

● 国家基础教育课程改革系列参考文献

中国教育学会

“借鉴多元智能理论 开发学生潜能实践研究”暨

DIC 国际合作项目

多元智能理论与新课程教学实践

高中教学部分

(第二辑)



多元智能与高中数学教学(一)

本册主编 谭利民



北京师联教育科学研究所 编
学苑音像出版社 出版

责任编辑 冯克诚 王 军

封面设计 师联平面工作室

**多元智能理论与新课程教学实践
高中教学部分
(第二辑)**

★

多元智能与高中数学教学(一)

本册主编 谭利民

学苑音像出版社出版发行

★

北京密云红光印刷厂印刷

2004 年 8 月印刷

开本 850 × 1168 1/32 印张 175.125 字数 4550 千字

ISBN7 - 88050 - 144 - 4

本系列资料配光碟发行册均 16.80 元(不含碟)

本书如有印刷、装订错误,请与本社联系调换

《多元智能理论与新课程教学实践》

出版说明

多元智能(MI)理论由美国哈佛大学终身教授、“零点项目”负责人霍华德·加德纳(Howard Gardner)先生于1983年提出并创立,旨在研究人的智能功能的多元结构,创建一个开放的教育系统,促进人类心灵全面而充分地发展。经过20余年的理论和实践研究发展,在全世界范围的教育系统内产生了极大的震动和深远的影响,被欧美理论界称为二十世纪最伟大的教育理论发现。

DIC(Discover In China)是以中国联合国教科文组织协会全国联合会主席陶西平代表中方与美国亚利桑那大学 DISCOVER 项目组负责人、“零点项目”核心专家琼·梅克教授,于2000年8月在北京签署的国际合作项目,是国内唯一具有签约授权的多元智能(MI)研究的国际合作项目,它同时被批准为中国教育学会“十五”重点课题,即“借鉴多元智能理论 开发学生潜能实践研究”。课题的研究目标,是适应中国基础教育改革的实际需要,借鉴以多元智能理论为代表的、开发学生多元潜能的现代教育理论,通过不同类型实验区和项目学校在教学改革各个领域的实践研究,逐步形成适合开发学生多元潜能的学校课程和以“问题解决”为导向的基本教学策略。其相应的多元多维教育评价体系,已被教育部基教司课程改革评价项目组接纳,直接参与了当前义务教育新一轮的课程改革研究,为国家的教育决策和

各地教学改革提供了参考和依据。

为深入推进和开展多元智能理论和实践的研究,团结全国从事该领域研究的各方教育力量,整合研究成果,配合国家基础教育课程改革,经中国联合国教科文组织协会全国联合会、北京市教育委员会、中国教育学会“借鉴多元智能理论 开发学生潜能实践研究”十五’重点课题暨 DIC 国际合作项目组特别授权,由学苑音像出版社投巨资整理出版了大型系列音像资料片《多元智能理论与新课程教学实践》(VCD399 种)。本资料属于国家基础教育课程改革系列音像资料,内容包括多元智能理论创始人霍华德·加德纳在内的国内外众多研究多元智能理论的核心专家关于多元智能的基本理论原理、学术渊源、多元智能学校实验工作、多元智能理论研究的原则、方法等专题讲座 75 种,和国内外各大实验区的优秀课堂实录(VCD)及各种课件共 324 种,较全面完整地反映了在不同学校类型、不同学科和各种教学环节中多元智能理论与实践工作进展的基本情况,对于进一步推进学校实验工作和教育创新具有相当重要的理论意义和实际借鉴作用。

《多元智能理论与新课程教学实践》文库是与前述大型系列音像资料配套使用的大型参考文献,主要整理了有关多元智能理论的基本内容和各大实验区的原创性的研究成果、经验总结、案例解说、个案设计以及其中特别具有实用价值的内部文献,对于指导学校进一步的实验、培训实验教师进行新课程改革和教学创新都具有直接的参考作用和应用价值。

北京师联教育科学研究所

2004 年 8 月

组织授权

中国联合国教科文组织协会全国联合会

北京市教育委员会

中国教育学会“借鉴多元智能理论 开发学生潜能实践研究”

暨 DIC 国际合作和项目课题组

课题指导专家

陶西平 中国联合国教科文组织协会全国联合会主席，北京市社会科学界联合会主席，本课题负责人

柳 斌 教育部总督学、顾问、中国教育国际交流协会会长、原国家教委副主任

顾明远 中国教育学会会长，北京师范大学、教授，博士生导师

郭福昌 原国家教委副总督学、本课题组副组长

霍华德·加德纳(Howard Gardner)：多元智能理论创始人，美国哈佛大学终身教授、“零点项目”负责人

琼·梅克(June Maker)美国亚利桑那大学教授、导师。“零点项目”核心专家

张稚美(Ji - Mei Chang, Ph. D.)美国加州圣荷西州立大学教授、导师

托马斯·里尔·阿姆斯特朗(Thomas Leigh Armstrong)美国著名心理学家、多元智能研究专家

约翰·保罗·汤普森(John Paul Thompson) 英国诺丁汉大学教授、多元智能研究专家

梅汝莉 中国陶行知研究会副会长,北京教育学院教授,课题组常务副组长

迪·迪瑾逊(Dee Dickinson) 全美在线多元智能课堂总裁(政府)、师资培训专家,《多元智能教学的策略》作者

米歇尔 加拿大魁北克省教育专家、教育委员会总裁。

托马斯·R·霍尔(Thomas R·Hoem) 美国第一所多元智能实验学校——新城中学校长

张国祥 澳门大学教授、博士、澳港地区实验学校负责人

沈致隆 北京工商大学教授、教育部艺术教育委员会委员
《多元智能》中文版一书首译者

张开冰 泰兆教育基金总裁、(香港)中国多元智能教育协会会长

陈杰琦 全美多元智能与教育研究专题组组长、教育博士,
北美华人教育研究年会主席

张梅玲 中国科学院心理研究所研究员、导师

霍力岩 北京师范大学教授、教育学博士

青岛泰治 联合国教科文组织驻北京办事处主任

杰瑞·伯瑞奇(Jary·Borich) 美国德州奥斯汀大学教授

程方平 中央教育科学研究所研究员、教育学博士

冯克诚 中国社会科学院高级编审、本课题年会秘书长、教育学博士

目 录

《函数题型及解法》教学设计	(1)
《算术平均数与几何平均数》教学设计	(14)
《不等式的证明》教学设计	(28)
《几个重要不等式的证明》教学设计	(58)
《对数不等式》教学设计	(64)
《含有字母系数的不等式的解法》教学设计	(72)
《用平均值定理求某些问题的最值》教学设计	(82)
《数学归纳法》教学设计	(98)
《用数学归纳法证明不等式》教学设计	(105)
《复数的减法及其几何意义》教学设计	(116)
《复数与几何》教学设计	(125)
《立体几何绪言》教学设计	(135)
《平面的基本性质之一》教学设计	(144)
《直线与平面垂直的判定和性质》教学设计	(152)
《水平放置的平面图形的直观图》教学设计	(168)
《余弦定理》教学设计	(177)



《函数题型及解法》教学设计

教学目的

一、对于基本初等函数的有关概念,一般性质系统地再认识后,能熟练地、灵活地运用函数的性质和图象解题;

二、通过深入讨论一些函数的综合性问题及它在各种场合的应用,使学生的函数观点得以提高。

时间

二课时。

教学过程

一、导言

课前发给学生每人一份油印讲义,共 6 页,前面是本节课的例题与相应练习题(无解答过程),后面是 1995 年高考理科试卷中的“函数题”,计有第(2)、(3)、(7)、(11)、(18)、(24)等。上课开始,教师先组织学生通览高考函数题,得出两点结论:(1)占有 30 多分,是高考试题的重要组成部分。(2)基本上是中、低档综合题。由此引出本节课的主题,要详细研究函数题的基本类型及其解法。(大笔板书:函数题型及解法)

二、例题选讲

将分成‘范围’题,证明题、最值问题、综合题型共四类来讲解。



1.“范围”题

例1 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调奇函数,且 $f(1) = -2$,若 $f(k \log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) > 0$,求实数 k 的取值范围。

教师:首先分析题意。已知条件有4个:单调性,奇函数, $f(1) = -2$, $f(k \log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) > 0$ 。基本上都是“抽象的函数” f 的性质,只有 $f(1) = -2$ 稍为具体一点。

结论是求 k 的取值范围。这就要求我们找出关于 k 的不等式(组),对照已知,只有

$$f(k \log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) > 0 \quad ①$$

出现 k ,所以思考要从这个式子出发,从中导出关于 k 的不等式,怎么导出呢?谁来回答?(全场肃静,也许是因为师生不熟悉,又坐有近百名教师听课的缘故,所以无人举手,让学生稍微思考后,教师提问科代表)

学生1:首先判别函数的增减函数,然后由式①可得

$$f(k \log_2 t) > -f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) = f(\log_2^2 t - \log_2 t + 2)。$$

$$\text{从而 } k \log_2 t > \log_2^2 t - \log_2 t + 2,$$

$$\text{或 } k \log_2 t < \log_2^2 t - \log_2 t + 2; \quad ②$$

再由二次不等式恒正或恒负便可确定 k 的范围。

教师:对,那么怎样判别函数的增减性呢?

$$\text{学生2:由奇函数知 } f(-1) = -f(1) = 2 > -2 = f(1),$$

可见, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数。

教师:还有没有别的办法判别出减函数?

学生:(沉默)

教师:奇函数有一个隐含条件,就是由 $f(-x) = -f(x)$,

$$\text{知 } f(0) = -f(0),$$

$$\text{从而 } f(0) = 0$$

与 $f(-1) = 2$ 作比较,可知, $f(x)$ 为减函数。



现在,请大家按照这个思路具体完成。

[点评 为了保持学生思路的畅通,此处不忙提出减函数的‘别的判别办法’。不妨放到小结时再讲]

稍微停顿,提问学生答案。

学生 3 : k 的取值范围为 $-1-2\sqrt{2} < k < -1+2\sqrt{2}$ 。

教师 同意这个答案的举手。(两人举手)

教师 只有两个举手,但有时真理掌握在少数人手里。这个答案是对的。

事实上,得出减函数后,由①知②成立,变为

$$\log^2 t - (1+k)\log_2 t + 2 > 0$$

对一切 $t \in \mathbb{R}$ 成立。若令 $x = \log_2 t$, 则二次三项式恒为正 $x^2 - (1+k)x + 2 > 0$, 因而有判别式小于 0, $(1+k^2) - 8 < 0$, ③

解得 $-1-2\sqrt{2} < k < -1+2\sqrt{2}$ 。

教师 小结上面的思路,可以得出解题的 4 个步骤:

(1) 由 $f(1) = -2$ 及奇函数,确定 $f(x)$ 为减函数。这里,具体取值 $f(1) = -2$ 成为解题的突破口;

(2) 由递减奇函数及①式可得不等式②;

(3) 由二次三项式恒正得 k 的二次不等式③;

(4) 解 k 的不等式得答案。

这里的关键是第一步,而第一步的突破口是 $f(1) = -2$, 请进一步考虑,把 1 改为 $f(2) = -2, \dots, f(N) = -2$ 情况如何? 把 -2 改为 $f(1) = -3, \dots, f(1) = -N$ 情况如何? 把 $f(1) = -2$ 改为 $f(1) > 0$ 情况如何?

2. 证明题

例 2 设函数 $y = f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上,当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且对任意的 $m, n \in \mathbb{R}$, 有 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$; 当 $m \neq n$ 时, $f(m) \neq f(n)$ 。



(1) 证明 $f(0) = 1$;

(2) 证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;

(3) 设 $A = \{x, y \mid f(x^2) \cdot f(y^2) < f(1)\}$,

$B = \{x, y \mid f(ax + by + c) = 1, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0\}$,

若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a, b, c 满足的条件。

教师 先做第(1)问。这是要由函数的一般性的取值性质, 如 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$, $f(x) > 1$ (当 $x > 0$ 时) 等, 得出函数的特殊取值 $f(0) = ?$ 因此, 解题的方向是特殊化。如何取特殊性呢?

学生 4 由 $f(1+0) = f(1) \cdot f(0)$

得 $f(0) = 1$ 。

学生 5 由 $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$

得 $f(0) = 1$ 。

教师 这里取值有合理成分, 但不够严谨, 怎样更严格一点呢?

学生 6 : (沉默)

教师 坐下。(再提问下一位)

学生 7 由 $1 > 0$ 知, $f(1) > 1$, 故由 $f(1) = f(1) \cdot f(0)$,

可得 $f(0) = 1$ 。

教师 正确。对 $f(0) = f(0) \cdot f(0)$

可得 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$ 。需证明 $f(0) \neq 0$ 才能得出 $f(0) = 1$ 。

若 $f(0) = 0$, 则对任意的 m , 均有

$$f(m) = f(m+0) = f(m) \cdot f(0) = 0$$

即函数值恒为 0, 与已知矛盾, 故 $f(0) \neq 0$ 。

下面考虑第(2)问。由于已知条件给出等式

$$f(m+n) = f(m)f(n),$$

我们要证明的是不等式

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (x_2 > x_1),$$

两相比较, 应取

$$x_2 = m + n, x_1 = m, x_2 - x_1 = n > 0,$$



有
$$\begin{cases} f(x_2) = f(x_1)f(x_2 - x_1), \\ f(x_2 - x_1) > 0. \end{cases}$$

于是单调性的证明归结为证明,对 $x_1 \in \mathbb{R}$,有

$$f(x_1) > 0.$$

①

学生 8 当 $x_1 > 0$ 时,由已知条件得

$$f(x_1) > 1 > 0.$$

当 $x_1 = 0$ 时,由第(1)问知

$$f(x_1) = 1 > 0.$$

当 $x_1 < 0$ 时, $f(-x_1) > 0$,有

$$1 = f(0) = f(x_1 - x_1) = f(x_1) \cdot f(-x_1),$$

得 $f(x_1) > 0$.

综上所述,或①成立。

教师 对,这时 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$,有

$$f(x_2) = f[x_1 + (x_2 - x_1)] = f(x_1)f(x_2 - x_1) > f(x_1).$$

故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数。

上面同学们是通过讨论得出 $f(x) > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

另外也可以由

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = [f\left(\frac{x}{2}\right)]^2 \geq 0$$

知 $f(x)$ 为非负数。再用反证法证明其不为 0, 设 $f(x_0) = 0$, 则 $f(x) = f[x_0 + (x - x_0)] = f(x_0)f(x - x_0) = 0$,

下面讨论第(3)问。(提问)

学生 9:(沉默)。

教师 坐下。(提问下一个)

学生 10 由集合 A 有

$f(x^2 + y^2) = f(x^2)f(y^2) < f(1)$, 得 $x^2 + y^2 < 1$, 这是单位圆内的点。



由集合 B 有

$$f(ax + by + c) = 1 = f(0) \text{ 但 } m \neq n \text{ 时 } f(m) \neq f$$

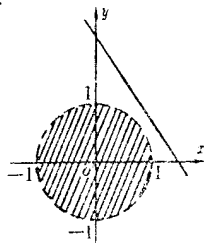
(n) , 故有 $ax + by + c = 0$

这是直角坐标系上的一条直线

由 $A \cap B = \emptyset$ 知, 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1, \\ ax + by + c = 0 \end{cases},$$

无解, 即直线与圆面不相交, 圆心到直线的距



离不小于半径, $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 1$, 即 $a^2 + b^2 \leq c^2$ 。

教师 说得非常好, 很不简单。另一思路可先考虑方程组②有解 (x_0, y_0) 则

$$|c| = |-ax_0 - by_0| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \sqrt{a^2 + b^2}$$

因而, 方程组无解时, 应有 $a^2 + b^2 \leq c^2$ 。

3. 最值问题

例 3 给出函数

$$F(x) = kx^2 - 2\sqrt{4 + 2m - m^2}x \quad (k \neq 0)$$

$$G(x) = -\sqrt{1 - (x - k)^2}, \quad m, k \in \mathbb{R}_0$$

(1) 若 m, k 为常数, 问 m, k 满足什么条件时, 函数 $F(x)$ 具有最大值? 并求出 $F(x)$ 取得最大值时 x 的值。

(2) 是否存在实数对 (m, k) 同时满足以下两个条件:

① $F(x)$ 取得最大值时的 x 值与 $G(x)$ 取得最小值的 x 值相同;

② k 为整数?

并证明你的结论。

教师:(1) 由二次函数有最大值和

$$\begin{cases} k < 0, \\ 4 + 2m - m^2 \geq 0, \end{cases}$$



得
$$\begin{cases} k < 0, \\ 1 - \sqrt{5} \leq m \leq 1 + \sqrt{5}. \end{cases}$$

可求出 当 $x = \frac{\sqrt{4 + 2m - m^2}}{k}$

时, $F(x)$ 有最大值。

第(1)问就完成了,第(2)问应该怎么办?

学生 11 就是求两个未知数 m, k 因而要去找方程。

教师 何处提供方程?

学生 12: $F(x)$ 取得最大值时的 x 值与 $G(x)$ 取得最小值的 x 值相同'提供了 m, k 的等量关系。

教师 对 $F(x)$ 取得最大值的 x 已经有了,下来?

学生众: k

教师 于是有 $\frac{\sqrt{4 + 2m - m^2}}{k} = k$, 或 $k^2 = \sqrt{4 + 2m - m^2}$ 。 ②

这一个方程能求出两个未知数吗?

学生 13 还有 k 为整数且 $k < 0$ 的条件,

教师 对了,说得很好,由②有 $k^2 = \sqrt{5 - (m - 1)^2} \leq \sqrt{5}$ 。

得 $-\sqrt[4]{5} \leq k < 0$ 。

故 $k = -1$ 。 k 的值已经得出。

学生 14 将 $k = -1$ 代入②,有 $1 = 5 - (m - 1)^2$

可解出 $\begin{cases} m_1 = -1, \\ k_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = 3, \\ k_2 = -1, \end{cases}$ ③

教师 这时,得 $F(x) = -x^2 - 2x$, $G(x) = -\sqrt{1 - (x + 1)^2}$ 。

同时满足两个条件。故存在实数 $(-1, -1)$ 或 $(3, -1)$ 同时满足两个条件。

这类探索性的问题,我们常常是先假设 m, k 满足条件,然后求解。若问题无解,便说明这样的实数对 (m, k) 不存在;若问题有解,



则难验证其充分性,得出所求。

4. 综合题型

例4 如图2,在 $\triangle ABC$ 中, $BC = a$, $AC = b$, $\angle ABC = \theta$,将 $\triangle ABC$ 分别以 BC , AC , AB 所在的直线为轴旋转一周,所得旋转体体积依次为

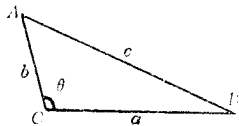


图2

V_1, V_2, V_3 ,

(1) 求 $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$;(用 a, b, c 表示)

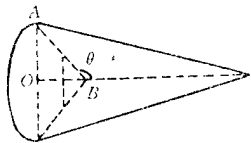
(2) 当 θ 为定值,并令 $x = \frac{a+b}{c}$ 时,将 T 表示为 x 的函数,写出这个函数的定义域,并求这个函数的最大值。

教师 请大家求出 V_1, V_2, V_3 来,分别用 a, b, c, θ 表示。(提问: V_1 等于什么?)

学生15 还没有算出来。

学生16 还没有算出来。

教师 看来计算上有些障碍。



$$V_1 = \frac{1}{3} sh_1 - \frac{1}{3} sh_2$$

$$= \frac{1}{3} s(CO - BO)$$

$$= \frac{1}{3} \pi OA^2 \cdot BC$$

$$= \frac{\pi ab^2 \sin^2 \theta}{3}.$$

这里的技巧是不要分别求 CO, BO , 直接用它们的差。

下来 V_2, V_3 应是多少?

学生17: $V_2 = \frac{\pi a^2 b \sin^2 \theta}{3}$ 。



学生 18 : $V_3 = \frac{\pi a^2 b^2 \sin^2 \theta}{3c}$ 。

教师 所以 $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2} = \frac{ab}{(a+b)c}$ 。 ①

下来,要用 $x = \frac{a+b}{c}$ 代入,使只出现 x ,不再出现 a, b, c ,这时,
 θ 为定值,可以出现在函数表达式中。

学生 19 : $T = \frac{ab}{xc^2}$ 。

教师 :这不算完成,还要继续代换 ab 与 c ,因为牵涉到边角关系,我们用余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos \theta),$$

$$\begin{aligned} \text{得 } 1 &= \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 2 \frac{ab}{c^2} (1 + \cos \theta) \\ &= x^2 - 2 \frac{ab}{c^2} (1 + \cos \theta), \end{aligned} \quad ②$$

$$\text{得 } \frac{ab}{c^2} = \frac{x^2 - 1}{2(1 + \cos \theta)},$$

$$\text{从而 } T = \frac{x^2 - 1}{2x(1 + \cos \theta)} \quad ③$$

下面确定函数的定义域。

学生 20 由 $a+b > c$ 知 $x = \frac{a+b}{c} > 1$ 。

教师 : $x > 1$ 是必要条件,还不充分,由②知

$$\begin{aligned} 1 &\geq x^2 - 2 \frac{(a+b)^2}{4c^2} (1 + \cos \theta) \\ &= x^2 - \frac{x^2}{2} (1 + \cos \theta) = x^2 \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{得 } x^2 \leq \frac{2}{1 - \cos \theta}$$



从而 x 的取值范围为 $1 < x \leq \sqrt{\frac{2}{1 - \cos\theta}}$ 。

这就得出函数的定义域 $(1, \sqrt{\frac{2}{1 - \cos\theta}}]$, 当 $a = b$ 时, x 可以取最大值。

下来, 如何求函数的最大值?

教师将③变为 $x^2 - 2T(1 + \cos\theta)x - 1 = 0$,

然后像例 1 一样用判别式很容易产生误判, 因为这里的 x 是在有限区间内的, 转化为二次函数。

$$f(x) = x^2 - 2T(1 + \cos\theta)x - 1$$

与 x 轴交点横坐标在 $(1, \sqrt{\frac{2}{1 - \cos\theta}}]$ 上也很啰嗦。

$$\text{由 } T = \frac{1}{2(1 + \cos\theta)} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

知, 函数在其定义域内是增函数, 当 $x = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos\theta}}$ 时

$$T_{\text{最大值}} = \frac{1}{2(1 + \cos\theta)} \left(\sqrt{\frac{2}{1 - \cos\theta}} - \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1 - \cos\theta}}。$$

小结 函数是中学数学的主线, 函数思想和方法是数学素质体现的重要方面, 因此, 熟练灵活的应用函数性质和图象解题, 并具备一定的解答函数综合题的能力, 是提高函数观点的基础, 同学们要在课后做一定数量的练习题, 强化提高这方面的能力。

【点评】这是一堂成功的复习课, 在一个新的、完全不熟悉的环境中, 能把课上得这样生动, 能把学生调动得这样充分, 实在不易, 当我们的教学目的是否明确? 教学要求是否恰当? 教学内容是否充实? 教学方法是否灵活? 教学效果是否良好? 教学基本功是否过关、是否过硬? 诸方面整体衡量这节课的时候, 我要再一次肯定地说, 这是一堂成功的课。从高考复习的角度看, 我要着重指出它的两个优点。



一、选题精练充实

这节课通过四个例子来体现四种类型,设计本身有全面覆盖‘函数题’的意图。虽然,这里的分类是否准确还可以研究,但‘分类讲解’的复习方式还是有益并且有效的。尤其是,这几个例子的选取有典型性,既难易适中又具训练价值。

1. 这几个例子覆盖了函数的有关概念与主要性质。函数的基础——集合有了,函数的三要素定义域、值域、对应关系 f 有了,函数的主要性质奇偶性、单调性、最值等(除周期性外)都有了。所以,这实质上也是一次‘习题化’的概念复习。

2. 题目涉及代数、解析几何、立体几何,既是跨学科的最高层次综合,又是中学课程的一无遗漏的最全面覆盖。

3. 既讨论具体的函数,如例3、例4;又讨论抽象的函数,如例1,例2(实质有指数函数的背景)。

4. 题型有计算也有证明,有结论肯定型又有结论探索型,各种形式都兼顾到了。

5. 从数学思想与数学方法的角度看,既有函数思想、又有方程观点,还有分类讨论、等价转换、数形结合的思想,这些全是高考的重点与热点。另外,配方法、消元法、换元法、坐标法、判别式法、特殊值法、放缩法等都不同程度涉及了。

由以上几方面可见,就几个例子的选取是比较精炼和充实的。这个人的偏爱而言,我希望例子的选取更接近课本与历年高考题,最好是这两方面的变形、引申与综合。这里已经涉及到高考复习第二阶段选例的一些原则,即全面覆盖、难易适中、综合性、训练价值。

二、讲授灵活生动

1. 调动学生的积极参与

这节课面对不熟悉的学生,面对近百名听课教师,依然放手让学



生参与,直接提问了 20 个学生(占 35 人的大多数),还有更多的学生在步步紧迫的问题面前,进行了积极的思考或齐声回答了问题。这既反映了教学观点,更体现了教学基本功。在提问的评价上,对好学生的鼓励也做得不错,对不会做的学生稍冷落了点。

当学生的回答不太对教师的设计思路时,现场的处理有点生硬,这次整理时,根据大家的意见已作了修订。

2. 体现了高考复习以解题训练为中心的思想

现在已经达成共识,平常教学要按教学规律办事。高考复习要按考试规律办事。由于高考是以解题作为唯一测试手段的,所以高考复习的成果最终必须表现为解题能力的提高,这就要求平时复习应以解题训练为中心,其实质是以思维训练为中心。本节课的解题训练突出了解题思路的分析,每个例子都能够引发积极的思维活动。达到提高思维层次的目的。例 1 中,对条件 $f(1) = -2$ 的发散思考,能使學生摆脱具体数值的纠缠而抓住问题的实质;例 2 中对 $f(0) = 1$ 的讨论,有利于培养思维的严谨性;例 3 有利于培养探索能力;例 4 能同时训练运算能力、逻辑推理能力和空间想象能力。

3. 启发式的解题教学

以解题训练为中心,很容易导致满堂灌的大量重复做题。本节课,数量恰当,难易适中,形式有代表性,内容有训练价值,引进有新鲜感,讲解有启发性,强调学生的参与,注重思路的分析与步骤的总结,是一种启发式的教学。课后找了部分学生了解,一致反映,听得明白、学得有味,完全达到教学的目的。

应该说,对各例的启发存在着程度上的差别,例 1 较深刻也较自然,例 4 较粗浅也较生硬,但难能可贵的是每个例子都尽力进行了深入浅出,都是与学生一起去努力弄清解法是怎样发现的?思路是怎样找到的?这不仅需要较强的解题功底,较强的课堂驾驭能力,而且需要教学观念的转变。



在这里,我们愿提出高考复习的一些基本看法,作为这篇评议的结束:

- (1) 高考复习应以考试规律为指导;
- (2) 高考复习应以《考试说明》为大纲、以现行教材为依据;
- (3) 高考复习应以近年高考命题的稳定性风格为导向;
- (4) 高考复习应以解题训练为中心;
- (5) 高考解题训练应以中档综合题为重点,以十余年高考试题为基本素材;
- (6) 高考解题训练应突出“解法的发现”,讲清解法是怎样找到的?思路是怎样打通的?是什么促使你这样想、这样做的?教师应与学生一起去寻找数学发现的动因,一起去感受数学思想的领悟。



《算术平均数与几何平均数》教学设计

教材分析

(一)教材所处的地位和作用

“算术平均数与几何平均数”是全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)数学第二册(上)“不等式”一章的内容,是在学完不等式性质的基础上对不等式的进一步研究。本节内容具有变通灵活性、应用广泛性、条件约束性等特点,所以本节内容是培养学生应用数学知识,灵活解决实际问题,学数学用数学的好素材。同时本节知识又渗透了数形结合、化归等重要数学思想,所以有利于培养学生良好的思维品质。

(二)教学目标

1. 知识目标 理解两个实数的平方和不小于它们之积的2倍的重要不等式的证明及其几何解释;掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数定理的证明及其几何解释;掌握应用平均值定理解决一些简单的应用问题。

2. 能力目标 培养学生数形结合、化归等数学思想。

(三)教学重点、难点、关键

重点 用平均值定理求某些函数的最值及有关的应用问题。

难点 定理的使用条件,合理地应用平均值定理。

关键 理解定理的约束条件,掌握化归的数学思想是突破重点和难点的关键。

(四)教材处理

依据新大纲和新教材,本节分为二个课时进行教学。第一课时



讲解不等式(两个实数的平方和不小于它们之积的 2 倍)和平均值定理及它们的几何解释。掌握应用定理解决某些数学问题。第二课时讲解应用平均值定理解决某些实际问题。为了讲好平均值定理这节内容,在紧扣新教材的前提下,对例题作适当的调整,适当增加例题。

教法分析

(一)教学方法

为了激发学生学习的主体意识,又有利于教师引导学生学习,培养学生的数学能力与创新能力,使学生能独立实现学习目标。在探索结论时,采用发现法教学 在定理的应用及其条件的教学中采用归纳法 在训练部分,主要采用讲练结合法进行。

(二)教学手段

根据本节知识特点,为突出重点,突破难点,增加教学容量,利用计算机辅导教学。

教学过程设计

(第一课时)

(一)导入新课

(教师活动) 1. 教师打出字幕(提出问题) 2. 组织学生讨论,并点评。

(学生活动) 学生分组讨论,解决问题。

[字幕] 某种商品分两次降价,降价的方案有三种 方案甲是第一次 9 折销售,第二次再 8 折销售,方案乙是第一次 8 折销售,第二次再 9 折销售,方案丙是两次都是 $\frac{9+8}{2}$ 折销售。试问降价最少的方案是哪一种?

[讨论]



①设物价为 t 元,三种降价方案的销售物价分别是:

方案甲: $t \times 0.9 \times 0.8 = 0.72t$ (元);

方案乙: $t \times 0.8 \times 0.9 = 0.72t$ (元);

方案丙: $t \times (0.1 \times \frac{9+8}{2})^2 = 0.7225t$ (元)。

故降价最少的方案是丙。

②若将问题变为第一次 a 折销售,第二次 b 折销售。显然可猜想有不等式 $(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$ 成立,即 $a^2 + b^2 \geq 2ab$,当 $a = b$ 时, $a^2 + b^2 = 2ab$ 。

设计意图 提出一个商品降价问题,要求学生讨论哪一种方案降价最少。学生对问题的背景较熟悉,可能感兴趣,从而达到说明学习本节知识的必要,激发学生求知欲望,合理引出新课。

(二) 新课讲授

【尝试探索,建立新知】

(教师活动)打出字幕(重要不等式),引导学生分析、思考,讲解重要不等式的证明。点评有关问题。

(学生活动)参与研究重要不等式的证明,理解有关概念。

[字幕]如果 $a, b \in \mathbb{R}$,那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当且仅当 $a = b$ 时取“=”号)。

证明 见课本

【点评】

①强调 $a^2 + b^2 = 2ab$ 的充要条件是 $a = b$ 。

②解释“当且仅当”是充要条件的表达方式(“当”表示条件是充分的,“仅当”表示条件是必要的)。

③几何解释,如图 6-1。

[字幕]定理 如果 a, b 是正数,那么 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a = b$ 时取“=”号)。



证明 学生运用‘ $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ ’自己证明。

[点评]

①强调 $a = b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$;

②解释‘算术平均数’和‘几何平均数’的概念,并叙述它们之间的关系;

③比较上述两个不等式的特征(强调它们的限制条件);

④几何解释(见课本);

⑤指出定理可推广为‘ n 个($n > 1$

$n \in N$) 正数的算术平均数不小于它们的几何平均数’。

设计意图 加深对重要不等式的认识和理解 培养学生数形结合的思想方法和对比的数学思想,多方面思考问题的能力。

[例题示范,学会应用]

(教师活动)教师打出字幕(例题),引导学生分析,研究问题,点拨正确运用定理,构建证题思路。

(学生活动)与教师一道完成问题的论证。

[字幕] 例题 已知 a, b, c, d 都是正数,求证: $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$ 。

[分析]

①应用定理证明;

②研究问题与定理之间的联系;

③注意应用定理的条件和应用不等式的性质。

证明 见课本。

设计意图 巩固对定理的理解,学会应用定理解决某些数学问题。

[课堂练习]

(教师活动)打出字幕(练习),要求学生独立思考,完成练习 巡

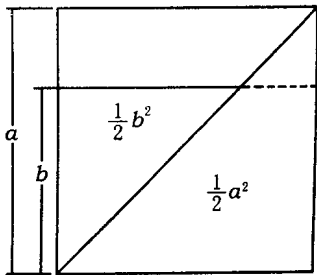


图 6-1



视学生解题情况,对正确的解法给予肯定和鼓励,对偏差给予纠正;
请甲、乙两学生板演,点评练习解法。

(学生活动)在笔记本上完成练习,甲、乙两位同学板演。

[字幕]练习:已知 x, y 都是正数,求证:

$$(1) \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2;$$

$$(2) (x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3) \geq 8x^3y^3.$$

设计意图 掌握定理及应用,反馈课堂教学效果,调节课堂教学。

【分析归纳、小结解法】

(教师活动)分析归纳例题和练习的解题过程,小结应用定理解决有关数学问题的解题方法。

(学生活动)与教师一道分析归纳,小结解题方法,并记录在笔记本上。

1. 重要不等式可以用来证明某些不等式。

2. 应用重要不等式证明不等式时要注意不等式的结构特征:①满足定理的条件;②不等式一边为和的形式,另一边为积或常数的形式。

3. 用重要不等式证明有关不等式时注意与不等式性质结合。

设计意图 培养学生分析归纳问题的能力,掌握应用重要不等式解决有关数学问题的方法。

(三)小结

(教师活动)教师小结本节课所学的知识要点。

(学生活动)与教师一道小结,并记录在笔记本上。

1. 本节课学习了两个重要不等式及它们在解决数学问题中的应用。

2. 注意:①两个重要不等式使用的条件;②不等式中‘=’号成立的条件。

设计意图 培养学生对所学知识进行概括归纳的能力,巩固所学



知识。

(四)布置作业

1. 课本作业 习题 6.2.1, 3。

2. 思考题 已知 $a + b + c = 1$, 求证: $ab + bc + ac \leq \frac{1}{3}$ 。

3. 研究性题 设正数 $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = 1$, 试尽可能多的给出含有 a 和 b 的两个元素的不等式。

设计意图 课本作业供学生巩固基础知识, 思考题供学有余力的学生完成, 灵活掌握重要不等式的应用, 研究性题是一道结论开放性题, 培养学生创新意识。

(五)课后点评

1. 导入新课采用学生比较熟悉的问题为背景, 容易被学生接受, 产生兴趣, 激发学习动机。使得学生学习本节课知识自然且合理。

2. 在建立新知过程中, 教师力求引导、启发, 让学生逐步回忆所学的知识, 并应用它们来分析问题、解决问题, 以形成比较系统和完整的知识结构。对有关概念使学生理解准确, 尽量以多种形式反映知识结构, 使学生在比较中得到深刻理解。

3. 通过变式训练, 使学生在对知识初步理解和掌握后, 得到进一步深化, 对所学的知识得到巩固与提高, 同时反馈信息, 调整课堂教学。

4. 本节课采用启发引导, 讲练结合的授课方式, 发挥教师主导作用, 体现学生主体地位, 学生获取知识必须通过学生自己一系列思维活动完成, 启发诱导学生深入思考问题, 有利于培养学生思维灵活、严谨、深刻等良好思维品质。

作业答案

思考题 证明 因为 $a + b + c = 1$, 所以 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 1$ 。又因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + c^2 \geq 2ac$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, 所以 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, $1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac +$



$2bc \geq 3(ab + ac + bc)$, 所以 $ab + ac + bc \leq \frac{1}{3}$ 。

研究性题 ① $0 < ab \leq \frac{1}{4}$ 。由条件得 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1 \cdots (A)$ 利用公式 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ 。 $\cdots (B)$ 。(A) - (B) 得 $4ab \leq 1$, 即 $0 < ab \leq \frac{1}{4}$ 。② $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ 。由(A)、(B)之和即得。③ $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) \geq 9$ 。可利用 $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) = \frac{ab + a + b + 1}{ab} = 1 + \frac{2}{ab}$ 。再利用①, 即可得。④ $\frac{1}{4} \leq a^3 + b^3 < 1$ 。利用立方和公式得到: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 1 - 3ab$ 。利用①可得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ 。利用①②可得 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 8$ 。还有 $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \geq \frac{25}{4}$

(第二课时)

(一) 导入新课

(教师活动) 1. 教师打出字幕(引例) 2. 设置问题, 引导学生思考, 启发学生应用平均值定理解决有关实际问题。

(学生活动) 思考、回答教师设置的问题, 构建应用平均值定理解决实际问题的思路。

[字幕] 引例。如图 6-2, 用篱笆围一块面积为 $50m^2$ 的一边靠墙的矩形篱笆墙, 问篱笆墙三边分别长多少时, 所用篱笆最省? 此时, 篱笆墙长为多少米?

