

第一单元 直角三角形的边角关系

课标定位梳理	1
1. 从梯子的倾斜程度谈起	3
30° 45° 60° 角的三角函数值	3
三角函数的有关计算	3
2. 船有触礁的危险吗	19
测量物体的高度	19
思维整合升华	37

第二单元 二次函数

课标定位梳理	47
1. 二次函数所描述的关系	49
结识抛物线	49
刹车距离与二次函数	49
2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象	58
用三种方式表示二次函数	58
3. 何时获得最大利润	84
最大面积是多少	84
二次函数与一元二次方程	84
思维整合升华	99
期中测试题	115

第三单元 圆

课标定位梳理	118
1. 车轮为什么做成圆形	119

圆的对称性	119
圆周角和圆心角的关系	119
2. 确定圆的条件	139
直线和圆的位置关系	139
圆和圆的位置关系	139
3. 弧长及扇形的面积	161
圆锥的侧面积	161
思维整合升华	178

第四单元 统计与概率

课标定位梳理	193
50 年的变化	194
哪种方式更合算	194
游戏公平吗	194
思维整合升华	217
期末测试题	231
综合测试题(一)	235
综合测试题(二)	239
参考答案	243



第一单元 直角三角形的 边角关系

课标定位梳理

一、单元目标定位

1. 知识目标定位

(1) 经历探索直角三角形中边角之间关系的过程, 理解锐角三角函数的概念, 并能举例说明.

(2) 经历探索 30° , 45° , 60° 角的三角函数值的过程, 会计算含 30° , 45° , 60° 角的三角函数值的问题.

(3) 能够借助计算器由已知锐角求出它的三角函数值, 或由已知三角函数值求出相应的锐角.

2. 能力目标定位

(1) 能够运用三角函数解直角三角形, 并解决与直角三角形有关的实际问题, 培养学生分析问题、解决问题的能力.

(2) 体会数形之间的联系, 逐步学习利用数形结合的思想分析问题和解决问题, 从而发展数学应用意识和解决问题的能力.

二、单元学法指导

直角三角形中边角之间的关系, 是事实情境中应用广泛的关系之一. 单元重点是掌握锐角三角函数及其直角三角形中的边角关系. 单元难点是将实际问题转化为直角三角形边角关系的模型来解决. 在学习时应注意以下



方法和规律.

(1)明确锐角三角函数的定义是在直角三角形中研究的.

(2)搞清楚什么是直角三角形中一个锐角的对边和邻边以及斜边,在复杂的图形中能熟练地辨认.

(3)熟记特殊角的三角函数值和公式.

(4)解直角三角形的方法可概括为“有弦(斜边)用弦(正弦、余弦),无弦用切(正切、余切),宁乘毋除,取原避中”,其意指:当已知或求解中有斜边时,可用正弦或余弦;无斜边时,就用正切或余切;当所求元素既可用乘法又可用除法时,则用乘法,不用除法;既可由已知数据又可用中间数据求解时,则取原始数据,忌用中间数据.

(5)解含有非基本元素的直角三角形(即直角三角形中中线、高、角平分线、周长、面积等),一般将非基本元素转化为基本元素,或转化为元素间的关系式,再通过解方程组来解.

(6)会解以下几种类型的题:

①已知直角三角形的边长,求锐角的四个三角函数值(或求锐角的度数).

②已知直角三角形中一个锐角的函数值(或特殊角的度数)和一条边的长,求其他两边的长.

③根据三角函数的增减性,进行三角函数值的大小比较.

④根据特殊角的三角函数值进行计算.

⑤根据正、余弦互余的关系,正、余切互余的关系进行一些式子的化简、求值和恒等式的证明.

1. 从梯子的倾斜程度谈起

30° 45° 60° 角的三角函数值

三角函数的有关计算



自主学习提示

一、相关知识链接

1. 直角三角形的定义

在 $\triangle ABC$ 中, 若有一个内角为直角, 那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 记作 $\text{Rt}\triangle ABC$, 如图 1-1 中, $\angle C = 90^\circ$.

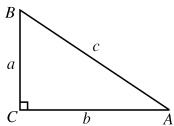


图 1-1

2. 直角三角形的组成元素(图 1-1)

(1) 有 6 个元素.

3 个内角: 直角 $\angle C = 90^\circ$, 锐角 $\angle A < 90^\circ$ 、 $\angle B < 90^\circ$;

3 条边: 直角边 AC 、 BC , 斜边 AB .

(2) 边与角之间的关系.

$\angle C = 90^\circ$ 是直角, 其对边是斜边 c ,

邻边有 b 、 a 均是直角边 $c > a$, $c > b$;

$\angle A$ 是锐角, 其对边是直角边 a , 邻边是斜边 c 和另一直角边 b ;

$\angle B$ 是锐角, 其对边是直角边 b , 邻边是斜边 c 和另一直角边 a .

3. 勾股定理

直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方, 即在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别为 a , b , c , 则 $a^2 + b^2 = c^2$.

4. 直角三角形的两锐角互余

即在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A + \angle B = 90^\circ$.

5. 相似三角形的判定及性质

相似三角形的对应边成比例, 对应角相等.

二、重难点知识提示

本节重点: 直角三角形中锐角三角函数的定义、特殊锐角与其三角函数值之间的对应关系.

本节难点: 用函数观点理解正弦、余弦、正切.

发散思维分析



一、锐角三角函数的定义

1. 正切的定义及公式

如图 1-2 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 如果锐角 A 确定, 那么 $\angle A$ 的对边与邻边的比便随之确定, 这个比叫做 $\angle A$ 的正切(tangent)记作 $\tan A$, 即 $\tan A =$

$$\frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}.$$

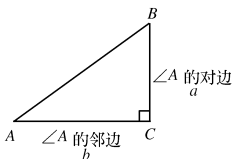


图 1-2

2. 正弦、余弦的定义及公式

如图 1-3 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 如果锐角 A 确定, 那么 $\angle A$ 的对边与斜边的比、邻边与斜边的比便随之确定.

$\angle A$ 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦(sine),

记作 $\sin A$, 即 $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}.$

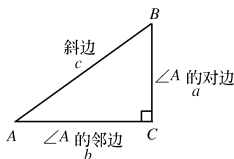


图 1-3

$\angle A$ 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦(cosine), 记作 $\cos A$, 即 $\cos A =$

$$\frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}.$$

3. 三角函数的定义

锐角 A 的正弦、余弦和正切都是 $\angle A$ 的三角函数(trigonometric function).

4. 梯子的倾斜程度与三角函数的关系(图 1-4)

$\tan A$ 的值越大, 梯子越陡;

$\sin A$ 的值越大, 梯子越陡;

$\cos A$ 的值越小, 梯子越陡.

5. 坡度(或坡比)的定义

坡面的铅直高度与水平宽度的比称坡度(或坡比)如图 1-5 所示, 正切值经常用来描述山坡的坡度. 例如, 有一山坡在水平方向上每前进 100m 就升高 60m, 那么山坡的坡度($\tan \alpha$)就是 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$. 工程上, 斜坡的倾斜程度通常用坡度来表示, 而坡度是坡角的正

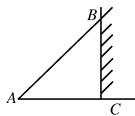


图 1-4

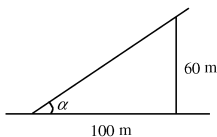


图 1-5

切,因此要注意坡度与坡角的区别和联系.显然,坡度越大,坡面越陡.

二、一些特殊角的三角函数值(表 1-1)

表 1-1

三角函数 \ 角度 α	0°	30°	45°	60°	90°
三角函数					
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

三、锐角 α 的三角函数值的符号及变化规律

1. 符号

锐角 α 的三角函数值都是正值.

2. 变化规律

若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 则 $\sin\alpha$ 、 $\tan\alpha$ 随着 α 的增大而增大; $\cos\alpha$ 随着 α 的增大而减小.

四、运用计算器进行三角函数的有关计算

已知锐角可用计算器计算它的三角函数值,反过来已知三角函数值也可用计算器求出相应锐角的度数.

在同一个班级中你也许会发现不同型号的计算器,一般来讲,不同的计算器在按键的程序和方式上可能不同,在操作之前,一定要仔细阅读自己计算器的使用说明书,按操作指令使用自己的计算器.在同班级出现不同型号计算器的情况下,同学之间可以互相交流,使自己学会使用不同型号的计算器.

例 1 用计算器求下列锐角三角函数值.

(1) $\sin 58^\circ$; (2) $\cos 24^\circ 35'$; (3) $\tan 47^\circ 18' 23''$. (保留四个有效数字)

分析 根据计算器的型号,调整按键步骤.(本书以 TRULY 信利牌 SC118B 双行显示科学计算器为例)

解 按键 $\boxed{\text{ON/C}}$ 开机.

(1)按键顺序为 $\boxed{\sin}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{=}$ 显示结果 0.848 048 096.

$\therefore \sin 58^\circ \approx 0.848 0$.

(2) 按键顺序为 $\boxed{\cos}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{4}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$ 、 $\boxed{3}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{=}$, 显示结果 0.909 357 161.

$$\therefore \cos 24^{\circ} 35' \approx 0.909 4.$$

(3) 按键顺序为 $\boxed{\tan}$ 、 $\boxed{4}$ 、 $\boxed{7}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ 、 $\boxed{=}$, 显示结果 :

1.083 932 109.

$$\therefore \tan 47^{\circ} 18' 23'' \approx 1.084.$$

例 2 已知下列锐角三角函数值 , 用计算器求其相应的锐角 .

(1) $\sin A = 0.501 8$; (2) $\cos A = 0.625 2$; (3) $\tan A = 0.881 6$.

解 按键 $\boxed{\text{ON/C}}$, 开机.

(1) 按键顺序为 $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\sin}$ 、 $\boxed{0}$ 、 $\boxed{\cdot}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{0}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{=}$, 显示结果 : 30.119 158 67°.

再按 $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$, 显示结果 $30^{\circ} 7' 8.97''$.

$$\therefore \angle A \approx 30^{\circ} 7' 9''.$$

(2) 按键顺序为 $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\cos}$ 、 $\boxed{0}$ 、 $\boxed{\cdot}$ 、 $\boxed{6}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{=}$, 显示结果 : 51.303 131 57°.

再按 $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$, 显示结果 $51^{\circ} 18' 11.27''$.

$$\therefore \angle A \approx 51^{\circ} 18' 11''.$$

(3) 按键顺序为 $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\tan}$ 、 $\boxed{0}$ 、 $\boxed{\cdot}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{8}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{6}$ 、 $\boxed{=}$, 显示结果 : 41.399 400 61°.

再按 $\boxed{2\text{ndf}}$ 、 $\boxed{\text{DMS}}$, 显示结果 $41^{\circ} 23' 57.84''$.

$$\therefore \angle A \approx 41^{\circ} 23' 58''.$$

本节的实际问题较多 , 遇到实际问题 , 读懂题意 , 根据题意正确画出图形是解决实际问题的关键 , 为了掌握重点 , 化解难点 , 我们必须注意以下问题 .

1. 同角的三角函数间的关系

(1) 平方关系 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

(2) 商数关系 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

2. 互为余角的三角函数间的关系

$$\sin(90^{\circ} - A) = \cos A ; \cos(90^{\circ} - A) = \sin A .$$

3. 直角三角形三边之间的关系

$$a^2 + b^2 = c^2 (\text{勾股定理})$$

4. 边角之间的关系

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c} ;$$

$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c} ;$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \tan B = \frac{b}{a}.$$

5. 解直角三角形

由直角三角形中除直角外的已知元素, 求出所有未知元素的过程, 叫做解直角三角形.

下面让我们共同探究当已知条件不能直接在直角三角形中应用时, 是如何进行分解或转化的:

❖ 与你探究 ❖

【问题】如图 1-6 所示, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, D 在 AC 上, $\angle BDC = 60^\circ$, $AD = 20$, 求 BC 的长.

【准备】本题中的已知条件 $AD = 20$, 不能直接在直角三角形中利用, 需要进行图形分解或转化.

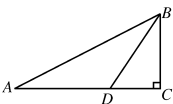


图 1-6

【过程】 $\because \angle A = 30^\circ, \angle BDC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ABD = \angle A = 30^\circ.$$

$$\therefore BD = AD. \text{ 而 } AD = 20, \therefore BD = 20.$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中 } \sin \angle BDC = \frac{BC}{BD}.$$

$$\therefore BC = BD \sin \angle BDC = 20 \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}.$$

【评析】当已知边长与未知边长不在同一个三角形中时, 只有进行等量代换, 使含未知边长的三角形中具有与已知边长相等的边长, 才能利用锐角三角函数解題.

下面让我们共同探究关于“存在性”问题的解题思路:

❖ 与你探究 ❖

【问题】如图 1-7 所示, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 6$, P 是 AB 上一点, 连结 PC , 设 $\angle BCP = m\angle ACP$, 当 $\frac{BP}{AP} = 7 + 4\sqrt{3}$ 时, 是否存在正整数 m , 使 $PC \perp AB$? 如果存在, 求出 m 的值; 如果不存在, 说明理由.

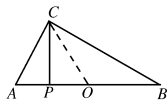


图 1-7

【准备】因 $AB = 6, \frac{BP}{AP}$ 为定值, 所以 P 是 AB 上一定点, 若满足 $PC \perp AB$, 可求 PC 的长, 但 PC 与 PA 的比不是特殊值, 为此 $\angle A$ 不可求, 通过对 PC 、 PB 、 AB 的数量关系分析, 取 AB 的中点 O , 构造 $\text{Rt}\triangle OPC$, 可求 $\angle COA$ 为特殊角, 从而问题得解.

【过程】假设存在正整数 m , 使 $PC \perp AB$,

$$\therefore \frac{BP}{PA} = 7 + 4\sqrt{3}, AB = 6,$$

$$\therefore \frac{6-AP}{AP} = 7 + 4\sqrt{3} \text{ 解得 } AP = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}, BP = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore PC \perp AB,$$

$$\therefore \angle CPB = 90^\circ. \text{ 取 } AB \text{ 的中点 } O, \text{ 连结 } OC,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = 3, \text{ 而 } OP = PB - OB = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OCP \text{ 中 } \cos \angle COP = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \angle COP = 30^\circ.$$

$$\therefore OC = OB, \therefore \angle B = \frac{1}{2}\angle AOC = 15^\circ.$$

$$\therefore \angle BCP = 75^\circ, \angle ACP = 15^\circ, \therefore m = 5.$$

【评析】对于一般的“存在性”问题的解题思路是：首先假设结论存在，然后找出表现其存在性对象应满足的条件，利用正确的数学推理，最后做出合理的判断。



发散思维应用

典型例题

已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3AC$ ，求 $\angle A$ 的正弦、余弦和正切值。

分析 欲求 $\angle A$ 的正弦和余弦值，可由已知条件 $AB = 3AC$ 来求解。

解 $\because \angle C = 90^\circ, AB = 3AC.$

设 $AC = k, AB = 3k$ ，由勾股定理，得

$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{2}k.$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3},$$

$$\tan A = 2\sqrt{2}.$$

指点迷津 在求锐角三角函数值时，经常要用到勾股定理及三角函数的定义，特别是已知两边的比值时，由于无法确定两边的长度，因此需要利用设元的方法来解决问题，但要注意由 $AB = 3AC$ 并不能说明 $AC = 1, AB = 3$ 。

【题型发散】

发散1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)在 $\triangle ABC$ 中,若 $\left|\sin A - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B\right)^2 = 0$, $\angle A$ 、 $\angle B$ 都是锐角,则 $\angle C$ 的度数是 ()

A. 75° B. 90° C. 105° D. 120°

(2)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.若 $\cos A + \sin B = 1$,则 $\angle A$ 的度数是 ()

A. 30° B. 45° C. 60° D. 不能确定

(1)分析 本题考查非负数的性质、特殊角的三角函数值,即先利用非负数的性质求出 $\sin A$ 、 $\cos B$ 的值,进而确定 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的度数,而后利用三角形的内角和求出 $\angle C$ 的度数.

$$\text{解 } \because \left|\sin A - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B\right)^2 = 0,$$

$$\therefore \sin A - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B = 0, \text{即 } \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\because \angle A$ 、 $\angle B$ 均为锐角,

$$\therefore \angle A = 45^\circ, \angle B = 30^\circ.$$

$$\text{又} \because \triangle ABC \text{ 中, } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \therefore \angle C = 105^\circ,$$

故本题应选 C.

解法指导 本题是考查特殊角的三角函数值的一道典型例题,由此应知道熟记特殊角的三角函数值的重要性.

(2)分析 用直接推算法

$$\text{解 } \because \angle C = 90^\circ, \therefore \angle A + \angle B = 90^\circ.$$

$$\therefore \cos A + \sin B = \cos A + \sin(90^\circ - A) = 2\cos A. \therefore \cos A = \frac{1}{2}. \therefore \angle A = 60^\circ.$$

故本题应选 C.

发散2 想一想,填什么最准确?

(1)已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别是 a 、 b 、 c ,且 $c = 3b$,则 $\angle A =$ _____.

(2) α 为锐角, $\sin^2 48^\circ + \sin^2 \alpha = 1$,则 $\alpha =$ _____.

(3)已知 $\sin 42^\circ 54' = 0.6807$,若 $\cos \alpha = 0.6807$,则 $\alpha =$ _____.

$$\text{解 } (1) \because \angle C = 90^\circ, \angle A、\angle B、\angle C \text{ 的对边 } a、b、c, \therefore \cos A = \frac{b}{c}.$$

$$\because c = 3b, \therefore \cos A = \frac{1}{3}.$$

用计算器解得 $\angle A = 70^\circ 31' 51''$.

$$(2) \because \sin^2 \alpha + \sin^2 48^\circ = 1, \therefore \cos^2(90^\circ - \alpha) + \sin^2 48^\circ = 1,$$

$$\therefore 90^\circ - \alpha = 48^\circ, \therefore \alpha = 42^\circ.$$

$$(3) \because \sin 42^\circ 54' = \cos \alpha, \therefore \alpha + 42^\circ 54' = 90^\circ, \therefore \alpha = 47^\circ 6'.$$

【纵横发散】

发散 3 如图1-8所示,在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D . 若 $BC = 15$, $AD = 16$. 求 $\angle ACD$ 的正弦、余弦、正切值.

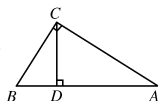


图 1-8

分析 如图易知,欲求 $\angle ACD$ 的正弦和余弦值,需求 AC 的长和 CD 的长,关键是先求 BD 的长.

解 $\because \angle ACB = 90^\circ, CD \perp AB,$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle BAC.$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}, \therefore BC^2 = AB \cdot BD.$$

$$\therefore 15^2 = BD \cdot (16 + BD).$$

$$\text{整理,得 } (BD + 8)^2 = 289.$$

$$\text{解得 } BD = 9, BD = -25 (\text{舍去}).$$

在直角 $\triangle BCD$ 中,由勾股定理,得

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12,$$

$$AB = AD + BD = 16 + 9 = 25.$$

在直角 $\triangle ABC$ 中,由勾股定理,得

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

$$\therefore \sin \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5},$$

$$\cos \angle ACD = \frac{CD}{AC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{4}{3}.$$

发散 4 化简与计算.

$$(1) \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} (\alpha \text{ 为锐角}).$$

$$(2) \sqrt{1 - 2\sin 25^\circ \sin 65^\circ}.$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}\sin 45^\circ - 2\cos^2 60^\circ}{\sqrt{3}\cos 30^\circ + 2\sin 30^\circ \sin 60^\circ}.$$

分析 (1)化简这个题的关键是注意绝对值的概念和正、余弦的增减性.

(2)首先考虑把被开方数化为完全平方数.也就是把 1 化为 $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ$, 而 $\sin 65^\circ$ 正好是 $\cos 25^\circ$, 然后再考虑绝对值,问题便得到解决.

(3)只要把特殊角的三角函数值代入,再计算化简即可求得.

$$\text{解 (1) 原式} = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \begin{cases} \cos \alpha - \sin \alpha (\alpha < 45^\circ); \\ 0 (\alpha = 45^\circ); \\ \sin \alpha - \cos \alpha (\alpha > 45^\circ). \end{cases}$$

$$(2) \text{原式} = \sqrt{(\sin 25^\circ - \cos 25^\circ)^2} = \cos 25^\circ - \sin 25^\circ.$$

$$(3) \text{原式} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

解法指导 当 $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ 时, $\cos \alpha > \sin \alpha$. 当 $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, $\sin \alpha > \cos \alpha$. 这是判断三角函数值大小常用的结论.

【生活发散】

发散 5 在高 2 m, 坡角为 30° 的楼梯表面铺地毯, 地毯的长度至少需 _____ m. (精确到 0.1 m)

分析 由生活经验可知, 在楼梯表面铺地毯时, 对每一级台阶, 既要铺水平面, 又要铺铅垂面. 而所有台阶的水平宽度恰好等于整个楼梯的水平宽度, 台阶的铅垂面的高度之和恰好等于整个楼梯的高度, 所需地毯的长度应不少于楼梯水平宽度与铅垂高度之和.

解 如图 1-9 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 2$ m, $\angle C = 90^\circ$, 则

$$AC = \frac{BC}{\tan A} = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}(\text{m}).$$

$$\therefore AC + BC = 2\sqrt{3} + 2 \approx 2 \times 1.732 + 2 \approx 5.5(\text{m}).$$

即地毯的长度至少需 5.5 m.

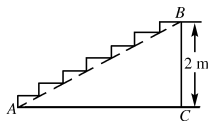


图 1-9

发散 6 (2005·北京) 如图 1-10 所示, 河旁有一座小山, 从山顶 A 处测得河对岸点 C 的俯角为 30° , 测得岸边点 D 的俯角为 45° , 又知河宽 CD 为 50 m. 现需从山顶 A 到河对岸点 C 拉一条笔直的缆绳 AC, 求缆绳 AC 的长. (答案可带根号)

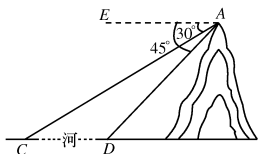


图 1-10

解 作 $AB \perp CD$ 交 CD 的延长线于点 B.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\therefore \angle ACB = \angle CAE = 30^\circ, \angle ADB = \angle EAD = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = 2AB, DB = AB.$$

$$\text{设 } AB = x \text{ 则 } BD = x, AC = 2x, CB = 50 + x.$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{CB}, \therefore AB = CB \cdot \tan \angle ACB = CB \cdot \tan 30^\circ.$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3}(50+x), \text{解得 } x = 25(1+\sqrt{3}).$$

$$\therefore AC = 50(1+\sqrt{3})(\text{m}).$$

答 缆绳 AC 的长为 $50(1+\sqrt{3}) \text{ m}$.

解法指导 在解直角三角形的实际应用问题时,一般要先画符合题意的草图,按题意标明哪些是已知元素,哪些是未知元素,然后根据解直角三角形的类型与解法求解,顺便指出,解直角三角形的时候,一般是问什么求什么,不需求直角三角形的其他元素(有时需要其他元素过渡).

【解法发散】

发散 7 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\cos B$ 的值.

分析 由 $\text{Rt}\triangle ABC$ 知 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 故 $\sin A = \sin(90^\circ - B) = \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 1 $\because \angle C = 90^\circ, \therefore \angle A = 90^\circ - \angle B.$

$$\therefore \sin A = \sin(90^\circ - B) = \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解法 2 $\because \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \angle A = 60^\circ.$

$$\because \angle A + \angle B = 90^\circ, \therefore \angle B = 30^\circ.$$

$$\therefore \cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【逆向发散】

发散 8 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 17, AC = 15, BC = 8$, 求 $\angle A$ 的正弦、余弦和正切函数值.

分析 通过逆用勾股定理,判断 $\angle C = 90^\circ$,再分别求 $\angle A$ 的三个三角函数值.

解 $\because AB = 17, AC = 15, BC = 8,$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形,且 $\angle C = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}, \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}.$$

【转化发散】

发散 9 已知 $a \sin \theta + \cos \theta = 1, b \sin \theta - \cos \theta = 1$, 求 ab 的值.

分析 要求 ab , 只要把 a 与 b 分别用 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 表示出来, ab 就可变为同角三角函数的运算,从而求得解答.

解 若 $\sin \theta = 0$, 则

$\cos\theta = 1$ 与 $-\cos\theta = 1$ 矛盾,

$\therefore \sin\theta \neq 0$.

由 $a\sin\theta + \cos\theta = 1$ 得 $a = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$,

由 $b\sin\theta - \cos\theta = 1$ 得 $b = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$.

$$\begin{aligned}\therefore ab &= \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1.\end{aligned}$$

解法指导 (1)在本题变形中, $\sin\theta \neq 0$, 否则已知条件中的两个式子矛盾.

(2)本题只要能想到两个已知条件都含有 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$, 那么最后求值中一定会用到关于 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的关系式, 所以不难求出结果.

【综合发散】

发散 10 设 α 为锐角, 且 $\alpha \neq 45^\circ$, 若 $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha - \frac{1}{3}\cos\alpha = 1$. 求以 $\tan\alpha, \frac{1}{\tan\alpha}$ 为根的一元二次方程.

解 $\because 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ (对 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 的正逆使用要熟练)

$$\therefore 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha - \frac{1}{3}\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

$$\therefore (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{3}(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

$\because \alpha$ 为锐角且 $\alpha \neq 45^\circ$, $\therefore \sin\alpha - \cos\alpha \neq 0$. (这一步一定要写出来)

$$\therefore \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3}, \text{ 两边平方并化简得 } \sin\alpha \cos\alpha = \frac{4}{9}.$$

$$\therefore \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{9}{4}.$$

$$\text{又 } \because \tan\alpha \cdot \frac{1}{\tan\alpha} = 1,$$

故以 $\tan\alpha, \frac{1}{\tan\alpha}$ 为两根的一元二次方程 $x^2 - \frac{9}{4}x + 1 = 0$ 即 $4x^2 - 9x + 4 = 0$.

发散 11 如图1-11所示, 是一秋千示意图, 当拉绳偏离竖直位置 30° 时, 秋千底端的位置比原来升高了多少? (精确到 0.1 m , $\sqrt{3} \approx 1.732$). 若秋千底端升高超过拉绳长 OA 的一半时, 会发生危险, 为安全起见, 在荡秋千时, 拉绳偏离竖直位置的最大角度是多少?

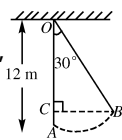


图 1-11

分析 可利用直角三角形的边角关系求出相关数据.

解 (1) $\because OA = OB = 12$, $\angle AOB = 30^\circ$,

过点 B 作 $BC \perp OA$ 于 C ,

在 $\text{Rt}\triangle BCO$ 中 $\cos\angle BOC = \frac{OC}{OB}$.

$$\therefore OC = OB \cos\angle BOC = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10.392 \approx 10.4(\text{m}).$$

$$\therefore CA = OA - OC = 12 - 10.4 = 1.6(\text{m}).$$

即秋千底端的位置比原来升高了 1.6 m.

(2)如图 1-12 所示,在 OA 上截取中点 D ,则 $OD = 6$ m. 过点 D 作 $BD \perp AO$,以 O 为圆心, OA 为半径作弧,交 BD 于点 B ,则 $OB = OA = 12$ m.

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BOD \text{ 中 } \cos\angle BOD = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \angle BOD = 60^\circ.$$

即拉绳偏离竖直位置的最大角度为 60° .

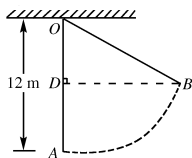


图 1-12



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $a = 2b$, 则 $\sin A$ 的值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\sin B = \frac{1}{3}$, 那么 $\cos A + \frac{1}{\tan A}$ 的值为 ()

- A. $\frac{4+3\sqrt{2}}{12}$ B. $\frac{11\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{12}$

3. 若 $\cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则锐角 α 为 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

4. 计算 $\sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + 1 - \tan 45^\circ - \frac{\sin 90^\circ \tan 30^\circ}{\cos 30^\circ} =$ _____.

5. $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\tan 30^\circ}\right)^2} + |1 - \tan 35^\circ| + \sqrt{\tan^2 35^\circ} - \frac{1}{\tan 45^\circ} =$ _____.

【纵横发散】

1. 在下列条件下, 求锐角 θ 的取值范围.

(1) $2\sin \theta - \sqrt{2} \leq 0$.

(2) $\cos \theta - \frac{1}{2} \geq 0$ 且 $3\tan \theta - \sqrt{3} > 0$.

2. 化简根式: $\sqrt{4\cos^2 51^\circ - 4\sqrt{2}\cos 51^\circ + 2}$.

【解法发散】

已知 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, α 为锐角, 求 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

【应用发散】

1. 某宾馆在主楼梯上铺设某种红色地毯, 如果主楼梯的坡度为 $1:\sqrt{3}$ 且楼梯的竖直高度为 3 m, 若所铺设的地毯每平方米售价为 30 元, 主楼梯的宽度为 2 m, 如图 1-13 所示, 则购买地毯至少需要多少元钱?

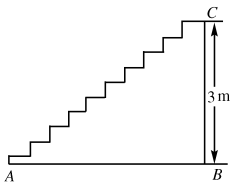


图 1-13

2. 如图 1-14 所示, 在小山的东侧 A 处有一热气球, 以每分钟 28 m 的速度沿着与垂直方向夹角为 30° 的方向飞行, 半小时后到达 C 处, 这时气球上的人发现, 在 A 处的正西方向有一处着火点 B, 5 分钟后, 在 D 处测得着火点 B 的俯角是 15° , 求热气球升空点 A 与着火点 B 的距离. (精确到 1 m)



图 1-14

【转化发散】

1. 如图 1-15 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D, 求证: $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{CD^2}$.

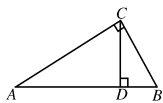


图 1-15

2. 已知 $\sin A$, $\sin B$ 是方程 $4x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ 的两个实根, 且 $\angle A$, $\angle B$ 是直角三角形的锐角, 求:

- (1) m 的值;
- (2) $\angle A$ 与 $\angle B$ 的度数.

【综合发散】

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, 两直角边的和为 14, 求这两条直角边的长各是多少?

2. 如图 1-16 所示, 已知点 $A(\tan \alpha, 0)$, $B(\tan \beta, 0)$ 在 x 轴正半轴上, 点 A 在点 B 的左边, α , β 是以线段 AB 为斜边、顶点 C 在 x 轴上方的 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两个锐角.

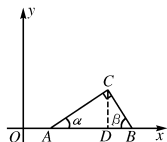


图 1-16

(1) 若二次函数 $y = -x^2 - \frac{5}{2}kx + (2 + 2k - k^2)$ 的图象经过 A、B 两点, 求它的解析式;

(2) 点 C 在 (1) 中求出的二次函数的图象上吗? 请说明理由.

课后习题答案,你需要吗?

随堂练习(课本第6页)

$$1. \tan C = \frac{BD}{DC} = \frac{1.5}{1.5} = 1.$$

$$2. \text{解} \because AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{200^2 - 55^2} \approx 192.289.$$

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{55}{192.289} \approx 0.286.$$

答:山的坡度约为0.286.

习题1.1(课本第6页)

1. 解 如第1题图所示, $\because \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5},$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}.$$

2. 解 如第2题图所示, $\because \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{AC}.$$

$$\therefore \tan A = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \frac{5}{12} = \frac{3}{AC}.$$

$$\therefore AC = \frac{36}{5}.$$

3. 略.

随堂练习(课本第9页)

1. 解 如第1题图所示, $\because AB = AC = 5$, $\therefore$ 作 $AD \perp BC$ 于 D .

$$\therefore BD = CD = 3. \quad \therefore AD = 4.$$

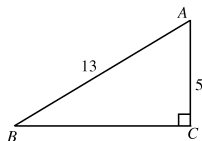
$$\therefore \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{5},$$

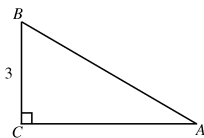
$$\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{4}{3},$$

2. 解 如第2题图所示 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{20}{AB} = \frac{4}{5}$,

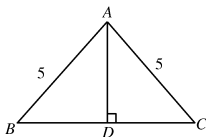
$$\therefore AB = 25,$$



第1题图



第2题图



第1题图

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 15 \times 20 = 150,$$

$$\triangle ABC \text{ 的周长} = AB + BC + AC = 25 + 20 + 15 = 60.$$

习题 1.2(课本第 9 页)

$$1. x = \sqrt{9^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2} = 5.4,$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{5.4}{9} = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{\frac{36}{5}}{9} = \frac{4}{5}, \tan \alpha = \frac{5.4}{\frac{36}{5}} = \frac{3}{4};$$

第 2 题图

$$\sin \beta = \frac{\frac{36}{5}}{9} = \frac{4}{5}, \cos \beta = \frac{5.4}{9} = \frac{3}{5}, \tan \beta = \frac{\frac{36}{5}}{5.4} = \frac{4}{3}.$$

2. 解 如第 2 题图所示,

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 13 - 3 = 10.$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = 2\sqrt{29},$$

$$\therefore \sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}.$$

第 2 题图

3. 解 如第 3 题图所示, 过 D 点作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E.

$\therefore$ D 点是 AB 的中点,

$\therefore DE = \frac{1}{2} BC = 4$ (三角形的中位线等于底边的一半).

$$\therefore CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$$\therefore \sin \angle ACD = \frac{DE}{CD} = \frac{4}{5},$$

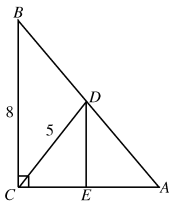
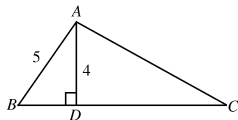
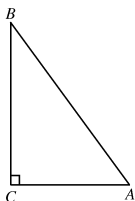
$$\cos \angle ACD = \frac{CE}{CD} = \frac{3}{5},$$

$$\tan \angle ACD = \frac{DE}{CE} = \frac{4}{3}.$$

$$4. \sin A = \cos B.$$

随堂练习(课本第 12 页)

$$1. (1) \sin 60^\circ - \tan 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}.$$



第 3 题图

$$(2) \cos 60^\circ + \tan 60^\circ = \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2}.$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 45^\circ + \sin 60^\circ - 2 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}.$$

2. $\sin 30^\circ = \frac{7}{\text{扶梯的长度}}$, 可得扶梯的长度为 14 m.

习题 1.3(课本第 13 页)

$$1. (1) \tan 45^\circ - \sin 30^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \cos 60^\circ + \sin 45^\circ - \tan 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}.$$

$$(3) 6 \tan^2 30^\circ - \sqrt{3} \sin 60^\circ - 2 \cos 45^\circ = 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-2\sqrt{2}}{2}.$$

$$2. \text{解: } \tan \angle BCA = \frac{AB}{BC}, \text{ 即 } \tan 60^\circ = \frac{12}{BC}.$$

$$\therefore BC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \approx 7 \text{ (m)}.$$

$$3. \text{解: } \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD}, \text{ 即 } \tan 30^\circ = \frac{CD}{5} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore CD \approx 2.89.$$

$$CE = CD + DE \approx 2.89 + 1.75 = 4.64 \text{ (m)}.$$

$$\therefore \text{树高约 } 4.6 \text{ m}.$$

随堂练习(课本第 16 页)

$$1. (1) 0.829 \ 0; (2) 0.272 \ 6; (3) 0.939 \ 7; (4) 0.554 \ 3; (5) 1.000 \ 0;$$

$$(6) 4.754 \ 4$$

$$2. \text{解: } 300 \cdot \sin 40^\circ + 100 \cdot \sin 30^\circ \approx 300 \times 0.642 \ 7 + 100 \times \frac{1}{2} \approx 242.8$$

$$\therefore \text{山高约 } 242.8 \text{ m}.$$

$$3. CD = 20 \cdot \tan 56^\circ - 20 \cdot \tan 50^\circ \approx 5.82 \text{ (m)}.$$

习题 1.4(课本第 16 页)

$$1. (1) 0.624 \ 9; (2) 0.909 \ 7; (3) 0.884 \ 4; (4) 0.829 \ 1.$$

$$2. \text{解: } 60 \cdot \tan 45^\circ + 60 \cdot \tan 37^\circ = 60 \times 1 + 60 \times 0.753 \ 33 \approx 105.2$$

$$\therefore \text{大厦高约 } 105.2 \text{ m}.$$

随堂练习(课本第 20 页)

$$1. \angle \theta = 56^\circ 1'.$$

$$2. \text{约 } 51^\circ 19' 4''.$$

习题 1.5(课本第 20 页)

$$1. (1) 71^\circ 30' 2''; (2) 23^\circ 18' 35''; (3) 38^\circ 16' 46''; (4) 41^\circ 53' 54''.$$

2. 约 $2^{\circ}51'58''$.

3. (1) 45° $35^{\circ}15'52''$ 30° ; (2) $n = 8$.

2. 船有触礁的危险吗 测量物体的高度



自主学习提示

一、相关知识链接

1. 用解直角三角形的方法实际问题, 掌握与实际有关的专用名词

(1) 坡度和坡角的定义.

通常把坡面的铅直高度 h 与水平宽度 l 的比叫坡度(或叫坡比). 用字母 i 表示, 即 $i = \frac{h}{l}$. 坡度一般写成 $1:m$ 的形式. 如图 1-17 所示, 坡面与水平面的夹角 α 叫坡角, 坡度与坡角的关系是 $i = \frac{h}{l} = \tan \alpha$.

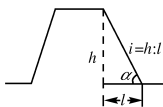


图 1-17

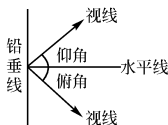


图 1-18

(2) 仰角和俯角的定义.

当我们进行测量时, 在视线与水平线所成的角中, 视线在水平线上方的叫仰角, 在水平线下方的叫俯角, 如图 1-18 所示.

(3) 方位角和象限角的定义.

方位角是以正北方向为始边, 按照顺时针方向旋转到观察目标方向的角, 它的数值在 0° 到 360° 之间.

象限角(方向角)以观测者的位置作为原点, 东南西北四个方向把平面划为四个象限, 以正北或正南方向为始边, 旋转到观察目标方向线的锐角为象限角(方向角).

(4) 锥度、水平距离、垂直距离、水位等概念也应理解掌握.

2. 要善于将实际问题中的数量关系转化为直角三角形中元素之间的关系, 要善于利用或构造直角三角形使问题得以解决

二、重难点知识提示

本节重点 解直角三角形的应用.

本节难点 将实际问题转化为解直角三角形问题, 正确选用直角三角形的边角关系.

发散思维分析



一、解直角三角形四类基本问题的方法

1. 已知斜边和一直角边(如斜边 c 、直角边 a)

由 $\sin A = \frac{a}{c}$ 求 A , $B = 90^\circ - A$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

2. 已知斜边和一锐角(如斜边 c 、锐角 A)

$B = 90^\circ - A$, $a = c \cdot \sin A$, $b = c \cdot \cos A$.

3. 已知一直角边和一锐角(如 a 、 A)

$B = 90^\circ - A$, $b = \frac{a}{\tan A}$, $c = \frac{a}{\sin A}$.

4. 已知两直角边(如 a 、 b)

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 由 $\tan A = \frac{a}{b}$ 求 A , $B = 90^\circ - A$.

二、解直角三角形的思路

1. 解直角三角形的方法

可概括为“有弦(斜边)用弦(正弦、余弦), 无弦用切(正切、余切), 宁乘毋除, 取原避中”, 其意指: 当已知或求解中有斜边时, 可用正弦或余弦; 无斜边时, 就用正切或余切; 当所求元素既可用乘法又可用除法时, 则用乘法, 不用除法; 既可由已知数据又可用中间数据求解时, 则取原始数据, 忌用中间数据.

2. 解含有非基本元素的直角三角形

即直角三角形中中线、高、角平分线、周长、面积等, 一般将非基本元素转化为基本元素, 或转化为元素间的关系式, 再通过解方程组来解.

为了突出重点, 化解难点, 我们掌握以下的解题步骤:

(1) 审题: 要弄清仰角、俯角、坡度、坡角、水平距离、垂直距离、水平等概念的意义, 要审清题意;

(2) 画图并构造要求解的直角三角形, 对于非直角三角形的图形可添作适当

的辅助线把它们分割成一些直角三角形和矩形(包括正方形);

(3)选择合适的边角关系式,使运算尽可能简便,不易出错;

(4)按照题目中已知数的精确度进行近似计算,并按照题目要求的精确度确定答案及注明单位.

下面我们共同探究一个航海问题:

❖ 与你探究 ❖

【问题】如图 1-19 所示,某船向正东航行,在 A 处望见灯塔 C 在东北方向.前进到 B 处望见灯塔 C 在北偏西 30° ,又航行了半小时到 D 处,望见灯塔 C 恰在西北方向,若船速为每小时 20 海里,求 A, D 两点间的距离.(结果不取近似值)

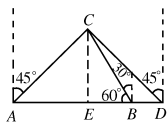


图 1-19

【准备】欲求 A, D 两点间的距离,可过 C 作 $CE \perp AD$ 于 E,这样可求得 $AE = CE = DE$,但已知 $BD = 20 \times 0.5 = 10$ (海里),所以关键是求出 BE 就可求出 DE 了,但从图中可看出 $\angle CBE = 60^\circ$,这就可以利用直角三角形的边角关系来求了,即可得 $\frac{CE}{BE} = \tan 60^\circ$,而 $BE = DE - 10 = CE - 10$,这样就可以求出 CE,也就求出了 AD.

【过程】如图 1-19 所示,作 $CE \perp AD$,垂足为 E,设 $CE = x$ 海里.

$$\because \angle CAD = \angle CDA = 45^\circ.$$

$$\therefore CE = AE = DE = x.$$

在 $\text{Rt}\triangle CEB$ 中, $\angle CBE = 60^\circ$, $BD = 20 \times 0.5 = 10$, $BE = DE - BD = x - 10$.

$$\text{又} \because \frac{CE}{BE} = \tan 60^\circ, \text{即} \frac{x}{x-10} = \sqrt{3},$$

$$\text{解得} \quad x = 15 + 5\sqrt{3}.$$

$$\therefore AD = 2x = 30 + 10\sqrt{3} \text{ (海里)}.$$

答:A, D 两点间的距离为 $(30 + 10\sqrt{3})$ 海里.

【评析】本例是航海问题,要理解方位角的概念.本例是把实际问题转化成了几何问题,而几何问题又是通过代数方法求解的,这也是常用的解题方法.

下面让我们共同探究一下夏季怎样设计挡光板的宽度问题:

❖ 与你探究 ❖

【问题】某地夏季的中午,当太阳移到屋顶上方偏南时,光线与地面成 80° 角,房屋朝南的窗子高 $AB = 1.8 \text{ m}$,要在窗子上方安装一个水平挡光板 AC,使午间光线不能直接射入室内(如图 1-20 所示),那么挡光板 AC 的宽度应为多少?

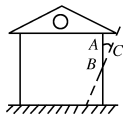


图 1-20

【准备】将这个实际问题转化为数学问题,可知应构造出 $\text{Rt}\triangle ABC$,利用 $AB = 1.8 \text{ m}$, $\angle ACB = 80^\circ$, 求出 AC 的长.

【过程】连结 AB , 则 $BA \perp CA$, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 1.8 \text{ (m)}$, $\angle ACB = 80^\circ$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 10^\circ$,

$AC = AB \tan 10^\circ = 1.8 \times 0.176\ 326\ 98 \approx 0.32 \text{ (m)}$.

答 挡光板 AC 的宽度应约为 0.32 m .

【评析】如果不构造出直角三角形,那么无法利用已知条件求出待求元素,最后应注意将求得的结论返回到实际问题中作答.



发散思维应用

典型例题 1

如图 1-21 所示,河对岸有一点 A ,在河这边取两点 B 、 C 测得 $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, $BC = 12 \text{ m}$,求河宽 AD . (精确到 0.1 m)

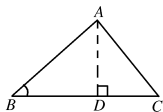


图 1-21

分析 这是一个实际测量问题,求河宽实际上就是求 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高.为此,就要在 $\triangle ABC$ 中寻找已知与未知以及已知与已知之间的联系.由题设知

$BC = BD + DC = 12$, $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, 欲求的是 AD .

观察图形不难发现,通过 $\text{Rt}\triangle ABD$,可以建立起 AD 、 BD 、 $\angle ABD$ 之间的联系,通过 $\text{Rt}\triangle ACD$ 可以建立起 AD 、 CD 、 $\angle ACD$ 之间的联系,这样就容易实现由已知向未知的转化了.

解 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$\because \angle B = 60^\circ, \therefore BD = AD \cdot \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} AD.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\because \angle C = 45^\circ, \therefore CD = AD \cdot \cot 45^\circ = AD$.

$$\text{又} \because BC = 12, \therefore BD + CD = \frac{\sqrt{3}}{3} AD + AD = 12.$$

$$\therefore AD = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1} = 6(3 - \sqrt{3}) \approx 7.6 \text{ (m)}.$$

答 河宽约为 7.6 m .

【题型发散】

发散1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 则 $\tan A \tan B$ 等于 ()

A. 0 B. 1 C. -1 D. 不确定

(2)在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A \cos A = 0$, 那么这个三角形是 ()

A. 锐角三角形 B. 直角三角形

C. 钝角三角形 D. 不能确定

(3)在直角三角形 ABC 中, 两直角边的比为 $a:b=5:1$, 周长为 15, 则斜边长为 ()

A. 9

B. $7\frac{4}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{26}(6-\sqrt{26})}{2}$

D. $\frac{3\sqrt{26}(6+\sqrt{26})}{2}$

(1)分析 用直接或验证法.

解 由题设 $\tan A = \frac{a}{b}$, $\tan B = \frac{b}{a}$.

$\therefore \tan A \tan B = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. 故本题应选 B.

(2)分析 用排除法或直接法.

解法1 易见 A、C、D 均不合题意, 应排除, 故本题应选 B.

解法2 $\because A$ 是 $\triangle ABC$ 的内角, 即 $0^\circ < A < 180^\circ$.

又 $\because \sin A \cos A = 0$, $\therefore$ 只有 $\cos A = 0$, 才有 $A = 90^\circ$.

故本题应选 B.

(3)分析 用直接法.

解 $\because a:b=5:1$, $\therefore a=5b$,

$c = \sqrt{(5b)^2 + b^2} = \sqrt{26}b$.

$\therefore 5b + b + \sqrt{26}b = 15$.

$\therefore b = \frac{3(6-\sqrt{26})}{2}$.

$\therefore c = \frac{3\sqrt{26}(6-\sqrt{26})}{2}$.

故本题应选 C.

发散2 想一想, 填什么最准确?

(1) $\triangle ABC$ 中, 如果 $(\sin A - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - \cos B\right)^2 = 0$, 则 $\angle C =$ _____.

(2) 已知 α 是锐角, 若 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\cos \alpha =$ _____, 若 $\cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\alpha =$ _____.

(1) 解 $\because (\sin A - 1)^2 \geq 0, \left(\frac{1}{2} - \cos B\right)^2 \geq 0,$

欲使 $(\sin A - 1)^2 + \left(\frac{1}{2} - \cos B\right)^2 = 0,$

只有 $\sin A - 1 = 0, \frac{1}{2} - \cos B = 0.$

$\therefore \sin A = 1, \cos B = \frac{1}{2},$

$\therefore A = 90^\circ, B = 60^\circ, C = 180^\circ - A - B = 30^\circ.$

(2) 分析 已知一个角可求它的三角函数值, 反过来, 已知一个三角函数值, 也可以求其相应的角度, 这就是说, 在锐角三角函数中, 每种三角函数值与其角度值是一一对应的关系.

解 $\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \alpha = 60^\circ,$

$\therefore \cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$

$\therefore \cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$\therefore \alpha + 30^\circ = 45^\circ,$

$\therefore \alpha = 15^\circ.$

【应用发散】

发散 3 如图 1-22 所示, 自卸车车厢的一个侧面是矩形 $ABCD$, $AB = 3 \text{ m}$, $BC = 0.5 \text{ m}$, 车厢底部距离地面 1.2 m , 卸货时, 车厢倾斜的角度 $\theta = 60^\circ$, 问此时车厢的最高点 A 距离地面多少米? (精确到 1 m)

分析 过 A 、 D 分别作 CE 的垂线, 又过 D 作 AG 的垂线, 将 A 到地面的距离分成三部分求解.

解 过点 A 、 D 分别作 $AG \perp CE$ 于 G , $DF \perp CE$ 于 F , 过 D 作 $DH \perp AG$ 于 H .

在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 和 $\triangle ADH$ 中,

$$DF = CD \cdot \sin 60^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

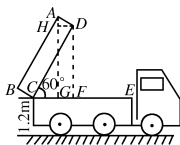


图 1-22

$$AH = AD \cdot \cos 60^\circ = 0.5 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

于是点 A 离地面的距离为

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} + 1.2 \approx 4 \text{ (m)}.$$

答 此时车厢最高点 A 离地面约 4m.

发散 4 如图1-23所示,为了测得某湖两岸 A、B 两点间的距离,在另一点 C 处测得 $CA = CB = 30 \text{ m}$, $\angle ACB = 120^\circ$,求 AB 的长.(精确到个位)

分析 由图 1-23 看出, $\triangle ABC$ 不是直角三角形,但 $\angle C = 120^\circ$, $CA = CB = 30$, 所以是个等腰三角形,故 $\angle A = \angle B = 30^\circ$, 这样可以想到,等腰三角形的高 CE 垂直平分 AB, 所以在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, 已知 $\angle BEC = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 所以 $BE = 30 \cos 30^\circ$, 从而可求出 AB.

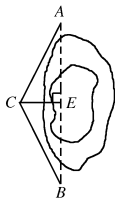


图 1-23

解 过 C 作 $CE \perp AB$ 垂足为 E, 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中,

$$\because \angle B = 30^\circ, BC = 30,$$

$$\therefore BE = BC \cos B = 30 \cos 30^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

$$\therefore AB = 2BE = 2 \times 15\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \approx 52 \text{ (m)}.$$

答 湖宽 AB 约 52 m.

【纵横发散】

发散 5 化简: $\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} + \frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$).

$$\text{解 原式} = \frac{2\cos\alpha}{|\cos\alpha|} + \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = \begin{cases} \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha} + 1 = 3 & (0^\circ < \alpha < 90^\circ); \\ \text{无意义} & (\alpha = 90^\circ); \\ \frac{2\cos\alpha}{-\cos\alpha} + 1 = -1 & (90^\circ < \alpha < 180^\circ). \end{cases}$$

【解法发散】

发散 6 不查表,试求 $\sin 15^\circ$ 的值.

解法 1 如图1-24所示,作 $\text{Rt}\triangle BCD$, 使 $\angle C = 90^\circ$, $\angle DBC = 30^\circ$, $CD = 1$, 则 $BD = 2$, $BC = \sqrt{3}$. 延长 CB 到 A, 使 $BA = BD$. 连结 AD, 则

$$\angle A = 15^\circ, AC = 2 + \sqrt{3}.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由勾股定理, 得

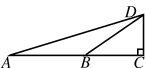


图 1-24

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

由三角函数定义得 $\sin 15^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

解法 2 如图 1-25 所示, 作 $\text{Rt}\triangle ABC$, 使 $\angle BAC = 30^\circ$, 设 $BC = 1$ 则 $AB = 2, AC = \sqrt{3}.$

作 $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D , 则 $\angle DAC = 15^\circ$, 由角平分线性定理得

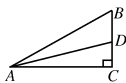


图 1-25

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \frac{BD + DC}{DC} = \frac{AB + AC}{AC}, \text{ 即 } \frac{1}{DC} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore DC = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由勾股定理得

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} - 3)^2} = \sqrt{6}(\sqrt{3} - 1),$$

由三角函数定义得

$$\sin 15^\circ = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

【构造发散】

发散 7 如图 1-26 所示, 为了测河的北岸上电杆 PQ 的高度, 在河这一面电杆的正南方的 A 点测电杆顶点 P 的仰角为 α , 再在 A 点的正西方距 A 点 a m 的 B 点测得 A 和 Q 的水平夹角为 β , 求电杆的高 PQ .

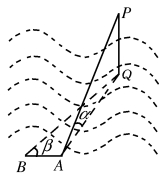


图 1-26

分析 由于 AQ 是南北方向, AB 是东西方向, 所以 $\angle QAB = 90^\circ$, 于是构成两个直角三角形 AQP 和 BAQ , 在 $\text{Rt}\triangle BAQ$ 中, 已知 $AB = a, \angle ABQ = \beta$, 它可解, 在 $\text{Rt}\triangle AQP$ 中, 只有 $\angle QAP = \alpha$ 不能解该三角形, 但在 $\text{Rt}\triangle BAQ$ 求出 AQ 后, 下面就转化为可解的直角三角形了, 从而求出 PQ 的长.

解 在 $\triangle BAQ$ 中, $\angle BAQ = 90^\circ, AB = a,$

$$\therefore AQ = AB \cdot \tan \angle ABQ = a \tan \beta.$$

又 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle AQP$ 中, $\angle PAQ = \alpha, AQ = a \tan \beta.$

$$\therefore PQ = AQ \cdot \tan \alpha = a \tan \alpha \tan \beta.$$

答 电杆的高度为 $a \tan \alpha \tan \beta$.

【转化发散】

发散 8 如图 1-27 所示, 一轮船在海上以每小时 30 海里的速度向正西方向

航行.上午8时,到B处测得小岛A在北偏东 30° 方向,之后轮船继续向正西方向航行,于上午9时到达C处,这时测得小岛A在北偏东 60° 方向.如果轮船仍继续向正西方向航行,于上午11时达到D处,这时轮船与小岛A相距多远?

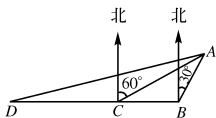


图 1-27

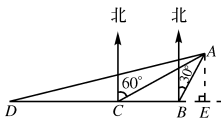


图 1-28

解 过A作 $AE \perp BC$ 交CB的延长线于E,如图1-28所示,设 $BE = x$.则在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中,有 $AE = x \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}x$.

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中,

$$\tan 30^\circ = \frac{AE}{CE} = \frac{\sqrt{3}x}{x+30},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}x}{x+30} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore x = 15.$$

$$\therefore AE = 15\sqrt{3}, BE = 15.$$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,由勾股定理,有

$$AD^2 = AE^2 + DE^2,$$

$$\text{即 } AD^2 = (15\sqrt{3})^2 + (15+30+60)^2.$$

$$\therefore AD = 30\sqrt{13}(\text{海里}).$$

答 这时轮船与小岛A相距 $30\sqrt{13}$ 海里.

【迁移发散】

发散9 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 中三个内角 A, B, C 的对边,当 $m > 0$ 时,关于 x 的方程 $b(x^2 + m) + c(x^2 - m) - 2\sqrt{m} \cdot ax = 0$ 有两个相等的实数根,且 $\sin C \cdot \cos A - \cos C \cdot \sin A = 0$.试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解 由原方程,得

$$(b+c)x^2 - 2\sqrt{m} \cdot a \cdot x + bm - cm = 0.$$

$$\therefore \Delta = 0. \therefore 4a^2m - 4(b+c)(b-c)m = 0.$$

$$\therefore a^2 - b^2 + c^2 = 0, \text{即 } b^2 = a^2 + c^2.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为直角三角形, } \angle B = 90^\circ.$$

$$\therefore \sin C \cdot \cos A - \cos C \cdot \sin A = 0,$$

$$\therefore \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\cos C}{\cos A},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}}, \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}. \quad \therefore a^2 = c^2, a = c.$$

故 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

【综合发散】

发散 10 国家电力总公司为了改善农村用电电费过高的现状,目前正在全国各地农村进行电网改造.莲花村六组有四个村庄 A, B, C, D 正好位于一个正方形的四个顶点,现计划在四个村庄联合架设一条线路,他们设计了四种架设方案,如图 1-29 中的实线部分.请你帮助计算一下,哪种架设方案最省电线?(以下数据可供参考: $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{5} = 2.236$)

解 不妨设正方形的边长为 1(也可以设为 a) 则图(1)(2)中的总线路长分别为 $AD + AB + BC = 3$, $AB + BC + CD = 3$.

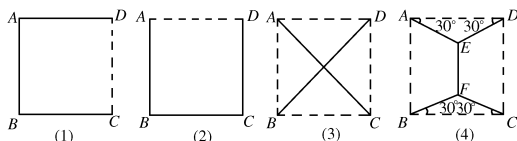


图 1-29

图(3)中,总线路长为 $AC + BD = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2} = 2.828$.

图(4)中,延长 EF 交 BC 于点 H ,延长 FE 交 AD 于点 H' ,如图 1-30 则 $FH \perp BC$, $BH = HC$, $EH' = FH$.

由 $\angle FBH = 30^\circ$, $BH = \frac{1}{2}$ 及勾股定理得

$$EA = ED = FB = FC = \frac{\sqrt{3}}{3}, FH = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\therefore EF = 1 - 2FH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{此时,总线路长为 } 4EA + EF = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \sqrt{3} = 2.732.$$

显然 $3 > 2.828 > 2.732$,

$\therefore$ 图(4)的联结线路最短,即图(4)的架设方案最省电线.

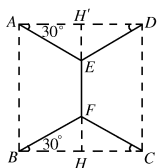


图 1-30

典型例题 2

(2005·广东)如图 1-31 所示,为测量小河的宽度,先在河岸边任意取一点 A ,再在河的另一岸取两点 B 、 C ,测得 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$,量得 BC 长为 20 m. 求小河的宽度是多少?(使用计算器的地区,结果保留三位有效数字;不使用计算器的地区,结果保留根号)

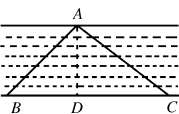


图 1-31

解 过点 A 作 $AD \perp BC$,垂足为点 D ,如图 1-31 所示,设 $AD = x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 为等腰直角三角形. $\therefore BD = AD = x$.

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\angle ACB = 30^\circ$,

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{AD}{CD} = \frac{x}{CD}.$$

$$\therefore CD = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}x.$$

$$\therefore BC = BD + CD = x + \sqrt{3}x = 20,$$

$$\therefore x = \frac{20}{\sqrt{3} + 1} = 10(\sqrt{3} - 1)(\text{m}).$$

答:小河的宽度是 $10(\sqrt{3} - 1)$ m.

说明:分母有理化可不作要求,使用计算器的地区结果近似为 7.32 m.

【题型发散】

发散 1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)当锐角 $A > 30^\circ$ 时, $\cos A$ 的值 ()

- A. 大于 $\frac{1}{2}$ B. 小于 $\frac{1}{2}$ C. 大于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 小于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)如果 $\angle A$ 为锐角,且 $\sin A = \frac{3}{4}$,那么 ().

- A. $0^\circ < \angle A < 30^\circ$ B. $30^\circ < \angle A < 45^\circ$
C. $45^\circ < \angle A < 60^\circ$ D. $60^\circ < \angle A < 90^\circ$

(1)分析 用直接推算法.

解 $\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 当 $\angle A$ 为锐角时, $\cos A$ 随着 $\angle A$ 的增大而减小.

$$\therefore \angle A > 30^\circ \text{ 时 } \cos A < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故本题应选 D.

(2)分析 用直接推算法.

$$\text{解 } \because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin A = \frac{3}{4}, \text{而 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore 45^\circ < \angle A < 60^\circ$, 故本题应选 C.

发散 2 想一想 填什么最准确?

(1)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, 则 $AC =$ _____.

(2)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$, $BC = 4$, $\sin A = \frac{2}{3}$, $AB =$ _____.

解 (1)此题是在直角三角形中, 已知一个锐角和斜边, 求另一直角边的问题, 可选择 $\sin B = \frac{AC}{AB}$ 得

$$AC = AB \cdot \sin B = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

(2)此题已知一直角边和 $\angle A$ 的正弦值, 欲求斜边, 可选用 $\sin A = \frac{BC}{AB}$, 得

$$AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6.$$

【转化发散】

发散 3 从一船上看到在它的南偏东 30° 的海面上有一座灯塔, 船以 30 海里/小时的速度向东南方航行, 半小时后, 看到这个灯塔在船的正西, 求这时船与灯塔的距离.

分析 依据题意绘图, 把实际问题转化为解直角三角形问题.

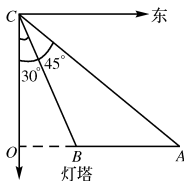


图 1-32

解 如图 1-32 所示, $AC = 30 \times \frac{1}{2} = 15$.

在 $\text{Rt}\triangle COA$ 中,

$$AO = CO = AC \cos \angle ACO$$

$$= 15 \cos 45^\circ = \frac{15}{2} \sqrt{2}.$$

在 $\text{Rt}\triangle COB$ 中,

$$OB = OC \cdot \tan \angle BCO = \frac{15}{2} \sqrt{2} \tan 30^\circ = \frac{5}{2} \sqrt{6}.$$

$$\therefore AB = OA - OB = \frac{15}{2} \sqrt{2} - \frac{5}{2} \sqrt{6} \approx 4.48 \text{ (海里)}.$$

答 此时船与灯塔的距离约为 4.48 海里.

【生活发散】

发散 4 如图1-33所示,某位游泳爱好者从A点游到B点横渡长江,若两河岸平行,且 $AB = 200\text{ m}$, $\angle BAC = 60^\circ$,求这位游泳爱好者比最短游程多游了多少米?(精确到0.1 m)

分析 易知图中AD的距离为最短游程,AB为实际游程,所以本题应求 $(AB - AD)$.

解 过A作 $AD \perp BD$ 于D,在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$\angle BAD = 30^\circ$, $AB = 200\text{ m}$, $\therefore BD = 100$,

$$\therefore AD = AB \cdot \cos 30^\circ = 100\sqrt{3} \approx 173.2\text{ (m)}.$$

$$\therefore AB - AD \approx 200 - 173.2 = 26.8\text{ (m)}.$$

答 多游了约26.8 m.

解法指导 在实际问题中应先抽象或构造出几何图形,依据图形确定直角三角形,再根据题意确定待求量,逐步解直角三角形.

【应用发散】

发散 5 如图1-34所示,已知灯塔A的周围7海里的范围内有暗礁,一艘渔轮在B处测得灯塔A在北偏东 60° 的方向,向正东航行8海里到达C处后,又测得该灯塔在北偏东 30° 的方向,渔轮不改变航向,继续向正东航行,有没有触礁的危险?请通过计算说明理由.

(参考数据: $\sqrt{3} = 1.732$)

分析 依题意,如果点A到正东方向(渔船航向)的最短距离即垂直距离大于7海里,则肯定不会有危险,反之,则有危险.

解 若不改变航向,继续向东航行,有触礁危险.

理由 过A作 $AD \perp BC$ 交BC于D,设 $AD = x$ 海里,

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \angle ACD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

$$\therefore BD = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \cdot x, CD = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x.$$

$$\therefore BD - CD = 8, \therefore \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 8, \therefore x = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{即 } AD = 4\sqrt{3} = \sqrt{48} < 7.$$

$\therefore$ 若不改变航向,继续向正东航行,有触礁危险.

【综合发散】

发散 6 如图1-35所示,在地平面上有A、B、C三点,A在B的正西,C在B

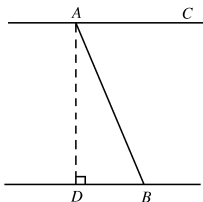


图 1-33

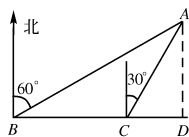


图 1-34

的正南,在 B 点的正北方向有一塔 PQ ,在 A, C 处观察塔顶的仰角都是 30° ,在 B 处观察塔顶的仰角为 60° . 已知 A, B 间的距离为 50 m ,求 B, C 之间的距离.

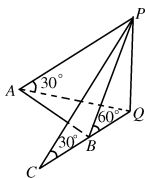


图 1-35

分析 将已知条件和未知元素集中到一个三角形中去.

解 设塔高为 $h\text{ m}$,由 $\angle PCQ = 30^\circ$, $\angle PBQ = 60^\circ$ 可知

$$BC = QC - QB = h \cot 30^\circ - h \cot 60^\circ$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) h = \frac{2\sqrt{3}}{3} h, \quad (1)$$

$$\because \angle PAQ = 30^\circ, \angle ABQ = 90^\circ,$$

$$\therefore AB^2 = 50^2 = AQ^2 - BQ^2$$

$$= (h \cot 30^\circ)^2 - (h \cot 60^\circ)^2$$

$$= 3h^2 - \frac{1}{3}h^2 = \frac{8}{3}h^2.$$

$$\therefore h = 50\sqrt{\frac{3}{8}} = 25\sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ 将 } h \text{ 的值代入 } (1) \text{ 式, 得}$$

$$BC = \frac{2}{3}\sqrt{3} \times 25\sqrt{\frac{3}{2}} = 25\sqrt{2} \approx 35.4 \text{ (m)}.$$

答: B, C 之间的距离约为 35.4 m .

发散 7 如图 1-36 所示,若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3(m+1)x + m^2 - 9m + 20 = 0$ 有两个实数根,又已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边, $\angle C = 90^\circ$, 且 $\cos B = \frac{3}{5}$, $b - a = 3$, 如图 1-36. 是否存在整数 m , 使上述一元二次方程

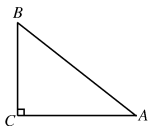


图 1-36

程两个实数根的平方和等于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 c 的平方? 若存在, 请求出满足条件的 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

解 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$$\because \cos B = \frac{3}{5}, \therefore \text{设 } a = 3k, c = 5k, \text{ 则由勾股定理, 有 } b = 4k.$$

$$\because b - a = 3, \text{ 即 } 4k - 3k = 3, \therefore k = 3.$$

$$\therefore a = 9, b = 12, c = 15.$$

设一元二次方程 $x^2 - 3(m+1)x + m^2 - 9m + 20 = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 , 则有

$$x_1 + x_2 = 3(m+1), x_1 x_2 = m^2 - 9m + 20.$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = [3(m+1)]^2 - 2(m^2 - 9m + 20)$$

$$= 7m^2 + 36m - 31.$$

由 $x_1^2 + x_2^2 = c^2$, $c = 15$ 得

$7m^2 + 36m - 31 = 225$, 即 $7m^2 + 36m - 256 = 0$.

$(7m + 64)(m - 4) = 0$, $\therefore m_1 = 4$, $m_2 = -\frac{64}{7}$.

$\therefore$ 当 $m = 4$ 时 $\Delta = (-15)^2 - 4(4^2 - 9 \times 4 + 20) = 225 > 0$; 当 $m = -\frac{64}{7}$ 时 , 不是整数 , 应舍去 .

$\therefore$ 存在整数 $m = 4$, 使方程两个实数根的平方和等于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 c 的平方 .



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$, $a = 2b$, 则 $\sin A$ 的值为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

2. 若 $\cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则锐角 α 为 ()

A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

3. $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\sin A = \frac{2}{3}$, 则 $\tan B$ 等于 ()

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , 已知 $a = 15.40$, $\angle A = 31^\circ 24'$, 则 $b \approx$ _____ , $c \approx$ _____ . (参考数据 $\sin 31^\circ 24' = 0.5210$, $\frac{1}{\tan 31^\circ 24'} = 1.638$ 精确到百分位) .

【应用发散】

如图 1-37 所示 , 沿 AC 方向开山修渠 , 为了加快施工进度 , 要在小山的另一边同时施工 , 从 AC 上的一点 B 取 $\angle ABD = 140^\circ$, $BD = 520\text{m}$, $\angle D = 50^\circ$, 那么开挖点 E 离 D 多远 (精确到 0.1m) , 正好能使 A , C , E 成一直线 ?

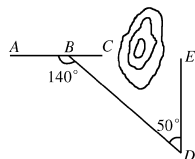


图 1-37

【转化发散】

如图 1-38 所示,一艘渔船正以 30 海里/小时的速度由西向东追赶鱼群,在 A 处看见小岛 C 在船的北偏东 60° . 40 min 后,渔船到达 B 处,此时看到小岛 C 在北偏东 30° 方向上,已知以小岛 C 为圆心、10 海里为半径的圆形区域为危险区域.问这艘渔船继续向东追赶鱼群会不会进入危险区域?

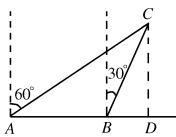


图 1-38

【构造发散】

1. 平行四边形的边长分别为 $3\sqrt{2}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm, 一个角为 120° , 求平行四边形两高的长.

2. 如图 1-39 所示,矩形 ABCD 的边长 $AB=3$, $BC=4$, 将矩形折叠使 C 点与 A 点重合, 求折痕 EF 的长.

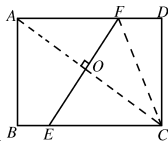


图 1-39

【组合发散】

1. 已知 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 且 $\tan \alpha$ 是方程 $2x^2 + x - 6 = 0$ 的一个根, 求 $\frac{3 + 2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha}$ 的值.

2. 如果 $\tan \alpha = 2$, 求 $\frac{3\sin \alpha - \cos \alpha}{4\sin \alpha + 2\cos \alpha}$ 的值.

【综合发散】

1. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边, 且 $c = 5\sqrt{3}$, 若关于 x 的方程 $(5\sqrt{3} + b)x^2 + 2ax + (5\sqrt{3} - b) = 0$ 有两个相等的实数根, 又方程 $2x^2 - (10\sin A)x + 5\sin A = 0$ 的两实数根的平方和为 6, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

2. 如图 1-40 所示, 某船向正东航行, 在 A 处望见某岛 C 在北偏东 60° , 前进 6 海里到 B 点, 测得该岛在北偏东 30° , 已知在该岛周围 6 海里有暗礁, 问若船继续向东航行, 有无触礁危险? 请说明理由.

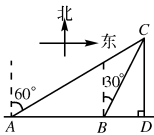


图 1-40

课后习题答案, 你需要吗?

随堂练习(课本第 22 页)

1. 解: $BC = 5 \cdot \tan 40^\circ = 5 \times 0.8388 = 4.194$,

$BE = BC + EC = 4.194 + 2 = 6.194$,

$\therefore DE = \sqrt{DB^2 + BE^2} = \sqrt{5^2 + (6.194)^2} \approx 7.96$.

$\therefore DE$ 的长约为 7.96 m.

2. 解 : (1) $\because \angle ADC = 135^\circ$,

$\therefore \angle C = 45^\circ$.

作 DE 、 AF 垂直于 BC 于 E 、 F ,

$$\therefore DE = 8 \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore AF = DE = EC = 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore BF = 30 - 4\sqrt{2} - 6 = 24 - 4\sqrt{2} \approx 18.343.$$

$$\therefore \tan B = \frac{AF}{BF} = \frac{4\sqrt{2}}{18.343} \approx 0.3084.$$

$$\therefore \angle ABC = 17^\circ 8' 21''.$$

$$(2) (6 + 30) \times 4\sqrt{2} \div 2 \times 100 = 10\,182.34 (\text{m}^3).$$

习题 1.6 (课本第 24 页)

1. 解 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \angle A = 30^\circ.$$

2. 解 如第 2 题图所示 $\because \angle A = 30^\circ$,

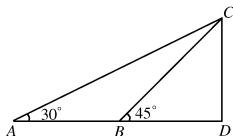
$$\therefore \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\therefore AD = CD \cdot \tan 60^\circ, BD = CD \cdot \tan 45^\circ.$$

$$\therefore CD \cdot \tan 60^\circ - CD \cdot \tan 45^\circ = 50.$$

$$\therefore CD \approx 68.3.$$

$$\therefore \text{高约 } 68.3 \text{ m}.$$



第 2 题图

3. 解 作 $AE \perp BC$ 于 E 点.

$$\because \angle B = 55^\circ, \therefore \angle BAE = 35^\circ.$$

$$\therefore BE = AE \cdot \tan 35^\circ.$$

$$\therefore BC = 2AE \cdot \tan 35^\circ + 180$$

$$\approx 2 \times 70 \times 0.7 + 180$$

$$\approx 278 (\text{mm}).$$

复习题 (课本第 29 页)

A 组

1. (1) $\frac{\sqrt{2}-1+2\sqrt{3}}{2}$; (2) 0; (3) $\frac{3-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$.

2. (1) 0.784 1; (2) 0.037 4; (3) 0.794 5.

3. (1) 45° ; (2) $a = 4\sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$; (3) $a = b = 4\sqrt{2}$.

4. $\sin A = \frac{4}{5}$, $\tan A = \frac{4}{3}$.

5. (1) $\angle A \approx 42^\circ 27' 15''$; (2) $\angle B \approx 85^\circ 28' 29''$; (3) $\angle C \approx 88^\circ 23' 28''$.

6.(1)约 14.1 km.

(2)C 港在 A 港北偏东 15° 方向.

7. 解 $\because \angle PTQ = 50^\circ, \therefore \angle PQT = 40^\circ.$

$\therefore PT = 180 \cdot \tan 40^\circ \approx 180 \times 0.838 \approx 151(\text{m}).$

8.(1)2 m; (2) $35^\circ 5' 59''.$

9. 解 $30 \cdot \tan 30^\circ + 40 \approx 57(\text{m}).$

$\therefore$ 乙楼高约 57 m.

10. 解 $BC = AC \cdot \tan 60^\circ, BE = DE \cdot \tan 30^\circ,$

$\therefore AC = DE,$

$AC \cdot \tan 60^\circ - AC \cdot \tan 30^\circ = 30,$

$\therefore AC \approx 25.98(\text{m}).$

$BE = 25.98 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 15.$

$BC = 30 + 15 = 45(\text{m}).$

B 组

1.(1)1; (2)2; (3)-1.

2. 解 如第 2 题图所示,

$AC = AB \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$

$BC = AB \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

3. 各边长约为 0.34 m 0.34 m 0.67 m.

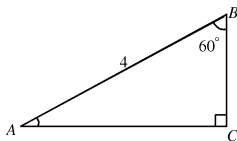
4. $\angle \alpha = 74^\circ 38' 28''.$

5. $\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 30 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20 \sin 60^\circ \approx 1\ 082.52(\text{m}^2)$

(提示:作一条对角线,把四边形分成两个三角形,且每个三角形中都含有 60° 角,然后分别求两个三角形中 50 m 边上的高).

6. 解 (1) $30 \cdot \tan 30^\circ + 1.4 = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 1.4 \approx 18.72(\text{m}).$

(2) $AD = \sqrt{(18.72 - 5)^2 + 30^2} \approx 32.99(\text{m}).$



第 2 题图

思维整合升华



知识网络建构

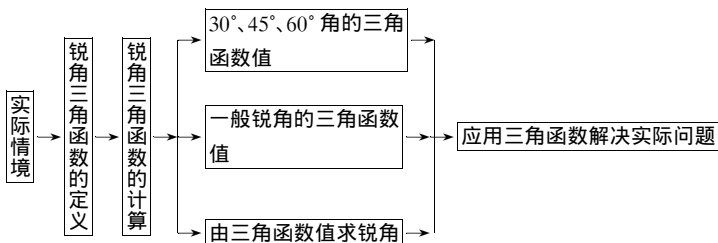
本单元的主要内容是直角三角形的解法及其应用. 在锐角三角函数中, 自变量是角 α , 锐角三角函数是一个比值, 它随着角的变化而变化, 锐角三角函数的函数值是实数, 是没有单位的, 锐角三角函数值仅与锐角的大小有关, 而与锐角的终边上所取点的位置无关.

转化发散沟通代数与三角知识之间的联系, 它善于剥去代数知识的“外壳”将其转化为解直角三角形问题, 或者以锐角三角函数知识为工具将几何问题转化为解代数问题, 把直角三角形的边角关系转化为含有锐角三角函数的数量之间的关系, 从而将平面几何中对直角三角形的定性研究转化为定量研究, 达到避繁就简、化难为易、直入捷径的目的.

解直角三角形时, 要选择适当的关系式, 使两个已知条件和一个未知条件共处在同一个关系式中, 以便把未知转化为已知.

有时图形中有几个三角形时, 可以由可解的三角形为暂时不可解的三角形创造条件, 使其转化为可解的三角形.

解直角三角形广泛应用于解各种多边形, 如等腰三角形、平行四边形(含特殊的平行四边形)、梯形和正多边形. 构造发散是解题的重要思路, 即通过添加适当的辅助线, 构造直角三角形, 将问题纳入直角三角形中去解决. 构造发散通过构造辅助图形(直角三角形), 把某些实际问题中的数量关系归结为解直角三角形的问题, 化未知为可知, 化可知为已知, 达到解决实际问题的目的.





新题型新中考

新中考命题趋势,在试题设计上,由知识立意向能力立意转化.在今后的中考试题中,会增加应用型试题和能力型试题.而解直角三角形与实际问题的联系较为紧密,故本章为中考热点,常以中档题出现,选择题、填空题出现也不少.在解答与本章内容有关的中考试题时,应注意以下两点:

(1)由于锐角三角函数是在直角三角形中定义的,因此在一个比较复杂的图形中,求一个锐角三角函数值时,应首先确定这个锐角在哪个直角三角形中,并分清这个锐角的对边、邻边及这个直角三角形的斜边,这是正确求解锐角三角函数有关问题的关键.

(2)在运用解直角三角形的有关知识解决实际问题时,实质上是把实际问题转化成为几何问题.因此,首先在全面审题的基础上,画出符合题意的示意图;其次,要把坡比、仰角、俯角、方向角等条件归结成为直角三角形中的已知元素,然后利用解直角三角形的方法求解.

一、发散思维延伸

延伸题 1 (2003·甘肃)如图 1-41 所示,甲、乙为住宅区内的两幢楼,它们的高为 $AB = CD = 30$ m,两楼间的距离 $AC = 24$ m,现需了解甲楼对乙楼的采光的影响情况.当太阳光与水平线的夹角为 30° 时,求甲楼的影子在乙楼上有多高?(精确到 0.1 m,参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)

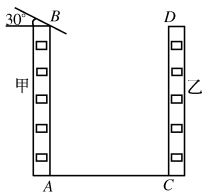


图 1-41

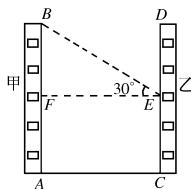


图 1-42

解 设甲楼的影子在乙楼上的最高点为 E , 连结 BE , 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F , 如图 1-42 所示.

$$\because \angle BEF = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BFE \text{ 中, } BF = EF \cdot \tan 30^\circ = AC \cdot \tan 30^\circ = 8\sqrt{3} \approx 13.84 \approx 13.8 \text{ (m)}.$$

$$\therefore CE = AF = AB - BF \approx 16.2 \text{ (m)}.$$

答:甲楼的影子在乙楼上的高度约为 16.2 m.

延伸题 2 (2003·青海)如图 1-43 所示,登山队员在山脚 A 点测得山顶 B 的仰角 $\angle CAB = 45^\circ$,当沿倾斜角为 30° 的斜坡前进 100 m 到达 D 点后,又在 D 点测得山顶 B 的仰角为 60° ,求山高 BC.(精确到 1 m,参考数据 $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{2} \approx 1.414$).

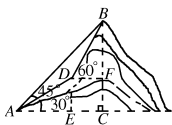


图 1-43

解 过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E, $DF \perp BC$ 于 F.

$$\because \angle BAC = 45^\circ, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle BDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBF = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DBA = 15^\circ, \text{ 则 } DB = DA = 100.$$

$$\because \angle DAE = 30^\circ,$$

$$\therefore FC = DE = \frac{1}{2} AD = 50.$$

$$\text{在 } \triangle BDF \text{ 中, } \sin \angle BDF = \frac{BF}{BD}, BF = BD \cdot \sin \angle BDF = 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{山高 } BC = BF + FC = 50\sqrt{3} + 50 \approx 137(\text{m}).$$

延伸题 3 如图 1-44 所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 20$, $AD \perp AC$ 于 A, 交 BC 于 D, $BC = 32$, 求 $\cos \alpha$ 的值.

解 如图 1-45 所示,过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E.

$$\because \triangle ABC \text{ 中, } AB = AC = 20,$$

$$\therefore BE = EC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 32 = 16,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中,

$$AE = \sqrt{AC^2 - EC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

$$\because AD \perp AC \text{ 于 A, } \therefore \angle CAD = 90^\circ.$$

$$\because \angle C + \angle CAE = 90^\circ, \angle C + \angle \alpha = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle \alpha = \angle CAE.$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中,

$$\cos \angle CAE = \frac{AE}{AC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, \therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

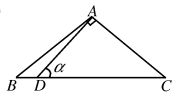


图 1-44

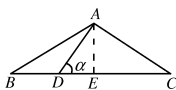
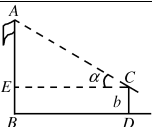


图 1-45

解法指导 在直角三角形中求锐角的三角函数值,关键在于确定三条边的长或三条边之间的数量关系,当这些条件不确定时,关键是作辅助线,构造直角三角形,沟通未知与已知的关系.

二、课标新题导向

新题 1 实习作业题 某同学要测量旗杆 AB 的高,现已用测量工具测完各数据并填入下表,请你完成下列实习报告.

题 目	测量底部可以到达的旗杆高			
测量目标				
测得数据	测量项目	第一次	第二次	平均值
	BD 的长	20.15 m	19.97 m	
	测倾器的高	1.23 m	1.21 m	
	倾斜角	$\alpha = 30^\circ 15'$	$\alpha = 29^\circ 45'$	
计 算	旗杆高 AB (精确到 0.1 m)			

解 水平距离 BD (精确到 0.01 m) 的平均值为 20.06 m, 测倾器高平均 1.22 m, 倾斜角平均值为 $\alpha = 30^\circ$.

$$\because CE = BD, BE = CD, \therefore AE = CE \cdot \tan \alpha = 20.06 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 11.58 \text{ (m)}.$$

$$\therefore AB \approx 11.58 + 1.22 = 12.8 \text{ (m)}.$$

新题 2 (2004·天津) 在建筑楼梯时,设计者要考虑楼梯的安全程度,如图 1-46 所示,虚线为楼梯的斜度线,斜度线与地板的夹角为倾角 θ ,一般情况下,倾角 θ 愈小,楼梯的安全程度愈高.

如图 1-47 所示,设计者为提高楼梯的安全程度,要把楼梯的倾角由 θ_1 减至 θ_2 ,这样楼梯占地板的长度由 d_1 增加到 d_2 ,已知 $d_1 = 4$ m, $\angle \theta_1 = 40^\circ$, $\angle \theta_2 = 36^\circ$,求楼梯占地板的长度增加了多少?(精确到 0.01 m)

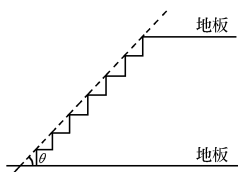


图 1-46

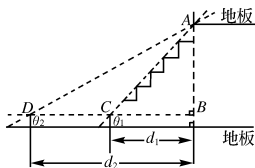


图 1-47

(参考数据 $\sin 36^\circ = 0.5878$, $\cos 36^\circ = 0.8090$, $\tan 36^\circ = 0.7265$, $\sin 40^\circ = 0.6428$, $\cos 40^\circ = 0.7660$, $\tan 40^\circ = 0.8391$.)

解 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $BC = d_1$, $\angle ACB = \angle \theta_1$, $AB = BC \cdot \tan \angle ACB$,
 $\therefore AB = d_1 \cdot \tan \theta_1 = 4 \tan 40^\circ$, 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $BD = d_2$, $\angle ADB = \angle \theta_2$,
 $\therefore AB = d_2 \cdot \tan \theta_2 = d_2 \tan 36^\circ$, $4 \tan 40^\circ = d_2 \tan 36^\circ$, $d_2 = \frac{4 \tan 40^\circ}{\tan 36^\circ} = 4.620$, $d_2 - d_1 \approx 0.62$.

答 楼梯占用地板的长增加了 0.62 m.

新题 3 (2004·北京)如图 1-48 所示,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D , 若 $\angle B = 30^\circ$, $CD = 6$, 求 AB 的长.

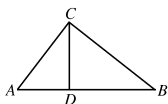


图 1-48

解 在 $\text{Rt} \triangle CDB$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $CD = 6$, 则 $BC = 12$. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $AB = \frac{BC}{\cos B} = 8\sqrt{3}$.

三、中考名题赏析

名题 1 (2004·沈阳)某地有 7 居民楼, 窗户朝南, 窗户的高度为 h m, 此地一年中冬至这一天的正午时刻太阳光与地面的夹角最小为 α , 夏至这一天的正午时刻太阳光与地面的夹角最大为 β (图 1-49). 小明想为自己家的窗户设计一个直角三角形遮阳篷 BCD , 要求它既能最大限度地遮挡夏天炎热的阳光, 又能最大限度地使冬天温暖的阳光射入室内. 小明查阅了有关资料, 获得了所在地区 α 和 β 的相应数据: $\alpha = 24^\circ 36'$, $\beta = 73^\circ 30'$. 小明又量得窗户的高 $AB = 1.65$ m. 若同时满足下面两个条件: (1) 当太阳光与地面的夹角为 α 时, 要想使太阳光刚好全部射入室内; (2) 当太阳光与地面的夹角为 β 时, 要想使太阳光刚好不射入室内. 请你借助下面的图形 (图 1-50), 帮助小明算一算, 遮阳篷 BCD 中, BC 和 CD 的长各是多少? (精确到 0.01 m)

(以下数据供计算中选用: $\sin 24^\circ 36' = 0.416$, $\cos 24^\circ 36' = 0.909$, $\tan 24^\circ 36' = 0.458$, $\cot 24^\circ 36' = 2.184$, $\sin 73^\circ 30' = 0.959$, $\cos 73^\circ 30' = 0.284$, $\tan 73^\circ 30' = 3.376$, $\cot 73^\circ 30' = 0.296$.)

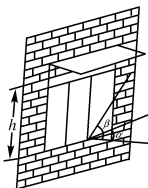


图 1-49

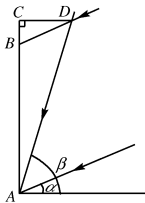


图 1-50

解 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BC = CD \cdot \tan \angle CDB = CD \tan \alpha$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC = CD \cdot \tan \angle CDA = CD \tan \beta$.

$$\therefore AB = AC - BC = CD(\tan \beta - \tan \alpha), \therefore CD = \frac{AB}{\tan \beta - \tan \alpha} \approx 0.57(\text{m}).$$

$$\therefore BC = CD \cdot \tan \angle CDB \approx 0.26(\text{m}).$$

答: BC 长为 0.26 m , CD 长为 0.57 m .

