $x(x-1)$ 次，但是当甲握乙的手的时候，乙也就握了甲的手了 这两次握手只算一次. 于是列方程为 $\frac{x(x-1)}{2}=66$. 整理为 $x^2-x-132=0$，$(x-12)(x+11)=0$. $\therefore\quad x_1=12$，$x_2=-11$ (舍去).

8. 1 s 或 4 s. 依题意有 $20=25t-5t^2$，$(t-1)(t-4)=0$.

12.3　一元二次方程根的判别式

【基础能力测试】

1. (1) 有两不等实数根　$\Delta=(-2m)^2-4\times 1\times(-1)=4m^2+4>0$.

(2) $\pm 2\sqrt{2}$　由 $\Delta=m^2-8=0$.

(3) 9　$\Delta=36-4m=0$.

(4) $m<1$ 且 $m\neq0$　由 $\Delta=4-4m>0$ 得 $m<1$，又 $m\neq0$.

(5) $k\geqslant-\frac{1}{4}$ 且 $k\neq0$　由 $\Delta=[-(2k+1)]^2-4k^2\geqslant0$ 与 $k^2\neq0$ 可解得.

(6) $k<-1$　由 $\Delta=4+4k<0$ 解得.

(7) -2　由 $\Delta>0$，解得 $a<\frac{3}{2}$，则 $(a-2)-\sqrt{a^2+16-8a}=|a-2|-|a-4|=2-a+a-4=-2$.

(8) 2　原方程化为 $(2k-1)x^2-8x+6=0$，由 $\Delta=64-4\times6(2k-1)<0$，得 $k>\frac{11}{6}$.

(9) $-\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant1$.　k 的取值范围由 $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\3k+1\geqslant0\end{cases}$ 确定.

(10) 19　由题意得 $c\leqslant\frac{b^2}{4}$，故当 b 分别取 2，3，4，5，6 时，c 的可取值个数分别为：1，2，4，6，6，从而使方程个数为 $1+2+4+6+6=19$ (个).

2. (1) D　由 $\Delta=(m-1)^2\geqslant0$.

(2) D　$\Delta=49-4\times5\times5<0$.

(3) C　$\Delta=36-36k>0$，且 $k\neq0$.

(4) B　$\Delta=(m-3)^2-m^2>0$，$m<\frac{3}{2}$.

(5) C　$\Delta=2-4<0$.

(6) A　注意到 $ac<0$.

(7) D　注意 $m-1\neq0$.

(8) A　注意应用 $a^2+c^2=b^2$.

(9) C　由判别式 $\Delta=(2k-1)^2-4k(k-2)=4k+1$，∵ $k\geqslant-\frac{1}{4}$ 且 $k\neq2$，∴ $\Delta\geqslant0$.

(10) B　由 $\Delta<0$ 得 $k>\frac{13}{12}$.

(11) C　原方程化为 $x^2-ax+a=0$，由 $\Delta=0$，得 $a^2-4a=0$，∴ $a=0$ 或 4.

(12) D　分 $k=0$ 和 $k\neq0$ 讨论.

(13) A　由 $\Delta<0$ 得 $k>\frac{11}{6}$.

(14) B　∵ x_0 是方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根. ∴ $ax_0^2+bx_0+c=0$，$c=-(ax_0^2+bx_0)$，∴ $\Delta=b^2-4ac=b^2+4a(ax_0^2+bx_0)=b^2+4a^2x_0^2+4abx_0=(2ax_0+b)^2$.

3．方程 $x^2-m=2x$ 可化为 $x^2-2x-m=0$

∵　方程有两个不相等的实数根

∴　$\Delta=4+4m>0$．　解得　$m>-1$．

4．略证：当 $m>\frac{9}{8}$ 时，$\Delta=8(m+2)^2-56>8(1+2)^2-56=16>0$．

5．$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$

$=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]$

$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$

∵　a、b、c 为三角形三边，

∴　$b+c+a>0$，$b+c-a>0$，$b-c+a>0$，$b-c-a<0$，

∴　$\Delta<0$．因此原方程没有实数根．

【探究能力测试】

6．∵　方程 $x^2-2x+k+3=0$ 有两个不等实根．

∴　$\Delta=4-4(k+3)>0$，即 $k<-2$．

方程 $(k-1)x^2+2(k+1)x+k+1=0$ 必是一元二次方程．

$\Delta=4(k+1)^2-4(k-1)(k+1)=8k+8$．

∵　$k<-2$，∴　$8k+8<-8<0$，即 $\Delta<0$．

∴　原方程无实数根．

7．由题意知 $\begin{cases}m^2-4\left(n-\frac{3}{4}\right)=0,\\(m+3)^2-4n>0,\\(m+1)^2-4n<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m^2-4n+3=0,&①\\m^2+6m+9-4n>0,&②\\m^2+2m+1-4n<0.&③\end{cases}$

由①得 $4n=m^2+3$，④　把④代入②③并整理，得 $\begin{cases}6m+6>0,\\2m-2<0.\end{cases}$

∴　$-1<m<1$．∵　m 为整数，

∴　$m=0$．把 $m=0$ 代入④得 $n=\frac{3}{4}$．　∴　$m=0$，$n=\frac{3}{4}$．

12.4　一元二次方程的根与系数关系

【基础能力测试】

1．(1) 3　$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

(2) $-2\sqrt{2}$，1

(3) $k=-10$，$x_1=-\frac{1}{2}$　用根的定义先求出 k 值，再利用根与系数关

系求 x_1 或用根与系数关系求 x_1，再用 $x_1+x_2=\frac{-k}{4}$ 求 k 值.

(4) -3　$a^3+a^2b+ab^2+b^3=(a+b)(a^2+b^2)$

$=(a+b)[(a+b)^2-2ab]$.

(5) 2003　$m^2n+mn^2-mn=mn(m+n)-mn$.

(6) 23　由 $\begin{cases}(a+1)+(b+1)=-3,\\(a+1)(b+1)=-3\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a+b=-5,\\ab=1.\end{cases}$

(7) 5　$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1$.

(8) $\frac{3}{4}$　由 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{8}{3}$ 得 $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{8}{3}$.

(9) $\frac{1}{2}$　由 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$ 得 $x_1+x_2=4x_1x_2$.

(10) m^2+4　$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

(11) -4　设 $x_1>x_2$，$x_1-x_2=6$，$(x_1-x_2)^2=36$，$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=36$.

(12) $-\frac{5}{3}<m\leqslant\frac{1}{2}$　注意 $x_1+x_2-4=-3<0$ 和判别式 $\Delta\geqslant 0$.

(13) $y^2-13y+4=0$　$p=-(x_1^2+x_2^2)=-(x_1+x_2)^2+2x_1x_2=-13$，$q=(x_1x_2)^2=4$.

(14) -1，由 $x_1^2+x_2^2=3$ 得 $m^2-2m-3=0$，$m=3$ 或 -1，由 $\Delta\geqslant 0$ 知 $m=3$ 应舍去.

(15) 2013　原式 $=2(m^2+n^2)+2n^2-4n+1999=2(m^2+n^2)+2001=2(m+n)^2-4mn+2001=2013$.

2. 选择题

(1) C　由 $x_1+x_2=0$.

(2) A　$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2$.

(3) A　注意 $-p=1+(-2)=-1$，$p=1$.

(4) A　方程 $9b^2+2002b+5=0$ 可化为 $5\left(\frac{1}{b}\right)^2+2002\left(\frac{1}{b}\right)+9=0$，又 $5a^2+2002a+9=0$，$\frac{a}{b}=a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{9}{5}$.

(5) A　$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$.

(6) A　$x_1x_2=-6$，$x_3x_4=3$. 注意两个方程都应有实数根.

(7) D　$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2$.

(8) B

(9) A　$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1$.

(10) B　$\alpha+\alpha\beta+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-\frac{3}{2}-2=-3\frac{1}{2}$.

(11) C　$x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$.

(12) B　$c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=16-2\times\frac{7}{2}=9$. ∴　$c=3$.

(13) D　**方程** $x^2-x+3=0$ **没有实数根**.

(14) D　$a^2+3a+b=(a^2+2a)+(a+b)=2002-2=2000$.

(15) D　$x_1x_2=m-7<0$.

3. $k=\frac{-7-\sqrt{65}}{2}$　**由** $\alpha+\beta=-\frac{2(k-2)}{k}$，$\alpha\beta=\frac{k+4}{k}$**代入** $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=5$，**化简得** $k^2+7k-4=0$，$k=\frac{-7\pm\sqrt{65}}{2}$，∵　$\Delta\geqslant 0$，∴　$k=\frac{-7+\sqrt{65}}{2}$**应舍去**.

4. (1) ∵　$\Delta=b^2-4ac=k^2+8>0$，∴　**原方程有两个不相等的实数根**.

(2) ∵　$x_1+x_2=k$，$x_1\cdot x_2=-2$.　**又**∵　$2(x_1+x_2)>x_1x_2$，

∴　$2k>-2$，∴　$k>-1$.

5. ∵　$2x_1+x_2=7$，**又** $x_1+x_2=k$，　∴　$x_1=7-k$. **将** $x_1=7-k$ **代入原方程，得** $(7-k)^2-k(7-k)+5(k-5)=0$，**整理，得** $k^2-8k+12=0$，**解得** $k=2$ **或** $k=6$. **当** $k=2$ **时，**$\Delta>0$，$x_1\cdot x_2=5(2-5)=-15<0$，**即** x_1、x_2 **异号，不合题意，**∴　$k=2$ **应舍去；当** $k=6$ **时，**$\Delta>0$，$x_1\cdot x_2=5(6-5)>0$ **且** $x_1+x_2=6>0$，**符合题意，**∴　$k=6$ **为所求**.

6. (1) $\Delta=b^2-4ac=(4k+1)^2-4(2k-1)$

$=16k^2+8k+1-8k+4=16k^2+5$.

∵　$k^2\geqslant 0$，∴　$16k^2\geqslant 0$，∴　$16k^2+5>0$.

∴　**此方程有两个不相等的实数根**.

(2) **根据题意，得** $x_1+x_2=-(4k+1)$，$x_2\cdot x_2=2k-1$.

∴　$(x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=(2k-1)+2(4k+1)+4$

$=2k-1+8k+2+4=10k+5$，

即　$10k+5=2k-3$　∴　$k=-1$.

7. (1) $\Delta=[-(k+1)]^2-4\left(\frac{1}{4}k^2+1\right)=2k-3$

∵　$\Delta\geqslant 0$　**即**　$2k-3\geqslant 0$，∴　$k\geqslant\frac{3}{2}$

∴ 当 $k\geqslant\frac{3}{2}$时,方程有两个实数根

(2) 由 $|x_1|=x_2$ ①当 $x_1\geqslant 0$ 时,得 $x_1=x_2$

∴ 方程有两个相等实数根

∴ $\Delta=0$ 即 $2k-3=0$,$k=\frac{3}{2}$

又当 $k=\frac{3}{2}$时,有 $x_1=x_2=\frac{5}{4}>0$

∴ $k=\frac{3}{2}$符合条件;

②当 $x_1<0$ 时,得 $x_2=-x_1$ ∴ $x_1+x_2=0$

由根与系数关系得 $k+1=0$ ∴$k=-1$

由(1)知,与 $k\geqslant\frac{3}{2}$矛盾,∴ $k=-1$(舍去)

综上可得,$k=\frac{3}{2}$

8. (1) 原方程为 $x^2-3x+2-k^2=0$, ∵ $\Delta=9-4(2-k^2)=1+4k^2>0$,∴ 该方程有两个不等实根.

(2) 设方程两根为 x_1,x_2,$(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=2-k^2-3+1=-k^2$, ∵ $k\neq 0$,∴ $-k^2<0$ ∴ 方程一根大于 1,另一根小于 1.

9. (1) 当 $a=0$ 时,方程为 $4x-1=0$,∴ $x=\frac{1}{4}$.

(2) 当 $a\neq 0$ 时,$\Delta=4^2-4a(-1)=16+4a$.

令 $16+4a\geqslant 0$,得 $a\geqslant -4$ 且 $a\neq 0$ 时方程有两个实数根. ①

设方程的两个实数根为 x_1,x_2,

∵ 方程只有正实数根,

∴ $x_1\cdot x_2=-\frac{1}{a}>0$,且 $x_1+x_2=-\frac{4}{a}>0$

解之,得 $a<0$. ②

由①②可得:当 $-4\leqslant a<0$ 时,原方程有两个正实根.

综合(1)(2),当 $-4\leqslant a\leqslant 0$ 时,方程只有正实根.

10. 设方程①的两个实数根为 x_1,x_2. 根据题意,得

$$\begin{cases}x_1+x_2=-3,\\ x_1\cdot x_2=a,\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3.\end{cases}$$

∴　$\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=3$，即$\frac{-3}{a}=3$.　　③

解得 $a=-1$.

经检验，$a=-1$ 是方程③的解，且使方程 $x^2+3x-1=0$ 有实数根.

将 $a=-1$ 代入方程②，得 $(k-1)x^2+3x+2=0$.

当 $k=1$ 时，一元一次方程 $3x+2=0$ 有实数根.

∴　$\frac{k-1}{k-2}=\frac{1-1}{1-2}=0$.

当 $k\neq1$ 时，方程②为一元二次方程，

且 $\Delta=9-8(k-1)\geqslant0$，解得 $k\leqslant\frac{17}{8}$.

又 k 为正整数，且 $k\neq1$，　∴$k=2$.

而 $k=2$ 时，代数式$\frac{k-1}{k-2}$无意义.

综上所述，代数式$\frac{k-1}{k-2}$的值为 0.

11. 由 $x_1^2-x_2^2=0$ 得 $x_1-x_2=0$ 或 $x_1+x_2=0$，

∴　$x_1=x_2$ 或 $x_1+x_2=0$

(1) 当 $x_1=x_2$ 时，

一元二次方程 $x^2-2(m+2)x+2m^2-1=0$ 的根的判别式等于零，即 $\Delta=[-2(m+2)]^2-4\times(2m^2-1)=0$，

整理，得 $m^2-4m-5=0$，解得 $m_1=-1$，$m_2=5$.

(2) 当 $x_1+x_2=0$ 时，$2(m+2)=0$，解得 $m=-2$.

∵　$m=-2$ 时，原方程为 $x^2+7=0$，这个方程没有实数根，

∴　$m=-2$ 不合题意，应舍去.

故所求 m 的值为 $m=-1$ 或 $m=5$.

12. 将已知条件变形为：$\begin{cases}m+(-n)=8,\\ m(-n)=l^2+16,\end{cases}$

故 m，$-n$ 是一元二次方程 $x^2-8x+(l^2+16)=0$ 的两个实数根.

所以判别式 $\Delta=(-8)^2-4(l^2+16)\geqslant0$，

即 $-4l^2\geqslant0$　∴$l^2\leqslant0$，∴　$l=0$，∴　$\Delta=0$.

故原方程变为 $x^2-8x+16=0$，且方程有两个相等的实数根，即 $m=-n$，∴　$m+n+l=0$.

【探究能力测试】

13. (1) $\Delta=(8-4m)^2-16m^2=0$，　$m=1$.

原方程变为 $x^2+4x+4=0$，　∴　$x_1=x_2=-2$.

(2) 不存在. 由 $x_1^2+x_2^2=136$ 得 $m^2-8m-9=0$，

解得 $m_1=-1$ (舍去)，$m_2=9$. 当 $m=9$ 时，$\Delta<0$.

14. 解 (1) 由已知 :可得 $AB+AC=2k+3$，$AB\cdot AC=k^2+3k+2$.

∵　Rt$\triangle ABC$ 中以 BC 为斜边，

∴　$AB^2+AC^2=BC^2$，

即　$(AB+AC)^2-2AB\cdot AC=25$，

∴　$(2k+3)^2-2(k^2+3k+2)=25$.

解得　$k=-5$ 或 $k=2$.

当 $k=2$ 时，方程 $x^2-7x+12=0$，得

$x_1=3$，$x_2=4$.

当 $k=-5$ 时，方程 $x^2+7x+12=0$.

又∵　$AB+AC=-7<0$，不合题意舍去.

∴　当 $k=2$ 时，$\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形.

(2) $\triangle ABC$ 是等腰三角形，则有① $AB=AC$，② $AB=BC$，③ $AC=BC$ 三种情形.

∵　$\Delta=(2k+3)^2-4(k^2+3k+2)=1>0$，

∴　$AB\neq AC$，第①种情况不成立；

当② $AB=BC$ 或③ $AC=BC$ 时，5 是已知方程的根，

∴　$5^2-5(2k+3)+k^2+3k+2=0$，

解之　$k=3$ 或 $k=4$.

当　$k=3$ 时，解 $x^2-9x+20=0$，

得 $x_1=4$，$x_2=5$.

此时等腰三角形周长为 $5+5+4=14$；

当 $k=4$ 时，解 $x^2-11x+30=0$，得

$x_1=5$，$x_2=6$.

此时等腰三角形周长为 $5+5+6=16$.

15. 证明 :设方程 $x^2+3x-m=0$① 的两个实数根是 x_1，x_2，根据题意，

得 $\begin{cases}\Delta_1=3^2-4\times1\times(-m)=9+4m\geqslant0,\\ x_1+x_2=-3,\\ x_1x_2=-m,\\ x_1^2+x_2^2=11.\end{cases}$

解之，得 $\begin{cases} m \geqslant -\frac{9}{4} \\ m = 1. \end{cases}$ ∴　$m = 1$.

把 $m = 1$ 代入方程 $(k-3)x^2 + kmx - m^2 + 6m - 4 = 0$②，得

$$(k-3)x^2 + kx + 1 = 0.$$

(1) 当 $k - 3 = 0$，即 $k = 3$ 时，方程②有一个实数根 $x = -\frac{1}{3}$；

(2) 当 $k - 3 \neq 0$，即 $k \neq 3$ 时，方程②是一元二次方程.

∵　$\Delta_2 = k^2 - 4(k-3) \times 1 = (k-2)^2 + 8 > 0$，

∴　当 $m = 1$ 且 $k \neq 3$ 时，方程②有两个不相等的实数根.

综合 (1)，(2) 得，当方程①的两个实数根的平方和等于 11 时，方程②有实数根.