[设问]

① 这是一个实际问题, 如何把它转化成为一个数学问题?

(学生口答: 设篱笆墙长为 y , 则 $y = 2x + \frac{50}{x}$ ($x > 0$)。问题转化为求函数 y 的最小值及取得最值时的 x 的值。)



②求这个函数的最小值可用哪些方法?能否用平均值定理求此函数的最小值?

(学生口答:利用函数的单调性或判别式法,也可用平均值定理。)

设计意图:从学生熟悉的实际问题出发,激发学生应用数学知识解决问题的兴趣,通过设问,此导和后发学生用所学的平均值定理解决有关实际问题,引入课题。

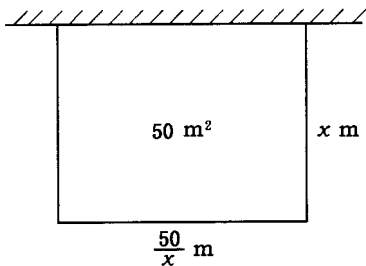


图 6-2

(二) 新课讲授

【尝试探索、建立新知】

(教师活动)教师打出字幕(课本例题1),引导学生研究和解决问题,帮助学生建立用平均值定理求函数最值的知识体系。

(学生活动)尝试完成问题的论证,构建应用平均值定理求函数最值的方法。

[字幕]已知 x, y 都是正数,求证:

(1)如果积 xy 是定值 P ,那么当 $x = y$ 时,和 $x + y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$;

(2)如果和 $x + y$ 是定值 S ,那么当 $x = y$ 时,积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$ 。

证明 运用 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, 证明(略)。

[点评]

①(1)的结论即 $xy = P \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{P}$, (2)的结论即 $x + y = S \Leftrightarrow xy \leq \frac{S^2}{4}$ 。

②上述结论给出了一类函数求最值的方法,即平均值定理求最



值法。

③应用平均值定理求最值要特别注意 两个变元都为正值 两个变元之积(或和)为定值 当且仅当 $x = y$, 这三个条件缺一不可, 即“一正, 二定, 三相等”同时成立。

设计意图 引导学生分析和研究问题, 建立新知——应用平均值定理求最值的方法。

【例题示范, 学会应用】

(教师活动) 打出字幕(例题), 引导学生分析问题, 研究问题的解法。

(学生活动) 分析、思考, 尝试解答题目。

【字幕】例题 1 求函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ ($x \geq 0$) 的最小值, 并求相应的 x 的值。

【分析】因为这个函数中的两项不都是正数且 x 与 $\frac{1}{x+1}$ 的积也不是常数, 所以不能直接用定理求解。但把函数变形为 $y = (x+1) + \frac{1}{x+1} - 1$ 后, 正数 $x+1$, $\frac{1}{x+1}$ 的积是常数 1, 可以用定理求得这个函数的最小值。

解: $y = x + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 1$, 由 $x \geq 0$, 知 $x+1 > 0$, $\frac{1}{x+1} > 0$, 且 $(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = 1$ 。当且仅当 $x+1 = \frac{1}{x+1}$, 即 $x=0$ 时, $y = x + \frac{1}{x+1}$ ($x \geq 0$) 有最小值, 最小值是 $y = 2\sqrt{1} - 1 = 1$ 。

【点评】要正确理解 $x+1 = \frac{1}{x+1}$ 的意义, 即方程 $x+1 = \frac{1}{x+1}$ 要有解, 且解在定义域内。

【字幕】例 2 某工厂要建造一个长方体无盖贮水池, 其容积为 $4800 m^3$, 深为 $3 m$, 如果池底每 $1 m^2$ 的造价为 150 元, 池壁每 $1 m^2$ 的造



价为 120 元,问怎样设水池能使总造价最低,最低总造价是多少元?

[分析] 设水池底面一边的长为 xm ,水池的总造价为 y ,建立 y 关于 x 的函数。然后用定理求函数 y 的最小值。

解 设水池底面一边的长度为 xm ,则另一边的长度为 $\frac{1}{x}600m$,又设水池总造价为 y 元,根据题意,得

$$y = 150 \times 1\,600 + 120(2 \cdot 3x + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{x}600) = 240\,000 + 720(x + \frac{1}{x}600) \quad (x > 0).$$

所以 $y \geq 240\,000 + 720 \times 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}600} = 297\,600.$

当 $x = \frac{1}{x}600$,即 $x = 40$ 时, y 有最小值 297 600。因此,当水池的底面是边长为 $40m$ 的正方形时,水池的总造价最低,最低总造价是 297 600 元。

设计意图 加深理解应用平均值定理求最值的方法,学会应用平均值定理解决某些函数最值问题和实际问题,并掌握分析变量的构建思想。培养学生用数学知识解决实际问题的能力,化归的数学思想。

【课堂练习】

(教师活动)打出字幕(练习),要求学生独立思考,完成练习 请三位同学板演 巡视学生解题情况,对正确的给予肯定,对偏差进行纠正 讲评练习。

(学生活动)在笔记本上完成练习、板演。

【字幕】练习

A 组

1. 求函数 $y = (1 - 3x)x$ ($0 < x < \frac{1}{3}$) 的最大值。



2. 求函数 $y = \frac{x}{x^2 + 2}$ ($x > 0$) 的最值。

3. 求函数 $y = 2x\sqrt{25 - x^2}$ ($0 < x < 5$) 的最大值。

B 组

1. 设 $x > 0, y > 0$ 且 $3x + 4y = 12$, 求 $\lg x + \lg y$ 的最大值。

2. 求函数 $y = 1 - 2x - \frac{3}{x}$ 的最值, 下面解法是否正确? 为什么?

解: $y = 1 - (2x + \frac{3}{x})$, 因为 $2x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{6}$, 则 $y \leq 1 - 2\sqrt{6}$ 。所以

$$y_{\max} = 1 - 2\sqrt{6}。$$

[讲述] A 组 1. $y_{\max} = \frac{1}{12}$ 2. $y_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 3. $y_{\max} = 25。$

B 组 1. $\lg 3$; 2. 不正确 ①当 $x > 0$ 时, $y_{\max} = 1 - 2\sqrt{6}$; ②当 $x < 0$ 时, $y_{\min} = 1 + 2\sqrt{6}$, 而函数在整个定义域内没有最值。

设计意图: A 组题训练学生掌握应用平均值定理求最值。B 组题训练学生掌握平均值定理的综合应用, 并对一些易出现错误的地方引起注意。同时反馈课堂教学效果, 调节课堂教学。

【分析归纳、小结解法】

(教师活动) 分析归纳例题和练习的解题过程, 小结应用平均值定理解决有关函数最值问题和实际问题的解题方法。

(学生活动) 与教师一道分析归纳, 小结解题方法, 并记录笔记。

1. 应用平均值定理可以解决积为定值或和为定值条件下, 两个正变量的和或积的最值问题。

2. 应用定理时注意以下几个条件: (i) 两个变量必须是正变量。(ii) 当它们的和为定值时, 其积取得最大值; 当它们的积是定值时, 其和取得最小值。(iii) 当且仅当两个数相等时取最值, 即必须同



时满足‘正数’‘定值’‘相等’三个条件,才能求得最值。

3. 在求某些函数的最值时,会恰当的恒等变形——分析变量、配置系数。

4. 应用平均值定理解决实际问题时,应注意:(1)先理解题意,设变量,把要求最值的变量定为函数。(2)建立相应的函数关系式,把实际问题抽象为函数的最值问题,确定函数的定义域。(3)在定义域内,求出函数的最值,正确写出答案。

设计意图 培养学生分析归纳问题的能力,帮助学生形成知识体系,全面深刻地掌握平均值定理求最值和解决实际问题的方法。

(三)小结

(教师活动)教师小结本节课所学的知识要点。

(学生活动)与教师一道小结,并记录笔记。

这节课学习了利用平均值定理求某些函数的最值问题。现在我们又多了一种求正变量在定积或定和条件下的函数最值方法。这是平均值定理的一个重要应用,也是本节的重点内容,同学们要牢固掌握。

应用定理时要注意定理的适用条件,即‘正数、定值、相等’三个条件同时成立,且会灵活转化问题,达到化归的目的。

设计意图 培养学生对所学知识进行概括归纳的能力,巩固所学知识。

(四)布置作业

1. 课本作业: $P_{11.4,6,7}$ 。

2. 思考题 设 $x > -1$, 求函数 $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$ 的最值。

3. 研究性题 某种汽车购车时费用为 10 万元,每年保险、养路、汽车费用 9 千元,汽车的维修费各年为:第一年 2 千元,第二年 4 千元,依每年 2 千元的增量逐年递增。问这种汽车最多使用多少年报废最合算(即使用多少年的平均费用最少)?



设计意图:课本作业供学生巩固基础知识,思考题供学有余力的学生练习,使学生能灵活运用定理解决某些数学问题,研究性题培养学生应用数学知识解决实际问题的能力。

(五)课后点评

1. 关于新课引入设计的想法:

导入这一环节是调动学生学习的积极性,激发学生探究精神的重要环节,本节课开始给出一个引例,通过探究解决此问题的各种解法,产生用平均值定理求最值,点明课题。事实上,在解决引例问题的过程中也恰恰突出了教学重点。

2. 关于课堂练习设计的想法:

正确理解和使用平均值定理求某些函数的最值是教学难点。为突破难点,教师单方面强调是远远不够的,只有让学生通过自己的思考、尝试发现使用定理的三个条件缺一不可,才能大大加深学生对正确使用定理的理解,设计解法正误讨论能够使学生尝试失败,并从失败中找到错误原因,加深了对正确解法的理解,真正把新知识纳入到原有认知结构中。

3. 培养应用意识。

教学中应不失时机地使学生认识到数学源于客观世界并反作用于客观世界。为增强学生的应用意识,在平时数学中就应适当增加解答应用问题的教学。本节课中设计了两道应用问题,用刚刚学过的数学知识解决了问题,使学生不禁感到“数学有用,要用数学”。

作业答案:

$$\text{思考题: } y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + 5(x+1) + 4}{x+1} = x+1 + \frac{4}{x+1}$$

$+5 \geq 5 + 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} = 9$ 。当且仅当 $x+1 = \frac{4}{x+1}$, 即 $x=1$ 时, 上式取等号。所以当 $x=1$ 时, 函数 y 有最小值 9, 无最大值。

研究性题: 设使用 x 年报废最合算, 由题意有:



$$\text{年平均费用} = \frac{10 + 0.9x + \left[\frac{0.2 + 0.2x}{2} \cdot x \right]}{x} = \frac{10 + x + 0.1x^2}{x} = 1 + \frac{10}{x} +$$

$$0.1x \geq 1 + 2\sqrt{\frac{10}{x} \cdot 0.1x} = 3。$$

当且仅当 $\frac{10}{x} = 0.1x$, 即 $x = 10$ 时, 取得最小值, 即使用 10 年报废最合算, 年平均费用 3 万元。



《不等式的证明》教学设计

教材分析

一、教材所处的地位和作用

“不等式的证明”是全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)数学第二册(上)“不等式”一章的重点和难点内容之一,是在学完不等式的基本概念与基本性质的基础上,对不等式的进一步研究,证明不等式就是要证明所给的不等式在给定条件下恒成立。由于不等式形式多种多样,所以不等式的证明没有固定的程序和统一的方法。具体问题具体分析是证明不等式的精髓。本节内容通过七个例题分别介绍了证明不等式常用的基本方法——比较法、以及数学证明中的基本方法——综合法和分析法,它是不等式性质的直接运用,也是研究代数证明的重要载体。

本节教材内容丰富,通过对三种证明方法的学习和横向比较,可进一步培养学生逻辑推理论证的能力,培养学生分析问题、解决问题的能力。

二、教学目标

依据教学大纲和教材教学要求,根据“不等式的证明”的地位和作用以及学生对“不等式的证明”的掌握程度,要使学生系统地掌握不等式证明的三种常用方法,同时要着力培养学生的逻辑推理论证能力,提高学生分析问题、解决问题的能力,借以发展学生的求异思维能力。



三、教学重点、难点、关键

教学重点是在教材内容逻辑结构的特定层次上占相对重要的前提判断,是整个知识体系中处于重要地位和突出作用的内容。在证明不等式的各种方法中,比较法是最基本、最重要的方法,比较法是利用不等式两边的差是正数或负数来证明不等式,因而其应用非常广泛。因此比较法是本节教学重点之一。又因为不等式的三种证明方法,只是为了教学的需要,才把它们分开讲授的,但在运用时,对具体问题必须考虑实际情况灵活选择,有时还需要综合运用它们去证明一个问题。所以着眼于培养学生的逻辑推理论证能力,使学生能针对具体问题,进行具体的分析,灵活地运用各种证法也是本节的教学重点。

教学难点是据学生学习过程中学习阻力较大或难度较高的某些关节点,是学生接受比较困难的知识点或问题不容易解决的地方。不等式证明中,分析法在初学时不易理解它的本质是从结论分析出使结论成立的‘充分’条件,另外不易正确使用连接有关(分析推理)步骤的关键词,所以分析法是教学的难点。

教师精心设置问题,由易到难,层层深入,启发学生理解各种证法的逻辑关系是本节掌握重点、突破难点的关键。

四、教材处理

依据新大纲和新教材,本节分为四个课时进行教学。第一课时与第二课时讲解比较法,第三课时讲解综合法,第四课时讲解分析法。为了讲好不等式的证明,在紧扣新教材的前提下,对例题作适当的调整,必要时适当增加例题。

教法分析

一、教学方法

费赖登塔尔曾指出 数学教学的核心是学生的‘再创造’,教师不



能将既有的知识灌输给学生,而应通过精心设置的一个个问题链,激发学生的求知欲,最终在教师的指导下发现问题,解决问题,为了充分调动学生的积极性,使学生变被动学习为主动学习,本节教学拟用启发引导、讲练结合的教学方法。

二、教学手段

新大纲明确指出 要积极创造条件,采用现代化的教学手段进行教学,根据本节知识特点,为突出重点,突破难点,增加教学容量,采用计算机辅助教学。

教学过程设计

第一课时

一、导入新课

(教师活动)教师提问,待学生思维片刻后,请一位学生回答,然后点评问题。

(学生活动)学生思考问题,学生甲口答。

提问问题 根据前面学过的知识,我们如何比较两个实数 a 与 b 的大小?

(学生甲口答 : $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$, $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$, $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.)

[点评] 要比较两个实数 a 与 b 的大小,只要考察 a 与 b 的差值的符号就可以了,这种证明不等式的方法称为比较法。现在我们就来学习 用比较法证明不等式。(板书课题)

设计意图 通过教师设置问题 如何比较两个实数的大小,引导学生回忆所学的知识,引出用比较法证明不等式,导入本节课学习的知识。



二、新课讲授

【尝试探索,建立新知】

(教师活动)教师板书问题(证明不等式),引导学生分析、思考,研究不等式的证明。点评证明过程。

(学生活动)学生研究证明不等式,尝试完成问题。

[问题] 求证 $2x^2 > x(x-2) - 2$.

(学生研究不等式的证明)

[点评]

①通过确定差的符号,证明不等式的成立。这一方法,在前面比较两个实数的大小,比较式子的大小、证明不等式性质就已经用过。

②通过求差将不等问题转化为恒等问题,将两个一般式子大小比较转化为一个一般式子与 0 的大小比较,使问题简化。

③理论依据是: $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$.

④由 $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$, $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ 知 要证明 $a > b$ 只要证明 $a - b > 0$ 要证明 $a < b$, 只要证 $a - b < 0$ 。这种证明不等式的方法通常叫做比较法。

设计意图 帮助学生构建用比较法证明不等式的知识体系,培养学生化归的数学思想。

【例题示范,学会应用】

(教师活动)教师板书例题,引导学生研究问题,构思证题方法,学会解题过程中的一些常用技巧,并点评。

(学生活动)学生在教师引导下,研究问题。与教师一道完成问题的论证。

例 1 求证 $x^2 + 3 > 3x$ 。

[分析] 由比较法证题的方法,先将不等式两边作差,得 $(x^2 + 3) - 3x = x^2 - 3x + 3$, 将此式看作关于 x 的二次函数,由配方法易知函数的最小值大于零,从而使问题获证。



证明:(见课本)

【点评】

①作差后是通过配方法对差式进行恒等变形,确定差的符号。

②作差后,式子符号不易确定,配方后变形为一个完全平方式子与一个常数和的形式,使差式的符号易于确定。

③不等式两边的差的符号是正是负,一般需要利用不等式的性质经过变形后,才能判断。变形的目的全在于判断差的符号,而不必考虑差的值是多少。至于怎样变形,要灵活处理,例1介绍了变形的一种常用方法——配方法。

例2 已知 a, b, m 都是正数,并且 $a < b$, 求证 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$ 。

【分析】这是分式不等式的证明题,依比较法证题将其作差,确定差的符号,应通分,由分子、分母的值的符号推出差值的符合,从而得证。

证明:(见课本)

【点评】

①作差后是通过通分法对差式进行恒等变形,由分子、分母的值的符号推出差的符号。

②本例题介绍了对差变形,确定差值的符号的一种常用方法——通分法。

③例2的结论反映了分式的一个性质(若 a, b, m 都是正数。

1°当 $a < b$ 时, $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$ 。

2°当 $a > b$ 时, $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$)。以后要记住。

设计意图 巩固用比较法证明不等式的知识,学会在用比较法证明不等式中,对差式变形的常用方法——配方法、通分法。

【课堂练习】

(教师活动)打出字幕(练习),要求学生独立思考。完成练习 请



甲、乙两学生板演 巡视学生的解题情况,对正确的证法给予肯定和鼓励,对偏差点拨和纠正 点评练习中存在的问题。

(学生活动)在笔记本上完成练习,甲、乙两位同学板演。

[字幕]练习:1. 求证 $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$ 。

2. 已知 a, b, c, d 都是正数,且 $bc > ad$,求证 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ 。

设计意图 掌握用比较法证明不等式,并会灵活运用配方法和通分法变形差式,确定差式符号。反馈课堂教学效果,调节课堂教学。

【分析归纳、小结解法】

(教学活动)分析归纳例题和练习的解题过程,小结用比较法证明不等式的解题方法。

(学生活动)与教师一道分析归纳,小结解题方法,并记录笔记。

比较法是证明不等式的一种最基本、重要的方法。用比较法证明不等式的步骤是:作差、变形、判断符号。要灵活掌握配方法和通分法对差式进行恒等变形。

设计意图 培养学生分析归纳问题的能力,掌握用比较法证明不等式的方法。

三、小结

(教师活动)教师小结本节课所学的知识。

(学生活动)与教师一道小结,并记录笔记。

本节课学习了用比较法证明不等式,用比较法证明不等式的步骤中,作差是依据,变形是手段,判断符号才是目的。掌握求差后对差式变形的常用方法:配方法和通分法。并在下节课继续学习对差式变形的常用方法。

设计意图 培养学生对所学知识进行概括归纳的能力,巩固所学知识。



四、布置作业

1. 课本作业 : $P_{16} . 1, 2, 3$ 。

2. 思考题 已知 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 求证 : $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$ 。

3. 研究性题 设 a, b, c 都是正数, 且 $ab + bc + ca = 1$, 求证 : $a + b + c \geq \sqrt{3}$ 。

设计意图 : 课本作业供学生巩固基础知识 ; 思考题供学有余力的学生完成, 培养其灵活掌握用比较法证明不等式的能力 ; 研究性题是为培养学生创新意识。

五、课后点评

1. 本节课是用比较法证明不等式的第一节课, 在导入新课时, 教师提出问题, 让学生回忆所学知识中, 是如何比较两个实数大小的, 从而引入用比较法证明不等式。这样处理合情合理, 顺理成章。

2. 在建立新知过程中, 教师引导学生分析研究证明不等式, 使学生在尝试探索过程中形成用比较法证明不等式的感性认识。

3. 例 1, 例 2 两道题主要目的在于让学生归纳、总结, 求差后对差式变形、并判断符号的方法, 以及求差比较法的步骤。在这里如何对差式变形是难点, 应着重解决。首先让学生明确变形目的, 减少变形的盲目性 ; 其次是总结变形时常用方法, 有利于难点的突破。

4. 本节课采用启发引导, 讲结合的授课方式, 发挥教师主导作用, 体现学生主体地位, 学生获取知识必须通过学生自己一系列思维活动完成。教师通过启发诱导学生深入思考问题, 培养学生思维灵活、严谨、深刻等良好思维品质。

作业答案

思考题 : $ab + bc + ca + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (2ab + 2bc + 2ca + a^2 + b^2 + c^2) =$



$\frac{1}{2}(a+b+c)^2 \geq 0$, 又 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, 获证。

研究性题 : $(a+b+c)^2 - 3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - 3$
 $\geq 3(ab + bc + ca) - 3 = 0$. 所以 $(a+b+c)^2 \geq 3, a+b+c \geq \sqrt{3}$ 。

第二课时

一、导入新课

(教师活动)教师打出字幕(复习提问),请三位同学回答问题,教师点评。

(学生活动)思考问题,口答。

[字幕] 1. 比较法证明不等式的步骤是怎样的?

2. 比较法证明不等式的步骤中,依据、手段、目的各是什么?

3. 用比较法证明不等式的步骤中,最关键的是哪一步?学了哪些常用的变形方法?对式子的变形还有其它方法吗?

[点评]用比较法证明不等式步骤中,关键是对差式的变形。在我们所学的知识中,对式子变形的常用方法除了配方、通分,还有因式分解。这节课我们将继续学习比较法证明不等式,积累对差式变形的常用方法和比较法思想的应用。(板书课题)

设计意图:复习巩固已学知识,衔接新知识,引入本节课学习的内容。

二、新课讲授

【尝试探索,建立新知】

(教师活动)提出问题,引导学生研究解决问题,并点评。

(学生活动)尝试解决问题。

[问题]

1. 化简 $a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3$ 。



2. 比 $\frac{1}{a-b}$ 与 $\frac{1}{a}$ ($a < b < 0$) 的大小。

(学生解答问题)

[点评]

①问题 1, 我们采用了因式分解的方法进行简化。

②通过学习比较法证明不等式, 我们不难发现, 比较法的思想方法还可用来比较两个式子的大小。

设计意图 启发学生研究问题, 建立新知, 形成新的知识体系。

【例题示范, 学会应用】

(教师活动) 教师打出字幕(例题), 引导、启发学生研究问题, 并点评解题过程。

(学生活动) 分析, 研究问题。

[字幕] 例题 3 已知 a, b 是正数, 且 $a \neq b$, 求证

$$a^5 + b^5 > a^3 b^2 + a^2 b^3。$$

[分析] 依题目特点, 作差后重新组项, 采用因式分解来变形。

证明:(见课本)

[点评] 因式分解也是对差式变形的一种常用方法。此例将差式变形为几个因式的积的形式, 在确定符号中, 表达过程较复杂, 如何书写证明过程, 例 3 给出了一个好的示范。

[字幕] 例 4 试问 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ 与 $\frac{a - b}{a + b}$ ($a, b < 0$) 的大小关系。并说明理由。

[分析] 作差通分, 对分子、分母因式分解, 然后分类讨论确定符号。

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a - b}{a + b} &= \frac{(a^2 - b^2)(a + b) - (a - b)(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)(a + b)} = \\ &= \frac{2ab(a - b)}{(a^2 + b^2)(a + b)} \end{aligned}$$

因为 $a, b < 0$, 所以 $2ab > 0, a + b < 0, a^2 + b^2 > 0, (a^2 + b^2)(a + b) < 0$ 。



若 $a < b < 0$, 则 $a - b < 0, 2ab(a - b) < 0$ 所以 $\frac{2ab}{(a^2 + b^2)(a + b)}$
 > 0 。即 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > \frac{a - b}{a + b}$ 。

若 $b < a < 0$, 则 $a - b > 0, 2ab(a - b) > 0$ 所以 $\frac{2ab(a - b)}{(a^2 + b^2)(a + b)}$
 < 0 。即 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} < \frac{a - b}{a + b}$ 。

若 $a = b < 0$, 则 $a - b = 0, 2ab(a - b) = 0$ 所以 $\frac{2ab(a - b)}{(a^2 + b^2)(a + b)}$
 $= 0$ 。即 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a - b}{a + b}$ 。

综上所述: $a < b < 0$ 时, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > \frac{a - b}{a + b}$;

$b < a < 0$ 时, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} < \frac{a - b}{a + b}$;

$a = b < 0$ 时, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a - b}{a + b}$ 。

[点评] 解这道题在判断符号时用了分类讨论, 分类讨论是重要的数学思想方法。要理解为什么分类, 怎样分类。分类时要不重不漏。

[字幕] 例 5 甲、乙两人同时同地沿同一条路线走到同一地点。甲有一半时间以速度 m 行走, 另一半时间以速度 n 行走; 有一半路程乙以速度 m 行走, 另一半路程以速度 n 行走, 如果 $m \neq n$, 问甲、乙两人谁先到达指定地点。

[分析] 设从出发地点至指定地点的路程为 s , 甲、乙两人走完这段路程用的时间分别为 t_1 、 t_2 , 要回答题目中的问题, 只要比较 t_1 、 t_2 的大小就可以了。

解: (见课本)

[点评] 此题是一个实际问题, 学习了如何利用比较法证明不等式的思想方法解决有关实际问题。要培养自己学数学, 用数学的良



好品质。

设计意图 巩固比较法证明不等式的方法,掌握因式分解的变形方法和分类讨论确定符号的方法。培养学生应用知识解决实际问题的能力。

【课堂练习】

(教师活动)教师打出字幕(练习),要求学生独立思想,完成练习,请甲、乙两位学生板演;巡视学生的解题情况,对正确的给予肯定,对偏差及时纠正;点评练习中存在的问题。

(学生活动)在笔记本上完成练习,甲、乙两位同学板演。

[字幕]练习 1. 设 $a \neq b$, 比较 $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$ 与 $(a^3 + b^3)$ 的大小。

2. 已知 $a, b > 0$, $n \in N^+$, 求证 $(a + b)(a^n + b^n) \leq 2(a^{n+1} + b^{n+1})$ 。

设计意图 掌握比较法证明不等式思想方法的应用。灵活掌握因式分解法对差式的变形和分类讨论确定符号。反馈信息,调节课堂教学。

【分析归纳、小结解法】

(教师活动)分析归纳例题的解题过程,小结对差式变形、确定符号的常用方法和利用不等式解决实际问题的解题步骤。

(学生活动)与教师一道小结,并记录在笔记本上。

1. 比较法不仅是证明不等式的一种基本、重要的方法,也是比较两个式子大小的一种重要方法。

2. 对差式变形的常用方法有 配方法,通分法,因式分解法等。

3. 会用分类讨论的方法确定差式的符号。

4. 利用不等式解决实际问题的解题步骤: ①类比列方程解应用题的步骤。②分析题意,设未知数,找出数量关系(函数关系,相等关系或不等关系),③列出函数关系、等式或不等式,④求解,作答。

设计意图 培养学生分析归纳问题的能力,掌握用比较法证明不



等式的知识体系。

三、小结

(教师活动)教师小结本节课所学的知识及数学思想与方法。

(学生活动)与教师一道小结,并记录笔记。

本节课学习了对差式变形的一种常用方法——因式分解法;对符号确定的分类讨论法;应用比较法的思想解决实际问题。

通过学习比较法证明不等式,要明确比较法证明不等式的理论依据,理解转化,使问题简化是比较法证明不等式中所蕴含的重要数学思想,掌握求差后对差式变形以及判断符号的重要方法,并在以后的学习中继续积累方法,培养用数学知识解决实际问题的能力。

设计意图 培养学生对所学的知识进行概括归纳的能力,巩固所学的知识,领会化归、类比、分类讨论的重要数学思想方法。

四、布置作业

1. 课本作业 : $P_{17} \quad 7、8。$

2. 思考题 :已知 $a, b > 0$, 求证 $a^a b^b \geq a^b b^a$ 。

3. 研究性题 对于同样的距离,船在流水中来回行驶一次的时间和船在静水中来回行驶一次的时间是否相等?(假设船在流水中的速度和船在静水中的速度保持不变)

设计意图 思考题让学生了解商值比较法,掌握分类讨论的思想。研究性题是使学生理论联系实际,用数学解决实际问题,提高应用数学的能力。

五、课后点评

1. 教学评价、反馈调节措施的构想 本节课采用启发引导,讲练结合的授课方式,发挥教师主导作用,体现学生主体地位,通过启发诱导学生深入思考问题,解决问题,反馈学习信息,调节教学活动。



2. 教学措施的设计:由于对差式变形,确定符号是掌握比较法证明不等式的关键,本节课在上节课的基础上继续学习差式变形的方法和符号的确定,例3和例4分别使学生掌握因式分解变形和分类讨论确定符号,例5使学生对所学的知识会应用。例题设计目的在于突出重点,突破难点,学会应用。

作业答案:

思考题 证明 $\frac{a^a b^b}{a^b b^a} = a^{a-b} \cdot b^{b-a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$ 。

因为 $a, b > 0$, 所以当 $a > b > 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1, a - b > 0 \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$,

故 $\frac{a^a b^b}{a^b b^a} > 1$ 。

又因为 $a^b b^a > 0$ 所以 $a^a b^b > a^b b^a$ 。

当 $b > a > 0$ 时, $0 < \frac{a}{b} < 1, a - b < 0$, 故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$, 即 $\frac{a^a b^b}{a^b b^a} > 1$,

所以 $a^a b^b > a^b b^a$ 。

当 $b = a > 0$ 时, $\frac{a}{b} = 1, a - b = 0$, 故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} = 1$, 即 $\frac{a^a b^b}{a^b b^a} = 1$, 所

以 $a^a b^b = a^b b^a$ 。

综上所述, $a^a b^b \geq a^b b^a$ 。

研究性题 设两地距离为 s , 船在静水中的速度为 u , 水流速度为 v

($u > v > 0$), 则 $t_{\text{流}} - t_{\text{静}} = \frac{s}{u+v} + \frac{s}{u-v} - \frac{2s}{u} = \frac{2v^2 s}{u(u^2 - v^2)} > 0$,

所以船在流水中来回行驶一次的时间比在静水中来回行驶一次的时间长。

第三课时

一、导入新课

(教师活动) 打出字幕(课前练习), 引导学生回忆所学的知识, 尽



量用多种方法完成练习,投影学生不同解法,并点评。

(学生活动)完成练习。

[字幕] 1. 证明 $x^2 + 2 > 2x$ ($x \in \mathbb{R}$)。

2. 比较 $x^2 + 1$ 与 $2x$ 的大小,并证明你的结论。

1. 证法一 由 $(x^2 + 2) - 2x = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$, 所以 $x^2 + 2 > 2x$ 。

方法二 由 $(x - 1)^2 \geq 0$, 知 $(x - 1)^2 + 1 > 0$, 即 $x^2 - 2x + 2 > 0$, 所以 $x^2 + 2 > 2x$ 。

2. 答: $x^2 + 1 \geq 2x$ 。

证法一 由 $(x^2 + 1) - 2x = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$, 所以 $x^2 + 1 \geq 2x$ 。

方法二 由 $(x - 1)^2 \geq 0$, 知 $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, 所以 $x^2 + 1 \geq 2x$ 。

[点评] 两道题的证法一都是用的比较法,证法二我们在 6.1 节和 6.2 节已学过,这种方法是综合法,是本节课学习的内容。(板书课题)

设计意图 通过练习,复习比较法证明不等式,导入新课 综合法证明不等式。提出学习任务。

二、新课讲授

【尝试探索,建立新知】

(教师活动)教师提出问题 用上述方法二证明 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 并点评证法的数学原理。

(学生活动)学生研究证明不等式。

[问题] 证明 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 。

(证明 因为 $(a - b)^2 \geq 0$, 所以 $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, 即 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 。)

[点评]

① 利用某些已知证明过的不等式(例如平均值定理)和不等式的性



质推导出所要证明的不等式成立,这种证明方法通常叫做综合法。

②综合法证题方法:由已知推出结论。这里已知可以是已知的重要不等式,也可以是已知的不等式性质。

设计意图 探索解决问题的新方法,建立新知识,构建用综合法证明不等式的方法原理。

【例题示范、学会应用】

(教师活动)教师板书例题,引导学生研究问题,构思证题方法,学会用综合法证明不等式,并点评用综合法证明不等式必须注意的问题。

(学生活动)学生在教师诱导下,研究问题,与教师一道完成问题的论证。

例1 已知 $x > 0$, 求证 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 。

[分析] 由于不等式左边是和的形式,右边为常数,可用平均值定理作为已知不等式推证。

证明 因为 $x > 0$, 则 $\frac{1}{x} > 0$, 所以 $\frac{1}{x} + x \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ 。故

$$x + \frac{1}{x} \geq 2。$$

[点评] 此题的证明方法是综合法,在证明过程中,把平均值定理作为已知不等式,而平均值定理是有条件限制的,所以要用重要不等式作为已知不等式,注意要证的不等式必须符合重要不等式的条件和结构特征。

例2 已知 a, b, c 是不全相等的正数,求证 $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) > 6abc$ 。

[分析] 由不等式右边为 $6abc$ 。是积的形式,左边是和的形式,可知由 $b^2 + c^2 \geq 2bc$ 出发可证。

证明一(见课本)



$$\begin{aligned}
 \text{证明二: } & a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc \\
 &= a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ac) + c(a^2 + b^2 - 2ab) \\
 &= a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2。
 \end{aligned}$$

因为 a, b, c 是不全相等的正数。所以 $(b - c)^2 \geq 0, (c - a)^2 \geq 0, (a - b)^2 \geq 0$, 且三式不能全取“=”号。

$$\text{所以 } a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 > 0。$$

$$\text{即 } a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) > 6abc。$$

【点评】

①综合法的思维特点是:由已知推出结论。用综合法证明不等式中常用的重要不等式有:

$$\begin{aligned}
 & a^2 \geq 0; a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbb{R}); \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a, b \in \mathbb{R}^+); \frac{b}{a} + \\
 & \frac{a}{b} \geq 2 (a, b \text{ 同号}), \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} (a, b \in \mathbb{R}^+)。
 \end{aligned}$$

②此例中条件 a, b, c 是不全相等的正数,所以最后所证不等式取不到等号。

③由于作为综合法证明依据的不等式本身是可以根据不等式的意义、性质或比较法证出的,所以用综合法可以获证的不等式往往可以直接根据不等式的意义、性质或比较法来证明。我们在证明不等式时,选择方法要适当,不要对某种方法抱定不放,要善于观察,根据题目的特征选择证题方法。

设计意图 巩固用综合法证明不等式的知识,掌握用综合法证明不等式中,常用的重要不等式,理解综合法证明不等式与比较法证明不等式的内在联系。

【课堂练习】

(教师活动)打出字幕(练习),请甲、乙两位同学板演,巡视学生



的解题情况,对正确的证法给予肯定,对偏差及时纠正,点评练习中存在的问题。

(学生活动)在笔记本上完成练习。甲、乙两位同学板演。

【字幕】练习1 已知 $xy > 0$, 求证 $xy + \frac{1}{xy} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4$ 。

2. 已知 $a > b > 0, 0 < c < d$, 求证 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ 。

设计意图 掌握用综合法证明不等式,并会灵活运用重要不等式作为证明中的已知不等式。反馈课堂效果,调节课堂教学。

【分析归纳,小结解法】

(教师活动)分析归纳例题和练习的解题过程。小结用综合法证明不等式的解题方法。

(学生活动)与教师一道分析归纳,小结解题方法,并记录在笔记本上。

1. 综合法是证明不等式的基本方法。用综合法证明不等式的逻辑关系是: $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n \Rightarrow B$ (A 为已经证明过的不等式, B 为要证的不等式)。即综合法是“由因导果”。

2. 运用不等式的性质和已证明过的不等式时,要注意它们各自成立的条件,这样才能使推理正确,结论无误。

设计意图 培养学生分析归纳问题的能力,掌握综合法证明不等式的方法。

三、小结

(教师活动)教师小结本节课所学的知识。

(学生活动)与教师一道小结,并记录在笔记本上。

本节课学习了用综合法证明不等式,用综合法证明不等式的依据是: ① 已知条件和不等式性质 ② 基本不等式。能用综合法证明的不等式一般可用比较法证明,用综合法证明不等式的依据是基本不



等式时,要注意定理的使用条件和定理中‘ $=$ ’号成立的条件。

设计意图 培养学生对所学知识进行概括归纳的能力,巩固所学知识。

四、布置作业

1. 课本作业 : $P_{17.5.60}$

2. 思考题 若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 求证 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ 。

3. 研究性题 某市用 37 辆汽车往灾区运送一批救灾物资,假设以 v 千米/小时的速度直达灾区。已知某市到灾区的公路线长 400 千米,为完全需要,两汽车间距不得小于 $\left(\frac{v}{20}\right)$ 千米。那么,这批物资全部到达灾区的最短时间是多少?