名题 2 (2005·湖北)为了测量汉江某段河面的宽度,秋实同学设计了如下的测量方案:先在河的北岸选定一点 A ,再在河的南岸选定相距 $a \text{ m}$ 的两点 B, C (如图),分别测得 $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$,请你根据秋实同学测得的数据,计算出河宽 AD . (结果用含 a 和含 α, β 的三角函数表示)

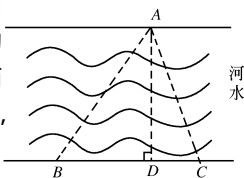


图 1-51

解法 1 $\because \tan \alpha = \frac{AD}{BD}, \therefore BD = \frac{AD}{\tan \alpha}.$

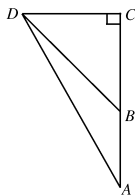
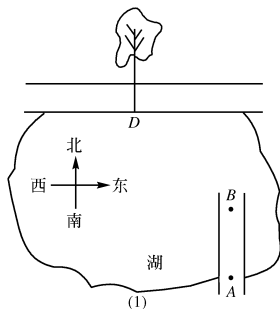
同理 $CD = \frac{AD}{\tan \beta} \therefore \frac{AD}{\tan \alpha} + \frac{AD}{\tan \beta} = a.$

$$\therefore AD = \frac{a \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} (\text{m}).$$

解法 2 $\because \cot \alpha = \frac{BD}{AD}, \therefore BD = AD \cot \alpha.$ 同理 $CD = AD \cdot \cot \beta.$

$$\therefore AD \cot \alpha + AD \cot \beta = a, \therefore AD = \frac{a}{\cot \alpha + \cot \beta} (\text{m}).$$

名题 3 (2005·青海)如图 1-52(1)所示,一人工湖的对岸有一条笔直的小路,湖上原有一座小桥与小路垂直相通,现小桥有一部分已断裂,另一部分完好,站在完好部分的桥头 A 测得路边的小树 D 在它的北偏西 30° ,前进 32 m 到断口 B 处,又测得小树 D 在它的北偏西 45° ,请计算小桥断裂部分的长. (结果用根号表示)



(2)

解 延长 AB 交小路于 C , 设 $BC = x$

$$\because \angle CBD = 45^\circ \quad AC \perp DC$$

$$\therefore BC = CD = x$$

在 $\text{Rt}\triangle DAC$ 中, $\angle DAC = 30^\circ$, $AC = x + 32$,

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{x + 32}$$

$$3x = \sqrt{3}(x + 32)$$

$$x = \frac{32\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 16(\sqrt{3} + 1) \text{ (m)}.$$

答 断裂部分长 $16(\sqrt{3} + 1)$ m.

名题 4 (2004·上海)如图 1-53 所示,等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle DBC = 45^\circ$, 翻折梯形 $ABCD$, 使点 B 重合于点 D , 折痕分别交边 AB 、 BC 于点 F 、 E . 若 $AD = 2$, $BC = 8$ 求:

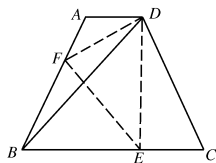


图 1-53

(1) BE 的长;

(2) $\angle CDE$ 的正切值.

解 (1) 由题意得 $\triangle BFE \cong \triangle DFE$,

$$\therefore DE = BE,$$

$$\because \text{在 } \triangle BDE \text{ 中, } DE = BE, \angle DBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle DBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ \text{ 即 } DE \perp BC.$$

$$\because AD = 2, BC = 8 \text{ 则 } EC = \frac{1}{2}(BC - AD) = 3, BE = BC - EC = 5.$$

(2) 由(1)得 $DE = BE = 5$, 在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 中, $DE = 5$, $EC = 3$,

$$\therefore \tan \angle CDE = \frac{EC}{ED} = \frac{3}{5}.$$



知能转化平台

【题型发散】

1. 看一看, 你能选出正确答案吗?

(1) 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $c = 80$ 则 a 等于 ()

- A. 40 B. $40\sqrt{2}$ C. $40\sqrt{3}$ D. $\frac{160}{3}\sqrt{6}$

(2) 已知在等腰 $\triangle ABC$ 中, 一腰上的高为 1, 这条高与底边夹角为 15° , 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. 1

B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$ (3) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $a + b = 3 + \sqrt{3}$, 则 a 等于 ()A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3} + 1$

D. 3

(4) 当锐角 $\alpha > 60^\circ$ 时, $\cos \alpha$ 的值 ()A. 大于 $\frac{1}{2}$ B. 小于 $\frac{1}{2}$ C. 大于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 大于 1

(5) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $|\sin A - 1| + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B)^2 = 0$, 则角 C 的度数是 ()A. 120° B. 60° C. 45° D. 30° (6) 一个三角形的两边长分别为 3 cm 和 12 cm, 夹角为 30° , 和它面积相等的等腰直角三角形的斜边长为 ()

A. 5 cm

B. 6 cm

C. 7 cm

D. 8 cm

2. 想一想, 填什么最准确?

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $c = 1$, $b = \sqrt{2}$, $a = 1$, 则 $\tan A =$ _____.(2) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 其三个内角之比为 $A:B:C = 1:2:3$, 若 $b = 12$, 则此三角形面积等于 _____.(3) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $c = 8$, $a = 6$, 则最小角的正切值为 _____.(4) 已知在直角梯形 $ABCD$ 中, 上底 $CD = 2$, 下底 $AB = 5$, 非直角腰 $BC = 2\sqrt{3}$, 则底角 $B =$ _____.(5) 等腰 $\triangle ABC$ 的一腰上的高为 $\sqrt{3}$ cm, 这高与底边的夹角为 30° , 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ cm^2 .(6) 三角形三边的长分别为 $\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{17}$, 则此三角形最大内角的度数是 _____.**【纵横发散】**1. 设 α 为锐角, 利用三角函数的定义, 证明: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.2. 已知 $A(-3, 0)$ 和 $B(-2, 3)$, BC 垂直 x 轴于点 C , 在 y 轴上找一点 M , 使 $\triangle AOM$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 求点 M 的坐标.**【解法发散】**1. 求 $\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ - \tan 40^\circ \cdot (-\tan 50^\circ)$ 的值. (用两种方法解)2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AB = AC = 1$, D 是 AB 上的一点, 且 $DE \perp BC$ 垂足是 E , 直线 ED 交直角边 CA 延长线于 F . 问点 D 在边 AB 上何处时, $\triangle ADF$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和为最小? 并求出它的最小值. (用两种方法解)3. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $a + b = 2$, 求 c 边的长. (用三种

方法解).

【转化发散】

1. 不查表, 比较 $\sin 46^\circ$, $\cos 46^\circ$ 和 $\tan 46^\circ$ 的大小.
2. 已知 $\angle A$ 和 $\angle B$ ($\angle A > \angle B$) 是一个直角三角形的两个锐角, 并且 $\sin A$, $\sin B$ 是方程 $4x^2 - 2kx + k - 1 = 0$ 的两个实根. 求:
 - (1) k 的值;
 - (2) $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数.

【迁移发散】

1. 已知方程 $4x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ 的两个根是直角三角形两个锐角的余弦, 求 m 之值.
2. 方程 $8x^2 + 2kx + k - 1 = 0$ 的两个根是一个直角三角形的两个锐角的正弦, 试证明 k 值不存在.

【构造发散】

1. 如图 1-54 所示, 已知地面上的点 A 在山的正东, 测得山顶 M 的仰角为 30° , 点 B 在山的东南, 又测得点 B 在 A 的南偏西 30° , 且 $AB = 300$ m, 求山高 MN . (精确到 1 m)

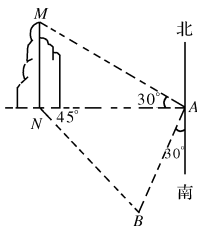


图 1-54

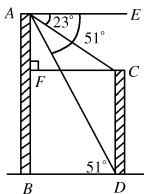


图 1-55

2. 如图 1-55 所示, 两个建筑物的水平距离是 50 m, 从其中较高的一个建筑物的顶点 A 测得另一个建筑物的顶点 C 的俯角是 23° , 底部 D 点的俯角是 51° , 求两建筑物的高 AB 和 CD . (精确到 0.1 m)

【综合发散】

1. 如图 1-56 所示, 已知等腰 $\triangle ABC$ 中, 底边 $BC = 20$ cm, 面积为 $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ cm^2 . 求它的底角和腰长.
2. 如图 1-57 所示, 水库大坝的横断面坝顶宽 5 m, 坝

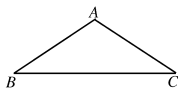


图 1-56

高20 m,斜坡 AB 的坡度 $i = 1:2.5$,斜坡 CD 的坡度 $i = 1:2$. 求斜坡 AB 的坡角 α 及坝底 AD 的宽和斜坡 AB 的长. 如果这个坝长 150 m, 整个坝体有土多少方? (1 m^3 简称 1 方)

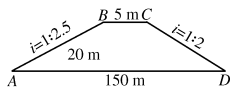


图 1-57

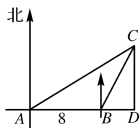


图 1-58

3. 如图 1-58 所示, 一轮船自西向东航行, 在 A 处测得某岛 C 在北偏东 60° 的方向上, 船前进 8 海里后到达 B , 再测 C 岛, 在北偏东 30° 的方向上, 问船再前进多少海里与 C 岛最近? 最近距离是多少?



第二单元 二次函数

课标定位梳理

一、单元目标定位

1. 知识目标定位

(1)经历探索、分析和建立两个变量之间的二次函数关系的过程,掌握二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象的作法和性质.

(2)能根据二次函数的表达式确定二次函数的开口方向、对称轴和顶点坐标,能根据图象对二次函数的性质进行分析,逐步积累研究函数性质的经验.

(3)经历用三种方式表示变量之间二次函数关系的过程,能用表格、表达式、图象表示变量之间的二次函数关系,从而,进一步体会函数的三种表达形式之间的联系和各自不同的特点.

2. 能力目标定位

(1)能体会二次函数是一类最优化问题的数学模型,并感受数学的应用价值,并运用二次函数的知识求出实际问题的最大(小)值,发展解决问题的能力.

(2)理解二次函数与一元二次方程的关系,理解一元二次方程的根就是二次函数与 x 轴交点的横坐标,掌握何时方程有两个不等的实根、两个相等的实根和没有实根.

(3)能应用二次函数解决实际问题,能对变量的变化趋势进行预测.



二、单元学法指导

单元重点 :二次函数的定义、图象和性质 ;二次函数与一元二次方程之间的关系.

单元难点 :二次函数图象和性质的应用.

学习本单元内容 ,应注意以下的数学思想方法和规律 :

1. 函数的思想方法

函数思想即运用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题的思想方法.尤其是构建几种常见函数的模型解决实际应用问题是各省中考题的热点.

2. 数形结合的思想方法

平面直角坐标系的建立 ,使平面上的点与有序实数对之间构成一一对应关系 ,是实现数与形转化的重要工具.数形结合 ,直观形象 ,为分析问题和解决问题创造了有利条件.数形结合思想方法是开发智力 ,培养能力的重要途径 ,是历年中考压轴题的热点.

函数的图象是坐标 (x, y) 满足解析式的点的集合 ,具有纯粹性和完备性 ,即图象上的点的坐标一定满足解析式 ,并且坐标满足解析式的点都在函数的图象上.

在分析解决问题的过程中 ,应将数与式的关系熟练地同点与线的位置互相转化 ,以达到化繁为简 ,变难为易 ,解决问题的目的.

3. 待定系数法

用于确定几种常见函数的解析式.

4. 配方法

用于求抛物线的顶点坐标、对称轴方程和最值.



1. 二次函数所描述的关系 结识抛物线 刹车距离与二次函数



自主学习提示

一、相关知识链接

1. 变量与常量

(1)变量 :在一个变化过程中 ,我们称数值发生变化的量为变量 .

(2)常量 :有些量的数值是始终不变的 ,我们称它们为常量 .

2. 函数

一般地 ,在一个变化过程中 ,如果有两个变量 x 与 y ,并且对于 x 的每一个确定的值 , y 都有惟一确定的值与其对应 ,那么我们就说 x 是自变量 , y 是 x 的函数 .

3. 函数的图象

(1)定义 :一般地 ,对于一个函数 ,如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标 ,那么坐标平面内由这些点组成的图形 ,就是这个函数的图象 .

(2)描点法画函数图象的一般步骤 :

①列表(表中给出一些自变量的值及其对应的函数值) ;

②描点(在直角坐标系中 ,以自变量的值为横坐标 ,相应的函数值为纵坐标 ,描出表格中数值对应的各点) ;

③连线(按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑曲线连接起来) .

4. 函数的分类

(1)一次函数 :形如 $y = kx + b$ (k, b 为常数 , $k \neq 0$) 的函数叫做一次函数 .

当 $b = 0$,即函数 $y = kx$ (k 为常数 , $k \neq 0$) 叫做正比例函数 .正比例函数是一次函数的特例 .

(2)反比例函数 :函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数 , $k \neq 0$) 叫做反比例函数 .

二、重难知识点提示

本节重点 :二次函数的概念 ,二次函数 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 + c$ 的图象和性质 .

本节难点 :理解二次函数关系 ,会用描点法作函数图象 .

发散思维分析



一、二次函数的概念

一般地,形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的函数叫做 x 的二次函数.

(1)二次函数中,自变量的最高次数为 2,等式左边是函数变量 y ,其指数为 1 次,右边是一个二次三项式,所以二次函数可称为 x 的二次函数.

(2)对于常数 a, b, c 取值应明确, $a \neq 0$, 否则有 $y = 0 \cdot x^2 + bx + c$,这不是二次函数,但 a 可以是正数,也可以取负数,而 b, c 可以取一切实数.

(3)注意区别二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与函数 $y = ax^2 + bx + c$,后者不一定是二次函数,解题时,这些微小的区别切忌疏忽.

二、二次函数 $y = x^2$ 图象的作法

(1)列表:首先考虑到自变量 x 的取值范围是任意实数,可以 0 为中心,均匀选取一些对称的 x 的值.为了计算、描点的方便, x 取整数,相应的 y 值也是整数.如 x 分别取值 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$,相应的 y 值分别为 $9, 4, 1, 0, 1, 4, 9$.

(2)定点:依次定出 $(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)$ 等七个点.

(3)描图:用平滑的曲线,按自变量由小到大(或由大到小)的次序连接各点,得到的图象是抛物线.

(4)注意: x 还可以取比 3 大或比 -3 小的值,图象还可以延伸.

三、二次函数 $y = x^2$ 的图象性质

(1)图象与 x 轴交点为 $(0, 0)$.

(2)图象的张口朝上,当 $x < 0$ 时,随 x 值的增大, y 的值减小;

当 $x > 0$ 时,随 x 值的增大, y 的值增大.

(3)当 x 取 0 时, y 的值最小,最小值是 0.

(4)图象是轴对称图形,对称轴是 y 轴.

(5)图象如图 2-1 所示.

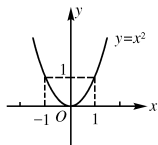


图 2-1

四、函数 $y = -x^2$ 的图象与 $y = x^2$ 的图象对比

(1) $y = -x^2$ 与 $y = x^2$ 的图象关于 x 轴对称.

(2)它们都是轴对称图形,对称轴都是 y 轴.

(3) $y = x^2$ 有最小值 0, $y = -x^2$ 有最大值 0.

(4) $y = x^2$ 开口向上, $y = -x^2$ 开口向下.

(5)当 $x > 0$ 时, $y = x^2$ 随 x 增大而增大, $y = -x^2$ 随 x 增大而减小. 当 $x < 0$ 时, $y = x^2$ 随 x 增大而减小, $y = -x^2$ 随 x 增大而增大.

五、函数 $y = ax^2$ 图象的性质

- (1) $y = ax^2$ 与 $y = x^2$ 的形状相似, 都是抛物线.
- (2) $y = ax^2$ 与 $y = x^2$ 有公共顶点 $(0, 0)$ 和公共对称轴 y 轴.
- (3) $y = ax^2$ 中 a 的符号决定开口方向, $|a|$ 决定开口的宽窄.

六、函数 $y = ax^2 + c$ 与函数 $y = ax^2$ 的关系

函数 $y = ax^2 + c$ 图象的形状、大小、对称轴、开口方向与 $y = ax^2$ 都相同, 只有顶点不同, 抛物线 $y = ax^2 + c$ 图象的顶点是 $(0, c)$.

下面让我们共同探究一抛物线形拱桥当洪水到来时水位上升的速度:

❖ 与你探究 ❖

【问题】 如图 2-2 所示, 有一座抛物线形拱桥, 桥下面在正常水位 AB 时宽 20 m, 水位上升 3 m 就达到警戒线 CD , 此时水面宽为 10 m.

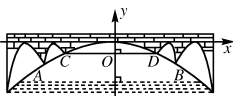


图 2-2

- (1) 在如图 2-2 所示的坐标系中求抛物线的解析式;
- (2) 若洪水到来时, 水位以 0.2 m/h 的速度上升, 从警戒线开始, 再持续多少小时才能到拱桥顶?

【准备】 将图中 A 、 C (或 B 、 D) 两点用坐标表示, 然后运用抛物线上的点与其解析式之间的关系列出方程组求解.

【过程】 (1) 设拱桥顶到警戒线的距离为 m .

$\therefore$ 抛物线顶点为 $(0, 0)$, 且对称轴为 y 轴.

$\therefore$ 设此抛物线为 $y = ax^2$.

又 $\because C(-5, -m)$, $A(-10, -m-3)$ 是抛物线上的两点,

$$\therefore \begin{cases} -m = a \cdot (-5)^2, \\ -m-3 = a \cdot (-10)^2. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{25}, \\ m = 1. \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{25}x^2$.

(2) $\because$ 洪水到来时, 水位上升速度为 0.2 m/h ,

$\therefore$ 从警戒线开始要 $\frac{1}{0.2} = 5$ (h) 到达拱桥顶.

【评析】 解答本题的关键是把实际问题抽象成二次函数模型, 在建模的过程中, 运用抛物线的性质确定 A 、 C 两点的坐标是关键.

下面再让我们探究怎样求直线与抛物线的交点问题:

❖ 与你探究 ❖

【问题】 求直线 $y = 2x + 3$ 与抛物线 $y = x^2$ 的交点坐标.

【准备】 此题要求交点坐标,也就是要解方程组 $\begin{cases} y=2x+3, \\ y=x^2. \end{cases}$

【过程】 $\therefore$ 方程组 $\begin{cases} y=2x+3, \\ y=x^2. \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=9. \end{cases}$

$\therefore$ 直线 $y=2x+3$ 与抛物线 $y=x^2$ 的交点坐标为 $(-1, 1)$ 和 $(3, 9)$.

【评析】 本题建立了一个重要的数学模型,即两个图像交点的坐标,都是通过转化成由函数解析式组成的方程组来求得.这个数学模型沟通了方程与函数间的联系,实现了知识间的相互转化.



发散思维应用

典型例题 1

(2005·江苏)已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $(-1, 0)$, $(0, -3)$, $(2, -3)$ 三点.

(1)求这条抛物线的解析式;

(2)写出抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

解 (1)由题意,得 $\begin{cases} a-b+c=0, \\ c=-3 \\ 4a+2b+c=-3. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2, \\ c=-3. \end{cases}$

$\therefore$ 这条抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

(2)抛物线的开口方向向上,对称轴为 $x=1$,顶点坐标为 $(1, -4)$.

【题型发散】

发散 1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)下列函数是二次函数的是

()

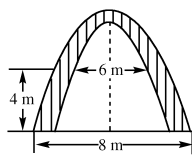
A. $y=x^2+\frac{2}{x}$

B. $y=x^3+2x^2$

C. $y=\sqrt{2x^2-3x+5}$

D. $y=1-\frac{2}{3}x^2$

(2)某大学的校门是一抛物线形水泥建筑物(如图 2-3 所示),大门的地面宽度为 8 m,两侧距离地面 4 m 高处各有一个挂校名横匾用的铁环,两铁环的水平距离为 6 m,则校门的高为(精确到 0.1 m,水泥建筑物的厚度忽略不计)



()

A. 9.2 m

B. 9.1 m

C. 9 m

D. 5.1 m

(1)分析 用直接法.

图 2-3

解 A项中 $\frac{2}{x}$ 是分式 B项中含有 x 的三次项 C项中 $\sqrt{2x^2-3x+5}$ 是无理式, 只有D项符合二次函数的标准.

故本题应选 D.

(2)分析 用数形结合法.

解 如图 2-4 所示, 建立坐标系, 则可设抛物线表达式为 $y = ax^2$, 则由题意可知 A 点坐标为 $(3, y_1)$, 则 B 点坐标为 $(4, y_1 - 4)$,

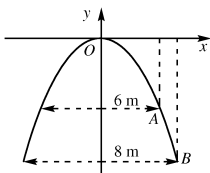


图 2-4

代入表达式, 得 $\begin{cases} y_1 = 9a, \\ y_1 - 4 = 16a. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = -\frac{4}{7}, \\ y_1 = -\frac{36}{7}. \end{cases}$

则 B 点坐标为 $(4, -\frac{64}{7})$, 则校门高为 $|\frac{64}{7}| \approx 9.1$ (m).

故本题应选 B.

发散 2 想一想, 填什么最准确?

(1)函数 $y = (m+2)x^{m^2-2} + 2x - 1$ 是二次函数, 则 $m =$ _____.

(2)已知 $y = mx^{m^2+m}$, 当 $m =$ _____ 时, 它的图像是开口朝下的抛物线, 当 x _____ 时, y 随 x 的增大而减小.

解 (1) $m^2 - 2 = 2$, 且 $m + 2 \neq 0$ 即 $m \neq -2$. 两者缺一不可, 解得 $m = 2$.

(2) $m^2 + m = 2$, $m^2 + m - 2 = 0$, $(m+2)(m-1) = 0$,

$\therefore m = -2, m = 1$.

$\therefore$ 开口向下, $\therefore m = -2$.

【纵横发散】

发散 3 下列函数是二次函数的是

()

A. $y = 2 + \frac{3}{4}x^2$

B. $y = 3x^2 + \frac{1}{3x}$

C. $y = 2(x-1)^2 - 2x^2$

D. $y = ax^2 + bx + c$

分析 用排除法.

解 因为 B 项不是整式, C 项不是二次式, D 项二次项系数可为 0, 均应排除.

故本题应选 A.

【对称发散】

发散 4 若抛物线 $y = -x^2$ 上有一点 $P(2, -4)$, 求抛物线上与点 P 关于 y 轴对称的点 P' 的坐标.

分析 可用轴对称的性质求出点 P' 的坐标.

解 如图 2-5 所示, 过点 P 作 PA 交 y 轴于点 A , 交抛物线左侧于点 P' , 且 $PA \parallel x$ 轴, 由 $PP' \parallel x$ 轴, 可得点 P' 与点 P 到 x 轴的距离相等, 均为 4, 故点 P' 的纵坐标为 -4 . 设点 P' 的横坐标为 m , 则 $-4 = -m^2$, 解得 $m = \pm 2$.

$\because$ 点 P' 在第三象限, $\therefore m < 0, m = -2$.

$\therefore P'(-2, -4)$.

解法指导 由点到坐标轴的距离得出该点的坐标时, 要考虑该点所在象限的位置.

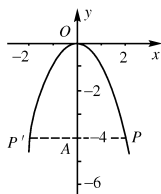


图 2-5

【数形发散】

发散 5 在同一个坐标系中做出 $y = x^2$, $y = 2x^2$ 的图象, 比较两者的异同.

解 (1)列表.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

(2)描点, 连线.(如图 2-6 所示)

比较函数 $y = x^2$, $y = 2x^2$ 的异同点:

① $y = x^2$ 与 $y = 2x^2$ 只有开口大小不相同.

$y = x^2$ 比 $y = 2x^2$ 开口要大些. 由此可知 $y = ax^2$ 中 $|a|$ 越大, 开口越小.

② $y = x^2$ 与 $y = 2x^2$ 开口都向上, 对称轴都是 y 轴, 顶点坐标都是 $(0, 0)$.

③两个二次函数的增减性相同. 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x < 0$ 时, y 的值随 x 的增大而减小.

解法指导 选用列表、描点、连线的方法画出 $y = x^2$, $y = 2x^2$ 的图象, 再观察图象, 从开口方向、开口大小、顶点坐标、对称等方面比较.

【综合发散】

发散 6 已知直线 $y = -2x + 3$ 与抛物线 $y = ax^2$ 相交于 A, B 两点, 且 A 点坐标为 $(-3, m)$.

(1)求 a, m 的值;

(2)求抛物线的表达式及其对称轴和顶点坐标;

(3) x 取何值时, 二次函数 $y = ax^2$ 中的 y 随 x 的增大而减小;

(4)求 A, B 两点及二次函数 $y = ax^2$ 的顶点构成的三角形的面积.

分析 待定系数法求表达式, 及 $y = ax^2$ 的性质和三角形面积综合知识的应用.

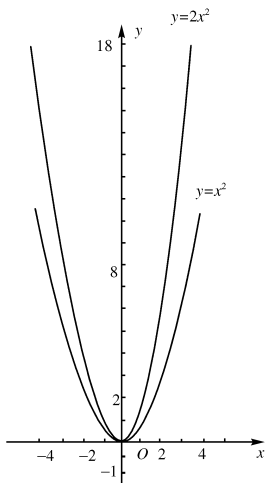


图 2-6

解 (1)根据题意,得 $\begin{cases} -2 \cdot (-3) + 3 = m, \\ a \cdot (-3)^2 = m. \end{cases} \therefore \begin{cases} m = 9, \\ a = 1. \end{cases}$

(2) $\because a = 1, \therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2$, 其对称轴为 y 轴, 顶点为 $(0, 0)$.

(3) $\because a = 1 > 0$, 对称轴为 y 轴, $\therefore$ 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

(4)根据题意,得 $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2x + 3. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} y_1 = 9, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

$\therefore A$ 点为 $(-3, 9)$, $\therefore B$ 点为 $(1, 1)$.

如图 2-7 所示,作 $AE \perp x$ 轴于点 E , $BF \perp x$ 轴于点 F , 则 $AE = 9$, $BF = 1$, $EF = 4$.

则 $S_{\text{梯形}AEFB} = \frac{1}{2}(AE + BF) \cdot EF = \frac{1}{2}(9 + 1) \cdot 4 = 20$,

$S_{\triangle AEO} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = \frac{27}{2}$, $S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$,

$S_{\triangle ABO} = S_{\text{梯形}AEFB} - S_{\triangle AEO} - S_{\triangle BOF} = 20 - \frac{27}{2} - \frac{1}{2} = 6$.

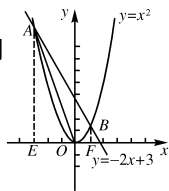


图 2-7

指点迷津 (1)两个函数的图象相交,用它们的表达式联立方程组可求出图象的交点坐标.

(2)在坐标系中,非直角三角形的面积可以用分割,或用可求的图形面积的和差,求出面积.如本题,直线 AB 与 y 轴交点设为 M ,也可用 $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle AOM} - S_{\triangle BOM}$ 的方法.



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. 下列函数中,不是二次函数的是

()

A. $y = \sqrt{2}x(\sqrt{2}x + 3)$

B. $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$

C. $y = \frac{1}{2}(x - 1)(x + 1)$

D. $y = (x - 2)^2 - x^2$

2. 已知 $a < -1$, 点 $(a - 1, y_1)$, (a, y_2) , $(a + 1, y_3)$ 都在函数 $y = x^2$ 的图象上, 则

()

A. $y_1 < y_2 < y_3$

B. $y_1 < y_3 < y_2$

C. $y_3 < y_2 < y_1$

D. $y_2 < y_1 < y_3$

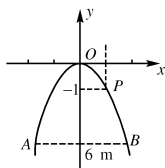
3. 二次函数 $y = -x^2$ 中, 当 $x_1 > x_2 > 0$ 时, 相应地, y_1 与 y_2 的大小关系

是_____.

4. 若点 $A(-4, m)$, $B(n, -8)$ 均在二次函数 $y = -x^2$ 的图象上, 则 $m + n$ 的值是_____.

【应用发散】

1. 如图 2-8 所示, 桥拱是抛物线形, 上面有一点 P 的坐标为 $(1, -1)$, 当水位线在 AB 位置时, 水面宽 6 m, 求水面离桥顶的高度 h .



2. 正方形的周长为 l cm, 面积为 S cm²,

(1) 求 S 与 l 之间的函数关系式;

(2) 画出图象;

(3) 根据图象, 求出 $S = 1$ cm² 时, 正方形的边长;

(4) 根据图象求出 l 取何值时, $S \geq 4$ cm².

图 2-8

【数形发散】

在同一个坐标系中作出 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 的图象, 比较它们的异同, 并能找出它们的关系.

【综合发散】

1. 已知函数 $y = ax^2 + c$ 过点 $(-2, -3)$ 和点 $(1, 6)$.

(1) 求这个函数关系式;

(2) 当 x 取何值时, 函数 y 随 x 的增大而增大?

(3) 求这个函数的图象与 x 轴的交点坐标.

2. 如图 2-9 所示, 是某市一条高速公路上的隧道口在平面直角坐标系上的示意图, 点 A 和 A_1 、点 B 和 B_1 分别关于 y 轴对称, 隧道拱部分 BCB_1 为一段抛物线, 最高点 C 离路面 AA_1 的距离为 8 m, 点 B 离路面 AA_1 的距离为 6 m, 隧道的宽 AA_1 为 16 m. 现有一大型运货汽车, 装载某大型设备后, 其宽为 4 m, 车载大型设备的顶部与路面的距离均为 7 m, 它能否安全通过这个隧道? 说明理由.

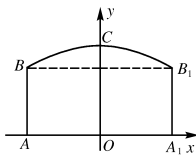


图 2-9

课后习题答案, 你需要吗?

随堂练习(课本第 36 页)

1. $y = -\frac{1}{2} + 3x^2$, $s = 1 + t + 5t^2$ 是二次函数.

2. (1) $y = \pi x^2 + 2\pi x$;

$$(2) 3\pi \text{ cm}^2 \quad 2(1+\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2 \quad 8\pi \text{ cm}^2.$$

习题2.1(课本第36页)

1. 从左到右依次填 :4.9 ,19.6 ,44.1 ,78.4 ,
122.5.

$$2.(1) S = 2x^2 + 4(x + 0.5)x = 6x^2 + 2x.$$

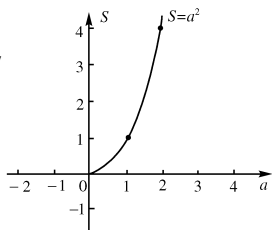
$$(2) y = 30x^2 + 10x.$$

习题2.2(课本第41页)

1. 比如 ,天牛等动物 ,以及一些植物的叶子
等.

2. 只有 $a \geq 0$ 的部分 , $S = a^2$.

第2题图



习题2.3(课本第45页)

1. 二次函数 $y = -3x^2$ 的图象与 $y = 3x^2$ 的图象形状相同 ,对称轴都是 y 轴 ,
顶点坐标都是 $(0, 0)$,但它们的开口方向不同 , $y = -3x^2$ 的图象的开口向下 ,而
 $y = 3x^2$ 的图象的开口向上 ;

二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象与 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象形状相同 ,对称轴都是 y
轴 ,顶点坐标都是 $(0, 0)$,但它们的开口方向不同 , $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象的开口向下 ,
而 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象的开口向上.

2. 二次函数 $y = -3x^2 + \frac{1}{2}$ 的图象与 $y = -3x^2$ 的图象形状相同 ,开口方向、
对称轴也都相同 ,但顶点坐标不同 , $y = -3x^2 + \frac{1}{2}$ 的图象的顶点坐标是 $(0, \frac{1}{2})$,
实际上 ,只要将 $y = -3x^2$ 的图象向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位 ,就可以得到 $y = -3x^2 + \frac{1}{2}$
的图象 ;

二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$ 的图象与 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象形状相同 ,开口方向、
对称轴也都相同 ,但顶点坐标不同 , $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$ 的图象的顶点坐标是 $(0, -3)$,
实际上 ,只要将 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象向下平移 3 个单位 ,就可以得到 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$
的图象.

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象

用三种方式表示二次函数



自主学习提示

一、相关知识链接

函数 $y = ax^2$ 和 $y = ax^2 + c$ 之间的关系

(1) 图象之间的关系.

① 相同点 两函数的图象是形状、大小、开口方向、对称轴均相同的抛物线;

② 不同点 两函数的图象的顶点不同(即位置不同), 抛物线 $y = ax^2$ 的顶点是 $(0, 0)$, 而抛物线 $y = ax^2 + c$ 的顶点是 $(0, c)$.

③ 联系 把抛物线 $y = ax^2$ 沿 y 轴方向, 向上或向下平移 $|c|$ 个单位, 即是抛物线 $y = ax^2 + c$ 的图象.

(2) 系数 a, c 与图象之间的关系.

在函数 $y = ax^2$ 与 $y = ax^2 + c$ 中, a 的符号决定抛物线开口方向, $|a|$ 决定开口的大小, $|a|$ 越大, 开口越小; $|a|$ 越小, 开口越大. c 决定抛物线 $y = ax^2 + c$ 的顶点在 y 轴上的位置.

二、重难点知识提示

本节重点 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象和性质及其应用.

本节难点 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的性质及平移规律.



发散思维分析

一、二次函数的图象和性质

(1) 二次函数的图象是抛物线.

(2) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

(3) 对称轴方程: $x = -\frac{b}{2a}$.

(4) 当 $a > 0$ 时, 抛物线开口向上, 在对称轴左侧, y 随 x 的增大而减小; 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而增大. 函数 y 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

当 $a < 0$ 时, 抛物线开口向下, 在对称轴左侧, y 随 x 的增大而增大, 在对称轴

右侧 y 随 x 的增大而减小 ; 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时 , 函数 y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

(5)二次函数的图象与 x 轴的位置关系由 $\Delta = b^2 - 4ac$ 来确定 .

当 $\Delta < 0$ 时 , 抛物线与 x 轴无交点 . 若 $a > 0$, 则整个抛物线在 x 轴的上方 , 函数值 $y > 0$; 若 $a < 0$, 则整个抛物线在 x 轴下方 , 函数值 $y < 0$.

当 $\Delta = 0$ 时 , 则抛物线与 x 轴有一个交点 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ 且是抛物线的顶点 . 若 $a > 0$ 时 , 则抛物线不经过 x 轴下方 , 函数值 $y \geq 0$; 若 $a < 0$, 则抛物线不经过 x 轴上方 , 函数值 $y \leq 0$.

当 $\Delta > 0$ 时 , 抛物线与 x 轴有两个交点 $(x_1, 0)$ 与 $(x_2, 0)$, 其中 x_1, x_2 是二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的二相异实根 . ($x_1 < x_2$) ;

这时线段 AB 称为抛物线被 x 轴截得的弦 , 其长度为 :

$$|AB| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} .$$

若 $a > 0$, 则当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时 , $y > 0$;

当 $x = x_1$ 或 $x = x_2$ 时 , $y = 0$; 当 $x_1 < x < x_2$ 时 , $y < 0$. 若 $a < 0$, 则当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时 , $y < 0$;

当 $x = x_1$ 或 $x = x_2$ 时 , $y = 0$; 当 $x_1 < x < x_2$ 时 , $y > 0$.

二、二次函数解析式的三种表达形式

(1)一般式 : $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) , 图象过点 $(0, c)$.

(2)顶点式 : $y = a(x - h)^2 + k$, 图象顶点是 (h, k) .

(3)两根式 : $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, 图象与 x 轴的交点为 $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$.

已知二次函数图象上三点坐标、顶点坐标与 x 轴两交点横坐标时 , 分别用上面三式表示较为方便 .

三、抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象与系数 a, b, c 的关系

其关系可以总结如下表所示 :

表 2-1

a, b, c 的代数式	作 用	说 明	
a	①决定抛物线的开口方向	$a > 0$	开口向上
	②决定增减性	$a < 0$	开口向下
c	决定抛物线与 y 轴交点的位置 , 交点坐标为 $(0, c)$	$c > 0$	交点在 x 轴上方
		$c = 0$	抛物线过原点
		$c < 0$	交点在 x 轴下方

续表

a, b, c 的代数式	作用	说明	
$-\frac{b}{2a}$	决定对称轴的位置, 对称轴是 $x = -\frac{b}{2a}$	$ab > 0$	交点在 y 轴左侧
		$ab < 0$	交点在 y 轴右侧
$b^2 - 4ac$	决定抛物线与 x 轴交点的个数	$b^2 - 4ac > 0$	有两个交点
		$b^2 - 4ac = 0$	有一个交点
		$b^2 - 4ac < 0$	无
$(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a})$	决定顶点的位置		
(x_1, x_2)	抛物线与 x 轴的交点坐标是 $(x_1, x_2) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		
$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{ a }$	抛物线与 x 轴两交点间的距离		

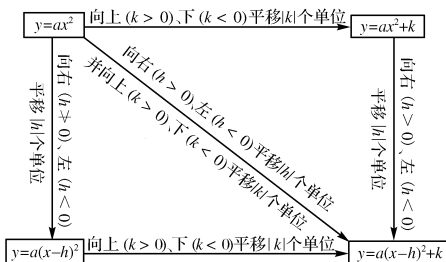
四、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的图象的画法及平移规律

1. 二次函数图象的画法(五点法)

- (1) 先找出顶点坐标, 画出对称轴;
- (2) 找出抛物线上关于对称轴对称的四个点;
- (3) 把上述五点按从左到右的顺序用平滑曲线连结起来.

2. 二次函数的平移规律

任意抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 都可转化为 $y = a(x - h)^2 + k$, 都可以由 $y = ax^2$ 经过适当地平移得到, 具体平移方法如下所示:



上述平移的规律是：“ h 值正、负，右、左移； k 值正、负，上、下移”实际上有关抛物线的平移问题，不能死记硬背平移规律，只要先将其解析式化为顶点式，然后根据它们的顶点的位置关系，确定平移方向和平移的距离非常简便。

下面让我们共同探究怎样求出函数的三种解析式：

❖ 与你探究 ❖

【问题】求下列函数的解析式。

(1)如果抛物线过 $(2, -\frac{3}{2})$ ， $(7, 6)$ ， $(-5, 30)$ 三点，求其解析式。

(2)如果抛物线的顶点是 $(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$ ，在 y 轴上的截距为2，求其解析式。

(3)如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 $(2 + \sqrt{3}, 0)$ ， $(2 - \sqrt{3}, 0)$ 及 $(2, 3)$ ，求其解析式。

【准备】本题可利用二次函数常用的三种形式来解。

【过程】(1)设所求二次函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，根据题意，得

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -\frac{3}{2}, \\ 49a + 7b + c = 6, \\ 25a - 5b + c = 30. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -3, \\ c = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$\therefore$ 所求二次函数解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ 。

(2)设所求二次函数解析式为 $y = a(x - h)^2 + k$ 。

$\because$ 抛物线顶点坐标为 $(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$ ，

$\therefore y = a(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{7}{3}$. ①

又 $\because$ 抛物线在 y 轴上的截距为2，即过点 $(0, 2)$ ， $\therefore 2 = a(0 + \frac{1}{3})^2 + \frac{7}{3}$ 。

$\therefore a = -3$ 。

把 $a = -3$ 代入①，得所求二次函数解析式为 $y = -3(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{7}{3}$ ，

即 $y = -3x^2 - 2x + 2$ 。

(3)设所求二次函数解析式为 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$)。

$\because$ 抛物线在 x 轴上的交点坐标为 $(2 + \sqrt{3}, 0)$ 和 $(2 - \sqrt{3}, 0)$ ，

即 $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ ， $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ 。

$\therefore y = a[x - (2 - \sqrt{3})][x - (2 + \sqrt{3})]$ 。

又 $\because$ 抛物线过点 $(2, 3)$ ，

$$\therefore a(2-2+\sqrt{3})(2-2-\sqrt{3})=3.$$

解得 $a = -1$.

$$\therefore \text{所求函数解析式为 } y = -(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3}),$$

$$\text{即 } y = -x^2 + 4x - 1.$$

【评析】(1)在求二次函数解析式时,应根据已知条件的特点,恰当地选用一种函数表达式,解题会简便.

(2)若给定图象上三点坐标,用一般式;若给定抛物线顶点坐标,(对称轴和最值)可选用顶点式;若给出抛物线与 x 轴的交点坐标,可选用交点式(两根式).

下面让我们再探究一下怎样找到由二次函数解析式作其图象的规律:

❖ 与你探究 ❖

【问题】已知抛物线与 y 轴交点的纵坐标 $-\frac{5}{2}$,且还经过 $(1, -6)$ 和 $(-1, 0)$ 两点.

(1)求抛物线的解析式;

(2)画出该函数的图象.

【准备】首先用待定系数法求出函数解析式,并将其化为顶点式,以顶点横坐标为中心,依次取值、列表、画图.

【过程】设所求的二次函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 都是常数, $a \neq 0$).

$$\text{由题意得} \begin{cases} c = -\frac{5}{2}, \\ a + b + c = -6, \\ a - b + c = 0. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = -3, \\ c = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2,$$

故抛物线的顶点为 $(-3, 2)$, 对称轴为 $x = -3$.

列表:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$	-2.5	0	1.5	2	1.5	0	-2.5

描点画图(如图 2-10 所示).

【评析】(1)画函数图象,应先将解析式化成顶点式,确定顶点坐标和对称轴;

(2)表格中自变量的取值不是以原点为中心,而是以抛物线的顶点的横坐标为中心,这样可以避免取值的盲目性,保证画出的抛物线的对称性.

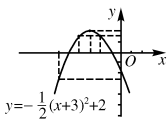


图 2-10



发散思维应用

典型例题 1

某企业投资 100 万元引进一条农产品加工生产线,若不计维修费、保养费用,预计投产后每年可创利 33 万元.该生产线投产后,从第 1 年到第 x 年的维修、保养费用累计为 y (万元),且 $y = ax^2 + bx$.若第 1 年的维修费、保养费用为 2 万元,第 2 年的为 4 万元.

(1)求 y 的解析式;

(2)投产后,这个企业第几年才能收回投资?

分析 本题是在实际情境中利用二次函数解决问题.根据二次函数图象的特点来确定哪一年收回投资.

解 (1)由已知条件知

当 $x = 1$ 时, $y = 2$;

当 $x = 2$ 时, $y = 4 + 2 = 6$.

代入 $y = ax^2 + bx$ 得 $\begin{cases} a + b = 2, \\ 4a + 2b = 6. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$

$\therefore y = x^2 + x$.

(2)设产生的利润为 P , 则

$$P = 33x - 100 - (x^2 + x) = -x^2 + 32x - 100 = -(x - 16)^2 + 156.$$

由于在对称轴的左边即 $1 \leq x \leq 16$ 时, P 随 x 的增大而增大,且当 $x = 1, 2, 3$ 时, P 的值均小于 0, 而当 $x = 4$ 时, $P = -12^2 + 156 > 0$, 可知投产第 4 年就能收回投资.

【题型发散】

发散 1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1) $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 2-11 所示, 则

A. $a < 0, b > 0, c > 0$

B. $a < 0, b > 0, c < 0$

C. $a < 0, b < 0, c > 0$

D. $a < 0, b < 0, c < 0$

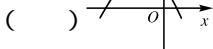


图 2-11

(2)(2004·陕西)已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如

图 2-12 所示,则下列说法正确的是 ()

A. $ab < 0$

B. $bc < 0$

C. $a + b + c > 0$

D. $a - b + c < 0$

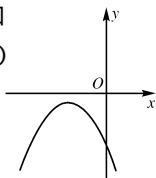


图 2-12

(1)分析 用直接推算法.

解 $\because$ 开口向下, $\therefore a < 0$.

$\because$ 与 y 轴交于正半轴, $\therefore c > 0$,

$\because -\frac{b}{2a} < 0$, $\therefore \frac{b}{2a} > 0$, a, b 同号.

$\therefore b < 0$.

$\therefore a < 0, b < 0, c > 0$.

故本题应选 C.

(2)分析 用直接推算法.

本题从图象上可以看出 $a < 0, b < 0, c < 0$, 仅凭符号无法进行选择, 但可排除 A、B. 在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, 当 $x = 1$ 时, 有 $y = a + b + c$; 当 $x = -1$ 时, 有 $y = a - b + c$. 因此从图象上看, 当 $x = 1$ 或 -1 时, 对应的 y 的值均小于零. 因此 D 是正确的.

故本题应选 D.

发散 2 想一想, 填什么最准确?

(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ 配方成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式是_____.

(2) 当 $x =$ _____ 时, $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{4}$, 有最 _____ 值, 为 _____.

解 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 1 + 2$

$\therefore y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$.

(2) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{4} = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{7}{4} - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{5}{4}$.

当 $x = -1$ 时, 有最小值 $y = \frac{5}{4}$.

【解法发散】

发散 3 已知二次函数图象的顶点坐标为 $(2, -3)$, 并过点 $(-1, 6)$, 求这个函数的解析式.

解法 1 用一般式. 设所求的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$, 则有

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=2, \\ \frac{b^2-4ac}{4a}=-3, \\ a-b+c=6. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=-4, \\ c=1. \end{cases}$$

故所求解析式为 $y=x^2-4x+1$.

解法 2 用顶点式. 设所求的解析式为 $y=a(x-2)^2-3$. 将 $(-1, 6)$ 代入上式, 得 $a(-1-2)^2-3=6$, 解得 $a=1$.

故所求解析式为 $y=1 \times (x-2)^2-3=x^2-4x+1$.

发散 4 已知二次函数 $y=x^2+2ax-2b+1$ 和 $y=-x^2+(a-3)x+b^2-1$ 的图象都经过 x 轴上两个不同的点 M, N , 求 a, b 的值.

解法 1 依题意, 设 $M(x_1, 0), N(x_2, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 则 x_1, x_2 为方程 $x^2+2ax-2b+1=0$ 的两个实数根.

$$\therefore x_1+x_2=-2a, x_1 \cdot x_2=-2b+1.$$

$$\therefore x_1, x_2 \text{ 又是方程 } -x^2+(a-3)x+b^2-1=0 \text{ 的两个实数根,}$$

$$\therefore x_1+x_2=a-3, x_1 \cdot x_2=1-b^2.$$

$$\therefore \begin{cases} -2a=a-3, \\ -2b+1=1-b^2. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=0; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases}$$

当 $a=1, b=0$ 时, 二次函数的图象与 x 轴只有一个交点,

$$\therefore a=1, b=0 \text{ 舍去.}$$

当 $a=1, b=2$ 时, 二次函数为 $y=x^2+2x-3$ 和 $y=-x^2-2x+3$, 符合题意,

$$\therefore a=1, b=2.$$

解法 2 $\because$ 二次函数 $y=x^2+2ax-2b+1$ 的图象的对称轴为 $x=-a$, 二次函数 $y=-x^2+(a-3)x+b^2-1$ 的图象的对称轴为 $x=\frac{a-3}{2}$, 而且这两个二次函数图象都经过 x 轴上两个不同的点 M, N .

$\therefore$ 两个二次函数图象的对称轴为同一直线.

$$\therefore -a=\frac{a-3}{2}, \text{ 解得 } a=1.$$

$\therefore$ 两个二次函数分别为 $y=x^2+2x-2b+1$ 和 $y=-x^2-2x+b^2-1$. 依题意, 令 $y=0$, 得

$$x^2+2x-2b+1=0, \quad \text{①}$$

$$-x^2-2x+b^2-1=0, \quad \text{②}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得 } b^2-2b=0,$$

解得 $b_1 = 0, b_2 = 2$.

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}; \text{或} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

当 $a=1, b=0$ 时, 二次函数的图象与 x 轴只有一个交点.

$\therefore a=1, b=0$ 舍去.

当 $a=1, b=2$ 时, 二次函数为 $y = x^2 + 2x - 3$ 和 $y = -x^2 - 2x + 3$, 符合题意.

$\therefore a=1, b=2$.

【纵横发散】

发散 5 (2004·沈阳) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 A、B、C 三点, 如图 2-13.

(1) 观察图象写出 A、B、C 三点的坐标, 并求出此二次函数的解析式;

(2) 求出抛物线的顶点坐标和对称轴.

解 (1) 由图象知 $A(-1, 0), B(0, -3), C(4, 5)$.

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0, \\ c = -3, \\ 16a + 4b + c = 5. \end{cases}$$

解得 $a=1, b=-2, c=-3$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3.$$

(2) $y = (x-1)^2 - 4$, 顶点为 $(1, -4)$, 对称轴为直线 $x=1$.

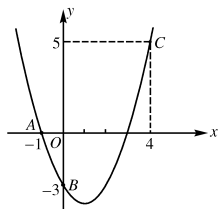


图 2-13

【变换发散】

发散 6 已知函数 $y = -5x^2$ 的图象, 怎样才能得到下列图象?

(1) $y = 5x^2$;

(2) $y = -5x^2 + 2$;

(3) $y = -5x^2 - 1$;

(4) $y = -5(x-2)^2$;

(5) $y = -5(x+2)^2$;

(6) $y = -5(x-1)^2 + 3$;

分析 可利用对称轴、顶点坐标以及开口方向对抛物线位置的影响来解决图象平移与对称变换下的表达式问题.

解 (1) 因为 $y = -5x^2$ 的图象与 $y = 5x^2$ 的图象形状、顶点坐标完全相同, 只是开口方向相反, 所以只要把 $y = -5x^2$ 的图象绕顶点旋转 180° , 就得到 $y = 5x^2$ 的图象了. (也可利用对称性来作)

(2) 把 $y = -5x^2$ 的图象向上平移 2 个单位就得到 $y = -5x^2 + 2$ 的图象了.

(3) 把 $y = -5x^2$ 的图象向下平移 1 个单位就得到了 $y = -5x^2 - 1$ 的图象.

(4) 把 $y = -5x^2$ 的图象向右平移 2 个单位就得到了 $y = -5(x-2)^2$ 的

图象.

(5)把 $y = -5x^2$ 的图象向左平移 2 个单位就得到了 $y = -5(x+2)^2$ 的图象.

(6)把 $y = -5x^2$ 的图象先向右平移 1 个单位再向上平移 3 个单位就得到函数 $y = -5(x-1)^2 + 3$ 的图象.

指点迷津 解关于函数平移变换的问题要抓住顶点式 $y = a(x+m)^2 + n$ 这个工具,并注意 a 的符号决定开口方向, $|a|$ 决定开口大小,一般地函数图象的平移与对称有如下结论.

设 $a > 0$ 则对于函数 $y = f(x)$

①向左平移 a 个单位,得 $y = f(x+a)$;

②向右平移 a 个单位,得 $y = f(x-a)$;

③向上平移 a 个单位,得 $y = f(x) + a$;

④向下平移 a 个单位,得 $y = f(x) - a$;

设 $b \in \mathbf{R}$ 则对函数 $y = f(x)$

①关于直线 $x = b$ 对称,得 $y = f(2b-x)$;

②关于直线 $y = b$ 对称,得 $y = 2b - f(x)$.

【逆向发散】

发散 7 已知直线 $y = \frac{1}{2}x$ 和 $y = -x + m$, 二次函数 $y = x^2 + px + q$ 图象的顶点为 M .

(1)若 M 恰在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与 $y = -x + m$ 的交点处,证明:无论 m 取何实数值,二次函数 $y = x^2 + px + q$ 的图象与直线 $y = -x + m$ 总有两个不同的交点.

(2)在(1)的条件下,若直线 $y = -x + m$ 过点 $D(0, -3)$,求二次函数 $y = x^2 + px + q$ 的表达式,并作出其大致图象.

(3)在(2)的条件下,若二次函数 $y = x^2 + px + q$ 的图象与 y 轴交于点 C ,与 x 轴的左交点为 A ,试在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上求异于 M 的点 P ,使 P 在 $\triangle CMA$ 的外接圆上.

$$(1) \text{证明} \quad \text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x, \\ y = -x + m. \end{cases} \quad \text{①}$$

②

$$\text{得} \quad \frac{1}{2}x = -x + m.$$

$$\therefore \frac{3}{2}x = m, \quad x = \frac{2}{3}m, \quad y = \frac{1}{3}m.$$

$\therefore$ 交点为 $M\left(\frac{2}{3}m, \frac{1}{3}m\right)$ 此时二次函数为

$$y = \left(x - \frac{2}{3}m\right)^2 + \frac{1}{3}m = x^2 - \frac{4}{3}mx + \frac{4}{9}m^2 + \frac{1}{3}m. \quad (3)$$

由式②、③联立, 消去 y , 有

$$x^2 - \left(\frac{4}{3}m - 1\right)x + \frac{4}{9}m^2 - \frac{2}{3}m = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[-\left(\frac{4}{3}m - 1\right)\right]^2 - 4\left(\frac{4}{9}m^2 - \frac{2}{3}m\right) \\ &= \frac{16}{9}m^2 - \frac{8}{3}m + 1 - \frac{16}{9}m^2 + \frac{8}{3}m \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

$\therefore$ 无论 m 为何实数值, 二次函数 $y = x^2 + px + q$ 的图象与直线 $y = -x + m$ 总有两个不同的交点.

(2) 解 $\because$ 直线 $y = -x + m$ 过点 $D(0, -3)$,

$$\therefore -3 = 0 + m,$$

$$\text{即 } m = -3, \therefore M(-2, -1).$$

$\therefore$ 二次函数为

$$\begin{aligned} y &= (x + 2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 3 \\ &= (x + 3)(x + 1). \end{aligned}$$

图象如图 2-14 所示.

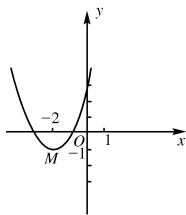


图 2-14

(3) 解 由勾股定理, 可知 $\triangle CMA$ 为 $\text{Rt}\triangle$, 且 $\angle CAM = 90^\circ$,

$\therefore MC$ 为 $\triangle CMA$ 外接圆直径.

$\because P$ 在 $y = \frac{1}{2}x$ 上, 可设 $P\left(n, \frac{1}{2}n\right)$,

由 MC 为 $\triangle CMA$ 外接圆的直径, P 在这个圆上

$\therefore \angle CPM = 90^\circ$.

过 P 分别作 $PN \perp y$ 轴于 N , $PQ \perp x$ 轴于 R , 过 M 作 $MS \perp y$ 轴于 S , MS 的延长线与 PR 的延长线交于点 Q . 如图 2-15 所示, 由勾股定理, 有

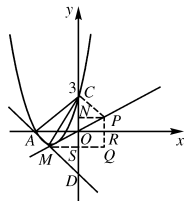


图 2-15

$$|MP|^2 = |MQ|^2 + |QP|^2,$$

$$\text{即 } |MP|^2 = (n + 2)^2 + \left(\frac{1}{2}n + 1\right)^2,$$

$$|CP|^2 = |NC|^2 + |NP|^2 = \left(3 - \frac{1}{2}n\right)^2 + n^2,$$

$$|CM|^2 = 20, \text{ 而 } |MP|^2 + |CP|^2 = |CM|^2.$$

$$\therefore (n+2)^2 + \left(\frac{1}{2}n+1\right)^2 + \left(3-\frac{1}{2}n\right)^2 + n^2 = 20.$$

$$\text{即 } \frac{5}{2}n^2 + 2n - 6 = 0, \therefore 5n^2 + 4n - 12 = 0.$$

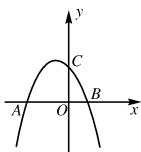
$$\therefore n_1 = \frac{6}{5}, n_2 = -2.$$

而 $n_2 = -2$ 即是 M 点的横坐标, 与题意不符, 故舍去.

$$\therefore n = \frac{6}{5}, \text{此时 } \frac{1}{2}n = \frac{3}{5}, \therefore P \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

【转化发散】

发散 8 已知二次函数 $y = -x^2 + (m-2)x + 3(m+1)$ 的图象如图 2-16 所示.



(1) 当 $m \neq -4$ 时, 求证这个二次函数的图象与 x 轴必有两个交点;

(2) 求 m 的取值范围;

(3) 在(2)的情况下, 且 $|OA| \cdot |OB| = 6$, 求 C 点坐标;

(4) 求 A, B 两点间的距离;

(5) 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

图 2-16

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \because \Delta &= (m-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3(m+1) \\ &= m^2 + 8m + 16 = (m+4)^2. \end{aligned}$$

$$\text{又 } \because m \neq -4, \therefore (m+4)^2 > 0, \text{ 即 } \Delta > 0.$$

$\therefore$ 这个二次函数的图象与 x 轴必有两个交点.

(2) 由图象可知, 抛物线的对称轴在 y 轴的左侧, C 点在 x 轴上方, 所以有

$$\begin{cases} -\frac{m-2}{2 \times (-1)} < 0, \\ 3(m+1) > 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } -1 < m < 2.$$

(3) 设方程 $-x^2 + (m-2)x + 3(m+1) = 0$ 两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 0, x_2 > 0$.

由图可知 $|OA| = |x_1|, |OB| = |x_2|$,

由 $|OA| \cdot |OB| = 6$, 可知 $x_1 \cdot x_2 = -6$,

根据一元二次方程根与系数的关系, 可知 $-3(m+1) = -6$, 则 $m = 1$.

于是, 二次函数的关系式为 $y = -x^2 - x + 6$.

把 $x = 0$ 代入得 $y = 6$, $\therefore C$ 点的坐标是 $(0, 6)$.

(4) 由方程 $-x^2 - x + 6 = 0$, 即 $x^2 + x - 6 = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = -3, x_2 = 2.$$

$\therefore A, B$ 两点间的距离为 $AB = 5$.

$$(5) \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15.$$

【综合发散】

发散 9 抛物线的解析式 $y = ax^2 + bx + c$ 满足四个条件: ① $abc = 0$; ② $a + b + c = 3$; ③ $ab + bc + ca = -4$; ④ $a < b < c$.

(1) 求这条抛物线的解析式;

(2) 设该抛物线与 x 轴的两交点分别为 A, B (A 在 B 的左边), 与 y 轴的交点为 C , P 是抛物线上第一象限内的点, AP 交 y 轴于点 D , $OD = 1.5$, 试比较 $S_{\triangle AOD}$ 与 $S_{\triangle DPC}$ 的大小.

解 (1) $\because a \neq 0, abc = 0$,

$$\therefore bc = 0.$$

① 当 $b = 0$ 时,

$$\text{由 } \begin{cases} a + b + c = 3, \\ ab + ac + bc = -4. \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} a + c = 3, \\ ac = -4. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = -1, \\ c_1 = 4; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_2 = 4, \\ c_2 = -1. \end{cases}$$

$$\because a < b < c,$$

$$\therefore \begin{cases} a_2 = 4, \\ c_2 = -1. \end{cases} \text{ (不合题意, 舍去)}$$

$$\therefore a = -1, b = 0, c = 4.$$

② 当 $c = 0$ 时,

$$\text{由 } \begin{cases} a + b + c = 3, \\ ab + ac + bc = -4. \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a + b = 3, \\ ab = -4. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 4, \\ b_1 = -1 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} a_2 = -1, \\ b_2 = 4. \end{cases}$$

$$\because a < b < c,$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 4, \\ b_1 = -1 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} a_2 = -1, \\ b_2 = 4. \end{cases} \text{ 都不符合题意, 舍去.}$$

$$\therefore \text{所求的抛物线解析式为 } y = -x^2 + 4.$$

(2) 在 $y = -x^2 + 4$ 中, 当 $y = 0$ 时, $x = \pm 2$.

$\therefore A, B$ 两点的坐标分别为 $(-2, 0), (2, 0)$.

如图 2-17 所示, 过 P 作 $PG \perp x$ 轴于 G , 设 P 点坐标为 (m, n) ,

$\because$ 点 P 在抛物线上且在第一象限内,

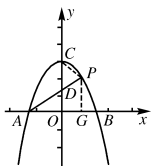


图 2-17

$$\therefore m > 0, n > 0, n = -m^2 + 4.$$

$$\therefore PG = -m^2 + 4, OA = 2, AG = m + 2.$$

$$\therefore OD \parallel PG, OD = 1.5,$$

$$\therefore \frac{OA}{AG} = \frac{OD}{PG},$$

$$\text{即 } \frac{2}{2+m} = \frac{1.5}{-m^2+4}.$$

$$\text{解得 } m_1 = \frac{5}{4}, m_2 = -2 (\text{不合题意, 舍去}),$$

$$\therefore OG = \frac{5}{4}.$$

$$\therefore \text{当 } x=0 \text{ 时, } y=4,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (0, 4).$$

$$\therefore DC = OC - OD = 4 - 1.5 = 2.5.$$

$$S_{\triangle PDC} = \frac{1}{2} CD \cdot OG = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16},$$

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD = \frac{1}{2} \times 1.5 \times 2 = \frac{3}{2} = \frac{24}{16}.$$

$$\therefore S_{\triangle PDC} > S_{\triangle AOD}.$$

典型例题 2

已知抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0)$, 顶点为 $D(1, -1)$.

(1) 确定抛物线的解析式;

(2) 直线 $y=3$ 与抛物线相交于 B, C 两点(点 B 在点 C 左侧), 以 BC 为一边, 原点 O 为另一顶点作平行四边形, 设平行四边形的面积为 S , 求 S 的值;

(3) 若以(2)小题中 BC 为一边, 抛物线上的任一点 P 为另一顶点作平行四边形, 当平行四边形面积为 8 时, 试确定 P 点的坐标;

(4) 当 $-2 \leq x \leq 4$ 时, 第(3)小题中平行四边形的面积是否有最大值? 若有请求出, 若无请说明理由.

解 (1) 如图 2-18 所示, 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 过点 $A(2, 0), D(1, -1)$, $\therefore \begin{cases} 4a + 2b = 0, \\ a + b = -1. \end{cases}$

$$\text{解得 } a = 1, b = -2,$$

$$\text{则抛物线的解析式为 } y = x^2 - 2x.$$

(2) 在抛物线解析式 $y = x^2 - 2x$ 中, 令 $y = 3$, 即

$$3 = x^2 - 2x.$$

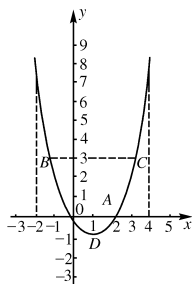


图 2-18

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

则 $B(-1, 3), C(3, 3)$.

$\therefore BC = 4$, $\therefore S = 4 \times 3 = 12$.

(3) 当 P 点在直线 BC 下方时,

$S = 4 \times (3 - y) = 12 - 4y = 8$, $y = 1$.

由 $x^2 - 2x = 1$ 得 $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

则 P 点的坐标 $P_1(1 - \sqrt{2}, 1), P_2(1 + \sqrt{2}, 1)$.

当 P 点在直线 BC 上方时,

$S = 4 \times (y - 3) = 4y - 12 = 8$, $y = 5$.

由 $x^2 - 2x = 5$ 得 $x_3 = 1 - \sqrt{6}$, $x_4 = 1 + \sqrt{6}$.

则 P 点的坐标为 $P_3(1 - \sqrt{6}, 5), P_4(1 + \sqrt{6}, 5)$.

(4) 把 $x = -2$ 代入 $y = x^2 - 2x$ 得 $y = 8$.

把 $x = 4$ 代入 $y = x^2 - 2x$ 得 $y = 8$.

当 $-2 \leq x \leq 4$ 时, 顶点 D 到 BC 的距离为 4, 抛物线上与线段 BC 距离最远的有两个点, 坐标分别为 $(-2, 8), (4, 8)$, 与线段 BC 的距离都为 5.

$\therefore S$ 有最大值, 其最大值为 $S = 4 \times (8 - 3) = 20$.

【题型发散】

发散 1 看一看, 你能选出正确答案吗?

(1) (2004·天津) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 且 $a < 0$, $a - b + c > 0$, 则一定有 ()

A. $b^2 - 4ac > 0$

B. $b^2 - 4ac = 0$

C. $b^2 - 4ac < 0$

D. $b^2 - 4ac \leq 0$

(2) (2005·长春) 图 2-19 中有相同对称轴的两条抛物线, 下列关系不正确的是 ()

A. $h = m$

B. $k = n$

C. $k > n$

D. $h > 0, k > 0$

(1) 分析 用直接推算法.

解 对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c$. 即当 $x = -1$ 时, $y > 0$, 又抛物线开口向下, 因此图象与 x 轴必有两个交点, 那么 $ax^2 + bx + c = 0$ 一定有两个不相等的实根, 因此 $b^2 - 4ac > 0$.

故本题应选 A.

(2) 分析 用数形结合法.

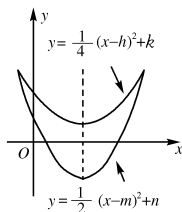


图 2-19

解 由图 2-19 知当两个抛物线的顶点横坐标相等时,即 $h = m$,它们有不同的最小值,所以 $k \neq n$.故本题应选 B.

发散 2 想一想 填什么最准确?

(1)二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,当 $b = 0$ 时,图象顶点在_____,
当 $b = c = 0$ 时,图象顶点在_____.

(2)已知抛物线 $y = x^2 - 2(k+1)x + 16$ 的顶点在 x 轴上,则 k 的值是_____.

解 (1)在 y 轴上;当 $b = c = 0$ 时,图象顶点在原点.

(2)由题意得方程 $x^2 - 2(k+1)x + 16 = 0$.有两个相等实数根,则它的判别式等于零,即 $\Delta = [-2(k+1)]^2 - 4 \times 16 = 0$,即 $k^2 + 2k - 15 = 0$,解得 $k_1 = -5, k_2 = 3$.

【纵横发散】

发散 3 (2004·玉林) 如图 2-20 所示,抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴的负半轴相交于 A、B 两点,与 y 轴的正半轴相交于点 C,与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 的一个交点是 $(1, m)$,且 $OA = OC$,求抛物线的解析式.

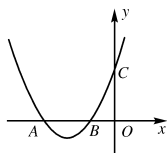


图 2-20

分析 求 $y = x^2 + bx + c$ 中 b 和 c 的值,必须已知两个点,从题意中由与双曲线的交点可求得交点坐标为 $(1, 6)$.又 $OA = OC$,可转化为另一已知条件,即 A 点坐标为 $(-c, 0)$,满足解析式,从而求出 b 和 c .

解 由双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 过点 $(1, m)$,得 $m = 6$.

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 过点 $(1, 6)$.

$\therefore 1 + b + c = 6$,

即 $b + c = 5$. ①

$\because OA = OC$,C 点坐标为 $(0, c)$,

$\therefore$ A 点坐标可表示为 $(-c, 0)$.

$\therefore (-c)^2 - bc + c = 0$.

$\because c \neq 0$,

$\therefore c - b + 1 = 0$. ②

由①②得 $\begin{cases} b = 3, \\ c = 2. \end{cases}$

$\therefore$ 解析式为 $y = x^2 + 3x + 2$.

【解法发散】

发散 4 已知二次函数的图象过点 $(-2, 0)$, 在 y 轴上的截距为 -3 , 对称轴 $x=2$, 求它的解析式.

解法 1 用一般式.

$\because$ 图象过点 $(-2, 0)$, 由于对称轴是 $x=2$, 故得与 x 轴另一交点为 $(6, 0)$, 则图象过 $(-2, 0)$, $(6, 0)$, $(0, -3)$ 三点.

设解析式为 $y = ax^2 + bx + c$, 得

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0, \\ 36a + 6b + c = 0, \\ c = -3. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = -1, \\ c = -3. \end{cases}$$

$\therefore$ 所求解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$.

解法 2 用顶点式(即配方式).

由于对称轴为 $x=2$,

设解析式为 $y = a(x-2)^2 + m$,

$\because$ 图象过 $(-2, 0)$, $(0, -3)$ 得

$$\begin{cases} a(-2-2)^2 + m = 0, \\ a(0-2)^2 + m = -3. \end{cases}$$

解得 $a = \frac{1}{4}$, $m = -4$.

故所求解析式为 $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4$, 即 $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$.

解法 3 用分解式(即乘积式).

由于图象过点 $(-2, 0)$, $(6, 0)$, 设所求的解析式为 $y = a(x+2)(x-6)$, 又图象过 $(0, -3)$, 得 $-3 = a(0+2)(0-6)$.

解得 $a = \frac{1}{4}$.

故所求解析式为 $y = \frac{1}{4}(x+2)(x-6)$, 即 $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$.

发散 5 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 $B(-1, m)$ ($m \neq 0$) 并经过点 $A(1, 0)$.

(1) 求此抛物线的解析式(系数和常数项用含 m 的代数式表示);

(2) 化简 $\sqrt{b^2 - 4ac}$;

(3) 设原点为 O , 抛物线与 y 轴的交点为 C , 若 $\triangle AOC$ 为等腰三角形, 求 m 的值.

解法 1 (1) $\because$ 抛物线的顶点为 $B(-1, m)$,

$\therefore$ 对称轴为 $x = -1$, 即 $-\frac{b}{2a} = -1. \therefore 2a = b.$ ①

又 $\because$ 抛物线过点 $A(1, 0), B(-1, m)$, 得

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ a - b + c = m. \end{cases}$$

②

③

解由式①, ②, ③所组成的方程组, 得

$$a = -\frac{m}{4}, b = -\frac{m}{2}, c = \frac{3m}{4}.$$

$\therefore$ 所求解析式为 $y = -\frac{m}{4}x^2 - \frac{m}{2}x + \frac{3}{4}m.$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{b^2 - 4ac} &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}m\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{3}{4}m\right)} \\ &= \sqrt{m^2} = |m|. \end{aligned}$$

(3) $\because \angle AOC$ 是直角, $\triangle AOC$ 为等腰三角形, $\therefore OC = OA = 1.$

又 $\because$ 点 C 可以在 x 轴的上方, 也可以在 x 轴的下方,

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(0, 1)$ 或 $(0, -1).$

将 $x = 0, y = 1$ 代入抛物线的解析式, 得 $m_1 = \frac{4}{3};$

将 $x = 0, y = -1$ 代入抛物线的解析式, 得 $m_2 = -\frac{4}{3},$

$\therefore m = \pm \frac{4}{3}.$

解法 2 (1) 设抛物线为 $y = a(x+1)^2 + m,$

$\because$ 它经过点 $A(1, 0)$, 得 $0 = a(1+1)^2 + m$, 解得 $a = -\frac{1}{4}m,$

$\therefore$ 解析式为 $y = -\frac{1}{4}m(x+1)^2 + m.$

(2) 由(1)得 $y = -\frac{1}{4}mx^2 - \frac{1}{2}mx + \frac{3}{4}m$

$\therefore a = -\frac{1}{4}m, b = -\frac{1}{2}m, c = \frac{3}{4}m.$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{b^2 - 4ac} &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}m\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{3}{4}m\right)} \\ &= \sqrt{m^2} = |m|. \end{aligned}$$

(3) 同解法 1.

【逆向发散】

发散 6 已知抛物线 $y = x^2 - mx + \frac{m^2}{2}$ 与抛物线 $y = x^2 + mx - \frac{3}{4}m^2$ 在平面

直角坐标系 xOy 中的位置如图 2-21 所示, 其中一条与 x 轴交于 A , B 两点.

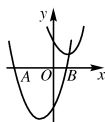


图 2-21

(1) 试判定哪条抛物线经过 A, B 两点, 并说明理由;

(2) 若 A, B 两点到原点的距离 AO, OB 满足 $\frac{1}{OB} - \frac{1}{AO} = \frac{2}{3}$, 求经过 A, B 两点的这条抛物线的解析式.

解 (1) $\because$ 抛物线不过原点, $\therefore m \neq 0$.

$$\text{令 } x^2 - mx + \frac{m^2}{2} = 0,$$

$$\therefore \Delta_1 = (-m)^2 - 4 \times \frac{m^2}{2} = -m^2 < 0.$$

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - mx + \frac{m^2}{2}$ 与 x 轴没有交点.

$$\text{令 } x^2 + mx - \frac{3}{4}m^2 = 0,$$

$$\therefore \Delta_2 = m^2 - 4(-\frac{3}{4}m^2) = 4m^2 > 0,$$

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 + mx - \frac{3}{4}m^2$ 经过 A, B 两点.

(2) 设点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 则 x_1, x_2 是方程 $x^2 + mx - \frac{3}{4}m^2 = 0$ 的两个实数根.

$$\therefore x_1 + x_2 = -m, x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{4}m^2.$$

$\because$ 点 A 在原点的左边, 点 B 在原点的右边, $\therefore AO = -x_1, OB = x_2$.

$$\therefore \frac{1}{OB} - \frac{1}{AO} = \frac{2}{3}, \therefore \frac{1}{x_2} - \frac{1}{-x_1} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2}{3}, \therefore \frac{-m}{-\frac{3}{4}m^2} = \frac{2}{3}.$$

解得 $m = 2$, 经检验 $m = 2$ 是方程的解.

$\therefore$ 所求抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$.

发散 7 如图 2-22 所示, 已知抛物线 $y = -x^2 + ax + b$ 与 x 轴从左至右交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 且 $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \tan \alpha - \tan \beta = 2, \angle ACB = 90^\circ$.

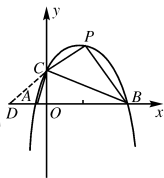


图 2-22

(1) 求点 C 的坐标;

(2) 求抛物线的解析式;

(3) 若抛物线的顶点为 P , 求四边形 $ABPC$ 的面积.

解 (1)根据题意设点 $A(x_1, 0)$ 、点 $B(x_2, 0)$ 且 $C(0, b)$, $x_1 < 0, x_2 > 0, b > 0$.

$\therefore x_1, x_2$ 是方程 $-x^2 + ax + b = 0$ 的两根.

$\therefore x_1 + x_2 = a, x_1 \cdot x_2 = -b$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $OC \perp AB$,

$\therefore OC^2 = OA \cdot OB$.

$\therefore OA = -x_1, OB = x_2$,

$\therefore b^2 = -x_1 \cdot x_2 = b$.

$\therefore b > 0, \therefore b = 1, \therefore C(0, 1)$.

(2)在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 和 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中,

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{OC}{OA} - \frac{OC}{OB} = -\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{-x_1 x_2} = \frac{a}{b} = 2, \therefore a = 2.$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 2x + 1$.

(3) $\because y = -x^2 + 2x + 1, \therefore$ 顶点 P 的坐标为 $(1, 2)$.

当 $-x^2 + 2x + 1 = 0$ 时, $x = 1 \pm \sqrt{2}, \therefore A(1 - \sqrt{2}, 0), B(1 + \sqrt{2}, 0)$, 延长 PC 交 x 轴于点 D , 过 C, P 的直线为 $y = x + 1$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-1, 0)$,

$\therefore S_{\text{四边形}ABPC} = S_{\triangle DPB} - S_{\triangle DCA}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot y_P - \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot y_C \\ &= \frac{1}{2} \times (2 + \sqrt{2}) \times 2 - \frac{1}{2} \times (2 - \sqrt{2}) \times 1 \\ &= \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

【综合发散】

发散 8 已知抛物线 $y = x^2 - 2x - 8$.

(1)求证:该抛物线与 x 轴一定有两个交点;

(2)若该抛物线与 x 轴的两个交点分别为 A, B , 且它的顶点为 P , 求 $\triangle ABP$ 的面积.

解 (1) $\because$ 对于方程 $x^2 - 2x - 8 = 0$, 其判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-8) = 36 > 0$,

$\therefore$ 方程 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 有两个实根,

即 抛物线 $y = x^2 - 2x - 8$ 与 x 轴一定有两个交点.

(2) $\because$ 方程 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 有两个根为 $x_1 = -2, x_2 = 4$.

$\therefore AB = |x_1 - x_2| = 6$.

又 $\because$ 抛物线顶点 P 的纵坐标 $y_P = \frac{4ac - b^2}{4a} = -9$.

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot |y_P| = 27.$$

点评 本题主要考查了二次函数,一元二次方程等知识及它们的应用.

【探究发散】

发散 9 如图2-23(1)所示,二次函数 $y = 2x^2 - 2$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的左边),与 y 轴交于点 C . 直线 $x = m (m > 1)$ 与 x 轴交于点 D .

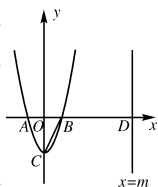


图 2-23(1)

(1)求 A, B, C 三点的坐标;

(2)在直线 $x = m (m > 1)$ 上有一点 P (点 P 在第一象限),使得以 P, D, B 为顶点的三角形和以 B, C, O 为顶点的三角形相似,求点 P 坐标(用含 m 的代数式表示);

(3)在(2)式成立的条件下,试问 抛物线 $y = 2x^2 - 2$ 上是否存在一点 Q ,使得四边形 $ABPQ$ 为平行四边形? 如果存在这样的点 Q ,请求出 m 的值,如果不存在,请简要说明理由.

解 (1)令 $y = 0$, 得 $2x^2 - 2 = 0$, 解得 $x = \pm 1$.

$\therefore$ 点 $A(-1, 0)$ 点 $B(1, 0)$;

令 $x = 0$, 得 $y = -2$, $\therefore$ 点 $C(0, -2)$.

(2)①当 $\triangle PDB \sim \triangle COB$ 时, 有 $\frac{PD}{OC} = \frac{BD}{OB}$.

$\because BD = m - 1, OC = 2, OB = 1$,

$$\therefore \frac{PD}{2} = \frac{m-1}{1}.$$

$$\therefore PD = 2(m-1).$$

$$\therefore P_1(m, 2m-2).$$

②当 $\triangle PDB \sim \triangle BOC$ 时, 有 $\frac{PD}{OB} = \frac{BD}{OC}$,

$\because OB = 1, BD = m - 1, OC = 2$,

$$\therefore \frac{PD}{1} = \frac{m-1}{2}, PD = \frac{m-1}{2}.$$

$$\therefore P_2\left(m, \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

(3)假设抛物线 $y = 2x^2 - 2$ 上存在一点 Q ,使得四边形 $ABPQ$ 为平行四边形.

$\therefore PQ = AB = 2$ 点 Q 的横坐标为 $(m-2)$. 当点 P_1 为 $(m, 2m-2)$ 时, 点 Q_1 的坐标是 $(m-2, 2m-2)$.

$\therefore$ 点 Q_1 在抛物线 $y = 2x^2 - 2$ 的图象上,

$$\therefore 2m-2 = 2(m-2)^2 - 2,$$

$$m-1 = m^2 - 4m + 4 - 1,$$

$$m^2 - 5m + 4 = 0.$$

解得 $m_1 = 1$ (舍去), $m_2 = 4$.

当点 P_2 为 $(m, \frac{m}{2} - \frac{1}{2})$ 时, 点 Q_2 的坐标是

$$(m-2, \frac{m}{2} - \frac{1}{2}).$$

$\therefore$ 点 Q_2 在抛物线 $y = 2x^2 - 2$ 图象上,

$$\therefore \frac{m}{2} - \frac{1}{2} = 2(m-2)^2 - 2,$$

$$m-1 = 4(m-2)^2 - 4,$$

$$m-1 = 4m^2 - 16m + 16 - 4,$$

$$4m^2 - 17m + 13 = 0,$$

$$(m-1)(4m-13) = 0.$$

$$\therefore m_3 = 1 \text{ (舍去)}, m_4 = \frac{13}{4}.$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } 4, \frac{13}{4}.$$

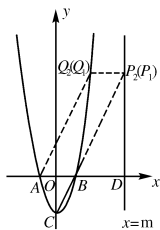


图 2-23(2)



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. (2004·济南) 你知道吗? 平时我们在跳绳时, 绳甩到最高处的形状可近似地看为抛物线. 如图 2-24 所示, 正在甩绳的甲、乙两名学生拿绳的手间距为 4 m, 距地面均为 1 m, 学生丙、丁分别站在距甲拿绳的手水平距离 1 m、2.5 m 处. 绳子甩到最高处时刚好通过他们的头顶. 已知学生丙的身高是 1.5 m, 则学生丁的身高为 (建立的平面直角坐标系如图 2-24 所示) ()

A. 1.5 m

B. 1.625 m

C. 1.66 m

D. 1.67 m

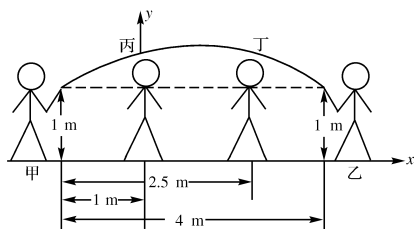
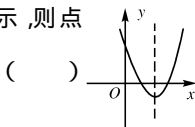


图 2-24

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 2-25 所示, 则点

$M(\frac{b}{c}, a)$ 应在



()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

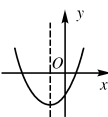
D. 第四象限

3. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 2-26 所示, 则 a 、 b 、 c

图 2-25

的符号应为: a _____ 0 , b _____ 0 , c _____ 0 .

4. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ 的图象是由 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象先向 _____ 平移 _____ 单位, 再向 _____ 平移 _____



单位得到的.

图 2-26

【生活发散】

1. (2004·南通) 如图 2-27 所示, 某生物兴趣小组在四天的实验研究中发现: 骆驼的体温会随外部环境温度的变化而变化, 而且在这四天中每昼夜的体温变化情况相同. 他们将一头骆驼前两昼夜的体温变化情况绘制成图 2-27, 请根据图象回答:

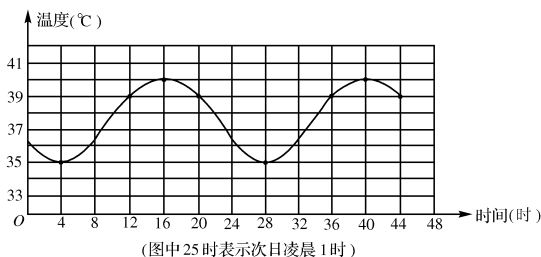


图 2-27

(1)第一天中,在什么时间范围内这头骆驼的体温是上升的?它的体温从最低上升到最高需要多少时间?

(2)第三天 12 时这头骆驼的体温是多少?

(3)兴趣小组又在研究中发现,图 2-27 中 10 时到 22 时的曲线是抛物线,求该抛物线的解析式.

2. (2004·重庆)如图 2-28 所示, AB 、 CD 是两个连接过江电缆的铁塔,塔 AB 高 40 m, AB 的中点为 P ,塔底 B 距江面的垂直高度为 6 m. 跨江电缆因重力自然下垂近似成抛物线形,为了保证过往船只的安全,电缆下垂的最低点距江面的高度不得少于 30 m. 已知:人在距塔底 B 点西 50 m 的地面 E 点恰好看到点 E 、 P 、 C 在一直线上,再向西前进 150 m 后从地面 F 点恰好看到点 F 、 A 、 C 在一直线上.

(1)求两铁塔轴线间的距离(即直线 AB 、 CD 间的距离);

(2)若以点 A 为坐标原点,向东的水平方向为 x 轴,取单位长度为 1 m、 BA 的延长方向为 y 轴建立坐标系. 求刚好满足最低高度要求的这个抛物线的解析式.

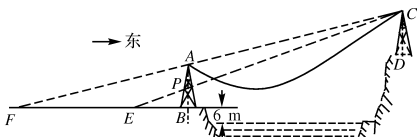


图 2-28

【逆向发散】

1. 已知二次函数 $y = ax^2 - 5x + c$ 的图象如图 2-29 所示,

(1)求这个二次函数的解析式和它的图象的顶点坐标;

(2)观察图象,回答何时 y 随 x 的增大而增大,何时 y 随 x 的增大而减小?

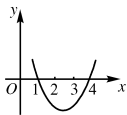


图 2-29

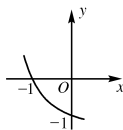


图 2-30

2. 如图 2-30 所示,已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过 $(-1, 0)$ 和 $(0, -1)$ 两点,试确定 a 的取值范围.

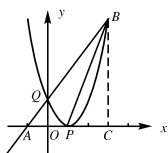
【变换发散】

将抛物线 $y = 2x^2 - 4x + 5$ 作下列移动后, 求得到的新的抛物线方程.

- (1) 向左平移 2 个单位, 再向下平移 3 个单位;
- (2) 顶点不动, 将原抛物线开口反向;
- (3) 以 x 轴为对称轴, 将原抛物线开口反向.

【转化发散】

如图 2-31 所示, 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴只有一个公共点 P , 与 y 轴的交点为 Q , 过点 Q 的直线 $y = 2x + m$ 与 x 轴交于点 A , 与这个二次函数的图象交于另一点 B , 若 $S_{\triangle BPQ} = 3S_{\triangle APQ}$, 求这个二次函数的解析式.



【综合发散】

1. 已知二次函数 $y = 8x^2 - (k-1)x + k - 7$.

- (1) 当 $k = 1$ 时, 求这个二次函数图象的对称轴, 并求图象与 x 轴的两个交点之间的距离;
- (2) 当 k 为何值时, 函数 y 的最小值为零, 并求这时 x 的值;
- (3) 如果函数的图象与 x 轴有两个交点, 试证明这两个交点的横坐标不可能互为倒数.

图 2-31

2. (2003·武汉) 已知二次函数 $y = x^2 - 2(m-1)x - 1 - m$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $x_1 < 0 < x_2$, 与 y 轴交于点 C , 且满足 $\frac{1}{AO} - \frac{1}{OB} = \frac{2}{CO}$.

- (1) 求这个二次函数的解析式;
- (2) 是否存在着直线 $y = kx + b$ 与抛物线交于点 P, Q , 使 y 轴平分 $\triangle CPQ$ 的面积? 若存在, 求出 k, b 应满足的条件; 若不存在, 请说明理由.

课后习题答案, 你需要吗?

随堂练习(课本第 48 页)

1. (1) 开口向上, 直线 $x = -3$, $(-3, -\frac{1}{2})$;
- (2) 开口向下, 直线 $x = -1$, $(-1, -5)$.

习题 2.4(课本第 48 页)

1. (1) 开口向上, 直线 $x = 3$, $(3, -5)$;
- (2) 开口向下, 直线 $x = -1$, $(-1, 0)$;
- (3) 开口向下, 直线 $x = 0$, $(0, -1)$;
- (4) 开口向上, 直线 $x = 2$, $(2, 5)$;
- (5) 开口向上, 直线 $x = -4$, $(-4, 2)$;

(6)开口向下,直线 $x=3$ (3 0).

