

2004 年全国硕士研究生入学考试

数学一试题

一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分, 把答案填在题中横线上)

(1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____.

(2) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$, 且 $f(1)=0$, 则 $f(x)=$ _____.

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为_____.

(4) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为_____.

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵,

E 是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{x > \sqrt{D(X)}\} =$ _____.

二、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是 ().

(A) α, β, γ (B) α, γ, β (C) β, α, γ (D) β, α, γ

(2) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 ().

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加 (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$ (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$

(3) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 下列结论中正确的是 ().

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$

(4) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于().

- (A) $2f(2)$ (B) $f(2)$ (C) $-f(2)$ (D) 0

(5) 设 A 是阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为().

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(6) 设 A, B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有().

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关
(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$.

若 $P\{|X| < x\} = \alpha$ 则 x 等于().

- (A) $\frac{u_\alpha}{2}$ (B) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (C) $\frac{u_{1-\alpha}}{2}$ (D) $u_{1-\alpha}$

(8) 设随机变 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$. 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

().

- (A) $\text{cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$ (B) $\text{cov}(X_1, Y) = \sigma^2$
(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$ (D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(1) (本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

(2) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机速度减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700km/h.经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0 \times 10^6$).问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.

(3) (本题满分 12 分)

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy,$$

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

(4) (本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数.证明此方程存在惟一正实根 x_n , 并证明当 $a > 1$

时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ 收敛.

(5) (本题满分 12 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

(6) (本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(7) (本题满分 9 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

(8) (本题满分 9 分)

设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{发生}, \\ 0, & A \text{不发生}; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{发生}, \\ 0, & B \text{不发生}; \end{cases}$$

求：(I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布；

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(9) (本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 求：

(I) β 的矩估计量；

(II) β 的最大似然估计量.