设计意图 课本作业巩固基础知识,思考题供学有余力的同学完成。研究性题培养学生应用数学知识解决实际问题的能力。

五、课后点评

1. 在导入新课时设计了两个练习题,尤其是稍放开一点的第 2 题,如果学生能自觉不自觉地用已学过的很常用而没正式讲过的综合法的思考方法解题,综合法的引入就会很自然,即使学生没有想到,教师引导起来也并不困难。因而顺着学生的思路,帮助学生形成用综合法证明不等式的知识结构。

2. 例 1 与例 2 的学习使学生理解掌握综合法证明不等式的原理,发现综合法与比较法的内在联系。在教学设计上,力图从学生的需要出发设计问题,帮助学生抓住知识的内在联系,使学到的方法能用、会用。

作业答案

思考题 证明 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 又因为 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 所以 $\frac{a^2}{b}$



$+b \geq 2a$ 。同理 $\frac{b^2}{c} + c \geq 2b$; $\frac{c^2}{a} + a \geq 2c$ 。将上述三个不等式相加得

$$\frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{c} + c + \frac{c^2}{a} + a \geq 2a + 2b + 2c。$$

所以 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ 。

研究性题 设最后一辆车到达时用的时间为 t 小时,则

$$t = [400 + 36 \cdot \left(\frac{v}{20}\right)^2] \div v = \frac{400}{v} + \frac{36v}{400} \geq 2\sqrt{\frac{400}{v} \cdot \frac{36v}{400}} = 12。$$

所以最短时间为 12 小时。

第四课时

一、导入新课

(教师活动)教师提出问题,待学生回答和思考后点评。

(学生活动)回答和思考教师提出的问题。

[问题 1] 我们已经学习了哪几种不等式的证明方法? 什么是比较法? 什么是综合法?

[问题 2] 能否用比较法或综合法证明不等式 $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 2\sqrt{5}$ 。

[点评] 在证明不等式时,若用比较法或综合法难以下手时,可采用另一种证明方法:分析法。(板书课题)

设计意图:复习已学证明不等式的方法。指出用比较法和综合法证明不等式的不足之处,激发学生学习新的证明不等式知识的积极性,导入本节课学习内容:用分析法证明不等式。

二、新课讲授

【尝试探索、建立新知】

(教师活动)教师讲解综合法证明不等式的逻辑关系,然后提出



问题供学生研究,并点评。帮助学生建立分析法证明不等式的知识体系。投影分析法证明不等式的概念。

(学生活动)与教师一道分析综合法的逻辑关系,在教师启发、引导下尝试探索,构建新知。

[讲解]综合法证明不等式的逻辑关系:以已知条件中的不等式或基本不等式作为结论,逐步寻找它成立的必要条件,直到必要条件就是要证明的不等式。

[问题 1]我们能不能用同样的思考问题的方式,把要证明的不等式作为结论,逐步去寻找它成立的充分条件呢?

[问题 2]当我们寻找的充分条件已经是成立的不等式时,说明了什么呢?

[问题 3]说明要证明的不等式成立的理由是什么呢?

[点评]从要证明的结论入手,逆求使它成立的充分条件,直到充分条件显然成立为止,从而得出要证明的结论成立。就是分析法的逻辑关系。

[投影]分析法证明不等式的概念。(见课本)

设计意图:对比综合法的逻辑关系,教师层层设置问题,激发学生积极思考、研究。建立新的知识:分析法证明不等式。培养学习创新意识。

【例题示范、学会应用】

(教师活动)教师板书或投影例题,引导学生研究问题,构思证题方法,学会用分析法证明不等式,并点评用分析法证明不等式必须注意的问题。

(学生活动)学生在教师引导下,研究问题,与教师一道完成问题的论证。

例 1 求证 $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 2\sqrt{5}$ 。

[分析]此题用比较法和综合法都很难入手,应考虑用分析法。

证明:(见课本)



[点评]证明某些含有根式的不等式时,用综合法比较困难。此例中,我们很难想到从“ $21 < 25$ ”入手,因此,在不等式的证明中,分析法占有重要的位置,我们常用分析法探索证明途径,然后用综合法的形式写出证明过程,这是解决数学问题的一种重要思维方法,事实上,有些综合法的表述正是建立在分析法思索的基础上,分析法的优越性正体现在此。

例2 已知 $0 < a < b$, 求证 $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+2}$ 。(用分析法)请思考下列证法有没有错误?若有错误,错在何处?

[投影]证法一 因为 $b > 0$, 所以 $b+1 > 0$ 。去分母,化为 $a(b+1) < b(a+1)$, 就是 $a < b$ 。由已知 $a < b$ 成立,所以求证的不等式成立。

证法二 欲证 $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+2}$, 因为 $a > 0, b+1 > 0$,

只需证 $a(b+1) < b(a+1)$,

即证 $ab + a < ab + b$,

即证 $a < b$ 。

因为 $a < b$ 成立,所以 $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+2}$ 成立。

(证法二正确,证法一错误。错误的原因是:虽然是从结论出发,但不是逐步逆找结论成立的充分条件,事实上找到明显成立的不等式是结论的必要条件,所以不符合分析法的逻辑原理,犯了逻辑上的错误。)

[点评]①用分析法证明不等式的逻辑关系是:

$$B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \cdots \Leftarrow B_r \Leftarrow A$$

(结论)(步步寻找不等式成立的充分条件)(结论)

分析法是“执果索因”,它与综合法的证明过程(由因导果)恰恰相反。②用分析法证明时要注意书写格式。分析法定证“若 A 则 B ”这个命题的书写格式是:



要证命题 B 为真,只需证明 B_1 为真,从而有……

这只需证明 B_2 为真,从而又有…………

这只需证明 A 为真。

而已知 A 为真,故命题 B 必为真。

要理解上述格式中蕴含的逻辑关系。

[投影]例3 证明 通过水管放水,当流速相同时,如果水管截面(指横截面,下同)的周长相等,那么截面是圆的水管比截面是正方形的水管流量大。

[分析] 设未知数,列方程,因为当水的流速相同时,水管的流量取决于水管截面面积的大小,设截面的周长为 l ,则周长为 l 的圆的半径为 $\frac{l}{2\pi}$,截面积为 $\pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$,周长为 l 的正方形边长为 $\frac{l}{4}$,截面积为 $\left(\frac{l}{4}\right)^2$,所以本题只需证明: $\pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 > \left(\frac{l}{4}\right)^2$ 。

证明:(见课本)

设计意图 理解分析法与综合法的内在联系,说明分析法在证明不等式中的重要地位。掌握分析法证明不等式,特别重视分析法证题格式及格式中蕴含的逻辑关系。灵活掌握分析法的应用,培养学生应用数学知识解决实际问题的能力。

【课堂练习】

(教师活动)打出字幕(练习),请甲、乙两位同学板演,巡视学生的解题情况,对正确的证法给予肯定,对偏差及时纠正。点评练习中存在的问题。

(学生活动)在笔记本上完成练习,甲、乙两位同学板演。

[字幕]练习 1. 求证 $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ 。

2. 求证 $-1 \leq \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} < 1$ 。

设计意图 掌握用分析法证明不等式,反馈课堂效果,调节课堂



教学。

【分析归纳、小结解法】

(教师活动)分析归纳例题和练习的解题过程,小结用分析法证明不等式的解题方法。

(学生活动)与教师一道分析归纳,小结解题方法,并记录笔记。

1. 分析法是证明不等式的一种常用基本方法。当证题不知从何入手时,有时可以运用分析法而获得解决,特别是对于条件简单的结论复杂的题目往往更是行之有效的。

2. 用分析法证明不等式时,要正确运用不等式的性质逆找充分条件,注意分析法的证题格式。

设计意图 培养学生分析归纳问题的能力,掌握分析法证明不等式的方法。

三、小结

(教师活动)教师小结本节课所学的知识。

(学生活动)与教师一道小结,并记录笔记。

本节课主要学习了用分析法证明不等式。应用分析法证明不等式时,掌握一些常用技巧:通分、约分、多项式乘法、因式分解、去分母,两边乘方、开方等。在使用这些技巧变形时,要注意遵循不等式的性质。另外还要适当掌握指数、对数的性质、三角公式在逆推中的灵活运用。理解分析法和综合法是对立统一的两个方面。有时可以用分析法思索,而用综合法书写证明,或者分析法、综合法相结合,共同完成证明过程。

设计意图 培养学生对所学知识进行概括归纳的能力,巩固所学知识。

四、布置作业

1. 课本作业:P17.4、5。



2. 思考题 若 $a > 0$, 求证 $a^3 > a + \frac{1}{a} - 2$

3. 研究性题 已知函数 $f(x) = \tan x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若 $x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$,

且 $x_1 \neq x_2$ 。证明 $\frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)] > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 。

设计意图 思考题供学有余力的同学练习,研究性题供学生研究分析法证明有关问题。

五、课后点评

教学过程是不断发现问题、解决问题的思维过程。本节课在形成分析法证明不等式认知结构中,教师提出问题或引导学生发现问题,然后开拓学生思路,启迪学生智慧,求得问题解决。一个问题解决后,及时地提出新问题,提高学生的思维层次,逐步由特殊到一般,由具体到抽象,由表面到本质,把学生的思维步步引向深入,直到完成本节课的教学任务。总之,本节课的教学安排是让学生们的思维由问题开始,到问题深化,始终处于积极主动状态。

本节课练中有讲,讲中有练,讲练结合。在讲与练的互相作用下,使学生的思维逐步深化。教师提出的问题和例题,先由学生自己研究,然后教师分析与概括。在教师讲解中,又不断让学生练习,力求在练习中加深理解,尽量改变课堂上教师包办代替的做法。

在安排本节课教学内容时,按认识规律,由浅入深,由易及难,逐渐展开教学内容,让学生形成有序的知识结构。

作业答案:

思考题: $a^3 > a + \frac{1}{a} - 2 \Leftrightarrow a^3 > \frac{a^2 - 2a + 1}{a} \Leftrightarrow a^4 > (a - 1)^2 \Leftrightarrow a^2 > a - 1 \Leftrightarrow a^2 - a + 1 > 0$ 。因为 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, 故 $a^2 - a + 1 > 0$, 所以 $a^3 > a + \frac{1}{a} - 2$ 成立。



研究性题 令 $\tan \frac{x_1}{2} = t_1, \tan \frac{x_2}{2} = t_2$, 则

$$\frac{1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2) = \frac{(t_1 + t_2)(1 - t_1 t_2)}{(1 - t_1^2)(1 - t_2^2)}, \tan \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2},$$

故原不等式等价于

$$\frac{(t_1 + t_2)(1 - t_1 t_2)}{(1 - t_1^2)(1 - t_2^2)} = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}.$$

由已知有 $0 < t_1 < 1, 0 < t_2 < 1$. 所以上式等价于 $(1 - t_1 t_2)^2 > (1 - t_1^2)(1 - t_2^2)$, 即 $1 - 2t_1 t_2 + t_1^2 t_2^2 > 1 - t_1^2 - t_2^2 + t_1^2 t_2^2$. 所以又等价于 $(t_1 - t_2)^2 > 0$. 因为 $t_1 \neq t_2$, 上式成立, 所以原不等式成立。

【小资料】

著名不等式荟萃

在数学领域里, 不等式知识占有广阔的天地, 而一个个的重要不等式又把这片天地装点得更加丰富多彩。下面择要介绍一些著名的不等式。

一、平均不等式(均值不等式)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个实数,

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

叫做这 n 个实数的算术平均数。当这 n 个实数非负时

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

叫做这 n 个非负数的几何平均数。当这 n 个实数均为正数时,

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

叫做这 n 个正数的调和平均数。

当 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 n 个正数时, 对如下的平均不等式:



$$H \leq G \leq A$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立。

平均不等式 $A \geq G$ 是一个重要的不等式,它的应用非常广泛,如求某些函数的最大值和最小值即是其应用之一。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个正的变数,则

(1) 当积 $x_1 x_2 \cdots x_n = P$ 是定值时,和 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 有最小值,

且 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)_{\text{最小值}} = n \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = n \sqrt[n]{P}$;

(2) 当和 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$ 是定值时,积 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 有最大值,

且 $(x_1 x_2 \cdots x_n)_{\text{最大值}} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^n = \left(\frac{s}{n} \right)^n$ 。

两者都是当且仅当 n 个变数彼此相等时,即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时,才能取得最大值或最小值。

在 $A \geq G$ 中,当 $n = 2, 3$ 时,分有別

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}。$$

平均不等式 $A \geq G$ 经常用到的几个特例是(下面出现的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均表示正数):

(1) 若 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时等号成立;

(2) 若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, 则 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leq \frac{1}{n^n}$, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ 时等号成立;

(3) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立;

(4) $a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$, 当且仅当 $a_1 = 1$ 时等号成立。



二、柯西不等式(柯西——许瓦兹不等式或柯西—布尼雅可夫斯基不等式)

对任意两组实数 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ 有

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2), \text{ 其中等号当且仅当 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_n}{b_n} \text{ 时成立.}$$

柯西不等式经常用到的几个特例(下面出现的 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 都表示实数)是:

(1) 若 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1, b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$, 则 $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq 1$.

(2) $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

(3) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$

柯西不等式是又一个重要不等式,有许多应用和推广。与柯西不等式有关的竞赛题也频频出现,这充分显示了它的独特地位。

三、闵可夫斯基不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ 是两组正数, $k > 0, k \neq 1$, 则

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right]^{\frac{1}{k}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \quad (k > 1);$$

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right]^{\frac{1}{k}} \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \quad (0 < k < 1),$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立。

闵可夫斯基不等式是用某种长度度量下的三角形不等式,当 $k = 2, n = 2$ 时得平面上的三角形不等式:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

图 6-3 给出了对上式的一个直观理解。



若记 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$, 则上式为

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

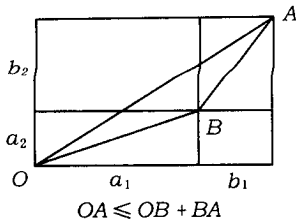


图 6-3

四、贝努利不等式

(1) 设 $x_i > -1, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2$, 且
 同号, 则 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) > 1 +$

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 。(2) 设 $x > -1$, 则

(i) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 有 $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$;

(ii) 当 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$ 时, 有 $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$, 上两式当且仅当 $x = 0$ 时等号成立。

不等式(1)的一个重要特例是

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad (x > -1, x \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)。$$

五、赫尔德不等式

已知 $a_i > b_i (1 \leq i \leq n)$ 是 $2n$ 个正实数, $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$,
 则 $a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta + \cdots + a_n^\alpha b_n^\beta \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^\alpha \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^\beta$ 。

上式中若令 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, x_i^2 = a_i, y_i^2 = b_i$, 则此赫尔德不等式即为柯西不等式。

六、契比雪夫不等式

(1) 若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, 则

$$\frac{1}{n} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n};$$



(2) 若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, 则

$$\frac{1}{n}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \leq Q$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

下面给出一个 $n = 2$ 时的契比雪夫不等式的直观理解。

如图 6-4, 矩形 $OPAQ$ 中, $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$, 显然阴影部分的矩形的面积

之和不小于空白部分的矩形的面积

之和。(这可沿图中线段 MN 向上翻折比较即知)。于是有

$$(a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) \leq 2(a_1 b_1 + a_2 b_2), \text{ 也即 } \frac{1}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2) \geq$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

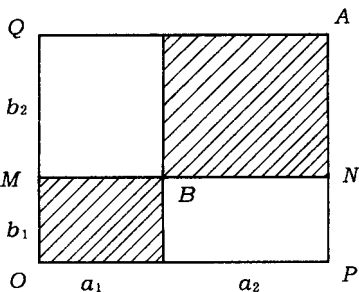


图 6-4

七、排序不等式

设有两组数 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, 则有

$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leq a_1 b_{t_1} + a_2 b_{t_2} + \cdots + a_n b_{t_n} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$, 式中的 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列, 式中的等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时成立。

以上排序不等式也可简记为:

反序和 $\leq$ 乱序和 $\leq$ 同序和

这个不等式在不等式证明中占有重要地位, 它使不少困难问题迎刃而解。

八、含有绝对值的不等式

a, b 为复数, 则



$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|,$$

左边的等号仅当 a, b 的幅角差为 π 时成立, 右边的等号仅当 a, b 的幅角相等时成立。这个不等式也称为三角形不等式, 其一般形式是 $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$,

也可记为 $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$ 。

绝对值不等式在实数的条件下用得较多。

九、琴生不等式

设 $f(x)$ 是 (a, b) 内的凸函数, 则对于 (a, b) 内任意的几个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)],$$

等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取得。

琴生不等式是丹麦数学家琴生于 1905 年到 1906 年间建立的。利用琴生不等式我们可以得到一系列不等式, 比如‘幂平均不等式’, ‘加权的琴生不等式’等等。

十、艾尔多斯——莫迪尔不等式

设 P 为 $\triangle ABC$ 内部或边界上一点, P 到三边距离分别为 PD, PE, PF , 则

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF),$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形, 且 P 为三角形中心时上式取等号。

这是用于几何问题的证明和求最大(小)值时的一个重要不等式。

以上这些著名不等式是数学家们长期致力于不等式理论研究的重要成果, 如今它们已变成了我们学习数学、研究数学、应用数学的得力工具。



《几个重要不等式的证明》教学设计

精心建构创新情境

教师在课堂教学中,应根据教学内容、课时要求,针对学生现有的心理和智力水平精心设计创新情境。以此激发学生学习情感,促进他们积极思考,使他们在迫切要求下学习,激发学生解决问题的愿望和决心。为学生自主探索,发现创新营造氛围。

如在‘几个重要不等式的证明’这一节课中,我是这样引入的:

老师 同一个圆的半径长与半弦长(弦长之半)有何大小关系?

学生 半径长 $\geq$ 半弦长。

老师 从‘形’的角度看 半径长 $\geq$ 半弦长。下面从‘数’的角度来研究同一个圆半径长与半弦长的关系。如图 1(投影仪给出)

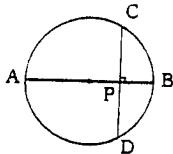


图 1

若直径 $AB \perp$ 弦 CD , 垂足为 P , 且 $AP = a, PB = b, CP = x$ 。显然 $a, b, x \in \mathbb{R}^+$, 请求出半径长 $R = ?$ 半弦长 $x = ?$ (用 a, b 的代数式表示)

学生 $R = \frac{a+b}{2}, x = \sqrt{ab}$ 。

老师 将上面得出的几何关系转化成代数关系,你能得到一个什么样的不等式呢?

本节课我采用以‘形’直观,以‘数’入微来引入,不但使学生进一



步掌握数形结合的数学思想方法,而且可以使学生以后用均值不等式时不会忘记正数这个条件。

引导学生主动参与、开拓创新

在课堂上,学生看和听的思维效率最低,写的思维效率较高,讲的思维效率最高。因此,在课堂上教师要以学生为主体,既要鼓励学生的创新热情,又要创造机会让学生多想、多讲,共同讨论,互相争鸣,还要鼓励学生大胆地把想的结果讲出来,在学生讲的过程中,教师要善于捕捉学生思维过程中的创新火花,并予以关注、指导、表扬。

通过前述问题建构的创新情境,学生的注意力很快被吸收过来,迫切地想知道由此得到的重要不等式。

学生 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 则 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时取“=”号)。

老师 谁能用学过的代数知识证明这个不等式?

老师在巡查的过程中,发现一部分学生用的是比较法,且只写出了证明后的第一步:证明:因为 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 又 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$ 往下就不知怎么办了?此时老师巧妙启发、诱导。

老师 你不是想上式 ≥ 0 吗?因为分母是大于0的,那分子应变成什么呢?

学生 将分子变成非负数,所以将分子配方。

$$\begin{aligned} \text{证明 因为 } a, b \in \mathbb{R}^+, \text{ 又 } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \\ \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{2} &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时取“=”号)。

老师 除了用作差比较法证明外,有没有同学有不同的见解。



学生 证明 因为 $(a-b)^2 \geq 0$,

所以 $a^2 + b^2 \geq 2ab$,

即 $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$,

所以 $(a+b)^2 \geq 4ab$ 。

又 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时取“=”号)。

老师 你是怎么想出来的。

学生 因为比较法常用于不等式两边是多项式的情形,而这个要证明的不等式的右边有根号, a, b 又是正数,所以我就将要证明的不等式两边平方,再往下推就得到了 $(a-b)^2 \geq 0$,这个结果我很熟悉,初中学过,就是任何一个实数的平方都是非负数,于是我就从这里开始证明。

老师 这个同学做得非常好,他不但证明了这个不等式,而且还启发我们在证明不等式时,除了用已学过的作差比较法外,还可以利用某些已经证明过的不等式和以前我们已掌握的一些重要结论来证明其它不等式。这就是执因导果的证明不等式的第二种方法——综合法。将他的想法写出来就是执果索因的证明不等式的第三种方法——分析法。

由他的证明方法,我们顺便还得到另一个重要不等式 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 则 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当且仅当 $a=b$ 时取“=”号)。

不等式②、①(投影给出)就是高中代数课本(下)第8页的定理1及推论。

老师 既然用常规的方法不好证明这个不等式,那不妨来个倒行逆施。大于等于的反面是什么呢?

学生 小于。

老师 用什么方法试一下。

学生 反证法。

证明 假设 $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$, 因为 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 所以 $(a+b)^2 < 4ab$,



即 $(a-b)^2 < 0$, 这与 $(a-b)^2 \geq 0$ 矛盾, 所以假设不成立。

则原不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立。

通过讲, 一个学生的创新性思维往往可激励其他学生进行创新性思维。这种以学生为主体, 鼓励学生积极参与的创新性导学, 使学生学习这两个重要不等式, 感到既轻松又拓展了思路。这种寓创新能力的培养于知识的教学中, 就使知识学习与创新能力的培养有机结合起来了。

学生创新思维得到升华

教师在课堂上创新性导学时, 提出的问题应具有启发性、探索性、开放性、发展性和现实性。这样既能培养学生的创新思维能力, 又能激发学生的创造性思维。如:

老师 将定理 1 引申为三个字母的情形, 不等式写出来是什么样子的?

学生 我认为类似地有: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ 。(当且仅当 $a = b = c$ 时取‘=’号)就是不知道 a 、 b 、 c 还有无其它条件限制。

学生 有, 对 a 、 b 、 c 的取值分类讨论知, 只有 a 、 b 、 $c \in \mathbb{R}^+$ 时, 此式才成立, 其它情况不一定成立。

老师 有谁能用刚学过的重要不等式来证明呢?

命题 1 如果 a 、 b 、 $c \in \mathbb{R}^+$, 那么 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ (当且仅当 $a = b = c$ 时取‘=’号)。(投影仪给出)

学生 定理 1 的左边是两项、是平方和的形式, 命题 1 的左边是三项、是立方和的形式, 我看直接用定理 1 不行。

学生 (抢着说) 可变量。

老师 要用不等式②来证明命题 1, 根据 a 、 b 、 c 的对称性, 可将命题 1 写成两两和的形式。

老师 怎样将平方变成立方呢?

学生 根据立方和公式, 将 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 右边的两个 (ab) 移一



个 (ab) 到左边,再乘以 $(a+b)$ 就行了。

老师 请一位同学将他们的想法写在黑板上。

学生 证明 因为 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 由②得 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 则 $a^2 - ab + b^2 \geq ab$, 所以 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b) = a^2b + ab^2$,

即 $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ 同理 $b^3 + c^3 \geq b^2c + bc^2$, $a^3 + c^3 \geq c^2a + ca^2$

将上面三式相加得 $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 = a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) \geq a \cdot 2bc + b \cdot 2ac + c \cdot 2ab = 6abc$

故 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ (当且仅当 $a = b = c$ 时取‘=’号)。

老师 其他同学还有没有不同的见解?

学生互相观望。

老师 刚才这位同学是用定理 1 来证明的命题 1, 能不能用定理 1 的推论来证明命题 1 呢?

学生展开讨论, 老师巡查发现, 学生受上述解法的启发把命题 1 的左边写成两两之和, 用推论, 结果三个式子右边开不尽方, 又没有联系, 往后无法推证。此时老师因势利导, 巧妙创造, 不但可以激发学生的创新意识, 培养学生的创新能力, 而且还可以培养学生的创造思维能力。

老师 想两项两项之和一起用推论, 又要开得尽方, 把命题 1 的左边写成两两之和又不行, 同学们不妨给命题 1 的左边加上一个 (abc) , 再把命题 1 的左边写成两两之和, 用推论试试。

学生 证明 因为 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 由定理 1 的推论得

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq$$

$$2\sqrt{a^3b^3} + 2\sqrt{abc^4} =$$

$$2(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{abc^4}) \geq$$



$$2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\sqrt{a^3 b^3} \sqrt{abc^4}} =$$

$$4 \sqrt{\sqrt{a^4 b^4 c^4}} = 4abc$$

所以 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ (当且仅当 $a = b = c$ 时取‘=’号)。

老师 这个不等式左右两边都是多项式,符合用比较法证明不等式的特点,可以用比较法证明,课下同学们用比较法做一下。它是课本第9页上的定理2,也是一个重要不等式。它有没有类似于定理1的推论的推论呢?有,又该怎样呢?

学生 若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (当且仅当 $a = b = c$ 时取‘=’号)。

通过启发、诱导学生,摆脱思维定势,突破旧有思想框架,加强与创新性思维密切相关的各种思维形式的训练,不仅强化了学生对概念、定理的理解掌握,而且将学生的思维提高到了一个新的高度,对培养学生的创造思维能力奠定了坚实的基础。

综上所述可以看出,在教学中一如既往地坚持创新性导学,学生就会逐渐由创新思维发展到创造思维,从而产生前所未有的思维成果。



《对数不等式》教学设计

教学目标

1. 熟练掌握解对数不等式的基本方法。
2. 培养学生根据不等式的性质及对数函数的性质将对数不等式转化成与之等价的不等式(组)的能力。
3. 强化等价转化是解不等式的基本数学思想方法,提高学生分析问题和解决问题的能力。

教学重点与难点

对数不等式的同解变形。

教学过程设计

(一)简单对数不等式的解法

例 1 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 2) > 0$ 。

师 请同学们观察例 1 中不等式的特征是什么?

生 左边是以 $\frac{1}{2}$ 为底 $x^2 - 2x - 2$ 的对数,右边是 0。

师 要想求得不等式的解集,同学们准备怎么做?

生 把原不等式化为 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 2) > \log_{\frac{1}{2}} 1$ 。因为 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 是减函数,所以得到 $x^2 - 2x - 2 < 1$ 。一元二次不等式我们是会解的。

师 刚才同学把对数不等式转化成了会解的不等式,这种把未知



转化成已知的做法是数学的基本思想方法之一。你是怎么想到把 0 变成 $\log_{\frac{1}{2}} 1$?

生 我联想到解对数方程的“同底法”。

师 解方程的理论依据是方程的同解原理不等式的转化是否也要考虑同解的因素呢?

生 刚才的解法有漏洞。对数函数的定义域是 $x \in (0, +\infty)$ 。因此应先考虑 $x^2 - 2x - 2 > 0$ 再与 $x^2 - 2x - 2 < 1$ 取交集,才能得到不等式的解集。

师 他说得很好!凡是研究函数问题,都要首先考虑函数的定义域。

由于一元一次方程和一元二次方程的解集都是有限集,通过检验就可以判定是否有增根,而不等式的解集常常是无限集,不等价变形有可能使解集扩大,然而又无法检验。因此,把对数不等式转化为代数不等式的变换必须是等价变换。

在具体运算时,应严格按照步骤和格式书写。

板书如下:

解 原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 > 0, \\ x^2 - 2x - 2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{3} \text{ 或 } x > 1 + \sqrt{3}, \\ -1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 1 - \sqrt{3} \text{ 或 } 1 + \sqrt{3} < x < 3.$$

所以原不等式的解集是 $(-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$ 。

师 例 1 提供了解对数不等式的基本方法。

例 2 解不等式 $\log_3(x+2) + \log_{\frac{1}{3}}(6-x+x^2) + 1 > 0$ 。

师 请同学观察例 2 中不等式的特征,提出解题意见。

生 不等式中的对数底数不同。可以用换底公式把不等式左侧化成同底的对数。再按例 1 的方法求解。



师 把不等式中的对数化为以 3 为底还是以 $\frac{1}{3}$ 为底?

生 化为以 3 为底的对数,这样 1 可以化成 $\log_3 3$,在使用对数运算法则时更加简便一些。

师 考虑的很好。这样原不等式可以化为 $\log_3(x+2) - \log_3(6-x+x^2) + \log_3 3 > 0$, 下一步怎么办?

生甲 根据对数运算法则可以把不等式化为 $\log_3 \frac{3(x+2)}{6-x+x^2} > \log_3 1$ 。

生乙 原不等式可以化为 $\log_3 3(x+2) > \log_3(6-x+x^2)$ 在后面的运算中可以避免解分式不等式。

师 考虑的很周密。为了保证不等式解集的准确性,同学们在把对数不等式转化成代数不等式的时候,一定要采取适当的方法使后面的运算顺畅,解不等式的过程愈简捷,准确率就愈高。

解题过程如下:

解 原不等式可分为

$$\log_3(x+2) + \log_3 3 > \log_3(6-x+x^2)。$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0, \\ 6-x+x^2 > 0, \\ 3(x+2) > 6-x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -2 \text{ 或 } x > 3, \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4。$$

所以原不等式的解集为 $(3, 4)$ 。

师 解对数不等式的关键步骤是考虑对数函数的定义域。

(二) 运用数学思想方法解对数不等式

师 如果把例 1 中的对数的底数换成 a ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 请同学思考,不等式该怎样求解?

生 根据对数函数的性质,分别对 $a > 1$ 或 $0 < a < 1$ 来进行讨论。

例 3 解不等式 $\log_a(x^2-4) > \log_a(x+2)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)。



解 当 $a > 1$ 时,

$$\text{原不等式} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x^2 - 4 > x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ 或 } x > 2, \\ x > -2, \\ x < -2 \text{ 或 } x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

当 $0 < a < 1$ 时,

$$\text{原不等式} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x^2 - 4 < x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ 或 } x > 2, \\ x > -2, \\ -2 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

因此当 $a > 1$ 时,原不等式解集为 $(3, +\infty)$; 当 $0 < a < 1$ 时,原不等式解集为 $(2, 3)$ 。

师 例 3 中运用了分类讨论的数学思想方法。注意由于 a 的取值范围不同,所以最后的解集不能写成并集的形式。

例 4 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x + 4\log_x 2 > 0$ 。

师 要解例 4 显然需先把不等式左侧化为同底的对数,请同学考虑对哪个对数使用换底公式?

生 把 $\log_x 2$ 化为 $\frac{\log_{\frac{1}{2}} 2}{\log_{\frac{1}{2}} x}$, 这时未知数就在真数的位置上,原不等

式可以化为 $\log_{\frac{1}{2}} x - \frac{4}{\log_{\frac{1}{2}} x} > 0$ 。再令 $\mu = \log_{\frac{1}{2}} x$, 则原不等式化为 μ

$-\frac{4}{\mu} > 0$, 这时再用解分式不等式的方法求解集。

师 在解不等式时,换元法是很常用的数学方法。符合使运算简便易行的原则。同学们不妨一试。

解法如下:

解 原不等式可分为 $\log_{\frac{1}{2}} x - \frac{4}{\log_{\frac{1}{2}} x} > 0$ 。

令 $\mu = \log_{\frac{1}{2}} x$, 则原不等式化为



$$\mu - \frac{4}{\mu} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\mu+2)(\mu-2)}{\mu} > 0 \Leftrightarrow -2 < \mu < 0 \text{ 或 } \mu > 2.$$

所以 $-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 0$ 或 $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ 。解得 $1 < x < 4$ 或 $0 < x < \frac{1}{4}$ 。

所以原不等式的解集是 $(0, \frac{1}{4}) \cup (1, 4)$ 。

(三) 本课小结

1. 解对数不等式的关键是正确地进行等价转化。要熟练掌握解一般对数不等式的基本方法。如：

当 $a > 1$ 时, $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$;

当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$ 。等等。

2. 等价转化的理论根据是对数的定义,以及对数函数的单调性。

3. 要注意数学思想方法的运用,如:分类讨论、换元、化归转化等等,提高解题速度和解题的准确率。

(四) 补充作业

1. 解下列不等式：

$$(1) \lg(x^2 - 3x - 4) \geq \lg(2x + 10);$$

$$(2) \log_{0.1}(x^2 - 2x - 2) > 0;$$

$$(3) \log_a(x^2 - x) \geq \log_a(x + 1), (a \text{ 为常数且 } a > 1);$$

$$(4) \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) + \log_{\frac{1}{2}}(6 - x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 12;$$

$$(5) 2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 7\log_{\frac{1}{2}} x + 3 \leq 0;$$

$$(6) 2 + \log_{\frac{1}{2}}(5 - x) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} > 0.$$

2. * 解关于 x 的不等式：

$$(7) \log_a(1 - \frac{1}{x}) > 1;$$

$$(8) \log_a(x^2 - x - 2) > \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{4x - 6} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

* 可根据生实际情况,酌情处理。



作业的答案或提示

(1) 原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 3 > 0, \\ 2x + 10 > 0, \\ x^2 - 3x - 4 \geq 2x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ 或 } x > 4, \\ x > -5, \\ x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -5 < x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 7;$$

(2) 原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 > 0, \\ x^2 - 2x - 2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{2} \text{ 或 } x > 1 + \sqrt{2}, \\ -1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 1 - \sqrt{2} \text{ 或 } 1 + \sqrt{2} < x < 3;$$

(3) 当 $a > 1$ 时, 原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x^2 - x \geq x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ 或 } x > 1, \\ x > -1, \\ x \leq 1 - \sqrt{2} \text{ 或 } x \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x \leq 1 + \sqrt{2} \text{ 或 } x \geq 1 + \sqrt{2};$$

(4) 原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0, \\ 6 - x > 0, \\ (x + 1)(6 - x) \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2 \text{ 或 } 3 \leq x < 6;$$

(5) 令 $\mu = \log_{\frac{1}{2}} x$, 则原不等式化为 $2\mu^2 + 7\mu + 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow -3 \leq \mu \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} 8 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq x \leq 8;$$

(6) 原不等式

$$\Leftrightarrow 2 - \log_2(5 - x) - \log_2 x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x > 0, \\ x > 0, \\ x(5 - x) < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ 或 } 4 < x < 5.$$



(7) 当 $a > 1$ 时, 原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} > 0, \\ 1 - \frac{1}{x} > a \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} > a \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1 - a. \quad ①$$

由 $a > 1$ 知, $1 - a < 0$, 所以①的解为 $\frac{1}{1-a} < \frac{1}{x} < 1$ 。

由 $0 < a < 1$ 知, 原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} > 0, \\ 1 - \frac{1}{x} < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} < 1, \\ \frac{1}{x} > 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow 1 - a < \frac{1}{x} < 1. \quad ②$$

由 $0 < a < 1$ 知, $1 - a > 0$, 故②的解为 $1 < x < \frac{1}{1-a}$ 。

因此当 $a > 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{1-a} < x < 0\right\}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid 1 < x < \frac{1}{1-a}\right\}$ 。

(8) 原不等式 $\Leftrightarrow \log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(4x - 6)$ 。①

当 $a > 1$ 时,

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 4x - 6 > 0, \\ x^2 - x - 2 > 4x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4。$$

当 $0 < a < 1$ 时,

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 4x - 6 > 0, \\ x^2 - x - 2 < 4x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 4。$$

因此当 $a > 1$ 时, 解集为 $(4, +\infty)$; 当 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $(2, 4)$ 。

课堂教学设计说明:

1. 因势利导, 由‘误’到悟



解对数不等式的关键是合理进行等价转化,但学生的思维不会一步到位,需要有一个循序渐进的过程。因此,我在例1的提问中,没有做过多的启发,而是由学生自己发现错误,产生认知冲突,从而得到启悟,正确地解决了问题。例4的处理也是这样,学生出现的错误是很常见的,由此引起学生的争论,教师及时地进行正确引导,使学生在辩悟中留下深刻的印象。

2. 层层深入,引发兴趣

数学的灵感来自于分析、思考的过程,掌握解对数不等式的基本方法,对学生来说并不困难,因而在例题的配备上一定要有梯度,让学生有步步登高的感觉,这样才能引导学生的学习兴趣,从而产生积极的思维。在分析思考的过程中产生顿悟。

不同地区和学校的教师可根据学生的实际情况,调整例题,也可以从补充作业中挑选题目,重新组合本课的例题和练习题。

3. 渗透“思想”,提高能力

解对数不等式的过程,始终贯穿着等价转化及函数的思想,而分类讨论和换元法的使用会使复杂问题简单化,在教学过程中,注意总结和渗透数学思想方法的作用及使用规律,可以使学生的思维水平及运算能力不断提高。



《含有字母系数的不等式的解法》 教学设计

教学目标

1. 初步理解含有字母系数不等式求解的基本思路,并让学生了解使用分类讨论方法的起因。
2. 培养学生分析、概括能力及运算能力。
3. 提高学生思维的严谨性和深刻性。

教学重点与难点

教学重点 含有字母系数不等式的求解基本模式的形成。

教学难点 分类讨论方法的正确使用。

教学过程设计

(一)引入课题

师 我们已经研究了几类基本不等式的解法,今天研究在系数中含有参变数即含有字母系数的不等式的解法。

(板书:含有字母系数的不等式的解法)

(二)讲解新课

师 先从一个具体的例子说起。

(板书)

例 1 解关于 x 的不等式。

(1) $ax < 4$ 。



师 先请同学们来试解一解。

生甲 由原不等式得 $x < \frac{4}{a}$ 。

生乙 当 $a > 0$ 时,由原不等式得 $x < \frac{4}{a}$ 。

当 $a < 0$ 时,由原不等式得 $x > \frac{4}{a}$ 。

师 下面请同学们讨论一下,以上两位同学做法哪个正确。

生 两种解法都有问题,甲没有讨论是不对的,乙虽然讨论了,但讨论的情况不全,所以都有问题。

师 为什么一定要讨论呢?要讨论又该怎样讨论呢?