随堂练习(课本第 50 页)

1.(1)直线 $x=3$ (3, -5);

(2)直线 $x=8$ (8, 1);

(3)直线 $x=1.25$ (1.25, -1.125);

(4)直线 $x=0.75$ (0.75, 0.375).

习题 2.5(课本第 55 页)

1.(1)开口向上,直线 $x=1$ (1, 0);

(2)开口向上,直线 $x=1$ (1, -3);

(3)开口向上,直线 $x=1$ (1, -1);

(4)开口向上,直线 $x=0.5$ (0.5, -2.25);

(5)开口向下,直线 $x=-6$ (-6, 27).

2.15 s, 135 m.

习题 2.6(课本第 58 页)

1. 设其中一个数为 x , 则这两个数的积为 $y = -x^2 + 6x$; 当 $x=3$ 时, 这两个数的积达到最大值 9; 当 $x < 3$ 时, y 的值随 x 值的增大而增大; 当 $x > 3$ 时, y 的值随 x 值的增大而减小.

2. 设其中一部分的长为 x cm, 则面积和为 $y = \frac{1}{8}x^2 - 15x + 900$. 面积和的最小值为 450 cm^2 .

试一试(课本第 58 页)

1.(1)略.

(2)

边上的小圆圈数	1	2	3	4	5
小圆圈的总数	1	3	6	10	15

$$(3)m = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

2.(1)略.

(2)

边上的小圆圈数	1	2	3	4	5
小圆圈的总数	1	7	19	37	61

$$(3)m = 6 \times \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 3n^2 - 3n + 1.$$

3.121 个.



3. 何时获得最大利润

最大面积是多少

二次函数与一元二次方程



自主学习提示

一、相关知识链接

1. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象作法

探索二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象的作法要从特殊到一般,可分为如下几种形式逐步进行: ① $y = ax^2$ ② $y = ax^2 + k$ ③ $y = a(x - h)^2$ ④ $y = a(x - h)^2 + k$ ⑤ $y = ax^2 + bx + c$.

从实例入手,通过做出几种特殊形式的图象,比较、归纳出一般形式的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的作法,应将其化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式.目的在于先找出抛物线的对称轴和顶点,确定自变量如何取值才方便作出图象.

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象和性质

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是抛物线,开口方向、对称轴、顶点是它的三个要素.将其化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式.其中 a, h, k 对二次函数的图象产生直接的影响.

(1) a 的符号决定抛物线的开口方向, $|a|$ 决定抛物线开口的大小,这些已在前面作过论述.

(2) h 决定抛物线对称轴的位置, $x = h$ 就是抛物线的对称轴.

(3) h, k 决定抛物线的顶点,即其顶点为 (h, k) .至于二次函数的函数值是随 x 的值的增大而增大还是增大而减小,其判断主要抓住两点:其一是 a 的符号,其二是对称轴,具体情况与函数 $y = x^2$ 和 $y = -x^2$ 的情况是类似的.

3. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点坐标及对称轴的求法

$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, 对称轴方程是 $x = -\frac{b}{2a}$, 顶点是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$.

4. 列方程解应用题的一般步骤

列方程解应用题的一般步骤可归纳为“审、设、列、解、答”.

(1)“审”是指读懂题目,弄清题意,明确题目中的已知与未知以及它们之间的关系.

(2)“设”是指设元,就是设未知数,设元又分为直接设元和间接设元,所谓直

接设元就是问什么设什么,如果直接设元比较复杂,这时可考虑间接设元.

(3)“列”就是列方程,这是非常重要的步骤,列方程就是找出题目中的等量关系,再根据这个关系列出含有未知数的等式,即方程.

(4)“解”就是求出所列方程的解.

(5)“答”就是书写答案,当然这首先要对求出的解进行检验,舍去不符合实际意义的解.

二、重难知识点提示

本节重点:应用二次函数求最值并解决实际问题.

本节难点:由图象求二次函数的表达式及应用一元二次方程根的判别式、求根公式来对二次函数及其图象进一步的理解.

发散思维分析



一、求二次函数最大(小)值的方法

1. 配方法

将二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 经过配方转化为 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 的形式.若 $a > 0$,当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时,二次函数的最小值 $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$;若 $a < 0$,当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时,二次函数的最大值为 $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.如求二次函数 $y = 3x^2 - 6x + 3 \frac{2}{5}$ 的最小值($\because a = 3 > 0$),将其化为 $y = 3(x - 1)^2 + \frac{2}{5}$.即可看出当 $x = 1$ 时,此函数的最小值为 $y = \frac{2}{5}$.

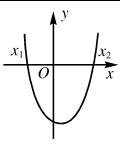
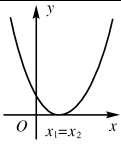
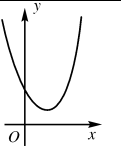
2. 公式法

直接运用二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的配方结果: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$,即将 $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ 当作求二次函数最大(小)值的公式.如求二次函数 $y = -4x^2 - 16x - 22$ 的最大(小)值.这里 $a = -4$, $b = -16$, $c = -22$.
 $\because a = -4 < 0, \therefore x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{2 \times (-4)} = -2$ 时,此函数有最大值 $y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times (-4) \times (-22) - (-16)^2}{4 \times (-4)} = \frac{352 - 256}{-16} = \frac{96}{-16} = -6$.

注意 运用二次函数解决实际问题,必须具备两个重要条件,其一,会从实际

应用问题中,建立二次函数模型,即会列二次函数表达式;其二,会运用二次函数的图象及其性质求函数的最大(小)值.

二、二次函数与一元二次方程根及判别式之间的关系

判别式	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根	有两相异实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($x_1 < x_2$)	有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根

三、用图象法求一元二次方程的近似根

一元二次方程的图象解法体现了数形结合的思想方法,我们从中可以发现二次函数与一元二次方程之间的必然联系,一元二次方程是二次函数的特殊情况(即 $y=0$ 时的情况).一方面,我们可以利用二次函数的图象求一元二次方程的根,另一方面也可以借助求一元二次方程的根来判断图象的位置,使所画的抛物线比较准确.

运用二次函数的图象求一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的方法有如下三种:

(1)直接作函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象,则图象与 x 轴交点的横坐标就是方程的根.

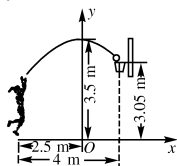
(2)先将方程变为 $ax^2 + bx = -c$,再分别作抛物线 $y = ax^2 + bx$ 和直线 $y = -c$.则直线 $y = -c$ 与抛物线的交点的横坐标就是方程的根.

(3)先将方程变为 $ax^2 = -bx - c$,再分别作抛物线 $y = ax^2$ 和直线 $y = -bx - c$.则两图象的交点的横坐标就是方程的根.

下面让我们共同探究运动员投球准确落入篮圈的规律:

❖ 与你探究 ❖

【问题】如图 2-32 所示,一位运动员在距篮下 4 m 处跳起投篮,球运行的路线是抛物线,当球运行的水平距离为 2.5 m 时,达到最大高度 3.5 m,然后准确落入篮圈,已知篮圈中心到地面的距离为 3.05 m,



(1)建立如图所示的直角坐标系,求抛物线解析式;

图 2-32

(2)该运动员身高 1.8 m,在这次跳投中,球在头顶上方 0.25 m 处出手,问球出手时,他跳离地面的高度是多少?(抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$)

【准备】先根据题意确定抛物线的解析式,再由解析式求出球出手时的纵坐标.

【过程】(1)设所求抛物线为 $y = ax^2 + bx + c$, 则顶点(0, 3.5)和(1.5, 3.05)在抛物线上,

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0, \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = 3.5, \\ 3.05 = 2.25a + 1.5b + c. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = -0.2, \\ b = 0, \\ c = 3.5. \end{cases}$$

$$\therefore y = -0.2x^2 + 3.5.$$

(2)当 $x = -2.5$ 时,

$$y = -0.2 \times (-2.5)^2 + 3.5 = 2.25.$$

$$2.25 - 1.8 - 0.25 = 0.20 \text{ (m)}.$$

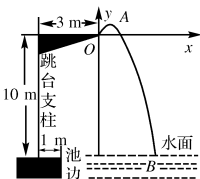
答:球出手时,他距离地面的高度是 0.20 m.

【评析】解答此题的关键在于确定篮圈中心的坐标,并弄清球出手的高度,运动员的身高、球在头顶上方的高度及人离开地面的高度之间的关系.

下面让我们共同探究某跳水运动员在某次试跳中会不会出现失误:

❖ 与你探究 ❖

【问题】某跳水运动员进行 10 m 跳台跳水训练时,身体(看成一点)在空中的运动路线是图 2-33 所示坐标系下经过原点的一条抛物线(图中标出的数据为已知条件).



在跳某个规定动作时,正常情况下,该运动员在空中的最高处距水面为 $10\frac{2}{3}$ m,入水处距池边的距离为 4 m,同时运动员必须在距水面高度为 5 m 以前完成规定的翻腾动作,并调整好入水姿势,否则就会出现失误.

图 2-33

(1)求这条抛物线的解析式;

(2)在某次试跳中,测得运动员在空中的运动路线是(1)中的抛物线,且运动员在空中调整好入水姿势时,距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m,此次试跳会不会失误?并通过计算说明理由.

【准备】(1)根据题中已知数据,可求得抛物线上几个关键点的坐标,据此可求出其函数解析式.

(2)当运动员在空中距池边距离为 $3\frac{3}{5}$ m 时, $x = 3\frac{3}{5} - 2 = \frac{8}{5}$, 代入(1)中可求出相应的 y 值,由题意可判断此时运动员距水面的高度,从而做出判断.

【过程】(1)设最高点为 A , 入水点为 B , 由题意可知, O, B 两点坐标为 $(0, 0)$, $(2, -10)$, 顶点的纵坐标为 $\frac{2}{3}$. 设所求抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

$$\text{则} \begin{cases} c = 0, \\ 4a + 2b + c = -10, \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{25}{6}, \\ b = \frac{10}{3}, \\ c = 0; \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} a = -\frac{3}{2}, \\ b = -2, \\ c = 0. \end{cases}$$

又 $\because$ 抛物线对称轴在 y 轴右侧, $\therefore -\frac{b}{2a} > 0$.

又 $\because a < 0, \therefore b > 0. \therefore a = -\frac{25}{6}, b = \frac{10}{3}, c = 0$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{25}{6}x^2 + \frac{10}{3}x$.

(2)当运动员在空中距水池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m 时,

即 $x = 3\frac{3}{5} - 2 = \frac{8}{5}$ 时,

$$y = \left(-\frac{25}{6}\right) \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{10}{3} \times \frac{8}{5} = -\frac{16}{3}.$$

$\therefore$ 此时运动员距水面的高度为 $10 - \frac{16}{3} = \frac{14}{3} < 5$.

答:此次试跳会出现失误.

【评析】点的坐标与所建坐标系有密切的关系,在本题中,若习惯性地以水池的水平面为 x 轴,把题给数据转化成点的坐标时就会出现错误.



发散思维应用

典型例题

把 100 cm 长的铁丝分成两部分,每一部分弯曲成一个正方形,它们的面积和是多少?它们的面积和最小是多少?

分析 设两段分别为 x cm 和 $(100 - x)$ cm,将它们作为正方形周长,表示出边长和面积.

解 设分成的一段长 x cm, 则另一段长 $(100-x)$ cm. 则两正方形的边长分别为 $\frac{x}{4}$ cm 和 $\frac{100-x}{4}$ cm, 则面积和 $y = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}x^2 - \frac{25}{2}x + 625 = \frac{1}{8}(x-50)^2 + 312.5$.

用图象表示如图 2-34 所示.

从图象可知, 当 $x=50$ 时, y 有最小值 312.5.

解法指导 在求最值问题时, 一般先确定解析式, 再画出其图象, 可直观得到函数的最值.

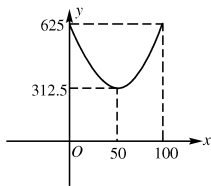


图 2-34

【题型发散】

发散 1 看一看, 你能选出正确答案吗?

(1)(2004·太原) 抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 的对称轴和顶点坐标分别是 ()

- A. $x=1$ $(1, -4)$ B. $x=1$ $(1, 4)$
C. $x=-1$ $(-1, 4)$ D. $x=-1$ $(-1, -4)$

(2)(2004·重庆) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 2-35 所示, 则点 $M(b, \frac{c}{a})$ 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

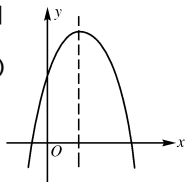


图 2-35

(1)分析 用直接法.

解 $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$.

$\therefore x=1$ 是对称轴, 顶点坐标为 $(1, -4)$. 故本题应选 A.

(2)分析 用数形结合法.

解 $\because$ 开口向下, $\therefore a < 0$.

$\because$ 顶点在第一象限, $\therefore x = -\frac{b}{2a} > 0$.

$\therefore b > 0$, 令 $x=0$, $y=c > 0$. $\therefore \frac{c}{a} < 0$.

$M(b, \frac{c}{a})$ 点在第四象限.

故本题应选 D.

发散 2 想一想, 填什么最准确?

(1)(2004·潍坊) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 如图 2-36 所示, 则它关于 y 轴对称的抛物线的解析式是_____.

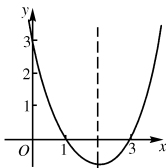


图 2-36

(2)有一个二次函数图象, 三位学生分别说出了它

的一些特点:

甲:对称轴是直线 $x=4$.

乙:与 x 轴交点的横坐标是整数.

丙:与 y 轴交点的纵坐标也是整数,且以这三个交点为顶点的三角形面积为 3.

请你写出满足上述全部特点的一个二次函数解析式_____.

解 (1)令 $x=0, y=c=3$,

以(1 0) (3 0)的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$ 中得

$$a+b=-3 \quad \textcircled{1}$$

$$9a+3b+3=0 \quad \textcircled{2}$$

解得 $a=1, b=-4$.

$$\therefore y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1.$$

其关于 y 轴对称的抛物线的解析式为 $y=(x+2)^2-1$.

$$\text{即 } y=x^2+4x+3.$$

(2)设解析式为 $y=a(x-3)(x-5)$.

令 $x=0$ 得 $y=15a$.

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times |15a| = 3,$$

$$\therefore a = \pm \frac{1}{5}, \text{ 取 } a = \frac{1}{5},$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 3.$$

【纵横发散】

发散 3 已知一抛物线与 x 轴的交点是 $A(-1, 0), B(m, 0)$, 且经过第四象限的点 $C(1, n)$, 有 $m+n=-1, mn=-12$ 求此抛物线的解析式.

解 $\because$ 点 $C(1, n)$ 在第四象限, $\therefore n < 0$, 由 $m+n=-1, mn=-12$.

得 $m=3, n=-4$.

$\therefore$ 设 $y=a(x+1)(x-3)$ 经过点 C , $\therefore a=1$.

$$\therefore y=x^2-2x-3.$$

【应用发散】

发散 4 某商店经销一种销售成本为每千克 40 元的水产品. 据市场分析, 若按每千克 50 元销售, 一个月能售出 500 kg, 销售单价每涨 1 元, 月销售量就减少 10 kg. 针对这种水产品的销售情况, 请解答以下问题:

(1)当销售单价定为每千克 55 元时, 计算月销售量和月销售利润;

(2)设销售单价为每千克 x 元, 月销售利润为 y 元, 求 y 与 x 的函数关系式 (不必写出 x 的取值范围);

(3)商店想在月销售成本不超过 10 000 元的情况下,使得月销售利润达到 8 000 元,销售单价应定为多少?

解 (1)当销售单价定为每千克 55 元时,月销售量为 $500 - (55 - 50) \times 10 = 450$ (kg),所以月销售利润为 $(55 - 40) \times 450 = 6\,750$ (元).

(2)当销售单价定为每千克 x 元时,月销售量为 $[500 - (x - 50) \times 10]$ kg,而每千克的销售利润是 $(x - 40)$ 元,所以月销售利润为

$$y = (x - 40)[500 - (x - 50) \times 10] \\ = (x - 40)(1\,000 - 10x) = -10x^2 + 1\,400x - 40\,000.$$

$\therefore y$ 与 x 的函数解析式为 $y = -10x^2 + 1\,400x - 40\,000$.

(3)要使月销售利润达到 8 000 元,即 $y = 8\,000$,

$$\therefore -10x^2 + 1\,400x - 40\,000 = 8\,000, \text{ 即 } x^2 - 140x + 4\,800 = 0,$$

解得 $x_1 = 60, x_2 = 80$.

当销售单价定为每千克 60 元时,

月销售量为 $500 - (60 - 50) \times 10 = 400$ (kg),

月销售成本为 $40 \times 400 = 16\,000$ (元);

当销售单价定为每千克 80 元时,

月销售量为 $500 - (80 - 50) \times 10 = 200$ (kg),

月销售成本为 $40 \times 200 = 8\,000$ (元);

由于 $8\,000 < 10\,000 < 16\,000$,而月销售成本不能超过 10 000 元.

答:销售单价应定为每千克 80 元.

【综合发散】

发散 5 如图 2-37 所示,公园要建造圆形水池,在水池中央垂直于水面处安装一个柱子 OA , O 恰在水面中心, $OA = 1.25$ m.由柱子顶端 A 处的喷头向外喷水,水流在各个方向沿形状相同的抛物线路径落下.为使水流形状较为漂亮,要求设计成水流在离 OA 距离为 1 m 处达到距水面最大高度 2.25 m.

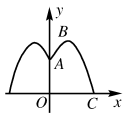


图 2-37

(1)如果不计其他因素,那么水池的半径至少要多少米,才能使喷出的水流不致落到池外?

(2)若水池喷出的抛物线形状与图 2-37 所示的相同,水池的半径为 3.5 m,要使水流不落到池外,此时水流最大高度可达多少米?(精确到 0.1 m).

分析 可建立如图 2-37 所示的坐标系:以 OA 所在的直线为 y 轴,过点 O 垂直于 OA 的直线为 x 轴,点 O 为原点.

解 (1)如图建立坐标系,设抛物线顶点为 B ,水流落水与 x 轴交点为 C .根据题意有 $A(0, 1.25)$, $B(1, 2.25)$, $C(x, 0)$,

设抛物线为 $y = a(x-1)^2 + 2.25$, 点 A 坐标代入, 得 $a = -1$.

当 $y = -(x-1)^2 + 2.25 = 0$ 时, 求得 $x = -0.5$ (舍去), $x = 2.5$.

答 水池的半径至少要 2.5 m.

(2) 由于抛物线形状与图 2-37 所示的相同, 可设此抛物线为 $y = -(x+m)^2 + k$.

将点 $A(0, 1.25)$ 及点 $(3.5, 0)$ 代入, 解方程组可求得

$$m = -\frac{11}{7}, k = 3\frac{141}{196} \approx 3.7.$$

答 此时水流最大高度达 3.7 m.

【探究发散】

发散 6 如果抛物线 $y = -x^2 + 2(m-1)x + m + 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 且 A 点在 x 轴的正半轴上, B 点在 x 轴的负半轴上, OA 的长是 a , OB 的长是 b .

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $a:b=3:1$, 求 m 的值, 并写出此时抛物线的解析式;

(3) 设(2)中的抛物线与 y 轴交于点 C , 抛物线的顶点是 M , 问: 抛物线上是否存在点 P , 使 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\triangle BCM$ 面积的 8 倍? 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

解 (1) 设 A, B 两点的坐标分别是 $(x_1, 0), (x_2, 0)$.

$\because A, B$ 两点在原点的两侧,

$\therefore x_1 x_2 < 0$, 即 $-(m+1) < 0$,

解得 $m > -1$.

$\therefore \Delta = [2(m-1)]^2 - 4 \times (-1) \times (m+1)$

$$= 4m^2 - 4m + 8 = 4\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 7.$$

当 $m > -1$ 时, $\Delta > 0$, $\therefore m$ 的取值范围是 $m > -1$.

(2) $\because a:b=3:1$, 设 $a=3k, b=k(k>0)$, 则 $x_1=3k, x_2=-k$.

$$\therefore \begin{cases} 3k - k = 2(m-1), \\ 3k \cdot (-k) = -(m+1), \end{cases} \quad \text{解得 } m_1 = 2, m_2 = \frac{1}{3}.$$

$\therefore m = \frac{1}{3}$ 时 $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}$ (不合题意, 舍去), $\therefore m = 2$.

$\therefore$ 抛物线的解析式是 $y = -x^2 + 2x + 3$.

(3) 易求抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 x 轴的两个交点坐标是 $A(3, 0)$, $B(-1, 0)$, 与 y 轴交点坐标是 $C(0, 3)$, 顶点坐标是 $M(1, 4)$.

将直线 BM 的解析式为 $y = px + q$,

$$\text{则 } \begin{cases} 4 = p \cdot 1 + q, \\ 0 = p \cdot (-1) + q, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} p = 2, \\ q = 2. \end{cases}$$

∴ 直线 BM 的解析式是 $y=2x+2$.

设直线 BM 与 y 轴交于 N 如图 2-38 所示, 则 N 点坐标是 $(0, 2)$,

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle BCM} &= S_{\triangle BCN} + S_{\triangle MNC} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 1.\end{aligned}$$

设使 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\triangle BCM$ 面积 8 倍的 P 点存在, 其坐标是 (x, y) ,

$$\therefore S_{\triangle ABP} = 8S_{\triangle BCM},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AB \times |y| = 8 \times 1, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 4 \times |y| = 8,$$

$$\therefore |y| = 4, \therefore y = \pm 4.$$

当 $y=4$ 时, P 点与 M 点重合, 即 $P(1, 4)$;

当 $y=-4$ 时, $-4 = -x^2 + 2x + 3$, 解得 $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$.

∴ 满足条件的 P 点存在.

P 点坐标是 $(1, 4)$, $(1+2\sqrt{2}, -4)$, $(1-2\sqrt{2}, -4)$.

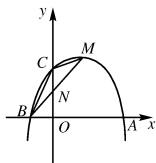


图 2-38



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. 下列函数关系中, 可以看作二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 模型的是

()

A. 在一定的距离内汽车的行驶速度与行驶时间的关系.

B. 我国人口年自然增长率为 1%, 这样我国人口总数随年份的变化关系.

C. 竖直向上发射的信号弹, 从发射到落回地面, 信号弹的高度与时间的关系 (不计空气阻力).

D. 圆的周长与圆的半径之间的关系.

2. 某厂要制造能装 250 mL ($1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$) 饮料的铝制圆柱形易拉罐, 易拉罐的侧壁和底部厚度都是 0.02 cm, 顶部厚度是底部厚度的 3 倍, 这是为了防止“砰”的一声打开易拉罐时把整个盖撕下来, 设一个底面半径是 x cm 的易拉罐的用铝量是 $y \text{ cm}^3$.

(1) 利用公式: 用铝量 = 底圆面积 $\times$ 底部厚度 + 顶圆面积 $\times$ 顶部厚度 + 侧面

积 $\times$ 侧壁厚度 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)选择 该厂设计人员在设计时算出以下几组数据:

底面半径 x (cm)	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
用铝量 y (cm^3)	6.9	6.0	5.6	5.5	5.7	6.0	6.5

根据上表推测 要使用铝量 y (cm^3) 的值尽可能小 底面半径 x (cm) 的值所在范围是 ()

A. $1.6 \leq x \leq 2.4$

B. $2.4 < x < 3.2$

C. $3.2 \leq x \leq 4$

D. $1.6 < x < 2.4$

3. 阅读材料 解答问题.

阅读材料:

当抛物线的解析式中含有字母系数时 随着系数中的字母取值的不同 抛物线的顶点坐标也将发生变化.

如:由抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 + 2m - 1$, ①

有 $y = (x - m)^2 + 2m - 1$. ②

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(m, 2m - 1)$, ③

即 $\begin{cases} x = m, \\ y = 2m - 1. \end{cases}$ ④

当 m 的值变化时 x 、 y 的值也随之变化 因而 y 值也随 x 值的变化而变化.

将③代入④ 得 $y = 2x - 1$. ⑤

可见 不论 m 取任何实数 抛物线顶点的纵坐标 y 和横坐标 x 都满足关系式 $y = 2x - 1$.

解答问题:

(1)在上述过程中 由①到②所用的数学方法是_____, 其中运用了_____公式 由③、④得到⑤所用的数学方法是_____;

(2)根据阅读材料提供的方法 确定抛物线 $y = x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m + 1$ 顶点的纵坐标 y 与横坐标 x 之间的关系式.

【纵横发散】

1. 已知一个二次函数的图象经过 $(-1, 0)$ $(3, 0)$ $(1, -5)$ 三点 求这个函数的解析式.

2. 已知抛物线 $y = x^2 - (a+2)x + 9$ 的顶点在坐标轴上 求 a 的值.

【应用发散】

1. (2004·青岛)某工厂现有 80 台机器,每台机器平均每天生产 384 件产品,现准备增加一批同类机器以提高生产总量,在试生产中发现,由于其他生产条件没变,因此每增加一台机器,每台机器平均每天将少生产 4 件产品.

(1)如果增加 x 台机器,每天的生产总量为 y 件,请你写出 y 与 x 之间的关系式;

(2)增加多少台机器,可以使每天的生产总量最大?最大生产总量是多少?

2. (2004·南宁)目前国内最大跨径的钢管混凝土拱桥——永和大桥,是南宁市又一标志性建筑,其拱形图形为抛物线的一部分(如图 2-39 所示),在正常情况下,位于水面上的桥拱跨度为 350 m,拱高为 85 m.

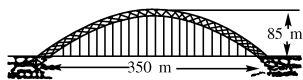


图 2-39

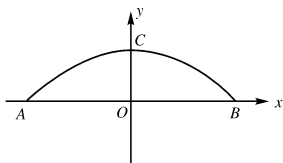


图 2-40

(1)在所给的直角坐标系中(如图 2-40 所示),假设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + b$,请你根据上述数据求出 a, b 的值,并写出抛物线的表达式(不要求写自变量的取值范围, a, b 的值保留两个有效数字).

(2)七月份汛期将要来临,当邕江水位上涨后,位于水面上的桥拱跨度将会减小.当水位上涨 4 m 时,位于水面上的桥拱跨度有多大?(结果保留整数).

【综合发散】

1. 某商场经营一批进价为 2 元一件的小商品,在市场营销中发现此商品的日销售单位 x 元与日销售量 y 件之间有如下关系:

x	3	5	9	11
y	18	14	6	2

(1)根据表中提供的数据:

①在直角坐标系中描出实数对 (x, y) 的对应点;

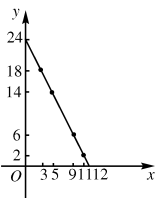
②猜测并确定日销售量 y 件与日销售单位 x 元之间的函数关系式,并画出图象.

(2)设经营此商品的日销售利润(不考虑其他因素)为 P 元,根据日销售

规律：

①试求出日销售利润 P 元与日销售单位 x 元之间的函数关系式,并求出日销售单位 x 为多少元时,才能获得最大日销售利润,试问日销售利润 P 是否存在最小值?若有,试求出,若无,请说明理由;

②如图 2-41 所示,在给定的直角坐标系中,画出日销售利润 P 元与日销售单位 x 元之间的函数图象的简图,观察图象,写出 x 与 P 的取值范围.



2. 已知二次函数 $y = x^2 - kx + k + 4$ 的图象与 y 轴交于点 C , 且与 x 轴的正半轴交于 A 、 B 两点(点 A 在点 B 左侧).

(1)若 A 、 B 两点的横坐标为整数,确定这个二次函数的解析式并求它的顶点坐标;

(2)若点 D 的坐标是 $(0, 6)$, 点 $P(t, 0)$ 是线段 AB 上的一个动点,它可与点 A 重合,但不与点 B 重合,设四边形 $PBCD$ 的面积为 S , 求 S 与 t 的函数关系式;

图 2-41

(3)若点 P 与点 A 重合,得到四边形 $ABCD$, 以四边形 $ABCD$ 的一边为边,画一个三角形,使它的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积,并注明三角形高线的长,再利用“等底等高的三角形面积相等”的知识,画一个三角形,使它的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积.(画示意图,不写计算和证明过程)

【探究发散】

如图 2-42 所示,这是某市一处十字路口立交桥的横断面在平面直角坐标系中的示意图,横断面的地平线为 x 轴,横断面的对称轴为 y 轴,桥拱的 DGD' 部分为一段抛物线,顶点 G 的高度为 8 m , AD 和 $A'D'$ 是两侧高为 5.5 m 的支柱, OA 和 OA' 为两个方向的汽车通行区,宽都为 15 m , 线段 CD 和 $C'D'$ 为两段对称的上桥斜坡,其坡度为 $1:4$.

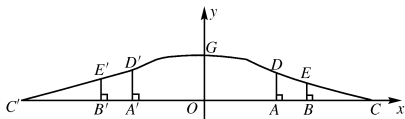


图 2-42

(1)求桥拱 DGD' 所在抛物线的解析式及 CC' 的长;

(2) BE 和 $B'E'$ 为支撑斜坡的立柱,其高都为 4 m , 相应的 AB 和 $A'B'$ 为两个方向的行人及非机动车通行区,试求 AB 和 $A'B'$ 的宽;

(3)按规定,汽车通过该桥下时,载货最高处和桥拱之间的距离不得小于 0.4 m,今有一大型运货汽车,装载某大型设备后,其宽为 4 m,车载大型设备的顶部与地面的距离均为 7 m,它能否从 OA (或 OA')区域安全通过?请说明理由.

课后习题答案,你需要吗?

课堂练习(课本第 61 页)

1. 当销售单价提高 5 元,即销售单价为 35 元时,可以获得最大利润 4 500 元.(提示:设销售单价为 $x(x \geq 30)$ 元,销售利润为 y 元,则 $y = (x - 20)[400 - 20(x - 30)] = -20x^2 + 140x - 20\,000$.)

习题 2.7(课本第 62 页)

1. 当旅行团的人数是 55 人时,旅行社可以获得最大营业额 30 250 元.

2. $y = 5x^2 - 59.2x + 178.2$,大麦穗的最佳近似长度为 5.92 cm.

习题 2.8(课本第 64 页)

1.(1)卡车可以通过.(提示:当 $x = \pm 1$ 时, $y = 3.75$, $3.75 + 2 > 4$.)

(2)卡车可以通过.(提示:当 $x = \pm 2$ 时, $y = 3$, $3 + 2 > 4$.)

(3)答案不惟一,只要合理即可,如可以限高 4.5 m 等.

2. 长方形的最大面积为 300 m^2 .(提示:可以求出大直角三角形的斜边为 50 m,斜边上的高为 24 m,设长方形的长为 x m,宽为 a m,则 $\frac{x}{50} = \frac{24-a}{24}$,得 $a = 24 - \frac{12}{25}x$,所以 $y = -\frac{12}{25}x^2 + 24x$,当 $x = 25$ 时, $y_{\text{最大}} = 300$.)

随堂练习(课本第 67 页)

1.(1)略.

(2)14.7 m, 19.6 m.

(3)足球离开地面及落地的时间;足球高度是 14.7 m 时的时间.

习题 2.9

1.(1)无交点;

(2) $\left(5 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(5 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

2. 该方程的根是该函数与直线 $y = 1$ 的交点的横坐标.

随堂练习(课本第 71 页)

1. $x_1 \approx 2.2$, $x_2 \approx 0.2$.

习题 2.10(课本第 74 页).

1.(1) $x_1 \approx 2.5$, $x_2 \approx -3$; (2) $x_1 \approx 0.8$, $x_2 \approx -0.4$.

复习题(课本第 75 页)

A 组

1. (1) 直线 $x=0$ (0 2);
- (2) 直线 $x=1$ (1 5);
- (3) 直线 $x=-3$ (-3 -1);
- (4) 直线 $x=2.5$ (2.5 6.25);
- (5) 直线 $x=1$ (1 2);
- (6) 直线 $x=1.75$ (1.75 5.875)
2. (1) (-3 0); (2) (-1.5 0) (1.5 0); (3) (2 0) (-4 0).
3. (1) $A=x^2$, $l=4x$.
- (2) 图略. x^2 增大的速度要比 $4x$ 快得多.
- (3) $A=x^2$ 和 $y=x^2$ 的图象不同, 这是因为它们自变量的取值范围不同.
4. (1) 略. (2) 4 倍.
5. (1) 略.
- (2) 78.4 m (地球), 12.8 m (月球);
- (3) 1.4 s (地球) 3.5 s (月球).
6. 当 $AB=7.5$ m 时, 所围矩形的面积最大, 最大面积是 56.25 m^2 .
7. (1) $y=2x^2$; (2) $0 \leq y \leq 50$; (3) 8 24.5; (4) 5 s.

B 组

1. (1) $x_1 \approx 0.8$, $x_2 \approx -11.8$;
- (2) $x_1 \approx 3.2$, $x_2 \approx -6.2$;
- (3) $x_1 \approx 2.2$, $x_2 \approx -4.2$;
- (4) 无实数根.
2. $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$; $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{3}{4} \sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.
3. $S = \frac{2}{5} a^2$.
4. 把一个数分解为两数之和, 当这两个数相等时, 它们的乘积最大.
5. (1) $y=4x^2-96x+572$;
- (2) $0 < x < 11$, $0 < y < 572$;
- (3) 略; (4) $24 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$, $23 \text{ cm} \times 19 \text{ cm}$, $22 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$.
6. 约 17.32 m/s .

C 组

1. (1) (4 8); (2) $A\left(7, \frac{7}{2}\right)$.

2. 约 4.9 m. (提示: 以抛物线的顶点为原点建立直角坐标系, 使抛物线的表达式为 $y = ax^2$ 的形式.)

3. (1) n^2 ;

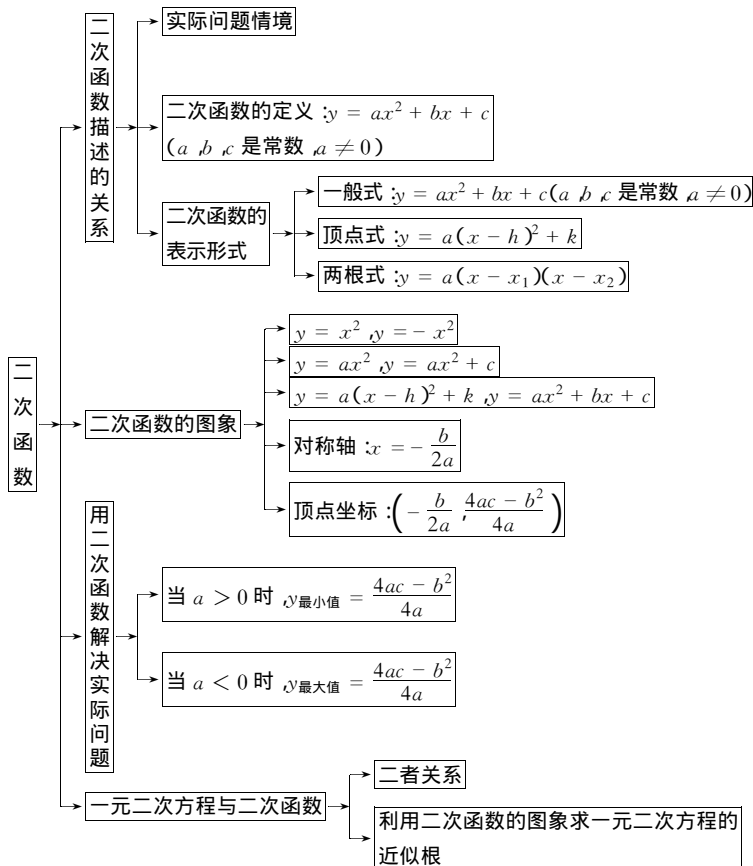
(2) 4, 9, 16, 25, ..., n^2 .

思维整合升华



知识网络建构

本单元的主要内容是二次函数的概念、图象、性质及其应用. 要学会分析和表示实际问题中变量之间的二次函数关系, 体会二次函数是一类最优化问题的数学模型, 从而感受到数学的应用价值. 由一对有序实数确定平面内一点的位置, 在坐标平面内, 点与它的坐标一一对应, 这样就可以把“形”和“数”结合起来, 促进“形”与“数”互相转化, 从而有利于用代数方法研究几何图形, 为研究函数的图象做必要的准备. 其次在常量和变量的基础上引入了函数的概念和函数的表示方法, 在此基础上研究一次函数、正比例函数、二次函数、反比例函数这四类简单又重要的函数. 通过对上述函数的研究, 不仅可以加深对函数概念的理解, 还学习了研究函数的方法. 通过观察、对比、分析、概括、归纳, 掌握 $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$ 的图象特征, 相互关系及形变规律, 利用二次函数的图象沟通二次函数、一元二次方程、根的判别式三者之间的联系. 本单元安排一定数量的题型发散、转化发散题. 题型发散可增大知识点的覆盖面, 训练计算的正确性和熟练程度, 培养严密的逻辑推理能力及简明、正确的书面表达能力, 转化发散促进数形结合解题. 可发挥“形”的直观作用和“数”的思路规范优势, 由数思形, 由形定数, 数形渗透, 互相作用, 扬长避短, 直入捷径. 综上所述, 发散思维启迪我们注重观察、分析问题, 利用形数转化, 寻觅解决问题的方法, 为提高综合运用数学知识的能力奠定坚实的基础.



新题型新中考

函数是贯穿初中代数的一条主线,它具有承上启下的作用.由直线上的点与实数的对应,到平面内的点与有序实数对的对应,由代数式到确立函数解析式,由代数式的值到自变量的取值范围与函数值,由正、反比例关系到正、反比例函数,由一次方程(组)和不等式(组)到一次函数,由二次方程(组)到二次函数,由解方程到待定系数法,等等.本章不少内容都是以学过的数、式、方程等知识为基础展开的,同时,在应用旧知识的过程中,也起到了复习、巩固、提高的作用.

在中考数学试题中,函数部分是重点、热点问题,出现不少压轴题,读者应特别重视,此外,应特别重视课标的新理念、新思想、新方法.为此,应注意以下要点.

数学思想方法是数学中的精髓,是联系数学中各类知识的纽带,是数学知识的重要组成部分,我们在学习数学知识的同时,要注意领悟和掌握蕴含其中的数学思想方法.本章主要的数学思想有函数思想和数形结合思想,主要方法是待定系数法和配方法.

一、发散思维延伸

延伸题 1 如图2-43所示,有一座抛物线形拱桥,在正常水位时水面 AB 的宽为 20 m,如果水位上升 3 m 时,水面 CD 的宽是 10 m.

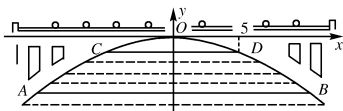


图 2-43

(1)建立如图所示的直角坐标系,求此抛物线的解析式;

(2)现有一辆载有救援物资的货车从甲地出发需经过此桥开往乙地,已知甲地距此桥 280 km(桥长忽略不计).货车正以每小时 40 km 的速度开往乙地,当行驶 1 h 时,忽然接到紧急通知,前方连降暴雨,造成水位以每小时 0.25 m 的速度持续上涨(货车接到通知时水位在 CD 处,当水位达到桥拱最高点 O 时,禁止车辆通行).试问:如果货车按原来的速度行驶,能否安全通过此桥?若能,请说明理由;若不能,要使货车安全通过此桥,速度应超过每小时多少千米?

解 (1)设抛物线的解析式为 $y = ax^2$, 桥拱最高点 O 到水面 CD 的距离为 h m, 则 $D(5, -h)$, $B(10, -h-3)$.

$$\therefore \begin{cases} 25a = -h, \\ 100a = -h-3. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{25}, \\ h = 1. \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{25}x^2.$$

(2)水位由 CD 处涨到点 O 的时间为

$$1 \div 0.25 = 4 \text{ (h)}.$$

货车按原来速度行驶的路程为 $40 \times 1 + 40 \times 4 = 200 < 280$,

$\therefore$ 货车按原来速度行驶不能安全通过此桥.

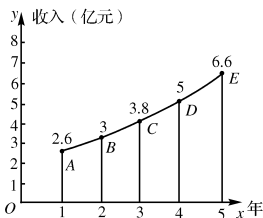
设货车速度提高到 x km/h 时,

$$4x + 40 \times 1 = 280,$$

$$x = 60 \text{ (km/h)}.$$

答:要使货车安全通过此桥,货车的速度应超过 60 km/h .

延伸题 2 如图2-44所示,表示近5年来某市的财政收入情况.图中 x 轴上的 $1, 2, \dots, 5$ 依次表示第1年,第2年, ..., 第5年,即1997年,1998年, ..., 2001年.可以看出,图中的折线近似于抛物线的一部分.



(1)请你求出过 A, C, D 三点的二次函数的解析式;

(2)分别求出当 $x=2$ 和 $x=5$ 时(1)中的二次函数的函数值,并分别与 B, E 两点的纵坐标相比较;

图 2-44

(3)利用(1)中的二次函数的解析式预测今年该市的财政收入.

解 (1)设所求二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$.

由图象知 A, C, D 三点的坐标分别为 $(1, 2.6), (3, 3.8), (4, 5)$,

$$\text{代入 } y = ax^2 + bx + c \text{ 得 } \begin{cases} a + b + c = 2.6, \\ 9a + 3b + c = 3.8, \\ 16a + 4b + c = 5, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = 0.2, b = -0.2, c = 2.6.$$

因此,所求二次函数的解析式为 $y = 0.2x^2 - 0.2x + 2.6$.

(*)

(2)由式(*)当 $x=2$ 时, $y=3$,

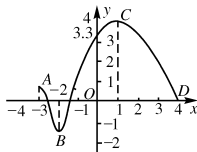
此时所求函数值与 B 点纵坐标的误差为 0.

当 $x=5$ 时, $y=6.6$,

此时所求函数值与 E 点纵坐标的误差为 0.

(3)把 $x=6$ 代入式(*)得 $y=8.6$ (亿元),

答:预测 2002 年该市的财政收入约为 8.6 亿元.



延伸题 3 已知某一函数的图象如图2-45所示,根据图象:

(1)确定自变量 x 的取值范围;

(2)求当 $x=0, -3$ 时 y 的对应值;

(3)求当 $y=0, 3$ 时对应的 x 的值;

(4)当 x 为何值时,函数值 y 最大?

(5)当 x 为何值时,函数值 y 最小?

图 2-45

(6)当 y 随 x 的增大而增大时 求相应的 x 的值在什么范围内?

(7)当 y 随 x 的增大而减小时 求相应的 x 的值在什么范围内?

分析 函数图象上每一点的横坐标都是自变量 x 的一个值,自变量 x 的取值范围就是图象上最左边端点 A 的横坐标到最右边端点 D 的横坐标,即 $-3 \leq x \leq 4$. 函数 y 的最大值就是图象上最高点 C 的纵坐标,最小值就是最低点 B 的纵坐标. 函数图象从左向右观察,从 A 到 B 呈“下降”状,这时 y 随 x 的增大而减小;从 B 到 C 呈“上升”状,这时 y 随 x 的增大而增大;从 C 到 D 又呈“下降”状,这时 y 随 x 的增大而减小.

解 (1)自变量 x 的取值范围是 $-3 \leq x \leq 4$.

(2)当 $x=0$ 时, $y=3.3$, 当 $x=-3$ 时, $y=1$.

(3)当 $y=0$ 时, $x=-2.5, -1.6$ 和 4 ; 当 $y=3$ 时, $x=-0.3, 2.1$.

(4)当 $x=1$ 时, y 的值最大, 此时 $y=4$.

(5)当 $x=-2$ 时, y 的值最小, 此时 $y=-1.5$.

(6)当 y 随 x 的增大而增大时 相应的 x 的值在 $-2 < x < 1$ 内.

(7)当 y 随 x 的增大而减小 相应的 x 的值在 $-3 < x < -2$ 或 $1 < x < 4$ 内.

解法指导 (1)用图象法表示函数,形象、直观,但却不精细,因此,利用图象观察的数值往往是近似值.

(2)观察函数增减性的技巧:当函数图象从左到右呈“上升”状时,函数 y 随 x 的增大而增大;当图象从左到右呈“下降”状时,函数 y 随 x 的增大而减小.反之也对.

(3)根据函数的图象求函数的某些值、研究函数 y 随自变量 x 的变化规律是数形结合思想的具体体现.

(4)画函数图象时,要考虑自变量的取值范围.例如:如果自变量的取值范围是 $a < x \leq b$ (a, b 是常数且 $a < b$),那么函数图象的左端要画成空心圆圈,右端画成实心圆点.

二、课标新题导向

新题 1 如图2-46所示,这是我某部队进行射击训练时,在直角坐标系中的示意图,在地面 O, A 两个观察点,测得空中固定目标 C 的仰角分别为 α 和 β , $OA = 1$ km, $\tan \alpha = \frac{9}{28}$, $\tan \beta = \frac{3}{8}$, 位于 O 点上方 $\frac{5}{3}$ km 的 D 处的直升飞机向目标 C 发射防空导弹,该导弹运行达到距地面最大高度 3 km 时,相应的水平距离为 4 km (即图中的 E 点).

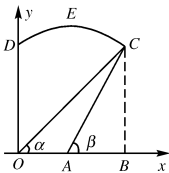


图 2-46

(1)若导弹的运行轨迹为一抛物线,求该抛物线的解析式;

(2)说明按(1)中轨迹运行的导弹能否击中目标 C .

分析 (1)显然, D, E 的坐标可直接求出, 同时知道 E 点应为抛物线的顶点, 故所求解析式可采用顶点式来求;

(2)导弹能否击中目标, 关键是首先求出点 C 的坐标, 若点 C 的坐标满足解析式, 则说明 C 点在抛物线上, 从而说明可以击中目标, 反之则无法击中.

解 (1)设抛物线的解析式为 $y = a(x-4)^2 + 3$,

又 $\because D(0, \frac{5}{3})$ 在抛物线上,

$$\therefore \frac{5}{3} = a(0-4)^2 + 3. \therefore a = -\frac{1}{12}.$$

$$\therefore \text{函数解析式为 } y = -\frac{1}{12}(x-4)^2 + 3.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

(2)设 $C(x_0, y_0)$, 过 C 点作 $CB \perp x$ 轴于 B , 在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $OA = 1$,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} = \frac{9}{28}, \tan \beta = \frac{y_0}{x_0 - 1} = \frac{3}{8},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{y_0}{x_0} = \frac{9}{28}, \\ \frac{y_0}{x_0 - 1} = \frac{3}{8}. \end{cases} \therefore \begin{cases} x_0 = 7, \\ y_0 = \frac{9}{4}. \end{cases} \therefore \text{点 } C \text{ 的坐标是 } (7, \frac{9}{4}).$$

$$\text{又} \because -\frac{1}{12}x_0^2 + \frac{2}{3}x_0 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{12} \times 7^2 + \frac{2}{3} \times 7 + \frac{5}{3} = \frac{9}{4} = y_0,$$

$\therefore$ 点 $C(7, \frac{9}{4})$ 在抛物线上, 因此导弹能击中目标.

点评 对于本题, 我们要意识到导弹是运动的, 并且这种运动是有规律的, 即导弹的运行轨迹为抛物线, 因此, 可用抛物线的知识来解决本题.

新题 2 (2004·海口实验区) 已知抛物线 $y = x^2 + (2n-1)x + n^2 - 1$ (n 为常数).

(1)当抛物线经过原点, 并且顶点在第四象限时, 求出它所对应的函数关系式;

(2)设 A 是(1)所确定的抛物线上位于 x 轴下方, 且是对称轴左侧的一个动点, 过 A 作 x 轴的平行线, 交抛物线于另一点 D , 再作 $AB \perp x$ 轴于 B , $DC \perp x$ 轴于 C .

①当 $BC = 1$ 时, 求矩形 $ABCD$ 的周长;

②试问矩形 $ABCD$ 的周长是否存在最大值? 如果存在, 请求出这个最大值, 并指出此时 A 点坐标, 如果不存在, 请说明理由.

分析 (1)由抛物线经过原点得到关于 n 的方程, 再由顶点在第四象限确定

n 的值.

(2)由抛物线的对称性及矩形的性质,从 A 点的坐标(可设出 A 点坐标)出发,确定矩形 $ABCD$ 的长和宽(用代数式表示),然后运用二次函数的性质求解.

解 (1)将 $(0, 0)$ 代入 $y = x^2 + (2n-1)x + n^2 - 1$ 得

$$n^2 - 1 = 0, \therefore n = \pm 1.$$

$$\therefore y = x^2 + x \text{ 或 } y = x^2 - 3x$$

又 $\because$ 抛物线的顶点在第四象限, $y = x^2 + x$ 不合题意,舍去.

$\therefore$ 所求的函数关系式为 $y = x^2 - 3x$.

(2)由(1)和(2)中题设条件画出草图(如图 2-47 所示),

①由抛物线 $y = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 知其顶点为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, 设对称轴 $x = \frac{3}{2}$ 与 AD 、 x 轴交于 N 、 G .

当 $BC = 1$ 时, $AN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$, 又因为 N 点的横坐标为 $\frac{3}{2}$, 所以 A 点的横坐标为 1.

把 $x = 1$ 代入 $y = x^2 - 3x$ 得 $y = -2$.

故矩形 $ABCD$ 中, $AB = CD = 2$, $AD = BC = 1$, 其矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(2 + 1) = 6$.

②如图 2-47 所示, 设 A 点的坐标为 (a, b) , 则 $b = a^2 - 3a$, 即 $AB = CD = -a^2 + 3a$, 设矩形 $ABCD$ 的周长为 m , 则

$$m = 2(-a^2 + 3a) + 2(3 - 2a).$$

$$\text{即 } m = -2a^2 + 2a + 6 \left(0 < a < \frac{3}{2}\right).$$

所以当 $a = -\frac{2}{2 \times (-2)} = \frac{1}{2}$ 时, m 存在最大值, 且

$$m = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 6 = 6\frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } b = a^2 - 3a = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}.$$

故此时 A 点的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

解法指导 解答本题第(2)小题时,依据第(1)小题的结论和题意画出草图,意在运用数形结合的思想方法,由于它能将点的坐标与图形的几何性质(如线段的长、图形的面积等)有机地结合在一起,因而这种方法常用于解决这类函数与几何的综合问题.

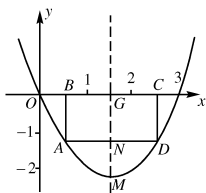


图 2-47

新题 3 (2004·重庆)某镇地理环境偏僻,严重制约经济发展,丰富的花木产

品只能在本地销售,该区政府对该花木产品每投资 x 万元,所获利润为 $P = -\frac{1}{50}(x-30)^2 + 10$ 万元.为了响应我国西部大开发的宏伟决策,该区政府在制定经济发展的 10 年规划时,拟开发花木产品,而开发前后可用于该项目投资的专项资金每年最多 50 万元.若开发该产品,在前 5 年中,必须每年从专项资金中拿出 25 万元投资修通一条公路,且 5 年修通.公路修通后,花木产品除在本地销售外,还可运往外地销售,运往外地销售的花木产品,每投资 x 万元可获利润 $Q = -\frac{49}{50}(50-x)^2 + \frac{194}{5}(50-x) + 308$ 万元.

(1)若不进行开发,求 10 年所获利润的最大值是多少?

(2)若按此规划进行开发,求 10 年所获利润的最大值是多少?

(3)根据(1)、(2)计算的结果,请你用一句话谈谈你的想法.

解 (1)若不开发此产品,按照原来的投资方式,由 $P = -\frac{1}{50}(x-30)^2 + 10$ 知,只需从 50 万元专款中拿出 30 万元投资,每年即可获得最大利润 10 万元.

则 10 年的最大利润为 $M_1 = 10 \times 10 = 100$ 万元.

(2)若对该产品开发,在前 5 年中,当 $x = 25$ 时,每年最大利润是

$$P = -\frac{1}{50}(25-30)^2 + 10 = 9.5 \text{ (万元)},$$

则前 5 年的最大利润为 $M_2 = 9.5 \times 5 = 47.5$ (万元).

设后 5 年中 x 万元是用于本地销售的投资,则由 $Q = -\frac{49}{50}(50-x)^2 + \frac{194}{5}x + 308$ 知,将余下的 $(50-x)$ 万元全部用于外地销售的投资,才有可能获得最大利润.则后 5 年的利润是:

$$\begin{aligned} M_3 &= \left[-\frac{1}{50}(x-30)^2 + 10 \right] \times 5 + \left(-\frac{49}{50}x + \frac{194}{5}x^2 + 308 \right) \times 5 \\ &= -5(x-20)^2 + 3500. \end{aligned}$$

故当 $x = 20$ 时, M_3 取得最大值为 3500 万元.

所以,10 年的最大利润为 $M = M_2 + M_3 = 3500 + 47.5 = 3547.5$ 万元.

(3)因为 $3547.5 > 100$,故该项目有极大的开发价值.

三、中考名题赏析

名题 1 (2004·四川)如图 2-48 所示, $\triangle OAB$ 是边长为 $2+\sqrt{3}$ 的等边三角形,其中 O 是坐标原点,顶点 B 在 y 轴的正方向上.将 $\triangle OAB$ 折叠,使点 A 落在边 OB 上,记为 A' ,折痕为 EF .

(1)当 $A'E \parallel x$ 轴时,求点 A' 和 E 的坐标;

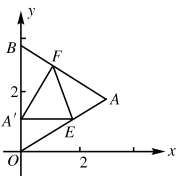


图 2-48

(2)当 $A'E \parallel x$ 轴,且抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 经过点 A' 和 E 时,求该抛物线与 x 轴的交点的坐标;

(3)当点 A' 在 OB 上运动但不与点 O 、 B 重合时,能否使 $\triangle A'EF$ 成为直角三角形?若能,请求出此时点 A' 的坐标;若不能,请你说明理由.

解 (1)如图 2-48 所示,当 $A'E$ 平行于 x 轴时, $\angle EA'O = 90^\circ$.

$\because \triangle ABO$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle A'OE = 60^\circ, \angle A'EO = 30^\circ, A'O = \frac{1}{2}EO.$$

设 $OA' = a$, 则 $OE = 2a$.

在 $Rt\triangle A'OE$ 中,

$$\tan \angle A'OE = \frac{A'E}{A'O}, \text{ 即 } \sqrt{3} = \frac{A'E}{a},$$

$$\therefore A'E = \sqrt{3}a = AE.$$

$$\therefore AE + OE = 2 + \sqrt{3}, 2a + \sqrt{3}a = 2 + \sqrt{3},$$

$$\therefore a = OA' = 1, A'E = \sqrt{3}.$$

$$\therefore A'(0, 1), E(\sqrt{3}, 1).$$

(2)由题设点 $A'(0, 1)$, $E(\sqrt{3}, 1)$ 在 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 的图象上,

$$\text{得方程组} \begin{cases} c = 1, \\ -\frac{1}{6} \times (\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}b + c = 1. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{6}, \\ c = 1. \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}x + 1.$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, 得 } -\frac{1}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}x + 1 = 0.$$

$$\text{解得 } x_1 = 2\sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}.$$

所以抛物线与 x 轴的交点坐标为 $(2\sqrt{3}, 0)$ 和 $(-\sqrt{3}, 0)$.

(3)不能.

因为要使 $\triangle A'EF$ 为直角三角形, 则 90° 只能是 $\angle A'EF$ 或 $\angle A'FE$, 若 $\angle A'EF = 90^\circ$, 因为 $\triangle FA'E$ 与 $\triangle FAE$ 关于 FE 对称, 所以 $\angle A'EF = \angle AEF = 90^\circ$, $\angle AEA' = 180^\circ$. 此时 A 、 E 、 A' 应在同一直线上, 点 A' 应与 O 点重合, 这与题设矛盾, 所以 $\angle A'EF \neq 90^\circ$, 即 $\triangle A'EF$ 不能为直角三角形.

同理, $\angle A'FE = 90^\circ$ 也不成立, 即 $\triangle A'EF$ 不能为直角三角形.

名题 2 (2004·曲沃)如图2-49所示,要在底边 $BC = 160$ cm,高 $AD = 120$ cm 的 $\triangle ABC$ 铁皮余料上,截取一个矩形 $EFGH$,使点 H 在 AB 上,点 G 在 AC 上,点 E, F 在 BC 上, AD 交 HG 于点 M ,此时 $\frac{AM}{AD} = \frac{HG}{BC}$.

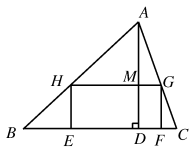


图 2-49

(1)设矩形 $EFGH$ 的长 $HG = y$,宽 $HE = x$,确定 y 与 x 的函数关系式;

(2)当 x 为何值时,矩形 $EFGH$ 的面积 S 最大?

(3)以面积最大的矩形 $EFGH$ 为侧面,围成一个圆柱形的铁桶,怎样围时,才能使铁桶的体积较大?请说明理由.(注:围铁桶侧面时,接缝无重叠,底面另用材料配备)

解 (1) $\because \frac{AM}{AD} = \frac{HG}{BC},$

$$\therefore \frac{120-x}{120} = \frac{y}{160},$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x + 160 \left(\text{或 } x = -\frac{3}{4}y + 120 \right) (0 < x < 120).$$

(2) $\because S = xy,$

$$\therefore S = -\frac{4}{3}x^2 + 160x$$

$$= -\frac{4}{3}(x^2 - 120x)$$

$$= -\frac{4}{3}(x^2 - 120x + 3\,600 - 3\,600)$$

$$= -\frac{4}{3}(x - 60)^2 + 4\,800.$$

$$\therefore \text{当 } x = 60 \text{ cm 时, } S_{\text{最大}} = 4\,800 \text{ cm}^2.$$

(3)围圆柱形铁桶有两种情况.

$$\text{当 } x = 60 \text{ 时, } y = -\frac{4}{3} \times 60 + 160 = 80 \text{ (cm).}$$

第一种情况:

以矩形 $EFGH$ 的宽 $HE = 60$ cm 作铁桶的高,长 $HG = 80$ cm 作铁桶的底面周长,则底面半径 $R = \frac{80}{2\pi}$ cm,

$$\text{铁桶体积 } V_1 = \pi \cdot \left(\frac{80}{2\pi}\right)^2 \cdot 60 = \frac{96\,000}{\pi} \text{ cm}^3.$$

第二种情况:

以矩形 $EFGH$ 的长 $HG = 80$ cm 作铁桶的高,宽 $HE = 60$ cm 作铁桶的底面周长,则底面半径 $r = \frac{60}{2\pi}$ cm,

$$\text{铁桶体积 } V_2 = \pi \cdot \left(\frac{60}{2\pi}\right)^2 \cdot 80 = \frac{72\,000}{\pi} \text{ cm}^3.$$

$$\therefore V_1 > V_2.$$

$\therefore$ 以矩形 $EFGH$ 的宽 $HE = 60 \text{ cm}$ 作铁桶的高, 长 $HG = 80 \text{ cm}$ 作铁桶的底面周长, 围成的圆柱形铁桶的体积较大.

名题 3 (2003 · 黄冈) 已知二次函数的图象如图 2-50 所示.

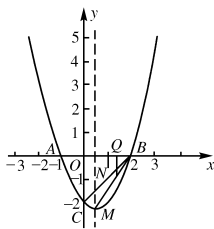


图 2-50

(1) 求二次函数的解析式及抛物线顶点 M 的坐标;

(2) 若点 N 为线段 BM 上的一点, 过点 N 作 x 轴的垂线, 垂足为点 Q . 当点 N 在线段 BM 上运动时 (点 N 不与点 B , 点 M 重合), 设 NQ 的长为 t , 四边形 $NQAC$ 的面积为 S , 求 S 与 t 之间的函数关系式及自变量 t 的取值范围;

(3) 在对称轴右侧的抛物线上是否存在点 P , 使 $\triangle PAC$ 为直角三角形? 若存在, 求出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(4) 将 $\triangle OAC$ 补成矩形, 使 $\triangle OAC$ 的两个顶点成为矩形一边的两个顶点, 第三个顶点落在矩形这一边的对边上, 试直接写出矩形的未知顶点的坐标? (不需要计算过程)

解 (1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-2)$.

$$\therefore -2 = a \times 1 \times (-2).$$

$$\therefore a = 1.$$

$$\therefore y = x^2 - x - 2, \text{ 其顶点 } M \text{ 的坐标是 } \left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$

(2) 设线段 BM 所在的直线的解析式为

$$y = kx + b, \text{ 点 } N \text{ 的坐标为 } N(h, -t),$$

$$\therefore \begin{cases} 0 = 2k + b, \\ -\frac{9}{4} = \frac{1}{2}k + b. \end{cases}$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{2}, b = -3.$$

$$\therefore \text{ 线段 } BM \text{ 所在的直线的解析式为 } y = \frac{3}{2}x - 3.$$

$$\therefore h = 2 - \frac{2}{3}t, \left(\text{其中 } \frac{1}{2} < t < 2\right).$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2}(t+2)\left(2 - \frac{2}{3}t\right) \\ &= -\frac{t^2}{3} + \frac{t}{3} + 3. \end{aligned}$$

$\therefore S$ 与 t 间的函数关系式是 $S = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t + 3$, 自变量 t 的取值范围是 $\frac{1}{2} < t < 2$.

(3) 存在符合条件的点 P , 且坐标是 $P_1\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right), P_2\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

设点 P 的坐标为 $P(m, n)$,

则 $n = m^2 - m - 2$.

$PA^2 = (m+1)^2 + n^2, PC^2 = m^2 + (n+2)^2, AC^2 = 5$.

分以下几种情况讨论:

① 若 $\angle PAC = 90^\circ$, 则 $PC^2 = PA^2 + AC^2$.

$$\therefore \begin{cases} n = m^2 - m - 2, \\ m^2 + (n+2)^2 = (m+1)^2 + n^2 + 5. \end{cases}$$

解得 $m_1 = \frac{5}{2}, m_2 = -1$ (舍去).

$\therefore$ 点 P_1 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

② 若 $\angle PCA = 90^\circ$, 则 $PA^2 = PC^2 + AC^2$.

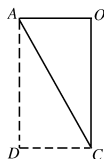
$$\therefore \begin{cases} n = m^2 - m - 2, \\ (m+1)^2 + n^2 = m^2 + (n+2)^2 + 5. \end{cases}$$

解得 $m_3 = \frac{3}{2}, m_4 = 0$ (舍去).

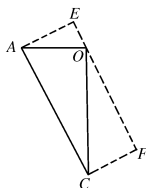
$\therefore$ 点 P_2 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

③ 由图象观察得, 当点 P 在对称轴右侧时, $PA > AC$, 所以边 AC 的对角 $\angle APC$ 不可能是直角.

(4) 以点 O 点 A (或点 O 点 C) 为矩形的两个顶点, 第三个顶点落在矩形这一边 OA (或边 OC) 的对边上, 如图 2-51(1) 所示, 此时未知顶点坐标是点 $D(-1, -2)$, 以点 A 点 C 为矩形的两个顶点, 第三个顶点落在矩形这一边 AC 的对边上, 如图 2-51(2) 所示, 此时未知顶点坐标是 $E\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right), F\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$.



(1)



(2)



知能转化平台

【题型发散】

1. 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$ 的图象交 x 轴于 A, B 两点,交 y 轴于点 C ,则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. 6 B. 4 C. 3 D. 1

(2)已知 $a - b + c = 0$, $9a + 3b + c = 0$,则二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的顶点可能在 ()

- A. 第一或第二象限 B. 第三或第四象限
C. 第一或第四象限 D. 第二或第三象限

(3)二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象和 x 轴没有公共点的条件是 ()

- A. $a > 0, \Delta > 0$ B. $a > 0, \Delta < 0$
C. $a < 0, \Delta < 0$ D. 以上全不对

(4)若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象对称于 y 轴,那么 ()

- A. $b^2 = 4ac$ B. $x = -\frac{b}{2a}$ C. $b = 2a$ D. $b = 0$

(5)二次函数 $y = -x^2 + 2x - k + 1$ 的图象过原点的条件是 ()

- A. $k = 2$ B. $k \leq 2$ C. $k = 1$ D. $k \leq 1$

(6)要从抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 得到 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ 的图象,则抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 必须 ()

- A. 向左平移 1 个单位,再向上平移 3 个单位
B. 向左平移 1 个单位,再向下平移 3 个单位
C. 向右平移 1 个单位,再向上平移 3 个单位
D. 向右平移 1 个单位,再向下平移 3 个单位

2. 想一想,填什么最准确?

(1)已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$,当 $a > 0$ 时,则在其对称轴的左侧,函数值 y 随 x 的增大而 _____;在其对称轴的右侧, y 随着 x 的增大而 _____.

(2)把函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象向 _____ 平移 _____ 个单位,再向 _____ 平移 _____ 个单位,可以得到函数 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$ 的图象.

(3)把函数 $y = \frac{1}{2}(x-3)^2$ 的图象向上平移 2 个单位,得到函数 $y =$ _____ 的图象,此时函数的最小值是_____.

(4)二次函数 $y = x^2 + mx + n$ 的图象顶点是(2, 3),则 $m =$ _____, $n =$ _____.

(5)如果一条抛物线的形状,开口方向都与 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 相同,且顶点坐标是(4, -2),则它的解析式是_____.

(6)抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($b \neq 0$)经过点(-1, 0),则 $\frac{a+c}{b}$ 的值是_____.

(7)函数 $y = x^2 + 2x - 3$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点,与 y 轴交于 C 点,则 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.

(8)函数 $y = 3 + 2x - x^2$ 的图象的顶点位置不变动,如果把这个图象绕着顶点旋转 180° ,所得到的新图象所对应的函数解析式是_____.

【解法发散】

1. 抛物线 $y = -\frac{1}{3}(x-m)^2 + k$ 的顶点在抛物线 $y = x^2$ 上,且在 x 轴截得线段长是 $4\sqrt{3}$,求两抛物线顶点间的距离.(用两种方法求解)

2. (1)求 $y = 2x^2 - 2x + 1$ 的最小值.

(2)求 $y = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$ 的最大值.

(用配方法、公式法、判别式法解)

【转化发散】

1. 设 α, β 是关于 x 的方程 $kx^2 + 2(k-3)x + (k-3) = 0$ 的两个不相等的实根(k 是非负整数),一次函数 $y = (k-2)x + m$ 与反比例函数 $y = \frac{n}{x}$ 的图象都经过点(α, β).

(1)求 k 的值;

(2)求一次函数和反比例函数的解析式.

2. 已知抛物线 $y = x^2 - (a-1)x - a + 1$.

(1)当 a 为何值时,抛物线与 x 轴有两个不同的交点?

(2)若抛物线顶点为 A ,与 x 轴两个交点为 B, C .当 a 为何值时, $\triangle ABC$ 是等边三角形?

3. 已知二次函数 $y = 2x^2 - 4mx + m^2$.

(1)求证:当 m 为非零实数时,这个二次函数的图象与 x 轴总有两个不同交点;

(2)若这个函数的图象与 x 轴的交点为 A, B , 顶点为 C , 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 m 的值.

4. 已知二次函数 $y = x^2 + ax + a - 2$.

(1)证明抛物线 $y = x^2 + ax + a - 2$ 与 x 轴有两个不同交点;

(2)求这两个交点间的距离(关于 a 的表达式);

(3) a 取何值时, 两交点间距离最小?

【变更命题发散】

1. 在底边长为 20 cm, 高为 16 cm 的三角形内截一个最大面积的矩形, 并使它的一边在三角形的底边上(如图 2-52 所示), 求矩形的长和宽各是多少?

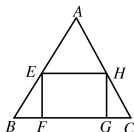


图 2-52

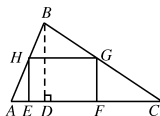


图 2-53

2. 如图 2-53, 矩形 $EFGH$ 内接于 $\triangle ABC$, 三角形的底边 $AC = b$, 高 $BD = h$, 矩形的高 $GF = x$, 试写出矩形面积 S 与 x 的函数关系式, 并指出 x 的取值范围.

【对称发散】

1. 已知抛物线 $y = 2x^2 + x - 5$, 求此抛物线关于 y 轴对称图形的解析式.

2. 已知抛物线 $y = 4x^2 - 2ax + 3a - 5$ 和 $y = -4x^2 + (b+1)x - b$ 关于 x 轴对称, 求它们的解析式.

【综合发散】

1. 抛物线 $y = 3x^2 - (a-1)x + (a+1)$ 与 $y = 2x^2 + (2b-1)x - 2b$ 有公共顶点, 求 a, b 的值.

2. 设 α, β 是方程 $x^2 + 2(m+3)x + 2m+4=0$ 的两个根, 问当 m 取何值时, $(\alpha-1)^2 + (\beta-1)^2$ 有最小值, 最小值是多少?

【探究发散】

1. 已知关于 x 的二次函数 $y = x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1$.

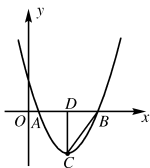
(1)若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 的两根的平方和等于 9, 求 k 的值.

(2)在(1)的条件下, 设这个二次函数的图象与 x 轴从左至右交于 A, B 两点. 问在对称轴右边的图象上, 是否存在点 M , 使锐角三角形 AMB 的面积等于 3? 若存在, 请求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



(3)在(1)(2)条件下,若 P 点是二次函数图象上的点,且 $\angle PAM = 90^\circ$,求 $\triangle APM$ 的面积.

2. 如图 2-54 所示,已知抛物线 $y = 2x^2 - 4x + m$ 与 x 轴交于不同的两点 A, B ,其顶点是 C ,点 D 是抛物线的对称轴与 x 轴的交点.



(1)求实数 m 的取值范围;

(2)求顶点 C 的坐标和线段 AB 的长度(用含有 m 的式子表示);

(3)若直线 $y = \sqrt{2}x + 1$ 分别交 x 轴和 y 轴于点 E, F ,问 $\triangle BDC$ 与 $\triangle EOF$ 是否有可能全等,如果可能,请证明,如果不可能,请说明理由.

图 2-54



期中测试题

(时间 :120 分钟 满分 :100 分)

一、看一看 选一选(每小题 3 分,共 36 分)

1. 若 α 为锐角 则 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值 ()

A. 小于 1 B. 等于 1 C. 大于 1 D. 以上都不对

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$ 又 $\sin A + \cos B = \sqrt{3}$ 则 $\angle A$ 等于 ()

A. 120° B. 60° C. 30° D. 60° 或 30°

3. 当 $0 < a < 1$ 时 不等式 $(x - a)(x - \frac{1}{a}) < 0$ 的解是 ()

A. $a < x < \frac{1}{a}$ B. $\frac{1}{a} < x < a$

C. $x > \frac{1}{a}$ 或 $x < a$ D. $x > a$ 或 $x < \frac{1}{a}$

4. 不论 x 为何实数 函数 $y = ax^2 - 2x + c$ 的值恒为负的条件是 ()

A. $a > 0, ac > 1$ B. $a > 0, ac < 1$

C. $a < 0, ac < 1$ D. $a < 0, ac > 1$

5. 二次函数 $y = x^2 + ax + b$ 中 若 $a + b = 0$ 则它的图象必经过点 ()

A. $(-1, -1)$ B. $(1, -1)$ C. $(1, 1)$ D. $(-1, 1)$

6. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 I - 1 所示 下

列结论 :① $abc > 0$;② $a = \frac{1}{2}b$;③ $a + c > b$;④ $a + b + c < 0$. 其中正
确的个数是 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

7. $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$ 若 AC 的长等于斜边中线的 $\frac{4}{3}$ 则较
大锐角的正弦值是 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

8. 一学生推铅球 铅球行进的高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 之间的关系式为

$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ 则铅球落地时的水平距离是 ()

A. $\frac{5}{3} \text{ m}$ B. 3 m C. 10 m D. 12 m

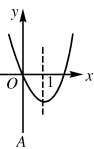


图 I - 1

9. $\triangle ABC$ 中 $(\sin A - 1)^2 + \left| \cos B - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 0$ 则 $\angle C$ 的度数为 ()

A. 120° B. 60° C. 45° D. 30°

10. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 AD 为斜边 BC 上的高, 如果 $BC = a$, $\angle B = \alpha$, 那么 AD 的值为 ()

A. $a \cdot \sin^2 \alpha$ B. $a \cdot \cos^2 \alpha$
C. $a \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ D. $a \sin \alpha \cdot \tan \alpha$

11. 方程 $x^2 - 4ax + 4a^2 - 1 = 0$ 的两实根中, 大根与小根的差是 ()

A. 1 B. 2 C. $4a$ D. $2a$

12. 不论 k 取任何实数, 抛物线 $y = a(x+k)^2 + k$ ($a \neq 0$) 的顶点都 ()

A. 在直线 $y = -x$ 上 B. 在直线 $y = x$ 上
C. 在 x 轴上 D. 在 y 轴上

二、试一试, 填一填(每小题 3 分, 共 18 分)

13. 求值 $\cos^2 45^\circ + \tan 60^\circ \cdot \sin 60^\circ =$ _____.

14. 设 θ 为锐角, 且 $x^2 + 3x + 2\sin\theta = 0$ 的两根之差为 $\sqrt{5}$, 则 $\theta =$ _____.

15. 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ 的最低点坐标为 _____.

16. 已知二次函数 $y = 8x^2 - (k-1)x + k - 7$, 若函数 y 的最小值为 0, 则 k 的值为 _____.

17. 等腰三角形的周长为 $2 + \sqrt{3}$, 腰长为 1, 则底角等于 _____.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, 则 $S_{\triangle ABC} =$ _____.

三、算一算, 解一解(每小题 4 分, 共 8 分)

19. 若 α 为锐角, 且 $2\cos^2 \alpha + 7\sin \alpha - 5 = 0$, 求 α 的度数.

20. 化简: $\sqrt{1 - 2\sin 27^\circ \cdot \cos 27^\circ}$.

四、想一想, 探一探(21~24 题每题均 5 分, 25 题 8 分, 26 题 10 分, 共 38 分)

21. 已知 $\triangle ABC$ 中 $\sin A = 1$, 且 $\sin B$, $\cos C$ 为方程 $4x^2 + kx + 1 = 0$ 的两根, 求 A , B , C 和 k 的值.

22. m 为何值时, 函数 $y = 2(3m-2)x^2 + 4mx + m^2 + 1$ 的图象与 x 轴有交点, 且都在 x 轴的负半轴上?

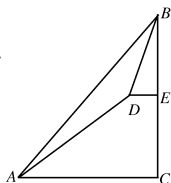
23. (2004·济南) 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + (6 - \sqrt{m^2})x + m - 3$ 与 x 轴有 A , B 两个交点, 且 A , B 两点关于 y 轴对称.

(1) 求 m 的值;

(2) 写出抛物线解析式及其顶点坐标；

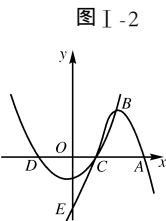
(3) 根据二次函数与一元二次方程的关系将此题的条件换一种说法写出来.

24. 如图 I-2 所示, 测量人员在山脚 A 处测得山顶 B 的仰角为 45° , 沿着倾斜 30° 的山脚前进 1 000 m 到 D 处, 再测得山顶的仰角是 60° , 求山高 BC .



25. 设直线 $y = kx + b$ 与抛物线 $y = ax^2$ 的两个交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2 , 且直线与 x 轴的交点的横坐标为 x_3 . 求证: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

26. 如图 I-3 所示, 已知两抛物线 $C_1: y = ax^2 + 2bx + c$ 和 $C_2: y = (a-1)x^2 + 2(b+2)x + c-3$, 其中的一条通过 A, B, C 三点, 交 y 轴于 E , 另一条通过 B, C, D 三点, 点 A, C, D 在 x 轴上.



(1) 问哪一条抛物线通过 A, B, C 三点?

(2) 求点 B, C 的横坐标.

(3) 若 $AB = BC, OC = OD$, 求 a, b, c 的值.

图 I-3



第三单元 圆

课标定位梳理

一、单元目标定位

1. 知识目标定位

- (1) 经历形成圆的概念的过程 理解圆的概念及点与圆的位置关系.
- (2) 认识圆的轴对称性、中心对称性及旋转不变性.
- (3) 探索并理解垂径定理 探索并认识圆心角、弧、弦之间相等关系的定理 探索并理解圆周角和圆心角的关系定理.
- (4) 探索并了解点与圆、直线与圆以及圆与圆的位置关系.
- (5) 了解切线的概念 探索切线与过切点的直径之间的关系 能判定一条直线是否为圆的切线 会过圆上一点画圆的切线.

2. 能力目标定位

- (1) 经历探索圆及其相关结论的过程 发展学生的数学思考能力.
- (2) 进一步认识和理解研究图形性质的各种方法.

二、单元学法指导

学习中应注意以下的思想方法和规律：

1. 方程的思想方法

将圆中涉及的数量关系式转化为方程的形式 运用方程知识解决问题.

2. 讨论的思想方法

当研究点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系时 就要全面揭示各种可能的位置关系 避免遗漏 陷入思维误区 产生错解.

3. 转化的思想方法

转化思想能将隐蔽的问题明朗化 将未知的问题先转化为可知再转化为已知 将不确定的问题转化为直线型问题 弧的问题转化为弦或角的问题 直到问题解决为止.



1. 车轮为什么做成圆形

圆的对称性

圆周角和圆心角的关系



自主学习提示

一、相关知识链接

1. 关于轴对称的有关概念

(1)轴对称图形.

如果一个图形沿一条直线折叠后,直线两旁的部分能够互相重合,那么这个图形叫做轴对称图形.这条直线叫做对称轴.

(2)两个图形成轴对称.

对于两个图形,如果沿一条直线对折后,它们能完全重合,那么称这两个图形成轴对称图形,这条直线就是对称轴.

(3)轴对称的基本性质.

①对应点所连的线段被对称轴垂直平分.

②对应线段相等.

③对应角相等.

2. 中心对称和中心对称图形的概念

(1)中心对称.

把一个图形绕着某一个点旋转 180° ,如果它能够与另一个图形重合,那么就说这两个图形关于这个点对称,这个点叫做对称中心,两个图形关于点对称也称中心对称,这两个图形中的对应点叫做关于中心的对称点.

(2)中心对称图形.

如果一个图形绕着一个点旋转 180° 后,能够和原图形互相重合,也就是图形和它本身重合,那么这个图形叫做中心对称图形.

这个点就是它的对称中心.线段、平行四边形、矩形、菱形、正方形、圆都是中心对称图形.

(3)中心对称图形的性质定理与逆定理.

性质定理 1:关于中心对称的两个图形是全等形.

性质定理 2:关于中心对称的两个图形,对称点连线都经过对称中心,并且被对称中心平分.

逆定理 如果两个图形的对应点连线都经过某一点,并且被这一点平分,那么这两个图形关于这一点对称.

二、重难知识点提示

本节重点 圆及其有关概念,垂径定理,圆心角、弧、弦之间相等关系的定理,圆周角定理及其推论.

本节难点 用集合的观念描述圆,圆的旋转不变性,用分类讨论思想证明圆周角定理.

发散思维分析



一、圆及其有关概念

1. 圆的定义

平面上到定点的距离等于定长的所有点组成的图形叫做圆(circle). 其中,定点为圆心(centre of a circle),定长称为半径(radius).

以点 O 为圆心的圆记作 $\odot O$,读作“圆 O ”.

2. 与圆有关的概念

(1)圆弧 圆上任意两点间的部分叫做圆弧,简称弧(arc).

(2)弦 连接圆上任意两点的线段叫做弦(chord).

(3)直径 经过圆心的弦叫做直径(diameter).

(4)优弧 大于半圆的弧称为优弧(major arc).

(5)劣弧 小于半圆的弧称为劣弧(minor arc).

二、点与圆的位置关系

(1)点在圆外 即该点到圆心的距离大于半径.

(2)点在圆上 即该点到圆心的距离等于半径.

(3)点在圆内 即该点到圆心的距离小于半径.

三、圆的旋转不变性

(1)圆是轴对称图形,其对称轴是任意一条过圆心的直线.

(2)圆是中心对称图形,其对称中心是圆心.

(3)圆具有旋转不变性,它绕圆心旋转任意大小的角度,都能够与原图形重合.

四、垂径定理及其推论

1. 垂径定理

垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的弧.

2. 垂径定理的逆定理

平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的弧.

五、圆心角、弧、弦之间相等关系的定理及推论

1. 圆心角、弧、弦之间相等关系的定理

在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦相等.

2. 推论

在同圆或等圆中,如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等,那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

六、圆周角定理及其推论

1. 圆周角定义

如果一个角的顶点在圆上,它的两边分别与圆还有另一个交点,像这样的角,叫做圆周角.

2. 圆周角定理

一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

3. 圆周角定理的推论

推论 1:一条弧所对的圆周角的度数等于这条弧度数的一半.

推论 2:在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等;反之,在同圆或等圆中,相等圆周角所对的弧也相等.

推论 3:半圆(或直径)所对的圆周角是直角; 90° 的圆周角所对的弦是直径.

本节通过实例归纳出圆的定义,然后认识圆的轴对称性和中心对称性,再利用圆的轴对称性去探究垂径定理,借助圆的旋转不变性去探索圆心角、弧、弦之间关系.为了掌握重点,突破难点,必须注意以下问题:

(1)确定一个圆需要两个要素,即位置和大小.圆心确定其位置,半径确定其大小.只有圆心没有半径,虽然圆的位置固定,但大小不定;只有半径而没有圆心,虽然圆的大小固定,但圆心位置未定,故圆仍不能确定,只有圆心和半径同时确定,圆才能惟一确定.

(2)圆的定义:在同一平面内到定点(圆心)的距离等于定长(半径)的所有点的集合.此定义包含三层意思:

①到定点(圆心)的距离等于定长(半径)的点都在圆上,不会漏掉一个点到别的位置;

②圆上的所有点到圆心(定点)的距离都等于定长半径,不会有特殊的不等于半径长的点存在;

③所有考查的点均在平面内(与圆所在的同一平面).

(3)设某点到圆心的距离为 d ,圆的半径为 r ,则

$d < r \Leftrightarrow$ 点在圆内 ;

$d = r \Leftrightarrow$ 点在圆上 ;

$d > r \Leftrightarrow$ 点在圆外 .

(4)垂径定理使用的条件有两个 :一个是垂直 ,一个是直径 .此定理的结论有三个 :两对弧 ,一对弦 .

(5)垂径定理的逆定理使用条件有两个 :平分与直径 ,还有一个前提条件即被平分的弦不能是直径 .结论有三个 :垂直 ,两对弧相等 .

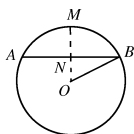
(6)若一个图形绕一个定点旋转 180° 后能与自身重合 ,这样的图形称为中心对称图形 ,而圆绕圆心旋转任意角度都能与原来的图形重合 .故圆既是轴对称图形 ,又是中心对称图形 ,它具有旋转不变性 .

(7)圆心角、弧、弦之间相等关系定理不仅对“圆心角、弧、弦”三者之间适用 ,也可同时对“圆心角、弧、弦、弦心距”四者之间也适用 ,即在同圆或等圆中 ,如果两个圆心角 ,两条弧 ,两条弦或者两条弦的弦心距中有一组量相等 ,那么它们所对应的其余各组量都分别相等 .

下面让我们在一个圆中 ,探究圆心到弦的距离 :

❖ 与你探究 ❖

【问题】 如图 3-1 所示 ,在 $\odot O$ 中 , M 是 $\widehat{AB}$ 上的一点 , N 为弦 AB 的中点 ,且 M, N, O 三点在一条直线上 , $AB = 2\sqrt{3}$, $MN = 1$ 求圆心 O 到 AB 的距离 .



【准备】 本题求圆心到弦的距离 ,解题关键是先找出 $ON \perp AB$,然后利用垂径定理和勾股定理求出 ON 的长 .

图 3-1

【过程】 连结 ON, OB ,

$\because O$ 为圆心 , N 为 AB 的中点 , $AB = 2\sqrt{3}$.

$\therefore ON \perp AB, BN = \sqrt{3}$, ON 的延长线平分劣弧 $\widehat{AB}$.

而点 M, N, O 在同一条直线上 ,

$\therefore$ 点 M 与劣弧 $\widehat{AB}$ 的中点重合 .

$\therefore$ 点 M 为 $\widehat{AB}$ 的中点 .

$\therefore ON = OM - MN = OM - 1$.

设 $OM = r$,则 $OB = OM = r, ON = r - 1$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ONB$ 中 ,由勾股定理得

$r^2 = (\sqrt{3})^2 + (r - 1)^2$,解得 $r = 2$.

$\therefore ON = r - 1 = 2 - 1 = 1$.

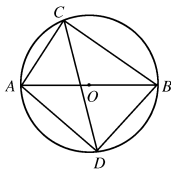
$\therefore$ 圆心 O 到 AB 的距离为 1 .

【评析】 由于 N 平分弦 AB , 故连接 ON , ON 即为 O 到 AB 的距离, 考虑到在 $\text{Rt}\triangle OBN$ 中, 只知 $BN = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$, 而 ON 又因 $MN = 1$ 可与 OB 建立关系, 故可用设未知数列方程的方法来求出 ON 的长. 在这之前, 要探究点 M 是否为 $\widehat{AB}$ 的中点. 本题设未知数列方程, 这是几何计算中常用的方法.

下面让我们再共同探究怎样利用圆周角定理的推论求弦长:

❖ 与你探究 ❖

【问题】 如图 3-2 所示, 已知 $\odot O$ 的直径 AB 为 10 cm, 弦 AC 为 6 cm, $\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于 D , 求 BC , AD 和 BD 的长.



【准备】 BC 可直接由勾股定理求出. AD , BD 的长, 要先利用 $\angle ACB$ 被 CD 平分, 得 $\widehat{AD} = \widehat{BD}$, 然后再利用勾股定理来求.

图 3-2

【过程】 $\because AB$ 为直径, $\therefore \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$, $\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD}$. $\therefore AD = BD$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $AD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = 5\sqrt{2}$.

【评析】 已知条件中若有直径, 则利用圆周角定理的推论得到直角三角形, 然后利用直角三角形的性质求解.



发散思维应用

典型例题 1

(2004·北京东城区) 如图 3-3 所示, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, D 是 $\odot O$ 上一点, 连结 BD , CD , AC , BD 交于点 E .

