

目 录



小数运算技巧	第 一 讲	1
多边形	第 二 讲	6
一元一次方程	第 三 讲	15
消长问题	第 四 讲	23
推理	第 五 讲	33
平均数	第 六 讲	44
长方体和正方体	第 七 讲	51
整除	第 八 讲	60
质数与合数	第 九 讲	66
分解质因数	第 十 讲	73
最大公约数与最小公倍数	第 十 一 讲	80
余数问题	第 十 二 讲	87
奇数与偶数	第 十 三 讲	95
包含与排除	第 十 四 讲	101
行程问题	第 十 五 讲	108
	参 考 答 案	115



名师导航



小数的运算技巧指小数运算的速算与巧算。它除了可以灵活运用整数四则运算中已经学过的许多速算与巧算的方法外,还可以利用小数本身的特点。常用的计算技巧有:

1. 分解凑整的方法:将一个数适当地分解为 n 个数,运用乘法的交换律、乘法的结合律或乘法的分配律凑整进行计算。

2. 运用商不变的性质:被除数和除数同时扩大或缩小相同的倍数(零除外),商不变。

3. 运用积不变的性质:一个因数扩大若干倍(零除外),另一个因数同时缩小相同的倍数,积不变。

4. 运用乘、除法的性质,改变运算顺序和运算方法:

① 一个数除以另一个数的商,再除以第三个数,等于第一个数除以二、三两个数的积;也等于第一个数除以第三个数的商,再除以第二个数。

② 两个数的积除以第三个数,等于用任意一个因数除以第三个数,再与另一个因数相乘。

5. 几个数的和(差)除以一个数,可以用这个数分别去除这几个数(在能除尽的情况下),再求 n 个商的和。

名题解析



例1 计算: $0.125 \times 0.25 \times 0.5 \times 128$

分析与解:由于 $0.125 \times 8 = 1$, $0.25 \times 4 = 1$, $0.5 \times 2 = 1$, 因此,可以将 128 分解成 $8 \times 4 \times 2 \times 2$, 结合乘法的交换律和结合律,使计算

简便。

$$\text{原式} = (0.125 \times 8) \times (0.25 \times 4) \times (0.5 \times 2) \times 2 = 2$$

例2 计算： $9.81 \times 0.1 + 0.5 \times 98.1 + 0.049 \times 981$

分析与解：运用积不变的性质，把 9.81 扩大 10 倍，0.1 缩小 10 倍： $9.81 \times 0.1 = 98.1 \times 0.01$ 。同理 $0.049 \times 981 = 0.49 \times 98.1$ 。这样算式中就出现了相同的因数 98.1，再根据乘法的分配律进行简算。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 98.1 \times 0.01 + 0.5 \times 98.1 + 0.49 \times 98.1 \\ &= 98.1 \times (0.01 + 0.5 + 0.49) \\ &= 98.1\end{aligned}$$

例3 计算： $(9.1 \times 4.8 \times 7.5) \div (2.5 \times 1.3 \times 1.6)$

分析与解：先去掉括号，再根据数的特征重新分组计算比较简便。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 9.1 \times 4.8 \times 7.5 \div 2.5 \div 1.3 \div 1.6 \\ &= (9.1 \div 1.3) \times (4.8 \div 1.6) \times (7.5 \div 2.5) \\ &= 7 \times 3 \times 3 \\ &= 63\end{aligned}$$

例4 计算： $11 \times 1.1 \times 1.1 - 1.1 \times 1.1 - 1.1$

分析与解：通过观察可发现，算式各部分都含有相同的因数（或算式），运用乘法分配律提取相同的因数（或算式），简化计算过程。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 1.1 \times 1.1 \times (11 - 1) - 1.1 \\ &= 1.1 \times 1.1 \times 10 - 1.1 \\ &= 1.1 \times (11 - 1) \\ &= 11\end{aligned}$$

例5 比较下面两个积的大小。

$$A = 1.23456 \times 6.54321$$

$$B = 1.23455 \times 6.54322$$

分析与解：这道题如果直接计算，很复杂。可以通过变形，把 A 和 B 分别改写成两个数的和，使其中一个加数相同，再比较另一个加数的大小，从而确定 A 和 B 的大小。

$$A = 1.23455 \times 6.54321 + 0.00001 \times 6.54321$$

$$B = 1.23455 \times 6.54321 + 1.23455 \times 0.00001$$

因为 $0.00001 \times 6.54321 > 1.23455 \times 0.00001$, 所以 $A > B$ 。

例6 若 $a = 0.\underbrace{00\dots0}_{2003\text{个}0}25$, $b = 0.\underbrace{00\dots0}_{2004\text{个}0}4$, 求 ① $a + b$ ② $a - b$

③ $a \times b$ ④ $a \div b$ 的值。

分析与解：题中 a 与 b 的小数点 0 的个数较多，计算的时候要根据小数四则运算小数点的变化规律进行计算。小数加减法是小数点对齐进行加减。小数乘法，一是确定积的数字，二是确定小数点后的位数，只要先把两个小数的数字相乘作为积的数字，而把两个小数小数点后位数的和作为积的小数点后的位数。小数除法，可先将被除数、除数的小数点向右移动相同位数，使除数变成整数再相除。

$$\textcircled{1} a + b = 0.\underbrace{00\dots0}_{2003\text{个}0}25 + 0.\underbrace{00\dots0}_{2004\text{个}0}4 = 0.\underbrace{00\dots0}_{2003\text{个}0}29$$

(a 和 b 在小数点后都有 2005 位，计算 $a + b$ 时， b 的数字 4 与 a 的 5 对齐即可。)

$$\textcircled{2} a - b = 0.\underbrace{00\dots0}_{2003\text{个}0}25 - 0.\underbrace{00\dots0}_{2004\text{个}0}4 = 0.\underbrace{00\dots0}_{2003\text{个}0}21$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} a \times b &= 0.\underbrace{00\dots0}_{2003\text{个}0}25 \times 0.\underbrace{00\dots0}_{2004\text{个}0}4 \\ &= 0.\underbrace{00\dots0}_{2005\text{位}}25 \times 0.\underbrace{00\dots0}_{2005\text{位}}4 \\ &= 0.\underbrace{00\dots0}_{2005 \times 2\text{位}}100 \\ &= 0.\underbrace{00\dots0}_{4007\text{个}0}1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} a \div b = 0.\underbrace{00\dots0}_{2003\text{个}0}25 \div 0.\underbrace{00\dots0}_{2004\text{个}0}4 = 25 \div 4 = 6.25$$

名师指津



1. 善于观察式中某些数具有的特性(相同、互补、倍数关系等)，进行适当地拆分是解题常用的技巧。

2. 同级运算中改变运算顺序时，数和数前的符号一起“搬家”。四则运算中去掉减号或除号后面的括号，括号中的加变减、减变加、乘变除、除变乘。

名题求解



请你试一试

用简便方法计算下面各题。

1. 0.98×101
2. $7.3 \times 1.2 + 1.2 \times 2.7$
3. $2.5 \times 64 \times 1.25$
4. $3.9 \div (1.3 \div 1.5)$
5. $0.5 \times 0.8 \times 0.04 \times 1.25 \times 0.2 \times 0.025$
6. $3.6 \times (1.6 \div 1.2)$
7. $4.2 \times 26 + 0.42 \times 640 + 42$
8. $(3.8 + 3.4 \times 3.8 + 3.8 \times 5.6) \div (1.9 \times 0.8 \times 0.25)$
9. $327 \times 2.8 + 17.3 \times 28$
10. $1.25 \times 5.6 + 2.25 \times 4.4$

动动小脑筋

1. 用简便方法计算下面各题。
 - (1) $0.225 \times 0.335 + 0.335 \times 0.775 + 0.775 \times 0.225$
 - (2) $17.48 \times 37 - 174.8 \times 1.9 + 17.48 \times 82$
 - (3) $3.75 \times 4.23 \times 36 - 125 \times 0.423 \times 2.8$
 - (4) $78.2 \times 4.6 + 0.8 \times 8.2 + 21.8 \times 5.4$
 - (5) $99.99 \times 0.8 + 11.11 \times 2.8$
2. 若 $a = 0.\underbrace{000\dots0}_{97\text{个}}125$, $b = 0.\underbrace{00\dots0}_{99\text{个}}08$,
求(1) $a + b$; (2) $a - b$; (3) $a \times b$; (4) $a \div b$ 的值。
3. 比较下面两个数的大小。
 $A = 2004.2008 \times 2003.2007$
 $B = 2004.2007 \times 2003.2008$

做做小诸葛

1. 用简便方法计算下面各题。

(1) $2424.2424 \div 242.4$

(2) $5.04 \div 11 \times 25 \div 9 \times 154$

(3) $12.34 + 23.45 + 34.57 + 45.78 + 57.81 + 78.12 + 81.23$

(4) $(1 + 0.1) + (2 + 0.1 \times 2) + (3 + 0.1 \times 3) + \dots + (99 + 0.1 \times 99) + (100 + 0.1 \times 100)$

(5) $0.\underbrace{625 \times 0.625 \times \dots \times 0.625}_{10 \uparrow} \times \underbrace{8 \times 8 \times \dots \times 8}_{11 \uparrow} \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{12 \uparrow}$

2. 小李买了两条鱼,他把一条鱼的标价的小数点看错了,付给售货员 18 元,售货员让他付 40.95 元,这两条鱼的标价分别是多少元?

3. 在下面算式□里填上合适的数。

$0.27 \times 1.5 + \square \times 15 + 0.15 \times 3.2 = 0.77 \times 1.5$



名师导航



1. 本讲将进一步研究三角形、平行四边形、梯形等有关图形的切拼问题,以及组合图形面积的计算。

2. 图形切拼实质是一种“等积变形”,它需要我们仔细观察,掌握图形的特点和切拼的规律,并且运用一定的技巧才能完成。

3. 要熟练掌握各种规则图形的面积计算公式,能运用等积变形等方法灵活计算组合图形的面积。我们学过的规则图形的面积计算公式有:

正方形的面积 = 边长 \times 边长

长方形的面积 = 长 \times 宽

平行四边形的面积 = 底 \times 高

三角形的面积 = 底 \times 高 $\div 2$

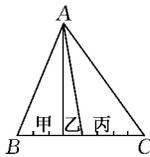
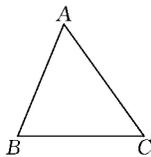
梯形的面积 = (上底 + 下底) \times 高 $\div 2$

4. 对于比较复杂的图形,要注意观察图形的特点,寻找图形中的内在联系,有意识地运用运动变化的思想,通过割补、旋转、添辅助线等方法将不规则图形转化为基本图形。

名题解析



例1 把 $\triangle ABC$ 分成甲、乙、丙三部分,使甲的面积是乙的面积3倍,丙的面积是乙的面积4倍。



分析与解：把乙的面积看成 1 份，甲的面积是 3 份，丙的面积就是 4 份。这样 $\triangle ABC$ 的面积就是 $1 + 3 + 4 = 8$ 份。把 $\triangle ABC$ 的不同边进行不同的等分，可得出不同的分割方法。这里只列举将 BC 边 8 等分的方法。

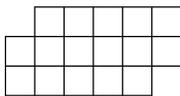
例 2 任意作一个五边形，将它改成面积相等的四边形，再改成面积相等的三角形。



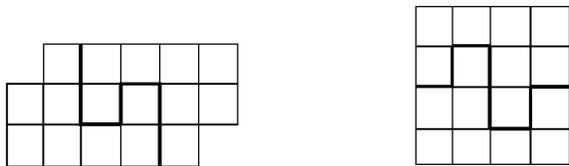
分析与解：合理运用等底等高的三角形面积相等的法则，对五边形进行适当变化，即可将其变成与它面积相等的四边形。在任意五边形 ABCDE 中，连结 AC，得到一个 $\triangle ABC$ ，过 B 点作 AC 边的平行线，交 DC 的延长线于 F，连 AF，因为 BF 平行于 AC，所以 $\triangle AFC$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等，那么四边形 AFDE 的面积与五边形 ABCDE 的面积相等。

进而可以再把四边形 AFDE 变成与它等积的 $\triangle EGD$ 。

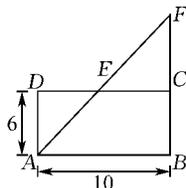
例 3 将下面的图形分成两块形状相同、大小相同的图形，然后拼成一个正方形。



分析与解：这个图形是由 16 个小正方形组成的，分成大小相同的两块，每块应该是由 8 个小正方形组成的。这 8 个小正方形不可能排成一排 8×1 ，排成的正方形边长为 4， $8 = 4 + 3 + 1$ 。切拼如下图所示：



例4 ABCD是一个长方形,如下图所示,△ADE比△CEF的面积小10平方厘米,求CF的长。(单位:厘米)



分析与解:本题通过图形面积的替换,求出与所求线段有关的图形面积,进而再求出所求的线段长。已知 $S_{\triangle ADE}$ 比 $S_{\triangle CEF}$ 小10平方厘米,可替换成 $S_{\square ABCD}$ 比 $S_{\triangle ABF}$ 小10平方厘米,求出 $S_{\triangle ABF}$ 。又知 $\triangle ABF$ 的底,就可以用三角形的变形公式求出BF的长,继而求出CF的长。

$$S_{\square ABCD} = 6 \times 10 = 60 \text{ cm}^2$$

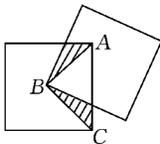
$$S_{\triangle ABF} = 60 + 10 = 70 \text{ cm}^2$$

$$FB = S_{\triangle ABF} \times 2 \div AB = 70 \times 2 \div 10 = 14 \text{ cm}$$

$$CF = 14 - 6 = 8 \text{ cm}$$

答:CF长8厘米。

例5 有两个边长是3厘米的正方形,其中一个正方形的一个顶点在另一个正方形的中心上。两个正方形不重合部分的面积和是多少平方厘米?