16. ∵　x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2mx + 3m = 0$① 的两个实数根，

$x_1 + x_2 = 2m$，$x_1 \cdot x_2 = 3m$. ∵　$(x_1 - x_2)^2 = 16$，

∴　$(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 16$，∴ $4m^2 - 12m = 16$.

解得　$m_1 = -1$，$m_2 = 4$.

(ⅰ) 当 $m = -1$ 时，方程① 为 $x^2 + 2x - 3 = 0$.

∴　$x_1 = -3$，$x_2 = 1$.

方程 $x^2 - 2mx + 6m - 9 = 0$② $x^2 + 2x - 15 = 0$.

∴　$x_1' = -5$，$x_2' = 3$. ∵　-5、3 有在 -3 和 1 之间，

∴　$m = -1$ 不合题意，舍去.

(ⅱ) 当 $m = 4$ 时，方程① 为 $x^2 - 8x + 12 = 0$.

∴　$x_1 = 2$，$x_2 = 6$. 方程② 为 $x^2 - 8x + 15 = 0$.

∴　$x_1' = 3$，$x_2' = 5$. ∵ $2 < 3 < 5 < 6$，即 $x_1 < x_1' < x_2' < x_2$，

∴　方程② 的两根都在方程① 的两根之间.

∴　$m = 4$　　综合 (ⅰ)(ⅱ)，$m = 4$.

12.5　二次三项式的因式分解

【基础能力测试】

1. (1) $(x - \sqrt{3})^2$

(2) $m \geqslant 2$ 或 $m \leqslant -2$　由 $\Delta \geqslant 0$ 可得.

(3) $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}$　$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{5}}{2}$，$(2x + 2 - \sqrt{5})(2x + 2 + \sqrt{5})$

(4) $x_1 = \frac{2}{3}y$　$x_2 = -2y$. $(3x - 2y)(x + 2y)$

(5) $3(x-1)(x-2)$ 由 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 知.

(6) $(x-3)(x-4)$ 由 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 比较.

(7) $-(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 注意这里的 $a=-1$.

(8) $(xy-\sqrt{2}-\sqrt{5})(xy-\sqrt{2}+\sqrt{5})$ 把 xy 看作整体.

(9) $k=10$ 由 $\Delta=0$ 可得.

(10) $(x+2y-1)(x+2y-3)$ 把 $(x+2y)$ 看作整体.

2. (1) B $-a_1,-a_2$ 是 $x^2-mx+n=0$ 两根.

(2) C 直接用公式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

(3) D 先用求根公式求出 x_1,x_2,再用 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

(4) D 把 y 看成常数.

(5) B 先求 $3x^2+7x+2=0$ 两根.

(6) D 把 y 看成常数.

(7) D $x_1=3,x_2=-\frac{1}{2}$ 仍是方程 $-2x^2+5x+k=0$ 两根.

(8) C 先求方程 $(m-2)x^2-(2m+1)x-(3m-1)=0$ 两根,再套用公式.

3. (1) $(x-1)(3x-7)$ 方程 $3x^2-10x+7=0$ 两根为 $x_1=1,x_2=\frac{7}{3}$.

(2) $-2\left(x-\frac{4-\sqrt{14}}{2}y\right)\left(x-\frac{4+\sqrt{14}}{2}y\right)$ 把 y 看成 x 的系数.

(3) $(x+3-\sqrt{2})^2$ 重因子要写成幂的形式.

(4) $(x-2)(x-3)\left(x-\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)$ 把 (x^2-5x) 看成整体,注意要分解彻底.

【探究能力测试】

4. -3 或 2 由 $\Delta=0$ 得 k 的方程.

5. 先由 $\Delta_1<0$ 可得 $m<-10$,从而 $\Delta_2=m^2-4(-2m+5)=m^2+8m-20=(m+10)(m-2)>0$.

6. 将 $\sqrt{6}x^2-xy-\sqrt{6}y^2=0$ 分解因式,求得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}y$ 或 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}y$,

∵ $xy>0$, ∴ $x=\frac{\sqrt{6}}{2}y$,即 $2x-\sqrt{6}y=0$, ∴ 原式 $=0$.

12.6　一元二次方程的应用

【基础能力测试】

1．(1) $20(1+x)^2=35$　第一年底为 $20(x+1)$ t，第二年底为 $20(1+x)(1+x)=20(1+x)^2$.

(2) $2(1+x)+2(1+x)^2=8$　第一年投资为 $2(1+x)$ 万元，第二年投资为 $2(1+x)^2$ 万元.

(3) 10%　依题意列方程 $3000(1+x)^2=3630$.

(4) 8 cm　依题意设长为 x cm，则宽为 $(18-x)$ cm，$x(18-x)=65$.

(5) -1，1，3　设三个连续奇数为 $x-2$，x，$x+2$，$(x-2)^2+(x+2)^2=10x$，$x=1$，$x=4$（舍去）.

(6) 15 cm，4 cm　设高为 x cm，则 $\frac{1}{2}(4x-1)\cdot x=30$，$4x^2-x-60=0$，$(x-4)(4x+15)=0$，$x_1=4$，$x_2=-\frac{15}{4}$（舍去）.

(7) 90 cm　设斜边为 $13x$ cm，一条直角边为 $12x$ cm 则有 $(13x)^2-(12x)^2=15^2$　∴　$x=\pm3$（负值舍去）. 所以斜边为 39 cm，直角边为 36 cm.

(8) 6 cm，8 cm　依题意设两直角边分别为 x cm、$(14-x)$ cm，则有 $x^2+(14-x)^2=10^2$，解之 $x_1=6$，$x_2=8$.

2．(1) B　每名学生赠送了 $(x-1)$ 件，x 各学生共赠送 $x(x-1)$ 件.

(2) D　4 月份为 $50(1+x)$ 万元，5 月份为 $50(1+x)^2$ 万元.

(3) B　依题意有 $1\times(1+x)^2=1\times(1+44\%)$.

(4) A　1999 年粮食产量为 $1200(1+x)$ 万斤，2000 年粮食产量为 $1200(x+1)^2$. 注意 x 是一个百分数，不要误选 C.

(5) D　二月营业额为 $200(1+x)$ 万元，三月营业额为 $200(1+x)^2$ 万元.

(6) C　设一个数为 x，则另一个数为 $(-7-x)$，$x(-7-x)=12$.　解之 $x_1=-3$，$x_2=-4$.

(7) D　设平均每次降低成本百分数为 x，则有 $100(1-x)^2=81$.

(8) B　$(1+x)^2=4$.

(9) D　设正方形边长为 x cm，则有 $x(x-2)=48$.

(10) B　解方程 $2x^2-5x+3=0$ 得 $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=1$. 由三角形三边关系知 $x=1$ 不合题意，舍去.

(11) C　设原价为 x，则 $x(1-10\%)^2=a$.

(12) B　另一边长为$\frac{13-x}{2}$cm.

3. 设增长率为 x,则 $[1000(1-10\%)](1+x)^2=1296$,$x=20\%$.

4. 设增长的百分率为 x,$200(1+x)\cdot 50\%\cdot(1+\frac{1}{2}x)=132$,$x=20\%$.

5. 设平均增长率为 x,$100(1-20\%)(1+x)^2=135.2$,$x_1=0.3=30\%$,$x_2=-2.3$(不合题意,舍去).

6. (1) 设水蚀造成的水土流失面积为 x 万 km^2,则风蚀造成的水土流失面积为 $(x+26)$ 万 km^2,依题意,得 $x+(x+26)=356$,解得 $x=165$,

∴　$x+26=191$.

(2) $400+400(1+x)+400(1+x)^2=1324$,解得 $x_1=0.1=10\%$,$x_2=-3.1$(舍去).

7. 设三、四月份平均每月增长率为 x,依题意,得

$60(1-10\%)(1+x)^2=96$,解得 $x_1=\frac{1}{3}\approx 33.3\%$,$x_2=-\frac{7}{3}$(舍去).

8. 设人行步道的宽度为 x m,则 $(80-2x)(60-2x)=3500$,

解得 $x_1=5$,$x_2=65$(不合题意舍去).

9. 设道路的宽度为 x m,则 $(30-2x)(20-2x)=30\times 20\times\frac{1}{2}$,

解得:$x_1=\frac{25-5\sqrt{13}}{2}\approx 3.5$,$x_2=\frac{25+5\sqrt{13}}{2}$(舍去).

10. 设第一次存款的年利率为 x,则 $[500(1+x)-300]\times\frac{3}{5}x=15$,解得 $x=0.1=10\%$,$x_2=-\frac{1}{2}$(舍去).

【探究能力测试】

11. 解:(1) 由题意设 2 月、3 月每月增长的百分率为 x,则有

$25[1+(1+x)+(1+x)^2]=91$,

整理得 $1+(1+x)+(1+x)^2=3.64$,$x^2+3x-0.64=0$.

$\Delta=3^2+4\times 0.64=11.56=3.40^2$,

∴　$x=\frac{-3+3.40}{2}=0.20=20\%$(负根已舍去).

答:2 月、3 月每月增长的百分率为 20%.

(2) 显然,3 月份的生产收入为 $25\times(1+0.2)^2=25\times 1.44=36$(万元).

设治理污染 n 个月后,所投资金开始见成效,

$91+36(n-3)-111\geqslant 20n$,

$16n \geqslant 128$，$n \geqslant 8$.

答 治理污染 8 个月后，所投资金开始见成效.

12. $100x + (100 + 100x)(x + 10\%) = 56$. $x_1 = 0.2$，$x_2 = -2.3$（舍去），

∴ $x = 20\%$，$x + 10\% = 30\%$.

13. (1) $50(1 - 10\%) = 45$（万顷）

(2) $45(1 + x)^2 = 64.8$. $x_1 = 0.2 = 20\%$，$x_2 = -2.2$（舍去）.

14. 从表中可知，1995 年植树 1000 亩，以后每年均比上一年多植树 400 亩.

1995 年实有坡荒地 25200 亩，种树 1400 亩后，实有坡荒地只减少了 $25200 - 24000 = 1200$（亩），因此，每年新产生的坡荒地为 200 亩，即树木实际存活 1200 亩.

设从 1996 年起（1996 年算第 1 年），n 年全县的坡荒地全部植上树，有 $1400n + \frac{n(n-1)}{2} \times 400 - 200n \geqslant 25200$. 即：$n^2 + 5n \geqslant 126$.

估算：当 $n = 8$ 时，$8^2 + 5 \times 8 = 104 \leqslant 126$.

当 $n = 9$ 时，$9^2 + 5 \times 9 = 126$.

故到 2004 年，可将全县所有的坡荒地全部种上树木.

15. 略.

12.7　可化为一元二次方程的分式方程

【基础能力测试】

1. (1) $x^2 - 3x + 2 = 0$，$x = 1$　注意 $2 - x = -(x - 2)$.

(2) $x = 2$　使分母为 0 的 x 的值是方程的增根.

(3) -1　去分母化为整式方程，当 $x = 1$ 时，求 k 的值.

(4) 2　当 $x = 2$ 时，分式方程会出现增根. 仿 (3) 去做.

(5) $y^2 - 5y + 6 = 0$

(6) $2y^2 - 5y + 2 = 0$　系数尽可能化为整数.

(7) $y - \frac{12}{y} - 4 = 0$ 或 $y^2 - 4y - 12 = 0$

(8) $\frac{392}{x} - \frac{392}{x + 40} = 1$.

(9) $\frac{960}{x} - \frac{960}{x + 20} = 4$.

(10) $\frac{90}{x} = \frac{120}{35 - x}$.

(11) 换元　检验.

2．(1) A　$y^2-y=1$.

(2) A　去分母化简得　$x^2-2x-3=0$.

(3) A　设 $y=x^2-x+1$，则 $x^2-x=y-1$.

(4) D　设 $\frac{1}{2x^2-3}=y$. 则 $8x^2-12=4(2x^2-3)=\frac{4}{y}$.

(5) A　$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$.

(6) A　令 $x^2+3x=y$，则原方程可化为 $y^2+2y-3=0$，解得　$y_1=1$，$y_2=-3$.

当 $x^2+3x=-3$ 时，$\Delta=9-12<0$. ∴　$y=1$.

(7) C　设读前一半平均每天读 x 页. 则读后一半平均每天读 $(x+21)$ 页.

(8) A　原计划需要的天数为 $\frac{480}{x}$，实际天数为 $\frac{480}{x+20}$.

(9) A　实际每天生产 $\frac{180}{x}$ 吨.

(10) A　原计划所用天数 $\frac{1200}{x}$，实际所用天数 $\frac{1200}{x+40}$.

(11) A　利用“原计划天数－实际天数＝4”列方程.

(12) B　船在顺流中速度＝$(x+2)$ km/h，船在逆流速度为 $(x-2)$ km/h.

3．(1) $x=-3$　$x=3$ 是增根，舍去.

(2) $x=-\frac{1}{2}$　去分母 $(2x-1)$.

(3) $-\frac{2}{3}$，$-\frac{3}{2}$　设 $\frac{x}{x+1}=y$.

(4) 去分母得 $6-2(x+1)=(x+1)(x-2)$. 整理得

$x^2+x-6=0$.

解得　$x_1=2$，$x_2=-3$.

检验　$x=2$ 是增根.

∴　原方程的根是　$x=-3$

(5) 设 $x^2-3x=y$，

原方程化为 $y+5+\frac{6}{y}=0$.

∴　$y^2+5y+6=0$. 解得 $y_1=-2$. $y_2=-3$.

当 $y=-2$ 时，$x^2-3x=-2$. ∴　$x^2-3x+2=0$.

解得　$x_1=1, x_2=2$，当 $y=-3$ 时，$x^2-3x=-3$　∴ $x^2-3x+3=0$.

∵　$\Delta=9-12<0$，∴　此方程无实数根.

经检验，$x_1=1, x_2=2$ 都是原方程的根.

∴　原方程的根为 $x_1=1, x_2=2$.

⑹ 设 $\frac{x}{x+1}=y$，则原方程变形为 $y^2-2y-8=0$.

解这个方程得：$y_1=4, y_2=-2$.

当 $y=4$ 时，$\frac{x}{x+1}=4$，$x=-\frac{4}{3}$；

当 $y=-2$ 时，$\frac{x}{x+1}=-2$，$x=-\frac{2}{3}$.

经检验：$x_1=-\frac{4}{3}, x_2=-\frac{2}{3}$ 都是原方程的根.

⑺ 原方程可变形为 $2(x^2-2x-1)-\frac{3}{x^2-2x-1}=1$

设 $x^2-2x-1=y$，则原方程变形为

$2y-\frac{3}{y}-1=0$，即 $2y^2-y-3=0$.

解这个方程，得 $y_1=-1, y_2=\frac{3}{2}$.

当 $y=-1$ 时，$x^2-2x-1=-1$，

解这个方程，得 $x_1=0, x_2=2$.

当 $y=\frac{3}{2}$ 时，$x^2-2x-1=\frac{3}{2}$，

解这个方程，得 $x_3=\frac{2+\sqrt{14}}{2}, x_4=\frac{2-\sqrt{14}}{2}$.

检验 把 $x_1=0, x_2=2, x_3=\frac{2+\sqrt{14}}{2}, x_4=\frac{2-\sqrt{14}}{2}$ 代入原方程的分母，分母不等于 0，所以它们都是原方程的根.

所以原方程根是

$x_1=0, x_2=2, x_3=\frac{2+\sqrt{14}}{2}, x_4=\frac{2-\sqrt{14}}{2}$.

⑻ $x=-\frac{1}{3}$　$x=1$ 是增根.

4. 设加快速度后每天生产 x 箱，则原来每天生产 $(x-15)$ 箱，

根据题意，得　$\frac{60}{x-15}+\frac{180}{x}=6$，

去分母，整理，得　$x^2-55x+450=0$，

解这个方程，得 $x_1=45, x_2=10$，

经检验，$x_1=45, x_2=10$ 都是原方程的根，但 $x=10$ 时，$10-15=-5$，负数不合题意，所以只取 $x=45$ 箱.

5．10 台　设原计划每天组装 x 台，则有 $\frac{150}{x}-\frac{150+6}{x+3}=3$.

6．2.5 元　设原来价格为 x 元，则有 $\frac{50}{x}+5=\frac{50}{x-0.5}$.

7．设王老师步行的速度为 x km/h，骑自行车的速度为 $3x$ km/h.

依题意得 $\frac{2\times3+0.5}{3x}=\frac{0.5}{x}+\frac{20}{60}$.

解得 $x=5$.

经检验 $x=5$ 是原方程的根，这时 $3x=15$.

答：王老师步行的速度为 5 km/h，骑自行车的速度为 15 km/h.

8．12 km^2　设实际每年可开发 x km^2. 则有 $\frac{360}{x-2}-\frac{360}{x}=6$.

9．28 个月　设原计划完成这项工程用 x 个月，则有 $(1+12\%)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x-3}$.

10．解法一：设第二次购书 x 本，则第一次购书 $(x-10)$ 本.

由题意，得 $\frac{100}{x-10}+\frac{1}{2}=\frac{150}{x}$，

整理得 $x^2-110x+3000=0$，

解得 $x_1=50, x_2=60$.

经检验，$x_1=50, x_2=60$ 都是原方程的根.

当 $x=50$ 时，每本书的批发价为 $150\div50=3$（元），高于书的定价，不合题意，舍去.

当 $x=60$ 时，每本书的批发价为 $150\div60=2.5$（元），低于书的定价，符合题意.

因此第二次购书 60 本.

$\left(60\times\frac{4}{5}\times2.8+60\times\frac{1}{5}\times2.8\times\frac{1}{2}\right)-150=151.2-150=1.2$（元）.

答：该老板第二次售书赚了 1.2 元钱.

解法二：设第一次购书的批发价为 x 元，则第二次的批发价为 $(x+0.5)$ 元.

由题意，得 $\frac{100}{x}+10=\frac{150}{x+0.5}$，

整理得 $2x^2-9x+10=0$，

解得 $x_1=2.5$，$x_2=2$.

经检验，$x_1=2.5$，$x_2=2$ 都是原方程的根.

当 $x=2.5$ 时，第二次的批发价为 $2.5+0.5=3$（元），高于书的定价，不合题意，舍去.