(1) 请找出图中的相似三角形, 并加以证明;

(2) 若 $\angle D = 45^\circ$, $BC = 2$, 求 $\odot O$ 的面积.

分析 由于同弧所对的圆周角相等, 因此不难发现 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DCE$ 相似. 要求 $\odot O$ 的面积, 需要知道 $\odot O$ 的半径. 因此, 可以作直径 BF , 再连结 CF , 借助“直径所对的圆周角是直角”构成直角三角形解决问题.

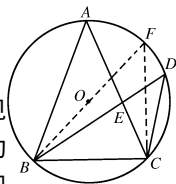


图 3-3

解 (1) $\triangle ABE \sim \triangle DCE$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 中, $\angle A = \angle D$, $\angle AEB = \angle DEC$.

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCE$.

(2) 作 $\odot O$ 的直径 BF , 连结 CF .

$\because \angle F = \angle D = 45^\circ$, $\angle BCF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle BCF$ 为等腰直角三角形.

又 $\because BC = CF = 2$,

$\therefore BF = 2\sqrt{2}$.

$\therefore OB = \sqrt{2}$.

$\therefore S_{\odot O} = OB^2 \cdot \pi = 2\pi$.

【题型发散】

发散 1 看一看, 你能选出正确答案吗?

(1) 下列语句正确的是

()

A. 圆可以看作是到圆心的距离等于半径的点的集合

B. 圆的内部可以看作是到定点的距离小于定长的点的集合

C. 圆的一部分叫做弧

D. 能够互相重合的弧叫做等弧

(2) 圆的弦长等于它的半径, 那么这条弦所对的圆周角的度数是

()

A. 30°

B. 60°

C. 150°

D. 30° 或 150°

(1) 分析 用验证法.

解 A. 语句中, 在没有定义圆以前, 并没有圆心和半径的定义, 因而不应出现圆心和半径, 应说定点和定长才正确; B. 语句中, 圆的内部是在圆定义后所出现的名称, 因而应把定点和定长改成圆心和半径才为恰当; C. 语句中的错误就是圆上的一个点也是圆的一部分, 而不称为弧; D. 语句中, 虽然没有在同圆或等圆的要求, 但是若两条弧重合, 也就必须在同圆或等圆中, 因而叙述是可以省略的. 故应选 D.

(2) 分析 用直接法.

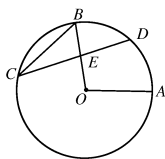
解 因为这条弦所对的圆心角为 60° , 但这条弦所对的圆周角的度数应有 2 个, 故本题应选 D.

发散 2 想一想, 填什么最准确?

(1) AB 是 $\odot O$ 直径, CD 是弦, AB , CD 的延长线交于 E 点, $AB = 2DE$, $\angle E = 18^\circ$, 则 $\angle COA$ 的度数为_____.

(2) 如图 3-4 所示, A 、 B 、 C 、 D 是 $\odot O$ 上四点, 且 D 是 $\widehat{AB}$ 的中点, CD 交 OB

于点 E , $\angle AOB = 100^\circ$, $\angle OBC = 55^\circ$, 则 $\angle OEC =$



解 (1)如图 3-5, 连结 OD , $AB = 2DE \Rightarrow OD = DE \Rightarrow \angle E = \angle DOE = 18^\circ \Rightarrow \angle C = \angle ODC = 36^\circ$.

图 3-4

$\therefore \angle AOC = \angle C + \angle E = 54^\circ$.

(2)如图 3-4 所示, 由于 $\angle OEC$ 是 $\triangle BCE$ 的一个外角, 所以 $\angle OEC = \angle C + \angle B$, 只要求出 $\angle C$ 的值, 则 $\angle OEC$ 可求. 而由条件知 $\angle BCD$ 所对的弧是 $\angle AOB$ 所对的弧的一半, 这样可求出 $\angle OEC = 80^\circ$.

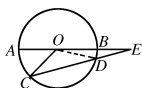


图 3-5

【纵横发散】

发散 3 如图 3-6 所示, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB = BC$, $AO \perp BC$ 于 D .

(1)求证: $\triangle ABC$ 是等边三角形;

(2)若 $AB = 1$, P 是劣弧 BC 上的一个动点 (点 P 与 B, C 不重合), PA 交 BC 于点 E , 设 $AE = x$, $EP = y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

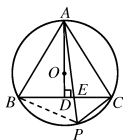


图 3-6

(3)在(2)的前提下, 令 $\angle PAC = \alpha$, $\angle APC = \beta$, 当 y 取何值时, $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$.

解 (1) O 是圆心 $\Rightarrow BD = CD \Rightarrow BD = \frac{1}{2} BC$
 $AO \perp BC$ 于 D $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow BD = CD \Rightarrow BD = \frac{1}{2} BC \\ AB = BC \end{array} \right\} \Rightarrow BD = \frac{1}{2} AB$

$AO \perp BC$ 于 $D \Rightarrow \triangle ADB$ 是直角三角形 $\Rightarrow \angle BAD = 30^\circ$
 $\Rightarrow \angle B = 60^\circ$
 $AB = BC$ $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \angle B = 60^\circ \\ AB = BC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC$ 是等边三角形.

(2)连结 BP .

$\triangle ABC$ 是等边三角形 $\Rightarrow$

$\angle ABC = \angle ACB$
 $\angle APB = \angle ACB$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle APB$
 $\angle BAE = \angle PAB$ $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \angle ABC = \angle APB \\ \angle BAE = \angle PAB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle APB \Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AP$. ①

把 $AB = 1$, $AE = x$, $AP = x + y$ 代入①式得

$1^2 = x(x + y)$, 即 $x^2 + xy = 1$.

$$\therefore y = \frac{1}{x} - x.$$

自变量 x 的取值范围是 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < 1$.

(3) 由题意不难得出: α, β 都是锐角.

$$\text{又} \because \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1,$$

$$\therefore \sin^2 \alpha + \cos^2(90^\circ - \beta) = 1,$$

$$\therefore \alpha = 90^\circ - \beta.$$

$$\text{即 } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ACP = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ.$$

此时, AP 为 $\odot O$ 的直径.

$$\therefore x = AD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore y = \frac{1}{x} - x = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \text{当 } y = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 时 } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1.$$

发散 4 已知以等腰 $\triangle ABC$ 的一腰 AB 为直径的 $\odot O$ 交另一腰于 E , 交底边 BC 于 D (如图 3-7 所示), 则 BC 与 DE 有怎样的数量关系? 证明你的结论.

分析 依据题目条件及图形, 可以猜想 BC 与 DE 的关系是 $BC = 2DE$. 因为 AB 为 $\odot O$ 的直径, 故可考虑连结 BE 构成直角三角形. 分析猜想的结果, 只要证明 D 为 BC 的中点即可.

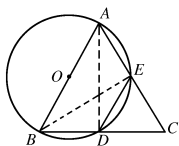


图 3-7

解 BC 与 DE 的数量关系为 $BC = 2DE$.

连结 BE 、 AD .

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ, \angle ADB = 90^\circ.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AD \text{ 平分 } BC.$$

在 $\text{Rt}\triangle EBC$ 中, $\angle BEC = 90^\circ$.

$\because D$ 为 BC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC,$$

$$\text{即 } BC = 2DE.$$

【转化发散】

发散 5 如图 3-8 所示,半圆上有 P, Q 两点, AQ, BP 相交于 M , $MN \perp AB$, 垂足为 N . 求证: $\angle MNP = \angle MNQ$.

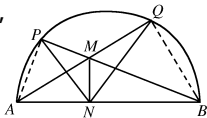


图 3-8

分析 本题添作辅助线,构造直径上的圆周角 $\angle APB = 90^\circ$, $\angle AQB = 90^\circ$, 将问题转化到圆内解决.

证明 分别连结 PA, QB ,
 AB 是直径 $\Rightarrow \angle APB = 90^\circ$,
 $MN \perp AB \Rightarrow \angle MNA = 90^\circ$,
 则有 $\angle APB + \angle MNA = 180^\circ \Rightarrow A, P, M, N$ 四点共圆 $\Rightarrow \angle MNP = \angle PAQ$.

同理 B, Q, M, N 四点共圆 $\Rightarrow \angle MNQ = \angle PBQ$.

又 $\because A, P, Q, B$ 四点共圆 $\Rightarrow \angle PAQ = \angle PBQ$,

$\therefore \angle MNP = \angle MNQ$.

【组合发散】

发散 6 如图 3-9 所示 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 是直径, D 是 $\widehat{AC}$ 上的点, BD 交 AC 于 E . 已知 $AB = 5$, $\sin \angle CAB = \frac{3}{5}$.

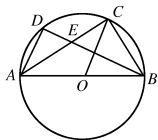


图 3-9

(1) 设 $CE = m$, $\frac{DE}{BE} = k$, 试用含 m 的代数式表示 k ;

(2) 当 $AD \parallel OC$ 时, 求 k 的值;

(3) 当 $BE = 6DE$ 时, 求 $\widehat{CD}$ 的长. (下列数据供选用:

$\tan 6^\circ \approx \frac{1}{10}$, $\tan 7^\circ \approx \frac{1}{8}$, $\tan 8^\circ \approx \frac{1}{7}$. 结果中保留 π)

解 (1) $\because AB$ 是直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$BC = AB \cdot \sin \angle CAB = 5 \times \frac{3}{5} = 3,$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore \text{当 } CE = m \text{ 时, } BE^2 = CE^2 + BC^2 = m^2 + 9.$$

$$\because BE \cdot DE = AE \cdot CE \text{ 而 } DE = k \cdot BE, \therefore k \cdot BE^2 = AE \cdot CE.$$

$$\therefore k = \frac{AE \cdot CE}{BE^2} = \frac{m(4-m)}{m^2 + 9}.$$

(2) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, 即 $AD \perp BD$.

$$\because AD \parallel OC, \therefore OC \perp BD, \therefore \angle CBE = \angle ECO.$$

$$\because OC = OA, \therefore \angle OAC = \angle ACO.$$

$$\therefore \angle OAC = \angle CBE.$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BAC \sim \text{Rt}\triangle EBC.$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{BC}{AC}, \therefore CE = \frac{BC^2}{AC} = \frac{9}{4}.$$

$$\therefore k = \frac{m(4-m)}{m^2+9} = \frac{\frac{9}{4}(4-\frac{9}{4})}{(\frac{9}{4})^2+9} = \frac{7}{25}.$$

$$(3) \text{当 } BE = 6DE \text{ 时, 即 } k = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \frac{m(4-m)}{m^2+9} = \frac{1}{6}, \text{解得 } m_1 = 3, m_2 = \frac{3}{7}.$$

$$\text{当 } m = 3 \text{ 时, } CE = BC = 3, \therefore \angle CBE = 45^\circ.$$

$$\therefore \widehat{CD} \text{ 所对圆心角为 } 90^\circ; \therefore \widehat{CD} = \frac{5}{4}\pi.$$

$$\text{当 } m = \frac{3}{7} \text{ 时, } \tan \angle CBE = \frac{1}{7}, \therefore \angle CBE \approx 8^\circ.$$

$$\therefore \widehat{CD} \text{ 所对圆心角为 } 16^\circ.$$

$$\therefore \widehat{CD} \approx \frac{16}{180} \cdot \frac{5}{2}\pi = \frac{2}{9}\pi.$$

【构造发散】

发散 7 如图 3-10 所示, 在 $\odot O$ 中, 过圆周上一点 A 作弦 AB, AC , 且 $AB = AC$, M, N 分别是 AB, AC 的中点, 弦 PQ 过 M, N 两点. 求证: $PM = NQ$.

分析 本题构造等腰三角形 OMN , 利用等腰三角形三线合一及等量之差相等这个公理进行推证.

证明 连结 OM, ON ,

$$\because M, N \text{ 分别是 } AB, AC \text{ 中点,}$$

$$\therefore OM \perp AB, ON \perp AC.$$

$$\because AB = AC, \therefore OM = ON.$$

过 O 作 $OH \perp PQ$ 于 H , 则 $PH = QH$.

在等腰 $\triangle MON$ 中, $MH = NH$,

$$\therefore PM = NQ.$$

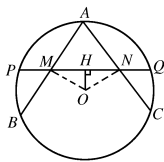


图 3-10

【综合发散】

发散 8 如图 3-11 所示, 有一块半圆形的木板, 现要把它截成三角形板块, 三

角形的两个顶点分别为 A, B , 另一顶点在 $\widehat{AB}$ 上, 问怎样截取才能使截出的三角形的面积最大? (要求说明理由)

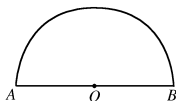


图 3-11

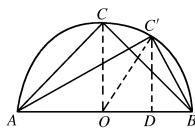


图 3-12

解 作 $OC \perp AB$ 交 $\widehat{AB}$ 于点 C , 连结 AC, BC , 则依样裁出的 $\triangle ABC$ 的面积最大, 现证明如下:

在 $\widehat{AB}$ 上任意一点 C' (不同于点 C), 连结 AC', BC' , 过点 C' 作 $C'D \perp AB$, 垂足为 D . 如图 3-12 所示, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CO$, $S_{\triangle ABC'} = \frac{1}{2} AB \cdot C'D$.

连结 OC' , 则 $OC' = OC$. 在 $\text{Rt}\triangle ODC'$ 中, $OC' > C'D$,

$$\therefore OC > C'D.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} > S_{\triangle ABC'}.$$

【探究发散】

发散 9 如图 3-13 所示, 圆内接三角形 ABC 中, $AB = AC$. D 是 BC 边上的一点, E 是直线 AD 和 $\triangle ABC$ 外接圆的交点.

(1) 证明: $AB^2 = AD \cdot AE$;

(2) 当 D 为 BC 延长线上一点时, (1) 的结论成立吗? 如果成立, 请证明; 不成立, 请说明理由.

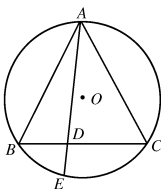


图 3-13

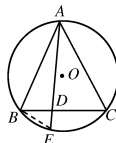


图 3-14

(1) 分析 如图 3-14 所示, 连结 BE , 构造 $\triangle ABE \sim \triangle ADB$.

证明 如图 3-14 所示, 连结 BE , 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle ADB$ 中,

$$\left. \begin{array}{l} \angle AEB = \angle ACB = \angle ABC \\ \angle BAE = \angle DAB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADB \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE.$$

(2)分析 1 当 D 为 BC 延长线上一点时, 结论成立. 作图如图 3-15 所示, 连结 EC 构造 $\triangle ACE \sim \triangle ADC$.

证法 1 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACD + \angle ACB = 180^\circ \\ \angle AEC + \angle CED = 180^\circ \\ \angle CED = \angle ABC = \angle ACB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ACD = \angle AEC$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle DAC = \angle CAE \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ADC \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AE \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE.$$

分析 2 如图3-15所示, 连结 EB 构造 $\triangle AEB \sim \triangle ABD$.

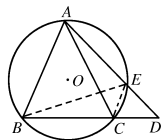
图 3-15

证法 2 如图3-15所示, 连结 EB ,

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle ABD$ 中,

$$\left. \begin{array}{l} \angle AEB = \angle ACB = \angle ABD \\ \angle DAB = \angle BAE \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle ABD \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE.$$



指点迷津 上题是开放探究题, 它由条件去探究不明确的结论. 这种探究具有开放性和发散性的特征, 有时答案并不惟一, 有时结论是否定的.

典型例题 2

如图3-16所示, $\odot O$ 的直径 AB 和弦 CD 相交于点 E , 已知 $AE = 6$ cm, $EB = 2$ cm, $\angle CEA = 30^\circ$, 求 CD 的长.

分析 利用弦心距构成直角三角形, 再解直角三角形, 结合圆的对称特点.

解 过 O 作 $OF \perp CD$ 于 F , 连结 CO ,

$$\because AE = 6, EB = 2, \therefore AB = 8.$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2} AB = 4, OE = AD - AO = 2.$$

在 $Rt\triangle OEF$ 中, $\because \angle CEA = 30^\circ$,

$$\therefore OF = \frac{1}{2} \cdot OE = 1.$$

在 $Rt\triangle CFO$ 中, $OF = 1, OC = OA = 4$,

$$\therefore CF = \sqrt{OC^2 - OF^2} = \sqrt{15}.$$

又 $\because OF \perp CD, \therefore DF = CF$.

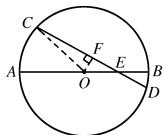


图 3-16

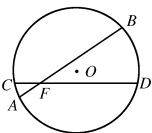
$$\therefore CD = 2 \cdot CF = 2\sqrt{15} \text{ (cm)}.$$

解法指导 在求解有关弦长、圆心到弦的距离、半径等问题时,通常用垂径定理及推论,构造直角三角形,利用勾股定理或三角函数的知识求解.

【题型发散】

发散 1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)如图 3-17 所示, $\odot O$ 中弦 AB, CD 相交于点 F , $AB = 10$, $AF = 2$. 若 $CF:DF = 1:4$, 则 CF 的长等于 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{2}$

(2) $\odot O$ 中, AB, CD 是两条平行弦, 位于圆心的两侧, $AB = 40 \text{ cm}$, $CD = 48 \text{ cm}$, AB, CD 的距离为 22 cm , 则 $\odot O$ 的半径长是 ()

图 3-17

- A. 15 cm B. 20 cm C. 25 cm D. 30 cm

(1)分析 用直接推算法.

设 $CF = x$, 因为 $\triangle ACF \sim \triangle BDF$, 将比例式 $\frac{AF}{CF} = \frac{DF}{BF}$ 转化为关于 x 的一元二次方程.

解 如图 3-17 所示, 连结 AC, BD .

$$\because AB = 10, AF = 2,$$

$$\therefore BF = AB - AF = 8.$$

$$\text{设 } CF = x,$$

$$\because CF:DF = 1:4,$$

$$\therefore DF = 4x.$$

$$\because \triangle ACF \sim \triangle BDF,$$

$$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{DF}{BF}.$$

$$\therefore AF \cdot BF = CF \cdot DF,$$

$$\therefore 2 \times 8 = x \cdot 4x.$$

$$\because x > 0,$$

$$\therefore x = 2.$$

$$\text{即 } CF = 2$$

故本题应选 B.

(2)分析 用直接法或先用排除法再用验证法.

解 可设 $\odot O$ 半径为 x , 根据题意列方程

$$\sqrt{x^2 - 20^2} + \sqrt{x^2 - 24^2} = 22.$$

解得 $x = 25$. 也可用观察排除法, 显然 A, B 与 D 不合题意, 再用验证法, 知 C

符合题意.

故本题应选 C.

发散 2 想一想 填什么最准确?

(1)如图 3-18 所示, AB 是半圆 O 的直径, E 是弧 BC 的中点, OE 交弦 BC 于点 D , 已知 $BC = 8$ cm, $DE = 2$ cm, 则 AD 的长为 _____ cm.

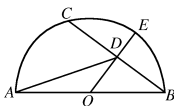


图 3-18

(2) $\odot O$ 的弦 CD 垂直于它的直径 AB 交点为 M , 且 CD 把 AB 分成两条线段, $AM:MB = 1:4$, 则 $BC:CA$ 等于 _____.

解 (1) $\because E$ 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$$\therefore OD \perp BC \text{ 于点 } D \text{ 且 } BD = CD = \frac{1}{2} BC.$$

$$\because BC = 8,$$

$$\therefore BD = CD = 4,$$

$$\because OB^2 = OD^2 + BD^2,$$

$$\text{且 } OB = r, OD = OE - DE = r - 2,$$

$$\therefore r^2 = (r - 2)^2 + 4^2.$$

$$\text{解得 } r = 5.$$

$$\therefore AB = 10, OD = 3.$$

$$\because OD \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中位线},$$

$$\therefore AC = 6.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 = AC^2 + CD^2 = 6^2 + 4^2 = 52.$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{13} \text{ (cm)}.$$

(2) 由直角三角形两条直角边平方的比等于这两条直角边在斜边上射影的比.

$$\text{即 } \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}, \therefore BC:CA = 2:1.$$

【纵横发散】

发散 3 如图 3-19 所示, $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD , 弦 AE 、 CD 的延长线相交于点 F . 求证 $AC \cdot CF = AF \cdot CE$.

分析 1 本题欲证 $AC \cdot CF = AF \cdot CE$, 需证 $\frac{AC}{AF} = \frac{CE}{CF}$, 这可通过证明 $\triangle AEC \sim \triangle ACF$ 得到比例式.

证法 1 连结 AD .

$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ 为直径} \\ AB \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AD} \Rightarrow \angle AEC = \angle ACD.$$

在 $\triangle AEC$ 与 $\triangle ACF$ 中,

$$\left. \begin{array}{l} \angle AEC = \angle ACF \\ \angle CAE = \angle FAC \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle ACF \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{EC}{CF}.$$

$$\Rightarrow AC \cdot CF = AF \cdot EC.$$

分析 2 欲证 $AC \cdot CF = AF \cdot CE$ 需证 $\frac{AC}{EC} = \frac{AF}{FC}$,

$$\because AC = AD \text{ 即需证 } \frac{AD}{EC} = \frac{AF}{FC},$$

这可通过证明 $\triangle AFD \sim \triangle CFE$ 达到目的.

$$\text{证法 2 } \left. \begin{array}{l} AB \text{ 为直径} \\ AB \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AD} \Rightarrow AC = AD$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{在 } \triangle AFD \text{ 与 } \triangle CFE \text{ 中} \\ \angle F = \angle F \\ \angle FAD = \angle FCE \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle CFE \Rightarrow \frac{AD}{EC} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow AC = AD$$

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow AC \cdot FC = AF \cdot EC.$$

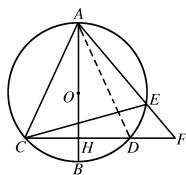


图 3-19

【转化发散】

发散 4 如图 3-20 所示, AD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高, M 为 AD 的中点, BM 的延长线交 AC 于 E , $EF \perp BC$ 交 BC 于 F , $EG \perp AC$ 交 AC 为直径的半圆于 G . 求证: $EF = EG$.

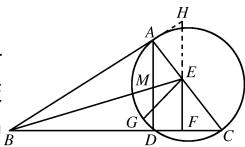


图 3-20

分析 本题很容易想到, 因为 GE 是直角三角形斜边上的高, 故 $GE^2 = AE \cdot EC$, 故本题转化成只

要证 $EF^2 = AE \cdot EC$. 这里关键是如何应用 M 是 AD 的中点这个条件.

证明 分别延长 FE 和 BA 交于 H .

$$\left. \begin{array}{l} HF \perp BC \\ AD \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AD \parallel HF \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{AM}{HE} = \frac{BM}{BE} \\ \frac{MD}{EF} = \frac{BM}{BE} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{HE} = \frac{MD}{EF} \Rightarrow AM = MD \Rightarrow HE = EF.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{又 } CA \perp AH \\ HF \perp FC \end{array} \right\} \Rightarrow A, H, C, F \text{ 四点共圆.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow HE \cdot EF = AE \cdot EC \\ HE = EF \end{array} \right\} \Rightarrow FE^2 = AE \cdot EC.$$

①

GE 是 $\text{Rt}\triangle AGC$ 斜边 AC 上的高 $\Rightarrow GE^2 = AE \cdot EC$

②

由式①②得 $EF = GE$.

【综合发散】

发散5 如图3-21所示,已知 P 为 $\odot O$ 直径 AB 上任意一点,弦 CD 过点 P 且与 AB 交成 45° . 求证: $PC^2 + PD^2$ 为定值.

证明 当特殊位置 P 与 O 点重合时, $PC^2 + PD^2 = 2$ 倍 $\odot O$ 半径的平方,为定值.

当 P 为一般情况时,作 $CM \perp AB$ 于 M , $DN \perp AB$ 于 N , 连结 OC 和 OD ,

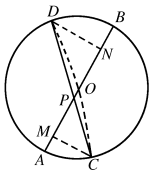


图 3-21

$$\left. \begin{array}{l} \text{可知 } \angle NDP = \angle MCP = 45^\circ \\ \text{又 } OC = OD \Rightarrow \angle ODP = \angle OCP \end{array} \right\} \Rightarrow \angle NDO = \angle COM$$

由此可证 $\text{Rt}\triangle ODN \cong \text{Rt}\triangle COM$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ON = CM = PM \\ OM = ND = PN \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} OC^2 = CM^2 + PN^2 \\ OD^2 = DN^2 + PM^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{由勾股定理得 } \left\{ \begin{array}{l} OC^2 = CM^2 + OM^2 \\ OD^2 = DN^2 + ON^2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow OC^2 + OD^2 = CM^2 + PN^2 + DN^2 + PM^2 = PC^2 + PD^2.$$

$\therefore PC^2 + PD^2 = 2$ 倍 $\odot O$ 半径的平方, 即 $PC^2 + PD^2$ 为定值.

发散6 如图3-22所示,在 $\odot O$ 中,如果半径 $OA \perp OB$, 弦 $AC \perp BD$, 那么 AD 与 BC 有什么关系? 为什么?

分析 显然, AD 与 BC 之间的大小关系无法判定. 那么, 只有判断它们的位置关系了. 由于 $OA \perp BO$, $AC \perp BD$, 则 $\angle AOB = 90^\circ$. 根据圆周角定理的推论, 知 $\angle D = \angle C = 45^\circ$, 于是 $\angle CAD = 45^\circ$, 那么, 由平行线的性质知 $AD \parallel BC$.

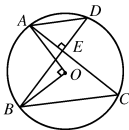


图 3-22

解 $AD \parallel BC$.

理由 $\because OA \perp OB, \therefore \angle AOB = 90^\circ$.

$\therefore \angle D = \angle C = 45^\circ$.

$\because AC \perp BD, \therefore \angle AED = 90^\circ$.

$\therefore \angle CAD = 45^\circ$.

$\therefore \angle CAD = \angle C, \therefore AD \parallel BC$.



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. $\odot O$ 中 $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=2:3:4$ 则 $\triangle ABC$ 是 ()
 A. 锐角三角形 ,且其中一个角是 80° B. 直角三角形
 C. 钝角三角形 ,且其中一个角是 120° D. 钝角三角形 ,且其中一个角是 40°
2. 已知圆内接四边形 $ABCD$,并且有 $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CD}:\widehat{DA}=1:2:3:4$,则 $\angle A:\angle B:\angle C:\angle D$ 等于 ()
 A. $1:2:3:4$ B. $4:3:2:1$ C. $3:4:1:2$ D. $5:7:5:3$
3. 半径为 5 cm 的 $\odot O$ 中 ,弦 $AB \parallel$ 弦 CD ,又 $AB=6$ cm , $CD=8$ cm ,则 AB 和 CD 两弦的距离是_____.
4. 圆内接四边形 $ABCD$, AB 为直径 , $\widehat{BC}=40^\circ$, $\widehat{BC}:\widehat{CD}=2:3$,则 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ 的度数是_____.

【生活发散】

1. 如图 3-23 所示 ,我国新建一座石拱桥 ,桥拱是圆弧形 ,它的跨度(弧所对的弦的弦长)为 40 m ,拱高(弦的中点到弦的距离)为 8 m ,求桥拱的半径 R .

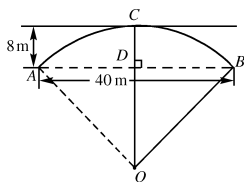


图 3-23

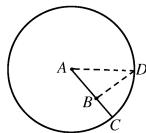


图 3-24

2. 如图 3-24 所示 ,某部队在灯塔 A 的周围进行爆破作业 ,A 周围 3 km 内的水域为危险区域 ,有一渔民误入离 A 处 2 km 的 B 处 ,为尽快驶离危险区域 ,该船应沿哪个方向航行 ? (要求给予证明)

【纵横发散】

1. 如图 3-25 所示 , BC 为半圆 O 的直径 , F 是半圆上异

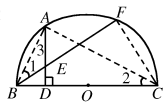


图 3-25

于 B, C 的一点 A 是 $\widehat{BF}$ 的中点, $AD \perp BC$ 于点 D , BF 交 AD 于点 E .

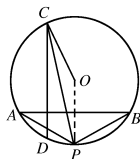


图 3-26

(1) 求证: $BE \cdot BF = BD \cdot BC$;

(2) 试比较线段 BD 与 AE 的大小, 并说明道理.

2. 如图 3-26, 已知 AB 为 $\odot O$ 的弦, 从圆上任意一点 C 引弦 $CD \perp AB$, 作为 $\angle OCD$ 的平分线, 交 $\odot O$ 于 P 点, 连结 PA 和 PB , 那么 $\widehat{PA}$ 与 $\widehat{PB}$ 相等吗? 为什么?

【转化发散】

1. 如图 3-27 所示, AB 为半圆 O 的直径, 弦 AD 、 BC 相交于点 P , 若 $CD = 3$, $AB = 4$, 求 $\tan \angle BPD$.

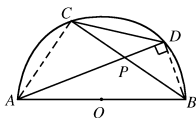


图 3-27

2. 如图 3-28 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle ACB$, $\angle A = 100^\circ$, BE 是角 B 的平分线. 求证: $AE + BE = BC$.

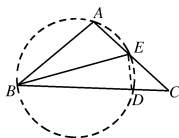


图 3-28

【构造发散】

如图 3-29 所示, 设点 D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆的 $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ 的中点, 弦 DE 交 AB 于点 F , 交 AC 于点 G . 求证: $AF \cdot AG = DF \cdot EG$.

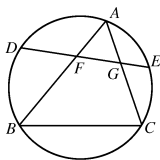


图 3-29

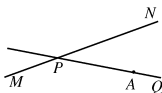


图 3-30

【探究发散】

如图 3-30 所示, 公路 MN 和公路 PQ 在点 P 处交汇, 且 $\angle QPN = 30^\circ$, 点 A 处有一所中学, $AP = 160$ m. 假设拖拉机行驶时, 周围 100 m 以内会受到噪声的影响, 那么拖拉机在公路 MN 上沿 PN 方向行驶时, 学校是否会受到噪声影响? 说明理由. 如果受影响, 已知拖拉机的速度为 18 km/h, 那么学校受影响的时间为多少秒?

课后习题答案, 你需要吗?

随堂练习(课本第 85 页)

1. 将绳子的一端 A 固定, 然后拉紧绳子的另一端 B , 并绕 A 在地上转一圈,

B 所经过的路径就是所希望的圆.

2. 为了使游戏公平,小朋友应站在 2 m 线以内,而教师应站在 2 m 线以外,当然,学生可以有不同的想法.

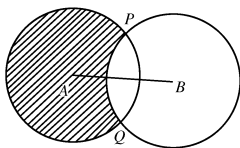
习题 3.1(课本第 86 页)

1. 因为茶杯和地下水道井通常是圆形的,因此茶杯盖子和井盖也做成圆形,这样既可以节省材料,也不容易掉下去.

2. 略.

3. (1)圆外; (2)圆内; (3)5.

4. 如第 4 题图所示,所求图形为阴影部分(不包括阴影的边界).



第 4 题图

试一试(课本第 87 页)

1. 小明可能,如 $1+1+1+1+1+3=8$ (分);

小华不可能,因为最多只能得到 $9 \times 6 =$

54 (分);

小红可能,如 $5+5+5+5+7+1=28$ (分).

随堂练习(课本第 92 页)

1. 解 连结 OA ,

设桥拱所在圆的半径为 R , 则 $OD = R - 7.2$.

$\because CD \perp AB$,

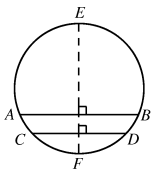
$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 37.4 = 18.7$ (m).

根据勾股定理得 $OA^2 = OD^2 + AD^2$,

即 $R^2 = (R - 7.2)^2 + (18.7)^2$,

解得 $R \approx 27.9$ (m).

所以桥拱所在圆的半径约为 27.9 m .



第 2 题图

2. 相等.(提示:如第 2 题图所示,作出垂直于弦的直径,利用垂径定理得两组弧分别相等,用“等量减等量差相等”即可说明结论成立.当然,符合条件的图形有三种情况:圆心在平行弦外、在其中一条弦上、在平行弦内,说理的思路都是一样的.)

习题 3.2(课本第 93 页)

1. 解 作 $OC \perp AB$ 于 C .

$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$ (mm),

$\cos \angle OAB = \frac{18}{30} = 0.6$.

2. $AC = BD$.(提示:作 $OE \perp AB$,垂足为 E ,利用垂直于弦的直径平分这条

弦,用“等量减等量差相等”即可说明结论成立.)

试一试(课本第 93 页)

1. (1) 作直线 OM ;

(2) 过点 M 作 OM 的垂线, 交 $\odot O$ 于点 A, B , 线段 AB 即为所求的弦.

随堂练习(课本第 97 页)

1. 略.

2. 略.

3. 证明 $\because C$ 是 $\widehat{AB}$ 的中点, 连结 OC ,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}.$$

$$\therefore \angle AOC = \angle COB = 60^\circ.$$

$$\therefore AC = BC.$$

在 $\triangle AOC$ 中, $OA = OC$, $\angle AOC = 60^\circ$.

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形.

同理 $\triangle BOC$ 是等边三角形,

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 是菱形.

习题 3.3(课本第 98 页)

1. 全等.(提示: 由 $AB = DC$, $BC = CB$, 可证 $\widehat{AC} = \widehat{DB}$, 所以 $AC = DB$.)

2. 证明 $\because AB, DE$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle DOA = \angle BOE.$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BE}.$$

$$\because \widehat{AD} = \widehat{CE},$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{BE} = \widehat{CE}.$$

$$\therefore BE = CE.$$

3. 证明 连结 OC ,

$$\because AC \parallel OD,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle DOB; \angle CAO = \angle ACO = \angle COD.$$

$$\therefore \angle COD = \angle DOB,$$

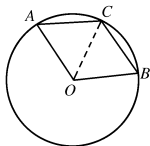
$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{BD}.$$

随堂练习(课本第 103 页)

1. 略.

$$2. \angle BAC = 25^\circ.$$

习题 3.4(课本第 103 页)



第 3 题

1. 证明 $\therefore \angle AOB = 2\angle BOC$,

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$ $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

$\therefore \angle ACB = 2\angle BAC$.

2. $\angle BOD = 160^\circ$ $\angle BAD = 80^\circ$.

随堂练习(课本第 107 页)

1. 尽量保证同排的人视角相同.

2. $\angle BDC$.

3. 解 连结 OC ,

$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore OA = OC$,

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形.

$\therefore AC = 5$ (cm).

4. 图(2)是半圆形 理由是 90° 的圆周角所对的弦是直径.

习题 3.5(课本第 108 页)

1. $\angle 1 = \angle 4$ $\angle 2 = \angle 7$ $\angle 3 = \angle 6$ $\angle 5 = \angle 8$;

$\triangle ABE$ 与 $\triangle DCE$ 相似 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCE$ 相似.

2. 有很多种方法 如:

(1)对折两次 折痕的交点即为圆心;

(2)在圆纸片上画两个 90° 的圆周角 使它们所对的弦相交 这个交点就是圆心;

(3)在圆中画两条不平行的弦 分别作这两条弦的垂直平分线 其交点即为圆心;

(4)在圆中任意画一条弦 然后作这条弦的垂直平分线 交圆于 A 、 B 两点 再作 AB 的垂直平分线 两线的交点就是圆心.



2. 确定圆的条件 直线和圆的位置关系 圆和圆的位置关系



自主学习提示

一、相关知识链接

1. 圆的确定

圆心决定圆的位置 半径决定圆的大小.

2. 圆的性质

(1)圆是轴对称图形,它的任意一条直径所在的直线都是对称轴.由此可推出垂径定理等重要性质.

(2)圆是中心对称图形,其对称中心是圆心.

(3)圆具有旋转不变性,它绕圆心旋转任意大小的角度,都能与原图形重合.

3. 圆与点的位置关系

设圆的半径为 r , 点到圆心的距离为 d .

(1)点在圆外 $\Leftrightarrow d > r$;

(2)点在圆上 $\Leftrightarrow d = r$;

(3)点在圆内 $\Leftrightarrow d < r$.

4. 圆的定义满足如下两条性质

(1)纯粹性 圆上各点到定点(圆心 O)的距离都等于定长(半径长 r);

(2)完备性 到定点的距离等于定长的点都在圆上.

5. 反证法

反证法是一种间接证明命题的方法,在用直接法证明命题有困难时,可以考虑使用反证法.用反证法证明时,从否定原命题的结论开始,由此推出矛盾,从而肯定命题结论的正确,但是必须注意把所作的假设作为新增加的条件来使用,否则将推不出矛盾.反证法的原理是“否定之否定等于肯定”之原理.

二、重难知识点提示

本节重点 对确定一个圆的条件的理解,圆与直线、圆与圆的位置关系.

本节难点 分析作圆的方法(找圆心和半径),切线的性质定理和判定定理的理解及反证法.

发散思维分析



一、确定圆的条件

1. 定理 不在同一直线上的三个点确定一个圆

(1)定理 不在同一直线上的三个点确定一个圆.定理中“不在同一直线”这个条件不可忽略,“确定”一词应理解为“有且只有”.

(2)过一点作圆,圆心、半径均不确定,故可作无数个圆.

(3)过两点作圆,圆心在这两点所连成线段的垂直平分线上,圆心位置在一条直线上,半径不确定,故可作无数个圆.

(4)过三点作圆,如果三点在一条直线上,无法确定此圆;

如果这三点不在同一直线上,那么这三点所连成三角形三条边的中垂线交点同时满足到这三个点距离相等,故能确定一个圆.

2. 外接圆、外心定义

(1)外接圆:三角形的三个顶点确定一个圆,这个圆叫做三角形的外接圆(circumcircle of triangle).

(2)外心:外接圆的圆心是三角形三条垂直平分线的交点,叫做三角形的外心(circumcenter).

(3)三角形外心的位置:

锐角三角形的外心在三角形内;

直角三角形的外心在斜边的中点处;

钝角三角形的外心在三角形外.

二、圆与直线的位置关系

1. 圆与直线的位置关系

设圆的半径为 r , 圆心到直线的距离为 d :

(1)直线与圆相离 $\Leftrightarrow d > r$;

(2)直线与圆相切 $\Leftrightarrow d = r$;

(3)直线与圆相交 $\Leftrightarrow d < r$.

2. 圆的切线

(1)切线的定义:直线和圆有惟一公共点时,叫做直线和圆相切.这条直线叫做圆的切线,这个公共点叫做切点.

(2)切线的判定定理:经过直径的一端,并且垂直于这条直径的直线是圆的切线.

(3)切线的性质:经过圆心垂直于切线的直线必过切点,经过切点垂直于切线的直线必过圆心,圆的切线垂直于经过切点的半径.

(4)切线长定理:从圆外一点到圆的两条切线长相等,圆心和这点的连线平分两条切线间的夹角.

3. 三角形的内切圆、内心

(1)定义:和三角形三边都相切的圆叫做三角形的内切圆(inscribed circle of triangle).

(2)一个三角形的内切圆是惟一的.

(3)内心:内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点,叫做三角形的内心(incenter).

(4)内切圆半径:三角形内切圆半径等于内心到三边的距离.

三、圆与圆的位置关系(见下表)

两圆位置关系	圆心距 d 与半径 R, r 的关系	外公切线条数	内公切线条数	主要性质
(1) 外离	$d > R + r$	2	2	① 没有公共点 ② 外(内)公切线长相等 ③ 连心线经过公切线交点
(2) 外切	$d = R + r$	2	1	① 有一个公共点且在连心线上 ② 两条外公切线长相等
(3) 相交	$ R - r < d < R + r$	2	0	① 有两个公共点, 连心线垂直平分公共弦 ② 两条外公切线长相等
(4) 内切	$d = R - r $	1	0	有一个公共点且在连心线的延长线上
内含	(5) 一般 $d < R - r $	0	0	无公共点
	(6) 同心 $d = 0$	0	0	圆心重合

两圆的位置关系决定于圆心距 d 与两圆半径 R, r 的数量关系. 其中两圆相交的情况可以从三角形的任两边之和大于第三边, 任两边之差小于第三边来理解, 且这两个条件缺一不可.

下面让我们共同探究怎样判断一条直线是某个圆的切线:

❖ 与你探究 ❖

【问题】如图 3-31 所示, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是 $\odot O$ 的切线, 切点为 B , $OC \parallel AD$, AD 为 $\odot O$ 的弦, OC 交 AB 于 C . 请判断 CD 是否是 $\odot O$ 的切线, 并说明理由.

【准备】欲判断 CD 是否是 $\odot O$ 的切线, 要连结 OD , 探求 $\angle ODC$ 是否为 90° .

【过程】 CD 是 $\odot O$ 的切线.

理由 连结 OD ; $\because OC \parallel AD$,

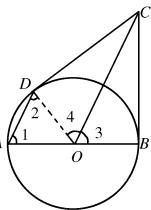


图 3-31

$$\therefore \angle 3 = \angle 1, \angle 2 = \angle 4.$$

$$\text{又} \because OA = OD, \therefore \angle 1 = \angle 2. \therefore \angle 3 = \angle 4.$$

$$\because OB = OD, OC = OC.$$

$$\therefore \triangle OCD \cong \triangle OCB.$$

$$\therefore \angle ODC = \angle OBC.$$

$$\text{又} \because BC \text{ 为 } \odot O \text{ 的切线, 切点为 } B,$$

$$\therefore \angle OBC = 90^\circ, \angle ODC = 90^\circ.$$

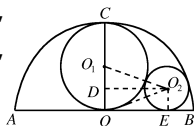
$$\therefore CD \text{ 为 } \odot O \text{ 的切线}.$$

【评析】 本题在已知 CD 与 $\odot O$ 有公共点 D 时, 判断 CD 为 $\odot O$ 的切线. 此类题一般是连接圆心和公共点, 判断这条直线与所得半径垂直, 利用切线判定定理知该直线是圆的切线.

下面让我们再共同探究一下两圆相切的位置关系:

❖ 与你探究 ❖

【问题】 如图 3-32 所示, 已知半圆的直径 $AB = 16$, 过 O 作 $OC \perp AB$, 交半圆于 C , 以 OC 为直径作 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 外切, 与 $\odot O$ 内切, 且与 AB 相切. 求 $\odot O_2$ 的半径及 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的切线 OE 的长.



【准备】 作 $O_2D \parallel AB$ 交 OO_1 于点 D , 连结 O_1O_2 , OO_2 , 且设 OB 切 $\odot O_2$ 于点 E , 连结 O_2E , 利用直角三角形进行求解.

图 3-32

【过程】 设 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 的半径分别为 R, r , 连结 O_1O_2 , OO_2 , 过 O_2 作 O_1O 的垂线 O_2D , 垂足为 D , 过 O_2 作 OB 的垂线 O_2E , 垂足为 E . 则

$$O_1O_2 = R + r = 4 + r, O_1D = R - r = 4 - r, OO_2 = 2R - r = 8 - r.$$

$$\because O_1O_2^2 - O_1D^2 = O_2D^2 = OO_2^2 - OD^2.$$

$$\therefore (4 + r)^2 - (4 - r)^2 = (8 - r)^2 - r^2.$$

$$\therefore r = 2.$$

$$\begin{aligned} \therefore OE &= O_2D = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1D^2} \\ &= \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} \\ &= \sqrt{(4 + r)^2 - (4 - r)^2} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

【评析】 (1) 有关两圆公切线问题, 常常过其中一个圆心作公切线的平行线, 与连心线构成直角三角形, 这样就可运用直角三角形的性质进行论证或计算.

(2) 和两圆都相切的直线, 叫做两圆的公切线. 两圆在公切线的同旁时, 这样的公切线叫做外公切线 (本题的 OE 即为外公切线); 两圆在公切线的两旁时, 这

样的公切线叫做内公切线.



发散思维应用

典型例题 1

如图 3-33 所示, A 、 B 、 C 三点表示三个村庄, 为了解决村民子女就近入学的问题, 计划新建一所小学, 要使学校到三个村庄的距离相等, 请你用尺规确定学校的位置.

分析 本题实质是求作 $\triangle ABC$ 的外心的问题, 只要抓住两边的中垂线即可.

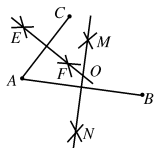


图 3-33

解答 作法 (1) 连结 AB , AC ;

(2) 分别以 A 、 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧, 两弧相交于 M 、 N , 作直线 MN ;

(3) 以 A 、 C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径画弧, 两弧相交于 E 、 F , 作直线 EF 交 MN 于 O , 点 O 即为所求作的学校位置.

【题型发散】

发散 1 看一看, 你能选出正确答案吗?

(1)(2004·北京东城区) 如图 3-34 所示, PA 切 $\odot O$ 于点 A , PBC 是经过点 O 的割线. 若 $\angle P = 30^\circ$, 则 $\widehat{AB}$ 的度数为 ()

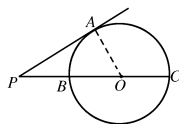


图 3-34

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

(2) 一个圆的周长为 a cm, 面积为 a cm^2 , 如果一条直线到圆心的距离为 π cm, 则这条直线与该圆的位置关系是 ()

- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不能确定

(1) **分析** 用直接法.

要求 $\widehat{AB}$ 的度数, 只要求出 $\widehat{AB}$ 所对的圆心角的度数即可. 为此连结 OA , 因为 PA 是 $\odot O$ 的切线, 可得 $OA \perp PA$, 即 $\angle P + \angle AOP = 90^\circ$. $\therefore \widehat{AB}$ 的度数为 60° .

故本题应选 B.

(2) **分析** 用特殊值法.

因为圆的周长与它的面积数相等时, 只有半径为 2 cm 才成立, 所以根据直线与圆的位置关系判定, 在 $\pi \text{ cm} > 2 \text{ cm}$ 时.

故本题应选 A.

发散 2 想一想, 填什么最准确?

(1) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 $AB = 6 \text{ cm}$, 直角边 $AC = 3 \text{ cm}$.

① 以 C 为圆心, 2 cm 长为半径的圆和 AB 的位置关系是_____;

② 以 C 为圆心, 4 cm 长为半径的圆和 AB 的位置关系是_____;

③ 如果以 C 为圆心的圆和 AB 相切, 则半径长为_____.

(2) 如图 3-35 所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, DE 切 $\odot O$ 于点 C , 欲使 $AE \perp DE$, 需添加的一个条件是_____ (不另添加线和点).

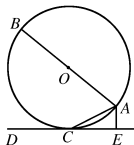


图 3-35

解 (1) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$, $BC = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$.

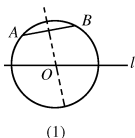
设 C 点到 AB 的距离为 d , $d = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

① $\because d = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 2, \therefore$ 圆和 AB 相离;

② $\because d = \frac{3\sqrt{3}}{2} < 4, \therefore$ 圆和 AB 相交;

③ 若圆 C 与 AB 相切, 则半径长为 $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$.

(2) 欲使 $AE \perp DE$, 只要 $\angle CAE + \angle ACE = 90^\circ$ 即可. 由于 AB 是 $\odot O$ 的直径, 故 $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle B + \angle BAC = 90^\circ$. 又 DE 是切线, 因此 $\angle ACE = \angle B$, 所以只要 $\angle BAC = \angle CAE$ 即可.



(1)

【纵横发散】

发散 3 作一个圆, 使它经过已知点 A 和 B , 并且圆心在已知直线 l 上.

分析 直线 l 与 AB 两点所在直线的位置关系不同, 作圆的情况就不一样, 因此应依位置关系的不同而分别讨论.

作法 (1) 当直线 l 和 AB 斜交或重合时, 只要作线段 AB 的垂直平分线与 l 交于 O , 以 O 为圆心, OA 为半径作圆即为所求作的圆, 这样的圆只有一个 (如图 3-36(1) 所示).

(2) 当直线 l 和 AB 垂直但不经过 AB 的中点时, 这样的圆不能作出.

(3) 当直线 l 是线段 AB 的垂直平分线时, 这样的圆可作无数个 (如图 3-36(2) 所示).

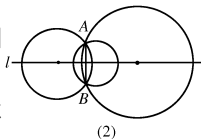


图 3-36

解法指导 作图题关键是确定圆心,而三点(不在一条直线上)才能惟一确定圆,因此,与点的位置有关系,当位置不确定时,应分类讨论.

发散 4 如图3-37所示,已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是 $\odot O$ 的切线,切点为 B , OC 平行于弦 AD . 求证: DC 是 $\odot O$ 的切线.

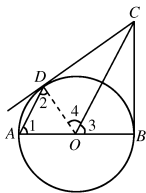


图 3-37

证明 连结 OD ,

$$\left. \begin{array}{l} OA = OD \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \\ AD \parallel OC \Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle 2 = \angle 4 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 3 = \angle 4.$$

$$\left. \begin{array}{l} OB = OD \\ \angle 3 = \angle 4 \\ OC = OC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle ODC \Rightarrow \angle OBC = \angle ODC.$$

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OBC = 90^\circ$.

$\therefore \angle ODC = 90^\circ$.

$\therefore DC$ 是 $\odot O$ 的切线.

【解法发散】

发散 5 如图3-38所示, CF 是 $\odot O$ 的直径, CB 为 $\odot O$ 的弦, CB 的延长线与过点 F 的 $\odot O$ 的切线交于点 P .

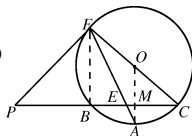


图 3-38

(1) 若 $\angle P = 45^\circ$, $PF = 10$, 求 $\odot O$ 半径的长.

(2) 若 E 为 BC 上一点, 且满足 $PE^2 = PB \cdot PC$, 连结

FE 并延长交 $\odot O$ 于点 A , 求证: 点 A 为 $\widehat{BC}$ 的中点.

解 (1) $\because PF$ 是 $\odot O$ 切线, CF 为直径,

$\therefore \angle PFC = 90^\circ$.

$\because \angle P = 45^\circ$, $PF = 10$, $\therefore CF = PF = 10$.

$\therefore \odot O$ 的半径长为 5.

(2) **证法 1** 连结 OA , 交 BC 于点 M .

$\because PF$ 为 $\odot O$ 的切线, CF 为直径,

$\therefore PF^2 = PB \cdot PC$, $\angle PFC = 90^\circ$.

$\because PE^2 = PB \cdot PC$, $\therefore PF = PE$, $\therefore \angle PFE = \angle PEF$.

$\because OA = OF$, $\therefore \angle OAF = \angle OFA$,

$\because \angle PEF = \angle AEM$, 又 $\because \angle OFE + \angle PFE = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEM + \angle EAM = 90^\circ$, $\therefore OA \perp BC$.

$\therefore A$ 为 $\widehat{BC}$ 的中点.

证法 2 连结 FB , 同证法 1 可证明 $PF = PE$, $\therefore \angle PFA = \angle PEF$.

$$\because \angle PFA = \angle PFB + \angle BFA, \angle PEF = \angle C + \angle AFC.$$

$$\text{又} \because \angle PFB = \angle C, \therefore \angle BFA = \angle AFC.$$

$\therefore A$ 为 $\widehat{BC}$ 的中点.

【迁移发散】

发散 6 如图 3-39 所示, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, a, b, c 为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边, P 为内心, $PD \perp BC$ 于 D , $PE \perp AB$ 于 E , $PF \perp AC$ 于 F . 求证: BD, AE 是方程 $2x^2 - 2cx + ab = 0$ 的根.

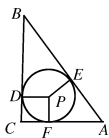


图 3-39

证法 1 $\because P$ 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内切圆的圆心,

$\therefore PD \perp BC, PE \perp AB, PF \perp AC$, 由切线长定理可求得

$$\left. \begin{aligned} BD &= \frac{a+c-b}{2} \\ AE &= \frac{b+c-a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BD \cdot AE = \frac{(a+c-b)(b+c-a)}{4} \\ = \frac{[c+(a-b)][c-(a-b)]}{4} \\ = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{ab}{2}. \quad (1)$$

$$\text{又} \because BD + EA = BE + EA = c, \therefore BD + EA = -\frac{-2c}{2}. \quad (2)$$

由①②式可知 BD, AE 是方程 $2x^2 - 2cx + ab = 0$ 的根.

证法 2 设 $\odot P$ 半径为 r . 根据直角三角形内切圆半径等于两条直角边之和减去斜边的一半, 可知 $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$.

又由勾股定理可知

$$b^2 + a^2 = (AE + BE)^2 = AE^2 + BE^2 + 2AE \cdot BE, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} b^2 + a^2 &= (AF + FC)^2 + (BD + CD)^2 = (AE + r)^2 + (BE + r)^2 \\ &= AE^2 + 2r \cdot AE + r^2 + BE^2 + 2r \cdot BE + r^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{由①, ②可得 } AE \cdot BE = r(AE + BE) + r^2 = r \cdot c + r^2 = r(c+r).$$

$$\text{又由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r \Rightarrow r = \frac{ab}{a+b+c}.$$

把 $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$ 和 $r = \frac{ab}{a+b+c}$ 代入,

$$\begin{aligned} AE \cdot BE &= r(c+r) = \frac{ab}{a+b+c} \left[c + \frac{1}{2}(a+b-c) \right] \\ &= \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}ab. \end{aligned}$$

$$\because BD + EA = c, AE \cdot BE = AE \cdot BD = \frac{1}{2}ab,$$

$\therefore BD, AE$ 是方程 $2x^2 - 2cx + ab = 0$ 的根.

【构造发散】

发散7 如图3-40所示,在锐角 $\triangle ABC$ 中,求证:

$$\tan \angle CAB \cdot \tan \angle CBA > 1.$$

分析 本题构造辅助圆 AMB ,利用锐角三角函数证明.

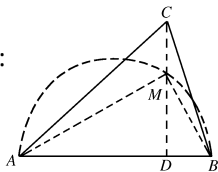


图 3-40

证明 以 AB 为直径作半圆,作 $CD \perp AB$ 于 D ,交半圆于 M ,连结 AM 、 MB ,则 $\angle AMB = 90^\circ$,

$$\therefore MD^2 = AD \cdot DB.$$

$$\because \angle ACB < 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 C 在半圆外,即 $CD > MD$.

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{CD}{AD}, \tan \angle CBA = \frac{CD}{DB},$$

$$\therefore \tan \angle CAB \cdot \tan \angle CBA = \frac{CD^2}{AD \cdot DB} = \left(\frac{CD}{MD} \right)^2 > 1.$$

【综合发散】

发散8 如图3-41所示,在平面直角坐标系中,以点 $A(4,0)$ 为圆心, AO 为半径的圆交 x 轴于点 B ,设 M 为 x 轴上方的圆上一点,且 OM 的长是 $\frac{4}{3}\pi$,点 P 为 OM 上任意一点(P 不与 O 点重合),连结 AP 并延长交 y 轴于点 C ,连结 BP 并延长交 y 轴于点 D .

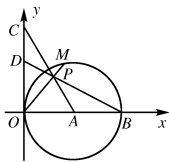


图 3-41

(1)当点 P 在 OM 上运动时,设 $PC = x$, $\frac{OC}{OD} = y$,求 y 与 x 之间的函数关系式及自变量 x 的取值范围;

(2)当点 P 运动到某一位置时,恰使 $OB = 3OD$,求此时 AC 所在直线的解析式.

解 (1)延长 PA 交 $\odot A$ 于 E ,连结 OE .

$$\because AO = AE, \therefore \angle BOE = \angle E.$$

$$\text{又} \because \angle PBO = \angle E, \therefore \angle BOE = \angle PBO.$$

$$\therefore DB \parallel OE, \therefore \frac{OC}{OD} = \frac{CE}{PE}.$$

$$\text{又} \because \frac{OC}{OD} = y, PC = x, PE = 2OA = 8, CE = CP + PE = x + 8,$$

$$\therefore y = \frac{x+8}{8}, \text{即 } y = \frac{1}{8}x + 1.$$

当点 P 运动到点 M 时,连结 AM 并延长交 y 轴于点 F .设 $\angle OAM = n^\circ$.

$$\because P \text{ 在 } OM \text{ 上运动}, \therefore CP = x > 0.$$

$$\therefore OM \text{ 的长为 } \frac{4}{3}\pi, \frac{n\pi R}{180} = \frac{n\pi \cdot 4}{180} = \frac{4}{3}\pi,$$

$$\therefore n = 60 \text{ 即 } \angle OAM = 60^\circ.$$

$$\therefore OC \perp OB, \therefore AF = 2OA = 8.$$

$$\therefore MF = 4, \therefore x \leq 4.$$

$\therefore$ 当点 P 在 $\widehat{OM}$ 上运动时, 自变量 x 的取值范围是 $0 < x \leq 4$.

$$(2) \text{ 当点 } P \text{ 运动到恰使 } OB = 3OD \text{ 时, 即 } OD = \frac{1}{3}OB = \frac{8}{3},$$

$$\therefore \frac{OC}{OD} = y, \therefore OC = OD \cdot y = \frac{8}{3} \cdot \frac{x+8}{8} = \frac{x+8}{3}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOC \text{ 中, } OA^2 + OC^2 = AC^2,$$

$$\therefore \left(\frac{x+8}{3}\right)^2 + 4^2 = (x+4)^2.$$

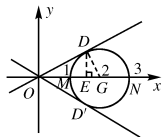
$$\text{整理, 得 } x^2 + 7x - 8 = 0.$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = -8 (\text{舍去}), \therefore OC = \frac{1+8}{3} = 3. \therefore C \text{ 点坐标为 } (0, 3).$$

设过 A, C 两点的直线解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} b = 3, \\ 0 = 4k + b. \end{cases} \therefore \begin{cases} k = -\frac{3}{4}, \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + 3.$$



【探究发散】

发散 9 如图 3-42 所示, 已知一个二次函数的图象经过 $A(4, -3), B(2, 1)$ 和 $C(-1, -8)$ 三点.

图 3-42

(1) 求这个二次函数的解析式以及它的图象与 x 轴的交点 M, N (M 在 N 的左边) 的坐标;

(2) 若以线段 M, N 为直径作 $\odot G$, 过坐标原点 O 作 $\odot G$ 的切线 OD , 切点为 D , 求 OD 的长;

(3) 求直线 OD 的解析式;

(4) 在直线 OD 上是否存在点 P , 使得 $\triangle MNP$ 是直角三角形? 如果存在, 求出点 P 的坐标 (只需写出结果, 不必写出解答过程); 如果不存在, 请说明理由.

解 (1) 设所求的二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

$\therefore$ 抛物线经过 $A(4, -3), B(2, 1)$ 和 $C(-1, -8)$ 三点,

$$\therefore \begin{cases} -3 = 16a + 4b + c, \\ 1 = 4a + 2b + c, \\ -8 = a - b + c. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 4, \\ c = -3. \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线为 $y = -x^2 + 4x - 3$.

令 $y = 0$, 得 $-x^2 + 4x - 3 = 0$, 解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的交点坐标为 $M(1, 0)$, $N(3, 0)$.

(2) 过原点 O 作 $\odot G$ 的切线, 切点为 D .

易知 $OM = 1$, $ON = 3$.

由 $\triangle ODM \sim \triangle ODN$ 得

$$OD^2 = OM \cdot ON = 1 \times 3.$$

$\therefore OD = \sqrt{3}$. 即所求的切线长为 $\sqrt{3}$.

(3) 如图 3-42 所示, 连结 DG , 则 $\angle ODG = 90^\circ$, $DG = 1$.

$\therefore OG = 2$,

$\therefore \angle DOG = 30^\circ$.

过 D 作 $DE \perp OG$, 垂足为 E , 则

$$DE = OD \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, OE = OD \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{2}.$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

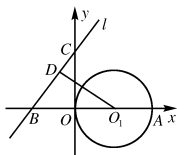
从而直线 OD 的解析式为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

(4) 在直线 OD 上存在点 P , 使 $\triangle MNP$ 是直角三角形. 所求 P 点的坐标为

$\left(1, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $(3, \pm \sqrt{3})$ 或 $\left(\frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

典型例题 2

如图 3-43 所示的直角坐标系中, 点 O_1 的坐标为 $(1, 0)$, $\odot O_1$ 与 x 轴交于原点 O 和点 A , 又点 B, C 的坐标分别为 $(-1, 0)$, $(0, b)$, 且 $0 < b < 3$, 直线 l 是过 B, C 点的直线.



(1) 过点 O_1 作 $O_1D \perp$ 直线 l , 交 l 于点 D . 若 $\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BDO_1}} =$

a , 试求 a 与 b 的函数关系式及 a 的取值范围;

(2) 当 D 点是 $\odot O_1$ 的切点时, 求直线 l 的解析式.

图 3-43

解 (1) $\because \angle CBO = \angle O_1BD$,

$\therefore \text{Rt}\triangle BOC \sim \text{Rt}\triangle BDO_1$.

$$\therefore \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BDO_1}} = \frac{BC^2}{BO_1^2} = a.$$

而 $BC^2 = 1 + b^2$, $BO_1 = 2$, $\therefore \frac{1 + b^2}{2^2} = a$.

$$\therefore a = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}.$$

$$\because 0 < b < 3, \therefore \frac{1}{4} < a < \frac{5}{2}.$$

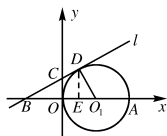


图 3-44

(2) D 是 $\odot O_1$ 的切点时, 如图 3-44 所示, 过 D 作 $DE \perp BO_1$ 交 BO_1 于点 E , 则 $\text{Rt}\triangle DEO_1 \sim \text{Rt}\triangle BDO_1$,

$$\therefore \frac{O_1D}{O_1B} = \frac{O_1E}{O_1D} \text{ 即 } \frac{1}{2} = \frac{O_1E}{1}.$$

$$\therefore O_1E = \frac{1}{2}, OE = OO_1 - O_1E = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle O_1DE \text{ 中, } DE = \sqrt{O_1D^2 - O_1E^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore D \text{ 点坐标为 } \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

设直线 l 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} 0 = -k + b, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}k + b. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ b = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【题型发散】

发散 1 看一看, 你能选出正确答案吗?

(1) $\triangle ABC$ 的三边长分别为 6, 8, 10, 并且以 A, B, C 三点分别为圆心, 作两两相外切的圆, 那么这三个圆的半径分别为 ()

- A. 3, 4, 5 B. 2, 4, 6 C. 6, 8, 10 D. 4, 6, 8

(2) 已知两圆的半径分别是 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 的两个根, 圆心距是方程 $x^2 - \sqrt{2}x = 0$ 的一个根, 则两圆的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 内含 C. 外切 D. 内切

(1) 分析 用验证法.

解 设 $\odot A$ 的半径为 r_1 , $\odot B$ 的半径为 r_2 , $\odot C$ 的半径为 r_3 , 则

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 8, \\ r_2 + r_3 = 10, \\ r_1 + r_3 = 6. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} r_1 = 2, \\ r_2 = 6, \\ r_3 = 4. \end{cases}$$

故本题应选 B.

(2) 分析 用特殊值法.

解 $\because$ 方程 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 的两个根为 $\sqrt{2} + 1$ 和 $\sqrt{2} - 1$, 方程 $x^2 - \sqrt{2}x = 0$ 的正根为 $\sqrt{2}$, 所以圆心距 $\sqrt{2}$ 小于两个圆的半径差, 即 $\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2$, 故本题应选 B.

发散 2 想一想 填什么最准确?

(1) 已知小圆半径是大圆半径的 $\frac{1}{3}$, 两圆的圆心距是小圆半径的 2 倍, 则两圆的位置关系是_____.

(2) 已知两同心圆半径的比为 1:3, AC 是大圆的直径, BC 是与小圆相切的大圆的弦, AB 为 12, 则大圆的半径为_____.

解 (1) 内切. 设小圆的半径为 r , 则大圆的半径为 $3r$, 两圆的圆心距为 $2r$, 即圆心距等于两半径的差为两圆内切的位置关系.

(2) 设 BC 与小圆相切于 D , 同心圆的圆心为 O , 连结 OD , 则 $OD \parallel AB$, 可知 $OD = \frac{1}{2}AB$, 即小圆的半径为 6, 又两圆的半径的比为 1:3, 则大圆的半径为 18.

【纵横发散】

发散 3 如图 3-45 所示, P 是以 r 为半径的 $\odot O$ 外一点, T 是 $\odot O$ 上一点, PO 交 $\odot O$ 于 A 点, $\cos \angle OPT = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle OAT = 60^\circ$, PBC 是 $\odot O$ 的割线.

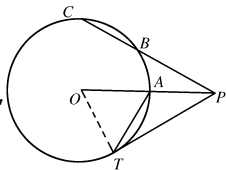


图 3-45

(1) 求证: PT 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 设 PB 为 x , PC 为 y , 求 y 与 x 的函数解析式, 并指出自变量 x 的取值范围;

(3) 在(2)中, 若 x, y 是关于 z 的方程 $4z^2 - 14rz + k = 0$ 的两个根, 且弦长 $BC = 1$, 求半径 r .

(1) 证明 连结 OT ,

$$\because \cos \angle OPT = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \angle OPT = 30^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle OAT = 60^\circ, \therefore \angle ATP = 30^\circ.$$

$$\because OT = OA, \therefore \angle OTA = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle OTP = 90^\circ, PT \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.}$$

(2) 解 PT 是 $\odot O$ 的切线, PBC 是割线, $\therefore PT^2 = PB \cdot PC$.

$$\because PT^2 = PO^2 - OT^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2, \therefore 3r^2 = xy, y = \frac{3r^2}{x}.$$

$$\because PA < x = PB \leq PT,$$

由(1)知 $\triangle OAT$ 是等边三角形, $PA = AT = OA = r$,

$$\therefore \text{自变量 } x \text{ 的取值范围为 } r \leq x < \sqrt{3}r.$$

(3)解 $\because x, y$ 是方程 $4z^2 - 14rz + k = 0$ 的两根, $\therefore xy = \frac{k}{4}$. 由(2)知 $\frac{k}{4} = 3r^2$, $k = 12r^2$, 即 x, y 是方程 $4z^2 - 14rz + 12r^2 = 0$ 的两根.

解得 $x = \frac{3}{2}r$, $y = 2r$ 或 $x = 2r$, $y = \frac{3}{2}r$.

由函数自变量的取值范围是 $r \leq x < \sqrt{3}r$, 而 $x = 2r > \sqrt{3}r$, 故舍去.

$\therefore$ 方程的解是 $x = \frac{3}{2}r$, $y = 2r$.

$\because BC = y - x = 2r - \frac{3}{2}r = \frac{1}{2}r = 1$, 故 $r = 2$.

【解法发散】

发散4 如图3-46所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BE 是角平分线, $DE \perp BE$ 交 AB 于 D , $\odot O$ 是 $\triangle BDE$ 的外接圆.

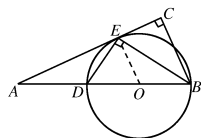


图 3-46

(1)求证: AC 是 $\odot O$ 的切线.

(2)若 $AD = 6$, $AE = 6\sqrt{2}$, 求 DE 的长.

(1)证明 连结 OE ,

$\because \odot O$ 是 $\triangle BDE$ 的外接圆, $\angle DEB = 90^\circ$,

$\therefore BD$ 是 $\odot O$ 的直径.

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle CBE = \angle OBE$.

$\because OB = OE$, $\therefore \angle OBE = \angle OEB$.

$\therefore \angle OEB = \angle CBE$.

$\therefore OE \parallel BC$; $\because \angle C = 90^\circ$, $\therefore \angle AEO = 90^\circ$.

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2)解法1 $\because AE$ 是 $\odot O$ 的切线, $AE = 6\sqrt{2}$, $AD = 6$.

$\therefore AE^2 = AD \cdot AB$, $\therefore AB = \frac{AE^2}{AD} = \frac{(6\sqrt{2})^2}{6} = 12$.

$\therefore BD = AB - AD = 12 - 6 = 6$.

$\because \angle AED = \angle ABE$, $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABE$, $\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AE}{AB} = \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

设 $DE = \sqrt{2}x$, $BE = 2x$,

$\because DE^2 + BE^2 = BD^2$,

$\therefore 2x^2 + 4x^2 = 36$, 解得 $x = \pm\sqrt{6}$ (负值舍去).

$\therefore DE = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$.

解法2 同解法1 得 $AB = 12$, $\therefore BD = AB - AD = 12 - 6 = 6$.

$$\therefore DO = OB = OE = 3 .$$

$$\because OE \parallel BC \therefore \frac{BC}{OE} = \frac{AB}{AO} = \frac{AC}{AE} ,$$

$$\therefore BC = \frac{AB \cdot OE}{AO} = \frac{12 \times 3}{9} = 4 ,$$

$$AC = \frac{AB \cdot AE}{AO} = \frac{12 \times 6\sqrt{2}}{9} = 8\sqrt{2} .$$

$$\therefore EC = AC - AE = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2} .$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCE \text{ 中 } , BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{16 + 8} = 2\sqrt{6} .$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDE \text{ 中 } , DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3} .$$

【转化发散】

发散5 如图3-47所示, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$,以 AD , BD 为直径分别作半圆交 AC 于 E 、交 BC 于 F .求证: $AD \cdot BD = EF^2$, $AE \cdot BF = CE \cdot CF$.

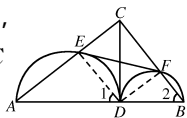


图 3-47

分析 本题利用相似三角形的性质把比例式化为等积式.

证明 连结 DE , DF ,

$$\because CD \perp AB , AC \perp BC ,$$

$$\text{又} \because AD , BD \text{ 为直径 } ,$$

$$\therefore DE \perp AC , DF \perp BC .$$

$$\therefore \text{四边形 } EDFC \text{ 为矩形 } , \therefore CD = EF .$$

$$\text{又} \because CD^2 = AD \cdot BD ,$$

$$\therefore AD \cdot BD = CD^2 = EF^2 .$$

$$\text{又} \because ED \parallel BC , \therefore \angle 1 = \angle 2 .$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \sim \text{Rt}\triangle DBF .$$

$$\therefore AE : DF = ED : FB .$$

$$\text{又} \because DF = CE , ED = CF ,$$

$$\therefore AE : CE = CF : FB .$$

$$\therefore AE \cdot BF = CE \cdot CF .$$

【综合发散】

发散6 如图3-48所示 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点为 P ,与 x 轴的两个交点为 M 、 N (点 M 在点 N 的左侧) $\triangle PMN$ 的三个内角 $\angle P$, $\angle M$, $\angle N$ 所对的三边长依次为 p , m , n .若关于 x 的一元二次方程 $(p - m)x^2 + 2nx + (p + m) = 0$ 有两个相等的实数根.

(1) 试判定 $\triangle PMN$ 的形状;

(2) 当顶点 P 的坐标为 $(2, -1)$ 时, 求抛物线的解析式;

解 (1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(p-m)x^2 + 2nx + (p+m) = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (2n)^2 - 4(p-m)(p+m) = 0,$$

$$\text{即 } p^2 = m^2 + n^2.$$

又由二次函数的对称性可知, 这个三角形是等腰直角三角形.

(2) $\because$ 抛物线的顶点坐标为 $(2, -1)$, 见图 3-48.

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y = a(x-2)^2 - 1$,

$$\text{即 } y = ax^2 - 4ax + 4a - 1,$$

由(1)知 $\triangle MPN$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore PM = PN, \therefore \frac{1}{2}MN = 1.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{16a^2 - 4a(4a-1)}}{|a|} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$\therefore M(-1, 0), N(1, 0). \text{ 则 } a = 1.$$

得解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$

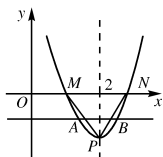


图 3-48

【构造发散】

发散 7 如图 3-49 所示, 已知 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外切于 P , 过 P 作直线 AB 交 $\odot O$ 于 A , 交 $\odot O'$ 于 B , 过 B 引 $\odot O'$ 切线 BCD 交 $\odot O$ 于 C, D , $\odot O$ 直径 AE . 求证: $AE \perp BD$.

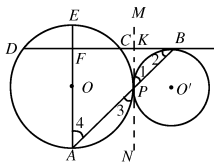


图 3-49

分析 作两圆公切线 MN , 构造对顶角 $\angle 1 = \angle 3$ 弦切角 $\angle 1 = \angle 2$, 从而把位置分别在两个圆中的 $\angle 2$ 和 $\angle 4$ 转移集中到同一个 $\odot O$ 中, 有利于证明结论.

证明 设 AE 交 BD 于 F ,

作两圆内公切线 MN 交 BD 于 K , 则 $KP = KB$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3.$$

$$\because AE \text{ 为直径}, \therefore \widehat{AP} + \widehat{PCE} = 180^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle 3 = \frac{1}{2}\widehat{AP}, \angle 4 = \frac{1}{2}\widehat{PCE},$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = \frac{1}{2}(\widehat{AP} + \widehat{PCE}) = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ, \therefore \angle AFB = 90^\circ, \therefore AF \perp BD,$$

即 $AE \perp BD$.

【探究发散】

发散 8 如图 3-50 所示, O 是已知线段 AB 上一点, 以 OB 为半径的 $\odot O$ 交线 AB 于点 C , 以线段 AO 为直径的半圆交 $\odot O$ 于点 D , 过点 B 作 AB 的垂线与 AD 的延长线交于点 E .

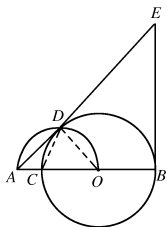


图 3-50

- (1) 求证: AE 切 $\odot O$ 于点 D ;
- (2) 若 $AC = 2$, 且 AC 、 AD 的长是关于 x 的方程 $x^2 - kx + 4\sqrt{5} = 0$ 的两根, 求线段 EB 的长;
- (3) 当点 O 位于线段 AB 何处时, $\triangle ODC$ 恰好是等边三角形? 并说明理由.

(1) 证明 连结 OD , $\because AO$ 为直径,

$\therefore \angle ODA = 90^\circ$, $\therefore OD \perp AE$.

又 $\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径, $\therefore AE$ 切 $\odot O$ 于点 D .

(2) 解 $\because AC = 2$, AC 、 AD 是所给方程的两根

$$\therefore 2AD = 4\sqrt{5}, \therefore AD = 2\sqrt{5}.$$

由切割线定理, 得 $AD^2 = AC \cdot AB$,

$$\therefore AB = \frac{AD^2}{AC} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{2} = 10,$$

$$BC = AB - AC = 10 - 2 = 8.$$

$$\therefore OD = 4.$$

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle AEB$ 中, $\because \angle A = \angle A$,

又 $\because EB \perp AB$, $\therefore \angle EBA = \angle ODA = 90^\circ$.

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle AEB, \therefore \frac{OD}{BE} = \frac{AD}{AB}.$$

$$\therefore BE = \frac{OD \cdot AB}{AD} = \frac{4 \times 10}{2\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

- (3) 当点 O 位于线段 AB 上靠近 B 的三等分点处时, $\triangle ODC$ 恰好为等边三角形.

证明 $\because OB = OC = \frac{1}{3}AB$, $\therefore AC = \frac{1}{3}AB$.

$$\therefore AC = OC = OD.$$

$\therefore C$ 为以 AO 为直径的圆的圆心,

$\therefore \triangle ODC$ 是等边三角形.



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边中线为 6.5 , 它的周长为 30 , 则 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内切圆半径为 ()

- A. 6.5 B. 8.5 C. 4 D. 2

2. 圆外一点到圆心的距离为 d , 圆的半径为 r , 下面结论错误的一个是 ()

A. 此点到圆的最短距离是 $d - r$

B. 此点到圆的最长距离是 $d + r$

C. 此点到圆的切线长为 $\sqrt{d^2 - r^2}$

D. 此点向圆引两条切线 , 切点间的距离是 $2r$

3. 若两圆半径分别为 $R, r (R > r)$, 其圆心距为 d , 且 $R^2 + d^2 - r^2 = 2Rd$, 则两圆的位置关系是 ()

A. 内切

B. 内切或外切

C. 外切

D. 相交

4. 如图 3-51 所示 , 已知 $\odot O$ 的两半径 OA, OB 互相垂直 , 过 A 点的直线交 OB 于 P , 交 $\odot O$ 于 Q , 过 Q 点引圆的切线交 OB 的延长线于 C , 并使 $QP = QC$, 则 $\angle A$ 的度数为 _____ .

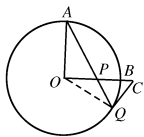


图 3-51

5. 两圆的半径为 R 和 r , 圆心距为 d , 若 R, r 和 d 可组成一个三角形 , 则这两圆的位置关系一定是 _____ .

【生活发散】

1. 东海某小岛上有一灯塔 A , 已知 A 塔附近方圆 25 海里范围内有暗礁 , 我 110 舰在 O 点处测得 A 塔在其北偏西 60° 方向 , 向正西方向航行 20 海里到达 B 处 , 测得 A 在其西北方向 . 如果该舰继续航行 , 是否有触礁的危险 ? 请说明理由 . (参考数据 $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$)

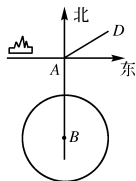


图 3-52

2. 如图 3-52 所示 , 一艘轮船以 20 海里 / 时的速度由西向东航行 , 途中接到台风警报 , 台风中心正以 40 海里 / 时的速度由南向北移动 , 距离台风中心 $20\sqrt{10}$ 海里的圆形区域 (包括边界) 都属台风区 . 当轮船到 A 处时 , 测

得台风中心移到位于点 A 正南方向的 B 处,且 $AB = 100$ 海里.

(1)若这艘轮船自 A 处按原速度继续航行,在途中会不会遇到台风?若会,试求轮船初遇台风的时间;若不,请说明理由.

(2)现轮船自 A 处立即提高船速,向位于北偏东 60° 方向,相距 60 海里的 D 港驶去.为使台风到来之前到达 D 港,问船速至少应提高多少?(提高的船速取整数, $\sqrt{13} = 3.6$)

【纵横发散】

1. 如图 3-53 所示,已知 D 为 $\triangle ABC$ 外接圆 BC 弧的中点,在 DA 上取 $DI = BD$. 求证: I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

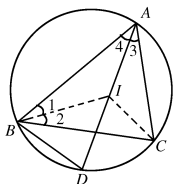


图 3-53

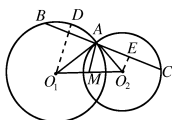


图 3-54

2. 如图 3-54 所示, A 是 $\odot O_1, \odot O_2$ 的一个交点,点 M 是 O_1O_2 的中点,过点 A 的直线 BC 垂直于 MA ,分别交 $\odot O_1, \odot O_2$ 于 B, C .

(1)求证: $AB = AC$;

(2)若 O_1A 切 $\odot O_2$ 于点 A ,弦 AB, AC 的弦心距分别为 d_1, d_2 ,求证: $d_1 + d_2 = O_1O_2$;

(3)在(2)条件下,若 $d_1 d_2 = 1$,设 $\odot O_1, \odot O_2$ 的半径分别为 R, r ,求证: $R^2 + r^2 = R^2 r^2$.

【构造发散】

(2005·黄冈市)如图 3-55 所示,已知 $\odot O$ 的弦 AB 垂直直径 CD 垂足为 F ,点 E 在 AB 上,且 $EA = EC$.

(1)求证: $AC^2 = AE \cdot AB$.

(2)延长 EC 到点 P ,连结 PB ,若 $PB = PE$,试判断 PB 与 $\odot O$ 的位置关系,并说明理由.

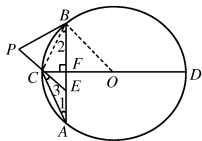


图 3-55

【分解发散】

如图 3-56 所示,已知半圆 $\odot O$ 半径为 R . 求从半圆中去掉两个最大等圆后余下阴影部分的面积 $S_{\text{影}}$.

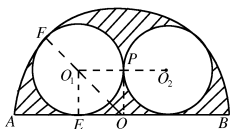


图 3-56

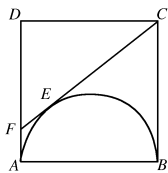


图 3-57

【迁移发散】

如图 3-57 所示, 若以正方形 $ABCD$ 的 AB 边为直径作半圆 O , 过 C 作 CF 切半圆于 E , 交 AD 于 F , 求证: $\triangle CFD$ 的边长比为 $3:4:5$.

【综合发散】

1. 如图 3-58 所示, 已知 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 相交于 A, B 两点, 过点 A 作 $\odot O'$ 的切线交 $\odot O$ 于点 C , 过点 B 作两圆的割线分别交 $\odot O, \odot O'$ 于点 E, F , EF 与 AC 相交于点 P .

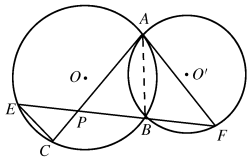


图 3-58

(1) 求证: $PA \cdot EP = PC \cdot PF$;

(2) 求证: $\frac{PE^2}{PC^2} = \frac{PE}{PB}$;

(3) 当 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 为等圆, 且 $PC:CE:EP = 3:4:5$ 时, 求 $\triangle ECP$ 与 $\triangle FAP$ 的面积比值.

2. 如图 3-59 所示, 已知五个圆 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3, \odot O_4, \odot O_5$ 顺次排列且互相外切, 又均与两直线公切, 最小圆 $\odot O_1$ 半径为 8, 最大圆 $\odot O_5$ 半径为 18. 求 $\odot O_2, \odot O_3, \odot O_4$ 的半径 R_2, R_3, R_4 .

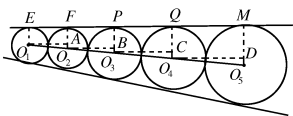


图 3-59

课后习题答案, 你需要吗?

随堂练习(课本第 111 页)

1. 作图略, 锐角三角形的外心在三角形的内部, 直角三角形的外心在斜边上, 钝角三角形的外心在三角形的外部.

习题 3.6(课本第 111 页)

1. 略.

2. 能作出 2 个. 提示: (1) 作 AB 的垂直平分线 l ; (2) 以点 A 为圆心, 以 3 cm 长为半径作弧, 交 l 于点 O_1, O_2 ; (3) 分别以点 O_1, O_2 为圆心, 以 OA 为半径作圆, $\odot O_1, \odot O_2$ 即为所求的圆.

3. 不一定. 因为要想作经过四个点的圆, 应先作经过其中三个点(不在同一条直线上)的圆, 而第四个点到该圆圆心的距离不一定等于半径.

随堂练习(课本第 117 页)

1. $r > 5$.

2. πd . (提示: 圆心经过的路径是与桌面平行的一条直线, 硬币沿直线滚动一圈, 圆心经过的路径长度应等于硬币的周长)

习题 3.7(课本第 117 页)

1. (1) $r > \frac{\sqrt{3}}{2} m$; (2) $r = \frac{\sqrt{3}}{2} m$; (3) $r < \frac{\sqrt{3}}{2} m$.

随堂练习(课本第 120 页)

1. 3 $A, \frac{12}{5}$.

2. 三角形的内心都在三角形的内部.

习题 3.8(课本第 120 页)

1. AB 是 $\odot O$ 的切线. (提示: 连结 OC , 利用等腰三角形“三线合一”定理证明 $OC \perp AB$.)

2. 解: $\because I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心

$$\therefore \angle IBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle ICB = \frac{1}{2} \angle ACB$$

$$\therefore \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$$

$$\text{而 } \angle IBC + \angle ICB + \angle BIC = 180^\circ$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) + \angle BIC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BIC = 124^\circ$$

试一试(课本第 121 页)

提示: 连结 OP , 以 OP 为直径作 $\odot O'$, 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点, 则 PA, PB 即为 $\odot O$ 的切线.

随堂练习(课本第 125 页)

1. 提示: $\odot O'$ 与 $\odot O$ 即可以内切, 也可以外切.

习题 3.9(课本第 127 页)

1. 设 $\odot O_1, \odot O_2$ 的半径分别为 r_1, r_2 , 然后以 O_1 为圆心, 以 $r_1 + r_3$ 为半径作弧, 再以 O_2 为圆心, 以 $r_2 + r_3$ 为半径作弧, 两弧相交于点 O_3 , 点 O_3 就是所求圆的圆心.

2. 略.

3. 2 圈. (提示: 知道圆心轨迹的长度 s 和滚圆的半径 r , 可以按照公式 $\frac{s}{2\pi r}$ 求出滚圆自身滚动的圈数.)



3. 弧长及扇形的面积 圆锥的侧面积



自主学习提示

一、相关知识链接

1. 有关圆的计算.

(1) 与圆有关的线段、角的计算.

圆的计算涉及弦、弦心距、半径、切线、切线的夹角、圆心角、内外公切线等几何量的计算, 往往利用弦心距、切线、公切线、圆心角的性质, 通过添置适当的辅助线, 构造直角三角形, 从而把圆的计算问题转化成求解直角三角形的问题.

(2) 弧长、扇形面积的计算.

弧长、扇形面积的计算与圆周长和圆面积的计算密切相关, 不要死记计算公式, 可先算出 1° 的弧长 $\frac{\pi R}{180}$ 与含 1° 的扇形面积 $\frac{\pi R^2}{360}$, 从而求得含 n° 的弧长 $\frac{n\pi R}{180}$ 和含 n° 的扇形面积 $\frac{n\pi R^2}{360}$.

2. 圆的作图

(1) 圆的基本作图.

主要是平分已知弧、过已知点作圆的切线、作三角形的外接圆与内切圆, 作线段的比例中项、三、四、五、六等分圆周等.

(2) 常用的作图方法.

平移法, 交轨法.

3. 与圆有关的辅助线

与圆有关的辅助线, 包括弦心距、切点与圆心的连线、公切线、连心线、公共弦等几种.

(1) 如圆中有弦的条件, 常作弦心距, 或过弦的一端作半径为辅助线;

(2) 如圆中有直径的条件, 可做出直径上的圆周角;

(3) 如一个圆有切线的条件, 常作过切点的半径(或直径)为辅助线;

(4) 如有两圆相切的条件, 可过切点作两圆的公切线或连心线为辅助线;

(5) 如有两圆相交的条件, 可作两圆的公共弦为辅助线.

二、重难知识点提示

本节重点: 弧长计算公式, 圆锥的侧面展开图及侧面积的计算.

本节难点 扇形面积公式的灵活运用.

发散思维分析



一、弧长公式: $l = \frac{n}{180} \pi R$

因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C = 2\pi R$, 所以 1° 的圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi R}{360}$, 即 $\frac{\pi R}{180}$, 于是可得半径为 R 的圆中, n° 的圆心角所对的弧长 $l = \frac{n\pi R}{180}$.