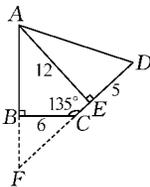
分析与解:要求两个正方形不重合部分的面积和,只需要求出重合部分的面积即可。

由于阴影部分三角形面积相等,故可以把重合部分上的阴影部分拼补到不重合的阴影部分的三角形上,从而重合部分的面积就是 $\triangle ABC$ 的面积,即正方形面积是重合部分的面积的四倍。

$$3 \times 3 \times 2 - 3 \times 3 \div 4 \times 2 = 13.5 \text{ (平方厘米)}$$

答：两个正方形不重合部分的面积和是 13.5 平方厘米。

例 6 如图所示四边形 ABCD，线段 BC 长为 6 厘米， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 135^\circ$ ，而且点 A 到边 CD 的垂线 AE 的长为 12 厘米，线段 ED 的长为 5 厘米。求四边形 ABCD 的面积。



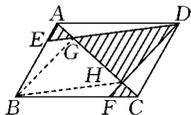
分析与解：四边形 ABCD 的面积不易直接求出来，可考虑将这个不规则的图形通过添补，使它成为一个新的易求面积的图形。延长 AB、DC 交于 F 点（见上图），则 $\angle BCF = 45^\circ$ ， $\angle FBC = 90^\circ$ ，从而 $\angle BFC = 45^\circ$ 。因为 $\angle BFC = \angle BCF$ ，所以 $BF = BC = 6$ 厘米。 $S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ （平方厘米）。在直角 $\triangle AEF$ 中， $\angle AFE = 45^\circ$ ，所以 $\angle FAE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，从而 $EF = AE = 12$ （厘米）。

$$S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} \times 12 \times (12 + 5) = 102 \text{ (平方厘米)}$$

$$S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ADF} - S_{\triangle BCF} = 102 - 18 = 84 \text{ (平方厘米)}$$

答：四边形 ABCD 的面积是 84 平方厘米。

例 7 如下图，在平行四边形 ABCD 中， $AB = 4AE$ ， $BC = 4CF$ 。如果平行四边形的面积为 a，那么阴影部分的面积是多少？



分析与解：本题添加辅助线，连结 BG、BH，使本来无关的三角形变成等底（或等高）的三角形，从而找出三角形的面积关系。

如图所示，因为 $AB = 4AE$ ， $BC = 4CF$ ，所以 $AC = 5AG = 5CH$ ，且四

边形 BHDG 是平行四边形。

因为 $AB = 4AE$, $GH = 3AG$, 所以

$$S_{\triangle AEG} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABG} = \frac{1}{12}S_{\triangle BHG}$$

$$\text{同理, } S_{\triangle CFH} = \frac{1}{4}S_{\triangle CBH} = \frac{1}{12}S_{\triangle BHG}$$

$$\text{因为 } GH = \frac{3}{5}AC, \text{ 所以 } S_{\triangle BHG} = \frac{3}{5}S_{\triangle ABC} = \frac{3}{10}S_{\square ABCD}$$

所求阴影面积等于

$$\begin{aligned} & S_{\triangle AEG} + S_{\triangle DHG} + S_{\triangle CFH} \\ &= \left(\frac{1}{12} + 1 + \frac{1}{12} \right) S_{\triangle BHG} = \frac{7}{6} S_{\triangle BHG} = \frac{7}{6} \times \frac{3}{10} \times a = \frac{7}{20}a \end{aligned}$$

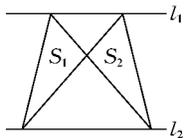
答: 阴影部分的面积是 $\frac{7}{20}a$ 。

名师指津



1. 运用等底等高的三角形面积相等的原理, 可以把一个任意的多边形变成另一个等积的、边数比它少 1 的多边形, 直至变成一个和它等积的三角形, 最后还可以变成一个和它等积的长方形。

2. 通过发现共高(或共底)的三角形, 由底(或高)的长度关系, 找出面积间的关系, 是解图形面积问题的一个重要技巧。两个三角形如果有一条公共的底边, 且这条底边所对的顶点都在与底边平行的直线上, 则这两个三角形的面积相等。如图所示:



l_1 、 l_2 为平行线, 则 $S_1 = S_2$ 。

两个三角形如果有相等的底(或高), 但一个三角形的高(或底)

是另一个三角形高(或底)的若干倍,那么这个三角形的面积是另一个三角形面积的若干倍。

3. 运用加减法可以将不规则图形转化成规则图形之和或差,求出所求图形的面积。

4. 如果一个图形的面积不易直接求出来,可以添加合适的辅助线,用与所给图形面积相等的新图形去替换所给图形,通过计算新图形的面积来求出所给图形的面积,这种方法叫做等积转换法。

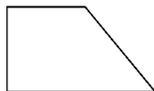
5. 对于不易直接求出面积的图形,可根据图形的特点和题设条件的特点,添补适当的图形,使它成为一个新的易求出面积的图形,然后利用新图形面积减去所添补图形的面积,求出原图形的面积。这种方法称为“补形法”。

名题求解



请你试一试

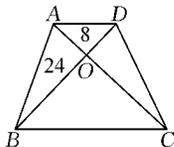
1. 将任一三角形分成面积相等的六个三角形,应怎样分?
2. 将下图分成4个大小相等、形状相同的图形。



第2题图



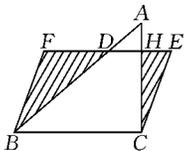
第3题图



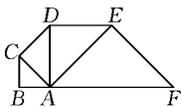
第4题图

3. 已知正方形甲的边长为5厘米,正方形乙的边长为4厘米,求图中阴影部分的面积。
4. 如图梯形被分成了四块,已知其中两块的面积,求这个梯形的面积。
(单位:平方米)

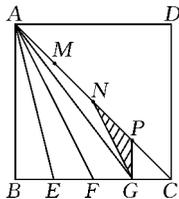
5. 如图, $BCEF$ 是平行四边形, $\triangle ABC$ 是直角三角形, BC 长 8 厘米, AC 长 7 厘米, 阴影部分面积比 $\triangle ADH$ 的面积大 12 平方厘米。求 HC 的长。



第 5 题图

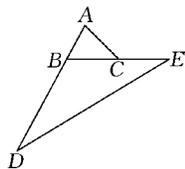


第 6 题图



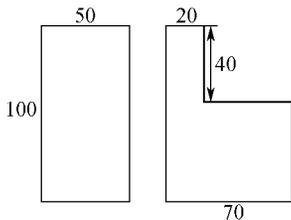
第 7 题图

6. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ADE$ 、 $\triangle AEF$ 都是等腰直角三角形, 且 $AB = 2$, 求多边形 $ABCDEF$ 的面积。
7. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 为 BC 边上的四等分点, M 、 N 、 P 为对角线 AC 上的四等分点。求阴影部分面积占正方形面积的几分之几?
8. 已知右图中 $\triangle ABC$ 的面积为 1, $BD = 3AB$, $BC = CE$ 。求 $\triangle BDE$ 的面积。

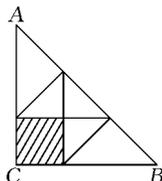


第 8 题图

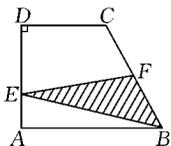
1. 丁燕是班上的宣传委员, 她准备出一期小报, 需要一张正方形的纸, 但她只找到两张如下图所示的纸(单位: 厘米)。她动了一番脑筋, 将这两张纸通过剪拼得到一个正方形, 没有剩余。你知道她是怎样剪拼的吗? 你能想出 2 种以上的方法吗?



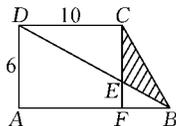
2. 如图中所有的三角形都是等腰三角形, $AB = 10.8$ 厘米。求阴影部分的面积。



第 2 题图

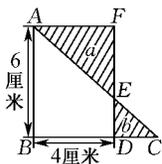


第 3 题图

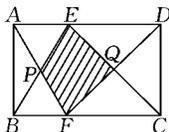


第 4 题图

3. 已知梯形 ABCD 的面积是 145 平方厘米, 其中 $AB = 14$ 厘米, $CD = 6$ 厘米, $ED = 8.5$ 厘米, F 是 BC 的中点。求阴影部分的面积。
4. ABCD 为直角梯形, $AD = 6$, $DC = 10$, $\triangle BEC$ 的面积为 6。求四边形 ABCD 的面积。
5. 如图, 阴影部分 a 的面积比阴影部分 b 的面积大 10.5 平方厘米, 求线段 BC 的长度。



第 5 题图

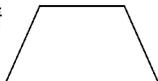


第 6 题图

6. 如图长方形 ABCD 中, $\triangle ABP$ 的面积为 20 平方厘米, $\triangle CDQ$ 的面积为 35 平方厘米, 阴影四边形的面积是多少平方厘米?



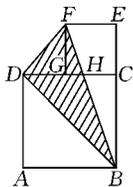
1. 如图为一个底角为 60° , 上底和腰相等的等腰梯形, 请你将它分成大小相等、形状相同的四个图形。



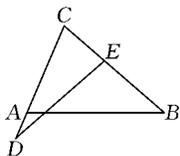
2. 如图, 已知正方形 ABCD 和正方形 CEFG 连接, 且正方形 ABCD 的边长为 10 厘米, 那么图中阴影部分(三角形 BFD)的面

第 1 题图

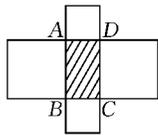
积为多少平方厘米？



第 2 题图

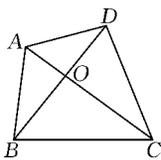


第 3 题图

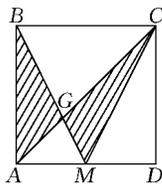


第 4 题图

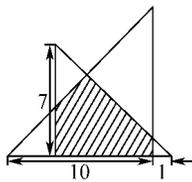
- 如图, $AD = \frac{1}{4}AC$, $\triangle CDE$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半, 问: BE 的长是 BC 的几分之几?
- 长方形 $ABCD$ 的周长是 16 米, 在它的每条边上各画一个以该边为边长的正方形(如图), 已知这四个正方形的面积之和是 68 平方米。求长方形 $ABCD$ 的面积。
- 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O (如图), 如果 $\triangle ABD$ 的面积等于 $\triangle BCD$ 的面积的 $\frac{1}{3}$, 且 $AO = 2$, $DO = 3$, 那么 CO 的长度是 DO 长度的()倍。



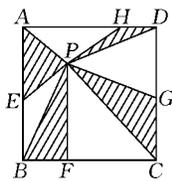
第 5 题图



第 6 题图



第 7 题图



第 8 题图

- 如图, 正方形 $ABCD$ 的面积为 1, M 是 AD 边上的中点, 求阴影部分的面积。
- 有两个等腰直角三角形, 夹直角的边分别为 7 厘米和 10 厘米。现在把这两个直角三角形如图所示重合起来, 试求阴影部分的面积。
- 在边长是 24 厘米的正方形内取一点 P , 将 P 点和 AD 、 BC 的三等分点及 AB 、 CD 的中点连结起来(如图)。求阴影部分的面积。



名师导航



1. 应知道什么叫方程,能根据四则运算各部分间的关系解方程。
2. 能熟练运用合并同类项、移项等方法解较复杂的方程。
3. 列方程解应用题是用字母来代替未知数,根据等量关系列出含有未知数的等式,也就是列出方程,然后求出方程的解。
4. 列方程解应用题的关键在于能够正确地设立未知数 x (也可以用其他字母表示未知数)。 x 可以设为要求的未知量,也可以设为与所求未知量有关的另一个未知量。然后分析题意找出等量关系从而建立方程。