生 因为不知道 a 的正负,所以除以 a 后不知道不等号方向是否发生改变,因此需要讨论。

师 如果能把问题说得再透一点儿,从根源上讲,解关于 x 的不等式即求出 $x < (>) m$ 的一个不等式,因此需对所给不等式进行变换,而变换为保证等价必须依据不等式的性质,就这个不等式而言,应根据不等式哪条性质呢?

生 当 $c > 0$ 时, $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ 当 $c < 0$ 时, $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ 。

师 由此要解出 x 就必须看 a 的符号,对于字母 a 来说,它的符号有几种可能呢?

生 有三种可能,大于零,等于零,小于零。

师 此题需对 a 的符号进行讨论,且应分为三种情况进行讨论,显然解法二的错误在于讨论不全面,经过我们的共同讨论,正确的解法应该有了,找个同学试说一下。

生 当 $a > 0$ 时,原不等式解为 $x < \frac{4}{a}$;

当 $a < 0$ 时,原不等式解为 $x > \frac{4}{a}$;

当 $a = 0$ 时,原不等式解为 $x \in \mathbb{R}$ 。



师 对于这种类型不等式有了初步了解,下面请看第(2)小题。

(板书) (2) $mx > n$ 。

(请学生思考片刻,并提示注意字母 n 带来的变化)

生 当 $m > 0$ 时,原不等式的解为 $x > \frac{n}{m}$;

当 $m < 0$ 时,原不等式的解为 $x < \frac{n}{m}$;

当 $m = 0$ 时,原不等式的解不确定。

师 不确定是什么意思。

生 解的情况由 n 来决定,具体说在 $m = 0$ 前提下,原不等式变形为 $0 \cdot x > n$ 。(当 $n > 0$ 时,原不等式无解;当 $n = 0$ 时,原不等式无解;当 $n < 0$ 时,原不等式的解为 $x \in \mathbb{R}$ 。)

师 对于前半部分的讨论,理由同第(1)题是一样的,把它称为一级讨论,对于后半部分的讨论是在一级讨论某种情况下的讨论,称为二级讨论。讨论的原因是此时不等式需对 0 和 n 的大小进行比较,自然需要研究 n 的符号。即分三种情况进行讨论,下面找一个同学把此题完整地解出来。

生 当 $m > 0$ 时,原不等式解为 $x > \frac{n}{m}$; 当 $m < 0$ 时,原不等式解为 $x < \frac{n}{m}$; 当 $m = 0, n \geq 0$ 时,原不等式无解; 当 $m = 0, n < 0$ 时,原不等式解为 $x \in \mathbb{R}$ 。

师 形如 $ax \geq b$ 的不等式是含有字母系数的关于 x 的不等式的基本模式,解决这类问题分类讨论是不可少的方法,使用这种方法要注意使用的起因,此题使用分类讨论的起因是对不等式作等价变换时,正确运用不等式的性质而引起的讨论。

对于含有字母系数的不等式在求解中还会遇到什么样的问题,一起看例 2。

(板书)



例2 解关于 x 的不等式: $x^2 - (a + a^2)x + a^3 > 0$ 。

(给学生片刻思考,稍作研究再让学生说想法)

师 拿到此题有什么想法?

生 这是一个关于 x 的一元二次不等式,求解的方法一般是先找到相应的一元二次方程的两个根,再利用二次函数图象找出是两根间还是两根外。

师 相应的方程是 $x^2 - (a^2 + a)x + a^3 = 0$,它的两个根是什么呢?

生 是 a 和 a^2 。

师 可以得到不等式的解吗?

生 是 $x > a^2$ 或 $x < a$ 。

师 答案有什么问题吗?

生 有问题,不一定 a^2 比 a 大,应对 a^2 和 a 的大小关系进行讨论。

师 这一点是解决这个题目的关键。由于需要对相应方程两根的大小作比较,而需进行分类讨论。具体应怎样讨论。

生 讨论 a^2 和 a 的大小,可以利用比较法转化为 a^2 与 a 的差与 0 的大小比较。因为 $a^2 - a = a(a - 1)$,故 $a(a - 1) > 0 \Leftrightarrow a < 0$ 或 $a > 1 \Leftrightarrow a^2 > a$,即可判断两个根的大小关系。

师 根据刚才的讨论,把题目完整地解出来。

生 解 原不等式 $\Leftrightarrow (x - a)(x - a^2) > 0$ 。

当 $a < 0$ 或 $a > 1$ 时, $a^2 > a$,原不等式解集为 $\{x < a \text{ 或 } x > a^2\}$;
当 $0 < a < 1$ 时, $a^2 < a$,原不等式解集为 $\{x | x < a^2 \text{ 或 } x > a\}$ 。

当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, $a^2 = a$,原不等式解集为 $\{x | x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq a\}$ 。

师 对于这种类型的不等式也常常用到分类讨论这种方法,但是使用的原因与例1是不同的,它是由于对不等式作等价变换时,由相应方程的根的大小比较而引起的讨论。当然这类关于 x 的不等式



的一般情形应是 $a(x-b)(x-c) > 0$ 。至于它的求解问题,在例 2 的基础上,让同学们自己课下解决。

以上两个例题都属于含有字母系数的不等式的基本模式,通过它们的求解,主要了解分类讨论的这种方法在求解过程中怎样适时、适当的使用。

对这件事是否理解了,请同学们自己做几个题目。

巩固练习

(板书)

练习 解关于 x 的不等式:

(1) $a(x-a)(x+2a) > 0$; (2) $\log_a(x^2-x-2) > \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{4x-6}$ ($a > 0, a \neq 1$)。

(先让全体学生在笔记本上完成,教师巡视待学生基本完成,根据学生完成情况,有针对性选择两名学生,将自己的答案写在黑板上)

(板书)

(1) 解: 当 $a = 0$ 时,原不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $a > 0$ 时,原不等式 $\Leftrightarrow (x-a)(x+2a) > 0$, 且 $a > -2a$, 故原不等式解集为 $\{x \mid x < -2a \text{ 或 } x > a\}$;

当 $a < 0$ 时,原不等式 $\Leftrightarrow (x-a)(x+2a) < 0$ 且 $-2a > a$, 故原不等式解集为 $\{x \mid a < x < -2a\}$ 。

(2) 解: 原不等式 $\Leftrightarrow \log_a(x^2-x-2) > \log_a(4x-6)$ 。

当 $a > 1$ 时,原不等式 $\Leftrightarrow x^2-x-2 > 4x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+4 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \text{ 或 } x < 1$;

当 $0 < a < 1$ 时,原不等式 $\Leftrightarrow x^2-x-2 < 4x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$ 。

所以原不等式解集为 $(4, +\infty) \cup (-\infty, 1) \cup (1, 4)$ 。



师:下面看看黑板上两位同学的表述有什么问题,先看第(1)题。

(经过学生们共同议论,一致认为第(1)小题表述没有问题,此时教师再对此题关键部分作出小结)

师:解决此题的关键,一是对 x 前面系数 a 的讨论,二是相应方程两个根 a 和 $-2a$ 的大小的讨论,而这二者的讨论最终都统一为 a 与 0 的大小关系的讨论。故此题应分为三种情况进行讨论,且当 a 的符号确定之后,不等式可等价化简为 $(x-b)(x-c) > 0$ 的形式进行求解。

下面再看第(2)小题的表述有什么问题。

生:对数不等式的求解必须先保证真数有意义,所以实际应该解不等式组即

$$\begin{aligned} \text{当 } a > 1 \text{ 时, } & \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 4x - 6 > 0, \\ x^2 - x - 2 > 4x - 6; \end{cases} \\ \text{当 } 0 > a < 1 \text{ 时, } & \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 4x - 6 > 0, \\ x^2 - x - 2 < 4x - 6. \end{cases} \end{aligned}$$

师:好,这一点非常重要,在解对数不等式时,应首先保证题目中的对数式有意义,即真数大于零且底数大于零不等于1,这一点我们在解对数不等式时已经强调过了,今天再次重申这一点,希望引起大家重视。

如果这样求解不等式,解应该是什么呢?

$$\begin{aligned} \text{生: 当 } a > 1 \text{ 时原不等式} & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 4x - 6 > 0, \\ x^2 - x - 2 > 4x - 6; \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ x > 4 \text{ 或 } x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4. \end{aligned}$$



$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, 原不等式} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 4x - 6 > 0, \\ x^2 - x - 2 < 4x - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \text{ 或 } x < -1, \\ 1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 4.$$

师 在具体求解过程中,注意到根据不等式性质,可以等价省去一个不等式以简化计算过程,这一点很好。

此外,这个题目它也用到了分类讨论,这里使用的原因是什么呢?

生 解对数不等式需将其转化为代数不等式,需利用对数函数 $f(x) = \log_a x$ 的增减性,其增减性是以 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 加以区分的。因此需讨论,且讨论 a 的两种情况即可。

师 这个题目也同样用到了分类讨论这种方法,但使用的原因与以前有所不同,它是由于对不等式作等价变换时,由相应函数单调性的可能变化而引起的,这是我们应该引起注意并加以总结的。

除此之外在整个求解过程中还有没有问题?

(让学生议论一下,稍作停顿)

生 我觉得最后结果不应该把两种情况的结论并在一起。

师 能说说理由吗?

生 这个题目的讨论是对字母 a 展开的,相当于代表了无数多个不等式的求解问题,所以不同不等式的解不应合并在一起。因此最后结论不能并。

师 这一点谈得很好,也最为重要,对字母 a 的讨论与对 x 的讨论是完全不同的,对字母 a 的讨论,由于 a 的变化,将代表无数多个不等式, a 取不同的值如 $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3$, 此题将代表四个不同的不等式,由于对数函数性质可以将它们分成两类来解决,所以不能将它们解集并在一起,但对 x 的讨论是对一个题目分成几部分来研究。



每一部分都是这个题目解的一部分,因此最终将每一部分的解并在一起才是此题的解。

为了便于对比,不妨举个简单的例子:

(3) 解不等式 $\log_{(x-1)}(x+1) > 0$ 。

师 这个不等式应该怎样解呢?

生 原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 1, \\ x+1 > 0, \\ x+1 > 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 0 < x-1 < 1, \\ x+1 > 0, \\ x+1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \text{ 或 } 1 < x < 2$$

$$x \in \emptyset \Leftrightarrow x > 2.$$

(在学生叙述过程中,要求能说出每一个不等式的由来如 $x+1 > 0$ 为保证真数有意义,而对 $x-1$ 来说应在大于零且不等于 1 的范围内进行讨论。分为 $x-1 > 1$ 和 $0 < x-1 < 1$ 两种情况)

师 这个题目同样也用到了分类讨论这种方法,但它是对未知数 x 进行讨论,虽然使用的起因是相同的(都是由函数单调性的可能变化引起),但与对字母系数的讨论在处理上是有区别的。

经过我们研究讨论第(2)题的最终结果不应取并,应分别作答,即应写成。

(板书)接前面过程后给出最后结果:

当 $a > 1$ 时,原不等式解集为 $(4, +\infty)$; 当 $0 < a < 1$ 时,原不等式解集为 $(2, 4)$ 。

(四)小结

师:(1)通过以上几个题目,对一般的含字母系数的不等式的求解思路有了基本了解。其中对这个字母的可能取值作分类讨论需作好充分的准备。

(2)这种准备体现为对分类讨论的使用需解决好①何时讨论,②讨论什么,③怎么讨论,这几个重要环节。

(3)何时讨论也就是为什么要讨论这件事主要是解决引起讨论



的几种重要原因。

(4) 对分类讨论这种方法认识清楚了,才能在给定不等式的等价变换过程中适时、适当地使用,才能准确有效地解决更为复杂的含有字母系数的不等式或不等式组。

(五) 布置作业

1. 解关于 x 的不等式: $(a^2 - 1)x > (a^2 + 3a + 2)(b - 3)$ 。

2. 解关于 x 的不等式: $a^{x^2+x-2} < \left(\frac{1}{a}\right)^{1-2x}$ ($a > 0, a \neq 1$)。

3. 解关于 x 的不等式 $\log_a \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 1$ ($a > 0, a \neq 1$)。

习题略解:

1. 原不等式 $\Leftrightarrow (a+1)(a-1)x > (a+1)(a+2)(b-3)$ 。

当 $a < -1$ 或 $a > 1$ 时, 原不等式解集为

$$\left\{x \mid x > \frac{(a+2)(b-3)}{a-1}\right\};$$

当 $-1 < a < 1$ 时, 原不等式解集为 $\left\{x \mid x < \frac{(a+2)(b-3)}{a-1}\right\};$

当 $a = -1, b \in \mathbb{R}$ 或 $a = 1$ 且 $b \geq 3$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $a = 1$ 且 $b < 3$ 时, 原不等式解集为 $\mathbb{R}$ 。

2. 当 $a > 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\};$

当 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}。$

3. 当 $a > 1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{1-a} < x < 0\right\}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 解集为

$$\left\{x \mid 1 < x < \frac{1}{1-a}\right\}。$$

课堂教学设计说明:

这节课是对不等式求解综合深入研究的课题之一。因此这节课教学设计时重在对各类不等式求解过程中一些重要思想方法的应用



和理解。

含有字母系数的不等式的求解,分类讨论这种思想方法是必不可少的。很多学生只是知道遇到这类不等式要讨论,而不了解讨论的原因。因此在使用时也是盲目的。如解关于 x 的不等式 $3 - 2a^2x > x$ 对此不等式进行等价变形后得到 $(2a^2 + 1)x < 3$ 。由于 $2a^2 + 1$ 恒为正,根据不等式的性质可得 $x < \frac{3}{2a^2 + 1}$ 即为不等式的解。

而有些学生却盲目对 $2a^2 + 1$ 或对 a 的符号进行讨论,出现不应有的错误。出现这些问题的症结在于对含有字母系数的不等式求解基本思路没掌握,对分类讨论这种方法使用的原因不清楚。所以只有从根本上解决求解思路,对分类讨论方法的使用做全面细致深入的研究才能使学生能得心应手进行求解,这也是这节课最核心的内容,为此在例题选择上重在突出思路和方法,而不在于题目有多难,讨论有多复杂。例1和例2就都选择了含有字母系数的不等式中最基本的模式,这样可以尽量减少干扰因素,以突出主要矛盾。

本节课的练习在安排上有两层含义:一方面巩固前面所学内容,发现问题,解决问题;另一方面也是对分类讨论这种思想方法的深化,是新课的延续,特别是第(2)个练习题,在解答中,不怕学生出错,而是通过分析学生的错误,以巩固对数不等式求解方法,发现分类讨论方法使用的原因,对比此法在不同场合下使用,加深对此法的理解,讲与练自然结合,练中有讲,讲中有练。在讲与练的相互作用下使学生的思维逐步深化。

一节课的教学内容,带给学生的不仅仅是一点方法和技巧,更重要的是思维能力的训练与提高,教师应把它作为主导思想贯穿于每一节课的教学设计之中。



《用平均值定理求某些问题的最值》 教学设计

教学目标

1. 掌握平均值定理并能初步应用它求某些函数的最值。
2. 通过利用平均值定理解决一些有关问题,进一步培养学生的观察能力、分析问题解决问题的能力。
3. 培养学生转化的数学思想。
4. 通过理解平均值定理的使用条件,学生进一步认识现实世界中的量不等是普遍的,相等是局部的,对学生进行辩证唯物主义教育。

教学重点与难点

重点 用平均值定理求某些函数的最值及解决有关的应用问题。

难点 注意定理的使用条件,正确地应用平均值定理。

教学过程设计

一、引入新课

师 对于某个给出的函数,要问这个函数在指定的区间上有没有最值及如何求出是我们经常遇到的数学问题。解决这类问题在初等数学的范围内并没有通用的方法,只能解决一些特殊函数的最值问题。因此,同学们要随着知识的增加,不断地总结一些常用方法。



前面,我们学习了不等式的性质、证明。不等式与函数的最值有无联系呢?举个例子。

生甲 有联系。如 $(x+1)^2 \geq 0$ 这个不等式就给出了函数 $y = (x+1)^2$ 在定义域 $\mathbb{R}$ 上的最小值 0。

生乙 有联系。如求函数 $y = \frac{x+2}{2x^2+3x+6}$ 的最值,可以用判别式法。构造 $\Delta \geq 0$ 这个不等式达到了求函数最值的目的。

师 这两个同学所举的例子说明不等式既是描述函数最值问题的数学语言,又是求解函数最值的有力工具。

其实,不等式刻画的是数量之间的大小关系和变量的变化范围,而函数的最值则是通过数量大小的比较所反映的变量在一定范围内变动时所能达到的界值。因此,它们之间有密切联系。

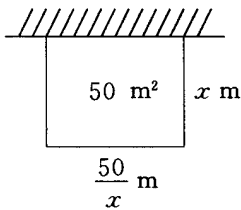
让我们来看一个实际问题。(出示投影)

(投影片 1) 引例 用篱笆围一块面积为 50m^2 的一边靠墙的矩形篱笆墙,问篱笆墙三边分别长多少米时,所用篱笆最省?此时,篱笆墙长为多少米?

师 这是一个实际问题,问题的实质是什么?可抽象成怎样的数学问题?

生 问题的实质是求篱笆墙三边分别长多少米时,其和的最小值。

如果设矩形宽为 $x\text{m}$,那么由已知可得矩形的长为 $\frac{50}{x}\text{m}$ 。再设篱笆墙长为 $y\text{m}$,把这个实际



问题抽象成数学问题是 求函数 $y = 2x + \frac{50}{x} (x > 0)$ 的最小值并求取得最值时相应的 x 值。

师 很好!这个函数的最值用我们以前学过的判别式法可以求出吗?

生 点头示意。



师:它是最佳解法吗?

除了构造不等式 $\triangle \geq 0$ 求出此函数的最值以外,同学们能否利用不等式的有关知识构造出其它不等式呢?仔细观察这个函数。

生:用平均值不等式的变形形式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 就可以求出这个函数的最小值。

$$y = 2x + \frac{50}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{50}{x}} = 2\sqrt{100} = 20。$$

此函数的最小值为 20。

师:使用平均值不等式变形形式有条件限制吗?

生:有。要求 $a, b \in \mathbb{R}_+$, 本题中 $x > 0, \frac{50}{x} > 0$, 满足条件。

师:此函数何时取得最小值?

生:当 $2x = \frac{50}{x}$, 即 $x = 5$ 时, 这个函数取得最小值。

师:此时,问题解决了么?

生:应该把个数学问题还原成实际问题。篱笆墙三边分别长 $5m, 10m, 5m$ 时, 所用篱笆最省。此时, 篱笆墙长 $20m$ 。

师:回顾解题过程, 求得这个函数最值的关键是什么?

生: $2x > 0, \frac{50}{x} > 0$ 且 $2x \cdot \frac{50}{x}$ 是一个常数。

师:问题的关键抓得很准。怎样求得函数取得最小值时相应的 x 值呢?

生:当 $2x = \frac{50}{x}$ 时, 函数取得最小值。

师:假如满足 $2x = \frac{50}{x}$ 的 x 值不在函数的定义域内, 如函数 $y = 2x + \frac{50}{x} (x \geq 6)$, 当 $2x = \frac{50}{x}$ 时, 函数能取得最小值吗?

生:只有在 $2x > 0, \frac{50}{x} > 0$ 且 $2x \cdot \frac{50}{x}$ 为常数的前提下, 当 $2x = \frac{50}{x}$ 且



求得的 x 在函数的定义域内,函数取得最小值。

师 概括得很好,这正是这节课我们要研究的用平均值定理求某些函数的最值。(板书课题)

二、推证定理

师:(板书)平均值定理:

若 $a, b \in \mathbb{R}_+$, 则 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 取‘ $=$ ’号;

若 $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, 当且仅当 $a = b = c$ 时, 取‘ $=$ ’号。

师 我们把平均值定理改写成求某些函数(如引例中的函数)最值的命题。

(板书)已知两个正变数的积是一个常数。那么当且仅当这两个数相等时,它们的和取最小值。

师 类似地,你能否说出求某些函数最大值的命题呢?

生 已知两个正变数的和是一个常数,那么当且仅当这两个数相等时,它们的积取最大值。(教师板书)

师:下面请同学们证明这个命题。

生 设这两个正变数为 x 和 y 。

如果 $xy = P$ (常数),那么由两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数,得 $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{P}$ 。

当且仅当 $x = y$ 时,有 $x + y = 2\sqrt{P}$ 。

这就是说,当 $x = y$ 时, $x + y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$ 。

如果 $x + y = S$ (常数),那么由两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数,得 $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{S}{2}$, 即 $xy \leq \frac{S^2}{4}$ 。

当且仅当 $x = y$ 时,有 $xy = \frac{S^2}{4}$ 。这就是说,当 $x = y$ 时, xy 有最



大值 $\frac{S^2}{4}$ 。

师 既然已经证明了上述命题为真命题,那么我们把它叫做定理 1。类似地,由三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数,谁能说出求某些函数最值的定理 2 呢?

生 定理 2 已知三个正变数的积(和)是一个常数,那么当且仅当这三个数相等时,它们的和(积)取得小(大)值。(投影片 2)

师 利用这两个定理,可以解决许多定积或定和条件下,若干个正变量的和或积的极值问题。但是,必须注意使用定理的条件,要注意哪几个条件?

生 注意三个条件。(1)这两个或三个变数必须是正变数;(2)当它们的和是定值时,其积取得最大值;当它们的积是定值时,其和取最小值;(3)当且仅当这两个或三个数相等时,取“=”号。

师 很好。看来从定理中也反映出现实世界中的量不等是普遍的,绝对的,而相等是局部的,相对的,必须同时满足“正数”、“定值”、“相等”三个条件,才能求得此类函数的最值。

三、应用定理

例 1(板书) 求函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ ($x \geq 0$) 的最小值,并求相应的 x 值。

师 求两项和的最小值,可以考虑试用定理 1。但是,此函数具备使用定理 1 的条件吗?

生 不具备。因为这个函数中的两项不都是正数且 x 与 $\frac{1}{x+1}$ 的积也不是常数。

师 能否创造条件?

(学生讨论)



生甲 把函数变形为 $y = (x+1) + \frac{1}{x+1} - 1$, 这时, 正数 $x+1$, $\frac{1}{x+1}$ 的积是常数 1, 可以用定理 1 求得这个函数的最小值。

师: 使用定理 1 的条件都具备了吗?

生乙: 当且仅当 $x+1 = \frac{1}{x+1}$ 时, 这个函数能够取得最小值。

师: 是只要求出方程 $x+1 = \frac{1}{x+1}$ 的解 $x=0$ 就能保证此函数能够取得最小值吗?

生丙: 还要注意解出的 $x=0$ 是否属于函数的定义域。

师: 这一点也很重要, 不容忽视。

(教师板演, 学生练习, 共同完成解题过程)

解: $y = x + \frac{1}{x+1} = (x+1) + \frac{1}{x+1} - 1$ 。

由 $x \geq 0$, 知 $x+1 > 0$, $\frac{1}{x+1} > 0$, 且 $(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = 1$ (常数)

因此由定理 1 得: 当且仅当 $x+1 = \frac{1}{x+1}$, 即 $x=0$ 时, $y = x + \frac{1}{x+1}$ ($x \geq 0$) 有最小值, 最小值是 $y = 2\sqrt{1} - 1 = 1$ 。

师: 也可以书写成如下格式。(投影片 3)

解: $y = x + \frac{1}{x+1} = (x+1) + \frac{1}{x+1} - 1$ 。

由 $x \geq 0$, 知 $x+1 > 0$, $\frac{1}{x+1} > 0$ 。所以

$$y = (x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}} - 1 = 1,$$

当且仅当 $x+1 = \frac{1}{x+1}$, 即 $x=0$ 时, $y = x + \frac{1}{x+1}$ ($x \geq 0$) 取得最小值, 最小值是 1。



师 回顾解题过程,同学们根据此函数的特点,通过恰当的恒等变形——分拆变量,确定了符合定理 1 条件的正变量 $(x+1)$ 与 $\frac{1}{x+1}$,把问题转化为定积条件下的两个正变量的和的最小值问题,使问题得以解决。下面请大家再解决一个问题。

例 2 设 $0 < x < \frac{5}{2}$,求 x 为何值时,函数 $y = x(5-2x)^2$ 有最大值?最大值是多少?(投影片 4)

师 这是一个什么问题?

生 求三个正变量积的最大值。

师 这三个正变量的和为定值吗?若不为定值,怎样转化?

(学生讨论)

生 虽然 $x + (5-2x) + (5-2x) \neq$ 常数,但是要保证 $5-2x = 5-2x$,因此 $5-2x$ 不宜再变,要使这三个正变量和为定值。只需考虑 $4x + (5-2x) + (5-2x) =$ 常数。

师 这个想法很好!是必不可少的思维过程。这样,原函数的变形方向就非常明确了。

生 原函数变形为 $y = \frac{1}{4} [4x(5-2x)^2]$ 。

师 具备使用定理 2 的条件了吗?

生 具备了。 $4x > 0, 5-2x > 0$ 且 $4x + (5-2x) + (5-2x) = 10$, 还有当 $4x = 5-2x$ 时,求得的 x 值在函数的定义域内。

师 回答得很全面。我们要学会善于全方位地把握问题,培养自己良好的思维品质。

(学生完成解答,教师巡视并用实物投影展示学生甲的解题过程、讲评)

师 由例 1、例 2 可以看出,用平均值定理可以解决哪类函数的最值问题?

生 解决定积或定和条件下的两个或三个正变量的和或积的最



值问题。

师:多数情况下,题设中具备使用定理的条件并未直接给出,怎样促成使用定理的三个条件,选配好正变量?

生:通过恒等变形,如例1中使用的拆分变量的方法,例2中使用的匹配系数的方法等,促成使用定理的三个条件。

师:当然,这些方法都是服务于使用定理的,正确使用定理解决问题是关键。下面请同学们观察两个题目的解法是否正确?

四、易错解法讨论

(投影片5) 例3 求函数 $y = 1 - 2x - \frac{3}{x}$ 的最值,下面解法是否正确?为什么?

$$\text{解: } y = 1 - 2x - \frac{3}{x} = 1 - (2x + \frac{3}{x}).$$

$$\text{因 } 2x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{3}{x}} \leq 2\sqrt{6}, \text{ 则 } y = 1 - 2\sqrt{6}, \text{ 所以 } y_{\min} = 1 - 2\sqrt{6}.$$

(学生讨论)

生甲:解法错误。因为在不能断定 $2x$ 与 $\frac{3}{x}$ 为正数的前提下,不能使用定理1求函数的最值。

师:不能断定 $2x$ 与 $\frac{3}{x}$ 的正负应该怎么办?

生乙:可以对 x 以0为标准分类讨论。

师:这是一个解决问题的好办法。请你说说怎样解?

生乙:当 $x > 0$ 时, $2x > 0$, $\frac{3}{x} > 0$ 且 $2x \cdot \frac{3}{x} = 6$ 。

定理1,得当且仅当 $2x = \frac{3}{x}$, 即 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, $y = 1 - 2x - \frac{3}{x} = 1 - (2x + \frac{3}{x})$ 有最大值,最大值是 $y = 1 - 2\sqrt{6}$ 。



当 $x < 0$ 时, $-2x > 0$, $-\frac{3}{x} > 0$ 且 $(-2x)(-\frac{3}{x}) = 6$ 。由定理 1,

得当且仅当 $-2x = -\frac{3}{x}$, 即 $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, $y = 1 - 2x - \frac{3}{x}$ 有最小值, 最小值是 $y = 1 + 2\sqrt{6}$ 。

师 很好。既然同学们的眼光很敏锐, 那么自己解题时可不能只见树木, 不见森林, 仅套用‘积为定值, 和有最小值’的结论, 造成如此错误。

(投影片 6) 例 4 求函数 $y = 2x^2 + \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的最小值, 下面解法是否正确? 为什么?

解法 1 由 $x > 0$, 知 $2x^2 > 0$, $\frac{3}{x} > 0$, 则

$$y = 2x^2 + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{2x^2 \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{6x},$$

当且仅当 $2x^2 = \frac{3}{x}$, 即 $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 时, $y_{\min} = 2\sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt[3]{18}$ 。

解法 2 由 $x > 0$, 知 $2x^2 > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, $\frac{2}{x} > 0$, 则

$$y = 2x^2 + \frac{3}{x} = 2x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x}} = 3\sqrt[3]{4}。$$

则 $y_{\min} = 3\sqrt[3]{4}$ 。

(学生讨论)

生甲 解法 1 是错误的。因为正变数 $2x^2$ 与 $\frac{3}{x}$ 的积不是常数, 不满足定理 1 的使用条件。

师 为什么利用不等式求函数最值时, 必须注意不等式中一端是变量, 另一端必须是常量呢? 请同学们看投影片。

(投影片 7)



师 如果不等式两端都是变量 $f(x) \geq g(x)$, 如图 5-4, 可知 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 且“=”在 $x=a$ 时能取到, 这时能说 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值吗?

生乙 解法 2 也是错误的。因为“=”成立的条件是 $2x^2 = \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$, 而由 $\frac{1}{x} = \frac{2}{x}$ 得知方程无解。也就是说并不存在的 $x_0 > 0$ 使 $y_0 =$

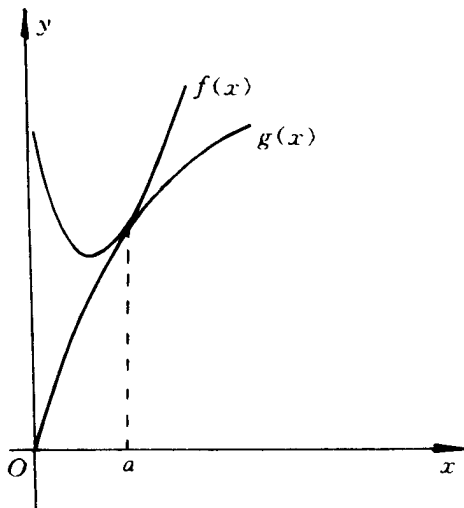


图 5-4

$2x_0^2 + \frac{3}{x_0} = 3\sqrt[3]{4}$ 成立, y 取不

到 $3\sqrt[3]{4}$, 因此 $3\sqrt[3]{4}$ 不是此函数的最小值。

师 求解定和、定积条件下的最值问题, 最值的取得必须同时满足“正数”、“定值”、“相等”三个条件。如果仅把注意力集中在选取或设置符合定值条件下的正变量, 而对相等条件忽略, 那么就会造成这种错误。这道题大家怎么解?

生 把 $\frac{3}{x}$ 拆成相等的两项 $\frac{3}{2x}$ 和 $\frac{3}{2x}$, 同时也保证了 $2x^2 > 0, \frac{3}{2x} > 0$ 且 $2x^2, \frac{3}{2x}$ 与 $\frac{3}{2x}$ 的积是常数, 这时, 可以应用定理 2 求出此函数的最小值。

(教师用投影展示解法 3)

(投影片 8) 解法 3: $y = 2x^2 + \frac{3}{x} = 2x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2x}$ 。

由 $x > 0$, 知 $2x^2 > 0, \frac{3}{2x} > 0$ 。故



$$2x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{3}{2x} \cdot \frac{3}{2x}} = 3\sqrt[3]{\frac{9}{2}},$$

当且仅当 $2x^2 = \frac{3}{2x}$, 即 $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ 时, $y_{\min} = 3\sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{36}$ 。

师 同学们可以回顾与反思一下,当我们求几项和的最值时,如果这几项中有整式,也有分式,且其乘积的分子或分母中至少有一仍带变量,如例 4 中函数 $y = 2x^2 + \frac{3}{x} (x > 0)$, 再比如函数 $y = x + \frac{32}{x^2} (x > 0)$, 那么你会尝试分析哪个正变量以保证各项积为常数呢?

生 如果分拆整式或分式的分母中次数较高的正变量,那么各项积的次数不会为 0; 看来可以尝试分拆整式或分式的分母中次数较低的正变量才能保证各项为常数。

师 很好。同学们在用不等式的知识求某些函数的最值时,不仅需要从理论上理解,而且还要在具体运用时善于总结一些规律,这也是养成良好学习习惯的一个方面。

下面请同学们运用所学知识解决一个实际问题。

五、解决实际问题

(投影片 9) 例 5 在一个直径是 50mm 的球形器材中,嵌入一根圆轴(如图 5-5),为了使圆轴不易脱出,应该使它与球有最大的接触面积,问圆轴的直径应是多少?

师 解应用题首先要认真审题,认清问题的已知条件,需求解的对象,各种量之间的相互联系。紧紧抓住变量之间的关系,分析各种制约条件,然后建立恰当的数学模型,将实际问题转化成数学问题,如函数、

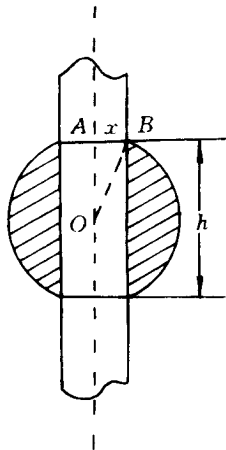


图 5-5



方程、不等式等数学问题,再用已学过的数学知识解决这个数学问题,最后回到实际问题。

本题实质上是一个什么问题?

生 圆轴与球的接触面积应是所需圆柱的侧面积。本题实质上求当所需圆柱的直径为多少毫米时,此圆柱的侧面积最大。

师 怎样用题中的量表示此圆柱的侧面积?

生 设圆轴的半径为 $x\text{mm}$,与球接触的圆轴的高为 $h\text{mm}$,圆轴与球的接触面积是 $y\text{mm}^2$ 。因为圆轴与球的接触面积是一个圆柱的侧面积,所以 $y = 2\pi xh$ ①。

师 我们的目标是求使侧面积 y 为最大的条件,常把函数 $y = 2\pi xh$ 称为“目标函数”,这里的目标函数是二元函数,能否消去一元?