二、扇形的面积公式

(1) 如果扇形的半径为 R , 圆心角为 n° , 那么扇形面积为: $S_{\text{扇形}} = \frac{n}{360} \pi R^2$.

因为圆心角是 360° 的扇形面积就是圆面积 $S = \pi R^2$, 所以圆心角是 1° 的扇形面积是 $\frac{\pi R^2}{360}$, 故圆心角是 n° 的扇形面积为 $\frac{n}{360} \pi R^2$.

(2) 如果扇形的半径为 R , 弧长为 l , 则扇形的面积为: $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} Rl$.

因为扇形的弧长 $l = \frac{n\pi R}{180}$, 扇形面积为 $\frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n\pi R}{180} \cdot R$, 所以, 扇形的面积为 $\frac{1}{2} Rl$.

三、圆锥的有关概念

圆锥的有关概念: 圆锥可以看成是由一个直角三角形绕一条直角边所在的直线旋转而成的几何体, 这条直线叫做圆锥的轴, 由垂直于轴的边旋转而成的面叫做圆锥的底面, 圆锥的底面是一个圆, 斜边旋转而成的面叫做圆锥的侧面, 从圆锥的顶点到底面的距离叫做圆锥的高, 连接圆锥顶点和底面圆边上任意一点的线段叫做圆锥的母线.

四、圆锥的侧面积与全面积

(1) 圆锥的侧面积: $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} l \cdot 2\pi r = \pi rl$.

其中 l 为母线长, r 为底面圆半径.

(2) 圆锥的全面积(即表面积): $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = \pi r(l + r)$.

其中 l 为母线长, r 为底面圆半径.

下面让我们共同探究用一块扇形铁皮所围成圆锥的底面圆半径是多少:

❖ 与你探究 ❖

【问题】如图 3-60 所示,有一直径是 1 m 的圆形铁皮,要从中剪出一个最大的圆心角是 90° 的扇形 ABC . 求:

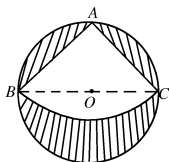


图 3-60

- (1) 被剪掉阴影部分面积;
- (2) 用所留的扇形铁皮围成一个圆锥,该圆锥的底面圆的半径是多少?(结果可用根号)

【准备】由 $\angle BAC$ 为 90° 知 BC 为 $\odot O$ 的直径,于是 $BC=1$ m, 从而在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中易求扇形 ABC 的半径,问题即可解决.

【过程】(1) 连结 BC ,

$\because \angle BAC=90^\circ, \therefore BC$ 为 $\odot O$ 的直径.

$\because AB=AC, BC=1$ m,

$\therefore AB=AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ m,

$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\odot O} - S_{\text{扇形}ABC}$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{90 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{360} = \frac{\pi}{8} \text{ (m}^2\text{)}.$$

(2) 设圆锥的底面半径为 r , $\frac{90\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{180} = 2\pi r$,

$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{8}$ (m).

答:被剪掉阴影部分面积为 $\frac{1}{8}\pi \text{ m}^2$, 圆锥的底面圆半径是 $\frac{\sqrt{2}}{8}$ m.

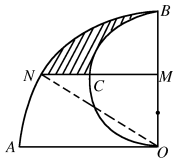
【评析】(1) 要求阴影部分的面积关键在于求出扇形 ABC 的半径;

(2) 要求圆锥的底面半径,关键是借助扇形弧长与圆锥底面圆周长相等列方程求解.

下面让我们再探究怎样求出一个图形中阴影部分的面积:

❖ 与你探究 ❖

【问题】如图 3-61 所示,圆心角 $\angle AOB = 90^\circ$, 半径 $OA = OB = 2$ cm, 以 OB 为直径作半圆 M , 过 M 作 $MN \parallel OA$, 交半圆于 C . 求图中阴影部分的面积 $S_{\text{阴}}$.



【准备】观察图形知,阴影面积为扇形 OBN 的面积, 减去 $S_{\triangle ONM}$ 及扇形 BMC 的面积.

【过程】连结 ON , 在 $\text{Rt}\triangle ONM$ 中, $ON = 2$ cm,

图 3-61

$$OM = 1 \text{ cm},$$

$$\therefore \cos \angle MON = \frac{OM}{ON} = \frac{1}{2} \therefore \angle MON = 60^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle ONM$ 中,

$$MN = \sqrt{ON^2 - OM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

$$\therefore S_{\text{扇形}OBN} = \frac{60\pi \cdot 2^2}{360} = \frac{2\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\therefore S_{\triangle ONM} = \frac{1}{2} MN \cdot OM = \frac{1}{2} \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{扇形}BMC} = \frac{9\pi \cdot 1^2}{360} = \frac{\pi}{4} \text{ cm}^2,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{阴}} &= S_{\text{扇形}OBN} - S_{\triangle ONM} - S_{\text{扇形}BMC} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12} \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

【评析】 求解阴影部分面积问题,关键在于观察识图,将图形正确地进行分割,抓住阴影部分与其他部分的联系.



发散思维应用

典型例题

(2005·河北)工人师傅为检测该厂生产的一种铁球的大小是否符合要求,设计了一个如图 3-62 所示的工件槽,其中工件槽的两个底角均为 90° ,尺寸如图(单位:cm).将形状规则的铁球放入槽内时,若同时具有图 3-62 所示的 A、B、E 三个接触点,该球的大小就符合要求.

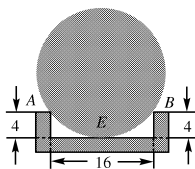


图 3-62

图 3-63 是过球心 O 及 A、B、E 三点的截面示意图.已知 $\odot O$ 的直径就是铁球的直径, AB 是 $\odot O$ 的弦, CD 切 $\odot O$ 于点 E , $AC \perp CD$, $BD \perp CD$.请你结合图 3-62 中的数据,计算这种铁球的直径.

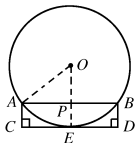


图 3-63

解 连结 OA , OE , 设 OE 与 AB 交于点 P , 如图 3-63 所示, $AC = BD$, $AC \perp CD$, $BD \perp CD$, $\therefore$ 四边形 $ACDB$ 是矩形.

$\therefore CD$ 与 $\odot O$ 切于点 E , OE 为 $\odot O$ 的半径,

$\therefore OE \perp CD$.

$\therefore OE \perp AB$. $\therefore PA = PB$. $\therefore PE = AC$.

$\therefore AB = CD = 16$, $\therefore PA = 8$. $\therefore AC = BD = 4$, $\therefore PE = 4$.

在 $\text{Rt}\triangle OAP$ 中,由勾股定理得 $OA^2 = PA^2 + OP^2$,

即 $OA^2 = 8^2 + (OA - 4)^2$.

解得 $OA = 10$. 所以这种铁球的直径为 20 cm.

点评 连结 EO 并延长交 $\odot O$ 于点 F , AB 与 OE 交于点 P , 利用交弦定理也可求得铁球的直径为 20 cm.

【题型发散】

发散 1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)如图 3-64 所示, AB 、 CD 是 $\odot O$ 的直径, $\odot O$ 的半径为 R , $AB \perp CD$, 以 B 为圆心, 以 BC 为半径作 $\widehat{CED}$, 则 $\widehat{CED}$ 与 $\widehat{CAD}$ 围成的新月形 $ACED$ 的面积为 ()

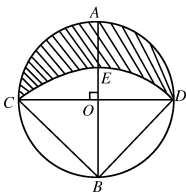


图 3-64

A. $(\pi - 1)R^2$

B. R^2

C. $(\pi + 1)R^2$

D. πR^2

(2)若圆锥的母线长为 5 cm, 底面半径为 3 cm, 则圆锥的表面积为 ()

A. $15\pi \text{ cm}^2$

B. $24\pi \text{ cm}^2$

C. $30\pi \text{ cm}^2$

D. $39\pi \text{ cm}^2$

(1)分析 用数形结合法.

解 把不规则图形分割成几个规则的图形, 是求阴影部分面积的常规思路, 但其分割方法一般不惟一.

$$S_{\text{阴影}ACED} = \frac{1}{2} S_{\odot O} - S_{\text{弓形}CED}.$$

$$\because S_{\text{弓形}CED} = S_{\text{扇形}BCED} - S_{\triangle BCD},$$

$$S_{\text{扇形}BCED} = \frac{90 \times \pi (BC)^2}{360} = \frac{\pi}{4} (\sqrt{2}R)^2 = \frac{\pi}{2} R^2,$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}ACED} = \frac{\pi}{2} R^2 - \frac{\pi}{2} R^2 + R^2 = R^2.$$

故本题应选 B.

(2)分析 用直接法.

解 $\because$ 圆锥的底面半径为 3 cm,

$\therefore$ 圆锥底面周长为 6π cm.

$\therefore$ 圆锥的侧面积 $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \times 6\pi \times 5 = 15\pi (\text{cm}^2)$.

$\therefore$ 圆锥的表面积 $S_{\text{表}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = 15\pi + 9\pi = 24\pi (\text{cm}^2)$.

故本题应选 B.

解法指导 圆锥的表面积等于它的底面积与它的侧面积之和.

发散 2 想一想 填什么最准确?

(1)如图 3-65 所示, AB 是 $\odot O_1$ 的直径, AO_1 是 $\odot O_2$ 的直径, 弦 $MN \parallel AB$, 且 MN 与 $\odot O_2$ 相切于 C 点, 若 $\odot O_1$ 的半径为 2, 则 O_1B 、 $\widehat{BN}$ 、 CN 、 $\widehat{O_1C}$ 所围成的阴影部分的面积是_____.

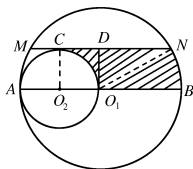


图 3-65

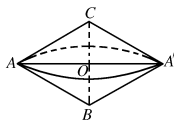


图 3-66

(2)如图 3-66 所示, 正 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 现以 BC 边所在直线为轴, 将 $\triangle ABC$ 旋转一周, 则所得旋转体的表面积为_____.

(1)解 如图 3-65 所示, 连接 O_2C 、 O_1N , 作 $O_1D \perp MN$, 垂足为 D .

$\because AO_1$ 是 $\odot O_2$ 的半径, MN 切 $\odot O_2$ 于点 C , $\odot O_1$ 的半径为 2,

$\therefore O_2C = O_2O_1 = 1$, $O_2C \perp CN$. $\therefore \angle NO_1B = 30^\circ$.

$\therefore CN = CD + DN = 1 + \sqrt{3}$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}NO_1B} + S_{\text{梯形}O_2O_1NC} - S_{\text{扇形}CO_2O_1}$

$$= \frac{30\pi \times 2^2}{360} + \frac{(1+1+\sqrt{3}) \times 1}{2} - \frac{90\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{3} + \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

(2)分析 欲求的表面积是两个相同圆锥的侧面积, 关键求其底面圆的半径 (即已知等边三角形的高).

解 如图 3-66 所示, 为旋转以后的图形, 是两个母线长为 2, 底面半径为 $\sqrt{3}$ 的圆锥组成的, 展开后侧面扇形的半径为 2, 弧长为 $2\pi \cdot \sqrt{3}$.

$\therefore$ 所求旋转体的表面积为

$$2S_{\text{圆锥侧}} = 2S_{\text{扇形}} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3}\pi = 4\sqrt{3}\pi.$$

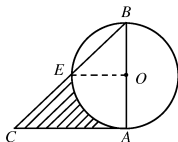
【纵横发散】

发散 3 如图 3-67 所示, 以 $\triangle ABC$ 的一边 AB 为直径作 $\odot O$ 交 BC 于 E . 如果 $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = AB$.

(1)求证: AC 是 $\odot O$ 的切线;

图 3-67

(2)若 $AB = 2$ cm, 求由线段 CE 、 AC 、 $\widehat{AE}$ 围成的图形 (图中的阴影部分) 的



面积 S . (结果用含 n 的代数式表示, 注: $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$, 其中 n 是圆心角的度数)

解 (1) $\because AC = AB, \angle ABC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle BCA = 45^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = 90^\circ$ 即 $BA \perp AC$,
 $\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线.

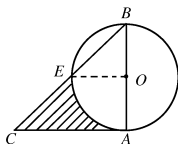


图 3-68

(2) 连结 OE , 如图 3-68,
 $\because OB = OE$ 且 $\angle ABC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle BEO = 45^\circ$ 又 $\angle C = 45^\circ$,
 $\therefore OE \parallel AC$.

由题意知 AO 与 CE 不平行,
 $\therefore$ 四边形 $OACE$ 是直角梯形,

$$\therefore S_{\text{梯形}OACE} = \frac{1}{2}(OE + AC) \cdot OA = \frac{3}{2}, S_{\text{扇形}OAE} = \frac{90 \cdot 1 \cdot \pi}{360} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore S = S_{\text{梯形}OACE} - S_{\text{扇形}OAE} = \frac{6 - \pi}{4} (\text{cm}^2).$$

发散 4 等边圆锥(即轴截面为正三角形的圆锥)的轴截面积为 $\sqrt{3}$, 求其侧面积.

分析 因为等边圆锥的轴截面为正三角形, 所以圆锥底面的直径和母线长就是正三角形的边长, 圆锥的高就是正三角形底边上的高, 又因圆锥的侧面展开图是扇形, 所以要求其侧面积, 只要求出底面周长和母线长即可.

解 设正三角形的边长为 a , 则

$$S_{\text{轴截面}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3},$$

$$\therefore a = 2.$$

$\therefore$ 底面周长为 2π , 母线长为 2.

$$\therefore S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 2\pi.$$

解法指导 关于圆柱、圆锥的侧面积、底面半径及高之间的关系必须掌握, 不论是证明题、还是计算题都要用到这些有关知识.

【生活发散】

发散 5 (2004·重庆) 如图 3-69 所示, 点 A 是一个半径为 300 m 的圆形森林公园的中心, 在森林公园附近有 B 、 C 两个村庄, 现在在 B 、 C 两村庄之间修一条长为 1 000 m

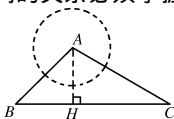


图 3-69

的笔直公路将两村连通,经测量得 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$,问此公路是否会穿过森林公园?请通过计算进行说明.

分析 本题的实质是判断 $\odot A$ 与直线 BC 的位置关系,只要求出圆心 A 到直线 BC 的距离 AH ,即可做出判断.

解 作 $AH \perp BC$,垂足为 H .在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\angle B = 45^\circ$.

$$\therefore AH = BH.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, $\angle C = 30^\circ$.

$$\therefore AC = 2AH.$$

$$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{3}AH.$$

由题意得 $BH + HC = 1\,000$,

$$\text{即 } AH + \sqrt{3}AH = 1\,000.$$

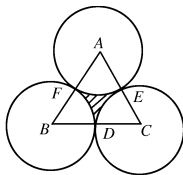
$$\therefore AH = 500(\sqrt{3} - 1).$$

$$\therefore 500(\sqrt{3} - 1) > 300,$$

$\therefore$ 公路不会穿过森林公园.

【分解发散】

发散 6 如图3-70所示,已知三个等圆 $\odot A$, $\odot B$, $\odot C$ 两两互相外切,半径 $r = 10$ cm. 求三圆间阴影部分面积.



分析 本题把三圆间阴影部分的面积分解为正 $\triangle ABC$ 的面积减去 3 个小扇形 AEF 、 FBD 、 DCE 面积之和.

图 3-70

解 设三圆切点分别为 D , E , F (如图 3-70 所示).

$\therefore \odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 是半径为 10 的三个等圆,且两两外切,

$$\therefore AB = BC = AC = 2r = 20,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (AB)^2 = 100\sqrt{3},$$

$$\text{又 } \because S_{\text{扇}AEF} = S_{\text{扇}BFD} = S_{\text{扇}CED} = S_{\text{扇}}, S_{\text{影}} = S_{\triangle ABC} - 3S_{\text{扇}},$$

$$\text{而 } S_{\text{扇}} = \frac{60}{360} \cdot \pi(10)^2 = \frac{50}{3}\pi.$$

$$\therefore S_{\text{影}} = 100\sqrt{3} - \left(\frac{50}{3}\pi\right) \times 3 = 50(2\sqrt{3} - \pi) (\text{cm}^2).$$

【组合发散】

发散 7 如图3-71所示,相交两圆的公共弦 AB 长 120 cm,它分别是 $\odot O_1$ 内接正六边形的边和

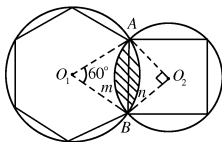


图 3-71

⊙ O_2 内接正方形的边. 求两圆相交弧间的阴影部分的面积.

分析 本题中阴影部分的面积由两个弓形 A_mB , A_nB 面积组合而成.

解 设 ⊙ O_1 , ⊙ O_2 的半径分别为 R_6, R_4 , 正六边形边长为 a_6 , 正方形边长为 a_4 ; ⊙ O_1 , ⊙ O_2 到弦 AB 的距离分别为 r_6, r_4 .

$$\because \text{公共弦 } AB = 120,$$

$$\therefore a_4 = R_6 = 120.$$

$$r_6 = \sqrt{R_6^2 - \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{120^2 - 60^2} = 60\sqrt{3},$$

$$\angle AO_1B = 60^\circ,$$

$$a_4 = 120, R_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 60\sqrt{2},$$

$$r_4 = \sqrt{R_4^2 - \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{(60\sqrt{2})^2 - 60^2} = 60, \angle AO_2B = 90^\circ.$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{弓形}AmB} &= S_{\text{扇形}AO_2B} - S_{\triangle AO_2B} = \frac{90\pi R_4^2}{360} - \frac{1}{2} a_4 r_4 \\ &= 1800\pi - 3600, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{弓形}AnB} &= S_{\text{扇形}AO_1B} - S_{\triangle AO_1B} = \frac{60\pi R_6^2}{360} - \frac{1}{2} a_6 r_6 \\ &= 2400\pi - 3600\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{弓形}AmB} + S_{\text{弓形}AnB} = 4200\pi - 3600(1 + \sqrt{3})(\text{cm}^2)$$

$$\therefore \text{两圆相交弧间的阴影部分面积为 } 4200\pi - 3600(1 + \sqrt{3})(\text{cm}^2)$$

解法指导 (1) 扇形面积公式 $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$ 与弧长公式 $l = \frac{n\pi R}{180}$ 的关系是

$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} lR$. 在计算扇形面积时应根据条件合理选取公式.

(2) 弓形面积在计算时应注意: a) 当弓形所含的弧是劣弧时, $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle}$; b) 当弓形所含的弧是优弧时, $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} + S_{\triangle}$.

【综合发散】

发散 8 已知圆锥的母线长为 5 cm, 底面半径为 3 cm, 求:

(1) 圆锥的侧面展开图中扇形的圆心角;

(2) 锥角 α .

分析 圆锥的侧面展开图是一个扇形, 圆锥的母线长是扇形的半径, 圆锥的底面周长是扇形的弧长. 由题意, 已知圆锥的底面半径就能求出底面周长, 即扇形的弧长, 而已知母线就知道扇形的半径, 已知弧长、半径就能求出扇形的圆心角, 而锥角指圆锥的轴截面等腰三角形的顶角.

解 (1)如图 3-72 所示,
圆锥的底面周长 $= 2\pi \cdot OC = 6\pi$,
即扇形的弧长 $l = 6\pi$.

$$\therefore R = 5,$$

$$\therefore 6\pi = \frac{n\pi \cdot 5}{180^\circ},$$

解得 $n = 216^\circ$, 即扇形的圆心角为 216° .

(2)在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $AC = 5$, $OC = 3$,

$$\therefore \sin \angle OAC = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore \angle OAC = 36^\circ 52'.$$

$$\therefore \alpha = 2\angle OAC = 73^\circ 44'.$$

点评 解题时要分清圆锥的侧面展开图中的圆心角与锥角. 一般地, 设展开

图的圆心角为 θ° , 底面半径为 r , 母线为 l , 则 $\frac{\theta}{360} = \frac{r}{l}$.

发散 9 如图 3-73(1)所示, 正三角形 ABC 的边长为 $6\sqrt{3}$ cm, $\odot O$ 的半径为 r cm, 当圆心 O 从点 A 出发, 沿着线路 $A-B-C-A$ 运动, 回到点 A , $\odot O$ 随着点 O 的运动而移动.

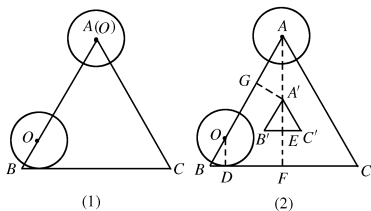


图 3-73

(1)若 $r = \sqrt{3}$ cm, 求 $\odot O$ 首次与 BC 边相切时, AO 的长;

(2) $\odot O$ 移动过程中, 从切点的个数来考虑, 相切有几种不同的情况, 写出不同情况下 r 的取值范围及相应的切点个数;

(3)设 $\odot O$ 在整个移动过程中, 在 $\triangle ABC$ 内部, $\odot O$ 未经过的部分的面积为 S , 在 $S > 0$ 时, 求 S 关于 r 的函数解析式, 并写出自变量 r 的取值范围.

解 (1)如图 3-73(2)所示, 设 $\odot O$ 首次与 BC 相切于点 D , 连结 OD , 则有 $OD \perp BD$, 且 $OD = r = \sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle BDO$ 中,

$$\because \angle OBD = 60^\circ, \therefore OB = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2.$$

$$AO = AB - OB = (6\sqrt{3} - 2) \text{ (cm)}.$$

(2) 由正三角形的边长为 $6\sqrt{3}$ cm, 可得它一边上的高为 9 cm.

① 当 $\odot O$ 的半径 $r = 9$ cm 时, $\odot O$ 在移动中与 $\triangle ABC$ 的边共相切三次, 即切点个数为 3.

② 当 $0 < r < 9$ 时, $\odot O$ 在移动中与 $\triangle ABC$ 的边共相切六次, 即切点个数为 6.

③ 当 $r > 9$ 时, $\odot O$ 在移动中与 $\triangle ABC$ 的边不相切, 即切点个数为 0.

(3) 如图 3-73(2) 所示, 易知 $S > 0$ 时, $\odot O$ 在移动中, 在 $\triangle ABC$ 内部未经过的部分为正三角形 $A'B'C'$ 的内部, 这个正三角形的三边分别与原正三角形三边平行, 且平行线间的距离等于 r .

连结 AA' , 并延长 AA' , 分别交 $B'C'$ 、 BC 于 E 、 F 两点, 则 $AF \perp BC$, $A'E \perp B'C'$, 且 $EF = r$,

又过点 A' 作 $A'G \perp AB$ 于点 G , 则 $A'G = r$.

$$\because \angle GAA' = 30^\circ, \therefore AA' = 2r.$$

$$\therefore \triangle A'B'C' \text{ 的高 } A'E = AF - 3r = 9 - 3r.$$

$$B'C' = \frac{2\sqrt{3}}{3} A'E = 2\sqrt{3}(3 - r).$$

$$\therefore \triangle A'B'C' \text{ 的面积 } S = 3\sqrt{3}(3 - r)^2 (0 < r < 3).$$

解法指导 此题是一道图形的运动问题, 也是一道分类讨论题, 题目设计巧妙, 能较好地考查学生的逻辑思维能力. 本题的最后一问是从图形中抽象出函数关系式, 也是常见的题型. 本小题易漏写 r 的取值范围而造成答题不完整, 望读者注意这一点.



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. 扇形的面积为 S , 弧长为 l , 则扇形中心角的度数为 ()

A. $\left(\frac{180l^2}{\pi S}\right)^\circ$ B. $\left(\frac{180S}{\pi l^2}\right)^\circ$ C. $\left(\frac{90l^2}{\pi S}\right)^\circ$ D. $\left(\frac{90S}{\pi l^2}\right)^\circ$

2. 已知圆锥的侧面展开图的面积是 $15\pi \text{ cm}^2$, 母线长是 5 cm, 则圆锥的底面

半径为

()

- A. $\frac{3}{2}$ cm B. 3 cm C. 4 cm D. 6 cm

3. 如图 3-74 所示, 扇形 OAB 中 $\angle AOB = 90^\circ$, 扇形半径为 a 以 AB 为直径作半圆, 则所得月牙形(阴影部分)的面积是_____.

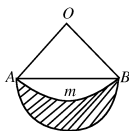


图 3-74

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 1$, 以 AC 所在直线为轴旋转一周, 所得圆锥的侧面积是_____.

5. 把一个半径为 8 cm 的圆片, 剪去一个圆心角为 90° 的扇形后, 用剩下的部分做成一个圆锥的侧面, 那么这个圆锥的高为_____.

【生活发散】

1. 如图 3-75 所示, 有一把折扇和一把团扇, 已知折扇的骨柄与团扇的直径一样长, 折扇扇面的宽度是骨柄长的一半, 折扇张开的角度为 120° , 问哪一种扇子的面积大, 从而扇出的风量也大?

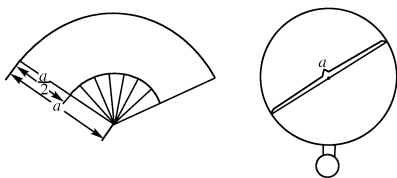


图 3-75

2. 在半径为 27 m 的圆形广场中央点 O 的上空安装了一个照明光源 S , S 射向地面的光束呈圆锥形, 并且灯亮能照亮整个广场. 其轴截面 SAB 的顶角为 120° (如图 3-76 所示). 求光源离地面的垂直高度 SO . (精确到 0.1 m)

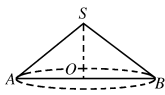
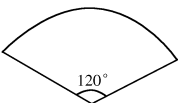


图 3-76

【纵横发散】

1. 已知 $\odot O$ 的半径为 R , 直径 $AB \perp CD$, 以 B 为圆心, 以 BC 为半径作 $\widehat{CED}$, 求 $\widehat{CED}$ 与 $\widehat{CAD}$ 围成的新月形 $ACED$ 的面积 S .



2. 如图 3-77 所示, 用一个半径为 30 cm, 圆心角为 120° 的扇形纸片, 做成一个圆锥模型的侧面(不计接缝), 那么这个圆锥的底面半径是_____cm.

图 3-77

【分解发散】

1. 如图 3-78 所示, 已知扇形 APB 的中心角是 60° , $\odot O$ 和扇形两半径及 $\widehat{AB}$ 切于 D, E, C . 求证:

(1) $\odot O$ 的周长是 $\widehat{AB}$ 的 2 倍;

(2) 求阴影部分的面积.

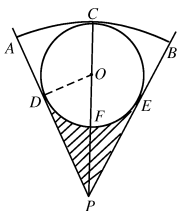


图 3-78

2. 如图 3-79 所示, $\odot O$ 中的弦 $BC = 6$ cm, 圆周角 $\angle BAC = 60^\circ$, 求图中阴影部分的面积. (结果不取近似值)

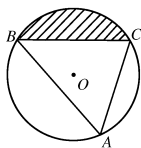


图 3-79

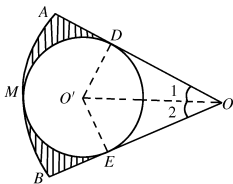


图 3-80

【综合发散】

1. 如图 3-80 所示, 已知扇形 AOB 的内切圆 $\odot O'$ 分别切扇形的半径 OA, OB 于 D, E , 且 $OA = 6$, $\odot O'$ 的半径为 2. 求图中阴影部分的面积.

2. 如图 3-81 所示, 菱形 $ABCD$ 的对角线交于 O 点, $AC = 2\sqrt{3}$, $BD = 2$, 以 A 为圆心, OA 为半径画弧分别交 AD, AB 于 E, F , 又以 C 为圆心, CO 为半径画弧分别交 CD, CB 于 M, N , 求阴影部分的面积.

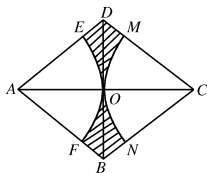


图 3-81

课后习题答案, 你需要吗?

随堂练习(课本第 131 页)

$$1. \text{解: } \frac{1}{2} AB = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3},$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 6 = 36\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{而 } \frac{1}{2} \angle AOB \text{ 的余弦值是 } \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle AOB = 120^\circ.$$

$$S_{\text{扇形}} = \frac{120}{360}\pi \times 12^2 \approx 150.7 (\text{cm}^2).$$

$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle OAB} \approx 150.7 - 62.3 \approx 88.4 (\text{cm}^2).$$

2. 解:(1) $\because$ 两个弯道内圈(半圆形)共长 200 m,

$$\text{即 } 2\pi r = 200.$$

$$\therefore r \approx 31.8 (\text{m}).$$

(2)约 18.8 m.

习题 3.10(课本第 132 页)

1. 解:设圆的半径为 R $\frac{100}{180}\pi \cdot R = 4\pi$,

$$R = 7.2 (\text{cm}).$$

2. 长 $= \frac{90}{180}\pi \cdot 5 = 7.85 (\text{cm}).$

3. 约 $449.8 \text{ cm}^2.$

随堂练习(课本第 134 页)

1. 解: $r = \sqrt{33 \div 3.14} \approx 3.24$,

$$d = 3.24 \times 2 = 6.48.$$

$$\therefore S_{\text{圆柱侧}} = (10 - 2)\pi d = 8 \times 3.14 \times 6.48 \approx 162.8 (\text{m}^2).$$

$$S_{\text{圆锥侧}} = \pi \cdot r \cdot (\sqrt{2^2 + 3.24^2}) \approx 3.14 \times 3.24 \times 3.8 \approx 38.7 (\text{m}^2).$$

$$(162.8 + 38.7) \times 15 \approx 3\,022.5 (\text{m}^2).$$

$\therefore$ 至少需要 $3\,022.5 \text{ m}^2$ 的帆布.

2. 解: $S_{\text{扇形}} = \frac{118}{360}\pi \cdot 24^2 = 188.8\pi$,

设纸杯的底面半径为 r , 高为 h ,

$$\therefore \pi r l = 188.8\pi.$$

即 $24\pi r = 188.8\pi$, $\therefore r \approx 7.9 (\text{cm}).$

$$\therefore h = \sqrt{24^2 - 7.9^2} \approx \sqrt{513.6} \approx 22.7 (\text{cm}).$$

$\therefore$ 纸杯的底面半径为 7.9 cm, 高为 22.7 cm.

习题 3.11(课本第 135 页)

1. 解:设圆锥的底面半径为 r ,

则 $\sin 30^\circ = \frac{r}{6}.$

$$\therefore r = 3.$$

$$\therefore S_{\text{圆锥侧}} = \pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot 3 \cdot 6 \approx 56.5 (\text{cm}^2)$$

2. 解 $\pi r^2 + \pi dh + \pi rl$

$$= 2^2\pi + 4 \cdot 2\pi + 2\pi(\sqrt{2^2 + 2 \cdot 1^2})$$

$$\approx 12.56 + 25.12 + 18.212$$

$$\approx 55.9 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$\therefore$ 该太空囊要接受防高热处理的面积约 55.9 m^2 .

$$3. \text{ 解: } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ (cm)},$$

设半径为 r ,

$$\therefore \sin \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{r}{AC}.$$

$$\text{即 } \frac{15}{25} = \frac{r}{20}.$$

$$\therefore r = 12.$$

$$\therefore S_{\text{全}} = \pi r l + \pi r l = \pi \cdot 12 \cdot 20 + \pi \cdot 12 \cdot 15 = 1\,318.8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$\therefore$ 这个旋转体的全面积约为 $1\,318.8 \text{ cm}^2$.

复习题(课本第 136 页)

A 组

1. 点 P 可能在 $\odot O$ 外, 也可能在 $\odot O$ 上, 还可能在 $\odot O$ 内, 实际上, 点 P 位于以 A 为圆心, 以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆上.

2. 图(4).

3. $100\sqrt{3} \text{ cm}^2$. (提示: 过 O 点作 AB 的垂线, 垂足为 M , 可求出 $OM = 10 \text{ cm}$, $AM = 10\sqrt{3} \text{ cm}$.)

4. 半径约为 0.384 cm .

5. 证明 连结 OC .

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CB}$$

$$\angle DOC = \angle EOC$$

$$\therefore OD = OE \text{ (已知)}$$

$$OC = OC \text{ (公共边)}$$

$$\Rightarrow CD = CE.$$

6. $OD \parallel AC$. (提示: $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ$, 所以 $\angle CAO = 60^\circ$; 而 $\angle BOD = 2\angle DAB = 60^\circ$.)

$$7. (1) \angle AEB = \angle ADB = \angle ACB; \quad (2) \angle BAC = \angle BEC = \angle BDC;$$

$$(3) \angle CAD = \angle CED = \angle CBD; \quad (4) \angle DAE = \angle DBE = \angle DCE;$$

$$(5) \angle EBA = \angle ECA = \angle EDA$$

8. 所对的圆周角为 90° . (提示: $\widehat{DAB}$ 与 $\widehat{ABC}$ 是等弧.)

9. $AD = 4$ cm. (提示: 由 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ 得 $\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$ 即 $CD^2 = AD \cdot BD$.)

10. 略.

11. (1)可以作一个; (2)无解; (3)可作无数个.

12. 连结 OC ,

$$\therefore OC = 4, AC = \frac{1}{2}AB = 5.$$

$$\therefore OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

13. 略.

14. 约 1.3 m^2 . (提示: $\angle ACD = 30^\circ$.)

15. 解 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$$\therefore S_{\text{扇形和}} = \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot 0.5^2 \approx 0.39 \text{ cm}^2.$$

$\therefore$ 三个扇形的面积之和是 0.39 cm^2 .

$$16. \text{解} : \frac{120}{360} \pi \cdot 30^2 - \frac{120}{360} \pi \cdot (30 - 20)^2 \approx 837.3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$\therefore$ 贴纸部分的面积约为 837.3 cm^2 .

17. 解 $\frac{40}{360} \cdot \pi \cdot 7^2 \approx 17.1 \text{ m}^2$. (提示: 所求的区域是以半径为 7 m , 圆心角为 40° 的扇形.)

$$18. \text{解} : r = \frac{15.7}{3.14 \times 2} = 2.5,$$

$$\pi r l = 3.14 \times 2.5 \times (\sqrt{2.5^2 + 1.5^2}) \approx 22.7 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$\therefore$ 至少需要 23 cm^2 的塑料布.

$$19. \text{解} : r = \frac{15\pi}{\pi l} = \frac{15\pi}{5\pi} = 3 \text{ cm}.$$

$\therefore$ 圆锥的底面半径是 3 cm .

B 组

1. $\triangle ABC$ 为等边三角形. (提示: 连结 OC , 则 $\text{Rt} \triangle OCD \cong \text{Rt} \triangle OCE$, 得 $CD = CE$, 从而 $BC = AC$)

2. 解 连结 AD 、 BC ,

$$\because \widehat{AD} = \widehat{BC},$$

$$\therefore AD = BC.$$

$\angle ACB = 90^\circ$ (直径所对的圆周角等于 90°).

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{d^2 - a^2}, \therefore AD = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

3. 解 连结 OC 、 BD ,

$$\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD, \angle CDB = \frac{1}{2} \angle COB,$$

$$\angle CBD + \angle CDB = \frac{1}{2} (\angle COD + \angle COB) = \frac{1}{2} \angle BOD = 60^\circ,$$

$$\angle BCE = \angle CBD + \angle CDB = 60^\circ.$$

4. 解 连结 CD

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACE = \angle ADC \\ \angle CAE = \angle DAC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ADC,$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

$$\text{即 } AC^2 = AD \cdot AE.$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{3}.$$

5. 解 连结 OA', OB' ,

$\because O$ 是 AB 的中点,

$$\therefore OB = 20.$$

$$\therefore \sin \angle B = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ$$

$$\therefore \angle AOA' = \angle BOB' = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle A'OB' = 60^\circ.$$

$$AA' + \widehat{A'B'} + B'B = \sqrt{20^2 - 10^2} + \frac{60}{180} \cdot \pi \cdot 10 + \sqrt{20^2 - 10^2} \approx 45.1 \text{ (km)}.$$

$\therefore$ 修建的公路最短路线长度是 45.1 km.

6. 解 $\because \triangle ABC$ 是正三角形,

$$\therefore \angle DAC = \angle DBE = \angle ECF = 120^\circ.$$

而 $AD = 1, BE = 2, CF = 3$,

$$\begin{aligned} \therefore \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EF} &= \frac{120}{180} \pi \cdot 1 + \frac{120}{180} \pi \cdot 2 + \frac{120}{180} \pi \cdot 3 \\ &= \frac{2}{3} \pi + \frac{4}{3} \pi + \frac{6}{3} \pi \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

$\therefore$ 曲线 $CDEF$ 的长是 4π .

7. 约 421 人.(提示 过点 O 作 AB 的垂线,垂足为 C .)

8. 略.

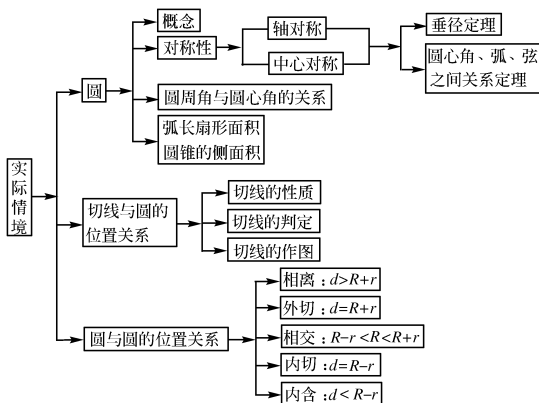
9. 略.

思维整合升华



知识网络建构

圆的知识,内容丰富,形式活泼.不少问题,在条件中原来没有圆时,思路闭塞,解题极其困难;一旦构造辅助圆后,立即收到“山重水复疑无路,柳暗花明又一村”的效果,顿时思路畅通,问题迎刃而解.圆具有对称性(既是中心对称图形,又是轴对称图形)及旋转不变性,在研究圆、弧、弦、弦心距、圆心角、圆周角等基本概念时,要掌握它们之间的相互关系,注意同圆或圆内弦、弦心距、角(圆心角、圆周角)、弧四者之间相等关系与不等关系的互相转化,这是证明与圆有关命题的一种基本技能和基本方法.圆还具有隐蔽性,圆隐蔽了直线之间某些元素之间的相等、垂直、平行等相互关系和性质.只有深入挖掘圆的概念的内涵,显露被隐蔽元素之间的关系和性质,圆的问题就转化成我们熟悉的直线形问题.此外,必须注意了解反证法的思路与证明的步骤,掌握利用弦心距和半径等线段把有关几何量的计算转化为直角三角形或等腰三角形的计算问题.关于求解阴影图形(不规则图形)面积的关键是要运用组合发散与分解发散,将它转化为规则图形的面积或它们的和与差,再进行计算,组合发散可拾零为整,注重整体构思,发挥整体功能,分解发散可化整为零,各个击破.从而,达到提高分析问题解决问题能力的目的.





新题型新中考

从近年来全国各省市新中考试题发展趋势来看,注重能力立意,就是要以基础知识为依托,重在考查学生对知识的理解,知识间的联系与渗透,以及灵活运用知识解决问题的能力.加强与实际和学生生活实际的联系.着重考查学生运用数学基础知识和基本技能分析问题,解决问题能力,重视对创新意识和实践能力的考查.增大试题的灵活性,设计具有开放性、探索性、研究性的问题,具有创新意识和创造能力的试题,以便充分发挥学生的创造性.

圆这部分内容因涉及平面几何的重要概念、性质、定理,且在解题中常综合应用前面所学知识,题型灵活多样,既能考查“双基”,又能考查数学能力与创新思维,所以是历年中考的重点内容.

本单元常考热点有:点和圆的位置关系;等弧的概念;垂径定理及其逆定理;圆心角、弧、弦、弦心距四者之间的关系;圆内接四边形的性质;圆周角的知识,能熟练地运用这些知识进行有关的计算和证明.

一、发散思维延伸

延伸题 1 李明同学和马强同学合作,将半径为 1m 、圆心角为 90° 的扇形薄铁板围成一个圆锥筒.在计算圆锥的容积(接缝忽略不计)时,李明认为圆锥的高就等于扇形的 O 到弦 AB 的距离 OC (如图 3-82 所示),马强说这样计算不正确.你同意谁的说法?把正确的计算过程写在下面.

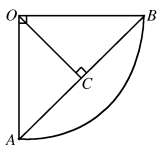


图 3-82

解 如图 3-82 所示,在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中, $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

如图 3-83 所示,在 $\text{Rt}\triangle OO'A$ 中, $OA = 1$,

$$\therefore 2\pi \times \frac{1}{4} = 2\pi \cdot O'A,$$

$$\therefore O'A = \frac{1}{4}.$$

$$\text{又} \because OO' = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$\therefore$ 李明的说法不正确.

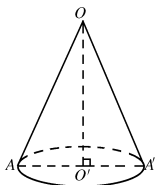


图 3-83

延伸题 2 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于 P , 半径为 R_1, R_2 . 外公切线切 $\odot O_1$ 于 A , 切 $\odot O_2$ 于 B , $\odot O$ 与 $\odot O_1, \odot O_2$ 外切, 且切 AB 于 C . 求 $\odot O$ 的半径 R .

解 如图 3-84 所示, 连结 O_1A, O_2B, OC , 则 $O_1A \parallel O_2B \parallel OC$, 过 O_1 作 $O_1E \perp OC$,

则 $AC = O_1E, OE = R - R_1$,

$$O_1O = R_1 + R, O_1E^2 = O_1O^2 - OE^2$$

$$\therefore AC^2 = O_1O^2 - OE^2.$$

$$\therefore AC^2 = (R_1 + R)^2 - (R - R_1)^2 = 4R_1R.$$

作 $O_2F \perp OC$ 则 $BC = O_2F$,

$$O_2F^2 = (R_2 + R)^2 - (R - R_2)^2,$$

$$\therefore BC^2 = 4R_2R, \therefore AC = 2\sqrt{R_1R}, BC = 2\sqrt{R_2R}.$$

同理 $AB^2 = 4R_1R_2, AB = 2\sqrt{R_1R_2}$.

而 $AC^2 = (AB + BC)^2, \therefore 4R_1R = (2\sqrt{R_1R} + 2\sqrt{R_2R})^2.$

$$\therefore 2\sqrt{R_1R} = 2\sqrt{R_1R_2} + 2\sqrt{R_2R}.$$

$$\therefore \sqrt{R_1R} = \sqrt{R_1R_2} + \sqrt{R_2R}, \therefore R = \frac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2}.$$

延伸题 3 如图 3-85 所示, 在直角坐标系中, $\odot O_1$ 经过坐标原点, 分别与 x 轴正半轴, y 轴正半轴交于点 A, B .

(1) 若点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{12}{5}$, 且 $\tan \angle B = \frac{3}{4}$, 求线段 AB 的长;

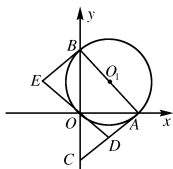


图 3-85

(2) 若点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{12}{5}$, 过点 A 的切线与 y 轴交于点 C , 过点 O 的切线交 AC 于点 D , 过点 B 的切线交

OD 于点 E , 求 $\frac{1}{CD} + \frac{1}{BE}$ 的值;

(3) 如图 3-86 所示, 若 $\odot O_1$ 经过点 $M(2, 2)$, 设 $\triangle BOA$ 的内切圆的直径为 d , 试判断 $d + AB$ 的值是否会发生变化, 若不变, 求出其值; 若变化, 求出其变化的范围.

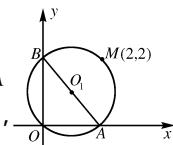


图 3-86

解 (1) 作 $OG \perp AB$, 垂足为点 G .

$$\because \tan \angle B = \frac{3}{4}, \text{ 设 } OA = 3k, OB = 4k,$$

$$\therefore AB = 5k.$$

$$\because OA \cdot OB = AB \cdot OG = 2S_{\triangle AOB}.$$

$$\text{即 } 3k \times 4k = 5k \times \frac{12}{5}.$$

$$\therefore k = 1.$$

$$\therefore AB = 5.$$

(2)如图 3-87 所示, 延长 BE 交 x 轴于点 F , 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G .

$$\because DO = DA,$$

$$\therefore \angle DOA = \angle DAO.$$

$$\therefore \angle COD = \angle DCO.$$

$$DO = DA = DC. \text{ 同理可证 } EB = EO = EF.$$

$$\text{又} \because AC \parallel OG \parallel BF,$$

$$\therefore \frac{OG}{2CD} = \frac{OG}{AC} = \frac{BG}{BA} \quad \frac{OG}{2BE} = \frac{OG}{BF} = \frac{AG}{AB}.$$

$$\therefore \frac{OG}{2CD} + \frac{OG}{2BE} = \frac{BG + AG}{AB} = 1,$$

$$\text{即 } \frac{1}{CD} + \frac{1}{BE} = \frac{2}{OG}.$$

$$\therefore OG = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{CD} + \frac{1}{BE} = \frac{5}{6}.$$

(3) $d + AB$ 的值不会发生变化.

如图 3-88 所示, 设 $\triangle AOB$ 的内切圆分别切 OA , OB , AB 于点 P , Q , T ,

$$\text{则 } d + AB = OQ + OP + QB + PA = OA + OB.$$

在 x 轴上取一点 N , 使 $AN = OB$.

连结 OM , BM , AM , MN .

$$\because OM \text{ 平分 } \angle AOB,$$

$$\therefore \angle BOM = \angle MON = 45^\circ, AM = BM.$$

$$\text{又} \because \angle MAN = \angle OBM, OB = AN,$$

$$\therefore \triangle BOM \cong \triangle ANM.$$

$$\therefore \angle BOM = \angle N = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle OMN = 90^\circ.$$

$$\therefore OA + OB = ON = \sqrt{OM^2 + MN^2} = \sqrt{2} OM = 4.$$

$$\therefore d + AB \text{ 的值不会发生变化, 其值为 } 4.$$

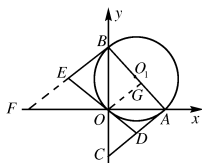


图 3-87

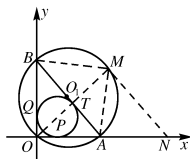


图 3-88

二、课标新题导向

新题 1 阅读下面材料:

对于平面图形 A , 如果存在一个圆, 使图形 A 上的任意一点到圆心的距离不大于这个圆的半径, 则称图形 A 被这个圆所覆盖.

对于平面图形 A , 如果存在两个或两个以上的圆, 使图形 A 上的任意一点到

其中某个圆的圆心的距离都不大于这个圆的半径,则称图形 A 被这些圆所覆盖.

图 3-89(1)中的三角形被一个圆所覆盖,(2)中的四边形被两个圆所覆盖.

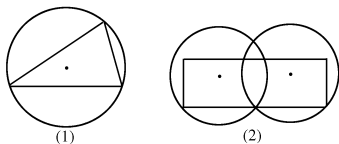


图 3-89

回答下列问题:

(1)边长为 1 cm 的正方形被一个半径为 r 的圆所覆盖, r 的最小值是_____cm.

(2)边长为 1 cm 的等边三角形被一个半径为 r 的圆所覆盖, r 的最小值是_____cm.

(3)长为 2 cm,宽为 1 cm 的矩形被两个半径都为 r 的圆所覆盖, r 的最小值是_____cm,这两个圆的圆心距是_____cm.

解 (1) $\because$ 边长为 1 的正方形的外接圆的直径为 $\sqrt{2}$,故 r 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\because$ 边长为 1 的等边三角形的外接圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 r 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\because$ 长为 2、宽为 1 的矩形可分为两个边长为 1 的正方形,只要让每一个圆覆盖住一个正方形即可,

$\therefore r$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,当 r 取最小值时,这时两个圆的圆心分别是两个正方形的中心,它们的距离为 1.

解法指导 (3)中应明确要求的是“当 r 取最小值时,这两个圆的圆心距”.

新题 2 电脑 CPU 芯片是由一种叫单晶硅的材料制成,未切割前的单晶硅材料是一种薄形圆片,如图 3-90 所示叫晶圆片.现为了生产某种 CPU 芯片,需要长、宽都是 1 cm 的正方形小硅片若干.如果晶圆片的直径为 10.05 cm,问一张这种晶圆片能否切割出所需尺寸的小硅片 66 张?请说明你的方法和理由.(不计切割损耗)

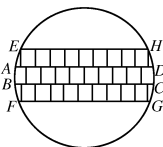


图 3-90

分析 此题若直接切割晶圆片相当困难,若逆向思维,将割好的小正方形排成矩形,逐步放入圆中会省时省力,那么如何摆放呢?因为直径是圆中最大的弦且圆既是中心对称图形,又是轴对称图形,不难想到以一条直径为轴来排放小正方形.

解 可以切割出 66 个小正方形.

(1)我们把 10 个小正方形排成一行, 看成一个长条形的矩形, 这个矩形刚好能放入直径为 10.05 cm 的圆内, 如图中矩形 $ABCD$.

$$\because AB=1, BC=10, \therefore \text{对角线 } AC^2=100+1=101 < (10.05)^2.$$

(2)我们在矩形 $ABCD$ 的上方和下方可以分别放入 9 个小正方形.

$\therefore$ 新加入的两排小正方形连同 $ABCD$ 的一部分可看成矩形 $EFGH$, 矩形 $EFGH$ 的长为 9, 宽为 3, 对角线 $EG^2=9^2+3^2=81+9=90 < (10.05)^2$. 但是新加入的这两排小正方形不能是每排 10 个,

$$\text{因为 } 10^2+3^2=100+9=109 > (10.05)^2.$$

$$(3)\text{同理 } \therefore 8^2+5^2=64+25=89 < (10.05)^2.$$

$$9^2+5^2=81+25=106 > (10.05)^2.$$

$\therefore$ 可以在矩形 $EFGH$ 的上面和下面分别再排 8 个小正方形, 那么现在小正方形已有了 5 层.

(4)再在原来的基础上, 上下再加一层, 共 7 层, 新矩形的高可以看成是 7, 那么新加入的这两排, 每排都可以是 7 个但不能是 8 个.

$$\therefore 7^2+7^2=49+49=98 < (10.05)^2.$$

$$8^2+7^2=64+49=113 > (10.05)^2.$$

(5)在 7 层的基础上, 上下再加一层, 新矩形的高可以看成是 9, 这两层, 每排可以是 4 个但不能是 5 个.

$$\therefore 4^2+9^2=16+81=97 < (10.05)^2,$$

$$5^2+9^2=25+81=106 > (10.05)^2.$$

$\therefore$ 现在总共排了 9 层, 高度达到了 9, 上下各剩下 0.5 cm 的空间, 因为矩形 $ABCD$ 的位置不能调整, 故再也放不下 1 个小正方形了.

所以, $10+2\times 9+2\times 8+2\times 7+2\times 4=66$ 个.

解法指导 解答此题目, 若从圆的有关计算出发, 直接切割圆片很难得到答案. 若逆向思维, 将切割好的小正方形排成矩形, 逐步放入圆中会省时省力. 下面要研究的问题是如何摆放的问题. 大家都知道, 直径是圆中最大的弦, 且圆既是中心对称图形又是轴对称图形, 不难想到可以以一种直径为轴来摆放小正方形, 这里有两种方法: 一种是压住直径(轴)摆放, 另一种是在直径(轴)的上下方对称摆放, 最后再解决每排能放多少个, 共摆放多少层的问题.

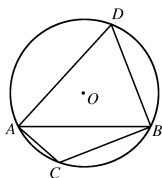


图 3-91

新题 3 (2004·潍坊)如图 3-91 所示, 已知 $\odot O$ 的半径为 2, 弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 点 C 与点 D 分别是劣弧 $\widehat{AB}$ 与优

弧 $\widehat{ADB}$ 上的任一点(点 C 、 D 均不与 A 、 B 重合).

(1)求 $\angle ACB$;

(2)求 $\triangle ABD$ 的最大面积.

解 (1)如图3-92所示,连结 OA 、 OB ,作 $OE \perp AB$, E 为垂足,则 $AE = BE$.在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, $OA = 2$,

$$AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \sin \angle AOE = \frac{AE}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle AOE = 60^\circ, \angle AOB = 2\angle AOE = 120^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$$\therefore \angle ADB = 60^\circ,$$

又 $\because$ 四边形 $ACBD$ 为圆内接四边形,

$$\therefore \angle ACB + \angle ADB = 180^\circ,$$

$$\text{从而有} \angle ACB = 180^\circ - \angle ADB = 120^\circ.$$

(2)作 $DF \perp AB$,垂足为 E ,则

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot DF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times DF = \sqrt{3}DF,$$

显然,当 DF 经过圆心 O 时, DF 取最大值,从而 $S_{\triangle ABD}$ 取得最大值.

$$\text{此时} DF = DO + OF = 3, S_{\triangle ABD} = 3\sqrt{3}.$$

即 $\triangle ABD$ 的最大面积是 $3\sqrt{3}$.

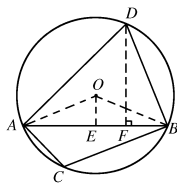


图 3-92

三、中考名题赏析

名题 1 (2004·南宁)如图 3-93 所示,已知 $\odot O$ 半径为 8 cm,点 A 为半径 OB 延长线上一点,射线 AC 切 $\odot O$ 于点 C , $\widehat{BC}$ 的长为 $\frac{20}{9}\pi$ cm,求线段 AB 的长.(精确到 0.01 cm)

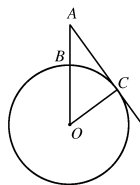


图 3-93

$$\text{解} \because l = \frac{n\pi R}{180},$$

$$\therefore n = \frac{20\pi}{9} \times 180 \div 8\pi = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle O = 50^\circ.$$

$\because AC$ 为切线, OC 为 $\odot O$ 的半径,

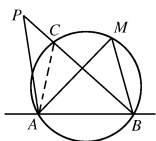
$\therefore \triangle ACO$ 为直角三角形,

$$\therefore \cos 50^\circ = \frac{OC}{AO},$$

$$\therefore AO = \frac{8}{0.6428} \approx 12.45,$$

$$\therefore AB = AO - OB = 12.45 - 8 \\ = 4.45 \text{ (cm)}.$$

名题 2 (2004·杭州)如图3-94所示,直线 AB 交圆于点 A, B , 点 M 在圆上, 点 P 在圆外, 且点 M, P 在 AB 的同侧, $\angle AMB = 50^\circ$. 设 $\angle APB = x^\circ$, 当点 P 移动时, 求 x 的变化范围, 并说明理由.



解 如图3-94所示, 设 PB 与圆交于点 C , 连结 AC .

$$\therefore \angle AMB = 50^\circ = \angle ACB > \angle APB = x^\circ,$$

图 3-94

$$\therefore x \text{ 的变化范围为 } 0 < x < 50^\circ.$$

名题 3 (2005·哈尔滨)已知如图3-95所示, 点 O_2 是 $\odot O_1$ 上一点, $\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 相交于 A, D 两点, $BC \perp AD$, 垂足为 D , 分别交 $\odot O_1, \odot O_2$ 于 B, C 两点, 延长 DO_2 交 $\odot O_2$ 于 E , 交 BA 的延长线于 F , BO_2 交 AD 于 G , 连结 AC .

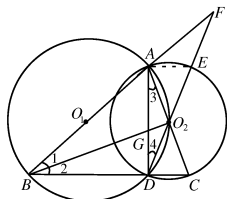


图 3-95

(1) 求证: $\angle BGD = \angle C$;

(2) 若 $\angle DO_2C = 45^\circ$, 求证: $AD = AF$;

(3) 若 $BF = 6CD$, 且线段 BD, BF 的长是关于

x 的方程 $x^2 - (4m+2)x + 4m^2 + 8 = 0$ 的两个实数根, 求 BD, BF 的长.

解 (1) $\because BC \perp AD$ 于 D , $\therefore \angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$.

$\therefore AB, AC$ 分别为 $\odot O_1, \odot O_2$ 的直径

$$\therefore \angle 2 = \angle 3. \quad \angle BGD + \angle 2 = 90^\circ, \quad \angle C + \angle 3 = 90^\circ, \therefore \angle BGD = \angle C.$$

(2) $\because \angle DO_2C = 45^\circ, \therefore \angle ABD = 45^\circ; \therefore O_2D = O_2C,$

$$\therefore \angle C = \angle O_2DC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DO_2C) = 67.5^\circ, \therefore \angle 4 = 22.5^\circ.$$

$$\because \angle O_2DC = \angle ABD + \angle F, \therefore \angle F = \angle 4 = 22.5^\circ, \therefore AD = AF.$$

(3) $\because BF = 6CD, \therefore$ 设 $CD = k$ 则 $BF = 6k$.

连结 AE 则 $AE \perp AD, \therefore AE \parallel BC,$

$$\therefore \frac{AE}{BD} = \frac{AF}{BF}, \therefore AE \cdot BF = BD \cdot AF.$$

又 $\because$ 在 $\triangle AO_2E$ 和 $\triangle DO_2C$ 中, $AO_2 = DO_2, \angle AO_2E = \angle DO_2C, O_2E = O_2C, \therefore \triangle AO_2E \cong \triangle DO_2C,$

$$\therefore AE = CD = k,$$

$$\therefore 6k^2 = BD \cdot AF = (BC - CD)(BF - AB).$$

$$\therefore \angle BO_2A = 90^\circ, O_2A = O_2C$$

$$\therefore BC = AB, \therefore 6k^2 = (BC - k)(6k - BC), \therefore BC^2 - 7kBC + 12k^2 = 0.$$

解得 $BC = 3k$ 或 $BC = 4k$.

当 $BC = 3k$ 时, $BD = 2k$.

$\therefore BD$ 、 BF 的长是关于 x 的方程 $x^2 - (4m + 2)x + 4m^2 + 8 = 0$ 的两个实数根.

$\therefore$ 由根与系数的关系知 $BD + BF = 2k + 6k = 8k = 4m + 2$, $BD \cdot BF = 12k^2 = 4m^2 + 8$,

整理, 得 $4m^2 - 12m + 29 = 0$.

$\therefore \Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 29 = -320 < 0$, 此方程无实数根.

$\therefore BC = 3k$ (舍去).

当 $BC = 4k$ 时, $BD = 3k$,

$$\therefore 3k + 6k = 4m + 2, 18k^2 = 4m^2 + 8,$$

整理, 得 $m^2 - 8m + 16 = 0$.

解得 $m_1 = m_2 = 4$.

解得 $x_1 = 6, x_2 = 12$

$\therefore BD = 6, BF = 12$.

名题 4 (2004·玉林)如图3-96所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 射线 $AT \perp AB$, 点 P 是射线 AT 上的一个动点 (P 与 A 不重合), PC 与 $\odot O$ 相切于 C , 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , 连结 BC 并延长 BC 交 AT 于点 D , 连结 PB 交 CE 于 F .

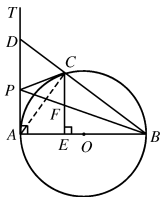


图 3-96

- (1)请你写出 PA 、 PD 之间的关系式, 并说明理由;
- (2)请你找出图中有哪些三角形的面积被 PB 分成两等分, 并加以证明;

(3)设过 A 、 C 、 D 三点的圆的半径是 R , 当 $CF = \frac{1}{4}R$ 时, 求 $\angle APC$ 的度数, 并在图 3-97 中做出点 P (要求尺规作图, 不写作法, 但要保留作图痕迹).

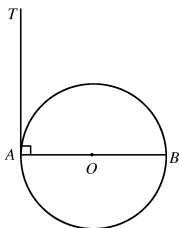


图 3-97

解 (1)如图 3-96 所示, 连结 AC .

$\therefore AT \perp AB$, AB 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore AT$ 是 $\odot O$ 的切线,

又 $\because PC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore PA = PC$,

$\therefore \angle PAC = \angle PCA$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$.

$\therefore \angle PAC + \angle ADC = 90^\circ, \angle PCA + \angle PCD = 90^\circ$.

$\therefore \angle ADC = \angle PCD$.

$\therefore PD = PC = PA$.

(2)由(1)知 $PD = PA$ 且同高,可见 $\triangle ABD$ 被 PB 分成面积相等的两个三角形,

$\because AT \perp AB, CE \perp AB$,

$\therefore AT \parallel CE$.

$\therefore \frac{CF}{PD} = \frac{BF}{BP}, \frac{EF}{PA} = \frac{BF}{BP}$.

$\therefore \frac{CF}{PD} = \frac{EF}{PA}$.

$\therefore CF = EF$.

可见 $\triangle CEB$ 也被 PB 分成面积相等的两个三角形.

(3)由(1)知 $PA = PC = PD$.

$\therefore PA$ 是 $\triangle ACD$ 的外接圆的半径,即 $PA = R$.

由(2)知 $CF = EF$ 而 $CF = \frac{1}{4}R$,

$\therefore EF = \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}PA$.

$\therefore \frac{EF}{PA} = \frac{1}{4}$.

$\because EF \parallel AT, \therefore \frac{BE}{AB} = \frac{EF}{PA} = \frac{1}{4}$.

$\therefore AE = 3BE$.

$\therefore CE = \sqrt{AE \cdot EB} = \sqrt{3EB \cdot EB} = \sqrt{3}BE$.

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中,

$\therefore \tan \angle CAE = \frac{CE}{AE} = \frac{\sqrt{3}BE}{3BE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \angle CAE = 30^\circ$.

$\therefore \angle PAC = 90^\circ - \angle CAE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

而 $PA = PC, \therefore \triangle PAC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle APC = 60^\circ$



知能转化平台

【题型发散】

1. 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)如图 3-98 所示,已知直线 BC 切 $\odot O$ 于点 C , PD 为 $\odot O$ 的直径, BP 的延长线与 CD 的延长线交于点 A , $\angle A = 28^\circ$, $\angle B = 26^\circ$, 则 $\angle PDC$ 等于 ()

图 3-98

A. 34° B. 36° C. 38° D. 40°

(2)一种花边是由如图 3-99 所示的弓形组成的,弧 ACB 的半径为 5, 弦 $AB = 8$, 则弓形的高 CD 为 ()

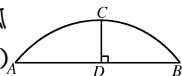


图 3-99

A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{16}{3}$

(3)如图 3-100 所示,在直角三角形 ABC 中, $\angle A = 90^\circ$, 以 BC 上的一点 O 为圆心作圆与 AB , AC 相切于 F , E 两点, 若 $AB = a$, $AC = b$, 则 $\odot O$ 的半径等于 ()

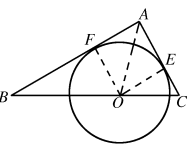


图 3-100

A. $\sqrt{ab}$ B. $\frac{a+b}{2}$

C. $\frac{ab}{a+b}$ D. $\frac{a+b}{ab}$

(4)如图 3-101 所示, $\triangle ABC$ 是圆内接正三角形, $\widehat{AD}$ 的度数为 60° , 则 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值为 ()

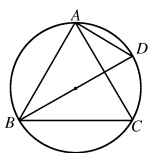


图 3-101

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{8}$

(5)如图 3-102 所示,已知扇形 OAB 的半径为 6 cm, AT 切 $\widehat{AB}$ 于 A 点, 交 OB 的延长线于 T 点, 如果 $AT = 4$ cm, $\widehat{AB}$ 的长为 3 cm, 则图中阴影部分的面积为 ()

A. 3 cm^2 B. 4 cm^2 C. 5 cm^2 D. 6 cm^2

2. 想一想, 填什么最准确?

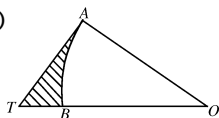


图 3-102

(1)两个相似三角形的面积比为 $1:3$, 那么它们的外接圆的半径之比是_____.

(2)已知两圆的半径为 3 和 4, 这两个圆的圆心距长是方程 $x^2 - 8x - 20 = 0$ 的一个根, 则这两个圆的公切线条数是_____.

(3)直角三角形的斜边长为 10 cm, 内切圆半径为 1 cm, 则这个三角形的周长

是_____ cm.

(4)如图 3-103 所示,扇形 $OAnB$ 及扇形 $OCmD$ 中,
 $OD=13$, $OB=5$, $\angle COD=120^\circ$, 则阴影部分的面积
 为_____.

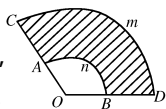


图 3-103

(5)如图 3-104 所示,正方形的边长为 a ,以各边为直径
 在正方形内画半圆,则所围成的图形(阴影部分)的面积
 是_____.

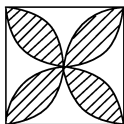


图 3-104

(6)已知 $\odot O$ 的直径 AB 为 2 cm,那么以 AB 为底、第三个顶
 点在圆周上的三角形中,面积最大的三角形的面积等
 于_____ cm^2 .

(7)两圆外切,外公切线与连心线夹角为 45° ,若圆心距为
 8 cm,则两圆的半径为_____ cm, _____ cm.

【解法发散】

1. 已知两圆相交于 A, B 两点,且一个圆经过另一个圆的圆心 O 点, $\odot O$ 的
 弦 BC 交另一个圆于 D . 求证: $AD=DC$. (用三种方法证明)

2. 已知 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 交于 A, B , 过 A 引任一割线 CAD 与 $\odot O, \odot O'$ 分别交于
 C, D . 求证: $\angle CBD$ 是定值. (用两种方法证明)

3. 已知 AD 是 $\odot O$ 内接 $\triangle ABC$ 的高, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F . 求证:
 $AO \perp EF$. (用两种方法证明)

【转化发散】

1. 如图 3-105 所示,已知 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $AO=OB$, $OD \perp AB$ 于 D , 以 O 为圆
 心,以 OD 为半径的圆交 OA 于 E , 在 BA 上截取 $BC=OB$. 求证: CE 是 $\odot O$ 的
 切线.

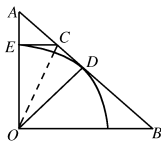


图 3-105

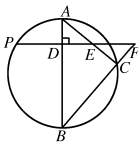
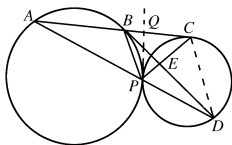


图 3-106

2. 如图 3-106 所示,已知 AB 为圆的直径, P, C 为 AB 两侧的圆上两点,过 P
 作 AB 的垂线,分别交 AB, AC 于 D, E 两点,交 BC 的延长线于 F . 求证: $DP^2 =$
 $DE \cdot DF$.

3. 如图 3-107 所示, 已知两圆外切于 P , 一条直线 ABC 交一圆于 A, B , 切另一个圆于 C 点, AP 的延长线交另一个圆于 D , BD 和 PC 相交于 E . 求证:



$$(1) PC^2 = PB \cdot PD;$$

$$(2) PB : PD = BE : ED.$$

【分解发散】

图 3-107

1. 如图 3-108 所示, 两半径相等的 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于 C , 且这两个圆同时与半径为 a 的 $\odot O_3$ 内切, $O_1 O_3 \perp O_2 O_3$. 试求图中阴影部分的面积 $S_{\text{阴}}$.

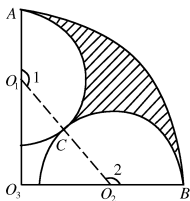


图 3-108

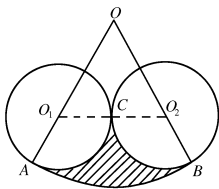


图 3-109

2. 如图 3-109 所示, 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 是两个等圆, 其半径是 2 cm, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于 C , 以半径为 6 cm 的圆弧和 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 相连接 (如图 3-109 所示交于 A, B) 求 $\widehat{AC}$ 、 $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{AB}$ 所围成的面积 S . (精确到 0.1)

3. 如图 3-110 所示, 已知半圆 $\odot O$ 直径 AB , C 为 $\odot O$ 上一点, $CD \perp AB$ 于 D , 以 AD 、 BD 为直径在半圆内作二半圆, $CD = m$. 求三半圆围成的伞形面积 $S_{\text{影}}$.

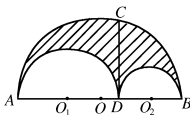


图 3-110

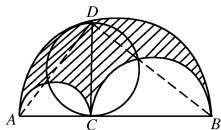


图 3-111

4. 如图 3-111 所示, 已知 C 是线段 AB 上一点, 分别以 AB 、 BC 、 AC 为直径作半圆, $CD \perp AB$, 垂足为 C , CD 交以 AB 为直径的半圆于 D . 求证: 图中阴影部分的面积等于以 CD 为直径的圆的面积.

【迁移发散】

1. 如图 3-112 所示, 已知 A 是 $\odot O$ 上一点, 以 A 为圆心作圆交 $\odot O$ 于 B, C 两点, E 是弦 BC 上一点, 连结 AE 并延长交 $\odot O$ 于 D , 连结 BD, CD . 设 $\angle BDC = 2\alpha$.

(1) 求证: $BD \cdot CD = AD \cdot ED$.

(2) 若 $ED:AD = \frac{3}{4} \cos^2 \alpha$, 求作一个以 $\frac{BD}{AD}$ 和 $\frac{CD}{AD}$ 为根的一元二次方程, 并求出 $\frac{BD}{CD}$ 的值.

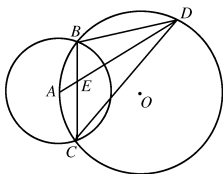


图 3-112

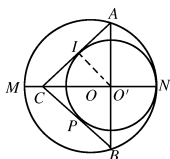


图 3-113

2. 如图 3-113 所示, 已知 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 内切于 N , $\odot O'$ 半径 r , 过 O' 作 $AB \perp OO'$ 交 $\odot O$ 于 A, B , 过 A, B 引 $\odot O'$ 切线交于 C , 且 $AC \perp BC$. 求 $\odot O$ 半径.

3. 如图 3-114 所示, 已知 $\odot O$ 中三等圆 $\odot A, \odot B, \odot C$ 两两外切, 且三等圆又内切于 $\odot O$ 中, 已知: $AB = BC = AC = 12$, 大圆 $\odot O$ 半径为 $\sqrt{K} + 6$. 求 K .

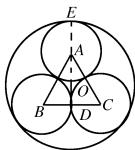


图 3-114

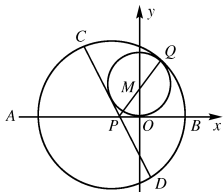


图 3-115

4. 如图 3-115 所示, AB, CD 是半径为 1 的 $\odot P$ 内两条直径, $0^\circ < \angle CPB < 180^\circ$. 设 PQ 平分 $\angle CPB$, M 在 PQ 上, $\odot M$ 与 $PC, PB, \widehat{CQB}$ 都相切, O, Q 分别为 $PB, \widehat{CQB}$ 的切点.

(1) 已知 $\odot M$ 的半径 r 是方程 $x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ 的一个根, 求: $\angle CPB$ 的值;

(2) 以直线 AB 为 x 轴, 直线 OM 为 y 轴 (分别以 OB, OM 为正方向) 建立坐

标系, 设函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过 P, M 两点, 求此函数的解析式.

【构造发散】

1. 如图 3-116 所示, 已知 PA 和 PB 切 $\odot O$ 于 A, B 两点, 作直径 AC 并延长交 PB 于 D 点. 求证: $DB:DC = PA:AO$.

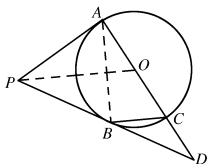


图 3-116

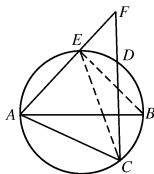


图 3-117

2. 如图 3-117 所示, $\odot O$ 的直径 AB 和弦 CD 垂直, F 为 CD 延长线上一点, 连结 AF 交 $\odot O$ 于 E . 求证: $AC^2 = AE \cdot AF$.

3. 已知 AB 和 CD 是 $\odot O$ 互相垂直的两条直径, M 在 $\widehat{BD}$ 上, MC 交 AB 于 L , MA 交 CD 于 K . 求证: $CK:KD = OA:OL$.

【综合发散】

1. 如图 3-118 所示, 已知 $\odot O$ 劣弧 $\widehat{AB}, \widehat{CD}$, 且 $AC > BD$. 求证: $AB > CD$.

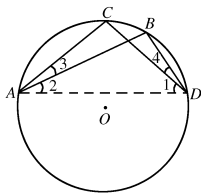


图 3-118

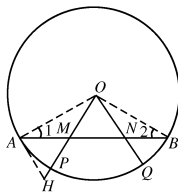


图 3-119

2. 如图 3-119 所示, 已知 $\odot O$ 中弦 AB , M, N 为 AB 三等分点, 连结 OM, ON 且延长交 $\odot O$ 于 P, Q . 求证: $\widehat{AP} < \widehat{PQ}$.

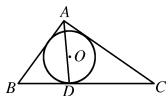


图 3-120

3. 如图 3-120 所示, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, AD 为高, r_1, r_2, r_3 分别为 $\triangle ABC, \triangle DBA, \triangle DAC$ 内切圆的半径, 求证: $r_1 + r_2 + r_3 = AD$.



第四单元 统计与概率

课标定位梳理

一、单元目标定位

1. 知识目标定位

(1)经历数据的收集、整理、描述与分析的过程,进一步发展学生统计意识和数据处理能力.

(2)通过具体问题情境,让学生感受一些人为的数据及其表示方式可能给人造成的一些误导,提高学生对数据的认识、判断、应用能力.

(3)通过具体问题情境,让学生初步体会如何评判某件事情是否“合算”,并利用它对现实生活中的一些现象进行评判.

2. 能力目标定位

(1)经历调查、统计、研讨等活动,在活动中进一步发展学生的合作交流的意识与能力.

(2)通过具体问题情境,进一步体会概率与统计知识的联系以及它们在现实生活中的应用,增强学生的应用意识和能力.

二、单元学法指导

统计活动往往不是一个人的力量能完成的,而对统计结果的评价因人而异,因此学习时应多与同学合作交流,通过各抒己见,扩大思维视角,加深对知识的理解.学习概率要树立随机意识,感悟概率在解决实际问题中的决策作用.在学习中应注意以下基本方法:

(1)在正确区分各类统计图特征的基础上,能根据具体问题选择合适的统计图,找出统计图中让人产生错觉的原因,并能从统计图中获得数据信息来分析解释问题.

(2)在加权平均数基础上,会计算摸彩活动的平均收益.

(3)会用列表法、画树状图法求某事件发生概率,并会利用游戏规则判断游戏公平性并修改规则使游戏公平.

50 年的变化 哪种方式更合算 游戏公平吗



自主学习提示

一、相关知识链接

1. 关于统计表的知识

(1)统计表 把统计的数据填写在一定的格式表内,用来反映情况,说明问题,这种表格叫做统计表.

(2)统计表的优点 用数据表示数量之间的差异关系,便于比较和研究.

(3)统计表的分类 有单式统计表、复式统计表、百分数统计表.

2. 关于统计图的知识

(1)统计图的优点 表示数量之间的关系更具体形象,给人印象深刻.

(2)统计图的分类 有条形统计图、折线统计图、扇形统计图.

(3)统计图的特点.

①条形统计图的特点 用一个单位长度表示一定的数量,容易看出数量的多少,便于直观比较,它分为单条形统计图、双条形统计图.

②折线统计图的特点 不但可以表示数量的多少,而且更能表示数量增减变化的情况,它分单折线统计图、双折线统计图.

③扇形统计图的特点 它是用整个圆面积表示总数,用扇形面积表示各部分占总数的百分之几,清楚地表示整体与部分的关系.

二、重难点知识提示

本节重点 会对某些事情做出评判.

本节难点 理解掌握“转盘平均获益”的理论计算方法.



发散思维分析

一、关于统计图的问题

1. 统计图的意义

用点、线、面等来表示相关联的量之间数量关系的图形叫做统计图.统计图能

直观形象地反映出事情的发展、变化或总体与部分的关系。

2. 扇形统计图

(1) 扇形统计图的概念.

利用圆和扇形来表示总体和部分的关系,即用圆代表总体,圆中的各个扇形分别代表总体中的不同部分,扇形的大小反映部分在总体中的百分比大小.这样的统计图叫做扇形统计图.

(2) 圆心角的概念.

3. 条形统计图

(1) 条形统计图的概念.

用一个单位长度表示一定的数量,根据数量的多少画成长短不同的直条,再把这些直条按照一定的顺序排列起来,这样的统计图叫做条形统计图.

(2) 画图注意事项:

- ①画条形统计图时,直条的宽窄必须相同;
- ②取一个单位长度表示数量的多少要根据具体情况而确定;
- ③复式条形统计图中表示不同项目的直条,要用不同的线纹或颜色区别开,并在制图日期下面注明图例.

4. 折线统计图

(1) 折线统计图的概念.

用一个单位长度表示一定的数量,根据数量的多少描出各点,然后把各点用线段顺次连结起来,所得的统计图叫做折线统计图.

(2) 画图注意事项.

折线统计图横轴表示不同的年份、月份等时间,不同时间之间的距离要根据年份或月份的间隔来确定.

二、平均数

1. 平均数的概念

一般地,对于 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 我们把 $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 叫做这 n 个数的算术平均数(mean),简称平均数,记为 $\bar{x}$.

2. 加权平均数

如果在 n 个数中 x_1 出现 f_1 次, x_2 出现 f_2 次, $\dots$, x_k 出现 f_k 次 ($f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$) 则 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k)$ 叫加权平均数(weighted mean).

三、众数和中位数

1. 众数

在一组数据中,出现次数最多的数据叫做这组数据的众数(mode).

2. 中位数

将一组数据按大小依次排列,把处在最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的中位数(median).

四、统计与概率的关系

(1)当实验次数很大时实验频率稳定于理论概率.

(2)当实验次数很大时,我们可以通过多次实验,用一个事件发生的频率来估计这一事件发生的概念.

(3)概率的定义,实际上也是求一个事件的概率的基本方法.

随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次,那么有 $0 \leq m \leq n$ $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$,于是可得 $0 \leq P(A) \leq 1$.

(4)通过具体情境的分析,让学生在具体情境中感受“合算”,并掌握一定的判断方法,提高其决策能力.

下面让我们共同探究某校九年级数学期末测试成绩情况:

❖ 与你探究 ❖

【问题】为了解某校九年级数学期末测试成绩,从中抽取部分学生的数学成绩进行统计分析,各分数段的人数如图 4-1 所示(分数取正整数,满分为 100 分).请观察图形,并回答下列问题:

(1)这次共抽取了多少名学生的数学成绩?

(2)试估计该校初三学生期末测试的平均成绩.

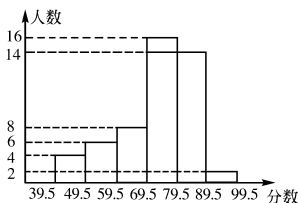


图 4-1

【准备】取每一分数段中正中间的整数作为该分数段的学生成绩,然后通过求加权平均数来估计这 50 名学生的平均成绩,并由此估计该校全体初三学生期末测试的平均成绩.

【过程】(1) $2 + 4 + 6 + 8 + 14 + 16 = 50$ 人.

(2) $\frac{45 \times 4 + 55 \times 6 + 65 \times 8 + 75 \times 16 + 85 \times 14 + 95 \times 2}{50} = 72.2 \approx 72$ (分).

答 这次共抽取了 50 名学生的数学成绩,由这 50 名学生的平均成绩约为 72 分可估计该校初三学生这次期末测试的平均成绩约为 72 分.

【评析】 估算样本平均数时,可取各段最中间的那个数作为相应段的各个数据,再通过求加权平均数估算出样本平均数,从而估算出总体平均数,这种解法也与实际生活中处理问题的方法相同.

下面让我们通过用转盘做“配紫”游戏来探究是否公平的问题:

❖ 与你探究 ❖

【问题】 甲、乙两名学生用如图 4-2 所示的两个转盘做“配紫”游戏(配紫是指红 + 蓝 = 紫的配色原理),若配成紫色则甲得 1 分,否则乙得 1 分.

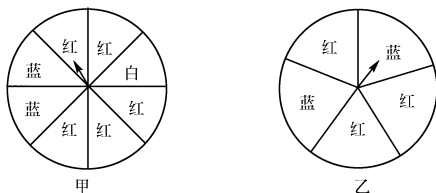


图 4-2

(1)这个游戏公平吗?为什么?

(2)如果不公平,如何修改游戏规则,才能使游戏对双方都公平?

【准备】 评判游戏是否公平,关键是看参加游戏的双方每实验一次平均得分的平均数,它是实验一次的得分概率与分值的乘积,落脚点还是求概率.此题的“配紫”概率可用列表法或树状图法求出,还可以这样求:转甲转盘转出红的概率为 $\frac{5}{8}$,转乙转盘转出蓝的概率为 $\frac{2}{5}$,所以甲红乙蓝的配紫概率为 $\frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$,同理可求出甲蓝乙红的配紫概率为 $\frac{2}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$,所以配紫总概率为 $\frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$,未配成紫的概率为 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$,由此可以评判游戏是否公平.

【过程】 (1)因为自由转动两个转盘的配紫概率为 $\frac{2}{5}$,所以甲平均每次的得分为 $1 \text{分} \times \frac{2}{5} = 0.4 \text{分}$,而乙平均每次的得分为 $1 \text{分} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 0.6 \text{分}$,所以游戏不公平.

(2)为使游戏公平,也就是使双方每次平均得分相等,只有在配分上做文章,方法很多,如配紫成功甲得 2.5 分,否则乙得 $\frac{5}{3}$ 分.

【评析】 若想使不公平的游戏变为公平的游戏,必须使参加游戏的双方每次

平均得分相等.要想改变游戏规则,须从两个方面着手:一是调配发生事件的概率;二是调配每次发生事件的配分,此例是用第二种方法进行调整的.



发散思维应用

典型例题 1

某公司的 33 名职工的月工资如下(单位:元):

职务	董事长	副董事长	董事	总经理	经理	管理员	职员
人数	1	1	2	1	5	3	20
工资	5 500	5 000	3 500	3 000	2 500	2 000	1 500

(1)求该公司职工月工资的平均数、中位数、众数;

(2)假设副董事长的工资从 5 000 元提升到 20 000 元,董事长的工资从 5 500 元提升到 30 000 元,那么新的平均数、中位数、众数又是什么?(精确到元)

(3)你认为哪个统计量更能反映这个公司员工的工资水平?结合此问题谈一谈你的看法.

分析 求平均数时可以用加权平均数公式计算.

$$\text{解 } (1) \bar{x} = \frac{5\,500 + 5\,000 + 3\,500 \times 2 + 3\,000 + 5 \times 2\,500 + 3 \times 2\,000 + 20 \times 1\,500}{1 + 1 + 2 + 1 + 5 + 3 + 20} \\ \approx 2\,090 \text{ (元)}.$$

$\therefore$ 中位数是 1 500 元,众数是 1 500 元.

(2)新的平均数是

$$\bar{x} = 1\,500 + \frac{28\,500 + 18\,500 + 2\,000 \times 2 + 1\,500 + 1\,000 \times 5 + 500 \times 3 + 0 \times 20}{33} \\ \approx 1\,500 + 1\,788 = 3\,288 \text{ (元)}.$$

$\therefore$ 中位数是 1 500 元,众数是 1 500 元.

(3)在这个问题中,中位数或众数均能反映该公司员工的工资水平,因为公司中少数人的工资额与大多数人的工资额差别较大,这样导致平均数与中位数偏差较大,所以平均数不能反映这个公司员工的工资水平.

【题型发散】

发散 1 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)(2004·山西)为了了解本校九年级学生的体能情况,随机抽查了其中 30

名学生,测试了 1 min 仰卧起坐的次数,并绘制成如图所示的频数分布直方图,请根据图 4-3 所示计算,仰卧起坐次数在 25~30 次的频率是 ()

- A.0.1 B.0.2 C.0.3 D.0.4

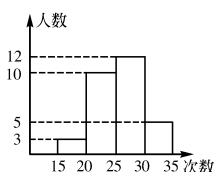
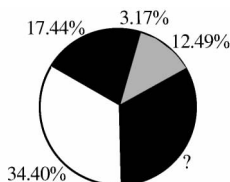


图 4-3

(2)(2004·海口)第五次全国人口普查资料显示,2000 年海南省总人口为 786.75 万,图 4-4 中表示该省 2000 年接受初中教育这一类别的数据丢失了,那么,结合图中信息,可推知 2000 年海南省接受初中教育的人数为 ()

- A.24.94 万 B.255.69 万
C.270.64 万 D.137.21 万



2000 年海南省受教育程度人口统计图

图 4-4

解 (1)仰卧起坐次数在 25~30 次的频率是 $\frac{12}{30} =$

0.4 故本题应选 D.

(2)分析 用数形结合法.

解 海南省接受初中教育的人数占海南总人口的百分比为

$$1 - (34.40\% + 17.44\% + 3.17\% + 12.49\%) = 1 - 67.5\% = 32.5\%.$$

∴ 2000 年海南省接受初中教育的人数为

$$786.75 \times 32.5\% = 255.69 \text{ (万)}.$$

故本题应选 B.

发散 2 想一想,填什么最准确?

(1)(2004·济南)为了调查不同面额纸币上细菌数量与使用频率之间的关系.

某中学研究性学习小组从银行、商店、农贸市场及医院收费处随机采集了 8 种面额的纸币各 30 张,分别用无菌生理盐水漂洗这些纸币,对洗出液进行细菌培养,测得数据如下表:

面 额	2 角	5 角	1 元	2 元	5 元	10 元	50 元	100 元
细菌总数 (个/30 张)	126 150	147 400	381 150	363 100	98 800	145 500	25 700	12 250

①计算出被采集的所有纸币平均每张的细菌个数约为_____ (结果取整数).

②由表中数据推断出面额为_____的纸币的使用频率较高.根据上面的推断和生活常识总结出:纸币上细菌越多,纸币的使用频率_____.看来,接触钱币以后要注意洗手噢!

(2)(2004·山西)从全市 5 000 份试卷中随机抽取 400 份试卷,其中有 360 份成绩合格,估计全市成绩合格的人数约为_____人.

$$\begin{aligned}\text{解(1)} \quad ① \quad & \frac{126\,150 + 147\,400 + 381\,150 + 363\,100 + 98\,800 + 145\,500 + 25\,700 + 12\,250}{30 \times 8} \\ & = \frac{1\,300\,050}{240} = 5\,416.87 \approx 5\,417.\end{aligned}$$

②面额为 1 元的纸币使用频率较高,纸币上细菌越多,纸币的使用频率越高.