名题解析



例1 解方程: $9x - 0.9 \times 7 = 2x + 2.1$

分析与解:遇到等式两边都有未知数的情况,首先可考虑消去一边的未知数。这题可以把等式两边同时减 $2x$,再解方程。

$$\begin{aligned} 7x - 6.3 &= 2.1 \\ 7x &= 2.1 + 6.3 \\ 7x &= 8.4 \\ x &= 1.2 \end{aligned}$$

例2 解方程: $0.4(x - 0.2) + 1.5 = 0.7x - 0.38$

分析与解:首先用乘法分配律去掉方程中的括号,然后用例1的方法,消去等式一边的未知数,再根据整数四则运算各部分的关系解

方程。

$$0.4(x - 0.2) + 1.5 = 0.7x - 0.38$$

$$0.4x - 0.2 \times 0.4 + 1.5 = 0.7x - 0.38$$

$$0.4x - 0.08 + 1.5 = 0.7x - 0.38$$

$$0.4x + 1.42 = 0.7x - 0.38$$

$$0.3x = 1.8$$

$$x = 6$$

例3 解方程： $x \div 3 + (100 - x) \times 2 = 100$

分析与解：这道题中有一项为 $x \div 3$ ，遇到这种情况，我们可将方程两边同时乘 3，从而与除以 3 相抵消。

去括号，得

$$x \div 3 + 200 - 2x = 100$$

移项，得

$$200 - 100 = 2x - x \div 3$$

合并，得

$$100 = 2x - x \div 3$$

两边都乘 3，得

$$300 = 6x - x$$

合并，得

$$5x = 300$$

$$x = 60$$

例4 第一车间工人人数是第二车间工人人数的 3 倍。如果从第一车间调 20 名工人去第二车间，则两个车间人数相等。求原来两个车间各有工人多少名。

分析与解：设第二车间原有工人 x 名，那么第一车间原有工人就是 $3x$ 名。根据变化后的两车间人数相等，列出方程求出解。

$$3x - 20 = x + 20$$

$$3x - x = 20 + 20$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

第一车间原有人数： $20 \times 3 = 60$ (名)

答：第一车间原有工人 60 名，第二车间原有工人 20 名。

例 5 小鲸鱼说：“妈妈，我长到您现在这么大年龄时，您就 31 岁了！”大鲸鱼说：“我像你这么大年龄时，你只有 1 岁。”求大小鲸鱼现在各几岁。

分析与解：这类问题在解答时，值得注意的一点是：两人年龄的差总是不变的。可根据“小鲸鱼长到大鲸鱼现在的年龄时，大鲸鱼就 31 岁”这一等量关系，列出方程。

设小鲸鱼现在 x 岁，则大鲸鱼比小鲸鱼大 $(x - 1)$ 岁。大鲸鱼现在 $x + (x - 1)$ 岁。而当小鲸鱼长到 $x + (x - 1)$ 岁时，大鲸鱼就是 $x + (x - 1) + (x - 1)$ 岁。依题意，列出方程：

$$x + (x - 1) + (x - 1) = 31$$

$$3x - 2 = 31$$

$$3x = 33$$

$$x = 11$$

大鲸鱼现在的年龄： $11 + (11 - 1) = 21$ (岁)

答：大鲸鱼现在 21 岁，小鲸鱼现在 11 岁。

例 6 有一个五位数，在它的右面写上一个“7”，得到一个六位数。在它的左面写上一个“7”，得到一个六位数，而第二个六位数正好是第一个六位数的 5 倍。这个五位数是多少？

分析与解：根据数位数值原则，如果设这个五位数是 x ，则在它的右面写上一个 7，这个六位数可表示为 $(10x + 7)$ ，而在它的左面写上一个 7 得到的六位数可表示为 $(70000 + x)$ 。根据这两个六位数的关系可列出方程，进而求出这个五位数。

设这个五位数为 x ，列方程得：

$$70000 + x = (10x + 7) \times 5$$

$$700000 + x = 50x + 35$$

$$49x = 699965$$

$$x = 14285$$

答：这个五位数是 14285。

例 7 一个长方形，如果长增加 2 厘米，宽增加 5 厘米，那么面积就增加 60 平方厘米，并且这时恰好变为一个正方形。原来长方形的面积是多少？

分析与解：此题的等量关系是原长方形面积增加 60 平方厘米等于新正方形的面积。可以设新正方形的边长为 x 厘米，则原长方形的长为 $(x - 2)$ 厘米，宽为 $(x - 5)$ 厘米，列方程得：

$$x^2 = (x - 2)(x - 5) + 60$$

$$x^2 = (x - 2)x - (x - 2) \times 5 + 60$$

$$x = 10$$

原来长方形的面积为：

$$(x - 2)(x - 5) = (10 - 2) \times (10 - 5) = 40 \text{ (平方厘米)}$$

答：原来长方形的面积为 40 平方厘米。

例 8 等腰三角形一个内角等于另一个内角的 4 倍，求顶角的度数。

分析与解：题中没有明确指出哪个内角是顶角或底角，所以必须分不同情况来讨论。

(1) 假设另一个内角是底角，设它为 x 度，则顶角为 $4x$ 度，列出方程：

$$180 - 2x = 4x$$

解得 $x = 30$

那么顶角为： $4x = 4 \times 30 = 120$

(2) 假设另一个内角是顶角，设为 x 度，则底角为 $4x$ 度，列出方程：

$$180 - x = 4x \times 2$$

解得 $x = 20$

那么底角为： $4x = 4 \times 20 = 80$

答：三角形的顶角是 120° 或 20° 。

例9 东风汽车零件厂第一车间有77个工人。已知每7个工人平均每天可以加工甲种零件5个或乙种零件4个，或丙种零件3个。但加工3个甲种零件、1个乙种零件和9个丙种零件才恰好配成一套。应安排生产甲、乙、丙种零件各多少人时，才能使生产的三种零件恰好配套？

分析与解：本题除了考虑加工甲、乙、丙3种零件的人数为未知数外，还有别的未知数可以考虑，即甲、乙、丙3种部件的件数。题目中有关甲、乙、丙3种部件的件数之间又存在内在联系，其中乙种零件的件数又起着媒介作用，因此我们可选择乙种零件的个数为未知数 x 。则加工甲种零件 $3x$ 个，丙种零件 $9x$ 个。加工乙种零件需安排 $\frac{x}{4}$ 人，加工甲种零件需安排 $\frac{3x}{5}$ 人，加工丙种零件需安排 $\frac{9x}{3}$ 人。由题意可列出方程：

$$\frac{x}{4} + \frac{3x}{5} + \frac{9x}{3} = 77$$

$$0.25x + 0.6x + 3x = 77$$

$$3.85x = 77$$

$$x = 20$$

将 $x = 20$ 代入：

$$0.6x = 0.6 \times 20 = 12(\text{人})$$

$$0.25x = 0.25 \times 20 = 5(\text{人})$$

$$3x = 3 \times 20 = 60(\text{人})$$

答：应安排生产甲、乙、丙三种零件工人人数分别为12人、5人、60人。

名师指津



1. 解方程合并同类项时, 只要将系数直接相加减即可, 也可理解成几个 x 。

2. 带有括号的方程去括号时, 括号里各项的符号要根据括号前面的符号决定变不变。并项去括号时, 括号前面是加号的, 去掉括号后里面的各项运算符号都不改变。括号前面是减号的, 去掉括号后里面的各项运算符号都要改变。

3. 在列方程解应用题时, 有时数量关系过于复杂, 可先设与所求数量相关的未知数量为 x 。先求出这一相关数量, 再作最后问题的解答。

4. 间接设未知数时, 要选择一个适当的中间量, 使解题所需的其他数量能用简单的代数式表示。

名题求解



请你试一试

1. 解方程。

$$(1) 5x + 12 = 7x - 18$$

$$(2) (2x - 1.2) \times 3 = 2 \times (x + 2.5)$$

$$(3) 4 \times (5 + 2x) = 2 \times (3x + 15)$$

$$(4) 4(2x - 1) - 2(x - 1) = 25$$

$$(5) x \div 8 = 6.4 \times 5$$

列方程解下列各题。

2. 一个两位数, 十位数字是个位数字的 2 倍, 将个位数字与十位数字调换, 得到一个新的两位数, 这两个两位数的和是 99, 求这个两位数。
3. 妈妈今年 50 岁, 儿子今年 26 岁, 几年前妈妈的年龄是儿子的 4 倍?



4. 两堆煤,甲堆煤有 4.5 吨,乙堆煤有 6 吨,甲堆煤每天用去 0.36 吨,乙堆煤每天用去 0.51 吨,几天后两堆煤剩下吨数相等?
5. 李明与王丽同走一段路。李明每小时走 4250 米,王丽每小时走 3000 米,李明比王丽少用 2.5 小时走完这段路。这段路有多长?



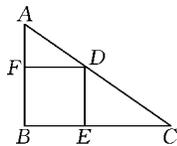
1. 解方程。
 - (1) $120x = 75(x + 12)$
 - (2) $(1 - x) \div 3 = 2 - x$
2. 当 x 等于多少时, $(72 - 2x) \div 3$ 等于 0?
当 x 等于多少时, $(72 - 2x) \div 3$ 等于 6?
3. 已知篮球、足球、排球平均每个 36 元,篮球比排球每个多 10 元,足球比排球每个多 8 元。每个篮球、足球、排球分别多少元?
4. “星星”陶艺小队里男生人数比女生人数的一半少 1 人,女生人数比男生人数的 3 倍少 4 人。这个小队共有多少人?
5. 张明从家到学校,如果以每分钟 60 米的速度走,则比以每分钟 80 米的速度多用 10 分钟,张明家到学校有多少米?
6. 有一批货物需用货车运送。货车有甲、乙两种,如果用 3 辆甲种货车、4 辆乙种货车(恰满载)需跑 5 趟;如果用 5 辆甲种货车和 3 辆乙种货车(恰满载)只需跑 4 趟。你知道哪种货车装载货物多吗?
7. 等腰 $\triangle ABC$ 中, AB 的长是 AC 的 2 倍。如果其周长是 200 厘米,那么 BC 是多长?
8. 有甲乙两堆苹果,从甲堆中拿走 2 个后,甲堆剩下的个数是乙堆的 2 倍。再从乙堆拿走 3 个苹果,这时甲堆剩下的个数是乙堆剩下的个数的 3 倍。求乙堆原来共有多少个苹果?



1. 10 年前父亲的年龄是女儿的 7 倍,15 年后父亲的年龄是女儿的 2

倍,现在父亲的年龄有多大?

- 小东买 3 千克苹果和 2 千克香梨共花 11 元,小强买 4 千克苹果和 3 千克香梨共花 15.5 元。请你算一算,每千克苹果和香梨各多少元?
- 甲书架上有书 32 本,乙书架上有书 57 本。甲书架每天增加 4 本书,乙书架每天增加 9 本书。那么多少天后,乙书架上书的本数是甲书架上书的本数的 2 倍?
- 正方形的一组对边各增加 14 厘米,另一组对边各减少 10 厘米,结果得到一个与原正方形面积相等的长方形。原正方形的面积是多少平方厘米?
- 某列火车通过 300 米长的隧道用 15 秒,通过 180 米长的桥梁用 12 秒。该列车与另一列长 330 米、时速 108 千米的列车错车需要几秒?
- 王卫在 20 天里共读了 265 页书。开始阶段,每天只能读 5 页。中间阶段由于改进了作息时间表,每天读书量提高了一倍。最后阶段由于放假,每天的读书量又比中间阶段提高了一倍半。已知中间阶段读书天数的 2 倍比开始阶段多 13 天,那么最后阶段有多少天?
- 姐妹俩共同折千纸鹤 21 天完成。姐姐比妹妹每天多折 5 只。妹妹在中途因事有 3 天没有折,于是姐姐折的千纸鹤是妹妹的 2 倍。她们共折了多少只千纸鹤?
- 一百多岁的老寿星,公元 x^2 年时年龄为 x 岁,则此寿星现年多少岁?
- 如右图:已知在直角 $\triangle ABC$ 中, $AB = 20$ 厘米, $BC = 30$ 厘米, $EDFB$ 为正方形。求 $\triangle DEC$ 的面积。
- 有一个小于 300 的三位数,若个位数字和百位数字对换,所得新的三位数值仍不变。若把个位数字和十位数字对换,所得的新三位数与原三位数之和是 499。想一想,这个三位数是多少?