当 $x=2$ 时，第二次的批发价为 $2+0.5=2.5$（元），低于书的定价，符合题意.

因此第二次购书：$150\div(2+0.5)=60$（本）.

以下解法同解法一.

解法三：设第一次购书 x 本，则第二次购书 $(x+10)$ 本.

由题意，得 $\frac{100}{x}+\frac{1}{2}=\frac{150}{x+10}$，

整理得 $x^2-90x+2000=0$，

解得 $x_1=40$，$x_2=50$.

经检验，$x_1=40$，$x_2=50$ 都是原方程的根.

当 $x=40$ 时，每本书的批发价为 $100\div40=2.5$（元），第二次的批发价为 $2.5+0.5=3$（元），高于书的定价，不合题意，舍去.

当 $x=50$ 时，每本书的批发价为 $100\div50=2$（元），第二次的批发价为 $2.0+0.5=2.5$（元），低于书的定价，符合题意.

因此第一次购书 50 本，第二次购书 $50+10=60$（本）.

以下解法同解法一.

11．5 辆　设此车间在改进技术后每小时装配 x 辆小汽车，依题意，得 $\frac{30}{x-2}-\frac{40}{x}=2$.

12．17 元　设这种新涂料每千克售价 x 元，则甲种涂料每千克的售价为 $(x+3)$ 元，乙种涂料每千克的售价为 $(x-1)$ 元.

依题意，得 $\frac{100}{x+3}+\frac{240}{x-1}=\frac{100+240}{x}$.　解得 $x=17$.

13．设他第一次买了 x 盒这种牛奶.

依题意，得 $(\frac{24}{x}-0.4)(x+2)=24$.

解得 $x_1=-12$（舍），$x_2=10$.

14．设甲班每天植树 x 棵，那么乙班每天植树 $(x+10)$ 棵依题意，得 $\frac{150}{x}=\frac{120}{x+10}+2$

$150(x+10)=120x+2x(x+10)$

$150x+1500=120x+2x^2+20x$

$2x^2-10x-1500=0$　$x^2-5x-750=0$

$(x-30)(x+25)=0$　$x_1=30$ $x_2=-25$

经检验知：$x_1=30$ $x_2=-25$ 都是原方程的解.

但 $x_2=-25$ 不符合题意舍去. ∴当 $x=30$ 时 $x+10=40$

答：甲班每天植树 30 棵，乙班每天植树 40 棵.

15. 设从株洲第一次进货每件为 x 元，则第二次进货每件为 $(x+4)$ 元.

依题意，得 $2\times\frac{8000}{x}=\frac{17600}{x+4}$

解得　$x=40$，

∴　共进衬衫数为：$\frac{8000}{40}+\frac{17600}{44}=600$，

盈利数为 $600\times58-(8000+17600)=9200$（元）.

答：该服装店在这笔生意中盈利 9200 元.

16. 设每盏灯的进价为 x 元，根据题意，得 $4\left(\frac{400}{x}-5\right)-5x=9x$.

解这个方程，得　$x_1=10$，$x_2=-\frac{80}{7}$.

经检验得，这两个根都是原方程的根，但进价不能为负数，所以只取 $x=10$.

答：每盏灯进价为 10 元.

17. 设原计划每天加工 x 万只口罩，根据题意，得 $\frac{19.2}{x}-\frac{19.2}{x+0.4}=4$.

整理，得　$x^2+0.4-1.92=0$.

解得　$x_1=1.2$，$x_2=-1.6$.

经检验可知 x_1，x_2 都是原方程的解，因 $x_2<0$ 不合题意，应舍去.

答：该厂原计划每天加工 1.2 万只口罩.

18.（1）设甲每小时抽水 x m^3，则有 $\frac{960}{x}-\frac{960}{x+20}=4$.　∴　甲每小时抽水 60 m^3，乙每小时抽水 80 m^3.

（2）乙种水泵的总耗电量较小. 在完成灌溉任务的情况下，甲种水泵的耗电量为 $(960\div60)\times2=32$（度）. 乙种水泵的耗电量为 $(960\div80)\times2.5=30$（度）

【探究能力测试】

19.（1）解：$x_1=c$，$x_2=\frac{m}{c}$，

验证：当 $x_1=c$ 时，左边 $=c+\frac{m}{c}=$ 右边，

∴　$x_1=c$ 是原方程的解.

当 $x_2=\frac{m}{c}$ 时，左边 $=\frac{m}{c}+\frac{m}{\frac{m}{c}}=c+\frac{m}{c}=$ 右边，

∴　$x_2=\frac{m}{c}$ 是原方程的解.

(2) 解：原方程可化为 $x-1+\frac{2}{x-1}=a-1+\frac{2}{a-1}$.

由以上结论可知：$x-1=a-1$，或 $x-1=\frac{2}{a-1}$.

∴　$x_1=a$，$x_2=\frac{a+1}{a-1}$.

经检验：$x_1=a$，$x_2=\frac{a+1}{a-1}$ 均为原方程的解.

20. 如图 1.

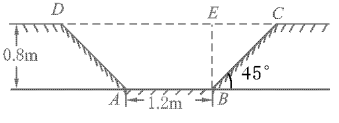


图 1

过 B 作 $BE\perp DC$，垂足为 E，则 $\angle ECB=\angle EBC=45°$，$EC=EB=0.8$.

∴　$DC=2\times0.8+1.2=2.8$ (m).

∴　渠道截面面积 $S=\frac{1}{2}\times0.8\times(2.8+1.2)=1.6$ (m^2).

∴　需挖土 $1.6\times1500=2400$ (m^3).

设原计划每天挖土 x m^3，根据题意，得

$$\frac{2400}{x}-\frac{2400}{x+20}=4.$$

去分母，整理得 $x^2+20x-12000=0$.

解这个方程，得

$x_1=-120$ (舍去)，$x_2=100$.

经检验，$x_2=100$ 是原方程的根.

答：原计划每天挖土 100 m^3.

21．(1) 设甲、乙单独完成此项工程分别需 x 天，y 天．

依题意，得 $\begin{cases}\dfrac{24}{x}+\dfrac{24}{y}=1,\\ \dfrac{20}{x}+\dfrac{40}{y}=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=30,\\ y=120.\end{cases}$

(2) 设单独完成此项工程，甲需费用 m 万元，乙需费用 n 万元，

依题意，得 $\begin{cases}\left(\dfrac{m}{30}+\dfrac{n}{120}\right)\times 24=120,\\ \dfrac{m}{30}\times 20+\dfrac{n}{120}\times 40=110.\end{cases}$

解得 $m=135$，$n=60$．

22．(1) 设 A 型汽车每辆可装计算机 x 台，则 B 型汽车每辆可装计算机 $(x+15)$ 台，依题意，得 $\dfrac{270}{x}=\dfrac{270+30}{x+15}+1$ 解这个方程，得 $x_1=45$，$x_2=-90$ (舍去)．经检验，$x=45$ 是原方程和应用问题的解，∴ $x=45$，$x+15=60$ (台)．

(2) 由 (1) 知，若单独用 A 型汽车运送，需车 6 辆，运费为 2100 元；若单独用 B 型汽车运送，需车 5 辆，运费为 2000 元．若按题设要求同时用 A、B 两种型号的汽车运送，设需用 A 型汽车 y 辆，则需 B 型汽车 $(y+1)$ 辆，根据题意得不等式 $350y+400(y+1)<2000$，解之 $y<\dfrac{32}{15}$．因汽车辆数为正整数，∴ $y=1$ 或 2，当 $y=1$ 时，$y+1=2$，则 $45\times 1+60\times 2=165$ (台) <270 (台)，不合题意；当 $y=2$ 时，$y+1=3$，则 $45\times 2+60\times 3=270$ (台) 符合题意，此时运费为 $350\times 2+400\times 3=1900$ (元)．

答：按这种方案运送计算机需用 A 型汽车 2 辆，B 型汽车 3 辆，运费为 1900 元．

12.8 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组

【基础能力测试】

1．(1) $\begin{cases}x_1=4,\\ x_1=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=0.\end{cases}$ 代入消元．

(2) $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=1\end{cases}$

将 $x+y=5$ 整体代入 $xy-x-y+1=0$ 得 $xy=4$，再用根与系数关系解方程组．

(3) $\begin{cases}x=-2,\\y=5\end{cases}$ 根据方程组解的定义,先求出 m、n 的值,再求方程组.

(4) $x^2-7x+12=0$ 注意一次项系数是 -7.

(5) $k=\frac{9}{4}$ 由方程组得 $y^2-3y-k=0$. 由 $\Delta=0$,求出 k 值.

(6) 13 先求出方程组的解,再确定 a_1,b_1,a_2,b_2 的值.

(7) $m=\frac{1}{2}$, $\begin{cases}x=\frac{1}{4},\\y=1\end{cases}$ 原方程组变为 $y^2-2y+2m=0$. 由 $\Delta=0$ 得 $m=\frac{1}{2}$,解方程组 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=2x+\frac{1}{2}.\end{cases}$

(8) $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\y_2=3\end{cases}$ 利用根与系数关系求出 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的值.

2. (1) D 代入消元法,或检验.

(2) C 原方程组变为 $y^2-my+1=0$,$\Delta=m^2-4$. 当 $m<-2$ 时,$\Delta=m^2-4>0$.

(3) C 先求出 a、b 值.

(4) C 依题意原方程组变为 $\begin{cases}\frac{2}{x}=k,\\\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2},\end{cases}$ $\left(\frac{k}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad k^2=2$,$k=\pm\sqrt{2}$.

(5) C 原方程组变为 $\begin{cases}xy=-3,\\x+y=2.\end{cases}$

(6) A 将 $\begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}$ 代入原方程组得 $\begin{cases}3m-2n=1,\\9m+4n=17.\end{cases}$

(7) A 原方程组变为 $x^2-4x+4m=0$. 由 $\Delta=0$ 得 $m=1$.

(8) B

(9) A

(10) B 原方程组变为 $x^2+6x-(25+k)=0$,由 $\Delta<0$ 求出 k 的范围.

3. $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=3.\end{cases}$ 原方程组变为 $\begin{cases}x+y=1,\\xy=-6.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-3.\\y_2=3.\end{cases}$ 原方程组变为 $\begin{cases}x+y=0,\\x+2y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-y=0,\\x+2y=3.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{2}{5},\\y_2=-\frac{4}{5}.\end{cases}$ 将 $y=-2x$ 代入 $(x-1)^2+y^2=1$.

6. $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=19,\\y_2=9.\end{cases}$ 将 $x=2y+1$ 代入方程 $2x-y^2+6y-11=0$.

7. $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=-1.\end{cases}$ 将 $y=x+1$ 代入 $x^2-2x+3y-5=0$.

8. $\begin{cases}x_1=5,\\y_1=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\y_2=-1.\end{cases}$ 用换元法求出 $\frac{2y}{x}-\frac{x}{y}=1$ 中 $\frac{y}{x}$ 的值，再与方程 $2x-y=5$ 联立.

9. $\begin{cases}x_1=-10,\\y_1=-6;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=5,\\y_2=-1.\end{cases}$ 代入消去 x.

10. (1) $m=1$；

(2) $m<1$；

(3) $m>1$. 原方程组变为 $m^2x^2+2(m-2)x+1=0$，再用判别式.

11. 5 设直角三角形两直角边长为 x，y，依题意有 $\begin{cases}x+y=2\sqrt{14},\\x^2+y^2=36.\end{cases}$

$xy=10$，$\therefore\quad S=\frac{1}{2}xy=5$.

12. $a=\pm4\sqrt{2}$ 当 $a=4\sqrt{2}$ 时，$\begin{cases}x=2\sqrt{2},\\y=-2\sqrt{2};\end{cases}$ 当 $a=-4\sqrt{2}$ 时，$\begin{cases}x=-2\sqrt{2},\\y=2\sqrt{2},\end{cases}$ 原方程组变为 $2x^2-2ax+(a^2-16)=0$. $\Delta=0$ 得 $a^2=32$，$a=\pm4\sqrt{2}$.

13. (1) $a<2$；

(2) $a=2$；

(3) $a>2$. 原方程组变为 $x^2+2(a-3)x+a^2-2a+1=0$，再用判别式.

【探究能力测试】

14. 由①得：$x=-y-k$，③ 把③代入②，得 $y^2+2ky+k^2+2y+2k-y-1=0$，即 $y^2+(2k+1)y+(k^2+2k-1)=0$. 由 $\Delta_1=(2k+1)^2-4(k^2+2k-1)=-4k+5<0$，$\therefore\quad \Delta_2=1^2-4k=1-4k<-4k+5<0$.

15. 把 $y=2x-1$ 代入 $x^2-x-y=0$ 中，得 $x^2-3x+1=0$. 这个方程

的两个根 x_1、x_2 满足 $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=1$.

$\therefore\quad \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{3}{1}=3.$

$\because\quad y_1=2x_1-1$，$y_2=2x_2-1$，

$\therefore\quad y_1\cdot y_2=(2x_1-1)(2x_2-1)=4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1$

$=4\times1-2\times3+1=1.$

12.9　**由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组**

[基础能力测试]

1. (1) $\begin{cases}x^2+y^2=20,\\ x-2y=0;\end{cases}$　$\begin{cases}x^2+y^2=20,\\ x-3y=0.\end{cases}$

(2) $2x+3y=0$，$2x-5y=0$.

(3) $x-2y=0$，$x-y=0$，$\begin{cases}x-2y=0,\\ 3x^2+2xy=20;\end{cases}$　$\begin{cases}x-y=0,\\ 2x^2+2xy=20.\end{cases}$

(4) **二**，$\begin{cases}x-y=0,\\ x^2-y^2-2x=0;\end{cases}$　$\begin{cases}3x+y=0,\\ x^2-y^2-2x=0.\end{cases}$

2. (1) B　**方程组** $\begin{cases}2x-y=0,\\ 3x^2-xy+x+2y+6=0\end{cases}$ **没有解**.

(2) A　**由** $(x-2y)(x-3y)=0$，**得** $x-2y=0$，$x-3y=0$.

(3) C　**当** $x=0$ **时**，$y^2=-2$ **无解**.

(4) B　**原方程组化为** $\begin{cases}y=x^2,\\ (x+2)(x^2-3)=0\end{cases}$ **即** $\begin{cases}y=x^2,\\ x+2=0\end{cases}$ **或** $\begin{cases}y=x^2,\\ x^2-3=0.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x_1=\sqrt{5},\\ y_1=\sqrt{5};\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-\sqrt{5},\\ y_2=-\sqrt{5};\end{cases}$　$\begin{cases}x_3=3,\\ y_3=1;\end{cases}$　$\begin{cases}x_4=-3,\\ y_4=-1.\end{cases}$　**方程组可化为** $\begin{cases}x-y=0,\\ x^2+y^2=10;\end{cases}$　$\begin{cases}x-3y=0,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=-2;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=1;\end{cases}$　**方程组化为** $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ x-y-1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2=5;\\ x-y-5=0.\end{cases}$ **其中** $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ x-y-5=0\end{cases}$ **没有解**.

(3) $\begin{cases}x=0,\\ y=0;\end{cases}$　$\begin{cases}x=2,\\ y=2;\end{cases}$　$\begin{cases}x=2;\\ y=-2.\end{cases}$　**原方程组可化为** $\begin{cases}x-y=0,\\ y^2=2x;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=0,\\ y^2=2x.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-\frac{6}{7},\\y_2=\frac{13}{7};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=\frac{10}{7},\\y_3=-\frac{11}{7}.\end{cases}$ 原方程组可化为 $\begin{cases}x+y-1=0,\\3x^2+4y^2=16;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y-3=0,\\3x^2+4y^2=16.\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x_1=1+\sqrt{5};\\y_1=-3-\sqrt{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1-\sqrt{5},\\y_2=-3+\sqrt{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-1+\sqrt{5},\\y_3=3-\sqrt{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-1-\sqrt{5},\\y_4=3+\sqrt{5}.\end{cases}$ $x^2+2xy+y^2=4$ 可分解为 $(x+y+2)(x+y-2)=0.$

(6) $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{2}{3},\\y_2=-\frac{1}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-\frac{1}{3},\\y_3=\frac{1}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-2,\\y_4=-3;\end{cases}$ 原方程组可化为 $\begin{cases}2x+y-1=0,\\x+y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y-1=0,\\x-y-1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-y+1=0,\\x+y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-y+1=0,\\x-y-1=0.\end{cases}$

4. 设原来买 a m 纯棉布需 x 元,一年后纯棉布价格上调的百分率为 y,依题意有

$\begin{cases}x(1+y)=36,\\(60-x)(1-y)=18.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=24,\\y=\frac{1}{2}.\end{cases}$ (负值已舍去)

答:原来买 a m 纯棉布需 24 元,一年后纯棉布价格上调为 50%.

【探究能力测试】

5. 因式分解　降次　转化　代入　消元

6. 由①、②知:$a\neq\pm1$,否则有三组解或一组解,而且当且仅当 $a=\pm1$ 时,有解 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$,故 $a\neq\pm1$ 时,$x\neq0$ 且 $y\neq0$.

原方程组化为 $y^2+(1-2a)y+a^2-1=0,$　　③

若方程组有两个不同的实数解,则关于 y 的方程③有两种情况:

(1) 方程③有两个相等的实根,且为正数,则 $x=\pm\sqrt{y}$ 有两解,由此得 $a=\frac{5}{4}$.

(2) 方程③有两个不相等的实数根,且两根异号,由 $y_1y_2=a^2-1<0$,

得 $-1<a<1$.

综上所述，当 $a=\frac{5}{4}$ 或 $-1<a<1$ 时，方程组恰有两个不同的实数解.

7. 把所给方程组变形为 $\begin{cases}(x+y)-xy=3,\\xy(x+y)=-2,\end{cases}$

从而由根与系数的关系可知 $\begin{cases}-p-q=3,\\q(-p)=-2.\end{cases}$ 解得 $p=-1, q=-2$ 或 $p=-2, q=-1$.

即所求的一元二次方程为：$z^2-z-2=0$ 或 $z^2-2z-1=0$.

12.10　小结与复习

【基础能力测试】

1. (1) D.

(2) C.

(3) C　∵　$\Delta=(-1)^2-8=-7<0$.