(2)全市成绩合格的人数约为

$$5\,000 \times \frac{360}{400} = 4\,500 \text{ 人}.$$

【生活发散】

发散 3 (2004·贵阳)下面两幅统计图(图 4-5、图 4-6)反映了某市甲、乙两所中学学生参加课外活动的情况.请你通过图中信息回答下面的问题.

甲、乙两校参加课外活动的
学生人数统计图
(1997~2003年)

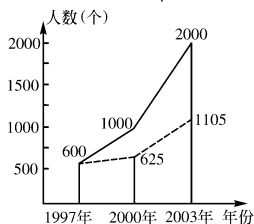


图 4-5

2003 年甲、乙两校学生参加
课外活动情况统计图

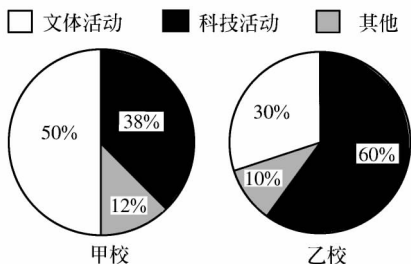


图 4-6

- (1)通过对图 4-5 的分析,写出一条你认为正确的结论;
- (2)通过对图 4-6 的分析,写出一条你认为正确的结论;
- (3)2003 年甲、乙两所中学参加科技活动的学生人数共有多少?

解 (1)1997 年至 2003 年甲校学生参加课外活动的人数比乙校增长得快.

(答案不惟一)

(2)甲校学生参加文体活动的人数比参加科技活动的人数多.(答案不惟一)

(3) $2\,000 \times 38\% + 1\,105 \times 60\% = 1\,423$ 人

答 2003 年两所中学的学生参加科技活动的总人数是 1 423 人.

发散 4 (2004·哈尔滨)中小学生的视力状况受到全社会的广泛关注,某市有关部门对全市 4 万名初中生的视力状况进行一次抽样调查统计,所得到的有关

数据绘制成频率分布直方图,如图 4-7 所示,从左至右五个小组的频率之比依次是 2:4:9:7:3,第五小组的频数是 30.

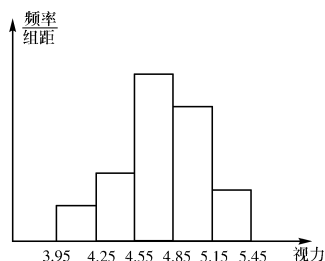


图 4-7

(1)本次调查共抽测了多少名学生?

(2)本次调查抽测的数据的中位数应在哪个小组?说明理由;

(3)如果视力在 4.9~5.1(含 4.9、5.1)均属正常,那么全市初中生视力正常的约有多少人?

解 (1)因为频率之比等于频数之比,设第一小组的频率数为 $2k$,所以各组的频数依次为 $2k$ 、 $4k$ 、 $9k$ 、 $7k$ 、 $3k$,于是 $3k = 30$,所以 $k = 10$.

$$\therefore 2k = 20 \quad 4k = 40 \quad 9k = 90 \quad 7k = 70,$$

$$\therefore 20 + 40 + 90 + 70 + 30 = 250 \text{ (名)}.$$

答 本次调查共抽测了 250 名学生.

(2)中位数应在第三小组.

$\because$ 250 个数据的中位数是第 125 和第 126 两个数据的平均数,前两个小组的频数之和是 $20 + 40 = 60$, $60 < 125$.

第三小组的频数是 90, $90 + 60 = 150$, $150 > 126$,

$\therefore$ 中位数应在第三小组.

(3) $\because$ 视力在 4.9~5.1 范围内的人有 70 人,

$$\therefore \text{频率} = \frac{70}{250} = 0.28,$$

$$\therefore \text{全市初中生视力正常的约有 } 40\,000 \times 0.28 = 11\,200 \text{ (人)},$$

答 全市初中生视力正常的约有 11 200 人.

【应用发散】

发散 5 现代战争,需要先进的科技和高素质的人员.第四次中东战争,阿拉伯国家以强大的兵力对以色列发起大规模突然袭击,但以以色列依靠其先进的国防

科技和高素质的人员最终扭转了战局 根据下表回答问题：

第四次中东战争阿以双方军事实力与战争损失概略统计

区分	国家	兵员 (千人)	坦克 (辆)	作战飞机 (架)	舰艇 (艘)
战前军事实力	阿拉伯	埃及	320	2 000	600
		叙利亚	150	1 300	280
		其他	50~70	800	160
	以色列	115	1 700	360	40
损失	阿拉伯	8.5	2 200	450	10
	以色列	2.8	850	110	1

(1)第四次中东战争中 阿拉伯国家损失的参战人员比以色列多多少？

(2)交战双方参战的坦克的损失率各是多少？

(3)阿拉伯国家参战的舰艇数量是以色列的多少倍？

(4)阿拉伯国家损失的飞机比以色列全部的飞机还要多多少架？

解 (1)阿拉伯国家参战损失的人员比以色列多 5.7 千人.

(2)交战双方参战的坦克的损失率分别为 53.7% 50%.

(3)阿拉伯国家参战的舰艇数量是以色列的 3.5 倍.

(4)阿拉伯国家损失的飞机比以色列全部的飞机还要多 90 架.

【转化发散】

发散 6 已知 3, 2, a , 5, 6 这五个数字, 其中 a 是这五个数字的中位数, 且 a 是方程 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 的一个根, 求这五个数字的平均数.

分析 先求出一元二次方程 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 的两个根, 再通过 3, 2, a , 5, 6 这五个数的中位数验证求出数 a , 再求标准差.

解 $\because x^2 - 10x + 24 = 0, (x - 4)(x - 6) = 0.$

$\therefore x = 4$ 或 $x = 6.$

考虑到 3 + 2 + 4 + 5 + 6 的中位数是 4, $\therefore a = 4,$

$\therefore \bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = \frac{20}{5} = 4.$

【逆向发散】

发散 7 已知在 n 个数据中, x_1 出现了 f_1 次, x_2 出现了 f_2 次, ..., x_k 出现了 f_k 次, 并且 $\sum_{i=1}^k f_i = n$. 设 $\bar{x}$ 是这 n 个数据的平均数, 求证: $\sum_{i=1}^k f_i(x_i - \bar{x}) = 0.$

分析 运用逆向思维展开证明.

证明 由平均数公式 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i x_i$, $\therefore \sum_{i=1}^k f_i x_i = n \bar{x}.$

$$\therefore \sum_{i=1}^k f_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^k f_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^k f_i = n \bar{x} - \bar{x} n = 0.$$

注 $\sum_{i=1}^k f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_k.$

$$\sum_{i=1}^k f_i(x_i - \bar{x}) = f_1(x_1 - \bar{x}) + f_2(x_2 - \bar{x}) + \dots + f_k(x_k - \bar{x}).$$

【综合发散】

发散 8 根据下列世界人口城市化发展趋势条形图(图 4-8)回答问题：

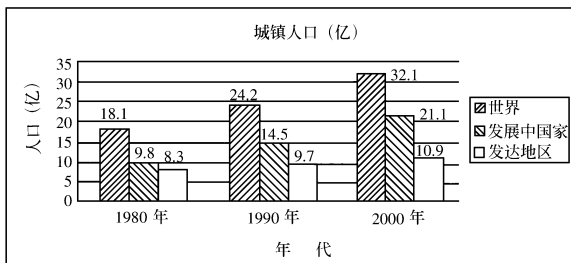


图 4-8

(1) 1980 年世界的城镇人口约是多少？1990 年发展中国家的城镇人口约是多少？2000 年发达地区的城镇人口占总人口的比例约是多少？

(2) 将这两个条形图改画成折线图。根据折线图回答：是发展中国家城镇人口总数多，还是发达地区城镇人口总数多？是发展中国家城镇人口占总人口的比例大，还是发达地区城镇人口占总人口的比例大？

(3) 根据第二个折线图(图 4-9)回答：由折线图的变化趋势，预测 2000 年后的 10 年，是发展中国家城镇人口占总人口的比例上升得快，还是发达地区城镇人口占总人口的比例上升得快？

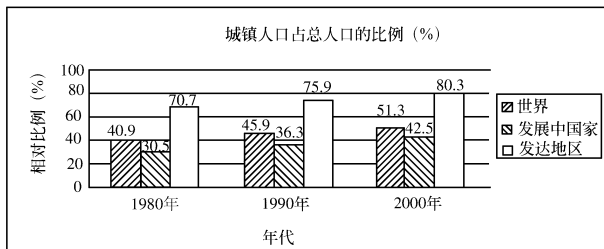


图 4-9

解 (1)1980年世界的城镇人口约为18.1亿;1990年发展中国家的城镇人口约是14.5亿;2000年发达地区的城镇人口占总人口的比例约占80.3%.

(2)折线图略,发展中国家城镇人口总数多,发达地区城镇人口占总人口的比例大.

(3)发展中国家城镇人口增长得快.

发散9 为了了解小学生的体能情况,抽取了某小学同年级部分学生进行跳绳测试,将所得数据整理后,画出频率分布直方图如下,已知图4-10从左到右前三个小组的频率分别是0.1, 0.3, 0.4,第一小组的频数为5.

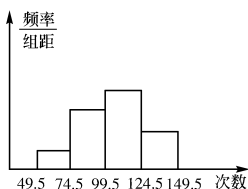


图 4-10

(1)求第四小组的频率;

(2)问参加这次测试的学生数是多少?

(3)问在这次测试中,学生跳绳次数的中位数落在四个小组中的哪一个小组内?并说明理由.

解 (1)因为各小组的频率之和等于1,所以第四小组的频率为

$$1 - (0.1 + 0.3 + 0.4) = 0.2;$$

(2)因为第一小组频率为0.1,频数为5,所以参加这次测试的学生数为

$$\frac{5}{0.1} = 50 \text{ (人)};$$

(3) $\because$ 第一小组的频数为5,即有5个数据,所以第二小组的频数为 $50 \times 0.3 = 15$,即有15个数据,第三小组的频数为 $50 \times 0.4 = 20$,即有20个数据.

将这些数据从小到大排列,可知这50个数据中,位于第25、第26个位置的数据落在第三小组内.

所以,这次测试中,学生跳绳次数的中位数落在第三小组内.

典型例题 2

在掷骰子的游戏中,当两枚骰子的点数之积为质数时,小明得2分;当两枚骰子的点数之积为合数时,小刚得1分.你认为该游戏对谁有利?如果当两枚骰子的点数之差小于(大数减小数)或等于1时,小刚得1分,否则小明得1分呢?

分析 采用列表的办法,找准可能出现的点数组合,再计算.

解 (1)当第一枚为1时,另一枚有6种可能,此时积为1,2,3,4,5,6;

当第一枚为2时,另一枚有6种可能,此时为2,4,6,8,10,12;

当第一枚为3时,另一枚有6种可能,此时为3,6,9,12,15,18;

当第一枚为4和6时,均不可能为质数;

当第一枚为5时,另一枚有6种可能,此时为5,10,15,20,25,30.

故其中为质数的概率仅为 $\frac{1}{6}$, 小刚获胜的概率为 $\frac{5}{6}$, 该游戏对小刚有利.

(2) 游戏对小明有利, 因为小明获胜的概率为 $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$, 小刚获胜的概率为

$$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

解法指导 这类组合类问题, 可采用列表的办法或树状图来求解概率.

【题型发散】

发散 1 看一看, 你能选出正确答案吗?

(1)(2004·山西) 下列事件中确定事件是 ()

- A. 掷一枚六个面分别标有 1~6 的数字的均匀骰子, 骰子停止转动后偶数点朝上
- B. 从一副扑克牌中任意抽出一张牌, 花色是红桃
- C. 任意选择电视的某一频道, 正在播放动画片
- D. 在同一年出生的 367 名学生中, 至少有两人的生日是同一天

(2)(2004·海口) 从一副扑克牌中抽出 5 张红桃, 4 张梅花, 3 张黑桃放在一起洗匀后, 从中一次随机抽出 10 张, 恰好红桃、梅花、黑桃 3 种牌都抽到, 这种事件 ()

- A. 可能发生
- B. 不可能发生
- C. 很有可能发生
- D. 必然发生

(1) 分析 用排除法.

解 A、B、C 中的事件均是不确定事件, 应排除, 惟 D 中事件是确定事件.

故本题应选 D.

(2) 分析 用直接法.

解 若 10 张中有 5 张红桃, 4 张梅花, 还有 1 张必定是黑桃; 若 10 张中有 4 张梅花, 3 张黑桃, 还有 3 张必定是红桃; 若 10 张中有 3 张黑桃, 5 张红桃, 还有 2 张必定是梅花.

故本题应选 D.

发散 2 想一想, 填什么最准确?

(1)(2004·海口) 在一个不透明的袋中装有除颜色外其余都相同的 3 个小球, 其中一个红球, 两个黄球. 如果第一次先从袋中摸出一个球后不再放回, 第二次再从袋中摸出一个, 那么两次都摸到黄球的概率是_____.

(2)(2004·常德) 一个骰子, 六个面上的数字分别为 1、2、3、3、4、5, 投掷一次, 向上的面出现数字 3 的概率是_____.

解 (1) 两次都摸到黄球的概率是 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

(2) 向上的面出现数字 3 的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

【生活发散】

发散 3 (2004·潍坊)2004 年,某校三年级的初中在校学生共 796 名,学生的出生月份统计如图 4-11 所示.根据图中数据回答以下问题.

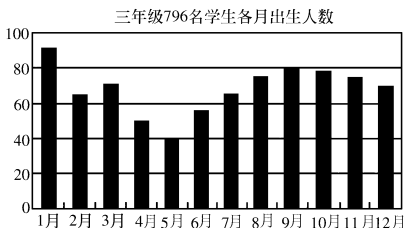


图 4-11

- (1)出生人数超过 60 人的月份有哪些?
- (2)出生人数最多的是几月?
- (3)在这些学生中至少有两人生日在 10 月 5 日是不可能的,还是可能的,还是必然的?

(4)如果你随机地遇到这些学生中的一位,那么这位学生生日在哪一个月的概率最小?

解 (1)1 月份 2 月份 3 月份 7 月份 8 月份 9 月份 10 月份 11 月份 12 月份.

(2)1 月份.

(3)可能的.

(4)5 月份.

【应用发散】

发散 4 某商场为了吸引顾客,设立了一个可以自由转动的转盘(如图4-12所示),并规定:顾客购买 100 元的商品,就能获得一次转动转盘的机会.如果转盘停止后,指针正好对准红色、黄色、绿色区域,那么顾客就可以分别获得 100 元、50 元、20 元的购物券,凭购物券可以在该商场继续购物.与图4-13的转盘相比,用哪个转盘对顾客更合算?为什么?

解 如图 4-12 所示,转动一次转盘所获购物券金额的平均数为

$$100 \times \frac{1}{16} + 50 \times \frac{3}{16} + 20 \times \frac{4}{16} = \frac{330}{16},$$

如图 4-13 所示,转动一次转盘所获购物券金额的平均数为



图 4-12



图 4-13

$$100 \times \frac{2}{16} + 50 \times \frac{1}{16} + 20 \times \frac{3}{16} = \frac{310}{16},$$

因为前者大于后者, 故用图 4-12 的转盘对顾客更合算.

【数形发散】

发散 5 下面是一个机器人做 9 999 次“抛硬币”游戏时记录下的出现正面的频数和频率表, 以及我们根据出现正面的频率画的一张条形统计图:

抛掷结果	5 次	50 次	300 次	800 次	3 200 次	6 000 次	9 999 次
出现正面的频数	1	31	135	408	1 580	2 980	5 006
出现正面的频率	20%	62%	45.0%	51.0%	49.4%	49.7%	50.1%

(1) 由这张频数和频率表可知, 机器人抛掷完 5 次时, 得到 1 次正面, 正面出现的频率是 20%, 那么, 也就是说, 机器人抛掷完 5 次时, 得到_____次反面, 反面出现的频率是_____;

(2) 由这张频数和频率表可知, 机器人抛掷完 9 999 次时, 得到_____次正面, 正面出现的频率是_____, 那么, 也就是说, 机器人抛掷完 9 999 次时, 得到_____次反面, 反面出现的频率是_____;

(3) 如果你和你的朋友一起合作也抛掷完 9 999 次, 你们记录下的频数和频率表会与这张记录表一模一样吗? 为什么?

(4) 观察条形统计图 4-14 当抛掷次数很多很多以后(比如 800 次以后)出现正面的频率是否比较稳定?

解 (1) 机器人抛掷完 5 次时, 得到 4 次反面, 反面出现的频率是 80%.

(2) 机器人抛掷完 9 999 次时, 得到 5 006 次正面, 正面出现的频率是 50.1%. 得到 4 993 次反面, 反面出现的频率是 49.9%.

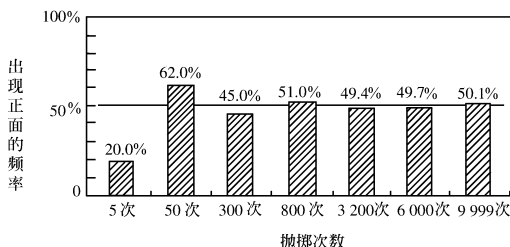


图 4-14

(3)不会,因为每次抛掷的结果是随机的,不确定的.

(4)是.

【综合发散】

发散 6 (2004·青岛)小明和小刚用图 4-15 所示的两个转盘做游戏,游戏规则如下:

分别旋转两个转盘,当两个转盘所转到的数字之积为奇数时,小明得 2 分,当所转到的数字之积为偶数时,小刚得 1 分.

这个游戏对双方公平吗?若公平,说明理由;若不公平,如何修改规则才能使游戏对双方公平?

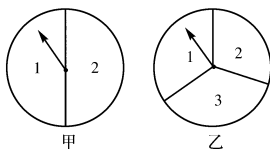


图 4-15

解 公平.将两个转盘所转到的数字求积:

积 \ 乙	1	2	3
甲 \ 1	1	2	3
甲 \ 2	2	4	6

从表中可以得到 $P_{\text{积为奇数}} = \frac{2}{6}$, $P_{\text{积为偶数}} = \frac{4}{6}$.

$\therefore$ 小明的积分为 $\frac{2}{6} \times 2 = \frac{4}{6}$,

小刚的积分为 $\frac{4}{6} \times 1 = \frac{4}{6}$.

因此,游戏对双方公平.

发散 7 小强与小亮正在做掷骰子游戏,两人各掷一枚骰子.当两枚骰子的点数之和大于 5 时,小强得 1 分,否则小亮得 1 分,这个游戏对双方公平吗?当两枚骰子点数之和大于 7 时,小强得 1 分,否则小亮得 1 分,这个游戏对双方公平吗?为什么?

解 按照前面法则小强获胜的概率为 $\frac{26}{36} = \frac{13}{18}$,小亮获胜的概率为 $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

$\therefore \frac{13}{18} \neq \frac{5}{18}$,这个游戏对小亮不公平;

按照后面的办法,小强获胜的概率为 $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$;

小亮获胜的概率为 $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

$$\therefore \frac{5}{12} \neq \frac{7}{12},$$

故按后面办法的游戏对小强不公平.



自主达标演练

这些知识你应该掌握 ——

【题型发散】

1. 在下面一组数据 7, 9, 6, 8, 10, 12 中, 下面说法正确的是 ()

- A. 中位数等于平均数 B. 中位数大于平均数
C. 中位数小于平均数 D. 中位数是 8

2. 已知一组数据 $x, 5, 0, 3, -1$ 的平均数 $\bar{x} = 1$, 那么它的中位数是 ()

- A. 0 B. 2.5 C. 1 D. 0.5

3. 已知一组数据 23, 27, 20, 18, x , 12, 若它们的中位数是 21, 那么数据 x 是 ()

- A. 23 B. 22 C. 21 D. 20

4. 公园里有甲、乙两群游客正在做团体游戏, 两群游客的年龄如下 (单位: 岁)

甲群: 13, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 17

乙群: 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 54, 57

(1) 甲群游客的平均年龄是 _____ 岁, 中位数是 _____ 岁, 众数是 _____ 岁, 其中能较好反映甲群游客年龄特征的是 _____.

(2) 乙群游客的平均年龄是 _____ 岁, 中位数是 _____ 岁, 众数是 _____ 岁, 其中能较好反映乙群游客年龄特征的是 _____.

5. 某校在一次考试中, 甲乙两班学生的数学成绩统计如下:

分数		50	60	70	80	90	100
人数	甲班	1	6	12	11	15	5
	乙班	3	5	15	3	13	11

请根据表格提供的信息回答下列问题:

(1) 甲班众数为 _____ 分, 乙班众数为 _____ 分, 从众数看成绩较好的

是_____班；

(2)甲班的中位数是_____分,乙班的中位数是_____分,甲班中成绩在中位数以上(包括中位数)的学生所占的百分比是_____% ,乙班中成绩在中位数以上(包括中位数)的学生所占的百分比是_____% ,从中位数看成绩较好的是_____班；

(3)若成绩在 85 分以上为优秀,则甲班的优秀率为_____% ,乙班的优秀率为_____% ,从优秀率看成绩较好的是_____班.

【纵横发散】

1. 有七个数由小到大依次排列,其平均数为 38,如果这组数据的前四个数的平均数是 33,后四个数的平均数是 42,求这七个数的中位数.

2. 为了了解某班男学生的身体状况,从该班抽出 10 名男学生测量体重,他们的体重(单位为 kg)分别如下:32,62,35,40,37,35,48,50,42,45. 求出平均体重(精确到 0.1 kg),中位数,众数.

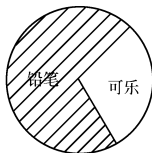
【生活发散】

1. (2004·四川)将分别标有数字 1,2,3 的三张卡片洗匀后,背面朝上放在桌面上.

(1)随机地抽取一张,求 $P(\text{奇数})$;

(2)随机地抽取一张作为十位上的数字(不放回),再抽取一张作为个位上的数字,能组成哪些两位数?恰好是“32”的概率为多少?

2. (2004·温州)某商场设立了一个可以自由转动的转盘(如图 4-16 所示),并规定:只要顾客购物 10 元以上,就能获得一次转动转盘的机会,当转盘停止时,指针落在哪一区域就可以获得相应的奖品,下表是活动进行中的一组统计数据.



(1)计算并完成以下表格：

图 4-16

转动转盘的次数 n	100	150	200	500	800	1000
落在“铅笔”的次数 m	68	111	136	345	564	701
落在“铅笔”的频率 $\frac{m}{n}$						

(2)请估计,当 n 很大时,频率将会接近多少?

(3)假如你去转动该转盘一次,你获得铅笔的概率约是多少?

(4)在该转盘中,标有“铅笔”区域的扇形的圆心角大约是多少?(精确到 1°)

【应用发散】

1. 已知一个样本 1,4,2,a,3,它的平均数是 b ,且 a,b 是方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 的两个根,求 a,b .

2. 如图 4-17 所示的两个转盘进行“配紫色”游戏:分别旋转两个转盘,若其中一个转盘转出了红色,另一个转出了蓝色,则可配成紫色,此时小强得 1 分,否则小亮得 1 分.

这个游戏对双方公平吗?为什么?

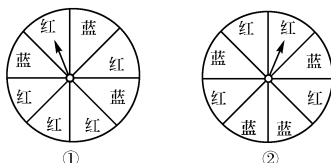


图 4-17

【综合发散】

1. 如图 4-18 所示, $\triangle ABC$ 是一块锐角三角形材料,边 $BC=120$ mm,高 $AD=80$ mm,要把它加工成一个矩形零件,使矩形的一边在 BC 上,其余两个顶点分别在 AB, AC 上,设该矩形的长 $QM=y$ mm,宽 $MN=x$ mm.

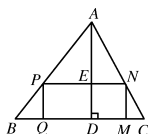


图 4-18

(1)求证: $y = 120 - \frac{3}{2}x$.

(2)当 x 与 y 分别取什么值时,矩形 $PQMN$ 的面积最大?最大面积是多少?

(3)当矩形 $PQMN$ 的面积最大时,它的长和宽是关于 t 的一元二次方程 $t^2 - 10pt + 200q = 0$ 的两个根,而 p, q 的值又恰好分别是 $a, 10, 12, 13, b$,这 5 个数据的众数与平均数,试求 a 与 b 的值.

2. (2004·苏州)如图 4-19 所示的统计图反映了某中国移动用户 5 月份手机的使用情况,该用户的通话对象分为三类:市内电话,本地中国移动用户,本地中国联通用户.

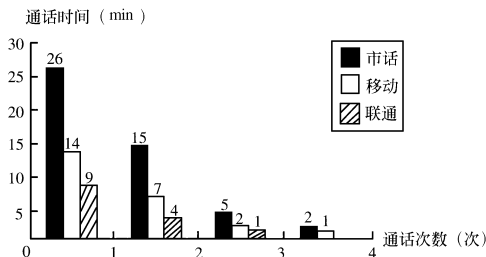


图 4-19

(1)该用户 5 月份通话的总次数为_____次；

(2)已知该用户手机的通话均按 0.6 元/分钟计费,求该用户 5 月份的话费(通话时间不满 1 分钟按 1 分钟计算,例如,某次实际通话时间为 1 分 23 秒,按通话时间 2 分钟计费,话费为 1.2 元)；

(3)当地中国移动公司推出了名为“越打越便宜”的优惠业务,优惠方式为:若与其他中国移动用户通话,第 1 分钟为 0.4 元,第 2 分钟为 0.3 元,第 3 分钟起就降为每分钟 0.2 元,每月另收取基本费 10 元,其余通话费方式不变,如果使用了该业务,则该用户 5 月份的话费会是多少？

3. 射击游戏中要求参加者命中图 4-20 所示的九个铁罐之一,奖项如下:

一等奖:命中“数字 7”

二等奖:命中 3 的倍数

三等奖:命中奇数

四等奖:命中偶数

(1)请你推测一下,一、二、三、四等奖各自的概率是多少？(设每次都射中其中一个铁罐)

(2)你觉得这样设置获奖规则合理吗？为什么？你能重新设置较为合理的获奖规则吗？

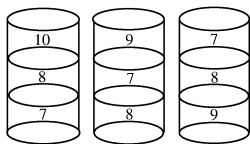


图 4-20

课后习题答案,你需要吗?

随堂练习(课本第 154 页)

1.(1)小亮最高,小丽最矮,他们相差 0.3 m;

(2)舟舟的身高是小丽的 $\frac{14}{13}$ 倍;

(3)这个图易使人产生错误的感觉,如人们从图中容易误认为舟舟的身高是小丽的 2 倍;

(4)为了更为直观、清楚地反映这 5 名同学的身高状况,纵轴上的数据应从 0 开始.

习题 4.1(课本第 155 页)

1.(1)小明所绘的图更令人觉得永昌公司的效益蒸蒸日上;

(2)它们所表示的数据相同;

(3)两个图象中纵轴上同一单位长度所表示的意义不同,因而造成图象的倾斜程度不同,给人以不同的感觉;

(4)与小亮的图相比,小英的图更令人觉得永昌公司的效益蒸蒸日上,两个图表示的数据相同,因为两图的高度虽然相同,但两图中横轴上表示一年的长度不同,因而小英的图更“窄”,其相应的折线更“陡”.

2.(1)学生到相关部门或网站查找资料;

(2)从图中不能断定我国 1996 年的小学生数比 1997 年多.

3.(1)这个月数学书与自然科学书销售量的比大约是 3:5;

(2)纵轴上的数值应从 0 开始.

随堂练习(课本第 164 页)

这部分居民家庭人口数的众数是 3 人,平均数是 3.4 人.

习题 4.2(课本第 164 页)

1. 该校师生购买饭菜费用的平均数是 2.95 元,众数是 3 元;

2. 该厂的说法不正确.实际上,该厂的算法是: $\frac{10\% + 30\% + 20\%}{3} = 20\%$, 而

比较准确的算法应该是: $\frac{10 \times 10\% + 2 \times 30\% + 3 \times 20\%}{10 + 2 + 3} \approx 14.7\%$.

3. 略.

随堂练习(课本第 169 页)

每转动一次转盘所获购物券金额的平均数是: $100 \times 10\% + 50 \times 15\% + 20 \times 25\% = 22.5(\text{元})$.

习题 4.3(课本第 169 页)

1. 从袋中摸出 4 个球,4 个全红的概率为 $\frac{C_4^4}{C_8^4} = \frac{1}{70}$, 3 红 1 绿的概率为 $\frac{C_4^3 \cdot C_4^1}{C_8^4} =$

$\frac{16}{70}$, 2 红 2 绿的概率为 $\frac{C_4^2 \cdot C_4^2}{C_8^4} = \frac{36}{70}$, 1 红 3 绿的概率为 $\frac{C_4^1 \cdot C_4^3}{C_8^4} = \frac{16}{70}$, 4 个全绿的概率为

$\frac{C_4^4}{C_8^4} = \frac{1}{70}$. 因此,每摸一次球的平均收益是: $50 \times \frac{1}{70} + 20 \times \frac{16}{70} - 30 \times \frac{36}{70} + 20 \times$

$\frac{16}{70} + 50 \times \frac{1}{70} = -\frac{34}{7}(\text{元})$.

2. 这个游戏具有很大的欺骗性,实际上这个游戏对游戏者不利.显然游戏者是不会押“0”的,如果游戏者所下赌注为 1 元,那么每次的平均收益是: $(1-1) \times$

$\frac{18}{37} - 1 \times \frac{18}{37} - 0.5 \times \frac{1}{37} = -\frac{18.5}{37}(\text{元})$ 或 $2 \times \frac{18}{37} - 1 \times \frac{18}{37} + 0.5 \times \frac{1}{37} - 1 = -\frac{18.5}{37}(\text{元})$.

3. 略.

随堂练习(课本第 173 页)

这个游戏不公平,因为配成紫色的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,配不成紫色的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

习题 4.4(课本第 175 页)

1. (1) 游戏对小刚有利,因为小明获胜的概率为 $\frac{1}{6}$,小刚获胜的概率为 $\frac{5}{6}$;

(2) 游戏对小明有利,因为小明获胜的概率为 $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$,小刚获胜的概率为

$$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

2. 概率是 $\frac{13}{25}$.

复习题(课本第 176 页)

A 组

1. 可以用折线统计图,图略.

2. 甲公司近年的销售收入的增长速度较快,但图象给人的感觉不是这样.

3. (1) 图中商业用电与住宅用电之比大约是 6:5;

(2) 要使读者直观、清楚地获得该市各项用电的比例情况,图中纵轴上的数值应从 0 开始.

4. 不能,还需要 A、B 两个国家 2002 年财政经费支出的总额.

5. (1) 这 6 次测验成绩的平均数是 78 分,中位数是 79 分,众数是 85 分;

(2) 他可能会选用众数表示他的成绩.

6. 概率为 $\frac{16}{54} = \frac{8}{27}$.

7. 一个人的生日在周六或周日的概率是 $\frac{2}{7}$.

8. 连掷五次骰子都没有得到 6 点,第六次掷到 6 点的概率仍然是 $\frac{1}{6}$.

9. 配成紫色的概率是 $\frac{13}{25}$.

B 组

1. 略.

2. 不能.

3. 不公平,这个游戏对小明有利,他获胜的概率是 $\frac{1}{2}$,小亮获胜的概率是 $\frac{3}{8}$,不计输赢的概率是 $\frac{1}{8}$.

4. 不能,因为不知道去年该公司 A、B、C 三个主要产品的销售利润.

5. 该游戏对游戏者不利,他押中的概率为 $\frac{1}{37}$,而每押中一次获得奖金 $36 - 1 =$

35 元,他押错的概率为 $\frac{36}{37}$, 因此转动多次后, 游戏者平均每次将获利 $35 \times \frac{1}{37} - 1 \times \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$ (元).

C 组

1. 如果不分左右, 那么恰好配成一双的概率是 $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$; 如果分左右, 那么恰好配成一双的概率是 $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$. (提示: 利用树状图, 所有可能出现的结果有 28 种, 其中全黑有 15 种, 全白有 1 种, 1 黑 1 白有 12 种; 1 左 1 右(全白)有 9 种, 1 左 1 右(全黑)有 1 种. 当然, 也可以通过模拟实验得到近似概率.)

2. 略.

总复习题(课本第 183 页)

1. (1) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+2}{2}$; (2) $\frac{3}{4}$; (3) 1.

2. (1) $\cos A = 0.9778$, $\tan A = 0.2041$;

(2) $\sin A = 0.4706$, $\cos A = 0.8824$.

3. (1) $\angle A = 78^\circ 51'$; (2) $\angle B = 85^\circ 13' 48''$; (3) $\angle C = 88^\circ 45'$.

4. (1) 直线 $x = 2$ ($2, A$);

(2) 直线 $x = -5$ ($-5, -3$);

(3) 直线 $x = \frac{1}{4}$, ($\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$);

(4) 直线 $x = \frac{3}{2}$, ($\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$);

(5) 直线 $x = -1$ ($-1, 10$).

5. (1) $(2, 0)$, $(-2, 0)$;

(2) $(\frac{7}{3}, 0)$, $(-\frac{7}{3}, 0)$;

(3) $(\frac{5}{4}, 0)$, $(-1, 0)$;

(4) $(2, 0)$, $(-4, 0)$.

6. 弯折的长度应为 $\frac{5}{3}$ m. (提示: 设梯形的腰为 x m, 则梯形的面积为 $S =$

$$\frac{1}{2}(5-2x+5-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2}x.)$$

7. 直线跑道的长应为 100 m. (提示: 设直线跑道的长为 x m, 则矩形内部的面积为 $S = x \cdot \frac{400-2x}{\pi} = -\frac{2}{\pi}x^2 + \frac{400}{\pi}x.$)

8. 经过 0.64 时后, 两船距离最小, 最小距离是 12 海里. (提示: 两船行驶 t 时后, 它们的距离为 $y = \sqrt{(15t)^2 + (20-20t)^2} = \sqrt{625t^2 - 800t + 400}.$)

9. (1) $S = -\frac{3}{2}x^2 + 300x$;

(2) 最大面积为 $15\,000 \text{ m}^2$.

10. (1) 最大高度是 3.5 m;

(2) 运动员跳离地面的高度是 0.2 m.

$$11. (1) x_1 \approx 3.6, x_2 \approx 1.4; \quad (2) x_1 \approx 2.9, x_2 \approx -0.9;$$

$$(3) x_1 \approx 6.5, x_2 \approx -0.5; \quad (4) x_1 \approx 0.5, x_2 \approx -1.3.$$

12. 略.

$$13. 3 \text{ cm} \leq OP \leq 5 \text{ cm}.$$

14. $OE = OF$. (提示: 过 O 点作 AB 的垂线, 垂足为 G , 则 $AG = BG$, 因此, $EG = FG$, $\text{Rt}\triangle OEG \cong \text{Rt}\triangle OFG$.)

15. $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. (提示: 连结 OA 、 OB 、 OC 、 OD . 由 $\angle APB = \angle CPD$, 得 $\angle AOB = \angle COD$. 从而 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.)

16. $\angle DCE = \angle A$. (提示: 设 $\widehat{BAD}$ 所对的圆心角为 $\angle \alpha$, $\widehat{BCD}$ 所对的圆心角为 $\angle \beta$, 则 $\angle \alpha + \angle \beta = 360^\circ$, 因此 $\angle BCD + \angle A = \frac{1}{2} \angle \alpha + \frac{1}{2} \angle \beta = 180^\circ$, 而 $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$, 所以 $\angle DCE = \angle A$.)

17. 提示: 需要过点 A 作 l 的垂线, 作垂线时可以用三角尺.

$$18. \text{解: } \frac{1}{2} AB = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

19. 相交或者相切.

20. 相离.

$$21. \text{解: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 1 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$S_{\text{扇形}} = \frac{120}{360} \pi \cdot 2^2 = \frac{4}{3} \pi \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$S_{\text{半圆}} = \frac{180}{360} \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2} \pi \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} - (S_{\text{扇形}} - S_{\triangle ABC}) = \frac{3}{2} \pi - \left(\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} \right) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

22. $\odot B$ 与 AC 相切, 与 FG 相交, 与 DC 相离.

23. 解: 曲线 $DEFGH$ 即

$$\begin{aligned} & \widehat{DE} + \widehat{EF} + \widehat{FG} + \widehat{GH} \\ &= \frac{90}{180} \pi \cdot 1 + \frac{90}{180} \pi \cdot 2 + \frac{90}{180} \pi \cdot 3 + \frac{90}{180} \pi \cdot 4 \\ &= \frac{1}{2} \pi + \pi + \frac{3}{2} \pi + 2\pi \\ &= 5\pi. \end{aligned}$$

$\therefore$ 曲线 $DEFGH$ 的长度是 5π .

24. 略.

25. 甲公司近年利润增长速度较快.

26. 概率为 $\frac{1}{16}$.

27. (1) 这个游戏不公平, 小明获胜的概率为 $\frac{2}{9}$, 小亮获胜的概率为 $\frac{7}{9}$;

(2) 游戏仍不公平, 但对小明有利, 因为他获胜的概率是 $\frac{5}{9}$, 小亮获胜的概率是 $\frac{4}{9}$, 修改规则的方法不惟一, 如若两转盘颜色相同或者可以配成紫色, 则小明得 4 分, 否则小亮得 5 分.

28. 略.

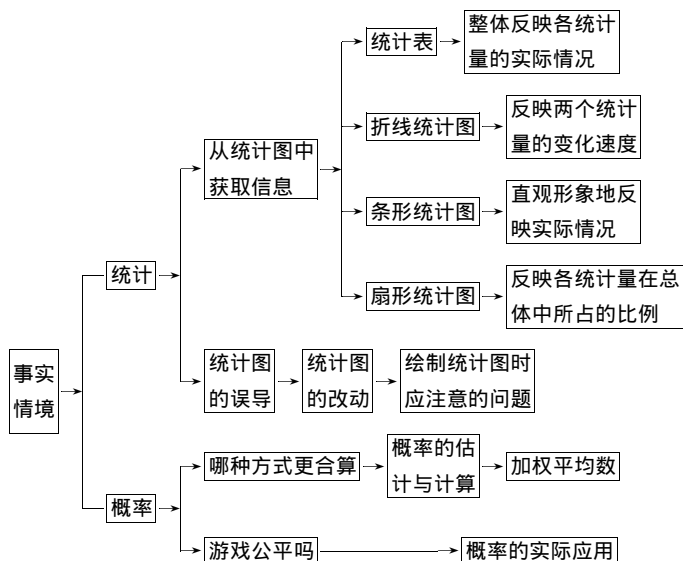


经过前面的学习, 学生已经基本独立地经历了统计的各个过程, 已经亲身收集过一些数据, 掌握了数据表示和数据处理的一些方法, 对一些现实问题作出了自己的评判. 此外, 我们还应发展学生对数据的来源、处理数据的方法以及由此得到的结论进行合理质疑的能力, 以切实提高学生的统计决策的能力.

同时我们认为仅仅认识到某些赌博或促销活动中获胜或获奖的可能性, 未必具有正确的评判能力和决策能力. 因此, 应给予学生一定的工具, 让学生评判某项活动是否“合算”, 并通过具体情境的分析, 感受“合算”, 并掌握一定的判断方法, 提高其决策能力.

此外, 概率与统计是紧密联系的, 它们互为基础, 概率这一概念就是建立在频率这一统计量稳定性的基础之上的, 而统计又离不开概率的理论支撑. 统计推断、估计、假设检验等统计方法的合理性和科学性都有赖于概率理论的严密性.

本单元安排了一定数量的变形发散题. 变形发散通过数、式、方程、函数、几何图形等在维持形变值不变的前提下, 不断变化形式, 使复杂问题简单化, 隐蔽的问题明朗化, 抽象的问题直观化, 达到化难为易, 化未知为已知的目的. 在发散思维应用中注重培养学生用数字的意识和实事求是的科学态度, 引导学生耐心、细致的观察数据, 突出分析、比较的方法, 形成正确、迅速的计算能力, 灵活运用经验法则, 提高解决实际问题的能力.



新题型新中考

统计与概率知识是新课标的亮点之一,在中考命题中地位明显提升,分值比例约占全卷的10%左右.试题反映的考向考点主要有如下几个方面:

(1)从实际的问题情境中考查总体、个体样本的概念,求样本的平均数、中位数、众数,计算极差、样本方差、标准差、频率和概率等一般是以选择题、填空题的形式考查.

(2)在实际的问题情境中经历调查的全过程,形成对数据的收集和處理的能力,设计和制作简单的统计表和简单的统计图,并根据统计结果作出合理的判断和决策.

(3)随着“用数学意识”的增强,本章知识与不等式、方程、函数、几何等知识的综合试题层出不穷,此类试题的叙述一般较长,且与社会实际联系紧密,考查学生的阅读理解能力,开放探究能力,分析判断能力.

一、发散思维延伸

延伸题1 (2004·荆州)为了解某校初中毕业年级男生的体能状况,从该校初中毕业班学生中抽取若干名男生进行铅球测试,把所得数据(精确到0.1 m)进行整理后,分成6组画出频率分布直方图的一部分(如图4-21所示),已知从左到

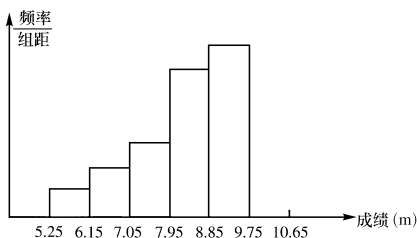


图 4-21

右前 5 个小组的频率分别为 0.04 0.10 0.14 0.28 0.30 ,第 6 小组的频数是 7.

- (1) 请将频率分布直方图补充完整 ;
- (2) 该校参加这次铅球测试的男生有多少人 ?
- (3) 若成绩在 8.0 m 以上 (含 8.0 m) 的为合格 ,试求这次铅球测试成绩的合格率 ;
- (4) 在这次测试中 ,你能确定该校参加测试的男生铅球成绩的众数和中位数各落在哪个小组内吗 ? (只作相应回答 ,不说明理由)

解 (1) 由频率分布直方图的意义可知 ,各小组频率之和为 1 ,故第 6 小组的频率为 : $1 - (0.04 + 0.10 + 0.14 + 0.28 + 0.30) = 0.14$. 易知第 6 小组与第 3 小组的频率相等 ,故两个小长方形等高 ,图略 .

(2) 由 (1) 知 ,第 6 小组的频率是 0.14 ,又因为第 6 小组的频数是 7 ,现设参加这次测试的男生有 x 人 ,根据频率定义 ,得 $\frac{7}{x} = 0.14$,即 $x = 50$ (人) .

(3) 由图可知 ,第 4、5、6 小组成绩均在 8.0 米以上 ,其频率之和为 $0.28 + 0.30 + 0.14 = 0.72$. 故合格率为 72% .

(4) 能确定中位数落在第 4 小组 ,众数落在第 5 小组 .

延伸题 2 (2004·重庆) 每年 6 月 5 日是“世界环境日” ,保护地球生态环境是世界各国政府和人民应尽的义务 . 下表是我国近几年来废气污染物排放量统计表 ,请认真阅读该表后 ,解答题后的问题 .

全国近几年废气中主要污染物排放量 (单位 :万吨)

年度	二氧化硫排放量			烟尘排放量			工业粉尘 排放量
	总量	其中		总量	其中		
		工业	生活		工业	生活	
1998	2 091.4	1 594.4	497	1 455.1	1 178.5	276.6	1 321.2
1999	1 857.5	1 460.1	397.4	1 159	953.4	205.6	1 175.3
2000	1 995.1	1 612.5	382.6	1 165.4	953.3	212.1	1 092
2001	1 947.8	1 566.6	381.2	1 069.8	851.9	217.9	990.6
2002	1 926.6	1 562	364.6	1 012.7	804.2	208.5	941

(1)请分别用实、虚、点虚线在图 4-22 上画出二氧化硫排放总量、烟尘排放总量和工业粉尘排放量的折线走势图;

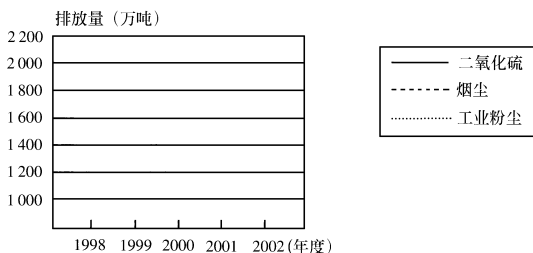


图 4-22

(2)2002 年相对于 1998 年,全国二氧化硫排放总量、烟尘排放总量和工业粉尘排放量的增减率分别为_____、_____和_____ (精确到 1 个百分点)

(3)简要评价这三种废气污染物排放量的走势.(要求简要说明:总趋势、增减的相对快慢)

解 (1)如图 4-23 所示.

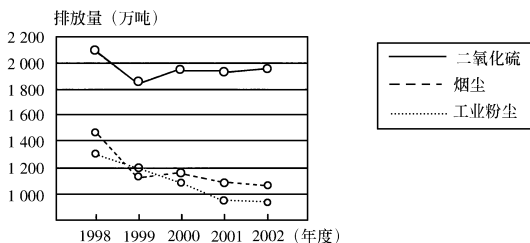


图 4-23

(2) -8% , -30% , -29% ;

(3)评价:总体构成下降趋势;二氧化硫排放量下降趋势最小;烟尘排放量下降趋势最大.

延伸题 3 在军训结束的汇报表演中,某同学在一次射击中,射中 10 环、9 环、8 环的概率分别是 0.25 0.29 0.20,那么这名同学

(1)射中 10 环或 9 环的概率;

(2)不够 8 环的概率.

分析 射中 10 环或 9 环的概率应是 $0.25 + 0.29 = 0.54$. 因此不够 8 环的概率应是 $1 - 0.25 - 0.29 - 0.2 = 0.26$.

解 (1) 射中 10 环或 9 环的概率是 $0.25 + 0.29 = 0.54$.

(2) 该同学在这次射击事件中, 无论是射中靶子还是没射中靶子, 其概率的和是 1. 在(1)中求出射中 10 环或 9 环的概率是 0.54, 所以 8 环以下(包括没有射中)的情况发生的概率是 $1 - 0.54 - 0.2 = 0.26$.

二、课标新题导向

新题 1 (2004·南宁)如图 4-24 所示.

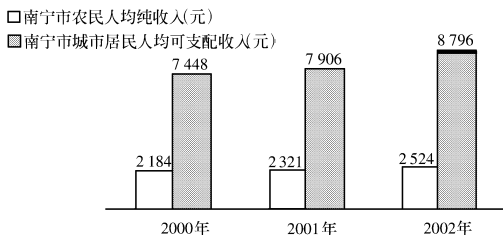


图 4-24

(1) 分别指出南宁市农民人均纯收入和城市居民人均可支配收入, 相对于上一年哪年增长最快?

(2) 据统计 2000~2002 年南宁市农民人均纯收入的平均增长率为 7.5%, 城市居民人均可支配收入的平均增长率为 8.7%, 假设年平均增长率不变, 请你分别预计 2004 年南宁市农民人均纯收入和城市居民人均可支配收入各是多少?(精确到 1 元)

(3) 从城乡年人均收入增长率看, 你有哪些积极的建议?(写出一条建议)

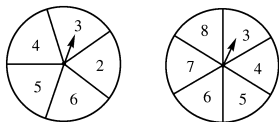
分析 (1) 分别将下一年的收入与上一年的收入作差, 然后进行比较;(2) 弄清增长的基数、增长率及增长的次数是解答此小题的关键;(3) 此小题是一个开放性问题, 只要建议是合理的即可.

解(1) 都是 2002 年;

(2) 预计 2004 年农民人均纯收入 $2\,524(1 + 7.5\%)^2 \approx 2\,917$ (元).

城市居民人均可支配收入: $8\,796(1 + 8.7\%)^2 \approx 10\,393$ (元).

(3) 如: 加快农业建设步伐等.



新题 2 小刚和小强用图 4-25 所示的两个转盘做游戏. 转动两个转盘各一次.

图 4-25

(1)若两个数字和为 6、8、10、12,则小刚胜,否则小强胜.小芳认为这个游戏不公平,你认为小芳说得对吗?为什么?试用列表法来说明.

(2)如果不公平,请你改变游戏的规则使游戏公平,试写出来.

分析 先利用列表法求出双方获胜的概率,若概率相同则游戏公平,若概率不同,则可以修改游戏规则使得游戏公平.

解 (1)小芳说得对,此游戏不公平.

第一次 \ 第二次	3	4	5	6	7	8
2		✓		✓		✓
3	✓		✓		✓	
4		✓		✓		✓
5	✓		✓		✓	
6		✓		✓		

由列表可知 $P(\text{小刚胜}) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$,

$P(\text{小强胜}) = \frac{8}{15}$,

因此游戏不公平.

(2)若两个数字和为 6、8、10、12 小刚得 8 分,否则小强得 7 分,这样游戏才公平.

新题 3 (2004·曲沃)一布袋中放有红、黄、白三种颜色的球各一个,它们除颜色外其他特性都一样,小亮从布袋中摸出一个球后放回去摇匀,再摸出一个球.请你利用列举法(列表或画树状图)分析并求出小亮两次都能摸到白球的概率.

分析 求简单事件发生的概率,往往借用树状图和列表法列举事件发生的各种可能情况,然后再求其相关事件发生的概率.

解法 1 列表法:

	红	黄	白
红	(红, 红)	(黄, 红)	(白, 红)
黄	(红, 黄)	(黄, 黄)	(白, 黄)
白	(红, 白)	(黄, 白)	(白, 白)

$\therefore P(\text{白, 白}) = \frac{1}{9}$.

解法2 画树状图.如图4-26 所示.

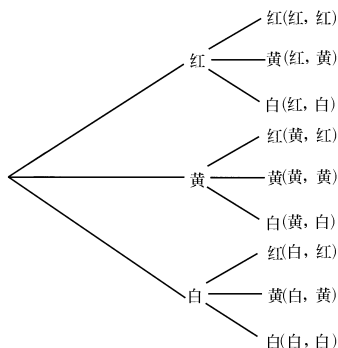


图 4-26

$$\therefore P(\text{白, 白}) = \frac{1}{9}.$$

三、中考名题赏析

名题1 (2004·宁安)如图4-27 所示,有两个可以自由转动的均匀转盘 A、B, 转盘 A 被均匀地分成 4 份,每份分别标有 1 2 3 4 四个数字,转盘 B 被均匀地分成 6 等份,每份分别标有 1 2 3 4 5 6 六个数字.有人为甲、乙两人设计了一个游戏,其规则如下:

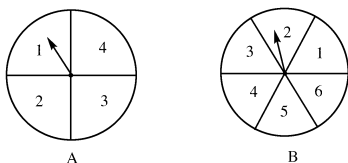


图 4-27

(1)同时自由转动转盘 A 与 B;

(2)转盘停止后,指针各指向一个数字(如果指针恰好在分格线上,那么重转一次,直到指针指向某一数字为止),用所指的两个数字作乘积,如果得到的积是偶数,那么甲胜,如果得到的积是奇数,那么乙胜(例如转盘 A 指针指向 3,转盘 B 指针指向 5, $3 \times 5 = 15$,按规则乙胜).

你认为这样的游戏规则是否公平?请说明理由,如果不公平,请你设计一个公平的规则,并说明理由.

分析 利用概率计算的基本方法,可获得数字之积为奇数或偶数的概率,由此可得出游戏是否公平.改变规则可以有多种不同的方式,其一般途径是:(1)增加规则的内容,如赋予一定的分值;(2)改变规则,如把积改成和.

解 不公平.

$$\therefore P(\text{奇}) = \frac{1}{4}, P(\text{偶}) = \frac{3}{4},$$

$$\therefore P(\text{偶}) > P(\text{奇}).$$

$\therefore$ 游戏不公平.

可制定如下规则:

(1)同时自由转动转盘 A 与 B;

(2)转盘停止后,指针各指向一个数字,用所指的两个数字作和,如果得到的和为偶数,那么甲胜;如果得到的和为奇数,则乙胜.

理由如下:

$$\therefore P(\text{奇}) = \frac{1}{2}, P(\text{偶}) = \frac{1}{2},$$

$$\therefore P(\text{奇}) = P(\text{偶}).$$

$\therefore$ 游戏公平.

名题 2 (2004·常德)随着我国改革开放不断深入,我国农村人口逐年向城镇转移.国家为了对今后农村劳动力向城镇转移的情况进行预测,有关部门根据 31 个省(区、直辖市)6.8 万个农村住户和 7 100 个行政村的抽样调查得出了 1984~2003 年末我国农村劳动力向五类城镇转移人数情况的直方图(如图 4-28 所示).问:

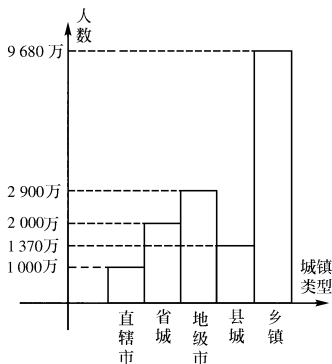


图 4-28

(1)1984~2003 年末我国农村劳动力向各类城镇转移的人数的中位数是多少?吸纳农村人口最多的是哪类城镇?

(2)1984~2003 年末地级市以上(含地级市)城市吸纳了多少农村转移劳动力?它占 1984~2003 年来,我国农村劳动力向城镇转移总数的百分比是多少?(保留 3 个有效数字)

(3)已知 2003 年我国农村劳动力向城镇转移的总数为 490 万,预测今后农村劳动力向城镇转移的速度为每年比上年增长 4%,那么,2008 年我国农村劳动力向各类城镇转移的人数将达到多少万人?(保留整数)

解 (1)我国农村劳动力向各类城镇转移的人数的中位数是 2 000 万人,吸纳农村人口最多的是乡镇.

(2)地级市以上(含地级市)城市吸纳农村转移劳力的人数为

$$1\,000 + 2\,000 + 2\,900 = 5\,900(\text{万人}),$$

占 1984~2003 年来,我国农村劳动力向城镇转移总数的百分比是

$$5\,900 \div (5\,900 + 1\,370 + 9\,680) \approx 34.8\%.$$

(3)5 年后我国农村劳动力向各类城镇转移的人数将达到

$$490 \times (1 + 4\%)^5 \approx 596(\text{万人}).$$

名题 3 (2004·重庆)初中学生的视力状况已受到社会广泛关注.某市有关部门对全市 20 万名初中学生视力状况进行了一次抽样调查,从中随机抽查了 10 所中学全体初中学生的视力,图 4-29①、②是 2004 年抽样情况统计图,请你根据下图解答以下问题:

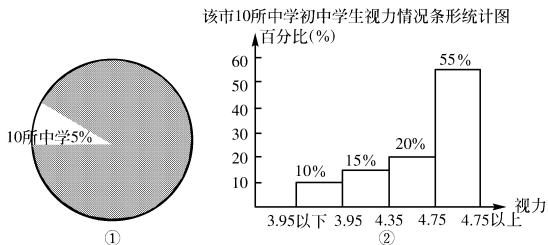


图 4-29

(1)2004 年这 10 所中学初中学生的总人数有多少人?

(2)2004 年这 10 所中学的初中学生中,视力在 4.75 以上的学生人数占全市初中学生总人数的百分比是多少?

(3)2004 年该市参加中考的学生达 66 000 人,请你估计 2004 年该市这 10 所

中学参加中考的学生人数?

解 (1)这 10 所中学初中学生的总人数是 $20 \times 5\% = 1$ (万人).

(2)这 10 所中学视力在 4.75 以上的初中学生人数为

$1 \times 55\% = 0.55$ (万人),

$\therefore$ 所求百分比为 $0.55 \div 20 = 2.75\%$.

(3)该市参加中考的学生占全体初中生总人数的百分比是

$66\ 000 \div (20 \times 10\ 000) = 33\%$.

$\therefore$ 估计该市这 10 所中学参加中考的学生人数为

$10\ 000 \times 33\% = 3\ 300$ (人).



知能转化平台

【题型发散】

1. 看一看,你能选出正确答案吗?

(1)已知一组数据为 20, 30, 40, 50, 50, 60, 70, 80, 其中平均数、中位数和众数的大小关系是 ()

A. 平均数 > 中位数 > 众数

B. 平均数 < 中位数 < 众数

C. 中位数 < 众数 < 平均数

D. 众数 = 平均数 = 中位数

(2)已知数据 x_1, x_2, x_3 的平均数为 a , 数据 y_1, y_2, y_3 的平均数为 b , 则数据 $2x_1 + 3y_1, 2x_2 + 3y_2, 2x_3 + 3y_3$ 的平均数为 ()

A. $2a + 3b$

B. $\frac{2}{3}a + b$

C. $6a + 9b$

D. $2a + b$

(3)如果一组数据 5, -2, 0, 6, 4, x 的平均数为 3, 那么 x 等于 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

(4)甲、乙、丙三种糖果售价分别为每千克 6 元、7 元、8 元, 若将甲种 8 kg, 乙种 10 kg, 丙种 3 kg 混在一起, 则售价应定为每千克 ()

A. 6.7 元

B. 6.8 元

C. 7.5 元

D. 8.6 元

(5)某班一次语文测验的成绩如下: 得 100 分 3 人, 得 95 分的 5 人, 得 90 分的 6 人, 得 80 分的 12 人, 得 70 分的 16 人, 得 60 分的 5 人. 则该班这次语文测验成绩的众数是 ()

A. 70 分

B. 80 分

C. 16 人

D. 12 人

2. 想一想, 填什么最准确?

(1)某校在一次歌咏比赛中, 7 位评委给某班的节目打分如下: 9.65, 9.70,

9.68 9.75 9.72 9.65 9.78 ,去掉一个最高分 ,去掉一个最低分 ,则该班的平均得分是_____.

(2)某校规定学生的学期体育成绩由三部分组成 :体育课外活动占学期成绩的 10% ,理论测试占 30% ,体育技能测试占 60% ,一名同学上述三项成绩依次为 90 ,92 ,73. 则该同学这学期的体育成绩为_____.

(3)一组数据 :90 ,91 ,92 ,95 ,97 ,94 ,95 ,99 的众数是_____ ,中位数是_____.

(4)一名战士在同样条件下射靶 10 次 ,命中环数分别是 6 ,9 ,9 ,8 ,7 ,9 ,8 ,7 ,10 ,6 ,则该战士射击环数的众数是_____ ,中位数是_____.

(5)随机抽取某城市一年(365 天计算)中的 30 天的日平均气温状况统计见下表 :

温度($^{\circ}\text{C}$)	10	14	18	22	26	30	32
天数(天)	3	5	5	7	6	2	2

①该组数据的中位数是_____ ,众数是_____ ;

②该城市一年中日平均气温为 26°C 的约有_____天 ;

③若日平均气温在 $17^{\circ}\text{C} \sim 23^{\circ}\text{C}$ 为市民“满意温度” ,则该城市一年中达到市民“满意温度”的约有_____天.

【数形发散】

1. 根据图 4-30 中的统计图回答问题.

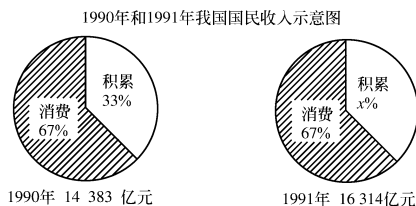


图 4-30

(1)1990 年 ,我国国民消费基金和积累基金各是多少亿元 ? 消费基金比积累基金多多少元 ?

(2)1991 年 ,我国国民积累基金占全部基金的百分之多少 ? 有多少亿元 ?

(3)1991 年 ,我国国民积累基金比 1990 年我国国民积累基金增加了多少亿元 ? 增加了百分之几 ? 消费基金增加了多少亿元 ? 增加了百分之几 ? 国民收入

增加了多少亿元?增加了百分之几?

2. 下面是我们从上海《解放日报》收集到的 2002 年 2 月上海空气的“污染指数”和“空气质量”这两种数据:

日期	2月1日	2月2日	2月3日	2月4日	2月5日	2月6日	2月7日
污染指数	71	108	149	97	100	97	127
空气质量	良	轻度污染	轻度污染	良	良	良	轻度污染
日期	2月8日	2月9日	2月10日	2月11日	2月12日	2月13日	2月14日
污染指数	107	100	50	137	148	148	68
空气质量	轻度污染	良	优	轻度污染	轻度污染	轻度污染	良
日期	2月15日	2月16日	2月17日	2月18日	2月19日	2月20日	2月21日
污染指数	24	60	60	75	33	39	51
空气质量	优	良	良	良	优	优	良
日期	2月22日	2月23日	2月24日	2月25日	2月26日	2月27日	2月28日
污染指数	69	65	54	56	65	56	49
空气质量	良	良	良	良	良	良	优

(1)这 28 天中属于“重度污染”“中度污染”“轻度污染”“良”和“优”的天数各有几天?出现的频率各是多少?请用一张统计表来表示;

(2)用折线统计图表示这 28 天的污染指数变化情况;

(3)从你画的统计图表中,可以得到哪些结论?说说你的理由.

【纵横发散】

1. 根据所给数据,求出平均数、中位数和众数,并填入下表.(精确到 0.1)

数 据	平均数	中位数	众 数
20 20 21 24 27 30 32			
0 2 3 4 5 5 10			
-2 0 3 3 3 8			
-6, -4, -2 2 4 6			

2. 第一组数据:10,10;第二组数据:20,20,20;第三组数据:30,30,30,30,30. 请问每组数据的平均数分别是多少?如果将这三组数据合成一组新的数据,请问

新数据的平均数是多少？

【生活发散】

1. 某饮食公司为一学校提供午餐,有 3 元、4 元和 5 元三种价格的饭菜供师生选择(每人限定一份).如图 4-31 所示是五月份的销售情况统计图,这个月一共销售了 10 400 份饭菜,那么师生购买午餐费用的平均数、中位数和众数各是多少？

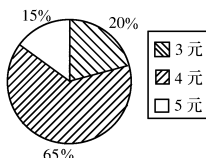


图 4-31

2. 下表列出三种长途电话业务的收费办法,如果某人某日 21:45 之前要拨打一个 5 min 左右的内地长途电话,请为他推荐一个最经济的服务;如果他要拨打的是一个 30 min 左右的内地长途电话,你还推荐这种服务吗?为什么?

通话地区	内地	时段
吉通 17921	0.03 元/6 秒 + 市话费	全天
联通 89135	0.30 元/分 + 市话费	全天
联通 193	0.06 元/6 秒	7:00~20:00
	0.04 元/6 秒	20:00~22:00
	0.03 元/6 秒	22:00~次日 7:00
	0.04 元/6 秒	双休日及国定假日 7:00~22:00

(市话收费标准为:前 3 分钟 0.20 元,以后每 1 分钟 0.10 元)

【综合发散】

1. 为了测定某批种子发芽所需的平均天数,用 100 粒种子进行发芽试验,其中发芽的有 98 粒,按发芽所需天数列成下表:

发芽所需的天数	1	2	3	4	5	6	7
发芽种子数	19	34	21	11	9	3	1
频 率	$\frac{19}{98}$	$\frac{34}{98}$	$\frac{21}{98}$	$\frac{11}{98}$	$\frac{9}{98}$	$\frac{3}{98}$	$\frac{1}{98}$

求该批种子发芽所需的平均天数.

2. 某商场正在举行大型的有奖销售活动,凡购物满 100 元即可参加抽奖一



次,活动规则如下:一副 52 张的普通扑克(去除大小王,有放回的抽牌).

特等奖 抽出两张牌的点数之和为 28;

一等奖 抽出一张红桃 7;

二等奖 抽出一张红色的牌;

三等奖 抽出一张是 5;

四等奖 抽出一张牌的点数不小于 1;

鼓励奖 抽出一张梅花牌.

你认为活动规则设置是否合理?简单说明理由.如果不合理,请提出你的修改意见.



期末测试题

(时间 :120 分钟 满分 :100 分)

一、看一看,选一选(每小题 3 分,共 36 分)

1. 将 $a^{m+n+3} - a^{m+2n+3}$ 分解因式得 ()

A. $a^{m+n+3} \cdot (a - a^n)$ B. $a^{m+n+3} \cdot (1 - a)(1 + a)$

C. $a^{m+n} \cdot (a^3 - a^{n+1})$ D. $a^{m+n+3} \cdot (1 - a^n)$

2. 若 $a < -6$, 化简 $|3 - |3 + a||$ 的结果是 ()

A. $-(a + 6)$ B. $6 + a$ C. $-a$ D. a

3. P 为锐角 $\triangle ABC$ 内一点, P 关于 AC, BC 的对称点分别是 M, N , 则 $\triangle MCN$ 一定是 ()

- A. 等腰三角形 B. 正三角形
C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

4. 一次函数 $y = kx + b$ 中, y 随着 x 的增大而减小, 且 $k \cdot b > 0$, 那么这个函数的图象通过 ()

- A. 第一、二、三象限 B. 第二、三、四象限
C. 第一、二、四象限 D. 第一、三、四象限

5. 一个三角形的边长为 10, 一个梯形与这个三角形的面积相等, 且梯形的高与三角形已知边上的高相等, 则梯形两底的和为 ()

A. 20 B. 15 C. 10 D. 5

6. 方程 $2x(kx - 4) - x^2 + 6 = 0$ 有实数根, 则 k 的最大整数值为 ()

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

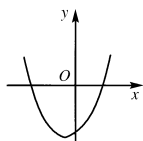
7. 一名射击运动员连续射靶 8 次, 命中的环数如下 :8、9、10、9、8、7、10、8, 这组数据的众数与中位数分别为 ()

A. 3 8 B. 8 8.5 C. 8.5 9 D. 8 9

8. 已知一组数据从小到大依次为 $-1, 0, 4, x, 6, 15$, 其中位数为 5, 则其众数为 ()

A. 4 B. 5 C. 5.5 D. 6

9. 如图 II-1 所示是函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的大致图象, 那么 $|c - b|$ 等于 ()



A. $c - b$

B. $\pm(c - b)$

C. $b - c$

D. $\pm(b - c)$

10. 函数 $y = \frac{\sqrt{2-x}}{9-x^2}$ 的自变量 x 的取值范围是 ()

A. $x \leq 2$ 且 $x \neq -3$

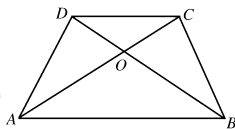
B. $x \geq 2$ 且 $x \neq 3$

C. $x < 2$ 且 $x \neq -3$

D. $x > 2$ 且 $x \neq 3$

图 II-1

11. 如图 II-2 所示, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $S_{\triangle CDO} : S_{\triangle BCD} = 1:3$, 则 $S_{\triangle CDO} : S_{\triangle ABD}$ 等于 ()



A. 1:5

B. 1:6

C. 1:7

D. 1:9

图 II-2

12. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 斜边长为 $7\frac{1}{2}$,

两直角边的长分别是关于 x 的方程 $x^2 - 3(x-7)x + 9m = 0$ 的两个根, 则 $\triangle ABC$ 的内切圆面积是 ()

A. 4π

B. $\frac{3}{2}\pi$

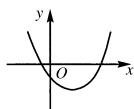
C. $\frac{7}{4}\pi$

D. $\frac{9}{4}\pi$

二、试一试 填一填(每小题 3 分, 共 18 分)

13. 若 $0 < a < 1$ 且 $a + \frac{1}{a} = 6$, 则 $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$ 的值为_____.

14. 我们平常用的数是十进制数, 如 $2\ 639 = 2 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^0$. 显然, 十进制的数要用 10 个数码(又叫数字) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 可在电子数字计算机中用的是二进制, 只要两个数码 0 和 1, 如二进制中, $101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ 等于十进制的数 5, $10\ 111 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ 等于十进制的数 23, 那么, 二进制中的 1 101 等于十进制的数是_____.



15. 已知二次函数 $y = x^2 + (a - b)x + b$ 的图象如图 II-3

所示, 那么化简 $\frac{-\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} + |b|}{a}$ 的结果是_____.

图 II-3

16. 不等式 $x^2 + 2cx - c < 0$ 的解集为空集, 化简: $|c + 2| +$

$$\sqrt{(c-1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

17. 已知 PA 为 $\odot O$ 的切线, A 为切点, PBC 是过点 O 的割线, $PA = 4\text{ cm}$,

$PB = 2 \text{ cm}$ 则 $\odot O$ 的面积为_____.

18. 如图 II-4 所示, 如果水平放着的圆柱形排水管的截面半径为 0.6 m , 半径 $OA \perp OB$, 那么截面上有水的弓形面积为_____. (结果可用 π 表示)

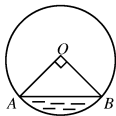


图 II-4

三、算一算, 解一解 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 已知 $x - 2\sqrt{xy} - 15y = 0$ 求 $\frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y}$ 的值.

20. 已知方程 $x^2 + px + q = 0$ 有一根为 4, 抛物线 $C_1: y = x^2 + px + q$ 过点 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. 又有抛物线 $C_2: y = ax^2 + bx + c$ 若 C_1 和 C_2 有如下关系: 它们和 x 轴有完全相同的交点, 它们的顶点关于 x 轴对称.

(1) 求 C_1 的解析式;

(2) 求 C_2 的解析式.

四、想一想, 探一探 (21~23 题每题均 8 分, 24 题 12 分, 共 36 分)

21. 已知直线 $y = (\sqrt{3} - 2)x + (2\sqrt{3} - 6)$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 相交于点 $E(-2, p)$, $F(q, -2\sqrt{3})$, 又抛物线上点 D 与点 E 关于原点对称.

(1) 求 p, q 的值;

(2) 求 a, b, c 的值;

(3) 求抛物线顶点的坐标;

(4) 求抛物线对称轴.

22. 甲、乙、丙 3 个家电厂家在广告中都声称, 他们的某种电子产品在正常情况下的使用寿命都是 8 年, 经质量检测部门对这三家销售的产品的使用寿命进行跟踪调查, 统计结果如下 (单位: 年):

甲厂: 4, 5, 5, 5, 5, 7, 9, 12, 13, 15;

乙厂: 6, 6, 8, 8, 8, 9, 10, 12, 14, 15;

丙厂: 4, 4, 4, 6, 7, 9, 13, 15, 16, 16.

请回答下列问题:

(1) 分别写出以上 3 组数据的平均数、众数、中位数;

(2) 这三个厂家的推销广告分别利用了哪一种表示集中趋势的特征数;

(3) 如果你是顾客, 宜选购哪家工厂的产品? 为什么?

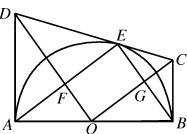


图 II-5

23. 如图 II-5 所示, AB 为 $\odot O$ 的直径, AD, BC, CD 是 $\odot O$ 的切线, 切点分别为 A, B, E , DO, AE 相交于点 F , CO, BE 相交于点 G . 求证:

(1) $CO \perp DO$;

(2) 四边形 $EFOG$ 为矩形.

24. 如图 II - 6 所示, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, MN 是过 C 点的切线, AD, BE 与 MN 垂直, 垂足分别为 D, E , $CG \perp AB$ 于 G . 求证:

(1) AC 平分 $\angle DAB$;

(2) AD, BE 为方程 $x^2 - ABx + CG^2 = 0$ 的两个根, 若 $OC^2 = AC \cdot BC$ 且 $AC > BC$, 求 $\angle CAB$ 的度数.

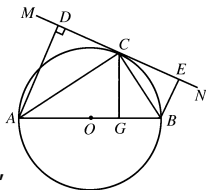


图 II - 6



综合测试题 一

(时间 :120 分钟 满分 :100 分)

一、看一看 ,选—选(每小题 3 分 ,共 36 分)

1. a, b 为非零有理数 ,则 $m = \frac{a}{|a|} + \frac{ab}{|ab|}$ 的值为 ()

A. 2 或 -2 或 0 B. 2 C. -2 D. 0

2. 下列二次三项式在实数范围内不能分解因式的是 ()

A. $6x^2 + x - 15$ B. $3y^2 + 7y + 3$
C. $x^2 - 2xy - 4y^2$ D. $2x^2 - 4xy + 5y^2$

3. 若 $0 < a < 1$,则 $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} - 2 \div \left(1 + \frac{1}{a}\right) \times \frac{1}{1+a}$ 可化简为 ()

A. $\frac{1-a}{1+a}$ B. $\frac{a-1}{a+1}$ C. $1-a^2$ D. a^2-1

4. 若顺次连结四边形各边中点得一正方形 ,则原四边形一定是 ()

A. 正方形 B. 矩形
C. 菱形 D. 对角线互相垂直且相等的四边形

5. 若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$,则 $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ 的值等于 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 下列图形中 ,既是中心对称 ,又是轴对称图形的是 ()

A. 梯形 B. 平行四边形
C. 菱形 D. 正三角形

7. 如图 III-1 所示 ,拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$,已知 $DC = 3$ m , $CE = 4$ m , $AD = 5$ m , CB 的坡度 $i = 1:\sqrt{3}$,则坡底 AB 的长为 ()

A. $(3+4\sqrt{3})$ m B. 14 m
C. $(6+4\sqrt{3})$ m D. $(6+5\sqrt{3})$ m

8. 凸多边形的 n 个内角与某一个外角的总和为

1 450°. 则 n 等于 ()

A. 6 B. 7 C. 8 D. 10

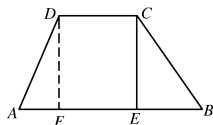
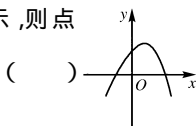


图 III-1

9. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图Ⅲ-2所示, 则点

$P(a, \frac{c}{b})$ 在



()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

10. 已知 2、7、6 和 x 的平均数等于 5, 18、1、6、 x 和 y 的平均数等于 10, 那么 y 等于

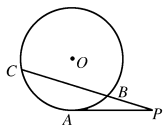
A. 25

B. 20

C. 15

D. 10

11. 如图Ⅲ-3所示, PA 切 $\odot O$ 于点 A , 直线 PBC 交 $\odot O$ 于点 B, C , 已知 $PA = 6$, $PB:PC = 1:2$, 则 PC 的长为 ()



A. $2\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $6\sqrt{2}$

D. $9\sqrt{2}$

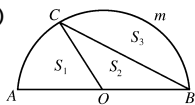
12. 如图Ⅲ-4所示, AB 为半圆 O 的直径, C 为半圆上一点, 且 $\angle COA = 60^\circ$, 设扇形 AOC , $\triangle COB$, 弓形 BmC 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则它们的关系为 ()

A. $S_1 < S_2 < S_3$

B. $S_2 < S_1 < S_3$

C. $S_1 < S_3 < S_2$

D. $S_3 < S_2 < S_1$



二、试一试 填一填(每小题 3 分, 共 18 分)

13. 一个两位数等于它个位上的数的平方, 个位上的数比十位上的数大 3, 则这个两位数为_____.

图Ⅲ-4

14. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $b = 8$, $\angle A$ 平分线 $AD = \frac{16\sqrt{3}}{3}$, 则 $c =$ _____.

15. 李老汉为了与客户签订购销合同, 对鱼塘中鱼的总产量进行了估计, 第一次捞出 100 条, 称得质量为 184 kg, 并将这 100 条鱼做了记号放入水中. 当它们完全混合于鱼群后, 又捞出 200 条, 称得质量为 416 kg, 且带有记号的鱼有 20 条, 估计李老汉的鱼塘中有鱼_____条, 共_____kg.

16. 圆的半径为 5, 若半径增加 x , 则面积增加 y , 那么 y 与 x 之间的函数关系式为_____.

17. $\triangle ABC$ 中, $AB = 8$, $AC = 6$, D 在 AC 上, 且 $AD = 2$, 如果要在 AB 上找一点 E , 使 $\triangle ADE$ 与原三角形相似, 那么 AE 等于_____.

18. 在公式 $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ 中, 当 a 分别取 1, 2, 3, ..., m 时可得下列 n 个等式: $(1+1)^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1$; $(2+1)^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$; $(3+1)^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1$; ... $(n+1)^2 = n^2 + 2 \times n + 1$.

将这 n 个等式的左右两边分别相加,可推导出求和公式: $1+2+3+\dots+n=$ _____.(用含 n 的代数式表示)

三、算一算,解一解(每小题 5 分,共 10 分)

19. 已知三角形的两边长是关于 x 的方程 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 的两根,且此两根的平方和等于 3 与两根之积的差,求 ab 的取值范围.

20. 已知方程 $(ac - bc)x^2 + (bc - ab)x + (ab - ac) = 0$ 有两相等实根,求证: $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$.

四、想一想,探一探(21~23 题,每题均 6 分,24 题 8 分,25 题 10 分,共 36 分)

21. 某位老师带领学生去旅游,甲旅行社说:“若老师买全票一张,则其余学生享受半价优待.”乙旅行社说:“包括老师在内,全部人员按全票价的 6 折优惠.”若两旅行社的票价都为 240 元.

(1) 设学生数为 x ,分别计算两家旅行社的收费 $y_{\text{甲}}$, $y_{\text{乙}}$ (建立表达式);

(2) 当学生数为多少时,两家旅行社的收费一样;

(3) 就学生数讨论哪家旅行社更优惠.

22. 某商场计划投入一笔资金,采购一批紧俏商品.经过市场调查发现,如果月初出售,可获利 15%,并可用本和利再投资其他商品,到月末又获利 10%,如果月末出售,可获利 30%,但要付出仓储费用 700 元,请问根据商场的资金状况,如何购销获利较多?

23. 如图 III-5 所示,锐角三角形 ABC 的 BC 边长为 6,面积为 12, $PQ \parallel BC$, P 、 Q 分别在 AB 、 AC 上, $PQRS$ 为正方形,其边长为 x ,正方形 $PQRS$ 与 $\triangle ABC$ 的公共部分面积为 y .

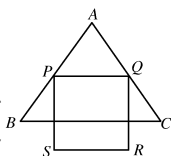


图 III-5

(1) 当正方形 $PQRS$ 的边 SR 恰好落在 BC 上时,求边长 x ;

(2) 当 SR 不落在 BC 上时,求 y 关于 x 的函数关系式以及自变量 x 的取值范围;

(3) 求 y 的最大值.

24. (2004·江西)如图 III-6 所示,在平面直角坐标系中,给定以下五点 $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$, $C(4, 0)$, $D(-2, \frac{9}{2})$, $E(0, -6)$,从这五点中选取三点,使经过这三点的抛物线满足以平行于 y 轴的直线为对称轴这一条件.我们约定:把经过三点 A 、 E 、 B 的抛物线表示为抛物线 AEB (如图 III-6 所示).

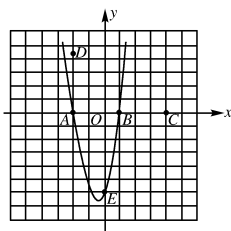


图 III-6

(1)问符合条件的抛物线还有哪几条?不求解析式,请用约定的方法一一表示出来;

(2)在(1)中是否存在这样的一条抛物线,它与余下的两点所确定的直线不相交?如果存在,试求出抛物线及直线的解析式;如果不存在,请说明理由.

25. 如图 III-7 所示,在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB=7$, $\angle B=90^\circ$, $BC-AD=1$,以 CD 为直径的圆与 AB 有两个不同公共点 E 、 F ,且 $AE=1$,问在线段 AB 上是否存在 P 点,使得以 P 、 A 、 D 为顶点的三角形与以 P 、 B 、 C 为顶点的三角形相似?若不存在,说明理由;若存在,这样的 P 点有几个?并算出 AP 的长度.

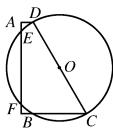


图 III-7



综合测试题 二

(时间 :120 分钟 满分 :100 分)

一、看一看,选一选(每小题 3 分,共 36 分)

1. 下列各式正确的是 ()

A. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $(-3a^2)^3 = -9a^6$

D. $a^5 + a^3 = a^8$

2. 在相同时刻的物高与影长成比例,如果高为 1.5 m 的测竿的影长为 2.5 m,那么影长为 30 m 的旗杆的高是 ()

A. 20 m

B. 18 m

C. 16 m

D. 15 m

3. 若 $|x| = -x$, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x = -1$

B. $x = 0$

C. $x \geq 0$

D. $x \leq 0$

4. $y = (x-1)^2 + 2$ 的对称轴是直线 ()

A. $x = -1$

B. $x = 1$

C. $y = -1$

D. $y = 1$

5. 如图 IV-1, 图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



A



B



C



D

图 IV-1

6. 在下列图形中,既是中心对称图形又是轴对称图形的是 ()

A. 等腰三角形

B. 圆

C. 梯形

D. 平行四边形

7. 某中学人数相等的甲、乙两班学生参加了同一次数学测验,如果班平均分和方差分别为 $\bar{x}_甲 = 82$ 分, $\bar{x}_乙 = 82$ 分, $S_甲^2 = 245$, $S_乙^2 = 190$, 那么成绩较为整齐的是 ()

A. 甲班

B. 乙班

C. 两班一样整齐

D. 无法确定

8. 某商场的营业额 1999 年比 1998 年上升 10%, 2000 年比 1999 年上升

10% ,而 2001 年和 2002 年连续两年平均每年比上一年降低 10% ,那么 2002 年的营业额比 1998 年的营业额()

- A. 降低了 2% B. 没有变化
C. 上升了 2% D. 降低了 1.99%

9. 若函数 $y = 2x + b^2 - 4$ 是正比例函数 ,则 ()

- A. $b = 2$ B. $b = 4$ C. $b = 0$ D. $b = \pm 2$

10. 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 中自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \neq -1$ B. $x > -1$
C. $x \neq 1$ D. $x \neq 0$

11. 已知相交两圆的公共弦长为 16 cm. 若两圆的半径长分别为 10 cm 和 17 cm ,则这两圆的圆心距为 ()

- A. 7 cm B. 16 cm C. 21 cm D. 27 cm

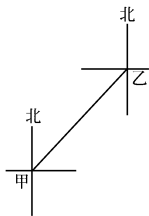
12. 已知方程 $x^2 + (2k+1)x + k^2 - 2 = 0$ 的两实根的平方和等于 11 ,则 k 的取值是 ()

- A. -3 或 1 B. -3 C. 1 D. 3

二、试一试 填一填(每小题 3 分 ,共 18 分)

13. -8 的立方根是 _____ ; $\left(\frac{1}{2}\right)^0 =$ _____ ; $(-3)^{-1} =$ _____ .

14. 如图 IV-2 所示 ,在甲、乙两地之间修一条笔直的公路 ,从甲地测得公路的走向是北偏东 48° .甲、乙两地间同时开工 ,若干天后 ,公路准确接通 ,则乙地所修公路的走向是南偏西 _____ 度 .



15. 一个多边形的每一个外角都等于 72° ,则这个多边形的边数是 _____ .

16. 开口向上 ,对称轴为直线 $x = 2$,且与 y 轴的交点坐标为 $(0, 3)$ 的抛物线的解析式为 _____ .

17. 已知一个圆柱底面半径是 2 cm ,侧面积是 $12\pi \text{ cm}^2$,那么它的高是 _____ .

图 IV-2

18. 某市民政部门今年元宵节期间举行了“即开式社会福利彩票”销售活动 ,设置彩票 3 000 万张(每张彩票 2 元) ,在这些彩票中 ,设置了如下的奖次 :

奖金(万元)	50	15	8	4	...	
数量(个)	20	20	20	180	...	

如果花 2 元钱购买了 1 张彩票,能得到 8 万元以上(包括 8 万元)大奖的概率是_____.

三、算一算,解一解(每小题 5 分,共 10 分)

19. 计算: $\frac{6}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{3}(1 - \sqrt{3})$.

20. 化简求值: $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ 其中 $x = \sqrt{2} + 1$.

四、想一想,探一探(21~23 题每小题 6 分,24 题 8 分,25 题 10 分,共 36 分)

21. 如图 IV-3 所示,在平面直角坐标系中画出了函数 $y = kx + b$ 的图象.

(1)根据图象,求 k, b 的值;

(2)在图中画出函数 $y = -2x + 2$ 的图象;

(3)求 x 的取值范围,使函数 $y = kx + b$ 的函数值大于函数 $y = -2x + 2$ 的函数值.

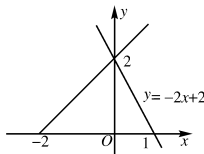


图 IV-3

22. 在直角坐标系中,直线 $y = x + m$ 与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 在第一象限交于点 A ,与 x 轴交于点 C , $AB \perp x$ 轴,垂足为 B ,且 $S_{\triangle AOB} = 1$.

(1)求 m 的值;

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

23. 某企业急需汽车,但是无力购买,于是想租一辆车使用.现有甲、乙两家汽车出租公司,甲公司的出租条件是:每千米车费 1.10 元;乙公司的出租条件是:每月付 800 元租车费,另外每千米付 0.10 元的油费.问该企业租哪家公司的汽车合算?

24. 新华文具店的某种毛笔每支售价 25 元,书法练习本每本售价 5 元,该文具店为促销制定了两种优惠办法:

甲:买一支毛笔就赠送一书法练习本;

乙:按购买金额打九折付款.

实验中学欲为校书法兴趣小组购买这种毛笔 10 支,书法练习本 $x(x \geq 10)$ 本.

(1)请写出用甲种优惠办法实际付款金额 $y_{\text{甲}}$ (元)与 x (本)之间的函数关系式;

(2)请写出用乙种优惠办法实际付款金额 $y_{\text{乙}}$ (元)与 x (本)之间的函数关系式;

(3)若购买同样多的书法练习本时,你会选择哪种优惠办法付款更省钱?

25. 某学习小组在探索“各内角相等的圆内接多边形是否为正多边形”时,进行如下讨论:

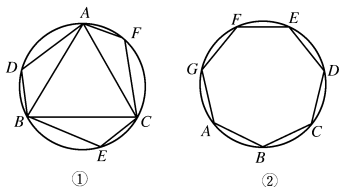


图 IV-4

甲同学:这种多边形不一定是正多边形,如圆内接矩形;

乙同学:我发现边数是 6 时,它也不一定是正多边形,如图 IV-4①所示, $\triangle ABC$ 是正三角形, $AD = BE = CF$,可以证明六边形 $ADBECF$ 的各内角相等,但它未必是正六边形;

丙同学:我能证明,边数是 5 时,它是正多边形.我想,边数是 7 时,它可能也是正多边形……

(1)请你说明乙同学构造的六边形各内角相等;

(2)请你证明,各内角都相等的圆内接七边形 $ABCDEFG$,如图 IV-4②所示,是正七边形(不必写已知、求证);

(3)根据以上探索过程提出你的猜想(不必证明).