第四讲

消长问题



名师导航



1. 消长问题又称牛顿问题或牛吃草问题,是世界著名的大科学家牛顿在他的《普通算术》一书中提出来的。消长问题往往给出不同头数的牛吃同一片草,吃的天数不同,求若干头牛吃这片草可以吃多少天的问题。

2. 解答这类问题,困难在于草的总量是个变数,每天它都在均匀地生长,时间愈长,草的总量愈多。但是草每天生长的速度是不变的,草场原有的草量是一定的。即草的总量是由草场原有的草量和一段时间内新生长的草量两部分组成的。由此可知求出这两部分是解题的关键。

3. 解决消长问题通常有以下几步:

① 求出单位时间内新生长的草量。

② 求出草场原有的草量。

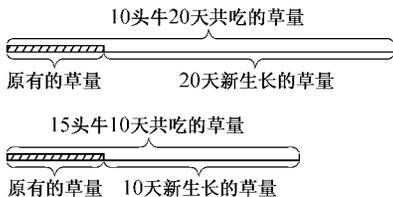
③ 将牛看成两部分,一部分专吃新生长的草(即视动态为静态),另一部分牛专吃草场原有的草,原有的草量吃完了,整个草场的草就完了。

名题解析



例1 有一片牧场,牧草每天匀速生长,如果饲养10头牛,20天可以把牧场上的草吃完,如果饲养15头牛,10天就可以把牧场上的草吃完。如果饲养25头牛,多少天可以把牧场上的草吃完?

分析与解：草的总量是由草场原有的草量和牛进入草场这段时间新生长的草量两部分组成的，原有的草量是固定不变的。新生长的草量因时间不同而不同，如下图。



从上面的线段图中可以看出 10 头牛 20 天吃的草量比 15 头牛 10 天吃的草量多 50 个单位，它就是这片草场 10 天内新生长草量。这样我们就可以求出这片草场每天新生长的草量，以及草场原有的草量了。设每头牛每天吃的草量为 1 个单位，

- ① 10 头牛 20 天吃的草量为

$$10 \times 20 = 200(\text{个})$$

- ② 15 头牛 10 天吃的草量为

$$15 \times 10 = 150(\text{个})$$

- ③ 草场每天新生长的草量

$$(200 - 150) \div (20 - 10) = 5(\text{个})$$

- ④ 草场原有草量为

$$200 - 20 \times 5 = 100 \quad (\text{或 } 150 - 10 \times 5 = 100)$$

⑤ 将 25 头牛分为 20 + 5，即 5 头牛专吃新生长的草，20 头牛吃原有的草，能吃的天数为

$$100 \div (25 - 5) = 5(\text{天})$$

答：25 头牛可以吃 5 天。

例 2 某个水库原存有一定的水，河水均匀流入库内，5 台抽水机连续 20 天可以将水库里的水抽干，6 台同样型号的抽水机连续 15 天可以将水抽干。若要 6 天抽完水库里的水，需要多少台同型号的抽水机？

分析与解：这种类型与牛吃草一样，其特点是总水量随着抽水时

间的延长而增加,总水量是变量而单位时间内流入库内的水量和水库原有的水量是不变量。设每台抽水机每小时抽出水量为1个单位。

① 5台抽水机20天抽出的水量为

$$5 \times 20 = 100(\text{个})$$

② 6台抽水机15天抽出的水量为

$$6 \times 15 = 90(\text{个})$$

③ 每天流进水库的水量为

$$(100 - 90) \div (20 - 15) = 2(\text{个})$$

④ 水库原有的水量为

$$100 - 20 \times 2 = 60(\text{个})$$

⑤ 6天抽完水库水需要抽水机

$$60 \div 6 + 2 = 12(\text{台})$$

答:需要这种型号的抽水机12台。

例3 有一片牧场,上面的草每天生长的速度相同,草可供10头牛吃10天,或供24只羊吃20天,已知1头牛和3只羊的吃草量相同。如果10头牛和12只羊一起来吃这片草,多少天可以吃完?

分析与解:本题与上面的例题类似,只需将羊的只数转化成牛的只数即可,供24只羊吃20天转化为8头牛吃20天。就是

① 10头牛10天吃的草量

$$10 \times 10 = 100(\text{个})$$

② 8头牛20天吃的草量

$$8 \times 20 = 160(\text{个})$$

③ 草场每天新生长的草量

$$(160 - 100) \div (20 - 10) = 6(\text{个})$$

④ 草场原有的草量

$$100 - 10 \times 6 = 40(\text{个})$$

⑤ 10头牛和12只羊相当于14头牛($12 \div 3 + 10 = 14$),14头牛能吃的天数

$$40 \div (14 - 6) = 5(\text{天})$$

答：可以吃 5 天。

例 4 快、中、慢三辆车同时从同一地点出发，沿同一公路追赶前面的一位骑车人。这三辆车分别用 6 分钟、10 分钟、12 分钟追上骑车人。现在知道快车每小时行 24 千米，中车每小时行 20 千米，求慢车每小时行多少千米？

分析与解：这是一道追及问题的应用题，认真分析你会发现它与牛吃草一样，追及时间越长，骑车人骑的也越远，而快、中、慢三辆车开始从同一地点同时出发的，就是说追及的路程一样，这就如同牛吃草，原来草量相同。用牛吃草的方法做此题，甚至连速度的单位都不用统一。

① 快车 6 分钟走的距离

$$24 \times 6 = 144$$

② 中车 10 分钟走的距离

$$20 \times 10 = 200$$

③ 骑车人每分钟走的距离

$$(200 - 144) \div (10 - 6) = 14$$

④ 追及的路程

$$200 - 14 \times 10 = 60$$

⑤ 慢车的速度

$$60 \div 12 + 14 = 19(\text{千米/小时})$$

答：慢车每小时行 19 千米。

例 5 商场里的自动扶梯以均匀的速度由下而上行驶着，两个小孩要比赛爬电动扶梯，大男孩每分钟走 20 级梯级，小男孩每分钟走 15 级梯级，结果大男孩用 5 分钟到达楼上，小男孩用 6 分钟到达楼上。问该电动扶梯共有多少级？

分析与解：电梯把人从楼下送到楼上，距离都是一样的，为什么大男孩走了 $20 \times 5 = 100$ 步，而小男孩只走 $15 \times 6 = 90$ 步呢？因为小男孩

在电动扶梯上多走了 1 分钟。

- ① 大男孩 5 分钟走的级数

$$20 \times 5 = 100(\text{个})$$

- ② 小男孩 6 分钟走的级数

$$15 \times 6 = 90(\text{个})$$

- ③ 电动扶梯的速度

$$(100 - 90) \div (6 - 5) = 10(\text{级/分钟})$$

- ④ 电动扶梯的台级数

$$(10 + 20) \times 5 = 150 \quad (\text{或} (10 + 15) \times 6 = 150)$$

答：电动扶梯共有 150 个台级。

例 6 某车站在检票前若干分钟就开始排队，每分钟来的旅客人数一样多。如果同时开放 10 个检票口 20 分钟可以放完旅客；如果同时开放 15 个检票口，10 分钟可以放完旅客。若要 5 分钟内放完旅客，需要同时开放多少个检票口？

分析与解：设 1 个检票口 1 分钟放进 1 个单位的旅客。

- ① 10 个检票口 20 分钟放进多少个单位旅客

$$10 \times 20 = 200(\text{个})$$

- ② 15 个检票口 10 分钟放进多少个单位旅客

$$15 \times 10 = 150(\text{个})$$

- ③ 每分钟新来多少个单位旅客

$$(200 - 150) \div (20 - 10) = 5(\text{个})$$

- ④ 检票前已有多少单位旅客

$$200 - 20 \times 5 = 100(\text{个})$$

- ⑤ 5 分钟放完旅客需要检票口

$$100 \div 5 + 5 = 25(\text{个})$$

答：需要开放 25 个检票口。

例 7 一片牧场草每天匀速生长，可供 18 头牛吃 30 天或 23 头牛吃 20 天。现在放若干头牛吃了 6 天后，卖掉 5 头牛，余下的牛再吃

4 天便将草吃完。求原来草场放了多少头牛？

分析与解：这种类型与前面的类型略有不同。其实只要我们仔细分析，适当将问题转化，就迎刃而解了。我们可以这样想，若不卖掉 5 头牛，在后面的 4 天里，将缺少 $5 \times 4 = 20$ 个单位的草量，若将原草量加上 20 个单位，不就转化成我们熟悉的牛吃草问题了吗？

① 18 头牛 30 天吃的草量

$$18 \times 30 = 540(\text{个})$$

② 23 头牛 20 天吃的草量

$$23 \times 20 = 460(\text{个})$$

③ 每天新生长的草量

$$(540 - 460) \div (30 - 20) = 8(\text{个})$$

④ 草场原有的草量

$$540 - 30 \times 8 = 300(\text{个})$$

⑤ 牧场放的牛的头数

$$(300 + 5 \times 4) \div (6 + 4) + 8 = 40(\text{头})$$

答：原来牧场上放了 40 头牛。

例 8 有三片牧场，场上的草长得一样密，而且长得一样快，它们的面积分别是 $3\frac{1}{3}$ 公顷、10 公顷、24 公顷。已知第一块地可供 12 头牛吃 4 周，第二块地可供 21 头牛吃 9 周，问第三块地可供多少头牛吃 18 周？

分析与解：这道题就是科学家牛顿在他的《普通算术》一书中提出的问题。本题与前面的例题区别在于，不同数量的牛放在不同草地吃的天数也不同，因此本题需这样进行转化。因第二块草地的面积是第一块草地面积的 3 倍，所以第二块草地应该够 36 头牛吃 4 周，供 21 头牛吃 9 周。从第二块入手，求出单位面积原有的草量和新生长的草量，然后再求出第三块。设 1 头牛 1 周吃的草量为 1 个单位。

① 第二块草地每天生长的草量

$$(21 \times 9) - (36 \times 4) \div (9 - 4) = 9(\text{个})$$

② 第二块草地原有的草量

$$36 \times 4 - 9 \times 4 = 108(\text{个})$$

③ 第三块草地每天新生长的草量

$$9 \div 10 \times 24 = 21.6(\text{个})$$

④ 第三块草地原有的草量

$$108 \div 10 \times 24 = 259.2(\text{个})$$

⑤ 第三块草地够多少头牛吃 18 周

$$259.2 \div 18 + 21.6 = 36(\text{头})$$

答：第三块草地够 36 头牛吃 18 周。

名师指津



消长问题的应用题主要有以下两种类型：

1. 求时间。
2. 求头数。

无论怎样变，都必须要求出“每天新生长的草量”和“草场原有的草量”这两个关键量。

名题求解



请你试一试

1. 一片青草地，草每天都匀速生长，这片青草可供 24 头牛吃 6 天，可供 20 头牛吃 10 天，可供 29 头牛吃多少天？
2. 一片青草地，草每天都匀速生长，这片青草可供 27 头牛吃 6 天，可供 23 头牛吃 9 天。要想永远吃不完这片草，最多能放多少头牛？
3. 一片青草地，草每天都在匀速生长，这片青草可供 24 头牛吃 6 天，可供 20 头牛吃 10 天，现在要想在 10 天内将这片青草吃完，应放多

少头牛？

4. 有一片牧场,草每天都在匀速地生长,如果放4只羊,15天可以把草吃完,如果放8只羊,7天可以把草吃完。若只放1只羊,多少天可以把草吃完？
5. 有一条船因触礁破了一个洞,发现漏水时,已经进了一些水。现在水匀速进入船内,如果10人淘水3小时可以把水淘完,5人淘水则需要8小时淘完,如果要求在4小时内淘完,要安排多少人淘水？
6. 因天气渐冷,牧场上的草以一定的速度在减少。已知牧场上的草可供33头牛吃5天或可供24头牛吃6天,这个牧场可供多少头牛吃10天？
7. 冬季来临,牧场上的草以一定的速度在死亡。已知某片牧场上的草可供28头牛吃15天,也可供20头牛吃20天,现在这片草场上放12头牛,最多可以吃多少天？
8. 山中的泉水匀速地流入一池塘中,现欲将池塘里的水全部抽干,若用8台A型抽水机10天可以抽干,若用6台A型抽水机20天能将池塘里的水抽干。若需5天抽干水,需要安排多少台同样型号的抽水机？



1. 有一片牧场,牧场上的青草每天生长的速度都相同。如果放养24头牛,6天可以把草吃完;如果放养60只羊,10天可以把草吃完。已知一头牛的吃草量相当于3只羊的吃草量,那么18头牛与18只羊一起吃这片草,可以吃多少天？
2. 有一片牧场上的草均匀地生长,如果放4头牛,15天可以吃完草,如果放32只羊,7天可以把草吃完。已知1头牛的吃草量相当于4只羊的吃草量,若想5天把草吃完,现在草场上有6头牛,还可再放多少只羊？
3. 一条船因触礁破了一个洞,早晨6时一船员发现时船里已有一些

水。水均匀进入船里,如果安排 8 个人淘水 2 小时可将水淘完,如果安排 5 个人淘水则需 4 小时才能将水淘完。现在需要上午 9 时淘完水,需安排多少人淘水?船是在什么时间触礁的?