(4) C　当 $a\neq b$ 时，$a+b=8, ab=5, \frac{b-1}{a-1}+\frac{a-1}{b-1}=\frac{(b-1)^2+(a-1)^2}{(a-1)(b-1)}=\frac{a^2+b^2-2(a+b)+2}{ab-(a+b)+1}=\frac{(a+b)^2-2(a+b)-2ab+2}{ab-(a+b)+1}=-20$. 而当 $a=b$ 时，$\frac{b-1}{a-1}+\frac{a-1}{b-1}=2$.

(5) B　设 x_1, x_2 是方程 $ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，从而 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{2b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}$，

∵　$x_1-x_2=\sqrt{2}, a=c$.　∴　$\frac{2b^2}{a^2}-4=2$，∴　$b^2=3a^2$，∴　$b=\sqrt{3}a$，过三角形顶角作底边上的高，则底角的余弦值为 $=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而所求角为 $30°$.

(6) C　原方程变为 $\frac{x^2-2}{x+3}-6\left(\frac{x+3}{x^2-2}\right)+1=0$.

(7) A　原方程组变为 $(1+2m^2)x^2-12mx+12=0$，由 $\Delta=0$ 求 m 的值.

(8) D　甲班植 80 棵所用的天数为 $\frac{80}{x}$ (天)，乙班植 70 棵所用的天数为 $\frac{70}{x-5}$ 天.

(9) C　去分母，$(x-2)a^2-(2x+4)=-2a^2$，当 $x=2$ 时得 $a^2=4$，∴ $a=\pm 2$.

(10) C　设 2002 年初新增造林绿化面积为 a，则有 $a(1+x)^2=2a$，$x=41\%$.

2. (1) $m=\sqrt{3}$　设方程另一根为 x_1，则有 $x_1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$. $x_1=\sqrt{3}$，又 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2}+m$. 或用方程根的定义求解.

(2) $m=-\sqrt{3}$　注意 $m-\sqrt{3}\neq 0$.

(3) $k\geqslant 0$　$\begin{cases}\Delta=9k+4\geqslant 0,\\ k\geqslant 0.\end{cases}$

(4) 100%　设增长的百分数为 x，则有 $20+20(1+x)+20(1+x)^2=140$.

(5) 6　$x_1^2+x_2^2-2x_1-2x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)$.

(6) 4　∵ a、b 是方程 $x^2+(m-2)x+1=0$ 的两根，∴ $a^2+(m-2)a+1=0$，$b^2+(m-2)b+1=0$，即 $a^2+ma+1=2a$，$b^2+mb+1=2b$，∴ $(1+ma+a^2)(1+mb+b^2)=4ab$. 又 $ab=1$.

(7) $2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 或 $(x-1)(2x+1)$　比较方程 $2x^2+mx-1=0$ 与 $2x^2-mx-1=0$ 知，若 α 是方程 $2x^2+mx-1=0$ 的根，则 $-\alpha$ 是方程 $2x^2-mx-1=0$ 的根. 因此 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$ 是方程 $2x^2-mx-1=0$ 的两根.

(8) $-12\sqrt{2}$　∵ $a+b=-8$，$ab=8$，∴ $a<0$，$b<0$.

3. (1) $x_1=-15$，$x_2=5$　设 $x+2=y$，则原方程可变为 $y^2+6y-91=0$，∴ $y_1=-13$，$y_2=7$. 当 $y=-13$ 时，$x=-15$；当 $y=7$ 时　$x=5$.

(2) $x_1=3+\sqrt{3}$，$x_2=-2+\sqrt{3}$

∵ $a=1$，$b=-(1+2\sqrt{3})$，$c=-3+\sqrt{3}$.

∴ $b^2-4ac=[-(1+2\sqrt{3})]^2-4\times 1\times(-3+\sqrt{3})=25$.

∴ $x=\dfrac{(1+2\sqrt{3})+\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1+2\sqrt{3}\pm 5}{2}$，

∴ $x_1=3+\sqrt{3}$，$x_2=-2+\sqrt{3}$.

(3) $x_1=x_2=1$，$x_3=-2+\sqrt{3}$，$x_4=-2-\sqrt{3}$　设 $x+\frac{1}{x}=y$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$，∴ 原方程变为 $y^2+2y-8=0$.

(4) $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=-3\end{cases}$ 将 $y=2x-1$ 代入另一个方程得 $x^2-x-2=0$.

4. (1) 有错误　错误之处,应考虑 $k=0$ 和 $k\neq0$ 两种情况,正确答案是:$k\geqslant-\frac{1}{4}$.

(2) 有错误　错误之处,应考虑 k 的取值范围,正确答案是:$k=1$.

5. 设 c 是斜边,则 $a=b$ (因为二次方程 $x^2-mx+\sqrt{2}=0$ 最多只有两个不同实根).

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\quad c=\sqrt{2a}=\sqrt{2b}\\ \text{又 } c\cdot a=\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{2a^2}=\sqrt{2},$$

$\therefore\quad a=1,S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.

6. $k=-\frac{3}{5}$　$(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=\frac{k^2+4k}{4}-k+1=\frac{109}{100}$,而 $x_1+x_2=k$,$x_1\cdot x_2=\frac{k^2+4k}{4}$,$\therefore\quad 25k^2=9$,　$\therefore\quad k=\pm\frac{3}{5}$.　而 $\Delta=-64k\geqslant0$,　$\therefore\quad k\leqslant0$.

7. (1) $\frac{1}{7}(354+399+230+227.5+194.4+167.6+161.7)\approx248$ (亿元)

$\therefore$　七市今年首季 GDP 的平均值约为 248 亿元.

(2) 设平均每季度增长的百分率为 x,由题意得

$354(1+x)^2=407$　　$1+x\approx\pm1.072$.

$\therefore\quad x_1\approx7.2\%$,$x_2\approx-2.072$ (不合题意,舍去)

答:平均每季度增长的百分率约是 7.2%.

8. 30 名　设这个班有 x 名学生,则有 $\frac{240}{x-10}-\frac{240}{x}=4$.

【探究能力测试】

9. 解法一,设截至 2000 年 4 月 30 日该工程贷款 x 亿元,贷款年利率为 y,则 $\begin{cases}xy=1,\\(x-4)(1+y)-5=x(1-41\%).\end{cases}$ 即 $41x^2-800x-400=0$,解得 $x_1=20$,$x_2=-\frac{41}{20}$ (舍去)

解法二,设截至 2000 年 4 月 30 日该工程贷款 x 亿元,贷款年利率为 y,则 $\begin{cases}xy=1,\\41\%x=10-1-(x-4)y.\end{cases}$ 即 $41x^2-800x-400=0$. 下同解法一.

10．(1) 设乙连的速度为 v km/h，追上甲排的时间为 t h，依题意，得

$$\begin{cases}(v-28)\left(t+\frac{7}{4}\right)=vt, & ①\\ vt=30. & ②\end{cases}$$

由①得 $v=16t+28$，③ 将③代入②得，$8t^2+14t-15=0$. 解之得 $t_1=\frac{3}{4}$，$t_2=-\frac{5}{2}$ (舍去). 从而 $v=40$.

(2) 甲排原速度为 12 km/h，设甲排每小时应加快 x km，则 $\frac{24}{12+x}=\frac{60}{40}$，∴ $x=4$.

11．解 ∵ α，β 是方程 $x^2-x-2=0$ 的两根，

∴ $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-2$.

∵ $\alpha>\beta$，∴ $\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=3$.

设 $M=\alpha^2-2\beta-1$，$N=\beta^2-2\alpha-1$，

∴ $M+N=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)-2$

$=(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)-2\alpha\beta-2$

$=1^2-2\times1-2\times(-2)-2=1$.

$M-N=\alpha^2-\beta^2+2(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+2(\alpha-\beta)$

$=1\times3+2\times3=9$.

由 $\begin{cases}M+N=1,\\ M-N=9.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}M=5,\\ N=-4.\end{cases}$

∴ $\alpha^2-2\beta-1=M=5$.

12．存在，$m=-2$. 由 $\Delta\geqslant0$ 得 $m\leqslant1$，而由 $x_1^2+x_2^2=56$ 求得 $m_1=10$，$m_2=-2$.

第十三章 函数及其图象

13.1 平面直角坐标系

[基础能力测试]

1．(1) 二 (2) -1 (3) $(1,-3)$ (4) $(-3,-4)$，$(3,-4)$

(5) $-\frac{3}{2}$ (6) 5

(7) 三 ∵ $M(1+a,2b-1)$ 在第二象限，∴ $1+a<0$，$2b-1>0$，$a<-1$，$b>\frac{1}{2}$. ∴ $a-1<0$，$1-2b<0$.

(8) $(-2,3)$…注意 P 点在第二象限内.

(9) $(3,5)$. 画图帮助理解

(10) 2 或 -1 根据第一象限角平分线的性质，$2m^2+4=m^2+m+6>0$. 解 $m^2-m-2=0$ 即可.

(11) $(0,1)$ 或 $(0,-1)$　点 A 可在 y 轴正半轴上，也可在 y 轴的负半轴上.

(12) $\left(\frac{5}{2},1\right)$，$\left(-\frac{5}{2},1\right)$，$\left(-\frac{5}{2},-1\right)$，$\left(\frac{5}{2},-1\right)$ 或 $\left(1,\frac{5}{2}\right)$，$\left(1,-\frac{5}{2}\right)$，$\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$，$\left(-1,\frac{5}{2}\right)$ 注意矩形在直角坐标系中的放置方式.

2. (1) A　(2) A　(3) B　(4) C　(5) A　(6) C　(7) A

(8) D　依题意有 $|2-a|=|3a+6|$，$2-a=\pm(3a+6)$，∴　$a=-1$，或 $a=-4$. ∴　$P(3,3)$ 或 $(6,-6)$

3. $A(0,10)$，$B(9,10)$，$C(19,0)$，$S_{梯形AOCB}=140$　过 B 点作 x 轴垂线，垂足为 D，则 $DC=BD=9$，∴　$OC=AD+BC=19$.　∴　$C(19,0)$. $S=\frac{1}{2}(AB+OC)\cdot OA$.

【探究能力测试】

4. (1) 连结 AB，作线段 AB 的垂直平分线，交 x 轴于 C 点.

(2) 设机器人最快可在点 $D(x,0)$ 处截住小球，由题意，知 $2AD=BD$，即 $2\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{5})^2}=|10-x|$. 两边平方，得

$4[(x-2)^2+5]=(10-x)^2$，解这个方程，得 $x_1=4$，$x_2=-\frac{16}{3}$. 依题意，只能取 $x=4$. 因此，机器人最快可在点 $(4,0)$ 处截住小球.

5. (1) $P(4\sqrt{3},4)$ 或 $(2\sqrt{3},6)$　(2) $P(2\sqrt{3},6)$，$S_{\triangle OPA最大}=12\sqrt{3}$.

13.2　函数

【基础能力测试】

1. (1) y,x　(2) S、D，$\frac{\pi}{4}$　(3) $x\neq\pm2$　(4) $x\geqslant2$　(5) $x\geqslant-3$

(6) $x>-3$　(7) $y=\frac{100}{x}(x>0)$　∵　$xy=100$，∴　$y=\frac{100}{x}$.

(8) $y=360x$　注意单位换算.

(9) $y=(x-1000)\times5\%$，$1000<x\leqslant1500$，18 元　注意 x 的取值范围.

(10) $S=4n-4$　观察　$4=4\times2-4$，$8=4\times3-4$，$12=4\times4-4$…

(11) $2\sqrt{6}$　$y=\sqrt{4\times\frac{1}{2}+22}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

(12) $3+4\sqrt{2}$ ∵ $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$,

∴ $y=(\sqrt{2}+1)^2+2(\sqrt{2}+1)-2=3+4\sqrt{2}$.

2. (1) B (2) A (3) A (4) D

(5) C 由 $x=\frac{3}{2}$,判断函数应选 $y=-x+2$.

(6) D $\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ \sqrt{x-2}-1\neq 0.\end{cases}$

(7) D 注意分母不能为零.

(8) A $y=\frac{1}{x^2+2x+c}=\frac{1}{(x+1)^2+(c-1)}$,当 $c-1>0$ 时,$(x+1)^2+(c-1)>0$

(9) D $\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ 5-x\neq 0,\end{cases}$即 $2\leqslant x\leqslant 5$.

(10) A V 是 r 的函数.

(11) D $y=\frac{x^2}{x}$中 $x\neq 0$,自变量 x 取值范围不同;$y=\sqrt{x^2}$中,$y\geqslant 0$,函数的取值范围不同,$y=(\sqrt{x})^2$ 中,$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,自变量、函数值取值都不相同.

(12) C 注意式子的恒等变形

(13) B 依题意,$1=\frac{2m-1}{m+2}$.

3. (1) $k=3$ $k=(x+1)$ $y=(-2+1)\cdot(-3)=3$;(2) 2 由 $y=\frac{3}{x+1}$ 求 $x=\frac{1}{2}$时的函数值.

4. (1) $x<5$. $\begin{cases}5-x\geqslant 0,\\ x-5\neq 0.\end{cases}$ (2) 1. $y=\sqrt{5-1}+\frac{4\times 1}{1-5}=2-1=1$.

5. (1) $y=-\frac{4}{x+1}-x+2$. 由 $y=\frac{k_1}{x+1}-k_2(x-2)$,将 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\ y=8,\end{cases}$代入,解方程组,求出 k_1,k_2. (2) 0 或 3. 解方程 $-2=-\frac{4}{x+1}-x+2$ 即可

6. $S=144-\frac{1}{2}\pi R^2$ $(0<R\leqslant 6)$. $S=S_{\text{正方形}}-\frac{1}{2}S_{\odot}$.

7. $y=1.8x-6$. 依题意有 $y=1.2\times 10+(x-10)\times 1.8$ 即 $y=1.8x-6$

【探究能力测试】

8．(1) $y=(8+0.4)x=8.4x$.

(2) 当 $x=2.5$ 时，$y=8.4\times2.5=21$ (元)

9．(1) $y=20x+40$　(2) 当 $y=200$ 时，可求出 $x=8$.

10．(1) $Q=600-50t$.　(2) $0\leqslant t\leqslant12$.　(3) $200m^3$　(4) 10 h.

13.3　函数的图象

【基础能力测试】

1．(1) $a=1$　由 $3=\frac{3}{a}$ 求出 $a=1$.

(2) $(-1,2)$　先求出 $m=2$，则 $A(1,2)$

(3) $k=1$，由 $k=\frac{1}{2}\times2$ 得

(4) $m=-\frac{3}{4}$　由 $m^2=(m+1)^2+2(m+1)$ 求出 m 值

(5) 1，-2　将 $A(1,-1)$，$B(2,0)$ 坐标代入 $y=ax^2+bx$，解关于 a、b 方程组

(6) P_1，P_2，P_6　逐一代入检验，

(7) $(-2,0)$，$(0,4)$　令 $y=0$，得 $x=-2$；令 $x=0$，得 $y=4$.

(8) 1.5

2．(1) A　当 $y=0$ 时，两函数 x 值相等，得关于 a、b 的等式

(2) B　(3) D　解方程组 $\begin{cases}2=a+b,\\2=\frac{1-b}{a}\end{cases}$

(4) D　(5) C　买笔的支数为正整数

(6) C　联立 $\begin{cases}y=x^2-2x+3,\\y=x+\frac{3}{4}\end{cases}$

(7) C　(8) A　从装箱速度和生产速度上区分 A 和 C

(9) A　(10) D　开始 20 min 离家越来越远，图象上升；中间 10 min 原地不动，图象是平的；后 15 min 返回，图象下降

3．(1) 点 $(-3,-5)$，$(0,-2)$，$(\sqrt{3},-3)$ 在图象上；(2) $b=-3$，$a=\pm3$

4．(1) 图略．-1；(2) 1；　(3) $x>-1$；(4) y 随 x 增大而增大

5．(1) $-3\leqslant x\leqslant4$；(2) $-2\leqslant y\leqslant4$；(3) $x=0$，$y=2$；$x=-3$，$y=1$；(4) $y=0$ 时，$x=-1$ 或 $x\approx-2.8$ 或 $x=4$；$y=3$ 时，$x=0.8$ 或 3；(5) $-2\leqslant x\leqslant2$；(6) $-3\leqslant x\leqslant-2$ 或 $2\leqslant x\leqslant4$

6．(1) 37　(2) 9　(3) 3 点到 15 点　(4) 23 ℃到 26 ℃.

【探究能力测试】

7．(1) $s_{甲}=5t+10$　$s_{乙}=6t$　(2) $t=10$ 时，距出发地 60 km (图略)

8．(1) $0<x\leqslant 5$　要看清图象不包括点 A；(2) 当 $x=5$ 时，y 取最小值，最小值为 2.5；(3) 在 $0<x\leqslant 5$ 时，y 随 x 的增大而减小

9．(1) 1 h　(2) 0.5 h　(3) 25 km

10．

x	1	2	3	4	5	…	
$y_1=10+2x$	12	14	16	18	20	…	
$y_2=5x$	5	10	15	20	25	…	

(1) 图略

不同点有：①y_1 图象不经过原点，y_2 图象经过原点.

②当 $x<\frac{10}{3}$ 时，y_1 图象在 y_2 图象上方；

当 $x>\frac{10}{3}$ 时，y_1 图象在 y_2 图象下方.

③随着 x 增大，y_2 的值比 y_1 的值增大得快.

(2) y_2 的函数值先到达 100.

13.4　一次函数

【基础能力测试】

1．(1) $m=-1$，$y=-x$；2 或 -1，$y=2x+3$ 或 $y=-x$　提示：

$\begin{cases} m^2-m-1=1; \\ m\neq 0, \\ m^2-1=0 \end{cases}$ $\Rightarrow m=-1$；$\begin{cases} m^2-m-1=1, \\ m\neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow m=2$ 或 -1

(2) $m\neq\pm 1$　$m^2-1\neq 0$.

(3) $y=x+3\times 9.18\%\cdot x$ $(x>0)$

(4) $y=x+20$，$x\geqslant 0$，一次　由 $120+x=100+y$ 得 $y=x+20$.