生 如图,在 $\text{Rt} \triangle OAB$ 中, $OA^2 + AB^2 = OB^2$, 即 $(\frac{h}{2})^2 + x^2 = (\frac{50}{2})^2$ ②。由 ② 得 $h = 2\sqrt{625 - x^2}$, 代入 ① 式得 $y = 4\pi x\sqrt{625 - x^2}$ 。

师 ②式给出了两个“元”之间的关系,通常把②这样的关系式称为“约束条件”,这位同学把约束条件代入目标函数,使其化为一元函数。其中, x 的取值有限制吗?

生 $0 < x < 25$ 。

师 现在的问题已转化为求函数 $y = 4\pi x\sqrt{625 - x^2}$ ($0 < x < 25$) 的最大值。怎样求?

生 对于几个正变量的积的最值问题,可以考虑利用平均值定理来求。但是,本题中正变量的和却不是常数。

师 联系前面几个例题,我们采用分拆变量或匹配系数的方法,恰当地选配满足定值条件的正变量,促使问题解决。此函数呢?

(学生讨论)

生甲 前几个例题中函数的解析式没有带根号的,我想把解析式转



化为有理式。又因为 $x > 0$ 时, y 与 y^2 同时有最大值, 所以先求出 $y^2 = 16\pi^2 x^2 (625 - x^2)$ 的最值, 再求 $y = 4\pi x \cdot \sqrt{625 - x^2}$ 的最值。

生乙 观察正变量 x 与 $\sqrt{625 - x^2}$ 的和不是常数, 但是, x^2 与 $(625 - x^2)$ 的和是常数。所以把函数解析式变形为 $y = 4\pi \sqrt{x^2 (625 - x^2)}$, 求出 $z = x^2 (625 - x^2)$ 的最值, 就可得到 $y = 4\pi \sqrt{x^2 (625 - x^2)}$ 的最值。

师 这两种变形是否都同时满足“正数”“定值”“相等”三个条件?

生 点头示意。

师 同学们把要解决的问题与旧知识建立联系, 抓住要保证两个正变量的和为常数这一关键实现转化。我们的学习就是在这种不断联系、转化中取得进步的。下面请同学们完成解答过程。

(教师巡视, 用实物投影展示某学生的解法)

(投影片 10)

解: 设圆轴的半径为 x mm, 与球接触的圆轴的高为 h mm, 圆轴与球的接触面积是 y mm²。则圆轴与球的接触面积是一个圆柱的侧面积且有 $y = 2\pi xh$ ①, 其中 $0 < x < 25$ 。

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{50}{2}\right)^2 - x^2. \quad ②$$

由②得, $h = 2\sqrt{625 - x^2}$ 。代入①得 $y = 4\pi x \sqrt{625 - x^2}$ 。于是 $y^2 = 16\pi^2 x^2 (625 - x^2) \leq 16\pi^2 \cdot \left(\frac{x^2 + 625 - x^2}{2}\right)^2 = 4 \times 625^2 \pi^2$ 。

当且仅当 $x^2 = 625 - x^2$, 即 $x = \frac{25}{2}\sqrt{2}$ 时, 等号成立。此时 $y_{\max} = \sqrt{4 \times 625^2 \pi^2} = 1\,250\pi$ (mm²)。

因此圆柱的直径是 $2x = 25\sqrt{2} \approx 35.4$ (mm)。

答 圆柱的直径应约为 35.4 mm。



六、巩固练习(学生练习,教师巡视,纠正错误)

A 组

(1) 求函数 $y = (1 - 2x)x$ ($0 < x < \frac{1}{2}$) 的最大值。($\frac{1}{8}$)

(2) 求函数 $y = 4x^2 + \frac{1}{x^4}$ ($x \neq 0$) 的最小值。($3\sqrt[3]{4}$)

(A 组题检查教学目标是否达到)

B 组

设 $x > 0, y > 0$ 且 $3x + 4y = 12$, 求 $\lg x + \lg y$ 的最大值。($\lg 3$)

(B 组题供学有余力的学生使用)

七、小结

师 这节课我们讨论了利用平均值定理求某些函数的最值的问题。现在,我们又多了一种求正变量在定积或定和条件下的函数最值的方法。这是平均值定理的一个重要应用,也是本章的重点内容,同学们要牢固掌握。

应用定理时,同学们要注意些什么呢?

生 应注意同时满足三个条件,(1)两个(或三个)变数都是正数;(2)这两个(或三个)正变数的积(或和)是一个常数;(3)这两个(或三个)正变数能够相等。三个条件缺一不可。

师 不能直接利用定理时,要善于转化。这里关键是掌握好转化的条件,通过运用有关变形的具体方法,以达到化归的目的。

八、布置作业

A 组

(1) 设 $x > 1$, 求 x 取何值时, $y = \log_2 x + \log_x 4$ 取最小值,最小值是多少?(当 $x = 2^{\sqrt{2}}$ 时, $y_{\min} = 2\sqrt{2}$)



(2) 求函数 $y = 2x \sqrt{100 - x^2} (x > 0)$ 的最大值, 以及相应的 x 值。(当 $x = 5\sqrt{2}$ 时, $y_{\max} = 100$)

(A 组题为基本题目, 独立完成)

B 组

(1) 设 $x \in \mathbb{R}$, 求函数 $y = 1 + \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$ 的最值。(当 $x = 0$ 时, $y_{\min} = 2$)

(2) 求函数 $y = \sin x \cdot \cos^2 x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的最大值。(提示 先求 $y^2 = \sin^2 x \cos^4 x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的最大值。当 $x = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $y_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$)

(3) 要制造一个容积为 $12m^3$ 的圆柱形无盖容器。已知用来作底部与侧壁的材料每平方米的价格比为 3:2, 则此容器所需材料价格最低时, 圆柱的底面半径是多少? ($1.37m$)

(B 组题为思考性较强题目, 可讨论完成)

课堂教学设计说明:

1. 关于新课引入设计的想法

导入这一环节是调动学生学习的积极性, 激发学生探究精神的重要环节, 本节课开始提出问题“求函数最值是数学中常遇到的问题, 然而在初等数学的范围内又没有一般通用的方法……”, 激励学生探求一些具体方法。接着, 引导学生联想到刚刚学过的不等式的有关知识, 它与函数最值有无联系呢? 从知识之间的联系入手让学生进行联想是探求问题的重要方法。当学生认识到它们之间的联系后, 给出一个引例, 通过探究解决此问题的最佳解法, 点明课题。事实上, 在解决引例问题的过程中也恰恰突出了教学重点。

2. 关于易错解法讨论设计的想法

正确理解和使用平均值定理求某些函数的最值是教学难点。为



突破难点,只是教师单方面强调是远远不够的,只有让学生通过自己的思考、尝试,发现使用定理的三个条件缺一不可,才能大大加深学生对正确使用定理的理解。设计易错解法讨论能够使学生尝试失败,并从失败中找到错误原因,加深了对正确解法的理解,真正把新知识纳入到原有认知结构中。

3. 培养应用意识

教学中应不失时机地使学生认识到数学源于客观世界并反作用于客观世界。为增强学生的应用意识,在平时教学中就应适当增加解答应用问题的教学。本节课中设计了两道应用问题,题目不是很难,用刚刚学过的数学知识解决了问题,使学生不禁感到“数学有用,要用数学”。



《数学归纳法》教学设计

一、从生活经验中引进

同学们,今天知心老师要与你们一起做实验。大家可能奇怪,你什么仪器也没拿,能做什么实验呢?我们说,能做,而且还要从教室做到操场、从中国做到外国。这个无形的实验仪器就是大家的生活经验和会想问题的头脑。

大家都见过砖块吧,假设从教室到操场立摆着许多砖块,我们当然可以一块一块地把它全部推倒(对应完全归纳法)。现在只允许推倒一块,你能保证外面的砖块都倒下吗?你有办法做到使它们都倒下吗?(这是向同学们提出课题,学生借助生活经验应能得出肯定的回答。)

对,能做到。这时,砖应怎样摆?你该推倒那一块?(这个讨论的目的,是让同学们自己去总结出递推原理。为了强调数学归纳法中两个条件缺一不可,还可继续作以下提问)

如果不推任何一块砖,这些砖能全部倒下吗?(同学们都觉得很可笑,但不认真验证第一号命题的真实性却司空见惯)

如果在砖列的某一段上拿走几块,那么你推第一块还能保证全部都倒下吗?(强调第二步的递推作用与不可或缺)

如果砖块只是从教室摆到操场,那么,我们有两个办法把它全部推倒,其一是逐一推倒,这时摆砖的格式没有要求;其二是只推第一块,但是要求按‘前砖碰倒后砖’的规格来摆放。现在假定每一个同学,甚至世界上的每一个人都来摆砖从教室摆到操场,从学校摆到街



道,从中国摆到外国……所有这些砖块都按照‘前砖碰倒后砖’的规格,没完没了地摆下去,那么你自己一个人还能不能一块又一块地去推倒这所有的砖块?(注意,在你推倒一块的同时,几十亿块砖又立起来了)还需不需要一块又一块地去推倒这所有的砖块?(当同学们感到既不可能、也没有必要去一块又一块推倒砖块的时候,同学们就是接触到了数学归纳法的实质了)

二、数学归纳法的初步体验

由上面的‘思维实验’可以得出处理与正整数有关问题的一个方法：

- (1) 处理第一个问题(相当于推倒第一块砖)；
- (2) 验证前一号问题与后一号问题有传递关系(相当于前砖碰倒后砖)。

下面我们通过两个具体事例来说明,如何将这一个个生活体验提炼为数学方法。

例1 在第3.2节中,我们是这样推导出首项为 a_1 , 公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式的：

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot d,$$

$$a_2 = a_1 + d = a_1 + 1 \cdot d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3 \cdot d,$$

.....

由此得到,等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \quad \textcircled{1}$$

像这种由一系列有限的特殊事例得出一一般结论的推理方法,通常叫做归纳法,用归纳法可以帮助我们从小事例中发现一般规律。但是,仅根据一系列有限的特殊事例所得出的一般结论有时是不正



确的。比如,圆周上有 2 个点时,其连线将圆分为两部分(图 1),记作 $a_2 = 2$ 。圆周上有 3 个点时,其两两连线将圆分为 4 部分(图 2),记作 $a_3 = 4 = 2^2$ 。圆周上有 4 个点时,其两两连线将圆分为 8 部分(图 3),记作 $a_4 = 8 = 2^3$ 。圆周上有 5 个点时,其两两连线将圆分为 16 部分(图 4),记作 $a_5 = 16 = 2^4$ 。由此,作归纳,圆周上 n 个点两两连线将圆分为 $a_n = 2^{n-1}$ 部分。但 $a_6 = 31$,而不是 $2^5 = 32$ (图 5),那么由归纳法得出的公式①到底对不对呢?我们分 4 步来证实它。

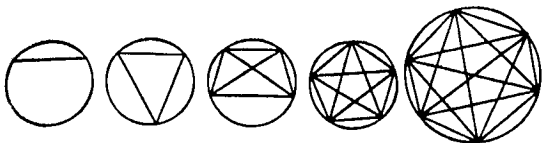


图 1 图 2 图 3 图 4 图 5

第一步(正确性的基础)。当 $n = 1$ 时,左边 = a_1 ,右边 = $a_1 + 0 \cdot d = a_1$,等式是成立的。

第二步(传递性的依据)。假设等式当 $n = k$ 时成立,即

$$a_k = a_1 + (k-1)d. \quad (2)$$

能推出 $a_{k+1} = a_1 + [(k+1)-1]d. \quad (3)$

这相当于做一个条件等式的证明题“若②则③”。这是可以做到的：

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &= [a_1 + (k-1)d] + d \\ &= a_1 + [(k+1)-1]d. \end{aligned}$$

第三步(传递的过程)。把第一步得出的“ $n = 1$ 等式成立”代入第二步,可推出“ $n = 2$ 等式成立”;再把“ $n = 2$ 等式成立”代入第二步,可推出“ $n = 3$ 等式成立”;……以此类推,每一次都把已证实的前一号命题做基础,反复代入第二步。

第四步(传递的结论)。由第三步无穷传递下去,可得等式①对



一切正整数 n 都成立。

经过这样的 4 步,我们对等差数列通项公式①的坚信程度肯定比当初大大提高了。

例 2 由图 6 可以看到,一个 $n \times n$ 的正方形,若将其分解成直角形小正方形之和,应有

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

证明:(1)当 $n = 1$ 时,左边 = 1,右边 = 1,等式成立。

(2)假设当 $n = k$ 时,等式成立,就是

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2,$$

那么 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$

$$= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)] + (2k + 1)$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k + 1)^2.$$

这就是说,只要 $n = k$ 时等式成立,便必有 $n = k + 1$ 时等式也成立。

(3)把第(1)步得出的‘ $n = 1$ 等式成立’代入第二步,可推出‘ $n = 2$ 等式成立’;再把‘ $n = 2$ 等式成立’代入第二步,可推也‘ $n = 3$ 等式成立’;……以此类推,每一次都把已证实的前一号命题做基础,反复代入第二步。

(4)由第(3)步无穷传递下去,可得等式对一切正整数 n 都成立。

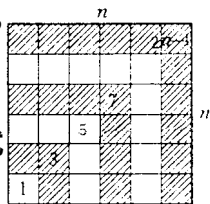


图 6

三、数学归纳法的形成

1. 数学归纳法

由上面的两个例子可以看到,第(3)步是对第(1)、(2)步的反复应用,并且在形式上千篇一律,我们抓住方法的本质步骤,可以删去第三步,将其归结为‘验证两个条件,直接得出结论’。这个方法就是数学归纳法。用数学归纳法证明一个与正整数有关的命题的步



骤是：

(1) 证明当 n 取第 1 个值 n_0 (例如 $n_0 = 1$ 或 2 等) 时结论正确；

(2) 假设当 $n = k$ (k 为正整数, 且 $k \geq n_0$) 时结论正确, 证明当 $n = k + 1$ 时结论也正确。

在完成了这两个步骤之后, 就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确。

2. 数学归纳法证题的格式

回到例 2 (板书应有意保留), 其删去第 (3) 步后的规范格式为：

证明：(1) 当 $n = 1$ 时, 左边 $= 1$, 右边 $= 1$, 等式成立。

(2) 假设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2,$$

那么 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$

$$= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)] + (2k + 1)$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k + 1)^2.$$

这就是说, 当 $n = k + 1$ 时等式成立 (这句话不要省略)。

根据 (1) 和 (2), 可知等式对任何 n 为正整数都成立。

这里的证明格式是分为两步, 然后下结论。其中第一步是证明一个真实的命题, 通常是用验证的方法来完成; 第二步是证实一个有效的推理 (请老师们注意, 由蕴涵式 $p \rightarrow q$ 的真值表知, p 假, q 假, 仍有 $p \rightarrow q$ 真, 即推理仍是有效的。比如, 由 $3 = 4$ (假命题) 可推出 $5 = 6$ (也是假命题), 这个推理是有效的。反证法也有类似的情况)。若记

$$a_n = 2n - 1,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

则第二步相当于证明这样一个条件恒等式：

$$\text{已知 } p : S_k = k^2,$$

$$\text{求证 } q : S_{k+1} = (k + 1)^2.$$



一般来说,这个证明,允许用各种方法(正面的、反面的),但都必须把‘已知条件’(即归纳假设)用上。并且,有一个用得较多的常规格式,分为三步

第1步 把 S_{k+1} 表示为 S_k 、 a_k 、 k 的递推式;

第2步 把归纳假设 $S_k = k^2$ 代入;

第3步 作恒等变形,

$$\begin{aligned}\text{即 } S_{k+1} &= S_k + a_k \quad (\text{递推关系}) \\ &= k^2 + a_k \quad (\text{代入归纳假设}) \\ &= (k+1)^2. \quad (\text{恒等变形,得出结论})\end{aligned}$$

例1的第2步推理格式是

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= a_k + d \quad (\text{递推关系}) \\ &= [a_1 + (k-1)d] + d \quad (\text{代入归纳假设}) \\ &= a_1 + kd. \quad (\text{恒等变形,得出结论})\end{aligned}$$

3. 数学归纳法可靠性的解释

去掉第(3)步传递的过程,有的同学可能会对数学归纳法不够放心。即使是对第(3)步本身,也可能会有同学对无穷传递的中途不够放心。毕竟,‘无穷’是看不见、摸不着的。对此,我们可以作这样的解释,以例2为例,假设有一些正整数使等式不成立,因为 $n=1$ 时等式成立,所以使等式不成立的正整数必大于1,取其中最小的记为 $m > 1$,有 $S_m \neq m^2$ 。

由 m 的最小性同时有 $S_{m-1} = (m-1)^2$ 。

但据第(2)步,由 $S_{m-1} = (m-1)^2$ 必可推出 $S_m = m^2$ 。

这一矛盾说明,使等式不成立的正整数不存在。

四、巩固练习

$$1. 1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$



$$2. 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

3. 首项是 a_1 , 公比是 q 的等比数列的通项公式是 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 。

教师巡回指导,并规范板演学生的解题格式。

五、小结

这节课我们学习了一个新的数学方法——数学归纳法,它是解决与正整数有关的命题的有力工具,应用非常广泛,后面我们还要陆续介绍如何用数学归纳法解决各种问题。本节课首先要掌握两点:

1. 了解数学归纳法无穷递推的本质,掌握数学归纳法证题的两个步骤。

2. 会用数学归纳法证明一些简单的恒等式,初步理解其第二步的作用与常规格式,书写规范。

六、作业(取自新教材《数学》第一册(上) P_{164})

1. 用数学归纳法证明

$$(1) 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + 2;$$

$$(2) 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2 \times 3^{n-1} = 3^n - 1.$$

2. 用数学归纳法分别证明等差数列的前 n 项和公式 $S_n = na_1 +$

$$\frac{1}{2}n(n-1)d \text{ 与等比数列前 } n \text{ 项和公式 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1).$$



《用数学归纳法证明不等式》教学设计

教学目标

1. 牢固掌握数学归纳法的证明步骤,熟练表达数学归纳法证明的过程。
2. 通过事例,学生掌握运用数学归纳法证明不等式的思想方法。
3. 培养学生的逻辑思维能力,运算能力,和分析问题、解决问题的能力。

教学重点与难点

重点 巩固对数学归纳法意义和有效性的理解,并能正确表达解题过程,以及掌握利用数学归纳法证明不等式的基本思路。

难点 应用数学归纳法证明的不同方法的选择及解题技巧。

教学过程设计

一、复习回顾

师 上次课我们已经学习了数学归纳法以及运用数学归纳法解题的步骤,请同学们联想‘多米诺骨牌’游戏,说出数学归纳法的步骤?

生 数学归纳法是用以证明某些与自然数有关的命题的一种方法。设要证命题为 $P(n)$ 。(1)证明当 n 取第一个值 n_0 时,结论正确,即验证 $P(n_0)$ 正确;(2)假设 $n = k (k \in N \text{ 且 } k \geq n_0)$ 时结论正确,



证明当 $n = k + 1$ 时,结论也正确,即由 $P(k)$ 正确推出 $P(k + 1)$ 正确,根据(1),(2),就可以判定命题 $P(n)$ 对于从 n_0 开始的所有自然数 n 都正确。

师 演示小黑板或运用投影仪讲评作业。

(讲评作业的目的是从错误中进一步强调恰当地运用归纳假设是数学归纳法的关键)

作业中用数学归纳法证明:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n + 1)。$$

如采用下面的证法,对吗?

证明:(1)当 $n = 1$ 时,左 = 2,右 = 2,则等式成立。

(2)假设 $n = k$ 时($k \in N, k \geq 1$),等式成立,即

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)。$$

当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} & 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + (k + 1) \\ &= \frac{[2 + 2(k + 1)](k + 1)}{2} = (k + 1)(k + 2)。 \end{aligned}$$

所以 $n = k + 1$ 时,等式也成立。

根据(1)(2)可知,对于任意自然数 n ,原等式都能成立。

生甲 证明过程正确。

生乙 证明方法不是数学归纳法,因为第二步证明时,没有应用归纳假设。

师 从形式上看此种证明方法是数学归纳法,但实质在要证明 $n = k + 1$ 正确时,未用到归纳假设,直接采用等差数列求和公式,违背了数学归纳法的本质特点递推性,所以不能称之为数学归纳法。因此告诫我们在运用数学归纳法证明时,不能机械套用两个步骤,在证明 $n = k + 1$ 命题成立时,一定要利用归纳假设。

(课堂上讲评作业,指出学生作业中不妥之处,有利于巩固旧知识,为新知识的学习扫清障碍,使学生引以为戒,所谓温故而知新)



二、讲授新课

师 在明确数学归纳法本质的基础上,我们来共同研究它在不等式证明中的应用。

(板书)例 1 已知 $x > -1$, 且 $x \neq 0, n \in N, n \geq 2$ 。求证: $(1+x)^n > 1+nx$ 。

师 首先验证 $n=2$ 时的情况。

(板书)证: (1) 当 $n=2$ 时, 左边 $= (1+x)^2 = 1+2x+x^2$, 右边 $= 1+2x$, 因 $x^2 > 0$, 则原不等式成立。

(在这里, 一定要强调之所以左边 $>$ 右边, 关键在于 $x^2 > 0$ 是由已知条件 $x \neq 0$ 获得, 为下面证明做铺垫)

(2) 假设 $n=k$ 时 ($k \geq 2$), 不等式成立, 即 $(1+x)^k > 1+kx$ 。

师 现在要证的目标是 $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$, 请同学考虑。

生 因为应用数学归纳法, 在证明 $n=k+1$ 命题成立时, 一定要运用归纳假设, 所以当 $n=k+1$ 时, 应构造出归纳假设适应的条件。所以有: $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$, 因为 $x > -1$ (已知), 所以 $1+x > 0$ 于是 $(1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x)$ 。

师 现将命题转化成如何证明不等式

$$(1+kx)(1+x) \geq 1+(k+1)x。$$

显然, 上式中“ $=$ ”不成立。

故只需证: $(1+kx)(1+x) > 1+(k+1)x$ 。

提问 证明不等式的基本方法有哪些?

生甲 证明不等式的基本方法有比较法、综合法、分析法。

(提问的目的是使学生明确在第二步证明中, 合理运用归纳假设的同时, 其本质是不等式证明, 因此证明不等式的所有方法、技巧手段都适用)

生乙 证明不等式 $(1+kx)(1+x) > 1+(k+1)x$, 可采用作差比较法。



$$\begin{aligned}(1+kx)(1+x) &= [1+(k+1)x] \\ &= 1+x+kx+kx^2-1-kx-x \\ &= kx^2 > 0 \quad (\text{因 } x \neq 0, \text{则 } x^2 > 0)。\end{aligned}$$

所以, $(1+kx)(1+x) > 1+(k+1)x$ 。

生丙:也可采用综合法的放缩技巧。

$$(1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2。$$

因为 $kx^2 > 0$, 所以 $1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x$, 即 $(1+kx)(1+x) > 1+(k+1)x$ 成立。

生丁:……

(学生可能还有其他多种证明方法,这样培养了学生思维品质的广阔性,教师应及时引导总结)

师:这些方法,哪种更简便,更适合数学归纳法的书写格式?学生丙用放缩技巧证明显然更简便,利于书写。

(板书)将例1的格式完整规范。

当 $n=k+1$ 时,因为 $x > -1$, 所以 $1+x > 0$, 于是

$$\text{左边} = (1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2;$$

$$\text{右边} = 1+(k+1)x。$$

因为 $kx^2 > 0$, 所以左边 $>$ 右边, 即 $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$ 。这就是说,原不等式当 $n=k+1$ 时也成立。

根据(1)和(2),原不等式对任何不小于2的自然数 n 都成立。

(通过例1的讲解,明确在第二步证明过程中,虽然可以采取证明不等式的有关方法,但为了书写更流畅,逻辑更严谨,通常经归纳假设后,要进行合理放缩,以达到转化的目的)

师:下面再举例子,来说明合理放缩的重要性。

(板书)例2 证明 $2^n + 2 > n^2, n \in N_+$ 。

师:(1)当 $n=1$ 时,左边 $= 2^1 + 2 = 4$ 右边 $= 1$, 左边 $>$ 右边。所以原不等式成立。



(2) 假设 $n = k$ 时 ($k \geq 1$ 且 $k \in N$) 时, 不等式成立, 即 $2^k + 2 > k^2$ 。

现在, 请同学们考虑 $n = k + 1$ 时, 如何论证 $2^{k+1} + 2 > (k + 1)^2$ 成立。

生 利用归纳假设 $2^{k+1} + 2 = 2 \cdot 2^k + 2 = 2(2^k + 2) - 2 > 2 \cdot k^2 - 2$ 。

师 将不等式 $2k^2 - 2 > (k + 1)^2$, 右边展开后得: $k^2 + 2k + 1$, 由于转化目的十分明确, 所以只需将不等式的左边向 $k^2 + 2k + 1$ 方向进行转化, 即 $2k^2 - 2 = k^2 + 2k + 1 + k^2 - 2k - 3$ 。

由此不难看出, 只需证明 $k^2 - 2k - 3 \geq 0$, 不等式 $2k^2 - 2 > k^2 + 2k + 1$ 即成立。

生 因为 $k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1)$, 而 $k \in N$, 故 $k + 1 > 0$, 但 $k - 3 \geq 0$ 成立的条件是 $k \geq 3$, 所以当 $k \in N$ 时, $k - 3 \geq 0$ 未必成立。

师 不成立的条件是什么?

生 当 $k = 1, 2$ 时, 不等式 $k - 3 \geq 0$ 不成立。

师 由于使不等式不成立的 k 值是有限的, 只需利用归纳法, 将其逐一验证原命题成立, 因此在证明等一步中, 应补充验证 $n = 2$ 时原命题成立, 那么, $n = 3$ 时是否也需要论证?

生: $n = 3$ 需要验证, 这是因为数学归纳法中的第一步验证是第二步归纳假设的基础, 而第二步中对于 k 是大于或等于 3 才成立, 故在验证时, 应验证 $n = 3$ 时, 命题成立。

师: (补充板书)

当 $n = 2$ 时, 左 $= 2^2 + 2 = 6$, 右 $= 2^2 = 4$, 所以左 $>$ 右;

当 $n = 3$ 时, 左 $= 2^3 + 2 = 10$, 右 $= 3^2 = 9$, 所以左 $>$ 右。

因此当 $n = 1, 2, 3$ 时, 不等式成立。

(以下请学生板书)

(2) 假设当 $n = k$ ($k \geq 3$ 且 $k \in N$) 时, 不等式成立。即 $2^k + 2 > k^2$ 。因为 $2^{k+1} + 2 = 2 \cdot 2^k + 2 = 2(2^k + 2) - 2 > 2k^2 - 2$
 $= k^2 + 2k + 1 + k^2 - 2k - 3$



$= (k^2 + 2k + 1) + (k + 1)(k - 3)$ (因 $k \geq 3$, 则 $k - 3 \geq 0$, $k + 1 > 0$)

$$\geq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

所以 $2^{k+1} + 2 > (k + 1)^2$. 故当 $n = k + 1$ 时, 原不等式也成立.

根据(1)和(2), 原不等式对于任何 $n \in N$ 都成立.

师 通过例 2 可知, 在证明 $n = k + 1$ 时命题成立过程中, 针对目标 $k^2 + 2k + 1$, 采用缩小的手段, 但是由于 k 的取值范围 ($k \geq 1$) 太大, 不便于缩小, 因此, 用增加奠基步骤 (把验证 $n = 1$. 扩大到验证 $n = 1, 2, 3$) 的方法, 使假设中 k 的取值范围适当缩小到 $k \geq 3$, 促使放缩成功, 达到目标.

(板书)例 3 求证: 当 $n \geq 2$ 时,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} > \frac{9}{10}.$$

(由学生自行完成第一步的验证 第二步中的假设, 教师应重点讲解 $n = k$ 到 $n = k + 1$ 命题的转化过程)

师 当 $n = k + 1$ 时, 不等式的左边表达式是怎样的?

生 当 $n = k + 1$ 时,

$$\text{左边} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1}.$$

师 考虑是否正确? $\frac{1}{3k}$ 是否是此数列的第 k 项? 显然, $\frac{1}{3k}$ 不是第 k 项, 应是第 $2k$ 项, 数列各项分母是连续的自然数, 最后一项是以 $3k$ 收尾, 故 $n = k + 1$ 时, 最后一项应为 $\frac{1}{3(k+1)}$, 根据此数列分母的特点, 在 $3k$ 后面还有 $3k + 1, 3k + 2$. 最后才为 $3k + 3$ 即 $3(k + 1)$, 所以正确的答案是: 左 $= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)}$.



(在这里,学生极易出现错误,错误的思维定势认为从 $n = k$ 到 $n = k + 1$ 时,只增加一项,求和式中最后一项即为第几项的通项,教师在这里要着重分析,化解难点。)

为了能利用归纳假设,左边还要添上 $\frac{1}{k+1}$ 项,故当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k} \right) + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} \\ &\quad - \frac{1}{k+1} \\ &> \frac{9}{10} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

明确转化目的,即向 $\frac{9}{10}$ 方向努力。为了避免通分化简一系列繁琐运算,应针对问题的特点,巧妙合理地利用‘放缩技巧’,使问题获得简捷的证明:

由于 $\frac{1}{3k+1} > \frac{1}{3(k+1)}$, $\frac{1}{3k+2} > \frac{1}{3(k+1)}$, 因此

$$\begin{aligned}\text{左} &> \frac{9}{10} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{k+1} \\ &> \frac{9}{10} + \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3(k+1)} + \frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{9}{10} = \text{右}\end{aligned}$$

问题获得解决。

(板书略)

师 设 $S(n)$ 表示原式左边, $f(n)$ 表示原式右边,则由上面的证法可知,从 $n = k$ 到 $n = k + 1$ 命题的转化途径是:



$$S(k+1) = S(k) + S'(k) \geq f(k) + S'(k) > f(k+1).$$

↑ 归纳假设
↑ 合理放缩

结构相同

要注意 这里 $S'(k)$ 不一定是一项,应根据题目情况确定。

三、课堂小结

1. 用数学归纳法证明,要完成两个步骤,这两个步骤是缺一不可的。但从证题的难易来分析,证明第二步是难点和关键,要充分利用归纳假设,做好命题从 $n = k$ 到 $n = k + 1$ 的转化,这个转化要求在变化过程中结构不变。

2. 用数学归纳法证明不等式是较困难的课题,除运用证明不等式的几种基本方法外,经常使用的方法就是放缩法,针对目标,合理放缩,从而达到目标。

3. 数学归纳法也不是万能的,也有不能解决的问题。

例如求证: $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} (n \in N_+)$ 。

错误解法:

(1) $n = 1$ 时,左 = $\frac{1}{9}$,右 = $\frac{1}{4}$,则在 $<$ 右,不等式成立。

(2) 假设 $n = k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4}。$$

当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{左} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+3)^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{(2k+3)^2} \\ &< \frac{1}{4}。 \end{aligned}$$

则 $n = k + 1$ 时,不等式也成立。



根据(1)(2),原不等式对 $n \in N_+$ 都成立。

错误原因: $\frac{1}{4} + \frac{1}{(2k+3)^2} < \frac{1}{4}$ 不成立,此时无法实现由 $n = k$ 推出 $n = k + 1$,从而数学归纳法失效。

四、课后作业

1. 课本 P_{121} 5, P_{122} 6。

2. 证明不等式:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad (n \in N_+)。$$

(提示:

(1) 当 $n = 1$ 时,不等式成立。

(2) 假设 $n = k$ 时,不等式成立,即

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}。$$

那么,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ & < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} \\ & < \frac{k + (k+1) + 1}{\sqrt{k+1}} = 2\sqrt{k+1}。 \end{aligned}$$

这就是说, $n = k + 1$ 时,不等式也成立。

根据(1)(2)可知不等式对 $n \in N_+$ 都成立。)

3. 对于任意大于 1 的自然数 n , 求证:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}。$$

(提示:



(1) 当 $n=2$ 时, 左 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, 右 $= \frac{13}{24}$, 则左 $>$ 右, 原不等式

成立。

(2) 假设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}.$$

$$\begin{aligned}\text{那么 } & \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \\ & > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ & > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ & = \frac{13}{24}.\end{aligned}$$

这就是说, $n=k+1$ 时, 原不等式成立。

根据(1), (2)可知, 对任意大于1的自然数 n , 原不等式都成立。)

4. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 证明 对于任意不小于3的自然数 n ,

都有 $f(n) > \frac{n}{n+1}$ 。

(提示 要证 $f(n) > \frac{n}{n+1}$ ($n \in N, n \geq 3$), 即证 $1 - \frac{2}{2^n + 1} > 1 -$

$\frac{1}{n+1}$, 即证 $2^n > 2n + 1$ ($n \in N, n \geq 3$). ①

用数学归纳法证明①式:

(1) 当 $n=3$ 时, ①式成立。

(2) 假设 $n=k$ ($k \geq 3, k \in N$) 时, ①式成立, 即 $2^k > 2k + 1$ 。那么

$$\begin{aligned}2^{k+1} &= 2^k \cdot 2 > 2(2k + 1) \\ &= 2(k + 1) + 1 + (2k - 1) \\ &> 2(k + 1) + 1 \text{ (因 } k \geq 3, \text{ 则 } 2k - 1 \geq 5 > 0\text{)}.\end{aligned}$$



这就是说,当 $n = k + 1$ 时,①式也成立。

根据(1)(2)可知,对一切 $n \in N, n \geq 3$ ①式都成立,即 $f(n) > \frac{n}{n+1}$ 成立。)

课堂教学设计说明:

1. 数归法是以皮亚诺的归纳公理作为依据,把归纳法与演绎法结合起来的一种完全归纳法。数学归纳法证明中的两个步骤体现了递推思想。在教学中应使学生明确这两个步骤的关系:第一步是递推的基础,第二步是递推的依据,缺一不可,否则就会导致错误。为了取得良好的教学效果,不妨利用‘多米诺骨牌’游戏来加深这两步骤之间的关系的理解,在演示时,应分三种情况:(1)推倒第一张,接着依次倒下直至最后一张;(2)推倒第一张,中途某处停止,最后一张不倒;(3)第一张不倒,后面不管能否推倒,都不会全部倒下。通过具体生动的模型,帮助学生理解数学归纳法的实质。

2. 用数学归纳法证明不等式,宜先比较 $n = k$ 与 $n = k + 1$ 这两个不等式间的差异,以决定 $n = k$ 时不等式做何种变形,一般地只能变出 $n = k + 1$ 等式的一边,然后再利用比较、分析、综合、放缩及不等式的传递性来完成由 $n = k$ 成立推出 $n = k + 1$ 不等式成立的证明。

3. 要注意:在证明的第二步中,必须利用‘ $n = k$ 时命题成立’这一归纳假设,并且由 $f(k)$ 到 $f(k + 1)$,并不总是仅增加一项,如例 2,就是增加了 $\frac{1}{3k+1}, \frac{1}{3k+2}, \frac{1}{3k+3}$ 三项,同时减少了一项 $\frac{1}{k+1}$ 。

4. 要教会学生思维,离开研究解答问题的思维过程几乎是不可能的,因此在日常教学中,尤其是解题教学中,必须把教学集中在问题解答者解答问题的整个过程上,培养学生构造问题解答过程的框图,因为用文字、符号或图表简明地表达解答过程或结果的能力,叙述表达自己解题思路的能力,这也是问题解答所必需的。



《复数的减法及其几何意义》教学设计

教学目标

1. 理解并掌握复数减法法则和它的几何意义。
2. 渗透转化,数形结合等数学思想和方法,提高分析、解决问题能力。
3. 培养学生良好思维品质(思维的严谨性,深刻性,灵活性等)。

教学重点和难点

重点 :复数减法法则。

难点 :对复数减法几何意义理解和应用。

教学过程设计

一、引入新课

师 :上节课我们学习了复数加法法则及其几何意义,今天我们研究的课题是复数减法及其几何意义。

(板书课题 :复数减法及其几何意义)

二、复数减法

师 :首先规定,复数减法是加法逆运算,那么复数减法法则为 $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$,

(板书)



1. 复数减法法则

(1) 规定:复数减法是加法逆运算;

(2) 法则: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)。

如何推导这个法则呢?

生 把 $(a + bi) - (c + di)$ 看成 $(a + bi) + (-1)(c + di)$ 。

(学生口述,教师板书)

$$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-1)(c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i。$$

师 说一下这样推导的想法和依据是什么?