4. 有快、中、慢三辆车从同一地点同时沿一条公路同方向行驶,在它们前面有一个同向行驶的骑车人,快车、中车、慢车分别用了 2、3、5 分钟追上了这个骑车人。已知快车的速度是每分钟 2000 米,中车的速度是每分钟 1500 米,求慢车的速度是多少?
5. 一片牧场上的草每天都在匀速生长,可供 18 头牛吃 30 天,可供 20 头牛吃 25 天。现有若干头牛吃了 8 天后,卖掉 15 头牛,余下的牛再吃 4 天便将草吃完。问原来草场上放了多少头牛?
6. 经测算,地球上的资源可供 100 亿人生活 100 年,可供 80 亿人生活 300 年。若地球新生成资源的速度是一定的,地球最多能养活多少人?
7. 某火车站检票口前若干分钟就排起了队,假设每分钟来的旅客人数一样多,若同时开放 3 个检票口,则 40 分钟放完旅客,若同时开放 4 个检票口,则 20 分钟放完旅客,若需 10 分钟放完旅客,则需要同时开放多少个检票口?
8. 锅炉房煤场可存煤量够烧 45 天,若用一辆大汽车往空煤场内运煤,除了保证锅炉每天用煤外,5 天可将煤场堆满。若用 2 辆小货车运煤,则需 9 天可将煤场堆满。如果用 1 辆大汽车和 2 辆小货车同时运,需要几天可将煤场运满?(锅炉每天烧的煤量相同)



做做小诸葛

1. 早晨 6 点,某火车站进口处已有 945 名旅客等候检票进站,此时每分钟还有若干人前来排队准备进站(速度是匀速的)。若开放 4 个检票口,15 分钟可以放完旅客,如果设立 8 个检票口,7 分钟可以放完旅客。求 5 分钟内放完旅客,需开放多少个检票口?
2. 12 头牛 28 天可以吃完 10000 平方米的草场上的全部青草。21 头

牛 63 天可以吃完 30000 平方米草场上的全部青草。现在一块 72000 平方米的牧场,如果青草生长速度和上两块相同,可供 72 头牛吃多少天?

3. 一个水库,每小时流入 80 立方米的水。如果安排 5 台抽水机,8 小时可以抽完水库里的水,如果安排 9 台抽水机,4 小时可以抽完水库里的水。现在干旱,需要抽水救禾苗,每小时需抽 160 立方米的水,问应安排多少台抽水机来抽水?
4. 儿童节这天许多人去海洋馆玩,海洋馆 9:00 开门,开门时已有 600 人在排队等候进门。如果每分钟来的游客都是同样多,已知 1 个入口每分钟可以进 30 人,开放 4 个入口,经过 10 分钟门口就无人排队。这时,只须开几个入口就能保证再来的游客不需排队?
5. 有三块草地,面积分别为 4 公顷、8 公顷和 10 公顷,三块草地上单位面积的草一样多,且长得都一样快。若第一块草地可供 24 头牛吃 6 周,第二块草地可供 36 头牛吃 12 周,问第三块草地可供多少头牛吃 20 周?
6. 一块草场,假设每天草都在匀速生长,这片草场可供 100 只羊吃 200 天,可供 150 只羊吃 100 天。为了防止草场沙漠化,这片草场最多可以放牧多少只羊?

第五讲

推 理



名师导航



1. 有一类问题,题目的条件往往不是数字、算式和图形,解答此类问题也不是进行许多计算、分析数量关系或图形的变换得出答案和结论,而是根据题目的条件进行分析、推理,作出正确的判断,得出问题的答案。这类问题称为推理问题。

2. 一件事情发生后可能会有几种情况,根据已知条件,把不可能的情况一一排除,则唯一剩下的就是所求的结果。这种方法就叫做排除法。用排除法推理常画一个表帮助分析,用“√”表示肯定,用“×”表示否定。

3. 假设推理法就是先假设一个前提是正确的,并以此为起点,在此基础上进行分析与推理。如果推理导致矛盾,就说明假设的前提不正确,再重新提出一个假设,直至得到符合要求的结论为止。

4. 借助图示进行推理的方法有助于问题具体化,适用于寻找有相关关系元素的逻辑推理问题。

名题解析



例1 甲、乙、丙3人中一位是医生,一位是教师,一位是工人。现在知道,丙比工人大,甲和教师不同岁,教师比乙年龄小。那么,谁是医生,谁是教师,谁是工人?

分析与解:用列表进行推理,用“√”表示肯定,用“×”表示否定。

	医生	教师	工人
甲		×	
乙		×	
丙		√	×

“丙比工人大”说明丙不是工人，在丙的工人格打“×”。“甲和教师不同岁”说明甲不是教师，在甲的教师格打“×”。“教师比乙年龄小”说明乙不是教师，在乙的教师格打“×”。

观察表格，既然甲、乙都不是教师，那么丙是教师，在丙的教师格打“√”。

知道了丙是教师，就知道他们的年龄从大到小的顺序是：

$$\text{乙} > \text{教师} = \text{丙} > \text{工人}$$

所以甲是工人，乙是医生。

答：乙是医生，丙是教师，甲是工人。

例2 电视屏幕上有四人，他们的国籍是法国、美国、英国、德国。现在给他们编了号码，要大家说每一号码人的国籍。回答时每人都只答对了—一个。

甲：1号是法国人，2号是美国人。

乙：2号是英国人，1号是德国人。

丙：3号是美国人，4号是英国人。

丁：2号是美国人，4号是德国人。

请你根据以上的条件，判断每个号码是哪国人。

分析与解：本题可用列表法和假设法结合进行推理。

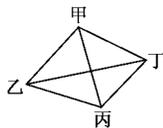
	1	2	3	4
甲	法√	美×		
乙	德×	英√		
丙			美√	英×
丁		美×		德√

看表：假设甲说的1号是法国人是对的，则他说的2号是美国人是错的。由此看丁说2号是美国人也是错的，那么4号是德国人是对的。这样丙说4号是英国人是错的，他说3号是美国人就对了。这样乙说1号是德国人错了，2号是英国人就对了。假设与题目不矛盾。因此1号是法国人，2号是英国人，3号是美国人，4号是德国人。

例3 甲、乙、丙、丁比赛乒乓球。每两人要赛一场。结果甲胜了丁，并且甲、乙、丙三人胜的场数相同。问丁胜了几场？

分析与解：看图，甲、乙、丙、丁每两人要赛一场，共要赛 $3+2+1=6$ 场。

① 如果甲胜一场，那么乙、丙也各胜一场，那么丁胜 $6-3=3$ 场，即丁胜甲、乙、丙，与“甲胜了丁”矛盾，所以甲胜一场不可能。



② 如果甲胜2场，那么乙、丙也各胜2场，那么丁胜 $6-2\times 3=0$ 场。

所以丁胜了0场。

例4 4个小孩在校园内踢球。“砰”的一声，不知是谁踢的球把教室窗户的玻璃打破了。杨老师跑出来一看，问：“是谁打破了玻璃？”

小华说：“是小新打破的。”

小新说：“是小胖打破的。”

小明说：“我没有打破窗户玻璃。”

小胖说：“杨老师，小新在说谎，不要相信他。”

这4个小孩只有一个说了真话。

请判断：说真话的是谁？是谁打破窗户玻璃的？

分析与解：为方便起见，用“华”、“新”、“明”、“胖”表示4人分别说了真话，用“**华**”、“**新**”、“**明**”、“**胖**”表示4人分别说了谎话。

① 如果是小华打破的玻璃，由条件可知：**华**、**新**、明、胖。这与“只有一个说真话”矛盾。

② 如果是小新打破的玻璃，由条件可知：华、**新**、明、胖。这与

“只有一人说真话”矛盾。

③ 如果是小明打破的玻璃,由条件可知:华、新、明、胖。于是我们知道:小胖说了真话,小明打破了玻璃。

④ 如果是小胖打破了玻璃,由条件可知:华、新、明、胖。也与题意矛盾。

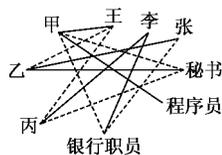
所以小胖说了实话,是小明打破了玻璃。

例5 甲、乙、丙三人,一个姓张,一个姓李,一个姓王。他们一个是银行职员,一个是计算机程序员,一个是秘书。已知:

- (1) 甲既不是银行职员也不是秘书;
- (2) 丙不是秘书;
- (3) 张不是银行职员;
- (4) 姓王的不是乙,也不是丙。

问:甲、乙、丙三人分别姓什么?

分析与解:把姓氏、名字、职业分成三个集合。把有关的量用实线连接,无关的量用虚线连接。(一根实线可以产生两根虚线,两根虚线可以决定一根实线的存在。)



通过画图分析可以看出:

甲姓王(是计算机程序员);乙姓张(是秘书);丙姓李(是银行职员)。

例6 由甲、乙、丙3个班中各出3名学生比赛长跑。规定第1名得9分,第2名得8分,第3名得7分……第8名得2分,第9名得1分。比赛结果是3个班总分相等,而且9名学生没有名次并列的,也没有同一个班的学生获得相连名次的。如果第1名是丙班的,第2名是乙班的。那么最后一名是哪个班的?

分析与解:9名学生总分为: $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

由于3个班的总分相等,即每个班均为 $45\div 3=15$ 分。将1~9这9个自然数3个数一组分为3组,使每组之和都是15,只有以下两种

情况：

① 一组得分为：9、5、1

二组得分为：8、4、3

三组得分为：7、6、2

② 一组得分为：9、4、2

二组得分为：8、6、1

三组得分为：7、5、3

在第①种情况中，二、三组都有相连的数，即相连的名次，这不合题意，所以只能取第②种结果。

那么丙班有第1名，得分是9、4、2；乙班有第2名，得分是8、6、1；甲班得分为7、5、3。可见最后一名是乙班的。

名师指津



1. 解推理题时，通常可画个图表，可帮助分析问题、解决问题。
2. 很多推理问题，题目中给出了很多条件，而且这些条件叙述的层次多又纵横交错，难以得出结论。为了理出头绪，列表是解决这一矛盾的常规手段。
3. 在推理过程中，常要借助一些符号来表示对(√)错(×)、真(1)假(0)、相关(实线)不相关(虚线)，这样使推理更直观。
4. 推理中的排除法常与枚举法结合应用，把各种情况枚举出来，根据题意，把不符合条件的结论逐个排除。

名题求解



请你试一试

1. 某工厂为表扬好人好事核实一件事，厂方找了A、B、C三人。A说：是B做的。B说：不是我做的。C说：不是我做的。这三人中只

有一人说了实话。问这件好事是谁做的？

2. 一个正方体,六个面上分别写上 A、B、C、D、E、F。你能根据这个正方体不同的摆法,求出相对的两个面的字母各是什么？



3. 甲、乙、丙、丁四位同学的运动背心上印有不同的号码。
赵说：甲是 2 号,乙是 3 号。
钱说：丙是 2 号,乙是 4 号。
孙说：丁是 2 号,丙是 3 号。
李说：丁是 1 号,乙是 3 号。
又知赵、钱、孙、李每人都只说对了一半。那么丙是几号？
4. A、B、C、D 四个篮球队一起进行比赛,每两队都要比赛一场。到现在为止,A 已赛 3 场,B 已赛 2 场,D 已赛 1 场。问 C 已赛了几场？
5. 甲乙两队进行象棋对抗赛,甲队的三人是张、王、李,乙队的三人是赵、钱、孙。按照以往的比赛成绩看,张能胜钱,钱能胜李,李能胜孙,但是第一轮比赛他们都没有成为对手。第一轮比赛的对手分别是谁对谁？
6. 甲、乙、丙三名教师分别来自北京、上海、武汉,分别教数学、语文、英语。根据下面的已知条件,判断丙教什么课。
(1) 甲不是北京人,乙不是上海人；
(2) 北京的教师不教英语；
(3) 上海的教师教数学；
(4) 乙不教语文。
7. 马戏团里的三个小丑衣着很特别,他们的帽子颜色分别是红色、白色和蓝色,他们的衣服和鞋也分别是红色、白色和蓝色。有意思的是,他们每个人的帽子、衣服和鞋也分别是红、白、蓝三种颜色。如果戴白色帽子的小丑的鞋不是红色,那么戴蓝色帽子的小丑穿什么颜色的衣服？

8. 赛马比赛前,四名观众给 A、B、C、D 四匹马排名次。

甲说:“第一名不是 A 就是 C。”

乙说:“B 跑的比 D 快。”

丙说:“如果 A 得第一,C 就得第二。”

丁说:“B、D 都不会得第三。”

结果谁也没猜错,你知道四匹马的名次是怎样排的吗?



动动小脑筋

1. 刘老师挂出一张没注明省份的中国地图,从中选了 5 个省,编了 1~5 号,要大家写出标有 1~5 号的省份名称。交卷后,老师发现有五位同学每人只答出了 2 个省份的名称,并且每人都只答对了 1 个省份,每个编号只有 1 个省份是对的。

A:2 号是山东,3 号是陕西。

B:2 号是陕西,5 号是山东。

C:3 号是江苏,4 号是辽宁。

D:2 号是江苏,4 号是浙江。

E:1 号是浙江,5 号是辽宁。

请你根据以上条件,判断 1~5 号是什么省份?