(5) 3　由 $\begin{cases} m^2-3m+1=1, \\ m^2-m\neq 0 \end{cases}$ 得 $m=3$

(6) $Q=20-0.2t$，$0\leqslant t\leqslant 100$　油从管道中每分钟流出 $\frac{20}{100}=0.2$ (L) x min 可流出 $0.2x$ L.

(7) $y=0.5x+12$　观察 y 栏的值相邻后项比前项多 0.5 cm

(8) $y=0.22x-0.44$ ($x\geqslant 3$,且 x 为整数)　$y=0.22+0.22(x-3)$

2. (1) A　形如 $y=kx$ ($k\neq 0$) 的函数叫正比例函数

(2) C　(3) C　∵　$y=\sqrt{k^2+1}\cdot x$ 中,$\sqrt{k^2+1}\neq 0$

(4) D　(5) D　$c=4a$　(6) C　$\begin{cases}3m-2=0,\\1-2m\neq 0\end{cases}$　∴　$m=\frac{2}{3}$

(7) D　(8) A

3. (1) $s=300-60t$　(2) $0\leqslant t\leqslant 5$　(3) $3\frac{1}{3}$ h

4. $Q=\begin{cases}0 & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}\right),\\ 200\left(t-\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}<t\leqslant 8\right).\end{cases}$ 上班 15 min 做准备工作,没有生产零件.

5. $y=-8x+33$　设 $y_1=k_1x$,$y_2=k_2x+b$,∴　$y=k_1x+k_2x+b$.

将 $x=3$,$y=9$;$x=4$,$y=1$ 代入解关于 (k_1+k_2)、b 的方程组 (注意把 k_1+k_2 看成整体),得 $k_1+k_2=-8$,$b=33$.

6. $y=3000-2.5x$　$100\leqslant x\leqslant 1200$　(由于小王按批发价买进,所以苹果数量应不少于 100 kg;又由于小王带了 3000 元现金,∴　x 不会超过 1200 kg).

7. (1) $y=2.3x+4.6$,$0\leqslant x\leqslant 8$　(2) 根据题意,得 $\frac{s}{a}+\frac{s}{b}\leqslant 10$,

∴　$s\leqslant\frac{10ab}{a+b}$,即 s 的最大值为 $\frac{10ab}{a+b}$km.

[探究能力测试]

8. 设需刻录 x 张光盘,则到电脑公司刻录需 $y_1=8x$ 元,自刻录需 $y_2=120+4x$ 元.

∴　$y_1-y_2=4x-120=4(x-30)$.

∴　当 $x>30$ 时,$y_1>y_2$;当 $x<30$ 时,$y_1<y_2$.　∴　当这批光盘多于 30 张时自刻费用省;当这批光盘少于 30 张时到电脑公司刻录费用省;当这批光盘为 30 张时,到电脑公司与自刻费用一样.

9. (1) $y=1.6x+10.8$　(2) 不配套. ∵　$y=80.4>77$.

10. (1) $a=0.2$,$c=0.1$　(2) $y=0.1(x-1300)+75+400\times 0.2$　即 $y=0.1x+25$ ($x>1300$).

13.5 一次函数的图象与性质

【基础能力测试】

1. (1) $y=2x$ 等 (2) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ (3) $k=-3$

(4) $y=\frac{1}{3}x-4$ 或 $y=-\frac{1}{3}x-3$

(5) 16 $\begin{cases}8=-m+a,\\8=m+b.\end{cases}$ 两式相加,$a+b=16$.

(6) $y=\frac{1}{5}x-6$,$x\geqslant 30$ $y=kx+b$ 经过 (60,6),(80,10) 两点,得 $y=\frac{1}{5}x-6$,由 $\frac{1}{5}x-6\geqslant 0$,得 $x\geqslant 30$

(7) $24>4$ (8) 21,24,26 (9) 依题意,可设 $y=kx+b$ ($k<0$),将 $(-1,2)$ 代入,得 $b-k=2$. 在 $k<0$ 的范围内,令 $k=-1$,则 $b=1$,这时 $y=-x+1$ 令 $k=-2$,则 $b=0$,则 $y=-2x$;…

(10) (0,0),$(-6\sqrt{2},0)$,$(12-6\sqrt{2},0)$,如图 2 所示,当 P 点在 x 正半轴时,设圆的半径为 r. 由于 $\odot O'$ 内切于 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$,∴ $r=\frac{OA+OB-AB}{2}=\frac{6+6-6\sqrt{2}}{2}=6-3\sqrt{2}$. ∴ $P(12-6\sqrt{2},0)$. 同理,P 点在 x 的负半轴时,可得 $P(-6\sqrt{2},0)$

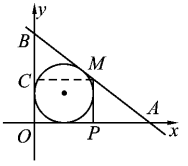


图 2

2. (1) D (2) B (3) D (4) A (5) D (6) A (7) B (8) B (9) A (10) B (11) D (12) C (13) B (14) B

(15) C 先求出两个一次函数解析式 $y=2x+4$,$y=-x-2$,再分别求出 $B(0,4)$,$C(0,-2)$,$BC=6$,$h=2$. ∴ $S=\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$

3. $y=2x+1$,$y=-1$,$x=-\frac{1}{2}$.

4. (1) $k_1=-2$,$k_2=1$ (2) $A(9,0)$

5. $y=-2x-4$.

6. (1) $(200-100)\times 5\%+(300-200)\times 10\%+(x-300)\times 15\%=72$ 或 $100\times 5\%+100\times 10\%+(x-300)\times 15\%=72$. 解得 $x=680$ (2) 当 $100<x\leqslant 200$ 时,$y=100+(x-100)\times(1-5\%)=0.95x+5$.

7. (1) $p=\frac{2}{5}t+100$ ($t\geqslant 0$);(2) 250 ℃.

8．(1) 农民自带的零钱是 5 元　(2) $(20-5)\div 30=0.5$ (元)　(3) $(26-20)\div 0.4+30=45$ (kg)

9．(1) $Q=-5t+60$；(2) $0\leqslant t\leqslant 12$，图略．　(3) 令 $Q=20$ 时，$t=8$．

∴ 汽车行驶路程：$40\times 8=320$ km

10．$y=2-\frac{\sqrt{2}}{2}x$ $(0<x<\sqrt{2})$，图略．

11．2000 人，20 元．　$y=-500x+12000$，$xy=40000$，可得 $x=20$ 或 $x=4$ (舍去)

12．(1) 112 万立方米　(2) $y=-0.6x+112$．　(3) 150 天

13．(1) 略　(2) $y=\begin{cases}45x+2.5 & (1.7\leqslant x<1.9)\\ -5x+97.5 & (1.9\leqslant x<2.1)\\ -30x+150 & (2.1\leqslant x\leqslant 2.4)\end{cases}$

(3) 在 1.8 A 至 2.2 A 之间

【探究能力测试】

14．(1) $y=\begin{cases}6t & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ -\frac{2}{3}t+\frac{20}{3} & (1<t\leqslant 10)\end{cases}$　(2) 略　有效时间长为：$4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ (h)　(3) 安排此人注射药液的时间为：第一次时间是 6：00，第二次时间是 10：00，第三次时间是 15：00，第四次时间是 19：30．

15．(1) 设选用方案 1 每月利润为 y_1 元，选用方案 2 每月利润为 y_2 元，依方案 1，可得

$y_1=(50-25)x-2\times 0.5x-30000=24x-30000$，

∴ $y_1=24x-30000$．

依方案 2，可得 $y_2=(50-25)x-14\times 0.5x=18x$，

∴ $y_2=18x$；

(2) ∵ 当 $x=6000$ 时，$y_1=114000$ (元)，$y_2=108000$ (元)，

∴ $y_1>y_2$，因此，若作为厂长在不污染环境、又节约资金的前提下，应选用方案 1

16．(1) 依题意，当 $x\leqslant 6$ 时，$y=ax$；当 $x>6$ 时，$y=6a+c(x-6)$，由已知，得 $\begin{cases}7.5=5a,\\ 27=6a+3c.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1.5,\\ c=6.\end{cases}$ ∴ $y=\begin{cases}1.5x, & x\leqslant 6,\\ 9+6(x-6)=6x-27, & x>6.\end{cases}$

(2) 将 $x=8$ 代入 $y=6x-27$，得 $y=21$ (元)．

17．设甲厂运往 A 地化肥为 x t，总运费为 y 元，依题意得 $y=x\times 10\times$

$6+(50-x)\times12\times5+(30-x)\times8\times6+(10+x)\times10\times4=-8x+4840$，由 $\begin{cases}30-x\geqslant0,\\50-x\geqslant0,\\x\geqslant0\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x\leqslant30$. 当 $x=30$ 时，$y_{\min}=4600$，故当由甲厂向 A 地运送 30 t 化肥，向 B 地运送 20 t 化肥，同时乙厂将 40 t 化肥全部运往 B 地时，最低总运费是 4600 元.

18. (1) $k=-3$，$b=12$；(2) 存在点 $P(2,6)$ 或 $P\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$ 或 $P\left(4-\frac{2}{5}\sqrt{10},\frac{6}{5}\sqrt{10}\right)$，使$\triangle POB$ 为等腰三角形.

由 $\begin{cases}0=4k+b,\\b=12\end{cases}$ 求出，$k=-3$，$b=12$. 以线段 OB 为底边，可得点 $P_1(2,6)$ 以 BP 为底边，可得点 $P_2\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$，以 OP 为底边，可得点 $P_3\left(4-\frac{2}{5}\sqrt{10},\frac{6}{5}\sqrt{10}\right)$.

19. (1) $k=\frac{3m-3}{m-5}$；(2) $S_{\triangle AOB}=\frac{6m^2}{m-1}$；(3) 存在点 $A(2,6)$ 使$\triangle AOB$ 的面积最小.

20. (1) $AB\approx217$ km (2) ① 当 $s<550$ km 时，选丙公司好；② $s=550$ km 时，甲、丙一样好；③ $s>550$ km 时，选甲公司好.

21. (1) $\because 10\times2<15\times2$，$40\times2>15\times2$ $\therefore$ 此人可选骑自行车或摩托车

(2) $s=30-15t$ $(0\leqslant t\leqslant2)$ 或 $s=30-40t$ $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}\right)$，图象略.

22. 把 $x=0$ 和 $y=0$ 分别代入 $y=\frac{4}{3}x+4$

得 $\begin{cases}x=0,\\y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=0,\end{cases}$

$\therefore A(-3,0)$，$B(0,4)$

$\because OA=3$，$OB=4$，

$\therefore AB=5$，$BQ=4-k$，$QP=k+1$.

作 $QQ'\perp AB$ 于 Q'，当 $QQ'=QP$ 时，$\odot O$ 与直线 AB 相切，由 $\mathrm{Rt}\triangle BQQ'\backsim\mathrm{Rt}\triangle BAO$，得 $\frac{BQ}{BA}=\frac{QQ'}{AO}$，

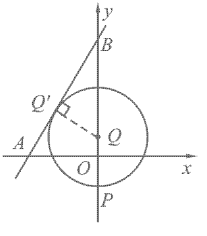


图 3

即 $\frac{BQ}{BA}=\frac{QP}{AO}$，∴ $\frac{4-k}{5}=\frac{k+1}{3}$，解得 $k=\frac{7}{8}$.

∴ 当 $k=\frac{7}{8}$ 时，$\odot O$ 与直线 AB 相切.

13.6　二次函数 $y=ax^2$ 的图象

【基础能力测试】

1. (1) 抛物线，y 轴；(0,0)；上；下　(2) 减小，增大；0；小；0

(3) $m=3$，$\begin{cases}m^2-2m-1=2,\\ m^2+m\neq 0\end{cases}$

(4) $y_1<y_2$　∵ $a<0$，当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而减小

(5) $y=-2x^2$　设 $y=kx^2$.

(6) $y=16-x^2$ $(0<x<4)$　(7) $y=200(1+x)^2$　228.98 元

(8) $y=\frac{1}{3}x^2$，$y=-\frac{1}{3}x^2$

(9) $y=2x^2$，$y=18$，$x=\pm 2$

(10) $y=-\frac{15}{4}x^2$.

2. (1) B　(2) C　∵ $\pi\neq 0$.　(3) D　(4) A　(5) D　(6) D

(7) D　$y=\pi\times 4^2-\pi\times x^2=-\pi x^2+16\pi$

(8) C. $\begin{cases}m^2-3=2,\\ 2-m>0\end{cases}$

(9) A　建立如图 4 所示直角坐标系　(10) D

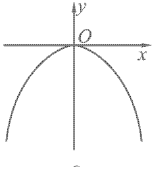


图 4

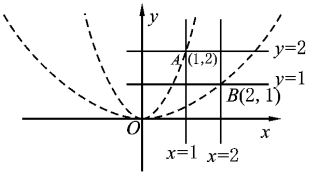


图 5

3. (1) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，$y=x^2$　(2) $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$　直线 $y=kx+b$ 经过 $A(-3,0)$，$B(-1,1)$. $y=ax^2$ 经过 $B(-1,1)$. 求出　$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，$y=x^2$，

再联立$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=x^2 \end{cases}$，解方程组

4．$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$　将(1,4)分别代入$y=-ax^2$，$y=kx+1$得$a=-4$，$k=3$，再联立$\begin{cases} y=4x^2, \\ y=3x+1 \end{cases}$

5．把$x=-1$代入$y=x^2$得$y=(-1)^2=1$，即A点纵坐标为$y=1$，$AB\parallel x$轴，则B点纵坐标为1，代入$y=x^2$得　$x=\pm 1$，∴ B点横坐标为1．

∴ $AB=2$，又$AB\parallel x$轴，点O到AB距离为1，

∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot 1=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$．

6．$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}x+3$　由$x^2-x-6=0$求出$x_1=3$，$x_2=-2$．∴ 抛物线$y=ax^2$，直线$y=kx+3$交于$\left(3,\frac{9}{2}\right)$，$(-2,2)$两点．

7．(1) $S=\frac{3}{2}y$　(2) 正比例，二次

8．$B(-1,1)$、$C(3,9)$

【探究能力测试】

9．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　10．$S_{\triangle APQ}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$．

13.7　二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象

【基础能力测试】

1．(1) (1,2)　配方$y=(x-1)^2+2$　或用$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$计算

(2) 2　将$P(1,a)$，$Q(-1,b)$分别代入$y=x^2+1$．得$P(1,2)$、$Q(-1,2)$，$PQ=1-(-1)=2$．

(3) $y=x^2+3x-4$　$\begin{cases} 0=16-4b+c \\ 6=4+2b+c \end{cases}$

(4) $a=0$，$\left(-\frac{1}{3},0\right)$；$a=1$，$(-1,0)$；$a=9$，$\left(\frac{1}{3},0\right)$　分类：当$a=0$时，$y=3x+1$，则与x轴交点$\left(-\frac{1}{3},0\right)$，当$a\neq 0$时，$\Delta=(3-a)^2-4a=0$，解之$a=1$或$a=9$．

(5) $-3<x<1$

(6) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$

(7) 1　(8) $\frac{3}{4}$　(9) ①③④

(10) -3　$x=-\frac{m-1}{2\times1}=2$

(11) $y=x^2-4x$ 或 $y=x^2-4x+3$

(12) $k<-3$　$\begin{cases}\Delta>0,\\(x_1-1)(x_2-1)<0\end{cases}$　$\begin{cases}x_1+x_2=-2(k+1),\\x_1x_2=-k\end{cases}$

(13) -4　用待定系数法求二次函数解析式.

(14) $y=x^2-2x$；$x=3,-1$；

(15) $<,<,>$　抛物线开口向下

(16) $y=x^2-\frac{3}{2}x-1$ 等

(17) -1　$a<b,b<0$

(18) $abc>0$ 或 $a+b+c<0$ 等

2. (1) D　(2) B　(3) D　(4) D　(5) A　(6) A　(7) D　(8) D

(9) C

(10) ABC　$a>0,c<0,-\frac{b}{2a}>0,b<0$.　∴ $abc>0$,∵ 抛物线与 x 轴有两个交点,当 $x=-2$ 时函数值 $y>0$,即 $4a-2b+c>0$.

(11) A　$a<0,c>0,-\frac{b}{2a}=-1$,　$b=2a<0$,　$abc>0$. 函数在 $x=1$ 时函数值小于 0,即 $a+b+c<0$.

函数在 $x=-1$ 时函数值大于 0,即 $a-b+c>0$.

(12) A　$y=x^2+(2-m)x+m=(1-x)m+x^2+2x$,令 $x-1=0$,$x=1$,此时 $y=3$.

(13) A　(14) C　对称轴在直线 $x=1$ 的右边.

(15) C　③错　(16) B　②③不正确.　(17) C　由①③④⇏②

(18) A　(19) D　x_1,x_2 是方程 $x^2-(2m-1)x-2m=0$ 两根,注意判别式 $\Delta>0$ 及根与系数的关系.　(20) B

3. 略　4. $y=-x^2+2x+3$

5. $y=x^2-2$,交点个数略.

6. (1) $y=x^2-2x-3$. 图略　(2) 当 $x=1$ 时,$y=-4$;当 $x=2$ 时,$y=-3$,∴ 在第四象限抛物线上的所有整点坐标为 $(1,-4)$、$(2,-3)$.

7. (1) 证明:$\Delta=(-2)^2-4\times(-8)=36>0$,∴抛物线与 x 轴一定有两

个交点. (2) ∵ 方程 $x^2-2x-8=0$ 的两根为 $x_1=-2, x_2=4$. ∴ $AB=|x_1-x_2|=6$. 又抛物线顶点 P 的纵坐标 $y_P=\frac{4ac-b^2}{4a}=-9$, ∴ $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot|y_p|=27$.

8. (1) 证明: ∵ $\Delta=8k^2+1>0$, ∴ 抛物线与 x 轴总有两不同的交点. (2) ① $y=x^2+x$ ② -1

9. (1) ∵ $\Delta=(1-2a)^2-4a^2>0$, ∴ $a<\frac{1}{4}$. ∴ a 的取值范围是 $a<\frac{1}{4}$ 且 $a\neq0$. 又 ∵ $a\neq0$, ∴ $x_1\cdot x_2=a^2>0$, 即 x_1、x_2 必同号. 而 $x_1+x_2=-(1-2a)=2a-1<\frac{2}{4}-1=-\frac{1}{2}<0$, ∴ x_1、x_2 必同为负数. ∴ 点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 都在原点的左侧. (2) ∵ x_1、x_2 同为负数, ∴ 由 $OA+OB=OC-2$, 得 $-x_1-x_2=a^2-2$. ∴ $1-2a=a^2-2$, ∴ $a^2+2a-3=0$. ∴ $a_1=-3, a_2=1$. ∵ $a<\frac{1}{4}$ 且 $a\neq0$, ∴ a 的值为 -3.