第一单元 直角三角形的边角关系

1. 从梯子的倾斜程度谈起

30° 45° 60°角的三角函数值

三角函数的有关计算

题型发散

1. 用直接法.

$$\because a = 2b, b = \frac{1}{2}a,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = \frac{5}{4}a^2,$$

$$\therefore c = \frac{\sqrt{5}}{2}a. \therefore \sin A = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故本题应选 B.

2. 用直接法.

$$\because \sin B = \frac{b}{c} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{设 } b = k, c = 3k.$$

$$\text{则 } 9k^2 = k^2 + a^2, a = 2\sqrt{2}k,$$

$$\therefore \cos A + \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{c} + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{4+3\sqrt{2}}{12}. \text{故本题应选 A.}$$

3. 用验证法.

$$\because \text{当 } \alpha = 30^\circ \text{时 } \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } \alpha = 45^\circ \text{时 } \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{当 } \alpha = 60^\circ \text{时 } \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故本题应选 C.

$$4. \text{原式} = \sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ + 1 - 1 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 5. \text{原式} &= \left| 1 - \frac{1}{\tan 30^\circ} \right| + |\tan 45^\circ - \tan 35^\circ| + |\tan 35^\circ| - 1 \\
 &= \frac{1}{\tan 30^\circ} - 1 + \tan 45^\circ - \tan 35^\circ + \tan 35^\circ - 1 \\
 &= \sqrt{3} - 1.
 \end{aligned}$$

指点迷津 化简时要注意正确处理有关算术根及绝对值的问题. 把 1 看成 $\tan 45^\circ$, 就可根据三角函数的增减性判断出 $\tan 45^\circ > \tan 35^\circ$.

纵横发散

1. 分析 比较三角函数值和角的大小, 常要根据函数的递增和递减的规律.

解 (1) 由已知, 得 $\sin \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$,

由于正弦函数的值随角的变小而变小, 所以有 $\theta \leq 45^\circ$,

又由于 θ 是锐角, 所以 θ 的取值范围是 $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$.

(2) 据题意, 满足条件的角 θ 应满足不等式组

$$\begin{cases} \cos \theta \geq \frac{1}{2} = \cos 60^\circ, \\ \tan \theta > \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ, \end{cases}$$

由于余弦函数的值随角度的增加而减少, 而正切函数的值随角度的增加而增加, 所以有

$$\begin{cases} \theta \leq 60^\circ, \\ \theta > 30^\circ. \end{cases}$$

所以, 角 θ 的取值范围是 $30^\circ < \theta \leq 60^\circ$.

点评 由比较函数值的大小而确定角的大小, 或比较角的大小而确定函数值的大小, 是解这类问题的思考方法. 这样, 就要区分 α 的意义和 $\sin \alpha$ 的意义. 如

$$\because 50^\circ > 40^\circ,$$

$$\therefore \sin 50^\circ > \sin 40^\circ, \cos 50^\circ < \cos 40^\circ.$$

$$\text{或有 } \because 0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \alpha < \tan \beta.$$

2. 分析 化简根式时, 应考虑首先转化为形如 $\sqrt{a^2}$ 的式子, 再讨论 a 的符号, 依据公式

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \sqrt{4\cos^2 51^\circ - 4\sqrt{2}\cos 51^\circ + 2} \\
 &= \sqrt{(2\cos 51^\circ)^2 - 2 \cdot 2\cos 51^\circ \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(2\cos 51^\circ - \sqrt{2})^2}$$

$$= |2\cos 51^\circ - \sqrt{2}|.$$

其中, 因为 $\cos 51^\circ < \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $2\cos 51^\circ < \sqrt{2}$, $2\cos 51^\circ - \sqrt{2} < 0$, 所以, 有

$$\sqrt{4\cos^2 51^\circ - 4\sqrt{2}\cos 51^\circ + 2} = |2\cos 51^\circ - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 2\cos 51^\circ.$$

解法指导 配方法在二次根式的化简中起着重要的作用, 只有首先转化为完全平方式后, 再经过符号的讨论后移到根号外, 得到化简根式的目的.

解法发散

分析 本题利用三角函数的定义与同角三角函数之间的关系.

解法 1 用定义求解.

构造 $Rt\triangle ABC$, 使 $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$ (如图 1'-1 所示)

设 $BC = 4k$, $AC = 3k$.

$$\text{则 } AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{(4k)^2 + (3k)^2} = 5k.$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}.$$

解法 2 用公式求解

$$\therefore \tan \alpha = \frac{4}{3},$$

$$\text{又 } \because \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}, \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{16}{9}.$$

$$\therefore \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{9}, \text{ 即 } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{9}, \therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

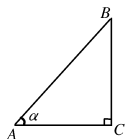


图 1'-1

应用发散

1. **分析** 确定所铺设地毯的面积是关键, 此时需了解地毯的长度至少是多少米. 经观察可以知道, 地毯的长度应为 AB 与 BC 之和. 从而可借助已知条件求出结果.

解 由于主楼梯的坡度为 $1:\sqrt{3}$, 即 $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\text{又 } \because BC = 3, \therefore AB = 3\sqrt{3} \approx 5.2.$$

$$\therefore AB + BC = 3 + 5.2 = 8.2.$$

则购买地毯所需钱数至少为 $30 \times 8.2 \times 2 = 492$ (元).

2. 分析 过 D 作 $DH \perp BA$, 交 BA 延长线于 H , 要求 AB , 只需求 AH 、 BH 即可, 这可通过解 $\text{Rt}\triangle AHD$ 和 $\text{Rt}\triangle BHD$ 达到目的.

解 由题设可知 $AD = (30 + 5) \times 28 = 980$, 过 D 作 $DH \perp BA$, 交 BA 延长线于 H .

在 $\text{Rt}\triangle DAH$ 中, $DH = AD \cdot \sin 60^\circ \approx 848.7$

$$AH = AD \cdot \cos 60^\circ = 980 \times \frac{1}{2} = 490.$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle DBH \text{ 中, } BH = \frac{DH}{\tan 15^\circ} = \frac{848.7}{\tan 15^\circ} \approx 3\,167.4,$$

$$\therefore AB = BH - AH = 3\,167.4 - 490 \approx 2\,677 \text{ (m)}$$

答 热气球升空点 A 与着火点 B 的距离约为 $2\,677 \text{ m}$.

解法指导 解这类问题要弄清仰角、俯角、方位角等概念, 通过建立直角三角形的模型来解决.

转化发散

1. 分析 本题将三角形中线段之间的关系转化为锐角三角函数之间的关系.

证明 如图 1-15 所示, $\frac{CD}{AC} = \sin A$, $\frac{CD}{BC} = \sin B$,

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin B = \cos A.$$

$$\therefore \left(\frac{CD}{AC}\right)^2 + \left(\frac{CD}{BC}\right)^2 = \sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

$$\text{即 } \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{CD^2}.$$

指点迷津 因为三角函数建立了几何图形中的线段比值与角之间的关系, 故可采用三角函数进行几何的证明与计算.

2. 分析 由韦达定理建立 $\sin A$ 、 $\sin B$ 间的等量关系, 再由 $\angle A$ 、 $\angle B$ 是直角三角形的锐角, 将其转化为同角三角函数间的关系, 进而求解.

解 (1) $\because \angle A$ 、 $\angle B$ 是直角三角形的两个锐角.

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ.$$

$$\therefore \sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A.$$

由韦达定理, 得

$$\sin A + \sin B = \frac{m}{2}, \quad \sin A \cdot \sin B = \frac{m-1}{4},$$

$$\therefore \begin{cases} \sin A + \cos A = \frac{m}{2}, \\ \sin A \cdot \cos A = \frac{m-1}{4}. \end{cases}$$

$$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

$$\therefore (\sin A + \cos A)^2 - 2\sin A \cos A = 1,$$

$$\text{即 } \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m-1}{4} = 1.$$

$$\text{整理得 } m^2 - 2m - 2 = 0.$$

$$\text{解得 } m = 1 + \sqrt{3} \text{ 或 } m = 1 - \sqrt{3}.$$

(2) 当 $m = 1 + \sqrt{3}$ 时, 原方程为

$$4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{即 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, A = 60^\circ; \sin B = \frac{1}{2}, B = 30^\circ;$$

$$\text{或 } \sin A = \frac{1}{2}, A = 30^\circ; \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, B = 60^\circ.$$

当 $m = 1 - \sqrt{3}$ 时, 原方程为

$$4x^2 - 2(1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore \angle A, \angle B$ 是直角三角形中的锐角,

$\therefore \angle A, \angle B$ 的正弦值均不能为负.

综合发散

1. 分析 由已知条件可得 $\tan 60^\circ = \frac{a}{b}$, 又知 $a + b = 14$, 所以可得方程组, 从而解出 a 与 b .

$$\text{解 在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \because \angle C = 90^\circ, \angle A = 60^\circ, \therefore \frac{a}{b} = \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

又 $\because a + b = 14$, 由此可得方程组

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ \frac{a}{b} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = 21 - 7\sqrt{3} \\ b = 7\sqrt{3} - 7 \end{cases}$$

$\therefore$ 两条直角边的长为 $21 - 7\sqrt{3}$ 和 $7\sqrt{3} - 7$.

指点迷津 本题尽管没有直接给出三角形的边, 但由 a 和 b 的两个关系式可以求出 a 和 b , 这实际上就等于给出了两条直角边解三角形的问题, 此法是解直角三角形的常用方法.

2. 解 (1) $\because \alpha, \beta$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两个锐角,

$$\therefore \tan \alpha \cdot \tan \beta = 1, \tan \alpha > 0, \tan \beta > 0.$$

由题知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 + \frac{5}{2}kx - (2 + 2k - k^2) = 0$ 的两个根,

$$\therefore \tan \alpha \cdot \tan \beta = -(2 + 2k - k^2) = k^2 - 2k - 2.$$

$$\therefore k^2 - 2k - 2 = 1.$$

解得 $k = 3$ 或 $k = -1$,

$$\text{而 } \tan \alpha + \tan \beta = -\frac{5}{2}k > 0,$$

$$\therefore k < 0. \therefore k = 3 \text{ 应舍去 } k = -1,$$

故所求二次函数的解析式为 $y = -x^2 + \frac{5}{2}x - 1$.

(2)不在. 过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D .

$$\text{令 } y = 0 \text{ 得 } -x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2.$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B(2, 0), AB = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = 2.$$

$$\text{设 } CD = m \text{ 则有 } CD = AD \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2}AD.$$

$$\therefore AD = 2CD.$$

$$\text{又 } \because CD = BD \cdot \tan \beta = 2BD,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}CD.$$

$$\therefore 2m + \frac{1}{2}m = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore m = \frac{3}{5}. \therefore AD = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore C \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{17}{10}, \frac{3}{5}\right).$$

$$\text{当 } x = \frac{17}{10} \text{ 时, } y = \frac{9}{25} \neq \frac{3}{5}.$$

$\therefore$ 点 C 不在(1)中求出的二次函数的图象上.

2. 船有触礁的危险吗

测量物体的高度

题型发散

1. 用直接法.

$$\because a = 2b, b = \frac{1}{2}a,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = \frac{5}{4}a^2,$$

$\therefore c = \frac{\sqrt{5}}{2}a \therefore \sin A = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故本题应选 B.

2. 用验证法.

$$\text{当 } \alpha = 30^\circ \text{ 时 } \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } \alpha = 45^\circ \text{ 时 } \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{当 } \alpha = 60^\circ \text{ 时 } \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故本题应选 C.

3. 用直接法.

设 $BC = 2x$, $AB = 3x$ 则 $AC = \sqrt{5}x$.

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}x}{2x} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故本题应选 D.

$$4. \therefore \tan A = \frac{a}{b},$$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \frac{a}{\tan A} = 15.40 \times \frac{1}{\tan 31^\circ 24'} \\ &= 15.40 \times 1.638 \approx 25.23. \end{aligned}$$

$$\text{又 } \therefore \sin A = \frac{a}{c},$$

$$\therefore c = \frac{a}{\sin A} = \frac{15.40}{\sin 31^\circ 24'} = \frac{15.40}{0.5210} \approx 29.56.$$

应用发散

解 $\therefore \angle ABD = 140^\circ$, $\angle D = 50^\circ$,

$\therefore \angle AED = 90^\circ$ 即 $AE \perp DE$,

形成 $\text{Rt}\triangle DBE$,

$$\begin{aligned} DE &= BD \cdot \cos D = 520 \cdot \cos 50^\circ \\ &\approx 334.2 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 开挖点 E 离 D 约 334.2 m 正好能使 A, C, E 成一直线.

转化发散

过 C 作 AB 的垂线 CD, 交 AB 的延长线于点 D.

$$\therefore \frac{CD}{AD} = \tan 30^\circ, \frac{CD}{BD} = \tan 60^\circ,$$

$$\therefore AD = \frac{CD}{\tan 30^\circ}, BD = \frac{CD}{\tan 60^\circ}.$$

$$\therefore AD - BD = CD \left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ} \right) = 20.$$

$$\therefore CD = \frac{20 \times 3}{2\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}.$$

$\because 10\sqrt{3} > 10. \therefore$ 这艘渔船继续向东追赶鱼群不会进入危险区域.

构造发散

1. 分析 本题分别构造 $\text{Rt}\triangle ADE$ 和 $\text{Rt}\triangle DCF$, 利用解直角三角形, 求出直角边 DE 、 DF 之长.

解 如图 1'-2 所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 6\sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\angle B = 120^\circ$, 则 $\angle A = \angle C = 60^\circ$.

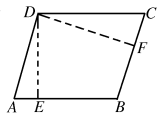


图 1'-2

作 $DE \perp AB$ 于 E , DE 为一高,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中,

$$DE = AD \sin A = 3\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ (cm)}.$$

作 $DF \perp BC$ 于 F , DF 是另一高,

在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 中,

$$DF = DC \cdot \sin C = 6\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \text{ (cm)}.$$

答 此平行四边形的两高分别为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm 和 9 cm.

2. 分析 连结 AC , FC , 易证得 $\triangle AOF$ 为直角三角形, 利用解直角三角形知识求出 $EF = 2OF$ 之长.

解 如图 1-39 所示, 可证得 $\triangle AOF \cong \triangle COF$, 从而得知 $\angle AOF = \angle COF = \text{Rt}\angle$, $\therefore \triangle AOF$ 为直角三角形.

$\because OA = OC$, $\angle AOF = 90^\circ$,

又由 $AB = 3$, $BC = 4$ 得

$$AC = 5, OA = \frac{1}{2} AC = \frac{5}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中,

$$OF = OA \cdot \tan \angle FAO = OA \cdot \tan \angle DAC = OA \cdot \frac{DC}{AD} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}.$$

$$\therefore EF = 2OF = \frac{15}{4} = 3.75.$$

组合发散

1. 分析 首先解一元二次方程, 求出 $\tan \alpha$ 之值. 再把原式化成 $\tan \alpha$ 的组合表达式, 以 $\tan \alpha$ 之值代入求值.

解 $\because 2x^2 + x - 6 = 0$ 的两个根为 $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{3}{2}$, 而 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 且 $\tan \alpha$ 是该方程的一个根, 而当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, $\cos^2 \alpha \neq 0$ ($\cos \alpha > 0$),

$$\therefore \tan \alpha = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha} &= \frac{3\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha} \\ &= \frac{3\tan^2\alpha+5}{\tan^2\alpha+\tan\alpha+2} \\ &= \frac{3\cdot(\frac{3}{2})^2+5}{(\frac{3}{2})^2+\frac{3}{2}+2} = \frac{27+20}{15+8} = \frac{47}{23}. \end{aligned}$$

2. 分析 把原式化成 $\tan\alpha$ 的组合表达式, 然后以 $\tan\alpha=2$ 代入求值.

$$\text{解} \quad \frac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{4\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{3 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{4 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{3\tan\alpha - 1}{4\tan\alpha + 2} = \frac{1}{2}.$$

综合发散

1. 解 $\because$ 方程 $(5\sqrt{3}+b)x^2+2ax+(5\sqrt{3}-b)=0$ 有相等实数根.

$$\therefore \Delta = (2a)^2 - 4(5\sqrt{3}+b)(5\sqrt{3}-b) = 0, \text{ 得 } a^2 + b^2 = 75.$$

$$\therefore c^2 = 75, \therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle C = 90^\circ$.

设 x_1, x_2 是 $2x^2 - (10\sin A)x + 5\sin A = 0$ 的两实数根,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 5\sin A, x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2}\sin A$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 6, \text{ 而 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

$$\therefore (5\sin A)^2 - 5\sin A - 6 = 0, \text{ 解得 } \sin A = \frac{3}{5} \text{ 或 } \sin A = -\frac{2}{5} (\text{舍去}).$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $c = 5\sqrt{3}$, $a = c \cdot \sin A = 3\sqrt{3}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4\sqrt{3}$.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 18.$$

2. 解法1 设 $BD = x$, 由题意可列方程

$$(6+x) \cdot \tan 30^\circ = x \cdot \tan 60^\circ$$

$$\text{解得 } x = 3, \therefore CD = 3\tan 60^\circ = 3\sqrt{3} (\text{海里}).$$

$$\therefore 3\sqrt{3} < 6,$$

$\therefore$ 若船继续向东航行, 有触礁危险.

解法2 由图及题意可知

$$\angle CAB = 30^\circ, \angle CBD = 60^\circ, AB = BC = 6$$

$$\therefore CD = BC \sin \angle CBD = 6 \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} (\text{海里}).$$

$$\therefore 3\sqrt{3} < 6,$$

∴ 若船继续向东航行,有触礁危险.

知能转化平台

题型发散

1.(1)用直接法.

已知 $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $c = 80$, $\therefore \angle B = 30^\circ$.

$$\therefore a = c \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 80 = 40\sqrt{3}.$$

故本题应选 C.

(2)用直接法.

∵ 等腰 $\triangle ABC$ 腰上的高为 1, 高与底边的夹角为 15° , 底角为 75° ,

∴ 其顶角为 30° , 腰长为 2.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1, \text{故本题应选 A.}$$

(3)用直接推算法.

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $a + b = 3 + \sqrt{3}$.

$$\therefore a + b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right)c = 3 + \sqrt{3}.$$

$$c = \frac{3 + \sqrt{3}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}. \therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3.$$

故本题应选 D.

(4)用直接推算法.

$$\therefore \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \cos 90^\circ = 0.$$

当 $\alpha > 60^\circ$ 时, α 增大而函数值 $\cos \alpha$ 减小.

$$\therefore \cos \alpha < \frac{1}{2}, \text{故本题应选 B.}$$

(5)用直接推算法.

$$\text{欲使 } |\sin A - 1| + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B \right)^2 = 0,$$

必须有 $\sin A - 1 = 0$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos B = 0$ 同时成立.

$$\therefore \sin A = 1, A = 90^\circ, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, B = 30^\circ.$$

$C = 60^\circ$, 故本题应选 B.

(6)用直接法.

$$\therefore S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times 3 \times 12 \times \sin 30^\circ = 9.$$

设和它面积相等的等腰直角三角形的腰长为 x , 则 $\frac{1}{2}x^2 = 9$, $x^2 = 18$.

由勾股定理得其斜边长为 $c = \sqrt{x^2 + x^2} = 6$.

故本题应选 B.

2. (1)1; (2) $24\sqrt{3}$; (3) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; (4) 30° ; (5) $\sqrt{3}$; (6) 90°

纵横发散

1. 提示 利用直角三角形中边角关系证明.

2. $\because BC$ 垂直 x 轴于点 C .

$\because$ 点 C 的坐标是 $(-2, 0)$, 且可知 $\triangle ABC$ 是直角三角形, $AC = 1$, $BC = 3$.

$\because$ 点 $A(-3, 0)$, $AO = 3$, $\triangle AOM \sim \triangle ABC$,

$\therefore AO : OM = AC : CB = 1 : 3$.

又 $\because$ 点 M 在 y 轴上, $\therefore$ 点 M 的坐标为 $(0, 9)$ 或 $(0, -9)$.

解法发散

1. 分析 由 $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$, 易推出 $\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ = 1$, 又由 $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$, 易证 $-\tan 40^\circ(-\tan 50^\circ) = 1$, 通过上述各式可求出表达式的值

解法 1 由 $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$, $-\tan 50^\circ = -\cot 40^\circ$, 代入原式, 得

原式 $= (\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) - \tan 40^\circ \cdot (-\cot 40^\circ) = 1 + 1 = 2$.

解法 2 由 $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$, $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$, $\tan 40^\circ = \cot 50^\circ$, 代入原式, 得

原式 $= (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) - \cot 50^\circ \cdot (-\tan 50^\circ) = 1 + 1 = 2$.

2. 分析 因为这一面积的和由点 D 的位置所决定, 如设 $AD = x$, 则面积之和可以看作 x 的函数, 求出这个函数表达式, 就可以考虑求最小值.

解法 1 如图 1'-3 所示, 设 $AD = x$.

$\because FE \perp BC$, $\therefore \angle ADF = \angle BDE = 45^\circ$. 又注意到等腰直角三角形面积与相应的正方形的关系, 有

$$S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} AD \cdot AD = \frac{1}{2} x^2,$$

$$S_{\triangle DEB} = \frac{1}{4} BD \cdot BD = \frac{1}{4} (1-x)^2.$$

$$\begin{aligned} y = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle DEB} &= \frac{1}{4} [2x^2 + (1-x)^2] \\ &= \frac{1}{4} (3x^2 - 2x + 1) \\ &= \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

由 y 的表达式易知, $x = \frac{1}{3}$ 时, y 取得最小值 $\frac{1}{6}$. 这就是说, 当 $AD = \frac{1}{3} AB$

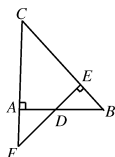


图 1'-3

时 $\triangle ADF$ 与 $\triangle DEB$ 的面积之和达到最小值, 最小值为 $\frac{1}{6}$.

解法 2 也可以利用含正弦的三角形面积公式来求面积之和的表达式. 注意到 $\angle ADF = \angle BDE = 45^\circ$.

设 $AD = x$, 则 $DF = \sqrt{2}x$, 又得 $BD = 1 - x$, $DE = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - x)$.

令 $y = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle DEB}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} AD \cdot DF \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} BD \cdot DE \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{2} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} (1 - x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} (1 - x)^2 = \frac{3}{4} (x - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $AD = \frac{1}{3} AB$ 时 $\triangle ADF$ 和 $\triangle DEB$ 的面积之和将达到最小, 这个最小值是 $\frac{1}{6}$.

3. 解法 1 由 $\angle A = 60^\circ$ 得 $\angle B = 30^\circ$, $c = 2b$,

$$\therefore \begin{cases} a + b = 2, \\ a^2 + b^2 = (2b)^2. \end{cases}$$

解得 $b = \sqrt{3} - 1$, $c = 2\sqrt{3} - 2$.

解法 2 $\because \angle A = 60^\circ, \therefore \tan A = \frac{a}{b} = \sqrt{3}$, 即 $a = \sqrt{3}b$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} a + b = 2, \\ a = \sqrt{3}b. \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} a = 3 - \sqrt{3}, \\ b = \sqrt{3} - 1. \end{cases}$$

$$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3} - 2.$$

解法 3 同上解得 $b = \sqrt{3} - 1$,

$$\therefore c = \frac{b}{\cos A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} - 2.$$

转化发散

1. 分析 将 46° 角的余弦转化为其余角的正弦. 即可比较 $\sin 46^\circ$ 、 $\cos 46^\circ$ 的大小. 注意到正弦值、余弦值均不大于 1, 而 $\tan 45^\circ = 1$, 这样 46° 角的正弦、余弦、正切都可比较大小.

解 $\because \cos 46^\circ = \sin(90^\circ - 46^\circ) = \sin 44^\circ$, 而 $\sin 46^\circ > \sin 44^\circ$,

$$\therefore \sin 46^\circ > \cos 46^\circ.$$

又 $\because 0 < \sin 46^\circ < 1$, $\tan 46^\circ > \tan 45^\circ = 1$.

$$\therefore \tan 46^\circ > \sin 46^\circ. \therefore \tan 46^\circ > \sin 46^\circ > \cos 46^\circ.$$

2. 分析 欲求 k 的值须列出关于 k 的方程. 注意到 $A + B = 90^\circ$, 则 $\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A$, 再由根与系数的关系可将关系式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 转化为关于 k 的方程求 k .

解(1) $\because \angle A + \angle B = 90^\circ, \therefore \sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A$.

由一元二次方程根与系数关系, 有

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = \sin A + \cos A = \frac{k}{2}, \\ \sin A \cdot \sin B = \sin A \cdot \cos A = \frac{k-1}{4}. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

$$\text{而由} \begin{cases} \Delta = (-2k)^2 - 4 \cdot 4(k-1) = 4(k-2)^2 \geq 0, \\ \sin A \sin B = \frac{k-1}{4} > 0, \\ \sin A + \sin B = \frac{k}{2} > 0. \end{cases}$$

知 $k > 1, \therefore k = 1 + \sqrt{3}$.

(2) 当 $k = 1 + \sqrt{3}$ 时, 原方程即为

$$4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\because \angle A > \angle B, \therefore \sin A > \sin B$,

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \angle A = 60^\circ, \sin B = \frac{1}{2}, \angle B = 30^\circ.$$

迁移发散

1. 设 $\text{Rt}\triangle ABC$ 两锐角为 A, B , 由题意得

$$\begin{cases} \Delta = 4(m+1)^2 - 4 \cdot 4m \geq 0, \\ \cos A + \cos B = \frac{m+1}{2}, \\ \cos A \cdot \cos B = \frac{m}{4}. \end{cases}$$

$$\because \cos B = \sin A, \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ 则有 } \begin{cases} \Delta = (m-1)^2 \geq 0, \\ \cos A + \sin A = \frac{m+1}{2}, \\ \cos A \cdot \sin A = \frac{m}{4}. \end{cases}$$

$$\therefore (\cos A + \sin A)^2 = 1 + 2\sin A \cdot \cos A = \frac{(m+1)^2}{4},$$

$$\text{即 } 1 + \frac{m}{2} = \frac{(m+1)^2}{4}, \text{ 解得 } m = \pm\sqrt{3}.$$

$\therefore A, B$ 为锐角, $\therefore \cos A > 0, \cos B > 0$ 则 $m > 0$,

$\therefore$ 只有 $m = \sqrt{3}$.

2. 证明 设两锐角为 A, B 则有 $\cos A = \sin B$,

$$\text{由题意得} \begin{cases} \Delta = 4k^2 - 32(k-1) \geq 0, \\ \sin A + \sin B = -\frac{k}{4}, \\ \sin A \cdot \sin B = \frac{k-1}{8}. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 4k^2 - 32(k-1) \geq 0, \\ \sin A + \cos A = -\frac{k}{4}, \\ \sin A \cdot \cos A = \frac{k-1}{8}. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k \geq 4 + 2\sqrt{2} \text{ 或 } k \leq 4 - 2\sqrt{2}, \\ \left(-\frac{k}{4}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{k-1}{8}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \geq 4 + 2\sqrt{2} \text{ 或 } k \leq 4 - 2\sqrt{2}, \\ k = 6 \text{ 或 } k = -2. \end{cases} \quad \text{故 } k \text{ 的值不存在.}$$

构造发散

1. 分析 希望通过解 $\text{Rt}\triangle AMN$ 求出 MN , 这就需要先求出 AN 的长, 这可以用构造直角三角形的方法来解决.

解 作 $BC \perp AN$ 于 C 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle BAD = 30^\circ$,

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 150.$$

$$\therefore \angle CNB = 45^\circ, \therefore CN = CB = AB \cos \angle ABC = 300 \cdot \cos 30^\circ \approx 259.8,$$

$$\therefore AN \approx 259.8 + 150 = 409.8.$$

在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中,

$$MN = AN \tan \angle MAN = 409.8 \times 0.5773 \approx 237 \text{ (m)}.$$

答 山高 MN 约为 237 m.

2. 分析 根据俯角的定义, 知 $\angle EAC = 23^\circ$, $\angle EAD = 51^\circ$. 解 $\text{Rt}\triangle ABD$ 求得 AB , 作 $CF \perp AB$ 于 F 构造 $\text{Rt}\triangle ACF$ 求得 $AB - CD$ 的长.

解 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = \angle EAD = 51^\circ$.

$$\therefore \tan \angle ADB = \frac{AB}{BD},$$

$$\therefore AB = BD \cdot \tan \angle ADB = 50 \cdot \tan 51^\circ = 50 \times 1.2349 \approx 61.7 \text{ (m)}.$$

又作 $CF \perp AB$ 于 F , $\angle FAC = 90^\circ - \angle EAC = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中,

$$\because \cot \angle FAC = \frac{AF}{FC},$$

$$\therefore AF = FC \cdot \cot \angle FAC = FC \cot 67^\circ = 50 \times 0.4245 \approx 21.2.$$

$$CD = AB - AF \approx 61.7 - 21.2 = 40.5 \text{ (m)}.$$

综合发散

1. 如图 1'-4 所示, 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D , 则

$$BD = \frac{1}{2} BC = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{100\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AD = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中 $\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3},$

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle 30^\circ, AB = 2AD = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

2. 解 作 $BE \perp AD$, 作 $CF \perp AD$, 在直角 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CFD$ 中,

$$\because \frac{BE}{AE} = \frac{1}{2.5}, \frac{CF}{FD} = \frac{1}{2}, \therefore AE = 2.5BE = 2.5 \times 20 = 50,$$

$$FD = 2CF = 2 \times 20 = 40,$$

$$AD = AE + EF + FD = 50 + 5 + 40 = 95 \text{ (m)}.$$

又 $\because$ 斜坡 AB 的坡度 $i = \tan \alpha = \frac{1}{2.5} = 0.4$, 查表得 $\alpha = 21^\circ 48'.$

又 $\because \frac{BE}{AB} = \sin \alpha, \therefore AB = \frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{20}{\sin 21^\circ 48'} = 53.9 \text{ (m)}.$

$$150 \times \frac{(5+95) \times 20}{2} = 150\,000 \text{ (m}^3\text{)}.$$

答 斜坡 AB 的坡角约为 $21^\circ 48'$, 坝底宽 95 m, 斜坡 AB 的长约为 53.9 m, 坝体有土方约 150 000 m^3 .

3. 根据题设可知, $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 30^\circ, \angle ABC = 120^\circ, AB = BC = 8.$

最近距离即为 C 到 AB 在直线的垂线段 CD , 在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, $BC = 8, \angle CBD = 60^\circ$. 于是

$$BD = BC \cos 60^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ (海里)},$$

$$CD = BC \sin 60^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (海里)}.$$

答 船再前进 4n 海里就与 C 最近, 最近距离是 $4\sqrt{3}$ 海里.

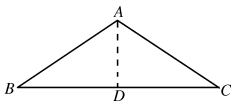


图 1'-4

第二单元 二次函数

1. 二次函数所描述的关系

结识抛物线

刹车距离与二次函数

题型发散

1. 用直接法.

A 项可化为 $y = 2x^2 + 3\sqrt{2}x$ B 项可化为 $y = 2x^2 - 2x$ C 项可化为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ D 项可化为 $y = -4x + 4$ 观察化简后的等式, 可知 D 项为一次函数, 其余三项均为二次函数,

故本题应选 D.

2. 用直接推算法.

$\because a < -1, \therefore a - 1 < a < a + 1 < 0$, 即三个点都在 $y = x^2$ 的图象对称轴的左侧, y 随 x 的增大而减小, 因而 $y_3 < y_2 < y_1$. 故本题应选 C.

3. 解法 1 由函数 $y = -x^2$ 的图象的增减性, 可知: 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $x_1 > x_2 > 0$, $\therefore y_1 < y_2$.

解法 2 $\because x_1 > x_2 > 0$,

$\therefore x_1^2 > x_2^2, -x_1^2 < -x_2^2, \therefore y_1 < y_2$.

4. 分析 用代入法将 A, B 两点的横、纵坐标分别代替函数 $y = -x^2$ 中的 x 和 y , 然后计算求值.

解 由题意, 得 $m = -(-4)^2$, 解得 $m = -16$;

$-8 = -n^2$, 解得 $n = \pm 2\sqrt{2}$.

$\therefore$ 当 $n = 2\sqrt{2}$ 时, $m + n = -16 + 2\sqrt{2}$;

当 $n = -2\sqrt{2}$ 时, $m + n = -16 - 2\sqrt{2}$.

$\therefore m + n$ 的值为 $-16 + 2\sqrt{2}$ 或 $-16 - 2\sqrt{2}$.

应用发散

1. 分析 依据图象的特点可知表达式可设为 $y = ax^2$, 由点 P 可确定其表达式.

解 设抛物线的解析式为 $y = ax^2$, 点 P(1, -1) 满足解析式: $-1 = a$,

$\therefore y = -x^2$.

$\because \frac{AB}{2} = 3, \therefore B$ 点坐标为 (3, -h),

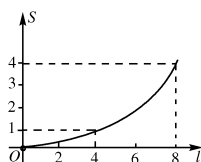
$\therefore -3^2 = -h, \therefore h = 9$.

∴ 水面离桥顶点 9 m.

2.(1)根据题意,得 $S = \frac{1}{16}l^2 (l > 0)$.

(2)列表:

l	2	4	6	8
S	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4



描点,连线(如图 2'-1 所示).

(3)根据图象可知,当 $S = 1 \text{ cm}^2$ 时,正方形的周长是 4 cm.

(4)根据图象可知,当 $l \geq 8 \text{ cm}$ 时, $S \geq 4 \text{ cm}^2$.

图 2'-1

数形发散

解 (1)列表:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8
$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$	7	3.5	1	-0.5	-1	-0.5	1	3.5	7

(2)描点,连线(如图 2'-2 所示)

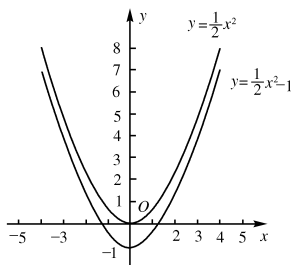


图 2'-2

比较异同:

①由图象可知 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 是由抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向下平移 1 个单位长度得到的;

② $y = \frac{1}{2}x^2$ 与 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 开口方向相同,对称轴都是 y 轴. 图象的性质相同;

③两个二次函数的不同是顶点坐标, $y = \frac{1}{2}x^2$ 的顶点坐标是(0,0),而 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 的顶点坐标为(0,-1).

解法指导 选用列表、描点、连线画出图象,借助图象直观地得出相应的结论.

综合发散

1. 分析 解答此题关键是先确定函数关系式,再回答后面的问题就容易了.

解 (1) $\because y = ax^2 + c$ 过点(-2,-3)和点(1,6),

$$\therefore \begin{cases} 4a + c = -3, \\ a + c = 6. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -3, \\ c = 9. \end{cases}$$

即这个函数关系式为 $y = -3x^2 + 9$.

(2) $\because a = -3 < 0$, 抛物线 $y = -3x^2 + 9$ 的图象开口向下,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大.

(3)令 $-3x^2 + 9 = 0$, 解得 $x = \pm\sqrt{3}$, 所以这个函数的图象与 x 轴有两个交点,其坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$ 和 $(-\sqrt{3}, 0)$.

解法指导 把点的坐标作为 x, y 的值代入函数关系中,列方程求解即可.注意不能把 x, y 的值代错了;求函数图象与 x 轴的交点就是求 $y = 0$ 时 x 的值,即求方程 $ax^2 + c = 0$ 的解.

2. 分析 这个实际问题可用抛物线的知识来解决:先求出如图 2-9 所示的抛物线的函数表达式,然后计算出抛物线的宽度为 4 时的高度,再把这个高度与车高 7 m 相比较,即可知道是否能通过.

解 由图可设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + c$.

$\because C(0, 8), B(-8, 6), B_1(8, 6)$ 都在抛物线上.

$$\therefore \begin{cases} a \cdot 0^2 + c = 8, \\ a \cdot (-8)^2 + c = 6. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{32}, \\ c = 8. \end{cases}$$

$\therefore y = -\frac{1}{32}x^2 + 8$. 根据抛物线的对称性,当 $x = \frac{1}{2} \times 4$ 时,

$y = -\frac{1}{32} \times 4 + 8 = 7\frac{7}{8} > 7$. $\therefore$ 汽车能安全通过此隧道.

或当 $y = 7$ 时, $-\frac{1}{32}x^2 + 8 = 7$. $\therefore x_1 = 4\sqrt{2}, x_2 = -4\sqrt{2}$.

$\therefore |x_1 - x_2| = 8\sqrt{2} > 4$. $\therefore$ 汽车能安全通过此隧道.

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象 用三种方式表示二次函数

题型发散

1. 用数形结合法.

如图 2-24 所示建立直角坐标系,
设绳甩到最高处形成的抛物线解析式为

$$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

①

则甲、乙、丙三点坐标 $(-1, 1)$ $(3, 1)$ $(0, 1.5)$ 分别代入①, 得方程组.

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 1 \\ c = 1.5 \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{1}{6}$ $b = \frac{1}{3}$ $c = \frac{3}{2}$.

故得抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$.

当 $x = 1.5$ 时, $y = 1.625$ m.

故本题应选 B.

2. 用直接法.

$\therefore$ 开口向上, $\therefore a > 0$.

$\therefore$ 与抛物线交于正半轴, $\therefore c > 0$.

$\therefore -\frac{b}{2a} > 0$, $\therefore \frac{b}{2a} < 0$ a 、 b 异号.

$\therefore b < 0$, $\frac{b}{c} < 0$ $a > 0$.

故本题应选 B.

3. $\therefore$ 开口向上, $\therefore a > 0$.

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交于负半轴, $\therefore c < 0$.

$\therefore -\frac{b}{2a} < 0$, $\therefore \frac{b}{2a} > 0$ a 、 b 同号, $\therefore b > 0$.

$$4. y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9) + \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2.$$

其图象先由 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象先向左平移 3 个单位, 再向下平移 2 个单位得到.

生活发散

1. (1) 第一天中, 从 4 时到 16 时这头骆驼的体温是上升的, 它的体温从最低上升到最高需要 12 小时.

(2) 第三天 12 时这头骆驼的体温是 39°C .

(3) 设抛物线的解析式为 $y = a(x - 16)^2 + 40$, 易得 $y = -\frac{1}{16}x^2 + 2x + 24$ ($10 \leq x \leq 22$).

2. 如图 2'-3 所示, $AB = 40$ m, $BP = 20$ m, $BE = 50$ m, $BF = 50 + 150 = 200$ m. 设 CD 的延长线交地平面于点 H .

(1) 设 $CH = x$, $BH = y$, 由 $\triangle EBP \sim \triangle EHC$ 得 $\frac{BP}{CH} = \frac{EB}{EH}$

$$\text{即 } \frac{20}{x} = \frac{50}{50 + y} \quad \text{①}$$

又由 $\triangle FBA \sim \triangle FHC$ 得 $\frac{AB}{CH} = \frac{FB}{FH}$,

$$\text{即 } \frac{40}{x} = \frac{200}{200 + y} \quad \text{②}$$

由①②解得 $x = 60$, $y = 100$.

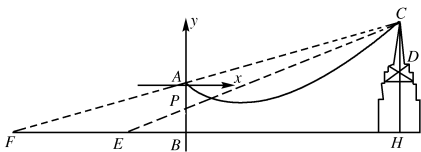


图 2'-3

(2) 依题意建立坐标系如图, 由(1)得 $CH = 60$ m, C 点比 A 点高 20 m. 这时 A 、 C 两点坐标为: $A(0, 40)$, $C(100, 20)$, 设抛物线顶点为 $P(x_0, y_0)$, 因为要求最低点高于地面为 $30 - 6 = 24$ m, 点 A 高度为 40 m, $\therefore y_0 = -16$. 设过点 A 的抛物线的解析式为: $y = ax^2 + bx$ ($a > 0$) 则该抛物线满足

$$\begin{cases} 100^2 a + 100b = 20, \\ y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2}{4a} = -16. \end{cases} \quad \text{化简得 } 125b^2 + 80b - 16 = 0,$$

解得 $b_1 = \frac{4}{25}$ (舍去)

$$b_2 = -\frac{4}{5} \therefore b = -\frac{4}{5} \quad a = \frac{1}{100} \therefore y = \frac{1}{100}x^2 - \frac{4}{5}x.$$

逆向发散

1. (1) 根据二次函数 $y = ax^2 - 5x + c$ 的图象可得 $\begin{cases} a - 5 + c = 0, \\ 16a - 20 + c = 0. \end{cases}$

解得 $a = 1$, $c = 4$.

$\therefore$ 这个二次函数的解析式是 $y = x^2 - 5x + 4$.

$$y = x^2 - 5x + 4 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

它的图象的顶点坐标是 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

(2) 当 $x > \frac{5}{2}$ 时, y 随 x 的增大而增大;

当 $0 < x < \frac{5}{2}$ 时, y 随 x 的增大而减小.

2. 从图象知 $a > 0$,

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过点 $(-1, 0)$ 和 $(0, -1)$,

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = -1. \end{cases} \text{ 解得 } b = a - 1.$$

$\therefore x = 1$ 时, $y < 0$, $\therefore a + b + c < 0$,

即 $a + (a - 1) - 1 < 0$, 解得 $a < 1$,

$\therefore 0 < a < 1$.

变换发散

分析 本题先将函数化为顶点式, 然后再平移, 较为方便.

解 $\because y = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x - 1)^2 + 3$, $\therefore$ 抛物线顶点为 $(1, 3)$.

(1) 将 $y = 2(x - 1)^2 + 3$ 的图象向左平移 2 个单位, 得 $y = 2(x + 1)^2 + 3$, 再向下平移 3 个单位, 得 $y = 2(x + 1)^2 = 2x^2 + 4x + 2$;

(2) 依题意得 $y = -2(x - 1)^2 + 3 = -2x^2 + 4x + 1$;

(3) 因为新顶点与原顶点 $(1, 3)$ 关于 x 轴对称, 故新顶点应为 $(1, -3)$; 又因抛物线开口向下, 故所示二次函数为 $y = -2(x - 1)^2 - 3 = -2x^2 + 4x - 5$.

转化发散

分析 欲求二次函数的解析式关键是求出 b 与 c , 由题意知, 直线 $y = 2x + m$ 过点 Q , 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 也过点 Q , 这样就可得到方程组, 然后解这个方程组求得 x 与 y , 再利用已知条件 $S_{\triangle BPQ} = 3S_{\triangle APQ}$, 从而可转化为关于 b, c 的方程组, 由此不难求得 b, c 的值.

解 设二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴的交点 Q 的坐标为 $(0, c)$.

$\therefore$ 直线 $y = 2x + m$ 过点 Q , $\therefore m = c$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x^2 + bx + c, \\ y = 2x + c. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 2 - b, \\ y = 4 - 2b + c. \end{cases}$$

又 $\because S_{\triangle BQP} = 3S_{\triangle APQ}$,

$$\therefore S_{\triangle ABP} = 4S_{\triangle APQ}.$$

又 $\because \triangle ABP$ 与 $\triangle APQ$ 有相同的一边 AP ,过 B 点作 $BC \perp x$ 轴于点 C .

$\therefore BC = 4OQ$ 又 $OQ = c$.

$\therefore BC = 4c$, $4 - 2b + c = 4c$,

①

又 $\because y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴有一个交点,

$\therefore b^2 - 4ac = 0$.

②

联立①②解得 $b_1 = \frac{4}{3}$, $b_2 = -4$.

经检验,当 $b_1 = \frac{4}{3}$ 时,与题意不合,舍去.

$\therefore b = -4$, $c = 4$.

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = x^2 - 4x + 4$.

点评 利用题中所给的条件,通过联立方程组求解,这是待定系数法的常用方法.

综合发散

1. (1)解 当 $k = 1$ 时,函数化为 $y = 8x^2 - 6$,那么函数图象的对称轴是直线 $x = 0$. 解方程 $8x^2 - 6 = 0$ 得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故这时函数图象与 x 轴的两个交点之间的距离为 $\sqrt{3}$.

(2)解 由二次项系数 $8 > 0$, 断定函数 y 有最小值,当函数 y 的最小值为零时,有 $\frac{4 \times 8 \times (k-7) - [-(k-1)]^2}{4 \times 8} = 0$.

即 $k^2 - 34k + 225 = 0$, $\therefore k_1 = 9$, $k_2 = 25$.

将 k 值分别代入 $x = \frac{k-1}{16}$ 中,得 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

$\therefore$ 当 $k = 9$ 或 25 时,函数 y 的最小值为零,这时 x 的值分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$.

(3)证明 $\because$ 函数的图象与 x 轴有 2 个交点, $\therefore \Delta = [-(k-1)]^2 - 4 \times 8(k-7) > 0$, 解得 $k < 9$ 或 $k > 25$. 设函数的图象与 x 轴两个交点的横坐标为 x_1 , x_2 , 若假设 x_1, x_2 互为倒数,必有 $x_1 \cdot x_2 = 1$, 于是有 $x_1 \cdot x_2 = \frac{k-7}{8} = 1$, 从而有 $k = 15$, 这与 $k < 9$ 或 $k > 25$ 矛盾, $\therefore$ 结论成立.

2. 分析 本题第(1)问应注意三点:一是抛物线与 x 轴的两交点即为相应的一元二次方程的两根;二是注意坐标值与线段值有符号上的差异(如 $-x_1 = AO$, $CO = m + 1$);三是正确运用根与系数的关系. 第(2)问要弄清探求直线是否存在条件是 $|x_1| = |x_2|$ (即 $-x_1 = x_2$) 问题迎刃而解.

解 (1) $\because x_1 < 0 < x_2$, $\therefore AO = -x_1$, $OB = x_2$,

又 $\because a = 1 > 0$, $\therefore CO = m + 1 > 0$, $\therefore m > -1$.

$$\therefore \frac{1}{AO} - \frac{1}{OB} = \frac{2}{CO} \therefore CO(OB - AO) = 2AO \cdot OB,$$

$$\text{即 } (m+1)(x_1 + x_2) = -2x_1x_2.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2(m-1), x_1x_2 = -(1+m),$$

$$\therefore (m+1) \cdot 2(m-1) = 2(1+m),$$

$$\text{解得 } m = -1 (\text{舍去}), m = 2.$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = x^2 - 2x - 3.$$

(2) 存在着直线 $y = kx + b$ 与抛物线交于点 P, Q , 使 y 轴平分 $\triangle CPQ$ 的面积.

设点 P 的横坐标为 x_P , 点 Q 的横坐标为 x_Q , 直线与 y 轴交于点 E .

$$\therefore S_{\triangle PCE} = S_{\triangle QCE}, \frac{1}{2} CE \cdot |x_P| = \frac{1}{2} CE \cdot |x_Q| \therefore |x_P| = |x_Q|.$$

$$\therefore y \text{ 轴平分 } \triangle CPQ \text{ 的面积 } \therefore \text{点 } P, Q \text{ 在 } y \text{ 轴异侧, 即 } x_P = -x_Q.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + b, \\ y = x^2 - 2x - 3. \end{cases} \text{ 得 } x^2 - (k+2)x - (b+3) = 0. \quad \textcircled{1}$$

$$x_P, x_Q \text{ 为 } \textcircled{1} \text{ 的两根 } \therefore x_P + x_Q = k+2 = 0,$$

$$\therefore k = -2.$$

$$\text{又 } \therefore \text{直线与抛物线有两个交点 } \therefore b+3 > 0 \text{ 即 } b > -3.$$

$\therefore$ 当 $k = -2$ 且 $b > -3$ 时直线 $y = kx + b$ 与抛物线交于点 P, Q 使 y 轴平分 $\triangle CPQ$ 的面积.

3. 何时获得最大利润

最大面积是多少

二次函数与一元二次方程

题型发散

1. 用排除法.

由 $v = \frac{s}{t}$ 知 A 不对; 由 $y = a \cdot (1+1\%)x$ 知 B 不对;

由 $C = 2\pi r$ 知 D 不对. 故本题应选 C.

$$2. (1) \text{高 } h = \frac{250}{\pi x^2}.$$

$$y = \pi x^2 \cdot 0.02 + \pi x^2 \cdot (3 \times 0.02) + 2\pi x \cdot \frac{250}{\pi x^2} \cdot 0.02 = \frac{2\pi}{25} x^2 + \frac{10}{x}.$$

(2) 用直接法可得 B.

3. (1) 配方法 完全平方 消元法.

$$\begin{aligned} (2) y &= x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m + 1 \\ &= x^2 - 2mx + m^2 + m^2 - 3m + 1 \end{aligned}$$

$$= (x - m)^2 + m^2 - 3m + 1.$$

∴ 该抛物线顶点坐标为 $(m, m^2 - 3m + 1)$,

$$\text{即 } \begin{cases} x = m, \\ y = m^2 - 3m + 1. \end{cases}$$

①

②

将①代入②, 得 $y = x^2 - 3x + 1$.

∴ 所给抛物线顶点的纵坐标 y 与横坐标 x 的关系式为 $y = x^2 - 3x + 1$.

点评 本题考查了二次函数图象的顶点坐标的求法, 用待定系数法求一个点两坐标间的函数关系, 以及在运算过程中所用的数学方法.

纵横发散

1. 分析 利用已知三点中的两个特殊点 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ 相当于 $ax^2 + bx + c = 0$ 时的两根, 可将解析式轻易求得.

解 ∵ 抛物线经过 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ 两点, 设所求二次函数为 $y = a(x + 1)(x - 3)$,

又 ∵ 二次函数经过点 $(1, -5)$

$$\therefore -5 = a(1 + 1)(1 - 3),$$

$$\therefore a = \frac{5}{4}, \text{ 故所求二次函数为 } y = \frac{5}{4}(x + 1)(x - 3).$$

解法指导 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的两个交点, 实际是当 $y = 0$ 时, $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根, 由根与系数的关系可知, 若与 x 轴两交点 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$ 已知, 可将解析式设为 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, 利用这个交点表达式, 更好求解析式.

$$2. \text{ 解 } y = x^2 - (a + 2)x + 9$$

$$= \left(x - \frac{a + 2}{2}\right)^2 + 9 - \frac{(a + 2)^2}{4}$$

所以这个抛物线的顶点坐标为 $\left(\frac{a + 2}{2}, 9 - \frac{(a + 2)^2}{4}\right)$. 当顶点在 y 轴上时, 有

$$\frac{a + 2}{2} = 0, \text{ 即 } a = -2.$$

当顶点在 x 轴上时, 有 $9 - \frac{(a + 2)^2}{4} = 0$, 即 $a = 4$ 或 $a = -8$.

因此, 当这个抛物线的顶点在坐标轴上时, a 有三个值分别为 $-2, 4, -8$.

应用发散

$$1. (1) \text{ 根据题意得 } y = (80 + x)(384 - 4x),$$

$$\text{整理得 } y = -4x^2 + 64x + 30\,720.$$

$$(2) \because y = -4x^2 + 64x + 30\,720$$

$$= -4(x - 8)^2 + 30\,976,$$

∴ 当 $x=8$ 时, $y_{\text{最大}}=309\ 76$.

即增加 8 台机器, 可以使每天的生产总量最大, 最大生产总量是 30 976 件.

2. (1) 如图 2'-4 所示, 因为桥拱高度 $OC=85\text{ m}$, 即抛物线过点 $C(0, 85)$, 所以 $b=85$, 又由已知得: $AB=350\text{ m}$, 即点 A 、 B 的坐标分别为 $(-175, 0)$ 、 $(175, 0)$,

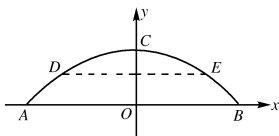


图 2'-4

则有 $0=175^2 \cdot a + 85$,

解得 $a \approx -0.002\ 8$.

所求抛物线的表达式为 $y = -0.002\ 8x^2$

+ 85.

(2) 设 DE 为水位上升 4 m 后的桥拱跨度,

即当 $y=4$ 时,

有 $4 = -0.002\ 8x^2 + 85$,

∴ $x \approx \pm 170$.

∴ D 、 E 两点的坐标分别为 $(-170, 4)$ 、 $(170, 4)$,

∴ $ED \approx 170 + 170 = 340\text{ (m)}$.

综合发散

1. (1) ① 描出四点位置如图 2-41 所示.

② 猜测它是一次函数 $y=kx+b$.

由两点 $(3, 18)$ 、 $(5, 14)$ 代入上式求得 $k=-2$, $b=24$.

当 $y=-2x+24$ 时, $(9, 6)$ 、 $(11, 2)$ 两点代入同样满足.

∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x+24$, 由实际意义知

$$y = \begin{cases} -2x+24 & (0 \leq x < 12) \\ 0 & (x \geq 12) \end{cases},$$

(*)

图象如图 2-41 所示.

(2) ① 因为销售利润 = 售出价 - 进货价, 则 $P = xy - 2y$

将(1)中(*)式代入则

$$P = y(x-2) = (24-2x)(x-2)$$

$$= -2x^2 + 28x - 48 = -2(x-7)^2 + 50,$$

当 $x=7$ 时, 日销售利润获得最大值为 50 元.

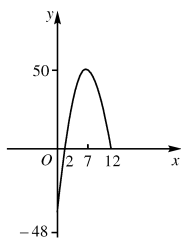
又当 $x > 12$ 时, 即销售单价大于 12 元时, 此时无人购买, 所以此时利润

$P=0$.

由实际意义知, 当销售价 $x=0$, 即亏完本卖出, 此时利润 $P=-48$, 即为最小值.

②根据实际意义,有 $0 \leq x < 2$ 时亏本卖出. 当 $x = 2$ 或 $x = 12$ 时利润 $P = 0$;

当 $x > 12$ 时,即高价卖出无人购买 $P = 0$. 故做出如图 2'-5. 由图象知: $x \geq 0, -48 \leq P \leq 50$.



2.(1)依题意可设 $A(a, 0)B(b, 0)$.

令 $y = 0$ 则 a, b 是 $x^2 - kx + k + 4 = 0$ 的两根.

于是 $\Delta = (-k)^2 - 4(k + 4) = k^2 - 4k - 16 = (k - 2)^2 - 20 > 0$, 且 $a + b = k$.

$\therefore a, b$ 是不等的正整数,

$\therefore k$ 为正整数, 且 $(k - 2)^2 - 20$ 是一个整数的平方.

设 $(k - 2)^2 - 20 = m^2$ (m 是整数).

$\therefore (k - 2)^2 - m^2 = 20$,

即 $(k - 2 + m)(k - 2 - m) = 20$.

注意到 $k - 2 + m$ 与 $k - 2 - m$ 是同奇、同偶的两数且 20 是偶数.

$\therefore \begin{cases} k - 2 + m = 10, \\ k - 2 - m = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} k - 2 + m = -2, \\ k - 2 - m = -10; \end{cases}$

$\begin{cases} k - 2 + m = 2, \\ k - 2 - m = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} k - 2 + m = -10, \\ k - 2 - m = -2. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = 8, \\ m = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} k = -4, \\ m = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 8, \\ m = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} k = -4, \\ m = -4; \end{cases}$

$\therefore k = 8$.

$\therefore$ 这个二次函数的解析式为 $y = x^2 - 8x + 12$.

可求得它的顶点坐标为 $(4, -4)$.

(2) $\because y = x^2 - 8x + 12$,

$\therefore$ 此二次函数的图象与 y 轴的交点 C 的坐标为 $(0, 12)$, 与 x 轴交点 $A(2, 0)B(6, 0)$.

又 $\because S_{\text{四边形}PBCD} = S_{\triangle COB} - S_{\triangle DOP}$,

$\therefore S = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 - \frac{1}{2} \times 6t$.

$\therefore S = 36 - 3t (2 \leq t < 6)$.

(3) $\because AB = 4, S = 30$,

$\therefore$ 可设所画三角形为 $\triangle MAB$, AB 边上的高为 h .

$\therefore S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} \times 4 \times h = 30$.

$\therefore h = 15$.

图 2'-5

图略.

解法指导 (1)中确定二次函数 $y = x^2 - kx + k + 4$ 的解析式即确定 k 的值, 因为二次函数的图象与 x 轴交于两点, 则一元二次方程 $x^2 - kx + k + 4 = 0$ 中的 $\Delta > 0$, 且为一个整数的平方, 设 $(k-2)^2 - 20 = m^2$, 利用奇偶分析或平方差公式求出 $k = 8$, 而后求出顶点坐标; (2)中, 先利用解析式求出 A, B, C 三点坐标, 容易知道 $S_{\text{四边形}PBCD} = S_{\triangle COB} - S_{\triangle DOP}$, 则 $S = 36 - 3t (2 \leq t < 6)$; (3)中, 利用 $S_{\triangle MAB} = 30$ 求出 AB 边上的高后即可画出图形.

探究发散

解 (1)设 DGD' 所在的抛物线的解析式为 $y = ax^2 + c$.

由题意得 $G(0, 8), D(15, 5.5)$.

$$\therefore \begin{cases} 8 = c, \\ 5.5 = 225a + c. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{90}, \\ c = 8. \end{cases}$$

$$\therefore DGD' \text{ 所在抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{90}x^2 + 8.$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{1}{4}, \text{ 且 } AD = 5.5, \therefore AC = 5.5 \times 4 = 22.$$

$$\therefore CC' = 2OC = 2 \times (OA + AC) = 2 \times (15 + 22) = 74 \text{ (m)}.$$

答: CC' 的长为 74 m.

$$(2) \because EB:BC = \frac{1}{4}, BE = 4, \therefore BC = 16.$$

$$\therefore AB = AC - BC = 22 - 16 = 6 \text{ (m)}.$$

答: AB 和 $A'B'$ 的宽都是 6 m.

(3)该大型货车可以从 OA (或 OA') 区域安全通过.

$$\text{在 } y = -\frac{1}{90}x^2 + 8 \text{ 中,}$$

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时, } y = -\frac{1}{90} \times 16 + 8 = 7\frac{37}{45}.$$

$$\therefore 7\frac{37}{45} - (7 + 0.4) = \frac{19}{45} > 0,$$

$\therefore$ 该大型货车可以从 OA (或 OA') 区域安全通过.

知能转化平台

题型发散

1. (1)用数形结合法.

$$\text{令 } x = 0, y = c = 3, \therefore C(0, 3).$$

$$\text{令 } y=0, x^2-4x+3=0,$$

$$\text{解得 } x=1 \text{ 或 } 3, \therefore A(1,0), B(3,0).$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3.$$

故本题应选 C.

(2)用直接推算法.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\text{得 } c=-4a, b=-2a.$$

$$\therefore y=ax^2+bx+c=ax^2-2ax-4a=0$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 得 } (1+\sqrt{5}, 0), (1-\sqrt{5}, 0)$$

当 $a>0$ 时, 开口向上, 顶点在第四象限; 当 $a<0$ 时, 开口向下, 顶点在第一象限.

故本题应选 C.

(3)用直接法.

当 $a>0$ 时 $\Delta<0$, 图象与 x 轴无公共点;

当 $a<0$ 时 $\Delta<0$, 图象与 x 轴无公共点.

故本题应选 D.

(4)用直接法.

若函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图象对称于 y 轴, 则 $x=-\frac{b}{2a}=0, \therefore b=0$.

故本题应选 B.

(5)用直接法.

图象过原点的条件是 $-k+1=0$,

$$\therefore k=1. \text{ 故本题应选 C.}$$

(6)用数形结合法.

将 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象先向左平移 1 个单位, 再向下平移 3 个单位.

故本题应选 D.

$$2. (1) \text{减小, 增大.} \quad (2) \text{左 3, 下 2.} \quad (3) \frac{1}{2}(x-3)^2+2.2. \quad (4) -4, 7.$$

$$(5) y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{22}{3}. \quad (6) 1. \quad (7) 6. \quad (8) y = (x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5.$$

解法发散

1. 解法1 根据题意, 抛物线的顶点 (m, k) 在另一抛物线 $y=x^2$ 上, 即 $k=m^2$.

∴ 抛物线方程为 $y = -\frac{1}{3}(x-m)^2 + k = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}mx + \frac{2}{3}m^2$.

设抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}mx + \frac{2}{3}m^2$ 与 x 轴交于 $(x_1, 0)$ $(x_2, 0)$ 两点, 由根与系数关系, 知 $x_1 + x_2 = 2m$ $x_1x_2 = -2m^2$.

$$\therefore |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{3}|m|.$$

根据题意, 得 $2\sqrt{3}|m| = 4\sqrt{3}$, ∴ $|m| = 2$, 即 $m = \pm 2$,

$$\therefore k = m^2 = 4.$$

∴ 两抛物线顶点间的距离为 $d = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$.

解法 2 令 $t = x - m$,

$$\text{则原抛物线为 } y = -\frac{1}{3}(x-m)^2 + k = -\frac{1}{3}t^2 + k.$$

根据题意, 抛物线截 x 轴的线段长为 $4\sqrt{3}$,

则令 $y = 0$, 得 $t^2 = 3k$, $t = \pm\sqrt{3k}$ ($\because k \geq 0$)

$$\therefore \sqrt{3k} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3}, \therefore k = 4.$$

而 $k = m^2 = 4$, 得 $m = \pm 2$.

∴ 两抛物线顶点间的距离为 $d = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} 2. (1) \text{解法 1 } y &= 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 1. \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

∴ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, y 有最小值 $\frac{1}{2}$.

解法 2 $\because a = 2 > 0$, ∴ 当 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$ 时, y 有最小值,

$$y_{\text{最小}} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 2 - (-2)^2}{4 \times 2} = \frac{1}{2}.$$

解法 3 $\because a = 2 > 0$, ∴ 当 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ 时, y 有最小值, $y_{\text{最小}} = 2 \times$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}.$$

解法 4 $\because y = 2x^2 - 2x + 1$, ∴ $2x^2 - 2x + 1 - y = 0$;

∴ x 是实数, 即方程有实根,

$$\therefore b^2 - 4ac \geq 0, \text{ 即有 } (-2)^2 - 4 \times 2 \times (1 - y) \geq 0.$$

解得 $y \geq \frac{1}{2}$, 故 y 有最小值 $\frac{1}{2}$.

(2)解法 1 设 $y' = 2x^2 - 4x + 3$,

$$\therefore a=2>0,$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1 \text{ 时,}$$

$$y' \text{ 有最小值, } y'_{\text{最小}} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 2 \times 3 - (-4)^2}{4 \times 2} = 1.$$

$\therefore$ 分子是定值, $\therefore$ 分母有最小值时, 分式有最大值,

$$\therefore y_{\text{最大}} = \frac{5}{1} = 5.$$

解法 2 原函数式变形为 $2yx^2 - 4yx + 3y - 5 = 0$.

$$\therefore x \text{ 为实数, } \therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

$$\text{即 } (-4y)^2 - 4 \times 2y \times (3y - 5) \geq 0, -8y + 40 \geq 0, \therefore y \leq 5.$$

$\therefore y$ 有最大值 5.

转化发散

1. 解 (1) $\therefore$ 方程 $kx^2 + 2(k-3)x + (k-3) = 0$ 有两个不相等的实根.

$\therefore$ 该方程为关于 x 的二次方程.

$$\therefore \begin{cases} \Delta = 4(k-3)^2 - 4k(k-3) > 0, \\ k \neq 0. \end{cases}$$

解得 $k < 3$ 且 $k \neq 0$.

又 $\therefore y = (k-2)x + m$ 为一次函数, $\therefore k \neq 2$.

又 $\therefore k$ 为非负整数, $\therefore k = 1$.

(2) $\therefore \alpha, \beta$ 是方程 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 的两个根,

$$\therefore \alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -2.$$

$\therefore$ 一次函数 $y = -x + m$ 与反比例函数 $y = \frac{n}{x}$ 都经过 (α, β) ,

$\therefore \alpha, \beta$ 满足函数解析式,

$$\therefore \begin{cases} \beta = -\alpha + m, \\ \beta = \frac{n}{\alpha}. \end{cases} \therefore \begin{cases} m = \alpha + \beta, \\ n = \alpha\beta. \end{cases}$$

$$\text{即 } m = \alpha + \beta = 4, n = \alpha\beta = -2.$$

$\therefore$ 所求一次函数为 $y = -x + 4$, 反比例函数为 $y = -\frac{2}{x}$.

2. 解 (1) $\Delta = [-(a-1)]^2 - 4(-a+1) = a^2 + 2a - 3$.

$$= (a+3)(a-1) > 0,$$

故当 $a > 1$ 或 $a < -3$ 时, 抛物线与 x 轴有两个不同的交点.

(2) 设 B 点坐标 $(x_1, 0)$, C 点坐标 $(x_2, 0)$ (当 $\Delta = a^2 + 2a - 3 > 0$ 时). 则 $x_1 + x_2 = a - 1$, $x_1 x_2 = -a + 1$.

$$BC = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{a^2 + 2a - 3}.$$

顶点 A 的纵坐标是 $\frac{4(-a+1)-(a-1)^2}{4} = -\frac{a^2+2a-3}{4}$,

它的绝对值是 $\frac{a^2+2a-3}{4}$.

由等边三角形边长与高的关系得

$$\frac{a^2+2a-3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{a^2+2a-3},$$

$$\therefore a^2+2a-3 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2+2a-3},$$

$$(a^2+2a-3)^2 - 12(a^2+2a-3) = 0,$$

$$(a^2+2a-3)(a^2+2a-15) = 0.$$

$$\therefore a^2+2a-3 = 0 \text{ (舍去)} \text{ 或 } a^2+2a-15 = 0,$$

$$\text{由 } a^2+2a-15 = 0 \text{ 解得 } a_1 = -5, a_2 = 3$$

$\therefore$ 当 $a = -5$ 或 $a = 3$ 时, $\triangle ABC$ 是等边三角形.

$$3. (1) \text{证明 } \Delta = (-4m)^2 - 4 \times 2m^2 = 16m^2 - 8m^2 = 8m^2.$$

$$\because m \neq 0, \therefore 8m^2 > 0, \text{ 即 } \Delta > 0.$$

$\therefore$ 当 m 是非零实数时, 这个函数的图象与 x 轴总有两个不同的交点.

(2) $\because A, B$ 为图象与 x 轴的交点, $\therefore$ 可设 $A(x_1, 0), B(x_2, 0) (x_2 > x_1)$, 且

x_1, x_2 是方程 $2x^2 - 4mx + m^2 = 0$ 的两个根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2m, x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{4m^2 - 2m^2} \\ &= \sqrt{2}|m|. \end{aligned}$$

又 $\because C$ 点为二次函数图象的顶点,

$$\therefore C \text{ 点纵坐标 } y = \frac{8m^2 - 16m^2}{4 \times 2} = -m^2,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 中 } AB \text{ 边上的高 } h = |-m^2| = m^2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \sqrt{2}|m| \cdot m^2 = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore |m| = 2, m = \pm 2.$$

4. 分析 抛物线 $y = x^2 + ax + a - 2$ 与 x 轴交点的横坐标就是方程 $x^2 + ax + a - 2 = 0$ 的解.

$$\begin{aligned} (1) \text{证明 } \Delta &= a^2 - 4(a - 2) = a^2 - 4a + 8 \\ &= (a - 2)^2 + 4 > 0, \end{aligned}$$

$\therefore$ 方程 $x^2 + ax + a - 2 = 0$ 有两个不同的实数根.

∴ 抛物线与 x 轴有两个不同的交点.

(2) 设 x_1, x_2 是抛物线与 x 轴两交点 A, B 的横坐标, 则 x_1, x_2 是方程 $x^2 + ax + a - 2 = 0$ 的两根.

$$\therefore x_1 + x_2 = -a, x_1 \cdot x_2 = a - 2.$$

$$\begin{aligned}\therefore |AB| &= |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{(-a)^2 - 4(a - 2)} \\ &= \sqrt{a^2 - 4a + 8}\end{aligned}$$

$$(3) \because |AB| = \sqrt{(a - 2)^2 + 4}$$

$$\therefore \text{当 } a = 2 \text{ 时, } |AB|_{\min} = 2.$$

变更命题发散

1. 过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M 交 EH 于 T , 设 $EF = x$ cm, 使 EH 用 x 表示, 这样可以得到矩形 $EFGH$ 面积的函数解析式, 随之求得最值, 设 $EF = x$ cm ($0 < x < 16$) 则 $AT = 16 - x$.

$$\because EH \parallel BC \therefore \frac{AT}{AM} = \frac{EH}{BC} \quad \frac{16 - x}{16} = \frac{EH}{20} \therefore EH = \frac{5}{4}(16 - x).$$

$$\begin{aligned}\therefore EFGH \text{ 的面积 } y &= \frac{5}{4}(16 - x)x = -\frac{5}{4}x^2 + 20x \\ &= -\frac{5}{4}(x - 8)^2 + 80.\end{aligned}$$

$$\because \text{二次项系数 } -\frac{5}{4} < 0 \therefore \text{当 } x = 8 \text{ 时, } y_{\text{最大值}} = 80,$$

$$\text{即 } EF = 8 \text{ (cm)}, EH = 10 \text{ (cm)}.$$

答 内接矩形的长和宽分别为 10 cm 和 8 cm 时, 所得的面积最大值为 80 cm^2 .

2. 分析 $S = HE \cdot EF$, 其中 $HE = x$, 因此解此问题的关键是求出 EF 与 x 的关系, 为此可考虑通过 $\triangle BHG \sim \triangle BAC$ 求出 EF (用 x 表示).

解 过 B 作 $BD \perp AC$ 于 D 交 HG 于 M . 依题意 $AC = b$, $BD = h$, $BM = h - x$.

$$\because \triangle ABC \sim \triangle HBG \therefore \frac{HG}{AC} = \frac{BM}{BD},$$

$$\text{即 } \frac{HG}{b} = \frac{h - x}{h} \therefore HG = \frac{b}{h}(h - x),$$

$$\therefore S = \frac{b}{h}(h - x)x.$$

由题中的几何条件, 应有 $x > 0$, $S > 0$,

$$\text{由 } S > 0 \text{ 即 } \frac{b}{h}(h - x)x > 0 \text{ 得 } x < h.$$

$\therefore$ 矩形 $EFGH$ 的面积 $S = \frac{b}{h}(h-x)x$ 其中 x 的取值范围是 $0 < x < h$.

对称发散

1. 由于抛物线关于 y 轴对称, 因此应满足 $a_1 = a_2, b_1 = -b_2, c_1 = c_2$, 这样从 $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -5$ 就可以求出 a_2, b_2, c_2 .

设所求的抛物线的解析式是 $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

$\therefore y = 2x^2 + x - 5$ 与 $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ 两抛物线关于 y 轴对称, 且 $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -5$.

$\therefore a_2 = a_1 = 2, b_2 = -b_1 = -1, c_2 = c_1 = -5$.

因此, 所求的解析式是 $y = 2x^2 - x - 5$.

2. 由于抛物线关于 x 轴对称, 因此应满足 $a_1 = -a_2, b_1 = -b_2, c_1 = -c_2$.

$\therefore$ 抛物线 $y = 4x^2 - 2ax + 3a - 5$ 和 $y = -4x^2 + (b+1)x - b$ 关于 x 轴对称,

则有 $\begin{cases} 2a = b+1, \\ 3a - 5 = b. \end{cases}$ 解得 $a = 4, b = 7$, 故抛物线解析式为

$y = 4x^2 - 8x + 7$ 和 $y = -4x^2 + 8x - 7$.

综合发散

1. 据题设可得

$$-\frac{-(a-1)}{2 \cdot 3} = -\frac{2b-1}{2 \cdot 2}, \text{ 即 } 2a + 6b = 5, \quad (1)$$

$$\frac{4 \cdot 3(a+1) - [-(a-1)]^2}{4 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 2 \cdot (-2b) - (2b-1)^2}{4 \cdot 2},$$

$$\text{整理得 } 12b^2 + 36b - 2a^2 + 28a + 25 = 0, \quad (2)$$

$$\text{由①得 } a = \frac{5-6b}{2}, \quad (3)$$

将③代入②, 并化简得 $4b^2 + 12b - 55 = 0$,

$$\text{解得 } b_1 = \frac{5}{2}, b_2 = -\frac{11}{2}.$$

代入③得 $a_1 = -5, a_2 = 19$.

$$\therefore \begin{cases} a = -5, \\ b = \frac{5}{2}; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 19, \\ b = -\frac{11}{2} \end{cases} \text{ 即为所求.}$$

2. 由于 $\Delta = 4(m+3)^2 - 4(2m+4) = 4[(m+2)^2 + 1] > 0$,

因此, m 不论取何值, 方程总有两个不等的实数根.

$\therefore \alpha, \beta$ 是方程的两个根, $\therefore \alpha + \beta = -2(m+3), \alpha \cdot \beta = 2m+4$,

即 $(\alpha-1)^2 + (\beta-1)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 2\beta + 1$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) + 2 \\
 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \cdot \beta - 2(\alpha + \beta) + 2 \\
 &= [-2(m+3)]^2 - 2(2m+4) - 2[-2(m+3)] + 2 \\
 &= 4m^2 + 24m + 42.
 \end{aligned}$$

$$\because a=4>0, \therefore \text{当 } m = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{8} = -3 \text{ 时},$$

$$(\alpha-1)^2 + (\beta-1)^2 \text{ 的最小值为 } \frac{4 \times 4 \times 42 - 24^2}{4 \times 4} = 6.$$

探究发散

$$1. \text{解} \quad (1) \Delta = (2k-1)^2 - 4(k^2-1) = -4k+5 \geq 0, \therefore k \leq \frac{5}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{又} \because x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = [-(2k-1)]^2 - 2(k^2-1) \\
 &= 2k^2 - 4k + 3 = 9,
 \end{aligned}$$

$$\therefore k^2 - 2k - 3 = 0 \text{ 解得 } k_1 = -1, k_2 = 3.$$

$$\therefore k \leq \frac{5}{4}, \therefore k = -1.$$

$$(2) \text{由}(1) \text{ 则二次函数的解析式为 } y = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

$$\text{令 } y=0 \text{ 得 } x^2 - 3x = 0, \therefore x_1 = 0, x_2 = 3, \therefore A(0, 0), B(3, 0).$$

假设点 M 存在, 并设其坐标为 (x_M, y_M) , 如图 2'-6 所示. 由题意, $\triangle AMB$ 是

锐角三角形, 故 $\frac{3}{2} < x_M < 3, \therefore y_M < 0$.

$$\begin{aligned}
 \therefore S_{\triangle AMB} &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |y_M| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |y_M| = 3.
 \end{aligned}$$

$$\therefore |y_M| = 2, \therefore y_M = \pm 2, \text{ 舍去正值.}$$

$$\therefore y_M = -2.$$

$$\text{当 } y_M = -2 \text{ 时 } x_M^2 - 3x_M = -2$$

$$\therefore x_M = 1 \text{ 或 } x_M = 2.$$

$$\therefore 1 < \frac{3}{2}, \therefore x_M = 1 \text{ 应舍去, 而 } \frac{3}{2} < 2 < 3.$$

$$\therefore x_M = 2 \text{ 满足条件.}$$

$$\therefore \text{这样的点存在, 其坐标为 } (2, -2).$$

$$(3) \because M(2, -2), \therefore \angle MAx = 45^\circ, \therefore \angle xAP = 45^\circ,$$

$$\therefore AP \text{ 所在直线的方程为 } y = x.$$

$$\therefore P \text{ 在 } y = x \text{ 和 } y = x^2 - 3x \text{ 上.}$$

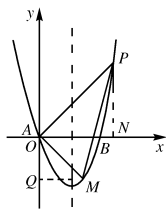


图 2'-6

$$\therefore \begin{cases} y = x, \\ y = x^2 - 3x. \end{cases}$$

①

②

把①代入②, 得 $x^2 - 4x = 0$. $\therefore x_1 = 0$ (舍去) $x_2 = 4$, 此时 $y = 4$.

$\therefore P(4, 4)$. 过 P 作 $PN \perp x$ 轴于 N , 在 $\text{Rt} \triangle PNA$ 中, 由勾股定理, 有 $|AP| = 4\sqrt{2}$. 过 M 作 $MQ \perp y$ 轴于 Q , 在 $\text{Rt} \triangle MQA$ 中, 由勾股定理, 有 $|AM| = 2\sqrt{2}$.

$$\therefore S_{\triangle AMP} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 8.$$

2. 解 (1) $\because$ 抛物线 $y = 2x^2 - 4x + m$ 与 x 轴交于不同的两个点,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $2x^2 - 4x + m = 0$ 有两个不相等的实数根.

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2m > 0,$$

又 $\because$ 顶点 C 在第四象限.

$$\therefore m - 2 < 0, \therefore m < 2.$$

(2) 由 $y = 2x^2 - 4x + m = 2(x - 1)^2 + m - 2$, 得顶点 C 的坐标是 $(1, m - 2)$.

由 $2x^2 - 4x + m = 0$ 解得 $x_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2m}$ 或 $x_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2m}$.

$$\therefore AB = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2m}) - (1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2m}) = \sqrt{4 - 2m}.$$

(3) 可能.

证明 由 $y = \sqrt{2}x + 1$ 分别交 x 轴、 y 轴于点 E 、 F ,

得 $E(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $F(0, 1)$.

$$\therefore OE = \frac{\sqrt{2}}{2}, OF = 1.$$

而 $BD = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2m}$, $DC = 2 - m$.

当 $OE = BD$ 时, 得 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2m}$, 解得 $m = 1$.

此时 $OF = DC = 1$.

又 $\because \angle EOF = \angle BDC = 90^\circ$, $\therefore \triangle BDC \cong \triangle EOF$.

$\therefore \triangle BDC$ 与 $\triangle EOF$ 有可能全等.

期中测试题

一、1. 用直接法.

$$\because \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}, a + b > c,$$

$$\therefore \sin \alpha + \cos \alpha > 1.$$

故本题应选 C.

2. 用直接法.

$$\because \angle C = 90^\circ, \angle A + \angle B = 90^\circ, \therefore \sin A = \cos B,$$

$$\sin A + \cos B = \sqrt{3}, \text{即 } 2\sin A = \sqrt{3}, \angle A = 60^\circ.$$

故本题应选 B.

3. 用直接推算法.

$$\because 0 < a < 1, \frac{1}{a} > 1, \therefore a < \frac{1}{a}.$$

$$\text{不等式 } (x-a)(x-\frac{1}{a}) < 0 \text{ 与下面不等式组 } \begin{cases} x-a > 0 \\ x-\frac{1}{a} < 0 \end{cases} \text{ 同解, 得 } a < x < \frac{1}{a}.$$

故本题应选 A.

4. 用直接法.

$$\because a < 0, \text{开口向下 } \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4ac < 0,$$

$$\therefore ac > 1.$$

故本题应选 D.

5. 用直接推算法.

$$\because a + b = 0, b = -a.$$

$$\therefore y = x^2 + ax - a.$$

将选项 C 中点(1, 1)的坐标代入上式, 得 $1 = 1 + 1 \times a - a$, 等式成立.

故本题应选 C.

6. 用数形结合法.

$$\text{由图知开口向上, } \therefore a > 0, c = 0, x = -\frac{b}{2a} = 1, b < 0.$$

$$\text{① } abc = 0, \text{ ② } a = -\frac{b}{2a}, \text{ ③ } a + c > b, \text{ ④ } a + b + c < 0. \text{ 其中正确的个数}$$

有 2 个.

故本题应选 C.

7. 用直接推算法.

$$\because AC = \frac{4}{3} \times \frac{c}{2} = \frac{2}{3}c, \quad BC = \frac{\sqrt{5}}{3}c.$$

$$\because \frac{\sqrt{5}}{3}c > \frac{2}{3}c, \therefore BC > AC.$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{c} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}c}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

故本题应选 A.

8. 用直接法.

$$\text{令 } y=0, -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0,$$

$$\text{即 } x^2 - 8x - 20 = 0, \text{解得 } x = 10, x = -2(\text{舍去}).$$

故本题应选 C.

9. 用直接法.

$$\text{欲使 } (\sin A - 1)^2 + \left| \cos B - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 0,$$

$$\text{必须 } \sin A - 1 = 0, \sin A = 1, \angle A = 90^\circ, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \angle B = 30^\circ, \therefore \angle C = 60^\circ.$$

故本题应选 B.

10. 用直接法.

$$AB = a \cos \alpha,$$

$$AD = AB \sin \alpha = a \sin \alpha \cos \alpha.$$

故本题应选 C.

11. 用直接推算法.

$$\because \Delta = 16a^2 - 4(4a^2 - 1) = 4 > 0.$$

$$\therefore x_1 - x_2 = \frac{4a+2}{2} - \frac{4a-2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

故本题应选 B.

12. 用验证法.

不论 k 取任何实数, 抛物线 $y = a(x+k)^2 + k (a \neq 0)$ 的顶点为 $(-k, k)$.

经验证, 顶点 $(-k, k)$ 的坐标满足直线 $y = -x$ 方程.

故本题应选 A.

$$\text{二、13. 2. } 14. 30^\circ. \quad 15. (-1, -2).$$

$$16. 9 \text{ 或 } 25. \quad 17. 30^\circ. \quad 18. 2 + 2\sqrt{3}.$$

$$\text{三、19. 整理得 } 2\sin^2 \alpha - 7\sin \alpha + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } \sin \alpha = 3 \text{ 或 } \sin \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\because \sin \alpha < 1, \therefore \sin \alpha = \frac{1}{2}, \therefore \alpha = 30^\circ.$$

$$20. \text{原式} = \sqrt{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ - 2\sin 27^\circ \cos 27^\circ}$$

$$= \sqrt{(\sin 27^\circ - \cos 27^\circ)^2}$$

$$= |\sin 27^\circ - \cos 27^\circ| = |\sin 27^\circ - \sin 63^\circ|$$

$$= \sin 63^\circ - \sin 27^\circ.$$

四、21. $\because \sin A = 1, \therefore A = 90^\circ,$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形, 则 $B + C = 90^\circ,$

$\sin B = \sin(90^\circ - C) = \cos C$, 又因 $\sin B, \cos C$ 是方程 $4x^2 + kx + 1 = 0$ 的两根,

$$\therefore \Delta = k^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0,$$

$\therefore k = \pm 4$. 根据根与系数的关系有 $\sin B + \cos C = -\frac{k}{4}$, 而 $\sin B = \cos C$,

$$\therefore 2\sin B = -\frac{k}{4}, \sin B = -\frac{k}{8}.$$

$\because B$ 为锐角, $\therefore k < 0, \therefore k = -4$, 当 $k = -4$ 时, $\sin B = \frac{1}{2},$

$$\therefore B = 30^\circ, C = 60^\circ.$$

22. $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴有交点, 且都在 x 轴负半轴上, 即 $ax^2 + bx + c = 0$

有两个负根, 于是 $m \neq \frac{2}{3}$ 时, 有

$$\begin{cases} 16m^2 - 8(3m - 2)(m^2 + 1) \geq 0, \\ -\frac{4m}{2(3m - 2)} < 0, \\ \frac{m^2 + 1}{2(3m - 2)} > 0, \end{cases} \quad \therefore \frac{2}{3} < m \leq 1.$$

23. 分析 本题是已知抛物线与 x 轴的两个交点的关系, 求相应解析式的系数, 也就是根据两个交点的横坐标的关系求系数中字母的值, 从而进一步反映二次函数与一元二次方程的关系.

解 (1) 设点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$.

$\because A, B$ 两点关于 y 轴对称,

$$\therefore x_1 + x_2 = 0, \text{ 且 } x_1 x_2 \leq 0.$$

$$\therefore 2(6 - \sqrt{m^2}) = 0, \text{ 且 } -2(m - 3) \leq 0.$$

解得 $m = 6$.

(2) 由 (1) $m = 6$ 知抛物线解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$, 其顶点坐标为 $(0, 3)$.

(3) 方程 $-\frac{1}{2}x^2 + (6 - \sqrt{m^2})x + m - 3 = 0$ 的两根互为相反数.

24. 过 D 作 $DF \perp AC$, 垂足为 F , $\because AD = 1\,000, \angle DAC = 30^\circ, \therefore DF = 1\,000 \sin 30^\circ = 500$, 又 $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 15^\circ$, 而 $\angle BDE = 60^\circ, \angle DBC = 30^\circ, \angle ABC = 45^\circ, \therefore \angle ABD = 15^\circ$, 于是 $BD = AD = 1\,000, BE = 1\,000 \sin 60^\circ = 500\sqrt{3}, \therefore$ 山高为 $(500 + 500\sqrt{3})$ m.

25. 证明 由已知得出 $y_1 = ax_1^2$

①

$$y_1 = kx_1 + b$$

②

$$y_2 = ax_2^2$$

③

$$y_2 = kx_2 + b$$

④

$$kx_3 + b = 0$$

⑤

① - ② 得 $ax_1^2 - kx_1 - b = 0$,

③ - ④ 得 $ax_2^2 - kx_2 - b = 0$.

$\therefore x_1, x_2$ 为方程 $ax^2 - kx - b = 0$ 的两根,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{k}{a}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{k}{b},$$

又由⑤得 $\frac{1}{x_3} = -\frac{k}{b},$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}.$$

26. (1) 两条抛物线的开口方向相反, $\therefore$ 它们的二次项系数为异号: $a(a-1) < 0$, 又 $\because 0 < a < 1, \therefore a-1 < 0$, 因此 C_2 的开口向下, 因而过 A、B、C 三点的抛物线为 C_2 .

(2) $\because$ B、C 为两抛物线的交点, 故它们的坐标满足表达式

$$\begin{cases} y = ax^2 + 2bx + c, \\ y = (a-1)x^2 + 2(b+2)x + c-3. \end{cases}$$

消去 y 得 $x_1 = 1, x_2 = 3,$

由图知 C 点的横坐标较小, $\therefore$ 点 B 的横坐标为 3, 点 C 的横坐标为 1.