生 把减法运算转化为加法运算,利用乘法分配律和复数加法法则。

师 转化的想法很好。但复数和乘法分配律在这里作为依据不合适,因为复数乘法还没有学,逻辑上出现一些问题。

生 我觉得可以利用复数减法是加法逆运算的规定来推导。

(学生口述,教师板书)

推导 设 $(a + bi) - (c + di) = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)。即复数 $x + yi$ 为复数 $a + bi$ 减去复数 $c + di$ 的差。由规定,得 $(x + yi) + (c + di) = a + bi$, 依据加法法则,得 $(x + c) + (y + d)i = a + bi$, 依据复数相等定义,得

$$\begin{cases} x + c = a, \\ y + d = b。 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x = a - c \\ y = b - d。 \end{cases}$$

$$\text{故 } (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i。$$

师 这样推导每一步都有合理依据。

我们得到了复数减法法则,那么两个复数的差是什么数?

生 仍是复数。

师 两个复数相减所得差的结果会不会是不同的复数?

生 不会。



师 这说明什么?

生 两个复数的差是唯一确定的复数。

师 复数的加(减)法与多项式加(减)法是类似的。就是把复数的实部与实部,虚部与虚部分别相加(减),即 $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ 。

三、复数减法几何意义

师 我们有了做复数减法的依据——复数减法法则,那么复数减法的几何意义是什么?

(板书 2. 复数减法几何意义)

生 用向量表示两个做减法的复数。

(学生口述,教师板书)

设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $z_1 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$), 对应向量分别为 $\vec{OZ}$, $\vec{OZ}_1$ (如图 8-1)。

师 怎样用向量表示 $z - z_1$ 的差。

(学生困惑,教师启发)

师 还记得刚才推导复数减法法则时我们是如何转化的?

(学生活跃起来,议论纷纷)

生 由于复数减法是加法的逆运算,设 $z = (a - c) + (b - d)i$, 所以 $z - z_1 = z_2$, $z_2 + z_1 = z$, 由复数加法几何意义,以 $\vec{OZ}$ 为一条对角线, $\vec{OZ}_1$ 为一条边画平行四边形,那么这个平行四边形的另一边 $\vec{OZ}_2$ 所表示的向量 $\vec{OZ}_2$ 就与复数 $z - z_1$ 的差 $(a - c) + (b - d)i$ 对应 (如图 8-2)。

师 很好。在这个平行四边形中与 $z - z_1$ 差对应的向量只有向量 $\vec{OZ}_2$ 吗?

生 还有 $\vec{Z}_1\vec{Z}$ 。

师 为什么?



生 因为 $OZ_2 \parallel Z_1Z$, 所以向量 $\overrightarrow{Z_1Z}$, 也与 $z - z_1$ 差对应。

师 向量 $\overrightarrow{Z_1Z}$ 起点, 终点分别是什么?

生 向量 $\overrightarrow{Z_1Z}$ 是以 Z_1 为起点, Z 为终点的向量。

师 点 Z_1, Z 对应复数分别是什么?

生 点 Z_1 对应的复数是减数 z_1 , Z 对应的复数是被减数 z 。

师 谁能概括一下复数减法几何意义是什么?

(学生议论片刻)

生 两个复数的差 $z - z_1$ 与连接这两个向量终点并指向被减数的向量对应。

(教师板书此段话并配图示)

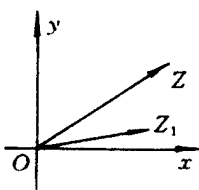


图 8-1

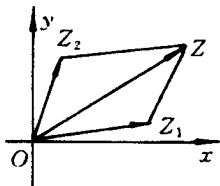


图 8-2

四、应用举例

例 1 设 $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3 + 2i$, 分别用代数及几何方法计算 $\overline{z_1 - z_2}$ 。

(学生口述, 教师板书)

解 $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(-2 + 5i) - (3 + 2i)} = \overline{(-2 + 5i) - (3 - 2i)} = \overline{(-2 - 3) + [5 - (-2)]i} = \overline{-5 + 7i} = -5 - 7i$ 。

生 在直角坐标系中标 $Z_1(-2, 5)$, 连接 OZ_1 , 向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与复数 z_1 对应, 标点 $Z_2(3, 2)$, Z_2 关于 x 轴对称点 $\overline{Z_2}(3, -2)$, 向量 $\overrightarrow{O\overline{Z_2}}$ 与复数 $\overline{z_2}$ 对应, 连接 $\overline{Z_2}Z_1$, 向量 $\overrightarrow{\overline{Z_2}Z_1}$ 与 $z_1 - \overline{z_2}$ 的差对应(如图 8-3)。

师 根据复数减法几何意义, 连接复数 $\overline{z_1 - z_2}$ 对应向量终点 Z_1 , $\overline{Z_2}$, 但一定要注意箭头指向被减数对应点 Z_1 , 否则, 方向不同将表示



不同的向量,对应复数也就不同。

向量 $\overrightarrow{Z_2 Z_1}$ 对应的复数与其终点对应复数是不是同一个复数呢?

生:不是,向量,对应复数 $\overrightarrow{Z_2 Z_1}$ 是 $z_1 - z_2 = -5 + 7i$ 而向量 $\overrightarrow{Z_2 Z_1}$ 终点 Z_1 对应复数是 $z_1 = -2 + 5i$ 。

师:哪个向量终点与复数 $z_1 - z_2$ 对应呢?

生:过 O 点作 $\overrightarrow{OZ_3} \parallel \overrightarrow{Z_2 Z_1}$,向量 $\overrightarrow{OZ_3}$ 终点 Z_3 对应向量为 $z_1 - z_2 = -5 + 7i$ (如图8-4)。

师:通过这道题我们知道向量 $\overrightarrow{Z_2 Z_1}$ 与向量 $\overrightarrow{OZ_3}$ 是相等向量,对应同一个复数,但向量 $\overrightarrow{Z_2 Z_1}$ 在复数减法的几何运算中作图比较方便,而向量 $\overrightarrow{OZ_3}$ 终点 Z_3 直接与复数 $z_1 - z_2$ 对应。

例2 根据复数的几何意义及向量表示,求复平面内两点间的距离公式。

(学生思考片刻口述,教师板书)

解:设复平面内的任意两点 Z_1, Z_2 分别表示复数 z_1, z_2 ,那么

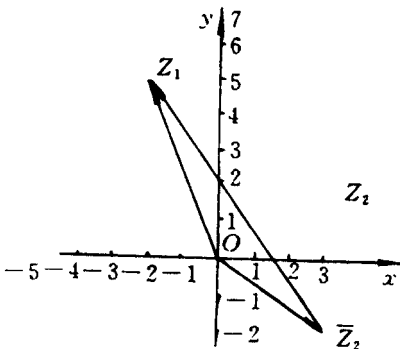


图 8-3

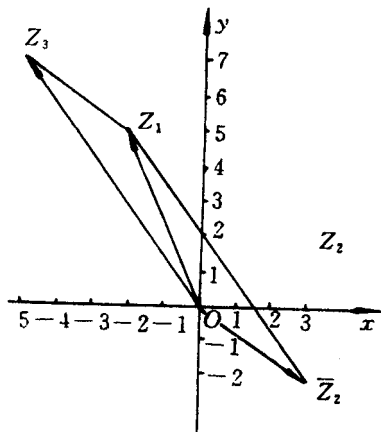


图 8-4



$Z_1 Z_2$ 就是复数 $z_2 - z_1$ 对应的向量, 点 Z_1, Z_2 之间的距离就是向量 $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$ 的模, 即复数 $z_2 - z_1$ 的模。如果用 d 表示点 Z_1, Z_2 之间的距离, 那么 $d = |z_2 - z_1|$ 。

师 很好。这就是复平面内两点的距离公式。这个公式与我们学过的两点间距离公式是否一致?

生 我认为一致。

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ 。则

$$\begin{aligned} & |z_2 - z_1| \\ &= |(x_2 + y_2 i) - (x_1 + y_1 i)| \\ &= |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

师 这就是说关于距离问题可以用复数表示。

例 3 在复平面内, 满足下列复数形式方程的动点 Z 的轨迹是什么。

$$(1) |z - 1 - i| = |z + 2 + i|;$$

师 我们应该如何认识这个方程?

(学生困惑, 教师引导)

师 我们先看方程左式, 右式分别表示什么?

生 方程左式可以看成 $|z - (1 + i)|$, 是复数 Z 与复数 $1 + i$ 差的模。

师 有什么几何意义吗?

生 是动点 Z 与定点 $(1, 1)$ 间的距离。

(学生活跃起来, 纷纷举手回答)

生 方程右式也可以写成 $|z - (-2 - i)|$, 是复数 z 与复数 $-2 - i$ 差的模, 也就是动点 Z 与定点 $(-2, -1)$ 间距离。这个方程表示的是到两点 $(+1, 1), (-2, -1)$ 距离相等的点的轨迹方程, 这个动点轨迹是以点 $(+1, 1), (-2, -1)$ 为端点的线段的垂直平分线。

$$(2) |z + i| + |z - i| = 4;$$



(学生议论后,举手回答)

生 方程可以看成 $|z - (-i)| + |z - i| = 4$, 表示的是到两个定点 $(0, -1)$ 和 $(0, 1)$ 距离和等于 4 的动点轨迹。

师 这个动点轨迹是什么曲线呢?

(学生稍有迟疑,有些同学小声议论)

生 是椭圆吧。

师 似乎回答的不够肯定,不妨回忆一下椭圆的定义。

(学生在教师的提示下一起回答)

生 在平面内,与两个定点 F_1, F_2 距离的和等于常数(大于 $|F_1 F_2|$) 的点的轨迹叫椭圆。

师 满足这个方程的动点轨迹是不是椭圆呢?

生 是。因为点 Z 到两个定点的距离和是常数 4, 并且大于两点 $(0, -1), (0, 1)$ 间的距离 2, 所以满足方程的动点轨迹是椭圆。

(3) $|z + 2| - |z - 2| = 1$ 。

(学生议论后,举手回答)

生 这个方程可以写成 $|z - (-2)| - |z - 2| = 1$, 所以表示到两个定点 $(-2, 0), (2, 0)$ 距离差等于 1 的点的轨迹, 这个轨迹是双曲线。

师 说的再准确些。

生 是双曲线右支。

师 很好。由 $z_1 - z_2$ 几何意义, 将 $z_1 - z_2$ 取模得到复平面内两点间距离公式 $d = |z_1 - z_2|$, 由此得到线段垂直平分线, 椭圆、双曲线等复数方程。使有些曲线方程形式变得更为简捷。且反映曲线的本质特征。

例 4 设动点 Z 与复数 $z = x + yi$ 对应, 定点 P 与复数 $p = a + bi$ 对应。求

(1) 复平面内圆的方程;

(学生口述, 教师板书)



解 设定点 P 为圆心, r 为半径, (如图 5)

由圆的定义, 得复平面内圆的方程 $|z - p| = r$ 。

师 这个圆的方程与我们以前所学实数表示的圆的方程是否一致。

生: 一致。由于 $|z - p| = |(x + yi) - (a + bi)| = |(x - a) + (y - b)i| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ 。又 $|z - p| = r$, 则 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 。

师 如果 P 在原点, 复平面内圆的方程是什么?

生: $|z| = r$ 。

(2) 复平面内满足不等式 $|z - p| < r$ ($r \in \mathbb{R}_+$) 的点 Z 的集合是什么图形?

(学生口述, 教师板书)

解: 复平面内满足不等式 $|z - p| < r$ ($r \in \mathbb{R}_+$) 的点的集合是以 P 为圆心, r 为半径的圆面部分(不包括周界)。

师 利用复平面内两点间距离公式, 可以用复数解决解析几何中某些曲线方程。不等式等问题。

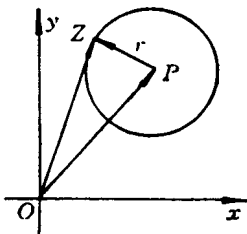


图 8-5

五、小结

师 我们通过推导得到复数减法法则, 并进一步得到了复数减法几何意义, 应用复数减法几何意义和复平面内两点间距离公式, 可以用复数研究解析几何问题, 不等式以及最值问题。

六、布置作业

P_{193} 习题二十七 2, 3, 8, 9。



课堂教学设计说明：

1. 复数加法法则是规定的,而复数减法则需要推导。推导过程要求每一步都要有合理依据,渗透转化思想,培养学生严谨思维品质。复数减法几何意义是教学难点,主要由于学生对复数及其几何表示还不很熟悉,在复数加法几何意义学习基础上,引导学生自己得到复数减法几何意义,有利于学生对复数几何意义以及复数减法几何意义理解。

2. 对复数减法几何意义应分三个层次。

例1 主要训练学生对复数减法几何意义应用,并通过此例题使学生对复数减法几何意义有具体认识,进一步使学生理解向量与向量终点表示复数的区别与联系,并体会两个相等向量表示两个复数差的各自方便之处。

例2 是对复平面内两点间距离公式的推导,这既是对复数减法几何意义再次应用,同时也为对复数方程的认识打下基础。

例3 和例4 是在例2 公式基础上将复数几何意义应用推广到用复数研究解析几何某些曲线、不等式等问题,使学生进一步体会复数减法几何意义的重要性。



《复数与几何》教学设计

教学目标

1. 掌握复平面、向量等有关概念,弄清复数集 C 与复平面内所有的点组成的集合之间一一对应关系,以及复数与从原点出发的向量之间的一一对应关系,弄清复数模的几何意义。
2. 通过数形结合研究复数,提高学生的数形结合能力,突出比较与类比的研究方法。
3. 感受到为真理执著追求的精神。进行辩证唯物主义教育。

教学重点与难点

重点: 复数与点与向量的对应关系以及复数的模。

难点: 自由向量与位置向量的区别,以及它们与复数的对应关系。

教学过程设计

师 我们已经学习了复数的概念。什么是复数?

生 形如 $a + bi$ 的数叫复数。

(学生有不同意见,小声议论)

师 谁有补充?

生 形如 $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的数叫复数。

(教师给予肯定)

师 $a, b \in \mathbb{R}$ 的条件很重要,实际上我们是用实数来定义的复



数,虽然我们知道了复数的定义,但是复数对于我们来说,总感到摸不着抓不住,不像实数,任何一个实数,都可以在数轴上找到一个点与它对应,那么复数到底在哪里呢?我们能不能像实数那样来表示复数呢?

生 数轴上的点不能表示虚数,只能表示实数。

师 那么用什么可以表示复数呢?注意复数是由 a, b 两个实数决定的,可以大胆设想一下,我们可以利用什么来表示复数?

生 可以用直角坐标系里的点来表示吗?

师 $\times \times$ 提出了一个想法,用直角坐标系内的点来表示复数。这种想法行不行呢?

(在黑板上画出直角坐标系,任取一点 (a, b))

师 能不能用点来表示复数呢?

生 可以。因为有一个复数 $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 就有一个点 (a, b) , 而有一个点 (a, b) , 就有一个复数 $a + bi$ 。

师 他刚才所说的实际想说明一点复数集与坐标系中的点构成的集合是一一对应的。的确,由复数相等的概念,我们知道一个复数 $a + bi$ 由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定,而有序实数对与直角坐标系中的点是一一对应的。因此我们完全可以建立复数集与点集之间的一一对应。看来,用点来表示复数是完全可以的。为了区别表示复数的点与其它的点,我们把这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面。那么在这个坐标系中 x 轴上的点与 y 轴上的点所表示的复数分别具有什么特点呢?

生 x 轴上的点的纵坐标为 0, 即复数的虚部为 0, 因此 x 轴上的点代表实数。

师 既然 x 轴上的点代表了所有实数,我们就把复平面中的 x 轴叫实轴。那么 y 轴上的点代表什么样的复数呢?

生 由于 y 轴上的点的横坐标都是零, 因此 y 轴上的点表示的是纯虚数。



师 同学们认为他说得对吗？

(大多数同学认为他说得对,少数人有疑惑)

生 原点也在 y 轴上,但 0 不是纯虚数,而是实数。所以 y 轴上的点除原点外表示的都是纯虚数。

师 他说得很对。 y 轴上只有这个原点捣乱,不然就可以表示所有的纯虚数。因此,我们把去掉原点后的 y 轴叫虚轴。这样虚轴上所有的点都表示纯虚数。那么,直角坐标平面与复平面有什么区别？

生 直角坐标平面中的 x 轴与 y 轴交于原点,而复平面中的实轴与虚轴没有交点。

师 我们通过建立复平面,将复数集与复平面上的点建立了一一对应的关系,这样复数对我们来说,也就不显得那样遥远了。但对于复数的认可,在 19 世纪可没那么简单。第一次认真讨论这种数的是文艺复兴时期意大利有名的数学‘怪杰’卡丹,他是 1545 年开始讨论这种数的,当时复数被他称作‘诡辩量’,几乎过了 100 年,笛卡尔才给这种‘虚幻之数’取了一个名字——虚数。但是又过了 140 年,欧拉还是说这种数只是存在于‘幻想之中’,并用 i (imaginary,即虚幻的缩写)来表示它的单位。后来德国数学家高斯给出了复数的定义,但他们仍感到这种数有点虚无缥缈,尽管他也感到它的作用。1830 年,高斯详细论述了用直角坐标系的复平面上的点表示复数 $a + bi$,使复数有了立足之地,人们才最终承认了它。看来复数从发现到最终被人们承认,的确经过了一个漫长坎坷的过程,可最终使人们接受他的还是它的几何表示,用点表示复数后,人们才觉得复数的存在。

(学生对数学史方面的知识很感兴趣,因为他们感到数学的发展是那样神秘,可以凭空造出数来,学生听得聚精会神,当最后得知是用点来表示复数这一理论使复数得以被人承认后,甚至还有些成就感)

师 用点表示复数后,我们还要介绍一种表示复数的方法,连接坐标原点 O 与点 Z ,得到一个具有长度且有方向的线段,这种既有



大小又有方向的线段叫有向线段,而有向线段表示的量就叫向量。那么什么叫向量呢?

生 既有大小又有方向的量叫向量。

师 能不能举出一些向量的例子?

生 物理中的力、速度、加速度等都是又有大小又有方向的量,它们都是向量。

师 现在的问题是我们能不能用向量来表示复数?我们一般将起点为 O , 终点为 Z 的向量记作 $\overrightarrow{OZ}$ 。

生 当然可以。因为有一个向量就对应一个点,而有一个点就对应一个向量,而点与复数有一一对应的关系,因此可用向量表示复数。

(学生议论纷纷,看起来有不同意见)

生 那我在复平面内任意画一个有向线段 $\overrightarrow{AB}$, 这个向量表示哪个复数呢?

(大家在思考)

师 这个问题提得很好。实际上,大家可以想一想,刚才 $\times \times$ 同学说一个向量对应一个点,一个点对应一个向量,对不对?怎么样改一下就对了?

生 应改为起点为原点的向量对应一个点,也就是起点为原点的向量与点构成一一对应。

师 既然这样,我们就知道,起点为原点的向量与复数是一一对应的。那其它向量怎么办?它们对应什么复数?能不能将他们移到原点来?

生 只要它们的长度和方向与 $\overrightarrow{OZ}$ 相同,就可以平移到起点为原点,与 $\overrightarrow{OZ}$ 重合的位置上。

师 实际上,我们把长度相等方向相同的向量叫做相等的向量,其实,我们只要规定相等的向量对应同一个复数,我们就可以用向量来表示复数了。对那些起点不在原点的向量,我们只要怎么做就可



以知道它所对应的复数了呢?

生 只要将它们平移到起点与原点重合,这时向量终点所确定的复数就是那些起点不在原点的向量所表示的复数。

(教师给予肯定)

师 在这个正六边形中有多少对向量相等,它们分别对应着哪些复数?

生 在图中, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 是相等的向量, 它们都对应复数 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OF}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 是相等的向量, 它们都对应复数 $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。

师 这样我们完成了今天我们要讨论的第二个问题:复数与向量。我们弄清楚了向量可以用来表示复数,相等的向量对应着同一个复数。一个复数所对应的向量唯一吗?

生:一个复数实际上可以对应无数个长度相等、方向相同的向量,只是这些向量的位置不同。

师 现在我们知道复数可以用点和向量来表示,它们之间的对应关系可以用下图来表示。

有了这种一一对应关系后,我们常把复数 $z = a + bi$ 说成点 $Z(a, b)$ 。或说成向量 $\overrightarrow{OZ}$ 。

师 在用有向线段表示向量时,有向线段的长度我们定义为向量的模,即线段 OZ 的长度为向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模。那么 $\overrightarrow{OZ}$ 可以表示复数 $z =$

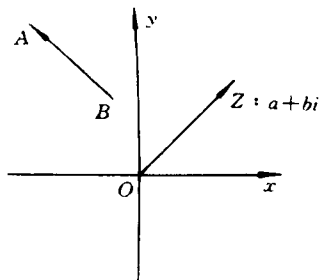


图 8-15

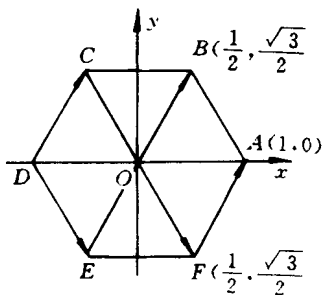
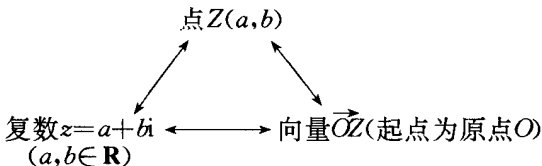


图 8-16



$a + bi$, 那么 $\vec{OZ}$ 的模可以表示复数的哪个量呢? 在实数集中, 一个数的绝对值的几何意义就是数轴上的点到原点的距离。在复数集中呢?

生 向量 $\vec{OZ}$ 的模就是复数的绝对值。

师 他的意思说出来了, 但在复数中, 我们一般不叫绝对值, 叫复数的模。因此 $\vec{OZ}$ 的模就叫复数的模, 只有复数为实数时, 我们叫绝对值。那么复数的模具有什么样的几何意义?

生 复数的模的几何意义是表示复数的点到原点的距离。

(教师给予肯定, 并指出复数模的几何意义与实数的绝对值的几何意义是统一的。)

师 复数的模用什么表示呢?

生 用实数集中绝对值的符号表示, z 的模, 记作 $|z|$ 。

师 复数 $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), 那么 $|z| = ?$

生 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 是点 $Z(a, b)$ 到原点的距离。

例 1 求复数 $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}i$ 的模, 并且比较它们的大小。

(学生板演)

$$\text{解: } |z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, |z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2}.$$

因为 $5 > \frac{3}{2}$, 所以 $|z_1| > |z_2|$ 。

师 我们知道复数一般不能比较大小, 而复数的模是实数, 可以比较大小。



(将 z_1, z_2 所表示的点画在复平面上,再将它们所表示的向量画出来,强调这三者的转化)

例 2 设 $z \in C$, 满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形?

(1) $|z| = 4$; (2) $2 \leq |z| < 4$ 。

生:(1)表示到原点距离为 4 的点。

师:这样的点构成一个什么图形?

生:是原点为圆心,半径为 4 的圆。

师:是圆面还是只有边界的圆?为什么?

生:应该是表示只有边界的圆。因为与复数 z 对应的点 Z ,由 $|z| = 4$,知道 $|OZ| = 4$,即点 Z 到原点的距离为 4。所以 z 表示的点 Z 构成一个半径为 4 的圆。

生:(2)表示一个圆环。由于 $|z|$ 的几何意义是点 Z 到原点的距离,所以 $2 \leq |z| < 4$ 表示到原点距离大于等于 2,小于 4 的点所构成的图形。

师:准确地说这个图形应当是半径为 2 与半径为 4 的圆构成的圆环内容及内边界。包不包括边界,主要是由原不等式中的等与不等决定的。

例 3 用复数表示下图中的阴影部分。

生甲: $|z| < 3$ 且虚部 < -1 。由于图中所示的点在半径为 3 的圆中,且纵坐标小于 -1。

生乙:还可以用实部表示。 $|z| < 3$, 且 $-2\sqrt{2} < \text{实部} < 2\sqrt{2}$ 。

师:这种表示是否正确?

(学生小声议论)

师:实部 $= \pm 2\sqrt{2}$ 这样的复数对应的点是什么图形?

生:是两条直线。

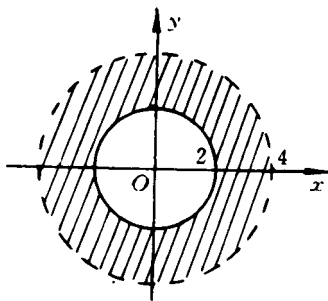


图 8-17

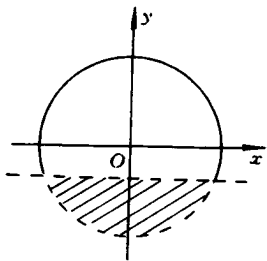


图 8-18

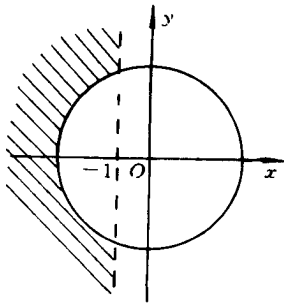


图 8-19

师 夹在这两条直线中间又满足 $|z| < 3$ 的点显然不仅仅是阴影部分。请将 $|z| < 3$, 且 $-2\sqrt{2} < \text{实部} < 2\sqrt{2}$ 的点表示出来。

(学生到黑板画出图)

师 因此刚才乙同学的想法是好在不满足于用一种方法表示, 肯思考, 但这个题无法用实部来表示。

(下面提问第 2 小题)

生: $|z| \geq 3$, 且实部 ≤ -1 。

师 能不能用虚部表示呢? 若用 $-2\sqrt{2} < \text{虚部} < 2\sqrt{2}$, 行不行?

生 不对。

(学生画出 $|z| \geq 3$, 且 $-2\sqrt{2} < \text{虚部} < 2\sqrt{2}$ 所表示的图形)

师 看来用实部还是虚部表示, 一定要全盘考虑, 表示出来后, 还要反过来检查一下是否符合题设条件。

(教师小结)

师 这节课我们共同探寻了复数的几何表示方法以及复数模的几何意义。要特别重视数与点与向量之间的对应关系, 在研究的过程中要特别注意与实数的联系与区别。

补充作业

1. 判断下列命题的真假, 并说明理由:



① $z \in C \Rightarrow |z| \geq 0$; ()

② $|z| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq z \leq 1$; ()

③ $|\text{虚部}| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \text{虚部} \leq 1$; ()

④ $z_1^2 + z_2^2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0$; ()

⑤ $|z_1| + |z_2| = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0$; ()

⑥ $|z_1| = |z_2| \Rightarrow z_1 = z_2$ 。 ()

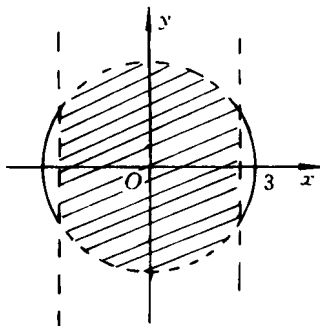


图 8-20

2. 已知 $|x + yi| = 2$, 求表示复数 $x + yi$ 的点的轨迹。

3. 求证: 复平面内分别和复数 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$, $z_3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$, $z_4 = -2 + i$ 对应的四个点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆。

4. 设 $z \in C$, 满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形?

- (1) $|z| = 3$; (2) $|z| < 3$; (3) $3 < |z| \leq 5$; (4) 实部 > 0 , 虚部 > 0 且 $|z| < 4$ 。

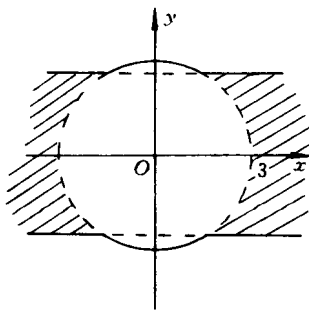


图 8-21

作业答案或提示

1. ① $\checkmark$; ② $\times$; ③ $\checkmark$; ④ $\times$; ⑤ $\checkmark$; ⑥

$\times$ 。

2. $x^2 + y^2 = 4$ 。 3. 略。

4. (1) 以原点为圆心, 半径为 3 的圆;

(2) 以原点为圆心, 半径为 3 的圆面, 不包括边界;

(3) 以原点为圆心, 半径为 3 和 5 的圆构成的圆环内部, 包括外边界;

(4) 以原点为圆心, 半径为 4 的圆在第一象限的部分, 不包括边界。



课堂教学设计说明：

本节课是一节内容较为简单的概念课,但所涉及的知识内容,非常重要,它是学习复数的重要一环。

本设计着重突出主体性教学的原则,尽量做到让学生来发现复数的几何表示法,由实数自然地过渡到复数。本节课还将复数的点的表示与向量的表示集中在一节课处理,笔者认为这样有利于学生对复数几何意义的整体把握。

在教学中还注意通过数学史的故事,激发学生的学习兴趣,增强学生的自信心,并自然地将思想教育渗透到教学中。



《立体几何绪言》教学设计

课题

立体几何序言课

教学目的

1. 使学生了解立体几何研究的对象、内容；
2. 使学生初步理解立体几何中的主要数学思想方法(类比思想、转化思想、展开思想)；
3. 培养学生空间想象能力,初步建立空间概念。

教学重点和难点

教学的重点是空间概念的建立及立体几何中的主要数学思想方法
难点是空间概念的建立。

教具

正方体、正四面体骨架、圆柱、圆锥等模型 学生每人准备六根长度相等的牙签或六根火柴。

教学方法

引导类比探索法。



教学过程

一、引入新课

师 请同学们用六根长度相等的牙签(或火柴)搭正三角形,试试看,最多搭成几个正三角形?

生 开始在桌面上摆,有的摆成两个余下一根牙签,有的在桌面上搭成塔形,塔底为三角形,出现四个三角形,学生兴趣很浓,积极探索摆法。最后都探索到,在空间,可搭成四个正三角形。

师(小结)在平面内(桌面)最多只能搭成两个,而在空间能搭成四个。

同时,向学生展示正四面体骨架模型、再让学生看投影 1 中的图 1。

[点评 通过小实验,创设了学习情境,激发了学生学习的兴趣,一开始就把学生的视线由平面引导到了空间。]

师 请同学们想一想,是否存在三条直线两两互相垂直?若存在,请举出实际中的例子。

生 有的在纸上画,有的用铅笔、钢笔等演示,有的在教室四周观察。议论纷纷,有的说不存在,有的说存在,各持己见,争论不休。

师 在两种不同意见的学生中各选一人,让他们陈述理由。

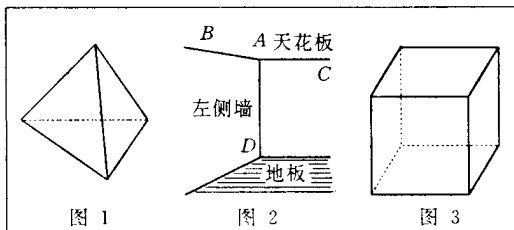
生甲 不存在,因为若 $a \perp c, b \perp c \Rightarrow a \parallel b$ 。

生乙 存在,如教室墙角处的三条直线两两互相垂直。

师(小结)在同一平面内不存在,如甲的理由;但在空间是存在的,如乙同学所举的实例,教室墙角处的三条直线 AB 、 AC 、 AD 两两互相垂直(如投影 1 中图 2 所示)。请同学们观察正方体(向学生展示正方体模型)中一个顶点处的三条棱之间的关系,也是两两互相垂直的(如投影 1 中图 3)。



投影 1



师 现实世界中许多问题,只在平面内研究是很不够的,还需要在空间这个更广阔的领域内来考虑和研究,这就是我们将要学习的“立体几何”(板书课题)。

[点评 问题 2 更具有探索性,激活了学生的思维,通过学生自己探索、辩论,教师小结,将学生的思维活动由平面引导到空间,促使了学生空间概念的形成。]

二、讲授新课

1. 立体几何研究的对象、内容

师 平面几何研究的对象、内容是什么?

生 对象是平面图形;内容是平面图形的画法、形状、位置关系、大小计算及应用。

师 那么立体几何研究的对象、内容又是什么呢?

让学生观察正方体、圆柱、圆锥、正四面体骨架等模型,引导学生与平面几何进行类比,在学生回答的基础上,教师小结为投影 2 的内容。

投影 2

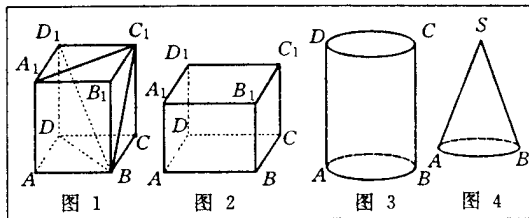
立体几何研究的对象——空间图形(由空间的点、线、面组成的图形,也可以看成空间点的集合,如投影 3 中图 1—图 4 都是空间图形);
 立体几何研究的内容——空间图形的画法、形状、位置关系、大小计算及应用。是平面几何的推广与发展。



[点评:与平面几何类比,非常自然地揭示了立体几何研究的对象和内容。]

师 同学们虽然还没有掌握空间图形的画法,但已经见到了老师画的正方体、长方体、圆柱、圆锥的直观图,如投影3中的图1—图4。同学们想一想,空间图形与平面图形的画法有什么不同?

投影3



生:平面图形的画法是真实的,而空间图形的直观图不真实。如在投影3中,正方体、长方体的底面本是正方形和矩形,但在直观图中都画成了平行四边形。圆柱、圆锥的底面本是圆,但在直观图中画成了椭圆。

师 同学们说得对,在画法上有着很大差异。同学们知道,平面图形中的位置关系主要是研究线与线的位置关系。那么对于空间图形来说,除了要研究线与线的关系外,还有哪些位置关系呢(用正方体、长方体模型及投影3中的图形启发学生从构成空间图形的基本元素——线与面作答)?

生 因为空间图形是由点、线、面构成的,因此要研究线与线、线与面、面与面的位置关系。

师 在平面图形中,我们要经常计算一些角的大小和线段的长度,面积的大小。对于空间图形,也要计算有关角的大小、线段的长度,除了面积外,还有体积的计算。对于投影3中的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,请同学们

①说出下列各角的度数: $\angle B_1A_1C_1$ 、 $\angle B_1C_1A_1$ 、 $\angle BC_1B_1$;



②试计算 $\angle BC_1A_1$ 的大小；

③设 $AB = a$, 试求正方体的表面积和体积。

生 计算并回答: ①都是 45° ; ②连结 A_1B , 因 $\triangle BC_1A_1$ 是等边三角形, 故 $\angle BC_1A_1 = 60^\circ$; ③ $S_{\text{表}} = 6a^2$, $V = a^3$ 。

师 通过解答上述问题, 同学们已经看到 在研究空间图形时, 不能依据对图形的直觉做出判断、而应依据正确的推理、计算做出结论。如 $\angle A_1B_1C_1$, 从直观看图形是钝角, 但实际上是直角。

[点评 通过学生熟知的正方体、长方体、圆柱、圆锥的直观图, 使学生深刻认识到了空间图形与平面图形在画法中的差异; 从组成空间图形的元素入手, 揭示了空间图形中要研究线线、线面、面面之间的位置关系 通过对正方体的简单计算, 向学生说明了在研究空间图形时, 不能只依据直觉做判断, 为学生提早打了“预防针”。这部分教学设计, 深入浅出, 既阐明了立体几何研究的内容, 又加强了学生空间概念的形成。]

2. 立体几何中的主要思想方法

(1) 类比思想

师 判断下列命题是否正确 (a, b, c 表示直线):

① $a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$; ② $a \perp c, b \perp c \Rightarrow a \parallel b$;

生 在同一平面内, ①、②都是真命题 在空间内, ①仍然是真命题, 但②不正确, 如教室墙角处的三条直线 $a \perp c, b \perp c, a \perp b$, a 与 b 相交。

师 对、命题①在空间仍然是真命题, 就是我们将要学习的平行公理, 同学们在物理课中见到的三棱镜的三条侧棱就是这种关系。命题②在空间就不成立了。由此知平面几何中的有些结论在空间成立。有些结论在空间不成立。因此, 在立体几何学习中, 我们要善于与平面几何做比较, 认识其相同点, 发现其不同点, 这种思想方法称之为类比思想。

(2) 转化思想

师 在投影 3 的图 1 中, 若设正方体的棱长为 a , 请同学们计算:



① BD_1 的长 ; ② $\angle DD_1B$ 的余弦。

生甲 : ① $\sqrt{3}a$; ② $\cos \angle DD_1B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

师 : 请你说一下,是怎样算得的?