10. (1) 解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+1$ (2) a 的取值范围是 $-1<a<0$ (3) 由抛物线开口向下, 且经过点 $A(0,1)$ 知: 它与 x 轴的两个交点 B、C 分别在原点的两旁, 此时 B、C 两点的横坐标异号, $OA=c=1$. 又 ∵ $\angle BAC=90°$, ∴ 点 A 必在以 BC 为直径的圆上. 又 ∵ $OA\perp BC$ 于 O, ∴ $OA^2=OB\cdot OC$. 又 ∵ $b=-2a-2, c=1$, ∴ 抛物线方程变为: $y=ax^2-2(a+1)x+1$, 设此抛物线与 x 轴的两个交点分别为 $B(x_1,0)$、$C(x_2,0)$, 则 x_1、x_2 是方程 $ax^2-2(a+1)x+1=0$ 的两根, ∴ $x_1\cdot x_2=\frac{1}{a}$. ∴ $OB\cdot OC=|x_1|\cdot|x_2|=|x_1\cdot x_2|=-x_1\cdot x_2$ (∵ $x_1\cdot x_2<0$), ∴ $OB\cdot OC=-\frac{1}{a}$, 又 ∵ $OA^2=OB\cdot OC$, $OA=1$, ∴ $1=-\frac{1}{a}$, 解得 $a=-1$

11. (1) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$ (2) $(4,1)$ 或 $(4,-4)$

12. (1) $P(9,-3)$ (2) $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{8}{7}x-\frac{12}{7}$

【探究能力测试】

13. (1) $s=\frac{1}{2}t^2-2t$ (2) 把 $s=30$ 代入 $s=\frac{1}{2}t^2-2t$, 得 $30=\frac{1}{2}t^2-2t$. 解得 $t_1=10, t_2=-6$ (舍) 即 截至 10 月末公司累积利润可达到 30 万元 (3) 把 $t=7$ 代入, 得 $s=\frac{1}{2}\times7^2-2\times7=\frac{21}{2}=10.5$. 把 $t=8$ 代入, 得 s

$=\frac{1}{2}\times 8^2-2\times 8=16$，$16-10.5=5.5$. 即第 8 个月公司获利润 5.5 万元.

14. (1) $S=-3x^2+24x$　(2) $AB=5$ m　(3) $S=-3(x-4)^2+48$. $\because \frac{14}{3}\leqslant x<8$，$\therefore$ 当 $x=\frac{14}{3}$ 时，$S_{最大值}=48-3\left(\frac{14}{3}-4\right)^2=46\frac{2}{3}$. 能，围法：$24-3\times\frac{14}{3}=10$，即长为 10 m 宽为 $4\frac{2}{3}$ m，这时有最大面积为 $46\frac{2}{3}$ m^2

15. (1) $E(4,3)$，$D\left(0,\frac{5}{3}\right)$，$y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$；(2) 可求 $C\left(7,\frac{9}{4}\right)$，适合 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$，$\therefore$ 导弹能击中目标 C.

16. (1) $y=-60x^2+1800x+24000$　($0\leqslant x\leqslant 14$，x 取整数)　(2) $-60x^2+1800x+24000=600\times(120-80)\times(1+50\%)$，$x_1=10$，$x_2=20$ (不合题意，舍去).

17. (1) $y=-3x^2+252x-4860$；(2) $x=42$ 时，$y_{最大值}=432$ (元).

18. 对于甲车：由 $12=0.1x+0.01x^2$，解得 $x=30$ 或 $x=-40$ (舍去)，即甲车的车速为 30km/h，不超过限速. 对于乙车，设 $s_乙=kx$，$\because$ 它经过点 $(60,15)$，$\therefore k=\frac{1}{4}$，$\therefore s_乙=\frac{1}{4}x$，$\because 10<\frac{1}{4}x<12$，$\therefore 40<x<48$，$\therefore$ 乙车超过限速 40 km/h 的规定，就速度方面相碰的原因在于乙车超速行驶.

19. (1) $w_1=\begin{cases}300-t & (0\leqslant t\leqslant 200),\\ 2t-300 & (200<t\leqslant 300).\end{cases}$

(2) 由图知，抛物线顶点坐标为 $(150,100)$，可设 $w_2=a(t-150)^2+100$. 又当 $t=50$ 时，$w_2=150$，代入求得 $a=\frac{1}{200}$. $\therefore w_2=\frac{1}{200}(t-150)^2+100$ $(0\leqslant t\leqslant 300)$.

(3) 设 t 时刻的纯收益为 y，依题意有 $y=w_1-w_2$，即

$$y=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2} & (0\leqslant t\leqslant 200),\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2} & (200\leqslant t\leqslant 300).\end{cases}$$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，配方整理得 $y=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$，所以，当 $t=50$ 时，y 在 $0\leqslant t\leqslant 200$ 上有最大值为 100.

当 $200<t\leqslant 300$ 时，配方整理得 $y=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$. 所以，当 $t=300$ 时，y 在 $200<t\leqslant 300$ 上有最大值 87.5.

综上所述，由 $100>87.5$ 可知，y 在 $0\leqslant t\leqslant 300$ 上，可以取最大值 100，此

时 $t=50$，即从 2 月 1 日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大.

20. (1) $y=ax^2+2x+3$ 的顶点在直线 $y=x+3$ 上. (2) 直线 $y=x+3$ 上有一个点 $(0,3)$ 不是该抛物线的顶点，抛物线 $y=ax^2+2x+3$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{1}{a},3-\frac{1}{a}\right)$，当 $a\neq 0$ 时，顶点的横坐标 $-\frac{1}{a}\neq 0$，∴ $(0,3)$ 点不是该抛物线的顶点. (3) 得出猜想：对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$，将其顶点的横坐标增加或减少 $\frac{1}{a}$，纵坐标增加 $\frac{1}{a}$，所得到的两个点一定仍在抛物线上. (其他猜想，只要合理也对) 理由：∵ 抛物线 $y=ax^2+bc+c$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，∴ 将其横坐标减少 $\frac{1}{a}$，纵坐标增加 $\frac{1}{a}$，得 $A\left(-\frac{b+2}{2a},\frac{4ac-b^2+4}{4a}\right)$. 同样可得 $B\left(\frac{-b+2}{2a},\frac{4ac-b^2+4}{4a}\right)$. 把 $x=-\frac{b+2}{2a}$ 代入 $y=ax^2+bc+c=a\left(-\frac{b+2}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b+2}{2a}\right)+c=\frac{4ac-b^2+4}{4a}$. ∴ 点 A 在抛物线 $y=ax^2+bc+c$ 上. 同理可证点 B 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上. ∴ 所提出猜想能够成立，(此问题可利用 $y=(x-h)^2+k$ 的形式进行证明，过程同上)

21. (1) 由题意得 $\begin{cases} x_1+2x_2=0 & ① \\ x_1+x_2=m-4 & ② \\ x_1\cdot x_2=-2m-4 & ③ \\ \Delta=(m-4)^2+4(2m+4)=m^2+32>0 \end{cases}$

解得 $m_1=2$，$m_2=7$ (不合题意，舍去). ∵ $x_1=-4$，$x_2=2$，点 C 的坐标为：$2m+4=8$，得 A、B、C 坐标为：$A(-4,0)$、$B(2,0)$、$C(0,8)$ ∵ 点 A 与点 D 关于 y 轴对称，∴ $D(4,0)$. 设经过 C、B、D 的抛物线的解析式为：$y=a(x-2)(x-4)$. 将 $C(0,8)$ 代入上式得 $8=a(0-2)(0-4)$，∴ 所求抛物线的解析式为：$y=x^2-6x+8$ (2) ∵ $y=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$，∴ 顶点 $P(3,-1)$. 设点 H 的坐标为 (x_0,x_0)，∵ $\triangle CBD$ 与 $\triangle HBD$ 的面积相等，∴ $|y_0|=8$. ∵ 点 H 只能在 x 轴的上方，故 $y_0=8$. 将 $y_0=8$ 代入 $y=x^2-6x+8$ 中，得 $x_0=6$ 或 $x_0=0$ (舍去). ∴ $H(6,8)$. 设直线 PH 的解析式为：$y=kx+b$，则 $\begin{cases} 3k+b=-1, \\ 6k+b=8. \end{cases}$ ∴ $k=3$，$b=-10$，∴ 直线 PH 的解析式为 $y=3x-10$

22. (1) $y=x^2-x-2$，$M\left(\frac{1}{2},-\frac{4}{9}\right)$ (2) 直线 BM 的解析式为 $y=\frac{3}{2}x-3$. $S=-\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{3}t+3$ $\left(0<t<-\frac{4}{9}\right)$ (3) 存在点 P，且坐标是

$P_1\left(\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$、$P_2\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$. 注：分三种情况讨论. ①若$\angle PAC=90°$，则$PC^2=PA^2+PC^2$，得$P_1\left(\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$　②若$\angle PCA=90°$，则$PA^2=PC^2+AC^2$，得$P_2\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$　③当点P在对称轴右侧时，$PA>AC$，故边AC的对角$\angle APC$不可能是直角　(4) 图略，未知顶点分别为$(-1,-2)$、$\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$、$\left(\frac{4}{5},-\frac{8}{5}\right)$

13.8　反比例函数及其图象

【基础能力测试】

1. (1) 5　(2) >　(3) $y=\frac{100}{x}$　(4) $y=\frac{12}{x}$　(5) 2

(6) 相同点：图象都是曲线；都经过点$(-1,2)$(或都经过点$(2,-1)$)；在第二象限，函数值都随着自变量的增大而增大. 不同点：图象的形状不同；自变量的取值范围不同；一个有最大值，一个没有最大值.

(7) -2　$m=xy=3$，

$\therefore y=\frac{3}{x}$，$y=x^2+(k+1)x+3$. 将$(1,3)$代入$y=x^2+(k+1)x+3$求出k.

(8) -7　当$x=-2$时，$y_1=-4\times(-2)^2-2m\times(-2)+m^2$，$y_2=\frac{2m+4}{-2}$，且$y_1=y_2$，解关于$m$的方程，又$2m+4<0$.

(9) 6　$k=xy=2\times3=6$.

(10) <　(11) 减小，解$\begin{cases}y=2x,\\y=x+1\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$代入$y=\frac{k}{x}$，得$k=2>0$.

(12) <　借助图象帮助分析

(13) 右，二、四，增大

(14) $\frac{1}{6}$　设$y=\frac{k}{x-1}$，$k=(x-1)y=\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)$，$k=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{6(x-1)}$.

(15) 减小　$\begin{cases}1-2k=-1,\\k\neq0.\end{cases}$　$\therefore k=1$，即$y=\frac{1}{x}$.

(16) 1或16　由$x^2+3x-4=0$解得$x_1=-4$，$x_2=1$.　$\therefore$ $(-4,1)$或$(1,-4)$在两个函数的图象上，分别求出k_1，k_2的值.

(17) $(-1,-1)$，解方程组$\begin{cases}2=\frac{1}{2}m+n,\\3n-m=1.\end{cases}$

(18) $y=-\frac{2}{x}$ $\begin{cases}m+n=3,\\ m^2+n^2=13.\end{cases}$

(19) $y=-\frac{6}{x}$. $|k|=|xy|=2\times3$ $k=\pm6$. 又 $k<0$, $\therefore$ $k=-6$.

(20) 9 $V=\frac{5\times1.98}{\rho}$, $V=\frac{9.9}{\rho}$. (21) 一 $y=\frac{24}{x}$ $(0<x)$.

2. (1) A (2) A (3) D (4) B (5) D (6) B (7) D (8) D
(9) B (10) D (11) C (12) D (13) C

(14) B $y_1=\frac{k_1}{x}$, $y_2=k_2x^2$ $\therefore$ $y=\frac{k_1}{x}+k_2x^2$.

(15) A (16) C (17) A $|k|=S_{矩形}$. (18) A (19) C (20) C

3. (1) $k=\frac{2}{5}$, $n=2$.

4. (1) $m=1$ (2) $m=-1$.

5. (1) $\rho=\frac{14.3}{V}$ (2) 当 $V=2\ m^3$ 时, $\rho=\frac{14.3}{2}=7.15\ (kg/m^3)$ $\therefore$ 当 $V=2\ m^3$ 时,氧气的密度为 $7.15\ kg/m^3$.

6. (1) $y=\frac{3}{x}$ (2) $(1,3)$, $\left(-\frac{3}{2},-2\right)$ 联立 $\begin{cases}y=\frac{3}{x},\\ y=2x+1.\end{cases}$

7. (1) 根据已知条件可得 $A(-4,0)$, $C(0,2)$,即 $AO=4$, $OC=2$.
又 $\because$ $S_{\triangle ABP}=9$,
$\therefore$ $AB\cdot BP=18$.
又 $OC/\!/PB$, $\therefore$ $\triangle AOC\backsim\triangle ABP$,
$\therefore$ $\frac{AO}{AB}=\frac{OC}{BP}$,即 $\frac{4}{AB}=\frac{2}{BP}$, $2BP=AB$.
$\therefore$ $2BP^2=18$, $BP=3$, $AB=6$.
$\therefore$ P 点坐标为 $(2,3)$.

(2) 设 R 点坐标为 (x,y),由 $P(2,3)$ 知反比例函数解析式为 $y=\frac{6}{x}$.
$\because$ $\triangle BTR\backsim\triangle AOC$, $\therefore$ $\frac{AO}{OC}=\frac{BT}{RT}$,即 $\frac{4}{2}=\frac{x-2}{y}$.
则有 $\begin{cases}y=\frac{6}{x},\\ 2y=x-2.\end{cases}$ 解得 $x=\sqrt{13}+1$, $y=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.
$\therefore$ R 的坐标为 $\left(\sqrt{13}+1,\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

8. (1) 设 A 点坐标为 (x,y),且 $x<0$, $y>0$,则

$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|BA|=\frac{1}{2}\cdot(-x)\cdot y=\frac{3}{2}$.

$\therefore\ xy=-3$.

又$\because y=\frac{k}{x}$，即　$xy=k$，$\therefore\ k=-3$.

$\therefore$ 所求的两个函数的解析式分别为：

$y=-\frac{3}{x}$，$y=-x+2$.

(2) $\because\ y=-x+2$，令 $y=0$，得 $x=2$.

$\therefore$ 直线 $y=-x+2$ 与 x 轴的交点 D 的坐标为 $(2,0)$.

再由$\begin{cases}y=-x+2,\\ y=-\frac{3}{x}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 交点 A 为 $(-1,3)$，C 为 $(3,-1)$.

$\therefore\ S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ODA}+S_{\triangle ODC}=\frac{1}{2}\cdot|OD|\cdot(|y_1|+|y_2|)$

$=\frac{1}{2}\times 2\times(3+1)=4$.

【探究能力测试】

9. (1) $y=\frac{3}{4}x$，$0<x\leqslant 8$，$y=\frac{48}{x}$　(2) 30

(3) 此次消毒有效 把 $y=3$ 代入 $y=\frac{3}{4}x$，得 $x=4$ 把 $y=3$ 代入 $y=\frac{48}{x}$，得 $x=16$，$\because 16-4=12>10$

10. (1) $y=-x+2$　(2) $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle BOM}=6$.

11. (1) $A(-1,0)$ $B(0,1)$ $D(1,0)$　(2) $y=x+1$，$y=\frac{2}{x}$

12. (1) 依题意，设 B 点坐标为 (x_0,x_0)，

$\therefore\ S_{\text{正方形}OABC}=x_0^2=9$　$\therefore\ x_0=3$，

即 $B(3,3)$，$\because\ x_0y_0=k$，$\therefore\ k=9$.

(2) ① $\because\ P(m,n)$ 在 $y=\frac{9}{x}$ 上，如图 6(1)，

$\therefore\ S_{\text{矩形}OEP_1F}=mn=9$，

$\therefore\ S_{\text{矩形}OAGF}=3n$.

由已知可得，$S=9-3n=\frac{9}{2}$，$\therefore\ n=\frac{3}{2}$，$m=6$.

$\therefore P_1\left(6,\frac{3}{2}\right)$.

② 如图 6 (1) 同理可得 $P_2\left(\frac{3}{2},6\right)$.

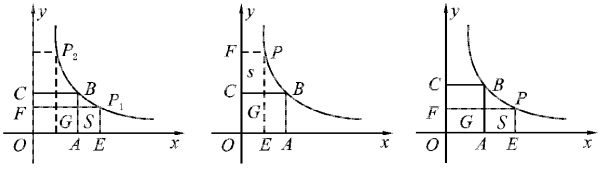
(3) ①如答图 6 (2)，当 $0<m<3$ 时，

∵ 点 P 坐标为 (m,n)，

$\therefore S_{矩形OEGC}=3m$，

$\therefore S=S_{矩形OEPF}-S_{矩形OEGC}$，

$\therefore S=9-3m\ (0<m<3)$，



(1) (2) (3)

图 6

② 如图 6 (3)，当 $m\geqslant 3$ 时，∵ 点 P 坐标为 (m,n)，

$\therefore S_{矩形OAGF}=3n$，

∵ $mn=9$，$\therefore n=\frac{9}{m}$，

$\therefore S=9-3n=9-\frac{27}{m}$，

即 $S=9-\frac{27}{m}\ (m\geqslant 3)$.

13. (1) $k=3$.

(2) ∵ 当 $x=m$ 时，$y=\frac{3}{m}$，$\therefore E\left(m,\frac{3}{m}\right)$.

作 $EG\perp BC$，G 为垂足.

∵ E 是 BD 的中点，$EG/\!/DC$，$\therefore BG=GC$.

$\therefore EG=\frac{1}{2}DC$. $\therefore D$ 点的纵坐标为 $\frac{6}{m}$.