(3) $\because OC = OD$, 故 C_1 以 y 轴为对称轴, $\therefore -\frac{2b}{2a} = 0, \therefore b = 0,$

又 $\because AB = BC$, 点 B 的横坐标为 3,

$$\therefore C_2 \text{ 以 } x=3 \text{ 为对称轴, 由此得 } -\frac{2(b+2)}{2(a-1)} = 3, b=0 \text{ 代入, 得 } a = \frac{1}{3},$$

$$\therefore C_1: y = \frac{1}{3}x^2 + c,$$

又 $\because C_1$ 过 $C(1, 0),$

$$\therefore c = -\frac{1}{3}, \therefore a = \frac{1}{3}, b = 0, c = -\frac{1}{3}.$$

第三单元 圆

1. 车轮为什么做成圆形

圆的对称性

圆周角和圆心角的关系

题型发散

1. 用直接法.

可求得 $\widehat{AB} = 80^\circ$, $\widehat{BC} = 120^\circ$, $\widehat{CA} = 160^\circ$, 则 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 分别为 60° , 80° , 40° 故应选 A.

2. 解法1 用排除法.

因为 A、B、C 均不满足对角之和的份数相等, 所以 A、B、C 均应排除.

故应选择 D.

解法2 用直接法.

分别计算 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$ 的度数为 36° , 72° , 108° , 144° , 从而得 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ 的度数为 90° , 126° , 90° , 54° , 即 $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 5 : 7 : 5 : 3$, 应选 D.

3. 当做出弦心距和连得半径构成直角三角形后, 由勾股定理可知, AB 的弦心距为 4 cm, CD 的弦心距为 3 cm. 所以 AB 和 CD 两条平行弦的距离应为 $(4+3)$ cm 和 $(4-3)$ cm 的两种情况.

4. 据题意可知 $\widehat{CD} = 60^\circ$, $\widehat{DA} = 80^\circ$, 根据圆周角的度数等于它所对弧度数的一半, 可求得 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ 的度数分别是 50° , 70° , 130° , 110° .

生活发散

1. $\because AB = 40$, $CD = 8$, $\therefore AD = \frac{1}{2}AB = 20$, $OD = OC - DC = R - 8$.

在 $\text{Rt}\triangle OAD$ 中, 由勾股定理得 $OA^2 = AD^2 + OD^2$.

$$\therefore R^2 = 20^2 + (R - 8)^2,$$

$$\therefore R = 29 \text{ (m)}.$$

答: 拱桥半径 $R = 29$ m.

2. 分析 要使渔船尽快驶离危险区, 根据点与圆的位置关系, 即要渔船尽快离开以点 A 为圆心, 半径为 3 km 的圆外, 显然沿射线 AB 方向驶离该区域路径最短, 利用三角形三边关系给予证明.

解 该船应沿射线 AB 方向驶离危险区域, 理由如下:

如图 3-24 所示, 设射线 AB 与 $\odot A$ 相交于点 C, 在 $\odot A$ 上任取一点 D (不包括 C 关于 A 的对称点). 连 AD, BD, 在 $\triangle ABD$ 中,

$$\therefore AB + BD > AD, AD = AC = AB + BC,$$

$$\therefore AB + BD > AB + BC.$$

$$\therefore BD > BC.$$

解法指导 实际问题,应抽象出一般的几何图形,依据圆上所有点的共同特征,结合三角形三边的关系来解决实际问题.

纵横发散

1. (1) 连结 FC , 则 $BF \perp FC$, 在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$$\therefore \angle BFC = \angle EDB = 90^\circ, \quad \angle FBC = \angle EBD,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BFC.$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BF}.$$

$$\text{即 } BE \cdot BF = BD \cdot BC.$$

(2) $AE > BD$.

证明 连结 AC , AB , 则 $\angle BAC = 90^\circ$.

$$\therefore \widehat{AF} = \widehat{AB}, \therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\text{又} \because \angle 2 + \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle 3 + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

$$\therefore AE = BE.$$

在 $\text{Rt}\triangle EBD$ 中, $BE > BD$,

$$\therefore AE > BD.$$

2. 分析 本题要判断两条弧 $\widehat{PA}$ 与 $\widehat{PB}$ 是否相等, 解题关键是连结 OP , 判断 OP 是否与 AB 垂直, 若 $OP \perp AB$, 则 $\widehat{PA} = \widehat{PB}$, 否则两弧就不相等.

解 如图 3-26 所示, 连结 OP , 则 $OP = OC$, $\angle OPC = \angle OCP$.

$\therefore CP$ 是 $\angle DCO$ 的平分线,

$$\therefore \angle DCP = \angle OCP. \therefore \angle OPC = \angle DCP.$$

$$\therefore OP \parallel CD. \text{又} \because CD \perp AB,$$

$$\therefore OP \perp AB. \therefore \widehat{PA} = \widehat{PB}.$$

转化发散

1. 分析 $\angle BPD$ 应转化到特殊三角形中, 易想到连结 BD , 利用 AB 为直径, 使得 $\angle ADB = 90^\circ$, 要与 AB , CD 有关系, 可利用 $\triangle CDP \sim \triangle ABP$ 作转化.

解 $\because \angle CDA = \angle ABC, \angle CPD = \angle APB,$

$$\therefore \triangle CDP \sim \triangle ABP.$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{PD}{BP} = \frac{3}{4}, \therefore \cos \angle DPB = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \tan \angle BPD = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

解法指导 在圆中极易利用等弧或同弧所对圆周角相等,得到两三角形相似,从而得到线段之间的比例关系.由直径所对圆周角为 90° ,极易形成直角三角形,从而求出三角函数的值.

2. 分析 本题通过作 $\triangle ABE$ 的外接圆,把较难证明的三角形问题转化为圆的问题.

证明 如图 3-28 所示,作 $\triangle ABE$ 的外接圆,交 BC 于 D ,连结 DE .

$$\because \angle ABE = \angle DBE,$$

$$\therefore AE = ED.$$

$$\because \angle A = 100^\circ.$$

$$\therefore \angle BDE = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

$$\text{从而 } \angle BED = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ,$$

$$\therefore BE = BD.$$

$$\because \angle DEC = \angle BDE - \angle C = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ.$$

$$\therefore DE = DC. \text{ 于是 } AE = DC.$$

$$\therefore AE + BE = BC.$$

构造发散

证明 连结 AD 、 AE , 如图 3'-1 所示.

$$\because D \text{ 是 } \widehat{AB} \text{ 的中点}, \therefore \widehat{AD} = \widehat{BD}.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle AED.$$

同理可证 $\angle ADE = \angle CAE$.

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle EAG.$$

$$\therefore \frac{AF}{EG} = \frac{DF}{AG}, \therefore AF \cdot AG = DF \cdot EG.$$

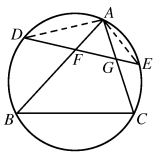


图 3'-1

探究发散

解 如图 3'-2 所示,作 $AB \perp MN$, B 为垂足.

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, $\because \angle ABP = 90^\circ$, $\angle APB = 30^\circ$, $AP = 160$,

$$\therefore AB = \frac{1}{2} AP = 80.$$

$\therefore$ 点 A 到直线 MN 的距离小于 100 m ,

$\therefore$ 这所中学会受到噪声的影响.

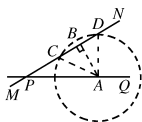


图 3'-2

解法 1 如图 3'-2 所示,如果以点 A 为圆心, 100 m 为半径画圆,那么圆 A 和直线 MN 有两个交点,设交点分别为 C 、 D , 连结 AC 、 AD , 那么 $AC = AD = 100 \text{ (m)}$.

根据勾股定理和垂径定理，

$$CB = DB = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60 \text{ (m)}. \therefore CD = 120 \text{ (m)}.$$

学校受噪声影响的时间

$$t = 120 \text{ m} \div 18\,000 \text{ m/h} = \frac{1}{150} \text{ h} = 24 \text{ s}.$$

解法 2 如图 3'-3 所示，假设拖拉机在公路 MN 上沿 PN 方向行驶到点 C 处学校开始受到噪声影响，那么 $AC = 100 \text{ (m)}$ 。由勾股定理得 $BC = 60 \text{ (m)}$ 。

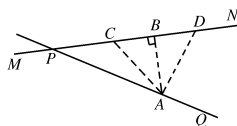


图 3'-3

同理，拖拉机行驶到点 D 处学校开始脱离噪声影响，那么

$$AD = 100, BD = 60. \therefore CD = 120.$$

$$\text{学校受噪声影响的时间 } t = 120 \div 18\,000 = \frac{1}{150} \text{ (h)} = 24 \text{ (s)}.$$

2. 确定圆的条件

直线和圆的位置关系

圆和圆的位置关系

题型发散

1. 用验证法.

直角三角形内切圆半径 $= \frac{1}{2}(\text{两条直角边的和减去斜边}) = \frac{1}{2}(\text{直角三角形的周长减去斜边的二倍})$

经验证，本题应选 D.

2. 用排除法.

经验证 A、B、C 均正确.

故本题应排除 D.

3. 用直接法.

$$\because R^2 + d^2 - r^2 = 2Rd, \therefore R^2 - 2Rd + d^2 = r^2.$$

$$\therefore (R - d)^2 = r^2, R - d = \pm r, \therefore d = R \pm r.$$

本题应选 B.

4. 如图 3-51 所示，连结 OQ，由 $\left. \begin{array}{l} QP = QC \Rightarrow \angle QPC = \angle C. \\ \angle AOP = \angle OQC = 90^\circ \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle A = \angle QOC. \\ \angle A = \angle OQA. \end{array} \right\} \Rightarrow \angle QOC = \angle OQA \Rightarrow OP = PQ.$$

由等角的余角相等可知 $\angle PQC = \angle C \Rightarrow PC = PQ$

$$\left. \begin{array}{l} PQ = \frac{1}{2} OC \\ QC = PQ \end{array} \right\} \Rightarrow QC = \frac{1}{2} OC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle COQ = 30^\circ \\ \angle COQ = \angle A \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A = 30^\circ.$$

5. 相交. 因为 R , r 和 d 组成一个三角形, 则有 $R - r < d < R + r$ ($R \geq r$) 或 $r - R < d < R + r$ ($r \geq R$), 所以这两圆的位置关系是相交.

生活发散

1. 分析 从几何角度看, 实际上是讨论一下直线 OB 与半径为 25 的 $\odot A$ 的位置关系. 相切和相交都有触礁危险, 只有相离才安全, 为此只须计算 A 点到直线 OB 的距离与 25 比较后即得答案. 本题仍是考查直线与圆的位置关系.

解 该舰继续向西航行, 无触礁危险. 理由是:

如图 3'-4 所示, 作 $AC \perp OB$ 于 C , 则

$$AC = BC \cdot \tan 45^\circ = BC.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACO \text{ 中, } OC = AC \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{3} AC.$$

$$\therefore OC - BC = OB, \therefore \sqrt{3} AC - AC = 20.$$

$$\text{解得 } AC = 27.32 (\text{海里}).$$

$$\therefore AC = 27.32 > 25 (\text{半径}), \therefore \text{直线 } OB \text{ 与 } \odot A \text{ 相离}.$$

$\therefore$ 该舰向西航行无触礁危险.

解法指导 将实际问题转化为数学模型, 再利用数学知识来解决问题.

2. 如图 3'-5 所示,

(1) 设途中会遇到台风, 且最初遇到台风的时间为 t 小时, 此时轮船位于 C 处, 台风中心移到 E 处, 连结 CE .

$$\text{则 } AC = 20t, AE = AB - BE = 100 - 40t, EC = 20\sqrt{10}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEC \text{ 中, } AC^2 + AE^2 = EC^2,$$

$$\therefore (20t)^2 + (100 - 40t)^2 = (20\sqrt{10})^2.$$

$$\text{整理, 得 } t^2 - 4t + 3 = 0.$$

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0,$$

$\therefore$ 途中会遇到台风.

$$\text{解得 } t_1 = 1, t_2 = 3, \therefore \text{最初遇到台风的时间为 } 1 \text{ h}.$$

(2) 设台风抵达 D 港时间为 t h, 此时台风中心至 M 点, 过 D 作 $DF \perp AB$, 垂足为 F , 连结 DM .

$$\text{在 Rt}\triangle ADF \text{ 中, } AD = 60, \angle FAD = 60^\circ,$$

$$\therefore DF = 30\sqrt{3}, FA = 30.$$

$$\text{又 } \because FM = FA + AB - BM = 130 - 40t, MD = 20\sqrt{10}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DMF \text{ 中, } (30\sqrt{3})^2 + (130 - 40t)^2 = (20\sqrt{10})^2.$$

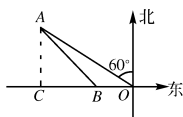


图 3'-4

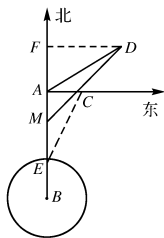


图 3'-5

整理,得 $4t^2 - 26t + 39 = 0$. 解得 $t_1 = \frac{13 - \sqrt{13}}{4}$, $t_2 = \frac{13 + \sqrt{13}}{4}$.

$\therefore$ 台风抵达 D 港时间为 $\frac{13 - \sqrt{13}}{4}$ h.

$\therefore$ 轮船从 A 处用 $\frac{13 - \sqrt{13}}{4}$ h 到 D 港的速度为 $60 \div \frac{13 - \sqrt{13}}{4} \approx 25.5$.

因此,为使台风抵达 D 港之前轮船到 D 港,轮船至少应提速 6 海里/时.

纵横发散

1. 分析 三角形的内心是三条角平分线的交点,故本题的关键只要证 $\angle 1 = \angle 2$. 充分应用条件 $DI = DB$,可以得出 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 分别与 $\angle BID$ 的关系.

证明 连结 BI, CI ,

$$DI = DB \Rightarrow \angle DIB = \angle IBD = \angle CBD + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} DI = DB \\ \Rightarrow \end{matrix}} \right\}$$

$$\text{在 } \triangle ABI \text{ 中} \Rightarrow \angle DIB = \angle 1 + \angle 4$$

$$\Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 \Rightarrow \angle 1 = \angle 2.$$

①

$$\text{又} \because \widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow \angle 3 = \angle 4.$$

②

结合①②知 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.

2.(1)分别作 $O_1D \perp AB$ 于点 D , $O_2E \perp AC$ 于点 E ,

则 $AB = 2AD$, $AC = 2AE$.

$\because AM \perp BC$,

$\therefore O_1D \parallel AM \parallel O_2E$.

$\because M$ 为 O_1O_2 的中点,

$\therefore AD = AE$.

$\therefore AB = AC$.

(2) $\because O_1A$ 切 $\odot O_2$ 于点 A ,

$\therefore O_1A \perp O_2A$ 又 M 为 O_1O_2 的中点,

$\therefore O_1O_2 = 2AM$.

在梯形 O_1O_2ED 中, $O_1D + O_2E = 2AM$,

$\therefore O_1D + O_2E = O_1O_2$ 即 $d_1 + d_2 = O_1O_2$.

(3)证法 1 $\because O_1A \perp O_2A$,

$\therefore \angle AO_1D = \angle O_2AE$.

$\therefore \text{Rt} \triangle O_1AD \sim \text{Rt} \triangle AO_2E$.

$$\therefore \frac{AD}{O_2E} = \frac{O_1D}{AE} = \frac{O_1A}{O_2A} \text{ 即 } \frac{AD}{d_2} = \frac{d_1}{AE} = \frac{R}{r}.$$

$$\therefore AD \cdot AE = d_1 \cdot d_2 = 1,$$

由(1)(2)知 $AD = AE = 1$, $O_1O_2 = d_1 + d_2$,

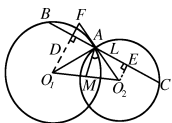
$$\therefore d_1 = \frac{R}{r}, d_2 = \frac{r}{R}.$$

$$\therefore R^2 + r^2 = O_1O_2^2 = (d_1 + d_2)^2 = \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)^2 = \frac{(R^2 + r^2)^2}{R^2 r^2}.$$

$$\therefore R^2 + r^2 = R^2 r^2.$$

证法2 由证法1知 $AD = AE = 1$, $\therefore DE = 2$.

如图 3'-6 所示, 延长 O_2A 交 O_1D 的延长线于点 F , 则



$$S_{\triangle AFD} = S_{\triangle AO_2E},$$

$$\therefore S_{\triangle O_1O_2F} = S_{\text{梯形} O_1O_2ED}.$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot R = \frac{1}{2} (d_1 + d_2) \cdot 2.$$

$$\therefore Rr = d_1 + d_2.$$

在 $\text{Rt}\triangle O_1O_2A$ 中, $R^2 + r^2 = O_1O_2^2 = (d_1 + d_2)^2$.

$$\therefore R^2 + r^2 = R^2 r^2.$$

图 3'-6

构造发散

解 (1) 连结 BC .

$\because AB \perp CD$, CD 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore BC = AC$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

又 $\because AE = CE$, $\therefore \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore \triangle AEC \sim \triangle ACB$.

$\therefore AC/AB = AE/AC$, 即 $AC^2 = AB \cdot AE$.

(2) PB 与 $\odot O$ 相切, 连结 OB . $\because PB = PE$, $\therefore \angle PBE = \angle PEB$.

$\because \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, $\therefore \angle PEB = \angle 1 + \angle 3 = 2\angle 1$.

而 $\angle PBE = \angle 2 + \angle PBC$, $\therefore \angle PBC = \angle 1$.

在 $\triangle OBC$ 中, $OB = OC$, $\therefore \angle OBC = \angle OCB$.

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, $\angle OCB = 90^\circ - \angle 2 = 90^\circ - \angle 1$.

$\therefore \angle OBC = 90^\circ - \angle 1$.

$\therefore \angle OBP = \angle OBC + \angle PBC = \angle 1 + (90^\circ - \angle 1) = 90^\circ$.

$\therefore PB \perp OB$, 即 PB 为 $\odot O$ 的切线.

分解发散

分析 本题把阴影部分的面积分解为半个大圆减去两个等圆面积之差.

解 设等圆半径为 r .

$$\therefore S_{\text{影}} = \frac{1}{2} \pi R^2 - 2\pi r^2.$$

设 $\odot O_1$ 切 $\odot O$ 于 F , 连结 O, O_1, F ,

$\because \odot O_1$ 与 $\odot O$ 内切 $\therefore F, O_1, O$ 共线 $OO_1 = R - r$.

设 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于 P , $\odot O_1$ 切 $\odot O$ 直径 AB 于 E , 则四边形 O_1EOP 为正方形,

$$\therefore O_1E = OE = r, \therefore r^2 + r^2 = OO_1^2, \therefore 2r^2 = R^2 - 2Rr + r^2.$$

$$\text{即 } r^2 + 2Rr - R^2 = 0, \therefore r = (\sqrt{2} - 1)R.$$

$$\therefore S_{\text{影}} = \frac{1}{2}\pi R^2 - 2\pi(\sqrt{2} - 1)^2 R^2 = \frac{1}{2}(8\sqrt{2} - 11)\pi R^2.$$

迁移发散

证明 如图所示, 设正方形的边长为 a , $AF = x$, 则 $DF = a - x$, $CF = a + x$.

在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中, $DF^2 + CD^2 = CF^2$

$$\Rightarrow (a + x)^2 = a^2 + (a - x)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{4} \Rightarrow \begin{cases} DF = \frac{3}{4}a \\ CF = \frac{5}{4}a \end{cases} \Rightarrow DF : CD : CF = 3 : 4 : 5.$$

综合发散

1. 证明(1)如图 3-58 所示, 连结 AB .

$\because CA$ 切 $\odot O'$ 于 A ,

$$\therefore \angle CAB = \angle F.$$

又 $\because \angle CAB = \angle E, \therefore \angle E = \angle F.$

又 $\because \angle EPC = \angle FPA,$

$$\therefore \triangle PEC \sim \triangle PFA, \therefore \frac{PE}{PF} = \frac{PC}{PA}.$$

$$\therefore PA \cdot PE = PC \cdot PF. \quad \text{①}$$

(2)在 $\odot O$ 中, $\because$ 弦 AC, BE 相交于 P ,

$$\therefore PB \cdot PE = PA \cdot PC. \quad \text{②}$$

$$\text{由式①②得 } PA \cdot PB \cdot PE^2 = PA \cdot PC^2 \cdot PF, \therefore \frac{PE^2}{PC^2} = \frac{PF}{PB}.$$

(3)解 连结 AE ,

由(1) $\triangle PEC \sim \triangle PFA$ 且 $PC : CE : EP = 3 : 4 : 5, \therefore PA : FA : PF = 3 : 4 : 5.$

设 $PC = 3x, CE = 4x, EP = 5x, PA = 3y, FA = 4y, PF = 5y$, 则 $EP^2 = PC^2 + CE^2, PF^2 = PA^2 + FA^2, \therefore \angle C = 90^\circ, \angle CAF = 90^\circ.$

$\because AE$ 为 $\odot O$ 的直径, AF 是 $\odot O'$ 的直径. 又 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 为等圆,

$$\therefore AE = AF = 4y.$$

$$\therefore AC^2 + CE^2 = AE^2, \therefore (3x + 3y)^2 + (4x)^2 = 16y^2.$$

$$\text{即 } 25x^2 + 18xy - 7y^2 = 0, (25x - 7y)(x + y) = 0.$$

$$\therefore 25x = 7y, x = -y \text{ (舍去)}, \therefore \frac{x}{y} = \frac{7}{25}.$$

$$\therefore S_{\triangle ECP} : S_{\triangle FAP} = x^2 : y^2 = 49 : 625.$$

2. 连结 O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 , 由已知可知 O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 共线, 设 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3, \odot O_4, \odot O_5$ 与公切线切点顺次为 E, F, P, Q, M , 连结 $O_1E, O_2F, O_3P, O_4Q, O_5M$.

作 $O_1A \perp O_2F, O_2B \perp O_3P, O_3C \perp O_4Q, O_4D \perp O_5M$.

则 $\triangle O_1AO_2 \sim \triangle O_2BO_3 \sim \triangle O_3CO_4 \sim \triangle O_4DO_5$.

设 $\odot O_2, \odot O_3, \odot O_4$ 半径为 x, y, z ,

则 $O_1O_2 = x + 8, O_2A = x - 8, O_2O_3 = x + y, O_2B = y - x,$

$O_3O_4 = y + z, O_4C = z - y, O_4O_5 = z + 18, O_5D = 18 - z.$

$$\therefore \frac{x+8}{x-8} = \frac{x+y}{y-x} = \frac{y+z}{z-y} = \frac{z+18}{18-z}.$$

用合比定理得 $\frac{x}{8} = \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{18}{z},$

$$\therefore x = \frac{8z}{y}. \text{ 又 } x = \frac{yz}{18}, \therefore y^2 = 144, \text{ 即 } y = 12,$$

$$\therefore x = 4\sqrt{6}, z = 6\sqrt{6},$$

$$\therefore \odot O_2 \text{ 半径为 } 4\sqrt{6}, \odot O_3 \text{ 半径为 } 12, \odot O_4 \text{ 半径为 } 6\sqrt{6}.$$

3. 弧长及扇形的面积

圆锥的侧面积

题型发散

1. 用直接法.

$$\text{由 } S = \frac{1}{2}lR \Rightarrow R = \frac{2S}{l}.$$

$$\text{又 } \because l = \frac{n\pi R}{180} \Rightarrow n = \frac{180 \cdot l}{\pi R}, \therefore n = \frac{180l^2}{2\pi S} = \frac{90l^2}{\pi S}.$$

故本题应选 C.

2. 用逆向思维法.

$\because$ 圆锥的侧面展开图的面积为 $S = \pi \cdot r \cdot l$, 其中 r 为圆锥底面圆的半径, l 为圆锥的母线长,

$$\therefore 15\pi = \pi \cdot r \cdot 5.$$

$$\therefore r = 3.$$

故本题应选 B.

指点迷津 在解题过程中要区分扇形的半径与圆锥底面圆的半径.

3. 月牙形面积为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} AB^2 - S_{\text{弓形}AmB} \\ &= \frac{\pi}{8} AB^2 - \left(\frac{\pi}{4} \cdot OA^2 - \frac{1}{2} OA \cdot OB \right) \\ &= \frac{\pi}{8} AB^2 - \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB^2 - \frac{1}{2} OA \cdot OB \right) = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} a^2. \end{aligned}$$

4. 所得圆锥的侧面展开图是扇形, 它的面积为 $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\pi = 3\pi$.

5. 剩余部分扇形的弧长为 12π , 由 $2\pi r = 12\pi$ 得底面圆的半径 $r = 6$.

$\therefore$ 圆锥的母线长为 8,

$\therefore$ 圆锥的高 $h = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ (cm).

生活发散

1. 分析 先分别计算两种扇子的面积, 再进行比较.

解 设折扇的骨柄长和团扇的直径都是 a (如图 3-75 所示),

则团扇的面积为 $S_{\text{团扇}} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \pi a^2$,

折扇的扇面的面积 $S_{\text{折扇}} = S_{\text{大扇形}} - S_{\text{小扇形}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{120}{360} \pi a^2 - \frac{120}{360} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \pi a^2 - \frac{1}{12} \pi a^2 \\ &= \frac{1}{4} \pi a^2. \end{aligned}$$

故折扇的面积与团扇扇面的面积一样大, 从而扇出的风量也一样大.

2. 分析 轴截面 SAB 为等腰 $\triangle SAB$, 且顶角 $\angle ASB = 120^\circ$, $SO \perp AB$ 于 O , 于是在 $\text{Rt}\triangle SAO$ 中易求 SO .

解 在 $\triangle SAB$ 中, $SA = SB$, $\angle ASB = 120^\circ$, $SO \perp AB$

$\therefore \angle ASO = \frac{1}{2} \angle ASB = 60^\circ$, $\angle SAO = 30^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle SOA$ 中, $\angle SOA = 90^\circ$, $\angle SAO = 30^\circ$, $AO = 27$ m,

$$\tan \angle SAO = \frac{SO}{AO}.$$

即 $SO = 27 \cdot \tan 30^\circ = 27 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 15.6$ (m).

纵横发散

$$1. \because S = \frac{1}{2} \pi R^2 - S_{\text{弓形}CED},$$

$$\text{又} \because S_{\text{弓形}CED} = S_{\text{扇形}BCED} - S_{\triangle BCD},$$

$$S_{\text{扇形}BCED} = \frac{90\pi(BC)^2}{360} = \frac{\pi}{4} (\sqrt{2}R)^2 = \frac{\pi R^2}{2}, S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2,$$

$$\therefore S = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} + R^2 = R^2.$$

$$2. \because l = \frac{120}{360} \times 2\pi \times 30 = 20\pi,$$

$$\text{又} \because 2\pi r = 20\pi, \therefore r = 10(\text{cm}).$$

分解发散

1. 分析 (1)欲求 $\odot O$ 的周长,关键是求 $\odot O$ 的半径,要求 $\widehat{AB}$ 的长,需求 $\widehat{APB}$ 的半径,由此可得证.

(2)关键是找出阴影部分的面积是 $S_{\triangle POD} - S_{\text{扇形}ODF}$ 的2倍组成.所以只要求出 $\triangle ODP$ 的面积,再求扇形 ODF 的面积即可获解.

解 (1)连结 OD , PC 交 $\odot O$ 于 F ,设 $PC = R$, $OD = r$,

$$\because \angle APB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CPA = 30^\circ.$$

$$\therefore OP = 2OD = 2r, PC = 3r.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的周长} = 2\pi r,$$

$$\widehat{AB} \text{ 的长} = \frac{60\pi R}{180} = \frac{\pi R}{3} = \pi r.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的周长是} \widehat{AB} \text{ 长的} 2 \text{ 倍}.$$

$$(2) \because S_{\triangle OPD} = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2, S_{\text{扇形}ODF} = \frac{\pi}{6} r^2,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 2(S_{\triangle POD} - S_{\text{扇形}DOF})$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} r^2 - \frac{\pi}{6} r^2\right)$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) r^2.$$

解法指导 在进行较复杂图形的计算中可将图形分割成几个基本图形,用所学过的知识逐一解决,然后达到求解目的,这种拼割的方法在解几何题中是常用的,对弧形部分要分清弧的圆心与半径,以防出错.

2. 作 $OD \perp BC$,垂足为 D ,连结 OB , OC .如图3'-7所示,

$$\text{则 } BD = CD = 3,$$

$$\angle BOC = 120^\circ, \angle OCD = 30^\circ,$$

$$OD = CD \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3}.$$

$$OC = 2OD = 2\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}BOC} - S_{\triangle BOC}$$

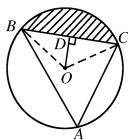


图 3'-7

$$= \frac{120 \times \pi \times (2\sqrt{3})^2}{360} - \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{3}$$

$$= (4\pi - 3\sqrt{3})(\text{cm}^2).$$

综合发散

1. 分析 首先想到用 $S_{\text{扇形}OAB} - S_{\odot O'}$, 但剩余部分仍然无法求出, 必须重新分解, 可用 $S_{\text{扇形}OAB} - S_{\text{扇形}O'DME} - S_{\text{四边形}ODO'E}$ 求解.

解 连结 $O'D, O'E, O'O$.

$\because \odot O'$ 与 OA, OB 相切 $\therefore O'D \perp AO, O'E \perp OB$.

$\because \odot O$ 与 $\odot O'$ 内切 $\therefore OO' = 6 - 2 = 4$.

在 $\text{Rt}\triangle OO'D$ 中, $O'D = 2$ 则 $\angle 1 = 30^\circ$,

$OD = \sqrt{OO'^2 - O'D^2} = 2\sqrt{3}$, 同理 $\angle 2 = 30^\circ$,

$\therefore \angle DOE = 60^\circ$,

$\therefore \angle DO'E = 360^\circ - 90^\circ \times 2 - 60^\circ = 120^\circ$,

$\therefore$ 大于 180° 的 $\angle DO'E = 240^\circ$,

$$\therefore S_{\text{扇形}OAB} = \frac{60 \times \pi \times 6^2}{360} = 6\pi.$$

在 $\widehat{AB}$ 上取一点 M ,

$$\therefore S_{\text{扇形}O'DME} = \frac{240}{360} \pi \cdot 2^2 = \frac{8}{3} \pi,$$

$$S_{\text{四边形}ODO'E} = 2 \cdot S_{\triangle OO'D} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OAB} - S_{\text{扇形}O'DME} - S_{\text{四边形}ODO'E}$$

$$= 6\pi - \frac{8}{3} \pi - 4\sqrt{3} = \frac{10}{3} \pi - 4\sqrt{3}.$$

解法指导 可通过适当的分解或组合, 将图形化为几个基本图形的面积之和或差.

2. 分析 这个阴影部分的面积等于菱形的面积减去 2 倍的扇形 FAE 的面积, 关键是求 $\angle BAD$ 的度数和 AO 的长度.

解 由菱形的性质知 $AC \perp BD$ 且 $AO = CO, BO = DO$,

又 $\because AC = 2\sqrt{3}, BD = 2$,

$$\therefore AO = CO = \sqrt{3}, BO = DO = 1.$$

$$\because \tan \angle OAD = \frac{OD}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle OAD = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ.$$

$$\therefore S_{\text{扇形FAE}} = \frac{60\pi(\sqrt{3})^2}{360} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{而 } S_{\text{菱形ABCD}} &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \\ &= 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\text{阴影}} &= S_{\text{菱形ABCD}} - 2S_{\text{扇形FAE}} \\ &= 2\sqrt{3} - 2 \times \frac{\pi}{2} \\ &= 2\sqrt{3} - \pi.\end{aligned}$$

知能转化平台

题型发散

1. (1) 用直接法.

连结 PC , $\because PD$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle PCD = 90^\circ$

$$\because \angle A = 28^\circ, \angle B = 26^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle PCB &= 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle ACP) \\ &= 180^\circ - (28^\circ + 26^\circ + 90^\circ) = 36^\circ.\end{aligned}$$

$\angle PDC = \angle PCB = 36^\circ$. 故本题应选 B.

(2) 用直接法.

延长 CD 至 O , 连结 AO . 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中,

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$$\therefore CD = 2. \text{ 故本题应选 A.}$$

(3) 用面积法.

设 $\odot O$ 的半径为 r , 由 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积表达式得 $\frac{1}{2}r(a+b) = \frac{1}{2}ab$,

$$\therefore r = \frac{ab}{a+b}.$$

故本题应选 C.

(4) 用直接推算法.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB^2 = 4AD^2 - AD^2 = 3AD^2$,

$$\therefore AB = \sqrt{3}AD, AD = \frac{\sqrt{3}}{3}AB.$$

设 $\triangle ABC$ 底边 BC 的高为 h ,

$$h = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB.$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD}{\frac{1}{2}AB \cdot \sin 60^\circ \cdot AB} = \frac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}AB \div \left(\frac{\sqrt{3}}{2}AB\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

故本题应选 B.

(5) 用直接推算法.

$$\begin{aligned}\therefore l &= \frac{n}{180}\pi R, m = \frac{180l}{\pi R} = \frac{180 \times 3}{\pi \times 6} = \frac{90}{\pi} \\ \therefore S_{\triangle AOT} - S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2}AO \cdot AT - \frac{\pi}{360} \times \pi R^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 - \frac{1}{4\pi} \times \pi \times 6^2 \\ &= 12 - 9 = 3 \text{ (cm}^2\text{)}.\end{aligned}$$

故本题应选 A.

2. (1) $1:\sqrt{3}$. (2) 4 条. (3) 22. (4) 48π .

(5) $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2$. (6) 1. (7) $R = 4 + 2\sqrt{2}$, $r = 4 - 2\sqrt{2}$.

解法发散

1. 证法 1 如图 3'-8 所示, 连结 AC、OA 和 OB,

$$\left. \begin{aligned}\angle ADB &= \angle AOB = 2\angle C \\ \text{又 } \angle ADB &= \angle C + \angle CAD\end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 2\angle C = \angle C + \angle CAD \Rightarrow \angle C = \angle CAD \Rightarrow AD = DC.$$

证法 2 如图 3'-9 所示, 连结 AO、OC、OD 和 AB.

$$\left. \begin{aligned}\angle AOD &= \angle 180^\circ - \angle B \\ \angle AOC &= 2\angle B\end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle COD = 360^\circ - (180^\circ -$$

$$\angle B) - 2\angle B \Rightarrow \angle COD = 180^\circ - \angle B.$$

$$\therefore \angle AOD = \angle COD, \text{由此可证得 } \triangle AOD \cong \triangle COD \Rightarrow$$

$$AD = DC.$$

证法 3 如图 3'-10 所示, 连结 AC、OA、OC 和 OB.

$$\left. \begin{aligned}\angle OCB &= \angle OBC = \angle OAD \\ \angle OAC &= \angle OCA\end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \angle OAC + \angle OAD = \angle OCA + \angle OCB$$

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle ACD \Rightarrow AD = DC.$$

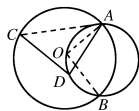


图 3'-8

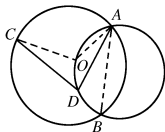


图 3'-9

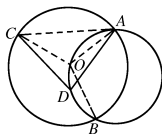


图 3'-10

2. 证法 1 如图 3'-11 所示, 连结 AB , 过 A 作 $\odot O$ 的切线 PQ , 作 $\odot O'$ 的切线 MN .

$$\therefore \angle PAC = \angle ABC, \angle NAD = \angle ABD.$$

$$\therefore \angle CAM = \angle NAD,$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle CBD &= \angle ABC + \angle ABD \\ &= \angle PAC + \angle CAM = \angle PAM. \end{aligned}$$

$\therefore \odot O, \odot O'$ 交于 A , 过 A 点的切线 PQ, MN 固定, PQ 与 MN 的夹角 $\angle PAM$ 固定.

$$\therefore \angle CBD \text{ 是定值.}$$

证法 2 如图 3'-12 所示, 过 A 再任作一割线 $C'D'$ 与 $\odot O, \odot O'$ 分别交于 C', D' ,

$$\therefore \angle CAC' = \angle CBC', \angle D'AD = \angle D'BD,$$

$$\therefore \angle CAC' = \angle D'AD, \therefore \angle CBC' = \angle D'BD,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle C'BD', \therefore \angle CBD \text{ 是定值.}$$

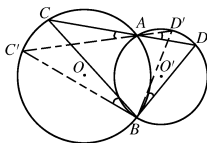


图 3'-12

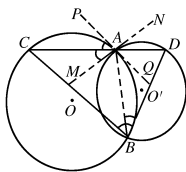


图 3'-11

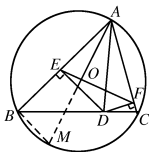


图 3'-13

3. 证法 1 如图 3'-13 所示, 延长 AO 交 $\odot O$ 于 M , 连结 BM , 由射影定理得 $AD^2 = AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{AF}{AE} &= \frac{AB}{AC} \\ \angle EAF &= \angle BAC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB \Rightarrow \left. \begin{aligned} \angle AEF &= \angle ACB \\ \text{又} \because \angle AMB &= \angle ACB \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \angle AEF = \angle AMB$$

$$AM \text{ 为 } \odot O \text{ 直径} \Rightarrow \angle AMB + \angle BAM = 90^\circ \Rightarrow \angle BAM + \angle AEF = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AO \perp EF.$$

证法 2 如图 3'-13 所示, 延长 AO 交 $\odot O$ 于 M , 连结 BM .

$\angle AED + \angle AFD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow A, E, D, F$ 四点共圆 $\Rightarrow \angle ADF = \angle AEF$.

$$\left. \begin{aligned} DF \perp AC \text{ 于 } F \\ \angle ADC = \text{Rt} \angle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ADF \sim \triangle DCF$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \angle ADF = \angle ACB \\ \angle AMB = \angle ACB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AMB = \angle ADF \left. \begin{array}{l} \angle ADF = \angle AEF \\ \angle AMB = \angle ACB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AEF = \angle AMB.$$

由此可知 $AO \perp EF$.

转化发散

1. 分析 本题将证明 EC 是 $\odot O$ 的切线问题转化为在 $\triangle OCE$ 中, 证明 $\angle CEO = \text{Rt}\angle$.

证明 连结 OC .

$$\left. \begin{array}{l} \angle COB = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ \Rightarrow \angle COD = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ \\ \angle EOC = 180^\circ - 45^\circ - (180^\circ - 67.5^\circ) = 22.5^\circ \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \angle COD = \angle EOC \\ \left. \begin{array}{l} OE = OD \\ OC' = OC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EOC \cong \triangle DOC$$

$$\Rightarrow \angle CEO = \angle CDO \left. \begin{array}{l} \angle CEO = \text{Rt}\angle \\ \angle CDO = \text{Rt}\angle \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CEO = \text{Rt}\angle \left. \begin{array}{l} \angle CEO = \text{Rt}\angle \\ OE \text{ 为半径} \end{array} \right\} \Rightarrow CE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.}$$

2. 分析 利用相似三角形的性质将比例式转化为乘积式.

$$\left. \begin{array}{l} \text{证明 } AB \text{ 为圆的直径} \Rightarrow \angle ACF = \text{Rt}\angle \\ \angle ADE = \text{Rt}\angle \\ \angle AED = \angle FEC \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \angle DAE = \angle F \left. \begin{array}{l} \angle ADE = \angle FDB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle FDB \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{DF}{DB} \\ \Rightarrow DE \cdot DF = AD \cdot DB \\ \left. \begin{array}{l} DE \cdot DF = AD \cdot DB \\ DP^2 = AD \cdot DB \end{array} \right\} \Rightarrow DP^2 = DE \cdot DF.$$

3. 分析 利用相似三角形性质将比例式化为乘积式.

证明 过 P 点作两圆的公切线 PQ 连结 DC .

$$\left. \begin{array}{l} \text{弦切角 } \angle QPB = \angle A \\ \text{弦切角 } \angle QPC = \text{弦切角 } \angle BCP \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \angle A + \angle BCP = \angle QPB + \angle QPC = \angle BPC \left. \begin{array}{l} \angle A + \angle BCP = \angle CPD \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \angle BPC = \angle CPD \left. \begin{array}{l} \text{弦切角 } \angle BCD = \angle CDP \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BPC \sim \triangle CPD \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PD}{PC} \Rightarrow PC^2 = PB \cdot PD.$$

由 PC 平分 $\angle BPD \Rightarrow PB : PD = BE : ED$.

分解发散

1. 分析 本题中阴影部分的面积不规则, 通过分解与等积变形等手段, 把它

分解为规则图形面积的计算. 即

$$S_{\text{影}} = \frac{1}{4} S_{\odot O_3} - S_{\triangle O_1 O_2 O_3} - 2S_{\text{扇形} AO_1 C}.$$

解 连结 $O_1 O_2$ 则 $O_1 O_2$ 过点 C .

$$\because O_1 O_3 = O_2 O_3, O_1 O_3 \perp O_2 O_3,$$

$$\therefore \triangle O_1 O_3 O_2 \text{ 为等腰直角三角形 } \angle 1 = \angle 2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\text{扇形} AO_3 B} - S_{\triangle O_1 O_2 O_3} - 2S_{\text{扇形} AO_1 C}.$$

设 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 半径为 x 则 $O_1 O_2 = 2x$, $O_1 O_3 = O_2 O_3 = a - x$.

$$\because O_1 O_2 = \sqrt{2} O_1 O_3, \therefore 2x = \sqrt{2}(a - x), \therefore x = (\sqrt{2} - 1)a,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{阴}} &= \frac{1}{4} S_{\odot O_3} - S_{\triangle O_1 O_2 O_3} - 2S_{\text{扇形} AO_1 C} \\ &= \frac{1}{4} \pi a^2 - \frac{1}{2} (a - x)^2 - \frac{3}{4} \pi x^2 = \left(2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi - 3 - 2\pi \right) a^2. \end{aligned}$$

2. 分析 把阴影部分的面积分解为扇形 OAB 的面积分别减去 $\triangle OO_1 O_2$ 的面积、扇形 $O_1 AC$ 的面积、扇形 $O_2 BC$ 的面积之差.

解 三段弧所围成阴影部分面积 S , $S = S_{\text{扇形} OAB} - (S_{\triangle O_1 O_2 O} + S_{\text{扇形} O_1 AC} + S_{\text{扇形} O_2 BC})$.

在 $\triangle OO_1 O_2$ 中, $OA = 6$, $OO_1 = 4$,

$OO_2 = 4$, $O_1 O_2 = 4$,

$\therefore \triangle OO_1 O_2$ 是等边三角形, $\therefore \angle AOB = 60^\circ$.

$$S_{\triangle O_1 O_2 O} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3},$$

$$S_{\text{扇形} O_1 AC} = S_{\text{扇形} O_2 BC} = \pi \times 2^2 \times \frac{120}{360} = \frac{4\pi}{3},$$

$$S_{\text{扇形} OAB} = \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360} = 6\pi,$$

$$\therefore S = 6\pi - \left(4\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \times 2 \right) \approx 3.5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3. 分析 把阴影部分的面积分解为半个大圆面积减去两个小圆的半圆面积之差.

解 设以 AD 为直径的半圆为 $\odot O_1$, 以 BD 为直径的半圆为 $\odot O_2$.

$$\text{半圆 } \odot O_2 \text{ 面积 } S_2 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{BD}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \pi BD^2.$$

$$\text{半圆 } \odot O_1 \text{ 面积 } S_1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{AD}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \pi AD^2.$$

$$S_{\text{影}} = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 - (S_1 + S_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{8} \pi [AB^2 - (AD^2 + BD^2)] = \frac{1}{8} \pi [(AD + BD)^2 - (AD^2 + BD^2)] \\
 &= \frac{1}{8} \pi \cdot AC \cdot CD \cdot 2 = \frac{1}{8} \pi \cdot 2CD^2 = \frac{1}{4} \pi m^2.
 \end{aligned}$$

4. 分析 如正文图 3-109 所示, 连结 AD 、 BD 则 $CD^2 = AC \cdot BC$.

$$\begin{aligned}
 S_{\text{阴影}} &= \frac{\pi}{8} (AB^2 - AC^2 - BC^2) = \frac{\pi}{8} [(AC + BC)^2 - (AC^2 + BC^2)] \\
 &= \frac{\pi}{8} \cdot 2AC \cdot BC = \frac{\pi}{4} CD^2 = S_{\text{圆}}.
 \end{aligned}$$

迁移发散

1.(1)证明 如图 3'-14 所示, 连结 AB 、 AC , 则

$$\begin{aligned}
 AB &= AC, \therefore \widehat{AB} = \widehat{AC}, \\
 \therefore \angle ADB &= \angle ADC = \alpha, \\
 \text{又} \because \angle BAD &= \angle BCD, \\
 \therefore \triangle ABD &\sim \triangle CED.
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{BD}{ED} = \frac{AD}{CD},$$

$$\text{即 } BD \cdot CD = AD \cdot ED.$$

(2)在等腰 $\triangle ABC$ 中作 $AF \perp BC$ 于 F ,

F 为 BC 的中点, $BC = BF + FC = 2FC$.

$$\because \angle ACB = \angle ADB = \alpha, \therefore FC = AC \cos \alpha, \therefore BC = 2AC \cos \alpha.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADB$ 中,

$$\because \angle ABE = \angle ADB, \angle BAD = \angle BAE.$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADB, \therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{AB}.$$

$$\text{同理 } \triangle AEC \sim \triangle ACD, \therefore \frac{CD}{AD} = \frac{ED}{AC},$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} + \frac{CD}{AD} = \frac{BE}{AB} + \frac{EC}{AC} = \frac{BC}{AC} = 2 \cos \alpha.$$

由(1)知 $BD \cdot CD = AD \cdot ED$,

$$\therefore \frac{BD}{AD} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{AD \cdot ED}{AD^2} = \frac{ED}{AD} = \frac{3}{4} \cos^2 \alpha,$$

$$\therefore \text{以 } \frac{BD}{AD} \text{ 和 } \frac{CD}{AD} \text{ 为根的一元二次方程为 } x^2 - 2 \cos \alpha \cdot x + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{2} \cos \alpha, x_2 = \frac{3}{2} \cos \alpha.$$

$$\text{当 } BD < CD \text{ 时 } \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{BD}{AD}}{\frac{CD}{AD}} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha}{\frac{3}{2} \cos \alpha} = \frac{1}{3};$$

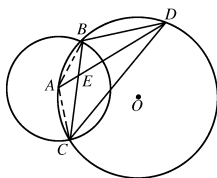


图 3'-14

当 $BD > CD$ 时 $\frac{BD}{CD} = \frac{x_2}{x_1} = 3$.

2. 解 $\because NO'O$ 共线, 延长 OO' 交 $\odot O$ 于 M , 则 M, O, O', N 共线, MN 为 $\odot O$ 直径, 又 $\because AO' = BO', AC \perp BC \therefore AC = BC \therefore C$ 在 MN 上,
 $\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ$.

设 AC 切 $\odot O'$ 于 I , 则 $AI = O'I = r \therefore AO' = \sqrt{2}r$

又 $\because O'N = r$, 设 $\odot O$ 半径为 x , 则 $O'M = 2x - r$,

又 $\because (AO')^2 = MO' \cdot O'N \therefore (\sqrt{2}r)^2 = (2x - r) \cdot r \therefore x = \frac{3}{2}r$.

3. 解 设 $\odot B$ 与 $\odot C$ 外切于 D , $\odot A$ 与 $\odot O$ 内切于 E ,

$\therefore \odot A, \odot B, \odot C$ 为等圆, 又 $AB = AC = BC = 12, \angle B = 60^\circ$,

$\therefore ED \perp BC$ 且 E, A, D 共线.

$AD = \sin 60^\circ \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$, O 为正 $\triangle ABC$ 中心,

$\therefore OA = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$,

$\therefore OE = OA + AE = 4\sqrt{3} + 6$,

$\therefore 4\sqrt{3} + 6 = \sqrt{K} + 6 \therefore \sqrt{K} = 4\sqrt{3}, K = 48$.

4. 解 (1) 解方程 $x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ 得

$x_1 = 2\sqrt{3} + 3, x_2 = 2\sqrt{3} - 3$.

$\because 2\sqrt{3} + 3 > 1$ 故舍去 $x_1 = 2\sqrt{3} + 3 \therefore r = 2\sqrt{3} - 3$.

连结 OM 则 $OM \perp PB, OM = 2\sqrt{3} - 3, PM = 1 - r = 4 - 2\sqrt{3}$.

在 $Rt\triangle POM$ 中 $\sin \angle OPM = \frac{OM}{PM} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore 0 < \angle CPB < 180^\circ, 0 < \angle OPM < 90^\circ$,

$\therefore \angle OPM = 60^\circ$, 从而 $\angle CPM = 60^\circ$,

$\therefore \angle CPB = 120^\circ$.

(2) 依题意建立坐标系 xOy .

$\because OM = 2\sqrt{3} - 3$ 故 M 坐标为 $(0, 2\sqrt{3} - 3)$,

$\therefore OP = \frac{1}{2}PM = 2 - \sqrt{3}$ 得 P 坐标为 $(\sqrt{3} - 2, 0)$.

$\because M, P$ 在抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 上,

$\therefore \begin{cases} 2\sqrt{3} - 3 = c, \\ (\sqrt{3} - 2)^2 + b(\sqrt{3} - 2) + c = 0. \end{cases} \therefore b = 2, c = 2\sqrt{3} - 3.$

从而函数解析式为 $y = x^2 + 2x + 2\sqrt{3} - 3$.

构造发散

1. 证明 连结 PO 构造平行线 $PO \parallel BC$. 连结 PO 和 AB .

由切线长定理 $\Rightarrow PA = PB \Rightarrow P$ 在 AB 的中垂线上

同理 O 在 AB 的中垂线上

$\Rightarrow PO$ 是 AB 的中垂线

AC 为 $\odot O$ 直径 $\Rightarrow AB \perp BC$

$$\Rightarrow \frac{DB}{BP} = \frac{DC}{CO} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{DB}{AP} = \frac{DC}{OA} \Rightarrow DB:DC = AP:AO. \\ AP = BP \end{array} \right.$$

2. 分析 连结 CE 、 BE 构造相似三角形 FAC 和 CAE 利用相似三角形性质定理证明结论.

证明 连结 CE 、 BE .

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp CD \Rightarrow \angle F + \angle FAB = 90^\circ \\ AB \text{ 是直径} \Rightarrow \angle B + \angle FAB = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle F = \angle B \\ \angle ACE = \angle B \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle F = \angle ACE \\ \angle FAC = \angle CAE \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle FAC \sim \triangle CAE \Rightarrow \frac{FA}{CA} = \frac{AC}{AE}$$

$$\Rightarrow AC^2 = AE \cdot AF.$$

3. 分析 连结 MD 构造相似三角形 $\triangle OCL \sim \triangle CMD$.

证明 连结 MD .

$$\text{直线 } AB \perp CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AD} \Rightarrow MK \text{ 平分 } \angle DMC \Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{CK}{KD}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle COL = \angle CMD = \text{Rt} \angle \\ \angle OCL = \angle MCD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle COL \sim \triangle CMD$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OL} = \frac{MC}{MD} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{OC}{OL} = \frac{CK}{KD} \\ \frac{CK}{KD} = \frac{MC}{MD} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{OC}{OL} = \frac{CK}{KD} \\ OC = OA \end{array} \right\} \Rightarrow CK:KD = OA:OL.$$

综合发散

1. 证明 连结 AD . $\because AC > BD, \therefore \widehat{AC} > \widehat{BD}$,
 $\angle 1 > \angle 2$ 又 $\angle 3 = \angle 4$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 4 > \angle 3 + \angle 2 \text{ 即 } \angle BDA > \angle CAD$$

$$\therefore \widehat{AB} > \widehat{CD}, \therefore AB > CD.$$

2. 证明 延长 OM 到 H 使 $OM = MH$ 并连结 AH 又 $AM = MN$,

$$\therefore \triangle OMN \cong \triangle HMA,$$

$$\therefore \angle AHM = \angle MON, AH = ON.$$

又 $\because$ 连结 OA 、 OB 则 $OA = OB$, $\triangle OAM \cong \triangle OBN$,

$\therefore \angle AOP = \angle BOQ$, $\angle 1 = \angle 2$,

又 $\because \angle AMO > \angle 2$, $\therefore \angle AMO > \angle 1$,

$\therefore OA > OM$, $OA > ON$, $\therefore OA > AH$,

$\therefore \angle AHO > \angle AOP$, $\therefore \angle POQ > \angle AOP$. 即 $\widehat{AP} < \widehat{PQ}$.

3. 证明 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$, 根据相似三角形内切圆半径之比等于它们的相似比可知

$$\frac{r_1}{BC} = \frac{r_2}{AB} = \frac{r_3}{AC} \Rightarrow \frac{r_1 + r_2 + r_3}{BC + AB + AC} = \frac{r_1}{BC} ,$$

$$\text{又} \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = r_1 \cdot \frac{1}{2} (BC + AB + AC) \Rightarrow r_1 = \frac{AD \cdot BC}{BC + AB + AC} ,$$

$$\therefore \frac{r_1 + r_2 + r_3}{BC + AB + AC} = \frac{1}{BC} \left(\frac{AD \cdot BC}{BC + AB + AC} \right) = \frac{AD}{BC + AB + AC} ,$$

$$\therefore r_1 + r_2 + r_3 = AD .$$

第四单元 统计与概率

50 年的变化

哪种方式更合算

游戏公平吗

题型发散

1. 用直接法.

原数据排列为 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 12 ,

中位数为 $\frac{8+9}{2} = 8.5$,

平均数为 $\frac{6+7+8+9+10+12}{6} = \frac{52}{6} = 8\frac{2}{3}$.

$\therefore 8.5 < 8\frac{2}{3}$,

故本题应选 C.

2. 用直接法.

$\therefore \bar{x} = 1$,

即 $\frac{x+5+0+3-1}{5} = 1$, $\therefore x = -2$. $\therefore$ 中位数为 0.

故本题应选 A.

3. 用直接法.

考虑这一组数据从小到大只能是 12, 18, 20, x , 23, 27,

$$\therefore \frac{20+x}{2} = 21, \therefore x = 22.$$

故本题应选 B.

4.(1)甲群游客的平均年龄是 15 岁,中位数是 15 岁,众数是 15 岁,其中能较好反映甲群游客年龄特征的是平均数、中位数或众数.

(2)乙群游客的平均年龄是 15 岁,中位数是 5.5 岁,众数是 6 岁,其中能较好地反映乙群游客年龄特征的是中位数、众数.

5.(1)甲班 90,乙班 70;甲.

(2)甲班 80,乙班 80;甲班 62,乙班 54;甲.

(3)甲班 40,乙班 48;乙.

纵横发散

1. 分析 根据题目中的三个条件要求出这七个数是不可能的,但如果本题把前三个数 x_1, x_2, x_3 看成是一个整体,后三个数看成是一个整体,中间一个数 x_4 单独看成一个数,则这三部分都可以求出来,而只要求出 x_4 就求得本题的解,

解 设这七个数分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 33 \times 4, & \text{①} \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 42 \times 4, & \text{②} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 38 \times 7, & \text{③} \end{cases}$$

①+②-③,得 $x_4 = 34$. $\therefore$ 这七个数的中位数是 34.

$$2. \bar{x} = \frac{1}{10}(32 + 62 + 35 + 40 + 37 + 35 + 48 + 50 + 42 + 45) = 42.6 \text{ (kg)}.$$

$\therefore$ 平均体重为 42.6 kg.

把这 10 个数数据从小到大排列,得到 32, 35, 35, 37, 40, 42, 45, 48, 50, 62.

其中最中间的两个数据是 40, 42, 它们的平均数是 41,即这组数据的中位数是 41.

在这 10 个数据中,35 出现了 2 次,出现的次数最多,因此,这组数据的众数是 35.

生活发散

$$1.(1)P(\text{奇数}) = \frac{2}{3}.$$

(2)树状分析图为图 4-1 所示

从而得到所组成的两位数有 6 个:12、13、21、23、31、32.

恰好是 32 的概率是 $\frac{1}{6}$.

2. 分析 该题从我们常见的生活场景出发, 先是对频率与概率的关系作探究, 然后再结合扇形的有关知识提出问题, 是一道融知识、能力和方法为一体的好题目.

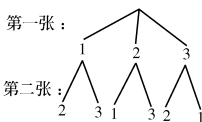


图 4'-1

解 (1) 表格中自左至右的空格依次填写 0.68 , 0.74 0.68 0.69 0.705 0.701 ;

(2) 当 n 很大时, 停在“铅笔”的频率会接近 0.7 ;

(3) 获得铅笔的概率约是 0.7 ;

(4) 该扇形的圆心角的度数为 $0.7 \times 360^\circ = 252^\circ$

应用发散

1. 分析 求一元二次方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 的两个根, 让两根通过平均数公式验证, 转化为样本数字 a .

解 $\because x^2 - 8x + 15 = 0$ 即 $(x-5)(x-3) = 0$ $\therefore x = 3$ 或 $x = 5$.

$\therefore \frac{1+4+2+3+3}{5} = \frac{13}{5} \neq 5$ $\therefore a \neq 3$.

又 $\because \frac{1+4+2+5+3}{5} = \frac{15}{5} = 3$ $\therefore a = 5$ $b = 3$.

2. (1) 盘转出红色 (2) 盘转出蓝色或 (1) 盘转出蓝色 (2) 盘转出红色均可配出紫色, 所以配成紫色的概率为 $\frac{5}{8} \times \frac{4}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

则配成紫色的概率为 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

即小强得 1 分与小亮得 1 分的机会是相同的, 故这个游戏对双方公平.

综合发散

1. (1) 证明 根据已知条件知

$PN \parallel BC$, $AE \perp PN$, $PN = QM = y$, $DE = MN = x$

$\therefore \triangle APN \sim \triangle ABC$ 从而有 $\frac{PN}{BC} = \frac{AE}{AD}$,

即 $\frac{y}{120} = \frac{80-x}{80}$ $\therefore y = 120 - \frac{3}{2}x$.

(2) 解 设矩形 PQMN 的面积为 S , 则 $S = xy$,

即 $S = x(120 - \frac{3}{2}x) = -\frac{3}{2}x^2 + 120x$,

当 $x = -\frac{120}{2 \times (-\frac{3}{2})} = 40$ 时,

S 有最大值为 $-\frac{120^2}{4 \times (-\frac{3}{2})} = 2400$ 此时 $y = \frac{2400}{40} = 60$ (mm^2).

∴ 当 $x=40$, $y=60$ 时 , 矩形 $PQMN$ 的面积最大 , 最大面积为 $2\,400\text{ mm}^2$.

(3)解 由根与系数的关系 , 得

$$\begin{cases} 40+60=10p, \\ 40\times 60=200q. \end{cases}$$

解得 $p=10$, $q=12$.

∴ a , 10 , 12 , 13 , b 的众数为 10 ,

∴ 有 $a=10$, 或 $b=10$.

当 $a=10$ 时 , 有 $\frac{10+10+12+13+b}{5}=12$.

解得 $b=15$; 当 $b=10$ 时 , 解得 $a=15$.

2. (1)86.

(2)通话时间为 : $(26+14+9)+(15+7+4)\times 2+(5+2+1)\times 3+(2+1)\times 4=137$ (min).

话费为 : $137\times 0.6=82.2$ (元)

(3)使用新业务后 ,

中国移动费用 : $(14+7+2+1)\times 0.4+(7+2+1)\times 0.3+(2+1)\times 0.2+1\times 0.2=13.4$ (元)

市话费 : $(26\times 1+15\times 2+5\times 3+2\times 4)\times 0.6=47.4$ (元).

中国联通费用 : $(9\times 1+4\times 2+1\times 3)\times 0.6=12$ (元).

合计话费为 : $10+13.4+47.4+12=82.8$ (元).

答 5 月份的话费会是 82.8 元.

3. (1)中规定一、二、三、四等奖的概率分别为 $P_1=\frac{1}{3}$, $P_2=\frac{2}{9}$, $P_3=\frac{5}{9}$, $P_4=\frac{4}{9}$.

(2)不合理 . 中奖的概率应从小到大排列 . 重新设置规则为 : 一等奖 , 命中 3 倍的数 ; 二等奖 , 命中数字 7 ; 三等奖 , 命中偶数 ; 四等奖 , 命中奇数 .

知能转化平台

题型发散

1. (1)用直接法 .

由数据 20 , 30 , 40 , 50 , 50 , 60 , 78 , 80 , 知其中平均数是 50 , 中位数、众数均是 50 .

故本题应选 D.

(2)用直接推算法 .

$$\therefore \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = a, \therefore x_1 + x_2 + x_3 = 3a;$$

$$\therefore \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = b, \therefore y_1 + y_2 + y_3 = 3b.$$

$$\begin{aligned} \therefore (2x_1 + 3y_1) + (2x_2 + 3y_2) + (2x_3 + 3y_3) \\ = 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3(y_1 + y_2 + y_3) = 2 \times 3a + 3 \times 3b, \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(2x_1 + 3y_1) + (2x_2 + 3y_2) + (2x_3 + 3y_3)}{3} = 2a + 3b.$$

故本题应选 A.

(3)用直接法.

$$\therefore \frac{5 + (-2) + 0 + 6 + 4 + x}{6} = 3, \therefore x = 18 - 13 = 5.$$

故本题应选 C.

(4)用直接法.

$$\frac{8 \times 6 + 10 \times 7 + 3 \times 8}{8 + 10 + 3} = \frac{142}{21} \approx 6.8 \text{ (元)}$$

故本题应选 B.

(5)用直接法.

因为得 70 分的有 16 人, 这个成绩 70 分是众数.

故本题应选 A.

2. (1) 9.70. (2) 80.4. (3) 95, 94.5. (4) 9, 8. (5) ① 22℃, 22℃;

$$\textcircled{2} \frac{6}{30} \times 365 = 73, \textcircled{3} 146.$$

数形发散

1. (1) 9 636.61 亿元 ; 746.39 亿元 ; 890.22 亿元 ; (2) 33% ; 383.62 亿元 ; (3) 637.23 亿元 ; 13.43% ; 293.77 亿元 ; 13.43% ; 931 亿元 ; 13.43%.

2. 解 (1)如下表所示.

空气质量	重度污染	中度污染	轻度污染	良	优
频数	0	0	7	16	5
频率	0	0	25%	57.1%	17.9%

(2)如图 4'-2 所示.

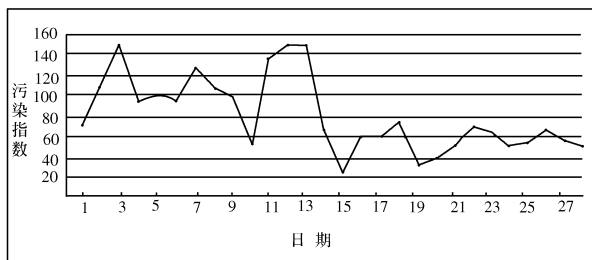


图 4'-2

(3)约有 17.9% 的天数空气质量为“优”,57.1% 的天数空气质量为“良”,25% 的天数空气质量为“轻度污染”,该月上海空气质量总体是良好的;可猜测:污染指数在 100~150 属于“轻度污染”,50~100 属于“良”,低于 50 为优.

纵横发散

1.

数 据	平均数	中位数	众 数
20 20 21 24 27 30 22	24.9	24	20
0 2 3 4 5 5 10	4.1	4	5
-2 0 3 3 3 8	2.5	3	3
-6, -4, -2 2 4 6	0	0	/

2. 三组的平均数依次是 10、20 和 30. 如果将这三组数据合成一组,那么新数据的平均数是 23.

生活发散

1. 按百分比计算得这个月 3 元、4 元和 5 元的饭菜各销售了 2 080 份、6 760 份和 1 560 份,师生购买午餐费用的平均数是 3.95,中位数和众数都是 4.

2. 假如通话时间 5 min,吉通 17921 话费 1.90 元,联通 89135 话费 1.90 元,联通 193 话费 2 元.吉通 17921 按每 6 s 计算单位,通话 5 min 左右更省.此时,建议用吉通 17921.

假如通话 30 min,吉通话费 11.90 元,联通 89135 话费 11.90 元,联通 193 话费 10.50 元,因此,建议用联通 193.

综合发散

1. 分析 我们把“某批种子发芽所需的天数”看成一个随机变量(变化中的频率),考虑到概率和频率概念的内在联系,通过变化中的频率的加权平均数来求该批种子发芽所需的平均天数.

解 98粒种子的发芽天数的总和为

$$1 \times 19 + 2 \times 34 + 3 \times 21 + 4 \times 11 + 5 \times 9 + 6 \times 3 + 7 \times 1 = 264 \text{ (天)}.$$

所以每粒种子的发芽平均天数为

$$264 \div 98 \approx 2.7 \text{ (天)}.$$

上面求发芽所需的平均天数过程也可写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{98}(1 \times 19 + 2 \times 34 + 3 \times 21 + 4 \times 11 + 5 \times 9 + 6 \times 3 + 7 \times 1) = 1 \times \frac{19}{98} + 2 \times \frac{34}{98} + \\ & 3 \times \frac{21}{98} + 4 \times \frac{11}{98} + 5 \times \frac{9}{98} + 6 \times \frac{3}{98} + 7 \times \frac{1}{98} = \frac{264}{98} \approx 2.7 \text{ (天)}. \end{aligned}$$

2. 分析 普通扑克中没有两张牌的点数之和为28这种情况.因此,这个事件发生的概率为0;二等奖与后面的奖项安排不合理,因为普通扑克中红、黑两色牌各占一半,即抽到红色牌的概率为 $\frac{1}{2}$,而获三等奖的概率却只有 $\frac{4}{52}$,它小于 $\frac{1}{2}$,也即是说中二等奖比中三等奖还要容易;四等奖的安排也不合理,因为中四等奖的概率为100%,而中鼓励奖的概率却只有 $\frac{1}{4}$.

解 这个游戏规则的设置是不合理的,因为特等奖永远不可能产生,三等奖比二等奖还难得到,而四等奖人人都可以得到,但得鼓励奖的人却不是很多,可以作如下修改(答案不惟一);

特等奖 两次连续抽到红桃10;

一等奖 抽出一张是红桃7;

二等奖 抽出一张是5;

三等奖 抽出一张是梅花;

四等奖 抽出一张是红色牌;

鼓励奖 抽出一张牌的点数不小于1.

期末测试题

一、1. 用直接法.

$$\because a^{m+n+3} - a^{m+2n+3} = a^{m+n+3}(1 - a^n).$$

故本题应选D.

2. 用直接法.

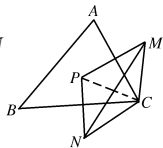
$$\because a < -6 \text{ 即 } a + 6 < 0.$$

$$\begin{aligned} |3 - |3 + a|| &= |3 - [-(3 + a)]| = |3 + 3 + a| \\ &= |6 + a| = -(a + 6). \end{aligned}$$

故本题应选 A.

3. 用直接法.

如图 II'-1 所示, 连结 PC , $\because AC, BC$ 分别是 PM, PN 的垂直平分线, $MC = PC, PC = NC, \therefore MC = NC$.



故本题应选 A.

4. 用直接法.

$\because y$ 随 x 的增大而减小, $\therefore k < 0$,

由 $kb > 0, \therefore b < 0$,

函数 $y = kx + b$ 的图象过第二、三、四象限.

故本题应选 B.

5. 用直接法.

设梯形上、下底分别为 a, b , 高为 h ,

由题意得 $\frac{1}{2} \times 10h = \frac{1}{2}(a + b)h$.

$\therefore a + b = 10$, 故本题应选 C.

6. 用直接推算法.

$\because (2k - 1)x^2 - 8x + 6 = 0$ 有实数根,

$\therefore \Delta = (-8)^2 - 4(2k - 1) \times 6 \geq 0$, 即 $-48k \geq -88$

$\therefore k \leq \frac{88}{48}$, k 的最大整数值为 1.

故本题应选 C.

7. 用直接法.

这组数据 7、8、8、8、9、9、10、10 的众数和中位数分别为 8 8.5.

故本题应选 B.

8. 用直接法.

$\because \frac{4+x}{2} = 5, \therefore x = 10 - 4 = 6$.

$\therefore$ 众数为 6.

故本题应选 D.

9. 用数形结合法.

由抛物线开口向上知 $a > 0, \therefore$ 其顶点位于第三象限 $ax = -\frac{b}{2a} < 0$,

$\therefore b > 0$.

当 $x=0$ 时, $y=c < 0$, $\therefore |c-b| = -(c-b) = b-c$.

故本题应选 C.

10. 用直接推算法.

欲使函数式成立, 必须满足 $2-x \geq 0$ 且 $9-x^2 \neq 0$.

$\therefore x \leq 2$ 且 $x \neq -3$.

故本题应选 A.

11. 用数形结合法.

由 $S_{\triangle CDO} : S_{\triangle BCD} = 1:3$ 知 $\triangle CDO$ 与 $\triangle BCD$ 高之比为 $1:3$, 且 $S_{\triangle BCO} = 2S_{\triangle CDO}$.

$\therefore S_{\triangle AOD} = 2S_{\triangle CDO}$. 又 $\because S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ABO} = 3:2$.

$\therefore S_{\triangle ABO} = 2S_{\triangle AOD} = 4S_{\triangle CDO}$.

$S_{\triangle ADB} = 6S_{\triangle CDO}$, $\therefore S_{\triangle CDO} : S_{\triangle ADB} = 1:6$. 故本题应选 B.

12. 用直接法.

$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3}{2}$, $\pi r^2 = \frac{9\pi}{4}$. 故选 D.

二、13. -2. 14. 13. 15. -1. 16. 3. 17. $9\pi \text{ cm}^2$

18. $(0.09\pi - 0.18) \text{ m}^2$

三、19. 由 $x - 2\sqrt{xy} + 15y = 0$ 知 $(\sqrt{x} - 5\sqrt{y})(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) = 0$,

$\therefore \sqrt{x} + 3\sqrt{y} > 0$, $\therefore \sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$, $\therefore x = 25y$,

$\therefore$ 原式 $= \frac{50y + 5y + 3y}{25y + 5y - y} = 2$.

20. (1) $y = x^2 - 5x + 4$.

(2) $y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = -x^2 + 5x - 4$.

四、21. (1) $p = -2$, $q = 2\sqrt{3}$. (2) $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = 1$, $c = 2\sqrt{3}$.

(3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{13\sqrt{3}}{6}\right)$. (4) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. (1) 甲厂产品的使用寿命的平均数、众数、中位数分别为 8.5、6; 乙厂产品的使用寿命的平均数、众数、中位数分别为 9.6、8、8.5; 丙厂产品的使用寿命的平均数、众数、中位数分别为 9.4、4、8.

(2) 甲厂选用了平均数 8, 乙厂选用了众数 8, 丙厂选用了中位数 8.

(3) 宜选购乙厂的产品, 因为乙厂产品平均使用寿命最长, 且多数超过 8 年寿

命或达到 8 年寿命.

23. 证明 (1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, AD 、 BC 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore AD \perp AB$, $BC \perp AB$, $\therefore AD \parallel BC$,

从而 $\angle ADC + \angle BCD = 180^\circ$.

又由切线长定理得 $\angle ODC = \frac{1}{2} \angle ADC$, $\angle OCD = \frac{1}{2} \angle BCD$.

$\therefore \angle ODC + \angle OCD = 90^\circ$ 即 $\angle DOC = 90^\circ$,

$\therefore CO \perp DO$.

(2) $\because DA$ 、 DE 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 、 E , $\therefore DA = DE$, $\therefore AE \perp DO$.

同理 $BE \perp CO$, 又 AB 为直径, $\therefore AE \perp BE$,

故四边形 $EFOG$ 为矩形.

24. 证明 (1) $\angle ACD = \angle ABC$, $\angle ACD + \angle CAD = 90^\circ$, $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$ 即可.

(2) $\triangle ACD \cong \triangle ACG$ 得 $AD = AG$.

同理 $BE = BG$, $\therefore AD + BE = AB$, $AD \cdot BE = AG \cdot BG = CG^2$,

故 AD 、 BE 为方程 $x^2 - ABx + CG^2 = 0$ 的两个根.

由面积得 $AC \cdot BC = CG \cdot AB$,

即 $OC^2 = CG \cdot 2OC$, 也即 $OC = 2CG$,

$\therefore \angle COG = 30^\circ$, $\therefore \angle CAB = 15^\circ$.

综合测试题(一)

一、1. 用分类讨论法.

当 $a > 0$, $b > 0$ 时, $m = 1 + 1 = 2$;

当 $a > 0$, $b < 0$ 时, $m = 1 - 1 = 0$;

当 $a < 0$, $b > 0$ 时, $m = -1 - 1 = -2$;

当 $a < 0$, $b < 0$ 时, $m = -1 + 1 = 0$;

故本题应选 A.

2. 用排除法.

A、B、C 选项中均 $\Delta > 0$ 应排除;

惟 D 选项中 $\Delta = -24 < 0$ 不能在实数范围内分解因式.

故本题应选 D.

3. 用直接推算法.

若 $0 < a < 1$, $a < \frac{1}{a}$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2} \div \left(\frac{1+a}{a} \right) \times \frac{1}{1+a} \\ &= \left(\frac{1}{a} - a \right) \times \frac{a}{1+a} \times \frac{1}{1+a} = \frac{1-a^2}{a} \times \frac{a}{1+a} \times \frac{1}{1+a} = \frac{1-a}{1+a}. \end{aligned}$$

故本题应选 A.

4. 用逆向思维法.

应排除 A、B、C, 惟 D 中的四边形各边中点的连线可得正方形.

故本题应选 D.

5. 用验证法.

$$\because 0 < \alpha < 90^\circ, \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 2.$$

故本题应选 C.

6. C 用排除法.

因为 A 中梯形既不是轴对称图形, 也不是中心对称图形; B 中平行四边形不是轴对称图形; D 中正三角形不是中心对称图形, 所以应排除 A、B、D. 故本题应选 C.

7. 用直接法.

如图 III-1 过 D 作 $DF \perp AB$ 于 F, $AF = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, $EF = DC = 3$, $BE =$

$$\frac{CE}{\tan \alpha} = 4 \div \frac{1}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

$$\therefore AB = AF + FE + BE = 3 + 3 + 4\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3}.$$

故本题应选 C.

8. 用直接法.

$$\text{当 } n = 10 \text{ 时 } (n-2) \cdot 180^\circ = (10-2) \times 180^\circ = 1440^\circ.$$

故本题应选 D.

9. 用数形结合法.

由抛物线开口向下知 $a < 0$, 令 $x = 0$ 得 $y = c > 0$.

$$\therefore \text{其顶点在第一象限, } \therefore x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore a < 0, \therefore b > 0, \frac{c}{b} > 0.$$

$$\therefore p\left(a, \frac{c}{b}\right) \text{ 点在第二象限.}$$

故本题应选 B.

10. 用逆向思维法.

$$\frac{2+7+6+x}{4} = 5, \therefore x = 20 - 15 = 5.$$

$$\frac{18+1+6+5+y}{5} = 10, \therefore y = 50 - 30 = 20.$$

故本题应选 B.

11. 用直接法.

$$\because PB \cdot PC = PA^2 = 6^2 = 36$$

且 $PB:PC = 1:2$ 即 $PC = 2PB$ 代入①得

$$PB^2 = 18, \therefore PB = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{又} \because PB \cdot PC = 36, 3\sqrt{2}PC = 36.$$

$$\therefore PC = \frac{36}{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{2},$$

故本题应选 C.

12. 用直接推算法.

$$\because S_1 = \frac{60}{360}\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi R^2,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}R \sin 30^\circ \cdot 2R \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

$$\begin{aligned} S_3 &= S_{\text{扇形}BOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{120}{360}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \\ &= \frac{12.56 - 5.196}{12}R^2 = \frac{7.364}{12}R^2. \end{aligned}$$

$$\because \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 < \frac{1}{6}\pi R^2 < \frac{7.364}{12}R^2,$$

$$\therefore S_2 < S_1 < S_3.$$

故本题应选 B.

二、13. 25 和 36. 14. $8\sqrt{3}$.

15. 1 000 2 000 (或 2 080 或 2 011).

$$16. y = \pi x^2 + 10\pi x. \quad 17. \frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{8}{3}.$$

$$18. \frac{n(n+1)}{2}.$$

三、19. 两根为 $x_1 = a, x_2 = b$ 依题意得 $a^2 + b^2 = 3 - ab$,

$$\text{即 } (a+b)^2 = 3 + ab.$$

$\therefore$ 方程 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore (a+b)^2 - 4ac \geq 0.$$

①

①

②

将①代入②得 $3+ab-4ab \geq 0$ 即 $ab \leq 1$.

又 a, b 是三角形边长, 又 a, b 为正数. $\therefore 0 < ab \leq 1$.

20. 证明 $\because$ 方程有两相等实根,

$$\therefore \Delta = (bc - ab)^2 - 4(ac - bc)(ab - ac) = (bc + ab)^2 - 4ac(bc + ab) + (2ac)^2 = (bc + ab - 2ac)^2 = 0, \therefore bc + ab - 2ac = 0, \therefore bc + ab = 2ac,$$

$$\text{即 } \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$$

四、21. (1) $y_{\text{甲}} = 120x + 240$, $y_{\text{乙}} = 144x + 144$.

$$(2) 120x + 240 = 144x + 144, \therefore x = 4.$$

(3) $y_{\text{甲}} - y_{\text{乙}} = 96 - 24x$, $\therefore x > 4$ 时, 甲更优惠; $x = 4$ 时, 甲、乙一样; $x < 4$ 时, 乙更优惠.

22. 设商场投资 x 元, 在月初出售获利 y_1 元, 在月末出售获利 y_2 元, 依题意得 $y_1 = 15\%x + 10\%(x + 15\%x) = 0.265x$, $y_2 = 30\%x - 700 = 0.3x - 700$. ①当 $y_1 = y_2$ 时, $x = 20\ 000$; ②当 $y_1 < y_2$ 时, $x > 20\ 000$; ③当 $y_1 > y_2$ 时, $x < 20\ 000$.

23. 先求得 BC 边上的高为 4.

$$(1) \frac{x}{6} = \frac{4-x}{4}, \therefore x = 2.4.$$

(2) 当 SR 落在三角形内时, $y = x^2 (0 < x < 2.4)$; 当 SR 落在三角形外时, 设 A 到 PQ 的距离为 h , $\frac{h}{4} = \frac{x}{6}$, $\therefore h = \frac{2}{3}x$, 这时 $y = x(4 - \frac{2}{3}x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x (2.4 < x \leq 6)$.

$$(3) y = -\frac{2}{3}(x-3)^2 + 6, \therefore \text{当 } x=3 \text{ 时, } y \text{ 有最大值 } 6.$$

24. (1) 符合条件的抛物线还有 5 条, 分别如下: ①抛物线 AEC ; ②抛物线 CBE ; ③抛物线 DEB ; ④抛物线 DEC ; ⑤抛物线 DBC .

(2) 如图 III'-1 所示, 在 (1) 中存在抛物线 DBC , 它与直线 AE 不相交.

设抛物线 DBC 的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

将 $D(-2, \frac{9}{2})$, $B(1, 0)$, $C(4, 0)$ 三点坐标分

别代入, 得

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = \frac{9}{2}, \\ a + b + c = 0, \\ 16a + 4b + c = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{4}, b = -\frac{5}{4}, c = 1.$$

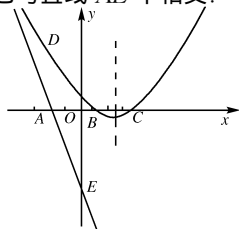


图 III'-1

∴ 抛物线 DBC 的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$.

又设直线 AE 的解析式为 $y = mx + n$.

将 $A(-2, 0), E(0, -6)$ 两点坐标分别代入, 得 $\begin{cases} -2m + n = 0, \\ n = -6. \end{cases}$

解得 $m = -3, n = -6$,

∴ 直线 AE 的解析式为 $y = -3x - 6$.

25. ①连结 DE, CE , 易证 $\triangle DAE \sim \triangle EBC$, 故 E 点是符合条件的点 P , 且 $AE = 1$. ②连结 DF, CF , 同理可证 $\triangle DAF \sim \triangle FBC$, 故 F 点也是符合条件的点 P , 作 $OH \perp AB$ 于 H , 求得 $AF = 7 - 1 = 6$. ③若还存在 P 点, 且 $\angle APD = \angle BPC$, 则 $\triangle APD \sim \triangle BPC$, ∴ $\frac{AP}{1-AP} = \frac{AD}{BC}$. 又由 $\triangle DAE \sim \triangle EBC$, ∴ $\frac{AD}{AE} = \frac{EB}{BC}$ 及 $BC - AD = 1$, 得 $AD = 2, BC = 3$, ∴ $AP = \frac{14}{5}$. 因此, 满足条件的 P 点有 3 个, AP 的长分别为 $1, \frac{14}{5}$.

综合测试题(二)

一、1. 用直接法.

A 中, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$ 正确. B、C、D 中均错.

故本题应选 A.

2. 用直接法.

设旗杆的高为 x m, 由题意得

$$\frac{x}{1.5} = \frac{30}{2.5}, \therefore x = \frac{30 \times 1.5}{2.5} = 18 \text{ (m)}.$$

故本题应选 B.

3. 用直接法.

$$\because |x| = -x \geq 0, \therefore x \leq 0.$$

故本题应选 D.

4. 用直接法.

令 $x - 1 = 0$, 对称轴是直线 $x = 1$.

故本题应选 B.

5. 用直接法.

A、B 是轴对称图形, 但不是中心对称图形; C 非轴对称图形, 又非中心对称图形.

故本题应选 D.

6. 用直接法.

圆既是中心对称图形又是轴对称图形.

故本题应选 B.

7. 用直接法.

$$\because S_Z^2 = 190, S_{\text{甲}}^2 = 245, S_Z^2 < S_{\text{甲}}^2$$

且 $\overline{x_Z} = \overline{x_{\text{甲}}} = 82$ 分, 成绩较为整齐的是乙班.

故本题应选 B.

8. 用直接推算法.

$$(1 + 10\%)^2(1 - 10\%)(1 - 10\%) = 1.21 \times 0.9^2 = 0.9801.$$

$$1 - 0.9801 = 0.0199 = 1.99\%.$$

故本题应选 D.

9. 用直接法.

由正比例函数定义知 $b^2 - 4 = 0$, $\therefore b = \pm 2$.

故本题应选 D.

10. 用直接法.

欲使函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 有意义, 必须有

$$x+1 \neq 0 \text{ 即 } x \neq -1.$$

故本题应选 A.

11. 用直接法.

$$\begin{aligned} \text{圆心距 } d &= \sqrt{17^2 - 8^2} + \sqrt{10^2 - 8^2} \\ &= 15 + 6 = 21. \end{aligned}$$

故本题应选 C.

12. 用直接推算法.

$$\because x_1^2 + x_2^2 = 11 \quad \text{①}$$

$$x_1 + x_2 = -(2k+1) \quad \text{②}$$

$$x_1 \cdot x_2 = k^2 - 2 \quad \text{③}$$

$$\text{②}^2 - \text{①} \quad 2x_1x_2 = 4k^2 + 4k - 10$$

$$\therefore x_1x_2 = 2k^2 + 2k - 5 \quad \text{④}$$

比较③、④得 $2k^2 + 2k - 5 = k^2 - 2$

即 $k^2 + 2k - 3 = 0$, $\therefore k = 1$ 或 $k = -3$. $\because k = -3$ 时 $\Delta < 0$

故本题应选 C.

二、13. -8 的立方根是 -2 ; $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ $(-3)^{-1} = -\frac{1}{3}$.

14. 乙地所修公路的走向是南偏西 48° .

15. $360^\circ \div 72^\circ = 5$. 故该多边形的边数是 5.

16. $y = (x-2)^2 - 1$ 等.

17. $12\pi \div (2\pi r) = 12\pi \div (2 \times 2\pi) = 3$ (cm).

18. $\frac{20+20+20}{30\ 000\ 000} = \frac{60}{30\ 000\ 000} = \frac{1}{500\ 000}$.

三、19. 原式 $= 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 3 = \sqrt{3} + 5$.

20. 原式 $= \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{x(x-2)}{x-2} = \frac{x+1}{x-1} + x$.

当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时 原式 $= \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} + 2$.

四、21(1)将 $(-2, 0)$ 、 $(0, 2)$ 两点的坐标分别代入 $y = kx + b$ 得

$$-2k + b = 0,$$

$$y = b = 2,$$

$$\therefore k = 1;$$

(2)如图 IV-3 画出 $y = -2x + 2$ 的图象;

(3)当 $x > 0$ 时,使函数 $y = kx + b$ 的函数值大于函数 $y = -2x + 2$ 的函数值.

22.(1)设 A 点的坐标为 (x, y) 且 $x > 0, y > 0$ 则

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}xy = 1.$$

又 $\because$ A 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上.

$$\therefore xy = m = 2.$$

$$(2) 2 + \sqrt{3}.$$

23. $y_{\text{甲}} = 1.1x$ $y_{\text{乙}} = 0.1x + 800$ 当行车路程超过 800 km 时 到乙公司租车;
不到 800 km 时 到甲公司租车 刚好 800 km 时 甲、乙两家都可以.

24. (1) $y_{\text{甲}} = 200 + 5x$ (2) $y_{\text{乙}} = 225 + 4.5x$

(3)当购买的书法练习本有 50 本时 甲、乙两种办法都可以 当购买的书法练习本少于 50 本时 选择甲办法 当购买的练习本大于 50 本时 选择乙办法.

25.(1)由已知得 $\widehat{\angle AFC}$ 对 $\widehat{ABC}$ 而 $\widehat{AD} = \widehat{CF}$.

$$\text{又} \because \widehat{\angle DAF} \text{ 对 } \widehat{DEF} = \widehat{DBC} + \widehat{CF} = \widehat{AD} + \widehat{DBC} = \widehat{ABC},$$

$$\therefore \angle AFC = \angle DAF.$$

同理可证其余各角都等于 $\angle AFC$.

$\therefore$ 六边形各内角相等.

(2) $\because \angle A$ 对 $\widehat{BDG}$, $\angle B$ 对 $\widehat{CEA}$, 且 $\angle A = \angle B$,

$$\therefore \widehat{BDG} = \widehat{CEA},$$

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{AG}.$$

同理 $\widehat{AB} = \widehat{CD} = \widehat{EF} = \widehat{AG} = \widehat{BC} = \widehat{DE} = \widehat{FG}$.

$\therefore$ 七边形 $ABCDEFG$ 为正七边形.

(3) 当边数为 3 5 7 9 ... 时, 各内角相等的圆内接多边形是正多边形.