生甲 : 连结 BD , 解 $Rt \triangle D_1DB$ 。

师 : 解这个问题实际上是在对角面 BDD_1B_1 (如投影 4 图 1) 中进行的,即空间图形的问题一般要转化为平面图形问题去解决。只要转化到平面图形中,就可以运用平面几何知识去解决。这就是转化的思想。

(3) 展开思想

师 : 在初中,同学们学习了圆柱、圆锥的侧面积公式,大家记得这两个公式是怎样推出来的吗?

生 : 展开。

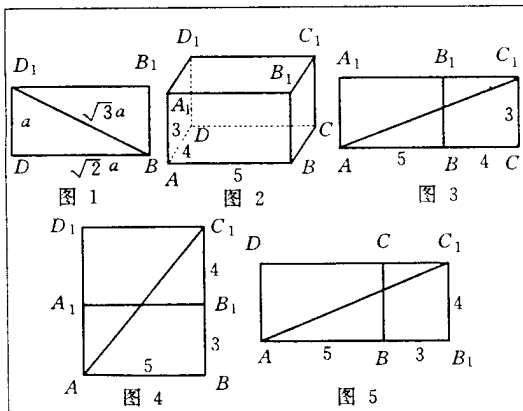
师 : 对,就是将圆柱、圆锥侧面分别展开为矩形和扇形,从而将问题转化为计算矩形和扇形的面积。像这样将空间图形展开为平面图形来处理问题的思想方法称为展开思想。请同学们考虑下面的问题 : 在投影 4 图 2 的长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$,问从点 A 出发沿长方体表面到达点 C_1 的路径有几种? 最短路程是多少? (引导学生观察长方体模型,分析、探索,根据学生的发言讨论,教师归纳)

师(小结) : 从点 A 出发沿长方体表面到达 C_1 点的路径有 : ① $A - BB_1 - C_1$; ② $A - A_1B_1 - C_1$; ③ $A - BC - C_1$ 。要求最短路程,怎么办? 生 : 展开,在展开图中计算比较。

师 : 对。需将长方体展开进行计算,按照三种不同路径,有如投影 4 中图 3~5 的三种展开方法。根据平面几何知识知,两点之间,线段最短,故在三种路径中最短路程就是线段 AC_1 的长,请同学们算一算,最短路程是多少?



投影 4

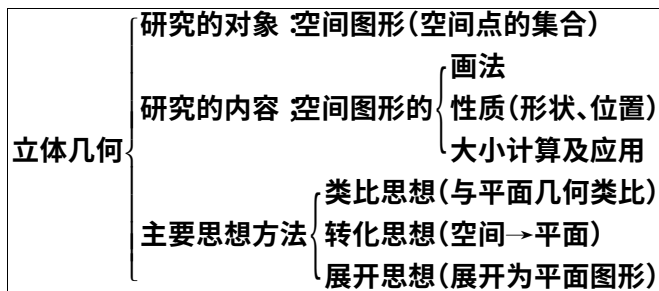


生 在图 3 中,得 $AC_1 = \sqrt{90}$; 在图 4 中,得 $AC_1 = \sqrt{74}$; 在图 5 中,得 $AC_1 = \sqrt{80}$ 。故沿图 4 中的路线走,路程最短,最短路程是 $\sqrt{74}$ 。

[点评 在学生已有的平面几何知识的基础上,从问题入手,在解决问题中,揭示了立体几何研究问题的主要思想方法,培养了学生空间想象能力,促进了学生空间概念的建立。]

三、课堂小结(教师指导学生小结,归纳为投影 5)

投影 5





四、课堂练习

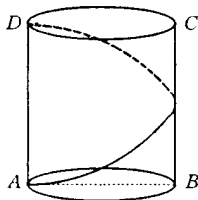
投影 6

1. 判断正误,错误的举出反例:

① 过一点有且只有一条直线与已知直线平行。

② 过已知直线上一点有且只有一条直线与这条直线垂直。

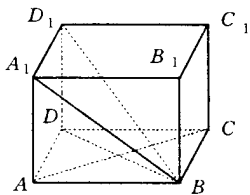
2. 在如右图的圆柱中,底面半径为 2cm ,高为 4cm ,求从点 A 绕圆柱侧面一周到点 D 的最短路程(用根式表示)。



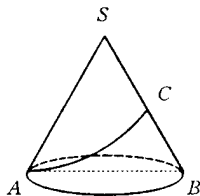
五、课外作业

1. 在下图的长方体中,已知 $AB = 5\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$, $AA_1 = 3\text{cm}$,求:

(1) BD 、 A_1B 、 BD_1 的长度;(2) $\angle ACB$ 、 $\angle BC_1C$ 、 $\angle DD_1B$ 的余弦值。



第 1 题



第 2 题

2. 在上图的圆锥中,已知底面半径为 5cm ,母线长为 10cm , A 、 B 是底面圆直径的两个端点, C 为母线 SB 的中点,求从点 A 沿圆锥侧



面到点 C 的最近路程(精确到 0.1cm)。

[点评 本节课,紧紧围绕教学目的,抓住教学重点,从学生已有的平面几何知识入手,利用模型和投影图形,启发、引导学生积极探索,大胆实践,极大地激发了学生学习的积极性和创造性,使抽象的序言课上得具体、生动,内容丰富。既使学生获取了知识,又培养了学生的能力。为学生学习立体几何创造了一个良好的开端,成功地拉开了立体几何教学的帷幕。]

(板书设计 略)



《平面的基本性质之一》教学设计

教学目标

1. 了解三个公理及公理 3 的三个推论；
2. 了解推论 1 的证明过程。

教学重点和难点

公理 3 的引入与掌握及推论 1 的证明是教学的重点也是教学的难点。

教学设计过程

师：上节课我们讲过平面是原名，没有方法定义，所以平面的性质只能以公理的形式给出，我们今天就来研究以公理形式给出的平面的性质。

（当教师说完上述话后，拿出一根小棍作为直线的模型，一矩形硬纸板作为平面的模型，让学生自己也拿同样的模型，师生一起观察。然后，再提出问题）

师：直线与平面有几种位置关系？

生：有三种位置关系：平行，相交，在平面内。

师：相交时，直线与平面有且只有几个公共点？

生：有且只有一个公共点。

师：当直线与平面有几个公共点时，我们就能判定直线在平面内？



生:只要有二个公共点。

师:对,这就是公理1。(同时板书)

公理1 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内。(如图1)

这时我们说直线在平面内,或者说平面经过直线。

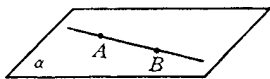


图 1

师:为了书写的简便,我们把代数中刚学习过的有关集合的符号,引入立体几何中。

我们只把点作为基本元素,于是直线、平面都作为“点的集合”,所以:

点 A 在直线 a 上,记作 $A \in a$;

点 A 在直线 a 外,记作 $A \notin a$;

点 A 在平面 α 内,记作 $A \in \alpha$;

点 A 在平面 α 外,记作 $A \notin \alpha$;

直线 a 在平面 α 内,记作 $a \subset \alpha$;

直线 a 在平面 α 外,记作 $a \not\subset \alpha$ 。

所以公理1用集合符号为: $A \in a$, $B \in a$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, 则有 $a \subset \alpha$ 。

公理2可用如下方法引入:教师用矩形硬纸板的一顶点放在讲台上,让学生观察,并同时提出问题。

师:看模型,能否说这两个平面只有一个公共点?

生:不能,因为平面是无限延展的,所以这两个平面应该有一条经过这公共点的直线。

(这时教师用手动矩形硬纸板,表示同意学生的意见,并说)

师:我们只能用有限的模型或图形来表示无限延展的平面,所以我们有时要看模型或图形,但又不能受模型或图形的限制来影响我们对平面的无限延展的了解。(同时板书)

公理2 如果两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线。(如图2)



用集合的符号,公理2可记作: $P \in \alpha$,

$P \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = a, P \in a$ 。

关于公理3的引入,可用类比思想,按如下步骤进行。

师 如何确定一条直线?

生 过两点可以确定一条直线。

师:为什么过一点不能确定一条直线?

生 因为过一点可以有无数条直线,所以过一点不能确定一条直线,而过两点有并且只有一条直线,所以说过两点可以确定一条直线。

师 过一点能不能确定一个圆?

生 不能,因为过一点可以有无数个圆,而且这无数个圆的圆心、半径都在变。

师 过两点能不能确定一个圆?

生 不能,因为过两点的圆也有无数个,这无数个圆的圆心都在以这两点为端点的线段的垂直平分线上。

师 过不在一直线上的三点 A, B, C 能不能确定一个圆?

生 能。连 AB, BC , 作 AB, BC 两线段的垂直平分线相交于 O , 以 O 为圆心, OA 为半径作圆, 因为圆心、半径都是唯一确定的, 所以圆也是唯一确定的。

师 通过复习我们了解了直线的确定和圆的确定。现在我们要来研究平面的确定。

过一点能不能确定一个平面?

(这时教师用一根小棍的一端作为空间的一个点, 用一矩形硬纸板作为过这个点的平面, 同时用手在硬纸板不离开小棍的一端条件下而能‘动’起来)

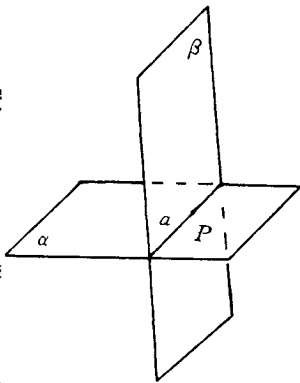


图 2



我们来看一看这个模型。

生 不能,因为过一点可以有无数个平面。

师 过两点能不能确定一个平面?

(这时教师用相交两个小棍的两个端点作为空间两点,再用硬纸板作为过这两点的平面,教师用手使这个平面仍然‘动’起来)

我们来看这个模型。

生 不能,因为过两点仍有无数个平面。

师 过不在一直线上的三点能不能确定一个平面?

(这时教师用相交于一点的三根小棍的三个端点作为空间不在一直线上的三个点,当把作为平面的硬纸板放在上面时,这时作为平面的硬纸板不能再‘动’了,因为一动就要离开其中的一个点,就不满足题目中条件的要求)

我们来观察这个模型。(如图 3)

生 能。因为过这三点的平面有一个而且只有一个。

师 这就是我们今天所要讲的公理 3。

公理 3 经过不在同一条直线上的三个点,有且只有一个平面。(如图 4)

师 例如一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了,但要注意,锁与合页不能放在同一直线位置上,否则,门也无法固定。

师 以上我们讲了三个公理,下面我们来应用这三个公理证明三个推论。

推论 1 经过一条直线和这条直线外一点,有且只有一个平面。

已知 点 A , 直线 a , $A \notin a$ 。(如图 5)

求证 过点 A 和直线 a 可以确定一个平面。

证明 存在性。

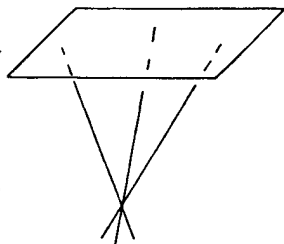


图 3



图 4



因为 $A \notin a$, 在 a 上任取两点 B, C 。

所以过不共线的三点 A, B, C 有一个平

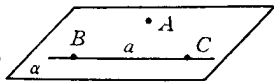


图 5

面 α 。(公理 3)

因为 $B \in a, C \in a$,

所以 $a \in \alpha$ 。(公理 1)

故经过点 A 和直线 a 有一个平面 α 。

唯一性 如果经过点 A 和直线 a 的平面还有一个平面 β , 那么 A

$\in \beta, a \subset \beta$,

因为 $B \in a, C \in a$,

所以 $B \in \beta, C \in \beta$,

(公理 1)

故不共线的三点 A, B, C 既在平面 α 内又在平面 β 内。

所以平面 α 和平面 β 重合。(公理 3)

所以经过点 A 和直线 a 有且只有一个平面。有时“有且只有一个平面”, 我们也说“确定一个平面”。

类似地可以得出下面两个推论:

推论 2 经过两条相交直线, 有且只有一个平面。(如图 6)

推论 3 经过两条平行直线, 有且只有一个平面。(如图 7)

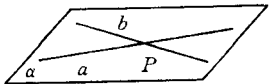


图 6

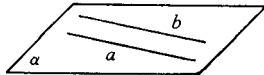


图 7

下面应用平面的基本性质证明空间有关点和直线的共面问题。
(空间的几个点和几条直线, 如果都在同一平面内, 简单地说它们“共面”, 否则说它们“不共面”)

例 1 两两相交且不过同一点的三条直线必在同一个平面内。
(如图 8)

已知: $AB \cap AC = A, AB \cap BC = B, AC \cap BC = C$ 。



求证 直线 AB, BC, AC 共面。

证法一 因为 $AB \cap AC = A$,

所以直线 AB, AC 确定一个平面 α 。(推

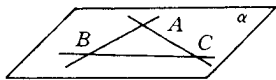


图 8

论 2)

因为 $B \in AB, C \in AC$,

所以 $B \in \alpha, C \in \alpha$,

故 $BC \subset \alpha$ (公理 1)

因此直线 AB, BC, CA 都在平面 α 内, 即它们共面。

证法二:

因为 $A \notin$ 直线 BC 上,

所以过点 A 和直线 BC 确定平面 α 。(推论 1)

因为 $A \in \alpha, B \in BC$, 所以 $B \in \alpha$

故 $AB \subset \alpha$,

同理 $AC \subset \alpha$,

所以 AB, AC, BC 共面。

证法三:

因为 A, B, C 三点不在一条直线上,

所以过 A, B, C 三点可以确定平面 α 。(公理 3)

因为 $A \in \alpha, B \in \alpha$, 所以 $AB \subset \alpha$ 。(公理 1)

同理 $BC \subset \alpha, AC \subset \alpha$, 所以 AB, BC, CA 三直线共面。

这个例题证完后, 教师可以提出两个问题让学生思考。

师 在这题中“且不过同一点”这几个字能不能省略, 为什么?

生 不能, 因为三条直线两两相交且过同一点, 则这三条直线可以共面, 也可以不共面(这时学生可用手中的三个小棍作为模型来说明什么情况共面, 什么情况不共面)

师 这个题我们能不能推广? 即把这题改为 四条直线两两相交且不过同一点, 则这四条直线必共面; 也可以把这题推广为更一般地情况: n 条直线两两相交且不过同一点, 则这 n 条直线必共面, 当



然这两种推广的情况的证明与例 1 类似,这里只要求你们了解这两种情况,不要求你们去证明。

师:由例 1 的证明可知,要证明空间的点、直线共面,可以先由某些元素确定一个平面,然后证明其他的元素也在这个平面内。

师:今天我们讲了平面的基本性质,就是三个公理。公理 1 的作用是判定直线在平面内的根据;公理 2 是判定两个平面相交的根据;公理 3 及三个推论是确定一个平面的根据。

作业

课本习题一(要求写出已知、求证、证明,并画出图形)

课堂教学设计说明:

类比推理是立体几何教学中最常用的一种教学思想,或者说是一种教学方法,特别当我们学习过[美] G·波利亚著《数学与猜想》(科学出版社出版)后,更提高了在立体几何教学上运用“类比推理”这思想的自觉性。所以关于公理 3 的引入就是运用了类比推理的思想。事先复习了平面几何中两点确定一直线,不在同一直线上三点确定一圆以后,就很自然地提出关于平面的确定问题。这样学生对平面的确定问题的理解就比较深刻。

[美] G·波利亚在《数学与猜想》第 26 页所说:“伟大的类比。…平面几何和立体几何作类比,这种类比有多种多样因而常常是含糊的和不是总是确定的,但是它是提出新问题和获得新发现取之不竭的泉源”。所以,在这个教案设计说明中,建议教立体几何教师可首先看一看[美] G·波利亚著《数学与猜想》第一卷中的一些有关章、节,这样就可以更自觉地、灵活地在立体几何教学和研究中来运用“类比推理”。

平面概念的引入,平面是原名,和平面几何中点、直线一样不能定义只可以描述、理解并明确指出平面是无限延展的(与直线的无限延长作类比)。



关于平面的画法,可从正方体、长方体的画法入手引入水平放置的平面的画法。而且正方体、长方体直观图的画法以后在教学中要经常用到,所以在第一节课中就使学生掌握它们的画法,对今后的教学很有必要,很有好处。



《直线与平面垂直的判定和性质》 教学设计

素质教育目标

(一)知识教学点

掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理 ;掌握斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角、直线和平面的距离的概念 ;了解三垂线定理及其逆定理。

(二)能力培养点

通过探索线面垂直的定义、判定、性质定理以及三垂线定理及其证明,进一步培养学生观察、发现问题的能力和空间想象能力,培养学生进一步空间计算能力,并且加强思维能力训练。

(三)德育渗透点

激发学生学习兴趣,培养学生不断发现、探索新知的精神 ;渗透事物相互转化和理论联系实际的辩证唯物主义观点,并通过图形的立体美、对称美,培养教学审美意识。

重点、难点、疑点及解决办法

1. 重点

- (1)线面垂直的判定定理与性质定理 ;
- (2)线面所成的角的计算 ;
- (3)三垂线定理及其逆定理。

2. 难点



线面垂直的判定定理的证明。

3. 疑点

“斜线和平面所成的角,是这条斜线和这个平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角”这一真命题的理解。

课时安排

4 课时

教学步骤

(第一课时)

(一)课题引入

以复习‘两条直线互相垂直的定义’引出并让学生观察、思考 教室内直立的墙角线和地面的位置关系是什么?直立于地面的旗杆和地面的位置关系又是什么?从而使学生在头脑中产生直线和平面垂直的初步形象,引出课题。

(二)直线和平面垂直的定义

为使学生从感性认识逐步上升到理性认识,展开以下问题:

1. 阳光下,旗杆与它在地面上的影子所成的角度是多少?
2. 随着时间的变化,影子的位置会移动,而旗杆与影子所成的角度是否会发生改变?
3. 旗杆 AB 与地面上任意一条不过点 B 的直线的位置关系又是什么?所成的角为多少?

再让学生看一个演示实例 将书打开直立在桌面上,观察书脊和桌面上任何直线的位置关系。

根据两个实例的结论,让学生归纳、概括出线面垂直定义。

如果一条直线 l 和一个平面 α 内的任意一条直线都垂直,我们就说直线 l 和平面 α 互相垂直,记作 $l \perp \alpha$,直线 l 叫做平面 α 的垂线,



平面 α 叫做直线 l 的垂面。 l 与 α 一是相交,交点叫做垂足,即 $l \perp \alpha, \alpha$

$\subset l \Rightarrow l \perp \alpha$

以下两个真命题,可以当作‘定理’直接应用。

(1) 过一点有且只有一条直线和一个平面垂直;

(2) 过一点有且只有一个平面和一条直线垂直。

(三) 直线和平面垂直的判定

学习了线面垂直的定义,对于直线 l 和平面 $\alpha, l \perp \alpha \Leftrightarrow l$ 垂直于 α 内的任意一条直线,利用这个定义,我们可以判定直线和平面垂直,先看一个例子。

例 1 求证 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面。

已知 $a \parallel b, a \perp \alpha$, 图 9-30。

求证 $b \perp \alpha$

证明 设 m 是 α 内的任意一条直线。

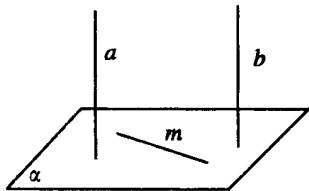


图 9-30

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ m \subset \alpha \\ a \parallel b \\ m \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp m \quad \left. \begin{array}{l} b \perp m \\ a \perp m \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$$

上面的例 1 给出了判定直线和平面垂直的一个命题,以后我们可以直接利用它来判定直线和平面垂直。

再讲线面垂直的判定定理前,先提出以下两个问题让学生思考:



(1) 如果一条直线和一个平面内的一条直线垂直,此直线是否和平面垂直?

(2) 如果一条直线和一个平面内的两条直线垂直,此直线是否和平面垂直?

这问题学生不难得出结论:如果一条直线和一个平面内的一条或两条平行直线垂直,那么此直线不一定和平面垂直。紧接着,提问:如果一条直线垂直于一个平面内的两条相交直线,那么此直线是否和平面垂直?而后,引出直线和平面垂直的判定定理,也称为“三垂线定理”。

直线和平面垂直的判定定理 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面。

已知: $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \cap n = B, l \perp m, l \perp n$ 。

求证: $l \perp \alpha$ 。

教师可从以下三个方面引导学生进行分析:

(i) 要证 $l \perp \alpha$, 根据定义, 转化为证明垂直于平面内的任意一条直线 g (第一次转化)。接下来应让学生清楚 l, g, m, n 之间的位置关系有哪几种(分类)。通过提问, 让学生思考, 并鼓励学生主动、踊跃来回答。之后, 投影显示四种情况(图 9-31):

启发学生, 只要证明了图(1)的情况, 根据异面直线所成的角, 其他三种情况也就得证了。

下面对图(1)进行分析

(II) 构造平面图形解决问题(第二次转化)

先对直线 g 分类: (i) 当 g 与 m (或 n) 重合已证; (ii) 当 g 与 m, n 都不重合时, 启迪学生: 如果能证明 g 是 l 上某条线段的中垂线, 问题就解决了。根据对称性, 让学生找到线段 AA' 。接下来, 证明的关键是: 证明 g 上一点 (B 点除外) 到点 A, A' 的距离相等。需要添加什么样的辅助线? 提示学生: 在平面 α 内作一条直线 CD , 与直线 m, n, g 分别相交于 C, D, E , 会怎样? 由此, 连结 $AC, A'C, AD, A'D$,

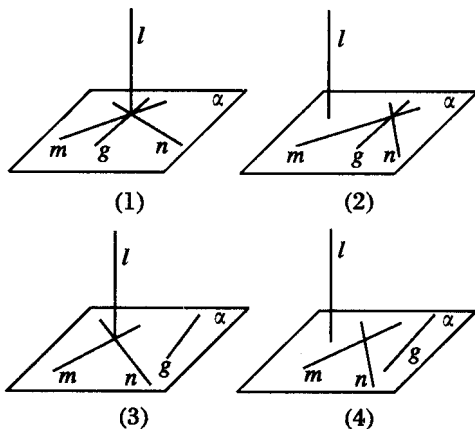


图 9-31

AE 、 $A'E$, 通过两次三角形全等得到 $AE = A'E$, 从而证得 g 是线段 AA' 的中垂线, 即得 $l \perp g$ 。(图 9-32)

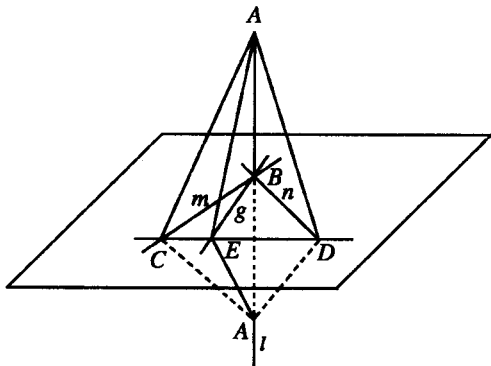


图 9-32

(Ⅲ) 如果 l 、 g 中有一条或两条不经过点 B (其他三种情况), 由前面的分析容易得证 (第三次转化)。

证明的方法的书写可由学生阅读课本 P_{22} 。



(四) 课堂练习

课本 P₂₃ 练习 1 (1) (✓), (2) (×), (3) (✓) 2 (利用三垂线定理证) 3 (利用 Rt△中, 直角边小于斜边)。

(五) 布置作业

课本 P₂₈ 习题 9.4 1 (1), (2), (4) 2 3 4 5。

(第二课时)

(一) 复习引入

1. 线面垂直的定义；
2. 上节的例 1 (也可是线面垂直的判定定理之一)；
3. 线面垂直的判定定理。

(二) 导入新课

直线和平面垂直的性质

1. 直线和平面垂直的性质定理 如果两条直线同垂直于一个平面, 那么这两条直线平行。

此定理是上一节课的例 1 的逆命题。

已知 : $a \perp \alpha, b \perp \alpha$ 。

求证 : $a \parallel b$ 。

证明 如图 9-33。

假设 $a \neq b$ 。设 $b \cap \alpha = O$, b' 是经过 O 与直线 a 平行的直线。

$\therefore a \parallel b', a \perp \alpha$

$\therefore b' \perp \alpha$

即经过同一点 O 的两条直线 b 、 b' 都垂直于平面 α , 而这是不可能的。

因此, $b \parallel a$ 。

2. 点到平面的距离

从平面外一点引这个平面的垂线, 这个点和垂足间的距离叫做这个点到这个平面的距离。

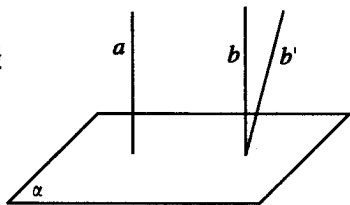


图 9-33



3. 直线和平面的距离

一条直线和一个平面平行时,这条直线上任意一点到这个平面的距离,叫做这条直线到这个平面的距离。

(三) 例题讲析

例1 已知一条直线 l 和一个平面 α 平行,求证:直线 l 上各点到平面 α 的距离相等(如图 9-34)。

证明 过直线 l 上任意两点 A 、 B 分别引平面 α 的垂线 AA' 、 BB' ,垂足分别为 A' 、 B' 。

$$\because AA' \perp \alpha, BB' \perp \alpha,$$

$$\therefore AA' \parallel BB'.$$

设经过直线 AA' 和 BB' 的平面为

$$\beta, \beta \cap \alpha = A'B'$$

$$\because l \parallel \alpha,$$

$$\therefore l \parallel A'B'.$$

$$\therefore AA' = BB'$$

由 A 、 B 是直线 l 上任意的两点,可知直线 l 上各点到平面 α 的距离相等。

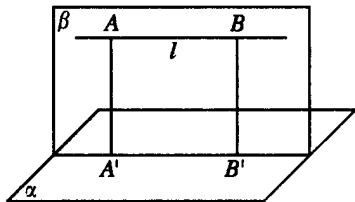


图 9-34

例2 已知:异面直线 a 、 b 互相垂直,且 $a \in \alpha, b \perp \alpha, B$ 为垂足。

求证: $a \parallel \alpha$ (图 9-35)

证明 在直线 b 上取一点 A (异于点 B)

过 A 作直线 $a' \parallel \alpha$,

则 $a' \perp b$, a' 、 b 确定平面 β ,

$\therefore \beta$ 与 α 交于过 B 的直线 c 。

$$\left. \begin{array}{l} \because b \perp \alpha \\ c \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp c$$



又 $a' \perp b$, 且 a', b, C 均在平面 β 内,

$\therefore a' \parallel c$

又 $a \parallel a'$, 则 $\left. \begin{array}{l} a \parallel c \\ a \not\subset \alpha \\ c \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$

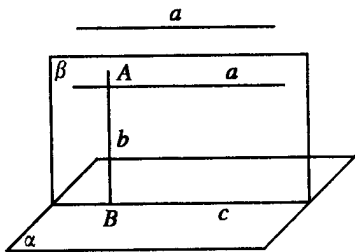


图 9-35

例 3 直角 $\triangle ABC$ 所在平面外一

点 S , 且 $SA = SB = SC$ 。

求证: 点 S 与斜边 AC 中点 D 的

连线 $SD \perp$ 平面 ABC 。

证明 由 $\text{Rt}\triangle ABC$, D 为斜边中点,

可得 $AD = DB = DC$,

又 $SA = SB = SC$

$\therefore \triangle SDA \cong \triangle SDB \cong \triangle SDC$ 。

$\therefore \angle SDA = \angle SDB = \angle SDC = 90^\circ$ 。

即 $SD \perp AC, SD \perp DB, AC \cap DB = D$

$\therefore SD \perp$ 平面 ABC 。

(四) 课堂练习

1. 图 9-37, 在空间四边形 $PABC$ 中,

$AB = PB, AC = PC, AE \perp BC$ 于 $E, PF \perp AE$

于 F 。求证: $PF \perp$ 平面 ABC 。

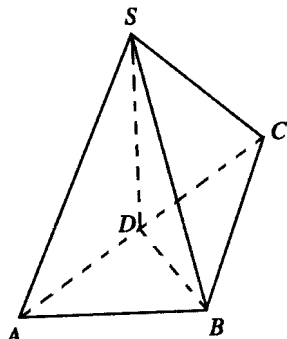


图 9-36

证明 取 PA 的中点 D , 连结 DB, DC . $\because AB = PB, AC = PC, BD \perp PA, CD \perp PA$,

故 $PA \perp$ 平面 BDC 。

又 $CB \subset$ 平面 BDC , 则 $PA \perp BC$ 。

又 $AE \perp BC, PA \cap AE = A$ 。

$\therefore BC \perp$ 平面 PAE ,

又 $PE \subset$ 平面 PAE , 则 $BC \perp PE$,

又 $PF \perp AE, AE \cap BC = E$,



$\therefore PF \perp \text{平面 } ABC$ 。

2. 课本 P_{23} 练习 1(3)($\checkmark$), 4(利用线面垂直性质定理与线面平行判定定理证)

(五) 布置作业

课本 P_{28} 习题 9.4 1(3), 6, 7, 8。(提示: 1.

(3) $m \perp \alpha$

6. 利用勾股定理的逆定理, 知旗杆垂直于地面内的两条相交直线, 再由直线和平面垂直的判定定理推出结论。

7. 先证: $PC \perp AB, PD \perp AB \Rightarrow AB \perp \text{平面 } PCD \Rightarrow AB \perp CD$ 。

8. 设 m, n 确定平面 $\alpha, l_1 \perp \alpha, l_2 \perp \alpha, l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ 。

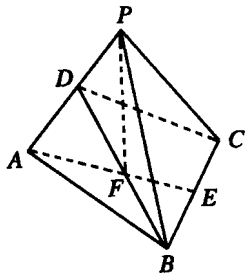


图 9-37

板书设计

- | | |
|--------------|-----|
| 1. 线面垂直的性质定理 | 例 1 |
| 2. 点到平面距离 | 例 2 |
| 3. 线面距离 | 例 3 |

(第三课时)

(一) 复习引入

1. 线面垂直的性质定理;
2. 点到面, 线到面的距离。

(二) 导入新课

1. 斜线在平面内的射影

这部分的内容中涉及的概念较多, 为了便于学生理解记忆, 可以边讲边画图, 同时在图上注出有关概念的名称。

(1) 点的射影

如图 9-38, 直线 $PQ \perp \alpha, Q \in \alpha$, 点 Q 是点 P 在 α 内的射影, 线



段 PQ 是点 P 到 α 的垂线段。

(2) 斜线与斜线段

如图 9-39, 直线 $PR \cap \alpha = R$, PR 不垂直于 α , 直线 PR 是 α 的一条斜线, 点 R 是斜足, 线段 PR 是点 P 到 α 的斜线段。

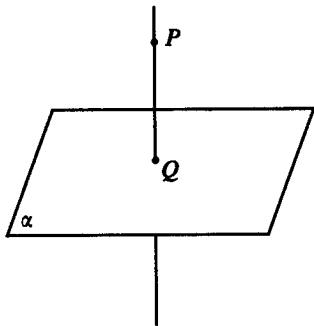


图 9-38

(3) 平面外一点到这个平面的垂线段有且只有一条, 而这点到这个平面的斜线段有无数条(图 9-40)。

(4) 斜线在平面内的射影

如图 9-41, $AB \perp \alpha$, 直线 BC 是斜

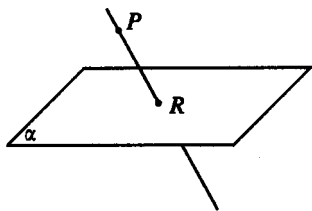


图 9-39

线 AC 在 α 内的射影, 线段 BC 是斜线段 AC 在 α 内的射影。

(5) 定理 从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中:

- ① 射影相等的两条斜线段相等, 射影较长的斜线段也较长;
- ② 相等的斜线段的射影相等, 较长的斜线段的射影也较长;

③ 垂线段比任何一条斜线段都短。

如图 9-42, AO 是平面 α 的垂线段, AB 、 AC 是平面 α 的斜线段, OB 、 OC 分别是 AB 、 AC 在平面 α 内的射影。这时有:

- (1) $OB = OC \Rightarrow AB = AC$,
- $OB > OC \Rightarrow AB > AC$;



(II) $AB = AC \Rightarrow OB = OC$,

$AB > AC \Rightarrow OB > OC$;

(III) $AO < AB, AO < AC$ 。

注意:在应用这个定理时,平面外只能是一点才行。如:若 AB 、 CD 是平面 α 的斜线段,它们在平面 α 内的射影分别为 $A'B'$ 、 $C'D'$, 则 $AB = CD$ 不一定有 $A'B' = C'D'$ 。

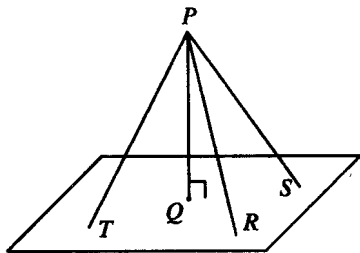


图 9-40

2. 直线和平面所成的角

(1) 斜线和平面所成的角

平面的一条斜线和它在这个平面内的射影所成的角,叫做这条直线和这个平面所成的角。

如图 9-43, l 是平面 α 的一条斜线, O 点是斜足, A 是 l 上任意一点, AB 是 α 的垂线, 点 B 是垂足, 所以直线 OB (记作 l') 是 l 在 α 内的射影, $\angle AOB$ (记作 θ) 是 l 与 α 所

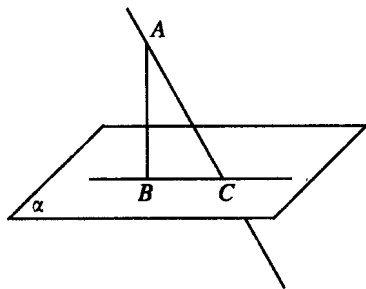


图 9-41

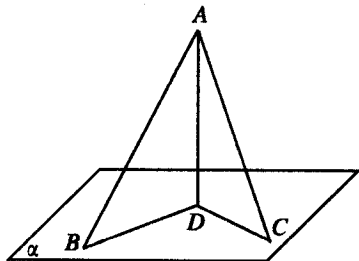


图 9-42

成的角。这时 l 与 α 所成的角的范围是:

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ 。这是斜线与平面所成角的范围。

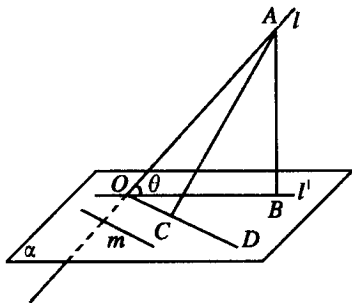


图 9-43

一条直线垂直于平面,我们说它们所成的角是直角;一条直线和平面平行或在平面内,我们说它们所成的角是 0° 的角。

一般地,一条直线与一个平面所成的角的范围是 $[0^\circ, 90^\circ]$ 。

(2) 一个重要结论

斜线和平面所成的角,是这条斜线和这个平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角。

如图 9-43, 设直线 OD 是 α 内与 l' 不同的任意一条直线, 过点 A 引 AC 垂直于 OD , 垂足为 C 。因为 $AB < AC$, 所以 $\frac{AB}{AO} < \frac{AC}{AO}$, 即 $\sin \theta < \sin \angle AOC$ 。因此 $\theta < \angle AOC$ 。

根据异面直线所成的角的定义, 我们可以进一步得出, 斜线和平面所成的角, 是这条斜线和这个平面内的直线所成的一切角中最小的角。

证明 设 l 是平面 α 的一条斜线, l' 是 l 在 α 内的射影, 点 O 是斜足, m 是 α 内任意一条与 l' 不平行的直线。如图 9-43。

若直线 m 过点 O , 则由上述所证, l 与 m 所成的角小于 l 与 l' 所成的角 θ_0 。

若直线 m 不过点 O , 则过点 O 作直线 OC , 使 $OC \parallel m$, m 与 l 所成的角等于 OC 与 l 所成的角, 从而 m 与 l 所成的角小于 θ_0 。



例 如图 9-44, 已知 SA 垂直于直角三角形 ABC 所在的平面, $BC \perp AC$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 1$, $SB = 2\sqrt{3}$, 求直线 SC 与平面 SAB 所成的角。

解 作 $CD \perp AB$ 于 D , 由 $SA \perp$ 平面 ABC ,

$$\therefore SA \perp CD$$

$\therefore CD \perp$ 平面 SAB , 连结 SD , 则 $\angle CSD$ 即为所求。

$$\therefore AC = 1, BC \perp AC, \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2, BC = \sqrt{3}, CD = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle SAB$ 中, $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2\sqrt{2}$, 在 $\text{Rt}\triangle SAC$ 中, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 3$,

$$\therefore \sin CSD = \frac{CD}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \angle CSD = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(三) 课堂练习

(1) 课本 P_{25} 练习中 1. (不一定. l_1 与 l_2 的位置关系三种都可能, 即平行, 相交, 异面)

(2) 课本 P_{25} 练习 2. (作 $BE \parallel DC$ 交 AC 于 E , $\angle ABE$ 即为所求, $\angle ABE = 60^\circ$)

(四) 布置作业

(1) 课本 P_{29} 习题 9.4 9. (分三种情况证, 即第一, 两平行线平行平面, 或在平面内 第二, 两平行线垂直平面 第三, 两平行线是平面的斜线)

(2) 课本 P_{29} 习题 9.4 10. (答案: $BC = 2\sqrt{2}a$)

(3) 正方体 AC_1 的棱长为 a , 求 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角大

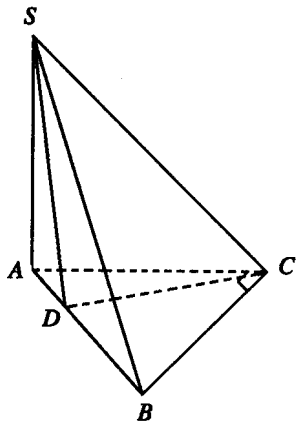


图 9-44



小。(连结 BD , $BD \cap AC = O$, 则 $\angle BC_1O$ 即为所求, $\angle BC_1O = 30^\circ$)

(第四课时)

(一) 复习引入

1. 斜线在平面内的射影的概念;
2. 直线与平面所成的角。

(二) 三垂线定理

教师提问: 平面的一条斜线在平面内是否一定有垂线? 如果有, 有几条? 怎么确定?