∵ D、A 两点纵坐标相等，$\therefore A$ 点的纵坐标为 $\frac{6}{m}$，

当 $y=\frac{6}{m}$ 时，$\frac{3}{x}=\frac{6}{m}$，

$\therefore\ x=\frac{m}{2}$.

$\therefore\ A\left(\frac{m}{2},\frac{6}{m}\right)$.

$\because$ A、B 两点横坐标相等，

$\therefore$ B 点的坐标为 $\left(\frac{m}{2},0\right)$.

$\therefore\ BG=m-\frac{m}{2}=\frac{m}{2}$.

$\because\ BG=GC$，

$\therefore\ BC=m$.

$\therefore\ OC=\frac{m}{2}+m=\frac{3}{2}m$.

即 C 点的横坐标为 $\frac{3}{2}m$.

(3) 当 $\angle ABD=45°$ 时，$AB=AD$.

则有 $\frac{6}{m}=m$，即 $m^2=6$.

解之得 $m_1=\sqrt{6}$，$m_2=-\sqrt{6}$（不合题意，舍去）.

$\therefore\ m=\sqrt{6}$.

14. (1) $\because$ 一次函数和反比例函数的图象交于点 $(4,m)$，

$\therefore\begin{cases}m=-4+8,\\ m=\frac{k}{4}.\end{cases}$ 解之，得 $\begin{cases}m=4,\\ k=16.\end{cases}$

(2) 若两个函数图象相交，则交点坐标可由方程组 $\begin{cases}y=\frac{k}{x}\ (k\neq0),\\ y=-x+8\end{cases}$ 求得，联立即得 $-x+8=\frac{k}{x}$，即 $x^2-8x+k=0$.

要使两个图象有两个不同交点，必须有 $\Delta>0$.

$\therefore\ \Delta=(-8)^2-4\times1\times k=64-4k>0$，$\therefore\ k<16$.

故 k 应满足 $k<16$ 且 $k\neq0$.

(3) 当 $0<k<16$ 时，$y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一、第三象限，它与 $y=-x+8$ 的两个交点 A、B 都在第一象限内，这时 $\angle AOB$ 是锐角；当 $k<0$ 时，$y=\frac{k}{x}$

的图象在第二、第四象限，它与 $y=-x+8$ 的两个交点都在第二、第四象限，此时 $\angle AOB$ 是钝角.

15. 建立平面直角坐标系.

(1) 根据题意可知，$xy=9$，$\therefore$ y 与 x 之间的函数关系式是 $y=\frac{9}{x}$，自变量 x 的取值范围是 $x>0$.

(2) $S=\pi(x^2+y^2)$，$\because$ $x^2+y^2=x^2+\left(\frac{9}{x}\right)^2=\left(x-\frac{9}{x}\right)^2+18\geqslant 18$，

$\therefore$ 当且仅当 $x-\frac{9}{x}=0$ 即 $x=3$ 时，$S_{最小}=18\pi$.

此时，$y=\frac{9}{x}=3$，所以当点 A 的坐标为 $(3,3)$ 时，矩形的外接圆面积 S 最小，S 的最小值为 18π.

(3) 存在.

如图 7 所示，设 AB 与 y 轴相交于点 E，由已知得 $A(3,3)$，$Q(0,2)$，$P\left(-\frac{2}{m},0\right)$.

$$\therefore\ S_{\Delta PAQ}=S_{梯形APOE}-S_{\Delta AEQ}-S_{\Delta OPQ}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{2}{m}+3\right)\times 3-1\times 3-2\times\left(-\frac{2}{m}\right)\right]$$
$$=3-\frac{1}{m}.$$

$\therefore$ $3-\frac{1}{m}=\frac{1}{6}\times 36$，解得 $m=-\frac{1}{3}$.

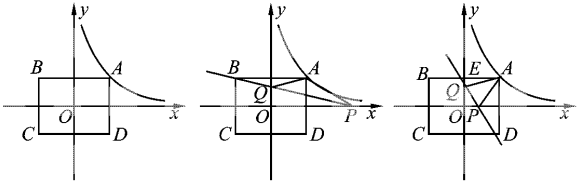


图 7

16. (1) 将 $C(4,n)$ 代入 $y=\frac{24}{x}$，得 $n=6$；

将 $(4,6)$ 代入 $y=\frac{3}{4}x+m$，得 $m=3$.

图象略.

(2) ①由题意,得$\frac{10-k}{k}=\frac{5}{4}$,即　$k_1=\frac{40}{9}$,

或$\frac{10-k}{k}=\frac{4}{5}$,即　$k_2=\frac{50}{9}$.

② 作 $QM\perp x$ 轴于 M. 设 $QM=h$,则$\frac{h}{3}=\frac{10-k}{5}$,故 $h=\frac{30-3k}{5}$.

$\therefore\ S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}k\cdot\frac{30-3k}{5}=-\frac{3}{10}(k-5)^2+\frac{15}{2}$.

$\therefore$ 当 $k=5$ 时,$\triangle APQ$ 的面积取最大值,最大值为$\frac{15}{2}$.

13.9　小结与复习

【基础能力测试】

1. (1) $S=2n+1$　(2) 102　(3) $(2,2\sqrt{3})$;$[5\sqrt{2},135°]$

2. (1) $m=2n+18$　(2) $m=3n+17$,$m=4n+16$　(3) $m=bn+a-b$,$1\leqslant n\leqslant p$

3. (1) $y=-x^2+x+6$,$E\left(\frac{1}{2},\frac{25}{4}\right)$;

(2) $(0,6)$、$(1,6)$、$(-3,-6)$,$(4,-6)$.

4. (1) 当 $m=0$ 时,$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2$;当 $m=-\frac{15}{16}$时,$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{8}x+\frac{1}{8}$. (2) 当 $m=0$ 时,$\triangle AOC\backsim\triangle COB$;当 $m=-\frac{15}{16}$时,$\triangle AOC$ 与 $\triangle COB$ 不相似.

5. (1) $m=-2$,$n=-\sqrt{3}$,$t=\sqrt{3}$;(2) 直线 l_1 的解析式为 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$,直线 l_2 的解析式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$;(3) 过点 B 作 $BP_1\perp AC$ 于点 P,可确定 $P_1\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 过 B 作 $BP_2\perp AB$ 交 AC 于点 P_2. 可确定 $P_2\left(-2,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;所求 P 点的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-2,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

6. (1) $0<x<\sqrt{3}$;(2) $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+2x$;(3) 作 $AD\perp BC$,当 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,y 取得最大值,此时 $MN=\frac{1}{2}AD$.

7. (1) 过点 C 作 $CE\perp x$ 轴,垂足为 E,延长 BA 交 x 轴于 F 点,则 $BF\perp x$ 轴,易确定点 $O(0,0)$、$B(1,3.5)$、$C(7,3.5)$,从而可求出抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$ $(0\leqslant x\leqslant 7)$. (2) 过点 H 作 $HM\perp x$ 轴于 M,易知

$\tan\angle HOM=\frac{HM}{OM}=2$，即 OH 与水平线 Ox 之间夹角的正切值为 2.

【探究能力测试】

8. (1) $y_{甲}=5x+200$ $(x\geqslant 100)$，$y_{乙}=4.5x+225$ $(x\geqslant 10)$　(2) $y_{甲}-y_{乙}=0.5x-25$，$x=50$ 时，$y_{甲}=y_{乙}$；$x>50$ 时，$y_{甲}>y_{乙}$；$x<50$ 时，$y_{甲}<y_{乙}$

(3) 选用优惠办法甲购买 10 支毛笔和 10 本书法练习本，再用优惠办法乙购买 50 本书法练习本的方案最省钱.

9. (1) $y=-\frac{1}{10}x+30$　(2) $z=-\frac{1}{10}x^2+34x-3200$　(3) 销售单价为 160 元时，年销售量为 14 万件. 销售单价还可以定为 180 元，年销售量为 12 万件　(4) $120\leqslant x\leqslant 220$ 时，$z\geqslant 1130$

10. 解　延长 HG，KG 分别交 AD，AB 于 M，N.

(1) 当 G 是 EF 中点时，由三角形中位线定理，得 $MG=\frac{1}{2}AE=30$，$GN=\frac{1}{2}FA=20$.

$\therefore S_{矩形KGHC}=HG\cdot KG=(200-30)(160-20)=23800\ (m^2)$.

(2) 设 $MG=x$，则 $GH=200-x$.

$\because MG/\!/AE$，$\therefore \triangle FMG\backsim\triangle FAE$，

$\therefore \frac{FM}{FA}=\frac{MG}{AE}$，$FM=\frac{FA\cdot MG}{AE}=\frac{2}{3}x$.

$\therefore MA=FA-FM=40-\frac{2}{3}x$ $(0\leqslant x\leqslant 60)$.

$\therefore S_{矩形KGHC}=HG\cdot KG$

$=(200-x)\left[160-\left(40-\frac{2}{3}x\right)\right]$

$=-\frac{2}{3}x^2+\frac{40}{3}x+200\times 120$，

$\therefore$ 当 $x=10$ (m) 时，$S_{矩形KGHC}$ 最大.

$\therefore$ 当点 G 在 EF 上距 AD 10 m 时，公园的面积最大.

11. (1) 作 $CH\perp AB$ 于 H，交 NF 于 G，则 $CH=h$.

显然 $\angle ACB=90^\circ$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

由 $AC=8$，$BC=6$，可得

$AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}BC\cdot AC$.

$\therefore\ h=\dfrac{8\times6}{10}=4.8.$

(2) 设 $DN=x$，矩形 $DEFN$ 的面积为 S，$CG=4.8-x$.

因 $NF/\!/AB$，故 $\triangle CNF\backsim\triangle CAB$.

$\therefore\ \dfrac{NF}{AB}=\dfrac{CG}{CH}$，即 $NF=\dfrac{AB\cdot CG}{CH}=\dfrac{10(4.8-x)}{4.8}=10-\dfrac{25x}{12}$.

$S=DN\cdot NF=x\left(10-\dfrac{25x}{12}\right)=-\dfrac{25}{12}\left(x-\dfrac{12}{5}\right)^2+12$，

即当 $x=2.4$ 时，矩形 $DEFN$ 的面积 S 最大.

(3) 显然 $\triangle ABC\backsim\triangle CBH$，$\dfrac{BC}{BH}=\dfrac{AB}{BC}$，即 $BH=\dfrac{BC^2}{AB}=\dfrac{36}{10}=3.6$.

又 $\mathrm{Rt}\triangle CGF\backsim\mathrm{Rt}\triangle CHB$，$\dfrac{FG}{BH}=\dfrac{CG}{CH}$.

$\therefore\ FG=CG\cdot\dfrac{BH}{CH}=(4.8-2.4)\times\dfrac{3.6}{4.8}=1.8.$

由 $BE=BH-FG=3.6-1.8=1.8$，

而 $BM=1.85$，即这棵大树位于最大矩形的边上.

故为了保护大树，又满足原来的设计要求，只需在半圆上取 C 点的对称点 C'，即使 C' 点在半圆上，使 $AC'=6$，$BC=8$，$\triangle ABC'$ 是以 C' 为直角顶点的直角三角形.

12. (1) $AC=1$，$OB=5$　(2) $OC=\sqrt{5}$

13. (1) $x_1<0<x_2$，$\therefore AO=-x_1$，$OB=x_2$，又 $a=1>0$，$\therefore CO=m+1>0$. $\therefore m>-1$. $\because\dfrac{1}{AO}-\dfrac{1}{OB}=\dfrac{2}{CO}$. $\therefore CO(OB-AO)=2AO\cdot OB$，即 $(m+1)(x_1+x_2)=-2x_1x_2$. $\because x_1+x_2=2(m-1)$，$x_1x_2=-(1+m)$，$\therefore(m+1)\cdot2(m-1)=2(1+m)$，解得 $m=-1$（舍去），$m=2$. $\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=x^2-2x-3$.　(2) 存在着直线 $y=kx+b$ 与抛物线交于点 P、Q，使 y 轴平分 $\triangle CPQ$ 的面积. 设点 P 的横坐标为 x_P，点 Q 的横坐标为 x_Q，直线与 y 轴交于点 E. $\because S_{\triangle PCE}=S_{\triangle QCE}$，$\dfrac{1}{2}CE\cdot|x_P|=\dfrac{1}{2}CE\cdot|x_Q|$，$\therefore|x_P|=|x_Q|$ $\because y$ 轴平分 $\triangle CPQ$ 的面积，$\therefore$ 点 P、Q 在 y 轴异侧，$x_P=-x_Q$. 由 $\begin{cases}y=kx+b\\y=x^2-2x-3\end{cases}$ 得 $x^2-(k+2)x-(b+3)=0$　① x_P、x_Q 为①的两根，$\therefore x_P+x_Q=k+2=0$，$\therefore k=-2$. 又 $\because$ 直线与抛物线有两个交点，$\therefore b+3>0$，即 $b>-3$. $\therefore$ 当 $k=-2$，且 $b>-3$ 时，直线 $y=kx+b$ 与抛物线交于点 P、Q 使 y 轴平分 $\triangle CPQ$ 的面积.

14．(1) 由题意得 $B(2,0)$，$y=-x^2+5x-6$.

(2) 过 D 作 $DP_1\perp x$ 轴，$DP_2\perp AC$ 分别交直线 AC 于 P_1、P_2，$P_2H\perp x$ 轴于 H，若 $\triangle ADP_1\backsim\triangle AOC$，则 $DP_1=2CO=12$，$\therefore\ P_1(-3,-12)$. 若 $\triangle ADP_2\backsim\triangle ACO$，则 $\frac{AP_2}{AO}=\frac{AD}{AC}$，$AP_2=\frac{6}{5}\sqrt{5}$，由 $AP_2^2=AH\cdot AD$，$AH=\frac{6}{5}$，$OH=\frac{9}{5}$，把 $x=\frac{9}{5}$ 代入 $y=2x-6$ 得 $y=-\frac{12}{5}$，

$\therefore\ P_2\left(\frac{9}{5},-\frac{12}{5}\right)$.

(3) 存在点 $M\left(\frac{25-\sqrt{5}}{10},\frac{1}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{25+\sqrt{5}}{10},\frac{1}{5}\right)$.

15．(1) $y=-x^2+4x-3$，$M(1,0)$，$N(3,0)$. (2) $OD=\sqrt{3}$. (3) $D\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$. (4) 存在 P 点为 $\left(1,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$(3,\pm\sqrt{3})$；$\left(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

16．(1) 过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，由抛物线对称性知，$A(1,0)$，$B(3,0)$，$\therefore\ DA=DB=DC=1$. $\therefore\ \triangle ACB$ 是等腰直角三角形. (2) $y=(x-2)^2-1$. (3) 在抛物线上存在四个点 P，使 $\triangle PAC$ 是等腰三角形. ① 当 AC 为腰时，存在点 $P_1(3,0)$ 满足条件；又以 A 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆弧与抛物线必有交点 $P_4(x_0,y_0)$，满足 $P_4A=AC$，此时，$0<x_0<1$，$1<y_0<\sqrt{2}$；② 当 AC 为底时，作 AC 的中垂线，与抛物线交于 P_2、P_3 两点，即是符合条件的点，P_2P_3 的解析式为 $y=x-2$，解方程组 $\begin{cases}y=x-2,\\ y=x^2-4x+3\end{cases}$ 得 $P_2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$，$P_3\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

17．不变的关系，(1) 矩形 $OMPN$ 面积为 $\frac{1}{2}$. (2) $\triangle BNF\backsim\triangle FPE\backsim\triangle AME$ (均为等腰直角三角形) (3) $AF\cdot BE=1$. (4) $\triangle BOE\backsim\triangle AFO$ (5) $\angle EOF=45^\circ$ (6) 设 $\triangle EOF$ 的外心为 I，则四边形 $IEPF$ 为正方形. (7) 动点 P 到直线 AB 的最短距离为 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. (8) 当 P 到 AB 的距离 d 最短时，正方形 $IEPF$ (I 为 ΔEOF 的外心) 的面积最小，等于 $3-2\sqrt{2}$，等.

18．解 (1) $\because\ y=-2x+6$ 交 x 轴于 A，交 y 轴于 C，

$\therefore$ 令 $x=0$，$y=6$；$y=0$，$x=3$.

$\therefore A(3,0)$，$C(0,6)$.

设 B 的坐标 $(x,0)$，且 $x<0$，

$\therefore S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC=-\frac{1}{2}x\times 6=-3x$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times OC=\frac{1}{2}(-x+3)\times 6=3(-x+3)$.

$\because S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle BOC}$，

$\therefore 3(-x+3)=4\times(-3x)$.

$\therefore x=-1$.

$\therefore B$ 的坐标为 $(-1,0)$.

$\because y=ax^2+bx+c$ 过 $A(3,0)$，$B(-1,0)$，$C(0,6)$.

$\therefore 9a+3b+c=0$，$a-b+c=0$，$c=6$.

解之　$a=-2$，$b=4$，$c=6$.

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-2x^2+4x+6$，顶点坐标为 $(1,8)$.

(2) $\odot M$ 与 AC 位置关系是相交. 理由 过 M 作 $MD\perp AC$ 交 AC 于 D，

$\because \triangle AMD\backsim\triangle AOC$，

$\therefore \frac{MD}{OC}=\frac{AM}{AC}$.

$\therefore \frac{MD}{6}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6^2+3^2}}$. $\therefore MD=\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

$\therefore \frac{3}{5}\sqrt{5}<\frac{3}{2}$.

即圆心到直线的距离小于 $\odot M$ 半径.

$\therefore \odot M$ 与直线 AC 相交.