2. 甲、乙、丙、丁正在进行乒乓球双打比赛。已知:(1)甲比乙年龄大;(2)丙的年龄最小;(3)丁与乙的同伴的年龄和等于另外两人的年龄和。问:他们四人谁和谁是同伴?
3. 赛马比赛前,五位观众给 A、B、C、D、E 五匹赛马预测名次。

甲说:B 第三,C 第五;

乙说:E 第四,D 第五;

丙说:A 第一,E 第四;

丁说:C 第一,B 第二;

戊说:A 第三,D 第四。

结果每个名次都有人猜中,求各匹马的名次。

4. 同住一间寝室的 A、B、C、D 四名女大学生,正在听一组乐曲。她们当中有一个人在修指甲;一个人在做头发;一个人在化妆;另一个人在看书。已知:

- (1) A 不在修指甲,也不在看书;
- (2) B 不在化妆,也不在修指甲;
- (3) 如果 A 不在化妆,那么 C 不在修指甲;
- (4) D 不在看书,也不在修指甲。

问她们各自在做什么?

5. 李明、张华、刘冬 3 位同学在市数学竞赛中获前三名,3 人恰是 3 个不同学校的学生。已知:① 李明不是实验小学的学生;② 张华不是师大附小的学生;③ 实验小学的学生不是第 2 名;④ 师大附小的学生得第 1 名;⑤ 张华不是第 3 名。

试判定这 3 位同学的名次及他们分别是实验小学、师大附小还是育才小学的学生。

6. 学校新来了一位老师,五个学生分别听到如下的情况:

- (1) 是一位姓王的中年女老师,教语文课;
- (2) 是一位姓丁的中年男老师,教数学课;
- (3) 是一位姓刘的青年男老师,教外语课;
- (4) 是一位姓李的青年男老师,教数学课;
- (5) 是一位姓王的老年男老师,教外语课。

他们听到的情况各有一项正确,请问:真实情况如何?

7. 某旅馆的 1 号房间和 2 号房间各住着三个人,巧的是两间房子内的三个人都分别姓张、王、李。1 号房间的三个人分别是科学家、技术员和记者,2 号房间的三个人分别来自北京、上海、广州。旅馆服务员介绍的情况是:

- (1) 2 号房间姓李的从北京来;
- (2) 2 号房间姓王的不是从广州来;
- (3) 2 号房间与技术员同姓的人来自上海;

(4) 1 号房间姓张的下象棋总输给记者。

问：记者姓什么？

8. 乐乐、明明和牛牛分别出生在北京、上海和重庆，他们有的喜欢数学，有的喜欢语文，有的喜欢英语。现已知：

(1) 乐乐不喜欢数学，明明不喜欢英语；

(2) 喜欢数学的不出生在上海；

(3) 喜欢英语的出生在北京；

(4) 明明不出生在重庆。

你知道乐乐、明明和牛牛各自的爱好和出生地吗？



做做小诸葛

1. 小明、小强、小华三人来自 A、B、C 三市，在奥赛中取得了一、二、三等奖。已知：

(1) 小明不是 A 市选手；

(2) 小强不是 B 市选手；

(3) A 市的选手没有得一等奖；

(4) B 市的选手获得二等奖；

(5) 小强没得三等奖。

问：小强是哪个市的选手？小华获得了几等奖？

2. 从 5 个候选人 A、B、C、D、E 中，选出一些人出访国外，要求满足：

(1) A 和 B 必须有一人且仅有一人加入；

(2) C 和 E 至少有一人加入；

(3) 如果 D 加入，那么 B 也加入；

(4) A 和 C 或都加入或都不加入；

(5) 如果 E 加入，则 C 和 D 也都加入。

试问：应决定哪些人出访？

3. 红、黄、蓝、白、紫 5 种颜色的珠子各一颗，用纸包好，在桌子上排成一排，5 个人猜各包珠子的颜色。

甲猜：第2包是紫色，第3包是黄色。

乙猜：第2包是蓝色，第4包是红色。

丙猜：第1包是红色，第5包是白色。

丁猜：第3包是蓝色，第4包是白色。

戊猜：第2包是黄色，第5包是紫色。

猜完后打开纸包一看，每人都猜对了一种，并且每包都有一个人猜对。请你也猜一猜，他们各自猜中了哪一种颜色的珠子？

4. 一位法官在审理一起盗窃案，有4名嫌疑犯甲、乙、丙、丁，他们的供词如下：

甲说：“罪犯在乙、丙、丁3人之中。”

乙说：“我没有作案，是丙偷的。”

丙说：“在甲和乙之间有1个是罪犯。”

丁说：“乙说的是事实。”

经过调查，证实这4人中只有1名罪犯，并且有两人说的是真话，另外两人说了假话。那么罪犯是谁？

5. A、B、C、D四个同学猜测他们之中谁被评为三好学生。

A说：“如果我被评上，那么B也被评上。”

B说：“如果我被评上，那么C也被评上。”

C说：“如果D没被评上，那么我也没评上。”

实际上，他们四人之中有一人没被评上，并且A、B、C说的都是正确的。可知谁没被评上三好生？

6. 小赵的电话号码是一个五位数，它由五个不同的数字组成。

小张说：“它是84261。”

小王说：“它是26048。”

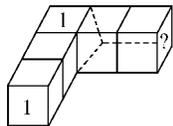
小李说：“它是49280。”

小赵说：“每人都猜对了位置不相邻的两个数字。”

这个电话号码是多少？

7. 已知在每个正方体的六个面上分别写着1、2、3、4、5、6这六个数，并

且任意两个相对的面上所写的两个数的和都等于7。现在把五个这样的正方体一个挨着一个连接起来(如图),在紧挨着的两个面上的两个数之和都等于8,那么图中打“?”的这个面上所写的数是多少?



8. A、B、C、D 四个队举行足球循环赛(即每两个队都要赛一场),胜一场得3分,平一场得1分,负一场得0分。已知:
- (1) 比赛结束后四个队的得分都是奇数;
 - (2) A队总分第一;
 - (3) B队恰有两场平局,并且其中一场是与C队平局。
- 问:D队得几分?



平均数

名师导航



1. 对若干个不相等的数求和,在总和不变的前提下,通过移多补少使它们逐渐接近,最后使这些数变成若干个相等的数,这是求平均数的基本原理。这个相等的数就是这些数的算术平均数,简称平均数。

2. 解决平均数问题的关键,在于确定总数量以及总数量对应的总份数。平均数问题的基本关系式是:总数量 \div 总份数=平均数。它还可以写成另外两种形式:平均数 \times 总份数=总数量或总数量 \div 平均数=总份数。

3. 作为算术平均数的推广,还有一种加权平均数。如果在数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 中存在某些相同的数据,例如有 m_1 个 a_1, m_2 个 a_2, m_3 个 a_3, \dots, m_k 个 a_k ,那么这些数的加权平均数可以用下列公式表示:

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \dots + m_k a_k}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k}$$

名题解析



例1 某饭店原有12名职工,拟再招聘几名服务员。在招聘时宣称本饭店月平均工资超过了700元。请分析下面的统计表,你怎样看待该饭店公布的这个月平均工资数。

职务	经理	领班	服务员
人数	1	2	9
月平均工资(元)	2000	1000	500

分析与解：可以先算出这个饭店职工的月平均工资，看饭店招聘时宣称的月平均工资数是否真实；再分析一下这个饭店不同职务的职工工资状况及拟聘的职工从事什么工作，最后进行综合比较、分析，得出结论。

职工月平均工资：

$$(2000 + 1000 \times 2 + 500 \times 9) \div (1 + 2 + 9) \approx 708(\text{元})$$

虽然该饭店公布的职工月平均工资超过了700元是真实的，但却易误导应聘者。由于饭店招聘的是服务员，服务员的月工资只有500元，与经理和领班的工资没有关系，所以饭店宣称的这个月平均工资对于应聘者没有价值。

例2 用12元1千克的巧克力糖、7元1千克的牛奶糖、6元1千克的水果糖混合成为8元1千克的什锦糖。如果巧克力糖1千克、水果糖1千克，应放牛奶糖多少千克？

分析与解：1千克牛奶糖比1千克什锦糖便宜 $8 - 7 = 1(\text{元})$ ，而1千克的巧克力糖和1千克的水果糖比2千克的什锦糖贵 $12 + 6 - 8 \times 2 = 2(\text{元})$ ，2元中有多少个1元，就是需要的牛奶糖的斤数。

$$(12 + 6 - 8 \times 2) \div (8 - 7) = 2(\text{千克})$$

答：应放牛奶糖2千克。

例3 一艘轮船航行于武汉和宜昌之间。从宜昌向武汉每小时行驶30千米，从武汉向宜昌每小时行驶20千米。这艘轮船往返一趟的平均速度是多少？

分析与解：此题没有直接告诉武汉和宜昌之间的航线距离，也就是不知道总路程，而平均速度 = 总路程 ÷ 总时间。所以我们不妨将两地之间航线假设成120千米。

轮船往返一趟的总路程：

$$120 \times 2 = 240(\text{千米})$$

轮船往返一趟的总时间：

$$120 \div 30 + 120 \div 20 = 10(\text{小时})$$

轮船往返一趟的平均速度：

$$240 \div 10 = 24(\text{千米})$$

答：这艘轮船往返一趟的平均速度是每小时行 24 千米。

例 4 歌唱比赛中有 5 名评委为选手打分，小强的得分情况是：如果去掉一个最高分和一个最低分，平均分是 9.56 分；如果只去掉一个最高分，平均分是 9.45 分；如果只去掉一个最低分，平均分是 9.62 分。小强得分中的最高分和最低分的平均分是多少？

分析与解：此题中 9.56 分是中间三名评委总分的平均分，故可算出三名评委的总分。而 9.45 分是四个评委总分的平均分，故可算出除最高分外四个评委的总分。同理，可算出除最低分外四个评委的总分。从而分别求出小强的最高分和最低分。

$$\text{最低分} : 9.45 \times 4 - 9.56 \times 3 = 37.80 - 28.68 = 9.12(\text{分})$$

$$\text{最高分} : 9.62 \times 4 - 9.56 \times 3 = 38.48 - 28.68 = 9.80(\text{分})$$

最高分与最低分的平均分是：

$$(9.12 + 9.80) \div 2 = 9.46(\text{分})$$

答：小强得分中最高分和最低分的平均分是 9.46 分。

例 5 李东成绩单上五科成绩如下表。其中语文成绩漏记，只知语文成绩比五科平均成绩高 5 分。语文成绩多少分？

语文	外语	数学	化学	物理
	90	70	75	80

分析与解：此题的解题方法是从“移多补少法”思路入手，关键要弄清楚是几个量的平均数。可先算出 4 科成绩的平均分，见示意图。从图中可以看出语文成绩比五科平均成绩高 5 分，把这 5 分平均分给四科，就是五科的平均成绩，再求出语文成绩。



四科的平均成绩：

$$(90 + 70 + 75 + 80) \div 4 = 78.75(\text{分})$$

语文成绩：

$$78.75 + 5 \div 4 + 5 = 85(\text{分})$$

答：语文成绩是 85 分。

例 6 六次数学测验的平均分为 a ，后四次的平均分比 a 提高了 3 分，第一、二次和第六次的平均分比 a 低了 3.6 分，那么前五次平均分比 a 提高还是降低了多少分？