学生对前两个问题能正确回答, 如何确定, 他们不一定能回答。

教师与学生一起用三角板比划。得这样的结论: 当三角板所在的一条直角边与桌面垂直, 另一直角边与桌面重合时, 平面内垂直于斜边的直线一定和三角板与桌面的交线垂直。

由此我们得出三垂线定理。

三垂线定理 在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线的射影垂直, 那么它也和这条斜线垂直。

已知 如图 9-45, PA 、 PO 分别是平面 α 的垂线、斜线, AO 是 PO 在平面 α 内的射影, 且 $a \subset \alpha$, $a \perp AO$ 。求证: $a \perp PO$ 。

证明:

$$\left. \begin{array}{l} PA \perp \alpha \\ a \subset \alpha \\ AO \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow PA \perp a \left\} \Rightarrow a \perp \text{平面 } PAO \left\} \Rightarrow a \perp PO. \right.$$

$PO \subset \text{平面 } PAO$

三垂线定理实质上是平面的一条斜线和平面内一条直线垂直的判定定理, 这两条直线可以是相交直线, 也可以是异面直线。

由学生们根据三垂线定理, 叙述三垂线定理的逆定理, 并且由他们完成证明过程。

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线垂直, 那么它也和这条斜线的射影垂直。



三垂线定理及其逆定理可以合起来表述如下:

设 l 是平面 α 的一条斜线, l' 是 l 在 α 内的一条直线, 则有

$$m \perp l' \Leftrightarrow m \perp l.$$

这个定理及其逆定理是证明空间直线互相垂直时经常使用的, 因此要求学生牢固掌握。这两个命题的实质在于揭露了这样的规律: 斜线和它在平面内的射影必定同时垂直于平面内的某条直线。也就是说, 斜线和它在平面内的射影, 在对平面内的一条直线是否有垂直关系上具有一致性。

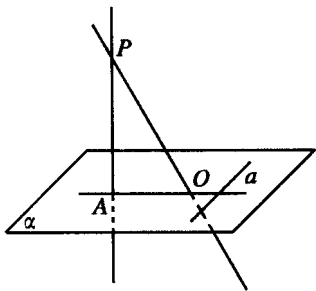


图 9-45

(三) 例题讲析

例 1 求证 如果一个角所在平面外一点到角的两边距离相等, 那么这一点在平面内的射影在这个角的平分线所在直线上。

已知: $\angle BAC$ 在平面 α 内, 点 $P \notin \alpha$, $PE \perp AB$, $PF \perp AC$, $PO \perp \alpha$, 垂足分别是 E 、 F 、 O , $PE = PF$ (图 9-46)。

求证: $\angle BAO = \angle CAO$ 。

证明 要证点 O 在 $\angle BAC$ 的平分线上, 只需证明在平面 α 内的点 O 到这个角的两边距离相等。

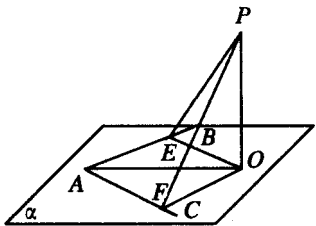


图 9-46

$$\left. \begin{array}{l} PO \perp \alpha \\ PE \perp AB \\ PF \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} OE \perp AB \\ OF \perp AC \end{array} \right. \Rightarrow \angle BAO =$$

$$\left. \begin{array}{l} PE = PF \\ PO \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow OE = OF$$

$\angle CAO$ 。

教师提问 在上面的证明过程中, 哪一步应用了三垂线定理或逆定理?



例 2 如图 9-47, $A \notin$ 平面 α , AB 、 AC 是平面 α 的两条斜线, O 是 A 在平面 α 内的射影, $AO = 4$, $OC = \sqrt{3}$, $BO \perp OC$, $\angle OBA = 30^\circ$, 求: C 到 AB 的距离。

解 可由已知得 $CO \perp$ 平面 AOB , 作 $OD \perp AB$ 于 D , 由三垂线定理有 $CD \perp AB$ 。

$\therefore CD$ 就是 C 到 AB 的距离。

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $OD = AO \cdot \sin \angle DAO = 4\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中, $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{15}$ 。

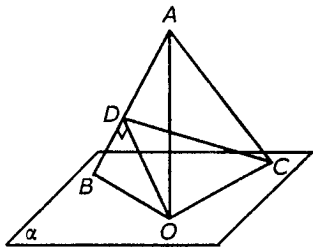


图 9-47

(四) 课堂练习

(1) 课本 P_{27} 练习 1. (连结 AC , 由三垂线定理, 得出 $AC_1 \perp BD$)

(2) 课本 P_{27} 练习 2. (连结 AO , $AO \perp BC$, 由三垂线定理知 $PA \perp BC$)

(3) 课本 P_{28} 练习 3. (由 $VA = VB$, $AD = BD$, 得 $VD \perp AB$, 又 $VO \perp$ 平面 ABC , $\therefore DO \perp AB$, 又 $O \in CD$, $\therefore CD \perp AB$, $AD = BD$, $\therefore AC = BC$)

(五) 布置作业

课本 P_{29} 习题 9.4 11, 12, 13。

(第 11 题可仿课本 P_{26} 例 3 证。

第 12 题连结 C_1E , 过 E 点在上底面内画 C_1E 的垂线即得。

第 13 题教师给学生把图画出, 特别是要画出六边形平面放置的直观图。答案分别为 2)



《水平放置的平面图形的直观图》 教学设计

教学目标

1. 了解什么叫直观图；
2. 了解斜二侧画法的规则；
3. 掌握正方形、矩形、直角三角形、正三角形、正六边形的直观图的画法。

教学重点和难点

使学生掌握水平放置的平面图形的直观图的画法,并且能从水平放置的平面图形的直观图想象出原图的形状及其性质是这一节课的重点也是难点。

教学设计过程

师 我们研究立体几何要作好两个准备:第一,平面的概念及平面的基本性质(三个公理)是我们研究立体几何的理论上的准备;第二,水平放置的平面图形的直观图的画法是为今后空间图形的识图和画图做技术上的准备。

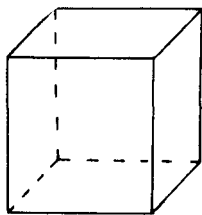
所谓空间想象能力,就是给出一个立体模型,我们能用一个空间图形画出它,并且根据空间图形的直观图想象出这个立体模型。简单地说就是识图和画图的能力。

什么叫直观图 把空间图形画在平面内,使得既富有立体感,又

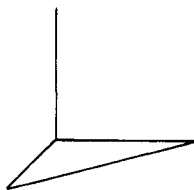


能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形。

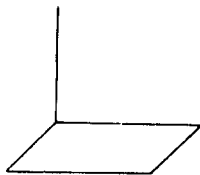
这时教师拿出三个模型。立方体模型；一块直角三角形和一根小棍过直角顶点并且与直角三角板所在平面垂直；一块矩形板和一根小棍过它的一个顶点并且垂直于矩形板所在的平面。然后画出下面的三个图，并且说这就是这三个模型的直观图。(如图 1)



(1)



(2)



(3)

图 1

师 正方体的六个面都是正方形，为什么在直观图中只有两个面是正方形？直角三角形中的直角为什么不能画出直角？矩形中有四个角都是直角，为什么在直观图中都不能画出直角？

生 如果正方体的六个面都画出正方形，势必得把正方体展开，这时得出的正方体的展开图，而不是立方体的直观图。如果把直角三角形的直角画成直角，这时过直角顶点垂直于直角三角形所在平面的直线（小棍），只能画成一个点，就完全没有了立体感。同样，如果把矩形的四个角画成直角，则过它的一个顶点垂直于矩形板所在平面的直线（小棍）也只能画成一个点，也就完全没有了立体感。

师 对，所以要画出空间图形的直观图，使它有立体感，它的基础就是要掌握‘水平放置的平面图形的直观图的画法’。也就是说，当我们会看、会画出‘水平放置的平面图形的直观图’后，才逐步会看、会画出空间图形的直观图。下面，我们就来研究几种平面图形的直观图的画法。并提出下面三点要求：

(1) 师、生同时动手；



(2)画在作业本上;

(3)左边是平面几何中的画法,右边是水平放置的直观图的画法, x 轴与 x' 轴要对齐。

例1 画水平放置的边长为 4cm (学生作业本上实际的长度)的正方形的直观图。(如图2)

画法:(1)在已知正方形 $OABC$ 中,取 OA 所在的直线为 x 轴,取 OC 所在的直线为 y 轴,画对应的 x' 轴、 y' 轴,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

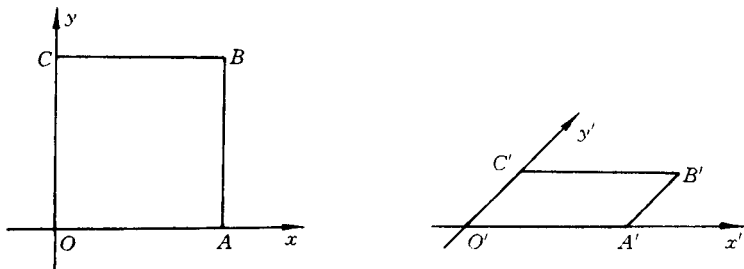


图 2

(2)在 x' 轴截取 $O'A' = OA$,在 y' 轴上截取 $O'C' = \frac{1}{2}OC$,过 A' 点作 $A'B' \parallel O'C'$,连 $C'B'$,则 $O'A'B'C'$ 就是正方形 $OABC$ 的直观图。

(注意,为了看清学生动手画图的真实过程,图画好后,不一定要擦去辅助线)

师:下面,我们请一个同学来读课本第7页上所述的这种斜二侧画法的规则。

生:上面画直观图的方法叫做斜二侧画法,这种画法的规则是:

(1)在已知图形中取互相垂直的轴 Ox, Oy 。画直观图时,把它画成对应的轴 $O'x', O'y'$,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°)。它们确定的平面表示水平平面。

(2)已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段。



(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段, 在直观图中保持原长度不变, 平行于 y 轴的线段, 长度为原来的一半。”

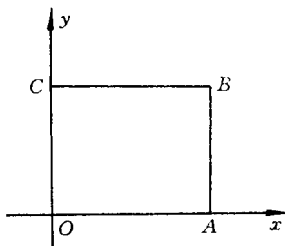
师 根据上述三条规则, 我们再来画如下几个图形的直观图。

例 2 画水平放置的长为 4cm, 宽为 3cm 矩形的直观图。(如图 3)

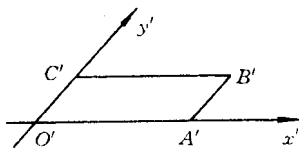
画法: (1) 在已知矩形 $OABC$ 中, 取 OA 所在的直线为 x 轴, 取 OC 所在的直线为 y 轴, 画对应的 x' 轴, y' 轴, 使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

(2) 在 x' 轴上截取 $O'A' = 4\text{cm}$, 在 y' 轴上截取 $O'C' = 1.5\text{cm}$, 过 A' 点作 $A'B' \parallel O'C'$, 连 $C'B'$, 则 $O'A'B'C'$ 就是矩形 $OABC$ 的直观图。

(说明, 为了突出矩形 $OABC$ 和它的直观图 $O'A'B'C'$, 辅助线要用细实线画出, 而矩形和它的直观图的轮廓线可用粗实线画出)



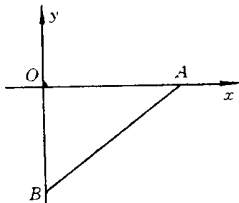
(1)



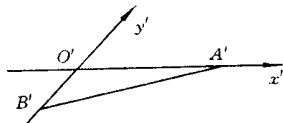
(2)

图 3

例 3 画水平放置的两直角边分别长为 4cm 和 3cm 的直角三角形的直观图。(如图 4)



(1)



(2)

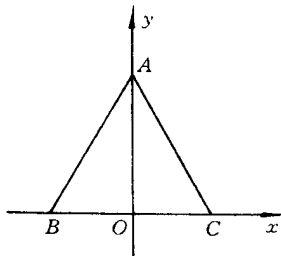
图 4



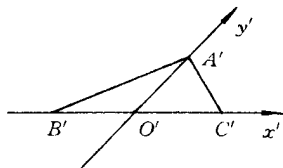
画法:(1)以直角边 OA 所在的直线为 x 轴,以直角边 BO 所在的直线为 y 轴,再画对应的 x' 轴、 y' 轴,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

(2)在 x' 轴上截取 $O'A' = OA = 4\text{cm}$,在 y' 轴上截 $O'B' = \frac{1}{2}OB = 1.5\text{cm}$,连 $A'B'$,则 $O'A'B'$ 就是直角三角形 OAB 的直观图。

例4 画边长为 4cm 的正三角的水平放置的直观图。(如图 5)



(1)



(2)

图 5

画法:(1)以 BC 边所在的直线为 x 轴,以 BC 边上的高线 AO 所在的直线为 y 轴,再画对应的 x' 、 y' 轴,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

(2)在 x 轴上截取 $O'B' = O'C' = 2\text{cm}$,在 y' 轴上截取 $O'A' = \frac{1}{2}AO$ 。连 $A'B'$ 、 $A'C'$,则 $\triangle A'B'C'$ 即为正 $\triangle ABC$ 的直观图。

画法:(1)以 BC 边所在的直线为 y 轴,以 BC 边上的高 AO 所在的直线为 x 轴,再画对应的 x' 轴、 y' 轴,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

(2)在 x' 轴上截取 $O'C' = OA$,在 y' 轴上截取 $O'B' = O'C' = \frac{1}{2}OC = 1\text{cm}$,连 $A'B'$ 、 $A'C'$,则 $\triangle A'B'C'$ 即为正 $\triangle ABC$ 的直观图。

师 为什么对正三角形我们要画出两种水平放置的直观图呢?因为今后在画立体图形的直观图时,根据不同题目中的条件要选择不同的画法。

正三角形的两种水平放置的直观图不论哪一种画法,我们可以

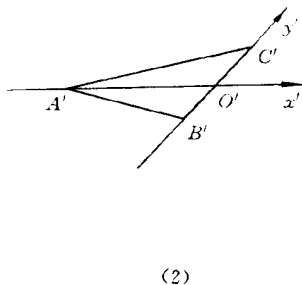
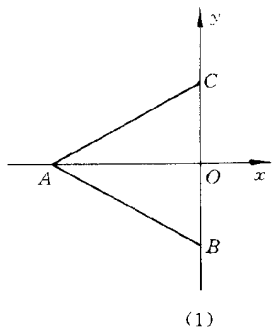


图 6

看到它们的三边不可能再相等,三个内角不可能再相等,但当我们说它是正三角形的直观图时,我们要想象它们的三边是相等的,它们的三个内角是相等的,而且每一个内角都是 60° 。同样道理,当我们在例 1 中说 $O'A'B'C'$ 为正方形的直观图时,我们就要想象它的四条边都等,四个内角都等于 90° ,两条对角线相等,并且互相垂直、互相平分。也就是说,我们在立体几何学习中一定要逐步培养这样的能力:“直观图 + 概念 $\xrightarrow{\text{(想象)}} \text{原图的形状及其性质}$ ”。

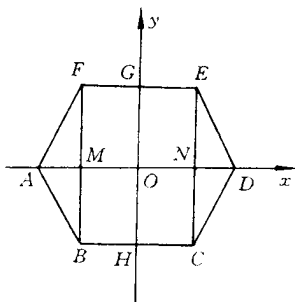
多元智能理论与新课程教学实践

这里要特别强调‘概念’给‘直观图’以界定的重要性。因为严格说起来,平行四边形、矩形、菱形、正方形的水平放置的直观图都只保留下对边平行且相等,所以只从“直观图”来看我们是没有方法加以区别,只能用‘概念’来给以界定,以示区别。

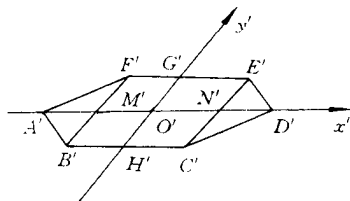
例 5 画水平放置的边长为 2cm 的正六边形的直观图。(如图 7)

画法:(1)在已知正六边形 $ABCDEF$ 中,取对角线 AD 所在的直线为 x 轴,取对称轴 GH 为 y 轴。画对应的 x' 轴、 y' 轴,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

(2)在 x' 轴上截取 $O'A' = OA$,截取 $O'D' = OD$,对于不在 x 轴、 y 轴上的顶点 B, C, E, F ,都向 x 轴作垂线,它们的垂足为 M, N 。在 x' 轴上截取 $O'M' = OM$,截取 $O'N' = ON$,过 M', N' 作与 y' 轴平行的直线,在这两直线上截取 $M'B' = M'F' = N'C' = N'E' = \frac{1}{2}MF$ 。



(1)



(2)

图 7

(3)连 $A'B', B'C', C'D', D'E', E'F'$, 则所得的六边形就是正六边形 $ABCDEF$ 的直观图。

师 我们看正六边形 $ABCDEF$ 和它的水平放置的直观图六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 二者在形状上有很大的不同,但是我们仍能从直观图 $A'B'C'D'E'F'$ 这六边形中想象出正六边形的形状和一些性质,这是为什么?

因为在斜二侧画法中,直观图仍保留了原图中三个主要的性质:

第一,保平行。在正六边形 $ABCDEF$ 中, $AB \parallel FE \parallel BC$, $BE \parallel AF \parallel CD$, $FC \parallel ED \parallel AB$, 在直观图六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 中 $A'D' \parallel F'E' \parallel B'C'$, $B'E' \parallel A'F' \parallel C'D'$, $F'C' \parallel E'D' \parallel A'B'$ 。

第二,保共点、共线。在正六边形 $ABCDEF$ 中, A, O, D 三点共线, B, O, E 三点共线, C, O, F 三点共线; AD, BE, CF 三线共点。在直观图六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 中, A', O', D' 三点共线, B', O', E' 三点共线, C', O', F' 三点共线; $A'D', B'E', C'F'$ 三线共点。

第三,保平行线段的比不变。在正六边形 $ABCDEF$ 中, $AD:FE:BC = 2:1:1$, $BE:AF:CD = 2:1:1$, $CF:ED:AB = 2:1:1$ 。在直观图六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 中, $A'D':F'E':B'C' = 2:1:1$, $B'E':A'F':C'D' = 2:1:1$, $C'F':E'D':A'B' = 2:1:1$ 。



正因为有这‘三保’,所以直观图的形状虽然有很大的变化,但我们仍能借助于直观图加上概念想象出原图的形状和性质。

作业

课本第9页,第10题,第11题。

课堂教学设计说明:

立体几何不少教师感到难教,不少学生感到难学,这难教、难学的共同的矛盾的焦点就是看图和画图。水平放置的平面图形的直观图的画法是为了解决这矛盾的焦点的初步,所以师、生都要重视,至少要安排两课时来学习。

因为在今后的教学中,我们所要画的水平放置的直观图大多数是正方形、矩形、直角三角形、正三角形,所以对这些图形的直观图一定要会画、会看,为今后画立体图形的直观图打下基础。

在长期的立体几何教学过程中,我深感‘视觉语言’在教和学中的重要性。

旗语、哑语、音乐指挥的手势、面部表情和形体动作都可以说是一种‘视觉语言’,它是通过视觉来传递信息、交流思想和情感。但是对我们大多数人来说,却是视而不懂,这因为我们是‘外行’。作为任何一种语言,都必须有它自己的一套‘符号系统’和特有的规定和规则。而理解并掌握这一套‘符号系统’和特有的规定和规则必须经过培养和训练。只有经过一段时间培养和训练后,才能使用这种‘视觉语言’来传递信息,交流思想和情感。

在立体几何中,我所用的‘视觉语言’这个概念,它的内涵主要就是指‘直观图加上概念——(想象)原图的形状及其性质’。这种‘视觉语言’也有它的一套‘符号系统’。这种‘符号系统’就是在教每一种位置关系时,教每一个概念时,教每一个定理时都要给出与它对应的、标准的、常用的直观图形。经过一段时间的培养和训练。使学生能



用这种‘视觉语言’来了解线线、线面、面面的各种位置关系以及各个概念及定理在这种‘视觉语言’中的表达的方法。

在立体几何教学过程中,我们要使‘视觉语言’和‘听觉语言’并重。有时我们甚至感到用‘听觉语言’说不明白的问题,而通过‘视觉语言’却使问题得到解决。总之,在立体几何教学中,一定要重视直观图这种‘视觉语言’在教学中的地位,要有计划、有步骤地在每一节课上都来培养和训练运用这种‘视图语言’的能力。当然,为了完成这个教学目的,首先要求教立体几何的教师理解并掌握这一种特殊的‘视觉语言’,并且如何使用这种‘语言’来达到最佳的教学效果,这可以说是对教立体几何的数学教师的一种特殊的技术要求、能力要求。这种要求是因为‘立体几何的研究对象是空间图形’(课本引言)所决定的。



《余弦定理》教学设计

教学目标

1. 使学生掌握余弦定理,并会初步运用余弦定理理解斜三角形;
2. 使学生理解用坐标法证明余弦定理的过程,逐步学会用坐标法解决具体问题;
3. 通过启发、诱导学生发现和证明余弦定理的过程,培养学生观察、分析、归纳、猜想、抽象、概括等逻辑思维能力;
4. 通过发现教学法,培养学生学习数学的兴趣和热爱科学、献身科学、勇于创新的精神。

[点评 知识目标分级详细、适当,能力目标和德育目标具体,并且具有很强的针对性,这是上好一节课的前提条件。]

教学重点、难点

重点 余弦定理及其发现和证明。

难点 余弦定理的证明。

关键 建立适当的直角坐标系。

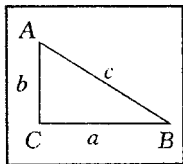
教具

三角板,投影仪,投影片 1、2。[点评 重点、难点、关键抓得准,才能在教学过程中采取有效的措施,突出重点、突破难点,从而实现教学目标。]

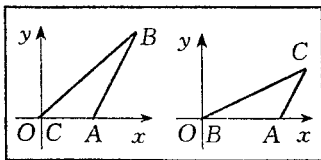


教学过程

1. 复习提问



(投影片 1)



(投影片 2)

T(师,下同):叙述任意角的三角函数的定义。(在黑板上作图 1)

S(生,下同): $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\tan \alpha = \frac{y}{x}$, $\cot \alpha = \frac{x}{y}$,

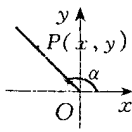


图 1

$\sec \alpha = \frac{r}{x}$, $\csc \alpha = \frac{r}{y}$ 。它们分别叫做角 α 的正弦函数、余

弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数,统称为三角函数。

2. 发现

T:请同学们考虑并回答下面的问题:

在直角三角形中,已知两个锐角和三边共五个元素中的几个怎样的元素,可求其余元素?

S:两个元素。

T:是否有不同的意见和补充?

S₁:其中至少有一边。

T:好!在这样的条件下,其余元素均可求,这时直角三角形是确定的。那么,在斜三角形中三个角和三边共六个元素,已知几个怎样的元素可确定这个三角形?

[点评:由于现在学生还不会求斜三角形的其余元素,因而说确定这个三角形是恰当的。可见,教者对于教学语言是进行了仔细斟酌的,这对于一名青年教师来说是难能可贵的。]



S_2 三个,其中至少有一边。

T 已知两边一夹角,三角形能否确定?说明理由。(在黑板上作图 2)

S_3 能,根据三角形全等的 SAS 判定定理。

T 既然在这样的条件下三角形是确定的,那么,其余元素,比如第三边与已知的两边一夹角一定存在着某种必然的联系,让我们从特殊的三角形——直角三角形入手,来研究这个问题(出示投影片 1)。

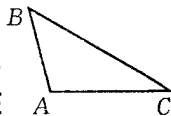


图 2

T 问题 1 如果已知 a, b , 怎样求斜边 c ?

S 勾股定理: $c^2 = a^2 + b^2$. (*)

T 问题 2 若已知 b, c 及 $\angle A$, 怎样用它们表示直角边 a ?

S :(困惑,期待)。

T 受(*)式启发, a 与 b, c 之间仍然存在着“平方和”关系:

$$a^2 = c^2 - b^2 \xrightarrow{\text{构造平方和}} a^2 = c^2 + b^2 - 2b^2 \xrightarrow{\text{引入角 } A} a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A. \quad ①$$

T 想一想,若已知 a, c 及 $\angle B$, 怎样用其表示 b ?

S : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$. ②

T 能否将(*)式也写成①、②的形式?

S 能, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. ③

T 太好了!显然①、②、③三个等式的结构相同,这是巧合吗?(稍停,语气加重地)不,这是我们发现的一个客观规律!

S :(惊奇转而兴奋)。

[点评 教师恰当的点拨 构造平方和、引入角 A , 顿时起到峰回路转、柳暗花明的作用,怎能不引起学生的共鸣!一节好课应当像一首乐曲一样,高潮迭起,课进行到这里进入了第一个高潮。“我们的发现”更震撼着学生的心灵,把学生的注意力牢牢地吸引住了。]

T 你能否用文字语言叙述这一规律?



S_3 直角三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和,减去这两边与它们夹角的余弦的积的 2 倍。

[点评 这是为学生深刻理解和掌握余弦定理所做的必要的铺垫。]

T 很好!得出了这一规律以后,你想到了什么?

S 它在斜三角形中是否也成立。

T 太棒了!我非常高兴地告诉大家,你们的这个猜想是正确的,这就是我们这节课学习的重要定理——余弦定理(板书课题)。

[点评 根据勾股定理和余弦定理的关系,把余弦定理的引入处理在成直角三角形中的‘发现’过程,并用恰当的语言激励学生合理猜想,有利于培养学生学习数学的兴趣和创造能力。]

3. 证明

T 下面我们来证明余弦定理,余弦定理的证明有多种方法,你能想到哪些方法?

S_4 作一个已知边的高,利用直角三角形证明。

S_5 在直角坐标系中证明。

T 对于 S_4 的方法,若三角形是锐角三角形,则任意边的高均在三角形内,而三角形是钝角三角形(在黑板上作出图 2),则夹钝角的两边上的高均在三角形外,因而需要讨论这两种情况,同学们可在课后一试。对 S_5 的方法,我们称为坐标法,它是处理几何问题的一种常用的重要方法,下面我们用坐标法来证明余弦定理。想一想,用坐标法证明,你应该先做什么?

[点评 教师指出了余弦定理证明方法有多种,而学生只想到了两种,教师就此加以点拨,并没有刻意追求其他证法,可谓把握有度,突出了重点。]

S 建立直角坐标系。

T 你怎样建立直角坐标系?为什么?

S_6 以顶点 A 为原点,射线 AC 为 x 轴正半轴建立直角坐标系。



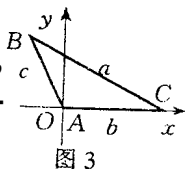
好像前面一些三角公式的推导,也是这样建立直角坐标系的。

T 对,其实这样建立直角坐标系,可使 A 、 B 、 C 三点坐标容易表示,为下面的证明带来方便。(在图 2 中建立直角坐标系变为图 3),请你指出 A 、 B 、 C 各点的坐标。

S_7 : $A(0,0)$ 、 $B(c\cos A, c\sin A)$ 、 $C(b,0)$ 。

T 很好!你能否证明下去?(指向图 3)

[点评 教师通过自然语言和形态语言的启发,使学生豁然开朗,看到了胜利的曙光,也预示着又一个高潮的到来。]



S_7 由两点的距离公式有

$$\begin{aligned} a &= |BC| = \sqrt{(c\cos A - b)^2 + (c\sin A)^2} \\ &= \sqrt{c^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + b^2 - 2bc\cos A} \\ &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} \end{aligned}$$

两边平方,得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 。

T 这就是等式①,若分别以 B 、 C 为原点建立相应的直角坐标系(出示投影片 2),则会得出怎样的等式?

$$S : b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

T 以上两个等式分别为等式②和③,至此,我们证明了等式①②③在斜三角形中也成立,即余弦定理得到了证明。(用彩笔将等式①②③框起来)请你用文字语言叙述余弦定理。

S_8 : (任意)三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和,减去这两边与它们夹角的余弦的积的 2 倍。

[点评 前面已经概括了直角三角形中的余弦定理,这里并不只是对它的推广,更不是对它的简单的重复,而是对它的强化,这是十分必要的。]



4. 剖析

T 请问,勾股定理与余弦定理有什么关系?

S₉ 勾股定理是余弦定理的特例,余弦定理是勾股定理的推广。

T 余弦定理共有三个等式,每个等式都有同一个三角形中的四个元素,那么余弦定理的作用是什么?

S₁₀ 已知三角形中的三个元素,可用余弦定理求其余元素。

T 是否有不同的意见?

S₁₁ 三个元素中至少有一边(点评者注:这时三角形是确定的,但不一定能用余弦定理解决)。

S₁₂ 不对,三元素中至少有两边。

T 还有吗?

S₁₃ 已知三个元素应是两边夹一角,或三边。

S₁₄ 已知两边和一边对角应该也能用余弦定理求出其他元素。

T 为什么?

S₁₄ :……

T S₁₄ 的见解是否正确还不得而知,但是很有价值,我们以后会研究这个问题。S₁₃ 说出了余弦定理的两种不同情况的用途,那么已知三边如何求角?

$$S_{15} \text{ 用 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ (或 } C = 180^\circ - A - B \text{)}。$$

T 这是余弦定理的三个变形,与余弦定理的三个等式同样的重要。

[点评 教师恰到好处的启发,把课堂气氛又推向了一个新的高潮。通过学生的发言、争论,剖析了余弦定理中各个元素之间的内在联系与制约关系,辨明了余弦定理的用途,这是对所学余弦定理的深



化。是培养学生综合运用知识的能力的重要途径,同时,也触及了更深刻的 S_{14} 所提出的问题,课后思考题的提出也在情理之中了。]

5. 应用

T 请看投影屏幕,应用余弦定理解决几个问题,计算时可以用计算器。

[显示]:(1)在 $\triangle ABC$ 中:

(i)已知 $b=8, c=3, A=60^\circ$, 求 a ;

(ii)已知 $a=9, b=10, c=15$, 求 A ;

(iii)已知 $a=20, b=29, c=21$, 求 B 。

(2)已知 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=2, b=\sqrt{3}-1, C=30^\circ$, 求 c 及 $A、B$ 。

S_{16} :(i) $a=7$, (ii) 90° , (iii) $35^\circ 35'$ 。

S_{17} : $c=\sqrt{2}, A=45^\circ, B=105^\circ$ 。

6. 小结

T 本节课我们学习了一个非常重要的定理——余弦定理。

(1)请同学们掌握余弦定理,会熟练地运用它解决已知三角形两边夹一角和三角形三边求其余的边和角的问题。

(2)我们用坐标法证明了余弦定理,请同学们要理解这个证明过程,要逐步学会运用坐标法。

(3)我们运用了由特殊到一般的方法,“发现”了余弦定理,这种方法是人们认识客观世界的一种重要的方法,也是数学发现的重要方法之一,我们要逐步学会并善于运用这种方法去探索教学问题,提高我们的创造能力。

[点评 教学过程中已把教学目标落到了实处,小结又紧扣教学目标,与教学过程遥相呼应,使教学目标深入人心,可称得上是‘点睛’之笔。]

7. 作业

(1)课后研究题:已知三角形的两边和其中一边的对角,能否利



用余弦定理求出其余的边和角? 给出一个令你自己满意的结论。

(2)略。

[点评 好一个“给出一个令你自己满意的结论”! 虽然学生的数学水平和能力存在着差别,但是,每个人都能够力所能及地获得“令你自己满意的结论”,这正素质教育的要求,设置这样一个开放的问题,不仅能够激发学生为解开这个悬念之谜而探索、求知的热情,从而,最大限度地开发每个学生的潜能和才智,而且能使学生在探索的过程中巩固所学知识,也为下一节课埋下了一个伏笔(定义解斜三角形和灵活应用余弦定理),可谓一举多得。]

总评

1. 教学设计思路清新、引人入胜

“发现法”是常用的一种教学方法。然而,用“发现法”设计“余弦定理”一课者,并不多见。本课从直角三角形出发,以归纳——猜想——证明——应用为线索,通过提问、启发和点拨,把规律和方法以生动、活泼的形式展现在学生面前,而展现的过程入情入理,自然流畅,引人入胜,强烈地感染着学生积极主动地获取知识,使学生的主体地位得到了充分的发挥。

2. 课堂教学气氛活跃,高潮迭起

本课充分体现了“民主教学思想”,教师不主观、不武断、不包办,以祥和、平等的态度启发学生,让学生充分发表意见,使学生真正成为学习的主人,因而,人人都开动脑筋,积极思考,发言踊跃。归纳、猜想是师生共同合作的结晶,从而有了“我们的发现”。而“我们的发现”又使学生联(猜)想,“它在斜三角形中是否成立?”至此,余弦定理呼之欲出!余弦定理的证明和剖析,也是在教师的点拨下完成的,并且通过争论,辨明了余弦定理的作用。其间,有困惑、有期待,有兴奋、有惊奇,时而山穷水尽,时而柳暗花明,课堂气氛高潮迭起,扣人



心弦。

3. 教学目标贯彻到位,把握有度

教学目标是教学的出发点、立足点和归宿。教者较准确地确定了教学目标,并围绕教学目标实施教学过程,突出了对学生综合素质的培养。从余弦定理的发现、证明到应用的过程中,充分调动了学生眼、耳、脑、手等各个器官积极协调合作,对于教师、黑板、投影屏幕等传递来的知识信息和智能信息,进行积极、有效的加工处理,形成了新的认知结构,使学生的观察、识别、分析、归纳、猜想、抽象、概括等思维能力得到了锻炼和提高,基本达到了本课的认知目标要求。从课堂的气氛看,本课也成功地实现了情感目标,对于余弦定理的证明,教者并没有刻意去追求‘多法’,而是着眼于教学目标,突出了重点。课后研究题的提出尽在情理之中,对于学生研究结果的要求也颇有新意,人人都会有‘令你自己满意’的研究成果,这不仅能够不同程度地开发学生的潜能,又使教学内容得以巩固和延伸。综上所述,本课教学目标贯彻到位,把握得恰到好处。

这是宁波市特级教师带徒活动的一节学员学习汇报课实录(略有改动),虽然课堂实践中尚有欠缺,但仍有许多可圈点之处,不失为一堂好课,受到了专家们的好评。