19. (1) $\because$ 判别式 $\Delta=a^2-4(a-2)=(a-2)^2+4>0$，$\therefore$ 抛物线与 x 轴总有两个不同交点，又 $\because$ 抛物线开口向上，$\therefore$ 抛物线的顶点在 x 轴下方. (或由二次函数解析式得：$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+a-2$，$\because$ 抛物线顶点的纵坐标 $-\frac{1}{4}a^2+a-2=-\left[\frac{1}{4}(a-2)^2+1\right]<0$. 当 a 取任何实数时总成立，$\therefore$ 不论 a 取何值，抛物线的顶点总在 x 轴下方)　(2) 由条件得：抛物线顶点 $Q\left(-\frac{a}{2},-\frac{1}{4}a^2+a-2\right)$，点 $C(0,a-2)$. 当 $a\neq 0$ 时，过点 C 存在平行于 x 轴的直线与抛物线交于另一个点 D，此时 $CD=|-a|$，点 Q 到 CD 的距离为 $\left|(a-2)-\left(-\frac{1}{4}a^2+a-2\right)\right|=\frac{1}{4}a^2$. 自 Q 作 $QP\perp CD$，垂足为 P，要

使△QCD为等边三角形，则需 $QP=\frac{\sqrt{3}}{2}CD$，即$\frac{1}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}|1-a|$，∵ $a\neq0$，

解得 $a=\pm2\sqrt{3}$.（或由 $CD=CQ$，或由 $CP=\frac{1}{2}\cdot CQ$ 等求得a 的值）

∴ △QCD 可以是等边三角形，此时相应的二次函数解析式为：$y=x^2+2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-2$ 或 $y=x^2-2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}-2$. (3) ∵ $CD=|-a|$，点 A 到 CD 的距离为 $|a-2|$，由 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}|a(a-2)|=\frac{1}{4}$，解得 $a=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $a=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ 满足条件的抛物线有四条.

20. 解 (1) 如图 8，建立直角坐标系.

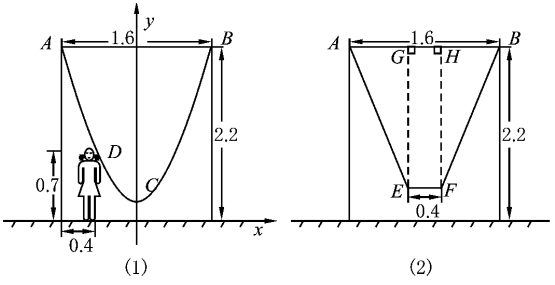


图 8

设二次函数解析式为 $y=ax^2+c$.

∵ $D(-0.4,0.7)$，$B(0.8,2.2)$，

∴ $\begin{cases}0.16a+c=0.7,\\0.64a+c=2.2.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}a=\frac{25}{8},\\c=0.2.\end{cases}$

∴ 绳子最低点到地面的距离为 0.2 m.

(2) 分别作 $EG\perp AB$ 于 G，$FH\perp AB$ 于 H.

$AG=\frac{1}{2}(AB-EF)=\frac{1}{2}(1.6-0.4)=0.6$.

在 Rt△AGE 中，$AE=2$，

$EG=\sqrt{AE^2-AG^2}=\sqrt{2^2-0.6^2}=\sqrt{3.64}\approx1.9$.

∴ $2.2-1.9=0.3$(m).

∴ 木板到地面的距离约为 0.3 m.

第十四章　统计初步

14.1　平均数

[基础能力测试]

1. (1) 90　先求平均数,再乘以 30 天.　(2) 7　由$\frac{56}{n}=8$得 $n=7$.

(3) 12.6　$\overline{x}=\frac{1}{8}(13.8+12.5+10.6+11+14.7+12.4+13.6+12.2)$.　(4) 1000,约 2011　(5) 9.5　(6) 8　(7) 80　(8) 96

(9) 21 或 1　由 $2+7+x+3y=18$, $7+y^2-3+7-2x+x-2y=8$,解方程组.

(10) 19.6　(11) 10　$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}=5$, (x_1+5), (x_2+5), $+\cdots+(x_n+5)$ 的平均数为$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+5=10$.

(12) 28　$\frac{(6x_1+10)+(6x_2+10)+\cdots+(6x_n+10)}{n}=6\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)+10=6\times3+10=28$.

(13)　$a\overline{x}+b\overline{y}$　$\frac{ax_1+by_1+ax_2+by_2+\cdots+ax_n+by_n}{n}$

$=\frac{a(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}+b\frac{(y_1+y_2+\cdots+y_n)}{n}=a\overline{x}+b\overline{y}$.

(14) $2\overline{x}+\overline{y}$.　(15) a　(16) $\overline{x}-a$

(17) 8　(18) $m+0.05$　(19) 1　(20) 19　(21) 15 岁　(22) 8.1

(23) $2a$, $3a-1$　(24) $a\overline{x}+b$　(25) 100　(26) 20

(27) 2190　先求平均数.　(28) 140、8680

2. (1) D　(2) A　(3) D　(4) B　(5) B　(6) A　(7) A　(8) B　(9) B　(10) C　(11) D　(12) D　(13) B　(14) A　(15) C　(16) B　(17) B　(18) A　(19) A　(20) D　(21) C　(22) C.

3. (1) $\overline{x}=82$　(2) 95%　$\frac{19}{20}=95\%$

4. $\overline{x}=64820$　$64820\times100=6482000\approx6.48\times10^6$ (株)

5. (1) 25;(2) 1500 人.

[探究能力测试]

6. (1) 163.11　(2) 86.25 亿元　(3) 如 2000 年至 2001 年的消费品零售总额的增长速度比 1980 年至 1990 年 10 年间的消费品零售总额平均增长

的速度快;可以看出 2000 年人民生活水平比 10 年前有大幅度提高,等等.

7. (1) 1.8;3.6×10^3;2.7×10^4 (2) 至少 1350 kg

8. 不可靠,理由:第一,所取的样本容量太小;第二,样本的抽取缺乏随机性.

14.2 众数与中位数

【基础能力测试】

1. (1) 78,80 (2) 2 (3) 21

(4) 24,24.5 众数 (5) 众数,平均数,中位数

(6) 17 或 18 或 19 (7) (1) 略 (2) 2,0,0 (8) 9;9,8.6

(9) 22 (10) c,$\frac{b+c}{2}$,$\frac{2a+2b+3c+d}{8}$

(11) 将这组数据按大小顺序排列后,最中间两个数的平均数

(12) a (13) 6,6 (14) 31 (15) ① 22,② 73,③ 146

2. (1) A (2) D (3) B (4) D (5) A (6) D (7) C (8) D (9) C

3. 34

4. (1) 众数为 113 (度),$\overline{x}=108$ (度);(2) 某月耗电量 $Q=108\times30=3240$ (度);(3) $y=0.5\times108x$,即 $y=54x$.

【探究能力测试】

5. (1) 不合格,合格 (2) 75%,25% (3) 240 (4) 合理,该样本是随机样本.

6. (1) 中位数 (2) 众数 (3) 求平均数的方法 (4) 甲、乙两人的说法都能较好地反映公司员工收入的一般水平.

7. (1) 160 cm (2) 中位数是 161 cm. 众数是 162 cm (3) 先将初三年级中身高为 162 cm 的所有女生挑选出来作为参加方队的人选,如果人数不够,则以身高为 162 cm 的差的绝对值越小越好的标准来挑选参加方队的女生. 如此继续下去,直至挑选到 30 人为止.

8. 解 (1) 平均数为:

$$\frac{1\times1800+1\times510+3\times250+5\times210+3\times150+2\times120}{1+1+3+5+3+2}=320\text{ (件)};$$

中位数为:210 (件).

众数为:210 (件).

(2) 不合理.

因为 15 人中有 13 人的销售额达不到 320 件,

(320 虽是所给一组数据的平均数,它却不能反映营销人员的一般水平.)

销售额定为 210 件合适一些,因为 210 既是中位数,又是众数,是大部分人能达到的定额.

9. 有许多方案,这里只给出三种.

解法一:(1) 其他局投球次数 n 换算成该局得分 M 的公式为

$M=7-n$.

(2)

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲得分	2	0	3	0	6
乙得分	0	5	3	5	0

$\overline{M}_{甲}=\frac{2+0+3+0+6}{5}=\frac{11}{5}$ (分),$\overline{M}_{乙}=\frac{0+5+3+5+0}{5}=\frac{13}{5}$ (分).

故以此方案来判断:乙投得更好.

解法二:(1) 其他局投球次数 n 换算成该局得分 M 的公式为

$M=\frac{60}{n}$.

(2)

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲得分	12	0	15	0	60
乙得分	0	30	15	30	0

$\overline{M}_{甲}=\frac{12+0+15+0+60}{5}=\frac{87}{5}$ (分),

$\overline{M}_{乙}=\frac{0+30+15+30+0}{5}=\frac{75}{5}$ (分).

故以此方案来判断:甲投得更好.

解法三:(1) 其他局投球次数 n 换算成该局得分 M 的方案如下表

n (投球次数)	1	2	3	4	5	6
M (该局得分)	6	5	4	3	2	1

(2)

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲得分	2	0	3	0	6
乙得分	0	5	3	5	0

$\overline{M}_{甲}=\frac{2+0+3+0+6}{5}=\frac{11}{5}$(分),$\overline{M}_{乙}=\frac{0+5+3+5+0}{5}=\frac{13}{5}$(分).

故以此方案来判断,乙投得更好.

14.3 方 差

【基础能力测试】

1. (1) 0;0;1.5 (2) 甲 (3) 甲种玉米 (4) 甲 (5) 乙

(6) 2,2,3,3.2 (7) 7,2 (8) $\sqrt{3}$ (9) 甲 (10) $\sqrt{2}$

(11) $s^2_{甲}>s^2_{乙}$ (12) (1) A (2) 4

2. (1) A (2) B (3) D (4) A (5) B (6) B (7) B (8) C (9) D (10) C (11) B (12) B (13) D

3. $\overline{x}_{甲}=80,\overline{x}_{乙}=80,s^2_{甲}=26$, $s^2_{乙}=2$,∵ $s^2_{乙}<s^2_{甲}$, ∴ 乙同学的数学学习成绩比较稳定.

4. (1) $\overline{x}_{甲}=100,\overline{x}_{乙}=100,s^2_{甲}=\frac{7}{3},s^2_{乙}=1$. (2) 由(1)知,$\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$,而 $s^2_{乙}<乙^2_{甲}$,这说明乙机床加工的零件更符合要求.

5. (1) 两品种平均单产一样高;(2) 甲品种稳定性好;(3) 选甲.

【探究能力测试】

6. (1) 先计算平均直径:$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{4}(10+9.8+10+10.2)=10$,

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{4}(10.1+10+9.9+10)=10$,

由于 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$,因此,平均直径反映不出两台机床生产的零件的质量优劣;

(2) 再计算方差:

$s^2_{甲}=\frac{1}{4}[(10-10)^2+(9.8-10)^2+(10-10)^2+(10.2-10^2)]=0.02$,

$s^2_{乙}=\frac{1}{4}[(10.1-10)^2+(10-10)^2+(9.9-10)^2+(10-10^2)]$

$=0.005$,

由于 $s_{乙}^2 < s_{甲}^2$，这说明乙机床生产出的零件直径波动小；因此，从产品质量稳定性的角度考虑，乙机床生产的零件质量更符合要求.

7. (1) 张明：80，60；王成：80，85，90　(2) 王成　(3) 王成的学习要持之以恒，保持稳定；张明的学习还须加一把劲，提高优分率. (答案不唯一)

8. 解　(1) 8　8　9　8　(2) 解法 1：计算方差：$s_{甲}^2 = \frac{1}{10}[3\times1^2 + 4\times0^2 + 3\times(-1)^2] = 0.6$，$s_{乙}^2 = \frac{1}{10}[2\times2^2 + 3\times1^2 + 0^2 + 2\times(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2] = 2.6$，甲、乙两人射中的平均环数虽然都是 8 环，但从 $s_{甲}^2 < s_{乙}^2$ 知道，射手甲比射手乙波动小，较稳定，所以选甲. 解法 2：甲、乙两人射中的平均环数虽然都是 8 环，但从图上看甲射中的环数偏离 8 环较少，波动较小；乙射中的环数偏离 8 环较多，波动较大，这说明，在射靶 10 次的稳定性方面，射手甲比射手乙要好，应选甲.

14.4　用计算器求平均数、标准差与方差

【基础能力测试】

1. (1) ① 建立统计运算状态　② 整理数据　③ 输入数据　④ 执行统计运算　⑤ 退出运算状态　(2) [MODE] 1.　(3) 9.3 [STO] 4 [DATA]　(4) 输入　(5) [DEL]　(6) [+/−] 3 [DATA] [+/−] 7 [DATA] 12 [DATA] 10 [DATA] [+/−] 4 [DATA] [RCL] [$\sum x$]　(7) 方差、方差、平方.

2. [MODE] 1 9.9 [DATA] 10.3 [DATA] 10 [DATA] 9.5 [DATA] 9.7 [DATA] 9.8 [DATA] 10.5 [DATA] 10 [DATA] 10.2 [DATA] 10 [DATA] [RCL] [$\bar{x}$] 显示 9.99　$\bar{x} = 9.99$.　[RCL] [σx]，显示 0.277308492　标准差 $s = 0.2773$.

【探究能力测试】

3. $\bar{x}_{甲} = 100$，$\bar{x}_{乙} = 100$，$s_{甲}^2 = 1.33$，$s_{乙}^2 = 0.7$，$s_{乙}^2 < s_{甲}^2$，采用乙较好.

4. $s_{甲}^2 = 0.21$，$s_{乙}^2 = 0.89$，$s_{丙}^2 = 0.49$，

$s_{甲}^2 < s_{丙}^2 < s_{乙}^2$，应选甲参加比赛.

14.5　频率分布

【基础能力测试】

1. (1) $\frac{1}{5}$　(2) 0.05　(3) ①20　② 20%　③ $77 \leqslant M \leqslant 86$　④ 略　(4) ① 86，83　② $\bar{x} > \bar{y}$　③ 甲组成绩比乙组成绩整齐　④ 5，0.25　(5)

0.2,50 (6) 27 (7) ① 表中第一组频数为 2,第三组分组为 69.5～79.5,第四组频数为 17,频率为 0.34.

② 优秀率是$\frac{38}{50}\times 100\% = 76\%$.

③ 该校初二年级数学学习情况良好. (8) 5,0.4,20 (9) 5,60 (10)

分 组	频数累计	频数	频率
20.5～22.5			
22.5～24.5			
24.5～26.5	正	8	0.40
26.5～28.5	丅	4	0.20
28.5～30.5			
合 计		20	1.00

(11) 56 (12) 1243

2. (1) $n = 5 \div 0.20 = 25$;(2) $25 \times (1 - 0.12 - 0.20 - 0.32) = 9$; (3) 略

3. (1) 总体是指某中学初三年级 600 名学生的数学测验成绩的全体,所抽取的 50 名学生的成绩是总体的一个样本. (2) 第三列中补填 16;第四列中补填 0.24. (3) 估计这次测验中该校初三全年级的学生成绩在 69.5～79.5 的人数约为 120 人.

4. (1) 0.20,图略 (2) 180,55% (3) 以明湖区一中初二女生的仰卧起坐成绩作为一个样本,可以估计明湖区 12 所中学初二女生的仰卧起坐成绩达标率约为 55%.

5. (1) 50 (2) 频数 12,频率 0.24 (3) 中位数落在 70.5～80.5 分数段内 (4) 从左到右各小组的频率比为 4∶10∶18∶12∶6=2∶5∶9∶6∶3

6. (1) 在这个问题中,总体是指某中学初中三年级 175 名男学生的身高的全体,所抽取的 50 名男学生的身高是总体的一个样本;(2) 第一列为 163.5～167.5,第三列为 4,第四列为 0.30,1.00;(3) ① 该校初中三年级男学生身高在 155.5～159.5 (cm) 范围内的人数约为 14 人,占 8%. ② 根据样本平均数估计,该校初中三年级男学生的平均身高约为 164 (cm).

7. (1) 该班学生数为 $4+8+10+16+12=50$ (人)

(2) 频数 12，频率$\frac{12}{50}=0.24$；(3) 先估算全班总分：$55\times4+65\times8+75\times10+85\times16+95\times12=3990$，则估算出平均分为$\frac{3990}{50}=79.8$.

【探究能力测试】

8. $\frac{1}{4}$

9. (1) ①7　②26　③2003 年 5 月 11 日至 29 日每天新增确诊病例人数，19　(2) ①10 人　② 频率：11，40，频率：0.125，0.325，③25

10. (1) 答：选 C

理由：方案 C 采用了随机抽样的方法，随机样本比较具有代表性，可以被用来估计总体.

(2) ① 表格中频数从上往下依次为：15，33，96，33，3.

② 画出频数分布直方图（如图 9）.

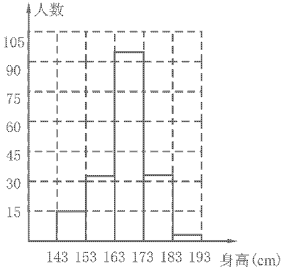


图 9

11. (1) 样本数据中，17 岁男生身高的众数、中位数依次是 1.69 (m)、1.69 (m)；(2) 在样本数据中，身高不低于 1.65 m 且不高于 1.70 m 的学生占 54%，估计这所学校 17 岁的男生中，身高不低于 1.65 m 且不高于 1.70 m 的学生占 54%；(3) 从频率分布表中可以看出，该校 17 岁的男生中，身高在 1.685 m～1.715 m 这个范围内的频率最大；当该校 17 岁的男生人数为 350 人时，估计该校在这个身高范围内的人数是 119 人.

12. (1) 本次调查共抽测了 240 名学生.

(2) 样本是指 240 名学生的视力.

(3) 全市有 7500 名初中生的视力正常.

13. (1) 该班共有 36 名男生；(2) 该班这项测试成绩的合格率是 83.3%

14. (1) 0.40　图略；(2) 初三两个班参赛的学生人数为 100 人；(3) 中位数应落在第二小组内.

15. (1) $3+6+9+12+18=48$，即该班共有 48 人；(2) 60.5～70.5 这一分数段的频数为 12，频率为 $12\div48=0.25$；(3) 中位数落在 70.5～80.5

之内；(4) 略

16. (1) 平均数 20.5，中位数 18　(2) 若以平均数 20.5 即把 20 次定为合格标准，则多数同学难以达到. 根据中位数和众数均为 18，定 18 次为合格标准较为切合学生实际；(3) $1-(0.16+0.7+0.12)=0.02$　(4) $0.7+0.12=0.82=82\%$

17. (1) 初二年级 400 名学生环保知识的成绩是总体，样本为 50 名学生环保知识的成绩　(2) 0.26　0.2　$50\times0.2=10$　(3) $0.18\times200=36$

∴ 约为 36 人.

14.6　实习作业

略