分析与解：这道题可以从考虑每种情况的总分入手。六次数学测验的总分： $6a$ 。

$$\text{后四次数学测验的总分：}(a + 3) \times 4 = 4a + 12 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{第一、二和六次测验的总分：}(a - 3.6) \times 3 = 3a - 10.8 \quad \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 得第一至第六次测验的总分再加第六次测验分数的总数：

$$4a + 12 + 3a - 10.8 = 7a + 1.2$$

$$\text{第六次测验分数：}7a + 1.2 - 6a = a + 1.2$$

$$\text{前五次平均分：}[6a - (a + 1.2)] \div 5 = a - 0.24$$

答：前五次平均分比 a 降低了 0.24 分。

名师指津



1. 求平均数时一定要找准平均数所对应的总数和份数。例如平均速度 = 总路程 \div 总时间，不能错误地理解为是几次速度的平均数。

2. 知道几个数的平均数，求个别数，要从条件出发，分别求出某几个数的和，通过比较几个数的和，可求出个别数。

3. 解题时有些数量没有直接告诉我们，可以将其假设为一个便于计算的具体数量，使计算更简便。另外，用字母代替未知数量也是不错的方法。

名题求解



请你试一试

1. 红星小学学生自愿捐款支援“海啸”灾区的小朋友，捐款情况如下表。平均每位同学捐款多少元？

每人捐款(元)	0.5	1	2	5	10
人数	56	140	236	64	4

2. 四个数的平均数是 60，若把其中一个数改成 60，这四个数的平均数变成 66，被改的数原来是多少？
3. 甲、乙两人手中钱数的平均数是 24 元；乙、丙两人手中钱数的平均数是 25 元；甲、丙两人手中的钱数的平均数是 29 元。三人中，手中钱数最多的比最少的多多少元？
4. 商店新购进两种服装。乙种服装的件数是甲种服装的件数的 4 倍，甲种服装每件 160 元，乙种服装每件 90 元。新进服装平均每件多少元？
5. 甲地到乙地的公路长 360 千米。一辆货车从甲地到乙地送货，每小时行 60 千米。返回时由于空载，每小时多行 30 千米。这辆汽车往返的平均速度是多少？
6. 甲、乙两数的平均数是 30，乙、丙两数的平均数是 34，甲、丙两数的平均数是 32，求甲、乙、丙三个数的平均数是多少？
7. 有八个数，它们的平均数是 7.5。已知前五个数的平均数是 8.8，后四个数的平均数是 9.5，第五个数是多少？
8. 王卫前几次数学测验的平均成绩是 84 分，这一次他下定决心要考 100 分，这样才能把平均成绩提高到 86 分。你知道这是第几次考试吗？

动动小脑筋

1. 中兴商场购进甲、乙、丙三种糖果，所用费用相等。甲、乙、丙三种糖

果每千克分别是 4 元、6 元和 8 元。现在把这三种糖果混在一起成为什锦糖,这种什锦糖每千克的成本是多少元?(得数保留两位小数)

2. 修两段同样长的公路。修路队修第一段路时,平均每天修 0.5 千米,修第二段路时,平均每天修 1.5 千米。修完这两段公路,总平均每天修公路多少千米?
3. 某小组有 11 人,在一次数学考试中,小芳缺考,小组的平均成绩是 80 分。小芳补考后,她的成绩比小组的平均成绩高 10 分,她补考的成绩是多少分?
4. 老师在黑板上写了 13 个自然数,请小东计算平均数(保留两位小数),小东计算出的答案是 12.43,老师说最后一位数字错了,其他的数字都对。你知道正确的答案应该是多少吗?
5. 一次竞赛阅卷时,第一次算出全班平均分是 95.6 分,复查发现将一个 97 分误作 79 分计算了。经重新计算,这个班平均分是 96 分。这个班有多少名学生参加这次竞赛?
6. 一个旅游团租车出游,平均每人应付车费 40 元。后来又增加了 8 人,这样每人应付车费 35 元,租车费是多少元?
7. 在一次知识竞赛后,李辉、彭湃、王敏和许庆四位同学计算平均成绩,每位同学都计算其余三位同学的平均成绩。如李辉计算的是彭湃、王敏和许庆三位同学的平均分。已知李辉、彭湃、王敏和许庆四位同学算得的数字分别为 A、B、C 和 D,其中 $B > C > A > D$ 。那么这四位同学按成绩从高到低排列的顺序为 _____、_____、_____、_____。(依次填写姓名)
8. 如果四个人的平均年龄为 25 岁,且没有小于 20 岁的,那么最大的人的年龄最大可能多少岁?



做做小诸葛

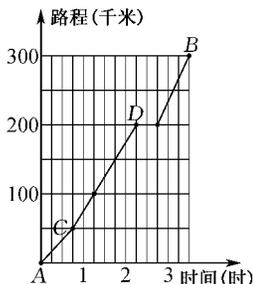
1. 小西假期随爸爸去旅游,他把汽车从 A 城到 B 城的行驶情况制成

右面的图。

(1) 汽车从 A 城行驶到高速公路收费站 C 处的速度大约是每小时多少千米？(得数保留整数)

(2) 汽车出高速公路 D 处到 B 城的平均速度大约是每小时多少千米？(得数保留整数)

(3) 从 A 城到 B 城汽车的平均速度大约是每小时多少千米？(得数保留整数)



- 五位裁判员给甲、乙两名体操运动员评分。规定：最后得分是去掉 1 个最高分和 1 个最低分后的平均数。五位裁判员给甲、乙两位运动员打出的分数的平均数是 9.72 和 9.73，其中最高分和最低分的平均数分别是 9.84 和 9.85。那么最后谁的得分高？高多少分？
- 五(3)班参加“春苗杯”英语竞赛，成绩如下：全班平均 90 分，男生平均 88 分，女生平均 93 分。这个班女生有 18 人，那么男生有多少人？
- 把 123 个自然数 1, 2, 3, ..., 123 平均分成三组，并使这三组的平均数相等，那么这三个平均数的和是多少？
- 今年前 3 个月刘荣家每月平均储蓄 500 元。从 4 月份起每月储蓄 800 元。那么从哪月起，他家每月的平均储蓄达到 700 元？
- 东方小学举行数学竞赛，把成绩排名次后，前 4 名平均分比前 2 名平均分少 1 分，前 6 名平均分比前 4 名平均分少 2 分。第三、第四名得分之和比第五、第六名得分之和多几分？

第七讲

长方体和正方体



名师导航



1. 长方体和正方体都有六个面,12条棱长,长方体每个面都是长方形(或正方形),相对的两个面完全一样,互相平行的棱长度是一样的。正方体的六个面完全一样,12条棱长度相等。

2. 长方体的长、宽、高分别用字母 a 、 b 、 h 表示,

长方体的表面积: $S = 2(ab + ah + bh)$

长方体的体积: $V = abh$

正方体的棱长用字母 a 表示,

正方体的表面积: $S = 6a^2$

正方体的体积: $V = a^3$

3. 长方体和正方体表面积与体积的计算,一般将图形分成几个部分,先分别求出几部分的表面积或体积,再求出总的表面积或体积。立体图形的计数问题,通常运用一个结论:如果把正方体的每条棱长 n 等分,那么就将正方体分成 n^3 个小正方体,而正方体的总个数有 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ 。

名题解析



例1 一个长方体,如果长增加6厘米,宽高不变;或者宽增加5厘米,长高不变;或者高增加4厘米,长宽不变,它的体积都增加120立方厘米,那么这个长方体原来的表面积是多少平方厘米?

分析与解:由于长方体的体积等于长、宽、高的乘积,当宽、高不变时,增加的长与宽和高的乘积正好等于增加的体积,这样可以求出宽和高的乘积,同理可求出长和高、长和宽的乘积。

① 宽 \times 高 $= 120 \div 6 = 20$ (平方厘米)

② 长 \times 高 $= 120 \div 5 = 24$ (平方厘米)

③ 长 \times 宽 $= 120 \div 4 = 30$ (平方厘米)

所以原长方体的表面积 $= 2(\text{长} \times \text{宽} + \text{长} \times \text{高} + \text{宽} \times \text{高}) = 2(20 + 24 + 30) = 148$ (平方厘米)

答：这个长方体原来的表面积是 148 平方厘米。

例 2 把棱长为 9 厘米的正方体切成棱长为 3 厘米的正方体若干个，则表面积增加了多少平方厘米？

分析与解：从题中可知增加的表面积应用若干个棱长 3 厘米的正方体的总表面积减去原来棱长为 9 厘米的正方体的表面积。

① 小正方体的个数为： $3 \times 3 \times 3 = 27$ (个)

② 每个小正方体的表面积为： $3 \times 3 \times 6 = 54$ (平方厘米)

所有小正方体的表面积为： $27 \times 54 = 1458$ (平方厘米)

那么表面积增加了： $1458 - 9 \times 9 \times 6 = 972$ (平方厘米)

答：表面积增加了 972 平方厘米。

例 3 一个长方体大木块，从下部和上部分别截去高为 3 厘米和 2 厘米的长方体后，便成为一个正方体，表面积减少了 120 平方厘米，求原来长方体的体积是多少立方厘米？

分析与解：由题中分析后可知，原来的长方体的底面是一个正方形，解答的关键在于求得这个正方形的边长。

由表面积减少 120 平方厘米知，这 120 平方厘米是截去的高为 $(3 + 2)$ 厘米、底面为原正方形的长方体的侧面积，所以正方形的周长等于 $120 \div (3 + 2) = 24$ 厘米，由此可求得正方形的边长，从而求得原长方体的体积。

① 原长方体底面是正方形，其边长为：

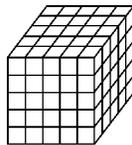
$$120 \div (3 + 2) \div 4 = 6 \text{ (厘米)}$$

② 所求体积为： $6 \times 6 \times (3 + 6 + 2) = 396$ (立方厘米)

答：原来长方体的体积是 396 立方厘米。

例 4 把一个正方体染红后，在它的每个面上都等距离地切四刀，如下页右图，这样共切成多少块小正方体？切开的这些小正方体中有

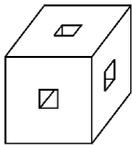
的一面是红色,有的两面或三面是红色,还有的没染上红色,你能计算出各有多少块吗?如果切 n 刀(n 为自然数)那么又各有多少块?



分析与解:从图中可看出共切成 $(4+1)^3 = 125$ 块小立方体。各个顶点处的小正方体三面是红色,因为大正方体共 8 个顶点,所以有 8 个小正方体三面都是红色。各棱长中间的小立方体两面是红色,切四刀,那么每条棱被切成 $4+1-2=3$ (块),12 条棱被切成 $12 \times 3 = 36$ (块)是两面红色。一面红色是每面的中心部分,即每面切成的正方形把四周小正方形去掉,共有 $(4-1) \times (4-1)$ 个正方形,即 9 个正方形,6 面共有 $9 \times 6 = 54$ (块)。没有染色的小正方体有两种求法,一种是总的小正方体个数分别减去一面、二面、三面染红色的小正方体的个数。或者把大正方体最外层去掉,那么内心的小正方体都是没有染色的,也就是 $(4-1)^3$ 块。切 n 刀可依据切 4 刀类推。

	三面红色	两面红色	一面红色	没有染上红色
切四刀	8(块)	$4+1-2=3$ (块) $12 \times 3 = 36$ (块)	$6 \times (4-1)^2$ $= 54$ (块)	$125 - 8 - 36 - 54 = 27$ (块) 或 $(4-1)^3 = 3^3 = 27$ (块)
切 n 刀	8(块)	$12(n-1)$ (块)	$6(n-1)^2$ (块)	$(n+1)^3 - 8 - 12(n-1) - 6(n-1)^2$ 或 $(n-1)^3$ (块)

例 5 如右图所示,一个棱长为 10 厘米的正方体,分别在它的前后、左右、上下各面的中心位置挖去一个横截面是边长为 2 厘米的正方形的长方体(都和对面打通)。求这个立体图形的体积和表面积。



分析与解:立体图形体积等于正方体体积减去挖去部分的体积。挖去的前后、左右、上下三个长方体在正方体内部的中间位置相交,形成一个空的小正方体,本题求体积的一般解法是用大正方体的体积减去三个 $2^2 \times 10$ 的长方体的体积,而这样也就减去了三个空的小正方体的体积,就必须再加上多减了的两个小正方体的体积。

立体图形的表面积应等于正方体的表面积减去六个正方形开口的面积,再加上三个底面边长为 2 厘米,高为 $(10-2)$ 厘米的长方体的侧面积。

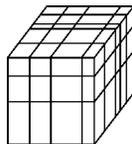
由此可得立体图形的体积为：

$$10^3 - 2^2 \times 10 \times 3 + 2^3 \times 2 = 896 (\text{立方厘米})$$

表面积为： $10^2 \times 6 - 2^2 \times 6 + 2 \times (10 - 2) \times 4 \times 3 = 768 (\text{平方厘米})$

答：这个立体图形的体积为 896 立方厘米，表面积为 768 平方厘米。

例 6 一个正方体形状の木块，棱长为 1 米，沿着水平方向将它锯成 3 片，每片又任意锯成 4 条，每条又任意锯成 5 小块，共得到大大小小的长方体 60 块，如右图。问这 60 块长方体表面积的和是多少平方米？



分析与解：原来的正方体有六个表面，每个面的面积是 $1^2 = 1$ (平方米)，增加的表面积应是每锯一刀，新增加的两个表面，每个表面的面积仍是 1 平方米，现在一共锯了： $2 + 3 + 4 = 9$ (刀)，一共得到 18 平方米的表面。

- ① 每锯一刀，增加的表面积： $1 \times 2 = 2$ (平方米)
- ② 一共锯的刀数： $2 + 3 + 4 = 9$ (刀)
- ③ 一共增加的表面积： $2 \times 9 = 18$ (平方米)
- ④ 60 块长方体表面积的和： $18 + 1^2 \times 6 = 24$ (平方米)

答：这 60 块长方体表面积的和为 24 平方米。

例 7 用 12 个长 6 厘米，宽 4 厘米，高 5 厘米的长方体码放成一个表面积最小的长方体。码放后得到的这个长方体的表面积是多少平方厘米？

分析与解：用这 12 个长方体可以码放出许多种不同的长方体，当然得到的面积就不相同。

在体积固定的所有长方体中，只有棱长相等的立方体，其各棱长之和为最小，其表面积也最小。

因为所给长方体的长、宽、高都已确定，而且已知是 12 个长方体，所以拼成的这个大长方体的体积已固定 $6 \times 4 \times 5 \times 12 = 1440$ (立方厘米)。因为这个大长方体的体积不是一个立方数，因而不可能使各棱长都相等，但我们可以使长方体的长、宽、高这三个数尽可能地接近，这样使其棱长之和为最小，这个长方形的表面积也最小。

① 拼成的大长方体体积为：

$$6 \times 4 \times 5 \times 12 = 1440 (\text{立方厘米}) = 12 (\text{厘米}) \times 12 (\text{厘米}) \times 10 (\text{厘米})$$

② 可码成的排数、每排个数、层数： $12 = 3 \times 2 \times 2$

③ 拼成的大长方体的长、宽、高的长度：

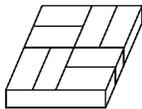
$$6 \times 2 = 12 (\text{厘米}) \quad 4 \times 3 = 12 (\text{厘米}) \quad 5 \times 2 = 10 (\text{厘米})$$

④ 拼成的长方体的表面积：

$$(12 \times 10 \times 2 + 12 \times 12) \times 2 = 768 (\text{平方厘米})$$

答：码放后得到的这个长方体的表面积是 768 平方厘米。

例 8 要砌一个高为 1 米的砖垛，每层砖都按右图所示的样子来砌。现已知每块砖的厚度为 10 厘米，每两块砖之间的灰膏的厚度为 1.25 厘米，问砌好的这个砖垛共要用多少块砖？



分析与解：由于有灰膏的厚度，所以砖的层数必然要小于 $100 \div 10 = 10$ (层)。假设砖的层数为 x 层，那么由于两层砖中间才有一层灰膏，所以灰膏的层数为 $(x - 1)$ 层，从而有

$$10 \times x + 1.25 \times (x - 1) = 100$$

$$11.25x = 101.25$$

$$x = 9$$

即这样的砖垛需要砌 9 层砖，每层有 8 块砖，共要用砖 $8 \times 9 = 72$ (块)。

答：砌好的这个砖垛共要用 72 块砖。

名师指津



1. 求粘合后(或切分)后物体的表面积，关键是弄清因粘合(或切分)后减少(或增加)的面的相关长度，求出面的面积，再求出总面积。

2. 长方体和正方体的表面积应依据它们都有六个面的特点，再转化为分别求相对面的面积和，再求出面积总和。

3. 长方体或正方体表面涂色切分后计数类问题，要从顶点、棱、面三个方面去考虑。

4. 可画图，将问题直观地展现出来。

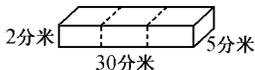
名题求解



请你试一试

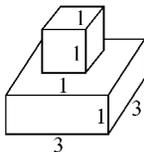
1. 把一个长方体分割为一个表面积是 96 平方厘米的正方体和一个表面积为 48 平方厘米的长方体,那么原长方体的表面积是多少平方厘米?

2. 如右图,把一块长 30 分米,宽 5 分米,高 2 分米的长方体木块平均分成 3 块后,木块的表面积增加了多少平方分米?



第 2 题图

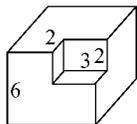
3. 把一个面的面积是 7 平方厘米的三个完全一样的正方体拼成一个长方体,这时长方体的表面积是多少?
4. 一个正方体的棱长总和是 120 平方厘米,求这个正方体的棱长、表面积和体积。
5. 一个长方体的高减少 3 厘米,成为一个正方体,表面积减少 48 平方厘米,则原长方体的体积为多少?
6. 一个长方体,长 a 米,宽 b 米,高 h 米,如果高增加 8 米后,新长方体的体积比原长方体体积增加多少立方米?
7. 一个正方体木块的表面积是 162 平方厘米,把它锯成体积相等的 27 个小正方体木块,每个小正方体木块的表面积是多少?
8. 一个小木盒,从外边量长 10 厘米,宽 8 厘米,高 5 厘米,木板厚 1 厘米,做这个木盒至少需用 1 厘米厚的木板多少平方厘米?该木盒的容积是多少立方厘米?(小木盒有底无盖)
9. 用长 4 厘米,宽 3 厘米,高 2 厘米的长方体堆成一个正方体,至少要这样的长方体多少块?
10. 有一个零件如右图所示,则它的体积是多少?表面积是多少?



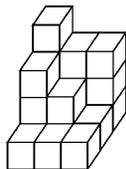
第 10 题图



1. 一个正方体切去一个长方体后(如图 单位:厘米)剩下的图形的体积是多少?



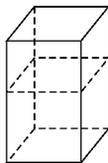
第1题图



第2题图

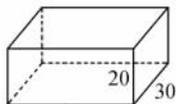
2. 把19个棱长为1厘米的正方体重叠起来,拼成一个立体图形,如图,求这个立体图形的表面积是多少平方厘米?
3. 一块长36厘米的长方形铁皮,在四个角上剪去边长为5厘米的正方形,将剩余部分焊接成一个盒子,已知盒子的容积是1560立方厘米,这块铁皮原来的宽是多少厘米?

4. 有一个长方体,它的底面是一个正方形(如图),它的表面积是370平方厘米,如果用一个平行于底面的平面将它截成两个长方体,则两个长方体表面积的和为420平方厘米。求原长方体的体积。

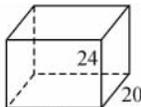


第4题图

5. 有36块体积分别为1立方分米的方块,可以拼成几种不同的长方体,写出每种长方体的长、宽、高。
6. 如图,有一个空的长方体容器(容器一)和另一个水深24厘米的长方体容器(容器二),若把容器二中的水倒一部分在容器一中,使两个容器中水的深度相同,求这时水的深度是多少?

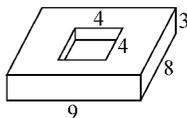


容器一



容器二

第6题图



第7题图

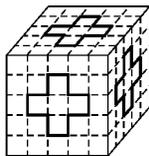
7. 有一个如图所示的立体图形,正中间有一边长为4的正方形孔,求该立体图形的表面积及体积。(单位:厘米)

8. 现有大、中、小三个正方体的水缸都盛有 $\frac{1}{2}$ 缸水, 它们的内边长分别为 6 分米、5 分米和 3 分米。把两堆碎石分别沉浸在中、小水缸的水中, 两个水缸的水面分别上升了 0.9 分米和 1.5 分米。如果将这两堆碎石都沉浸在大水缸中, 大水缸中水面将升高多少分米?
9. 将两个长 12 厘米, 宽 11 厘米, 厚 5 厘米的长方体木块粘合在一起, 成为一个大的长方体, 为了使这个长方体的表面积尽可能小, 想一想该怎样粘, 试求这个最小的表面积。

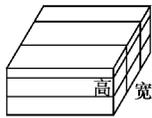


做做小诸葛

1. 将三条棱长分别为 2 厘米、4 厘米、6 厘米的长方体分割成三个小长方体, 那么分割后的三个小长方体的表面积之和最大为多少平方厘米?
2. 有一些棱长是 1 厘米的正方体, 共 120 个, 要拼成一个大长方体, 问表面积最小是多少?
3. 一个正方体的棱长为 7 厘米, 把它的前、后、左、右、上、下各面中心各挖去一个棱长为 2 厘米的正方体做成一种玩具, 求这个玩具的表面积。
4. 有一个棱长为 10 厘米的正方体木块, 从它的每个面看都有一个穿透的完全相同的“十字孔”(如图所示), 求这个立体图形的表面积。
5. 一个表面都涂满了红色的立方体, 在它的每个面上等距离的切五刀, 可得到 216 个小立方体, 而且切面都是白色。求一面是红色、两面是红色、三面是红色以及每个面都不是红色的小立方体各有多少个?
6. 将一个表面涂有红色的长方体分割成若干个体积为 1 立方厘米的小立方体, 其中一点红色都没有的小立方体有 10 块, 求原来长方体的体积。
7. 如图, 一个长方体的长、宽、高都是质数, 且长 > 宽 > 高。将这个长方体横切两刀, 竖切两刀, 得到 9 个小长方体, 这 9 个小长方体表面积之和比原来长方



第 4 题图



第 7 题图

体表面积多 624 平方厘米。求原长方体的体积。

8. 用四块同样的长方形和两块同样的正方形纸板做成一个长方体形状的纸箱,它的表面积是 266 平方厘米,长方体的长、宽、高的长度都是整厘米数,并且使纸箱的容积尽可能大,这个纸箱的容积是多少?



名师导航



1. 整除的含义。

如果数 a 除以数 $b(b \neq 0)$ 所得的商是整数而没有余数,我们就说 a 能被 b 整除或 b 能整除 a ,记作 $b|a$ 。当 $b|a$ 时,我们就可以说 a 是 b 的倍数 b 是 a 的约数。例如 $24 \div 8 = 3$ 那么 $8|24$ 。

2. 数的整除特征。

(1) 能被 2 整除的数的特征:

个位上是 0、2、4、6、8 的数都能被 2 整除。

(2) 能被 5 整除的数的特征:

个位是 0 或 5 的数都能被 5 整除。

(3) 能被 3(或 9)整除的数的特征:

各个数位数字之和能被 3(或 9 整除)。

(4) 能被 4(或 25)整除的数的特征:

末两位数能被 4(或 25)整除。

(5) 能被 8(或 125)整除的数的特征:

末三位数能被 8(或 125)整除。

(6) 能被 11 整除的数的特征:

一个整数的奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差(以大减小)是 11 的倍数。

(7) 能被 7(11 或 13)整除的数的特征:

一个整数的末三位数与末三位以前的数字所组成的数之差(以大减小)能被 7(11 或 13)整除。

3. 整除的性质。

性质 1 如果数 a 和数 b 都能被数 c 整除,那么它们的和或差也能被 c 整除,即如果 $c|a$ $c|b$ 那么 $c|(a \pm b)$ 。反过来是不成立的。

性质2 如果数 a 能被数 b 整除, b 又能被数 c 整除, 那么 a 也能被 c 整除, 即如果 $b|a, c|b$, 那么 $c|a$ 。

性质3 如果数 a 能被数 b 与数 c 的积整除, 那么 a 也能被 b 或 c 整除, 即如果 $bc|a$, 那么 $b|a, c|a$ 。

性质4 如果数 a 能被数 b 整除, 也能被数 c 整除, 且数 b 与数 c 互质, 那么 a 一定能被 b 与 c 的乘积整除, 即如果 $b|a, c|a$, 且 $(b, c) = 1$, 那么 $bc|a$ 。

名题解析



例1 (1) 判断 123456789 能否被 11 整除。

(2) 判断 259105 能否被 7 整除?

分析与解: (1) 这个数奇数位上数字之和是 $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$, 偶数位上数字之和是 $8 + 6 + 4 + 2 = 20$, $25 - 20 = 5$, 因为 $11 \nmid 5$, 所以 $11 \nmid 123456789$ 。

(2) 把 259105 分成 259 和 105 两个数, 因为 $259 - 105 = 154$, 又因为 $7|154$, 所以 $7|259105$ 。

例2 有一个四位数 $\overline{5mm2}$, 它能被 9 整除, 则 m 代表几?

分析与解: 要使 $9|\overline{5mm2}$, 根据能被 9 整除的数的特征可知 $9|(5 + m + m + 2)$, 即 $9|7 + 2m$, 由于 $0 \leq m \leq 9$, 所以 $7 + 2m = 9$, $m = 1$, 所以 m 代表 1。

例3 文具店采购员小李买了 28 个价格相同的笔袋, 共付人民币 $1 \square 4. \square$ 元。已知 \square 处数字相同, 请问每个笔袋多少元?

分析与解: $1 \square 4. \square$ 元 $= 1 \square 4 \square$ 角, $28 = 4 \times 7$, 根据整除“性质 4”可知 4 和 7 均能整除 $1 \square 4 \square$ 。

$4|4 \square$, 可知 \square 处只能填 0 或 4 或 8。

因为 $7 \nmid 1040, 7 \nmid 1444$, 所以 \square 处不能填 0 和 4, 因为 $7|1848$, 所以 \square 处应该填 8。

又 $1848 \text{ 角} = 184.8 \text{ 元}$ $184.8 \div 28 = 6.6 \text{ (元)}$

答：每个笔袋 6.6 元。

例 4 在 2008 后面补上两个数字，组成一个六位数 $2008 \square\square$ ，如果这个六位数能被 4、5、6 整除，那么补上的两个数字的和最小可能值是几？此时这个六位数是多少？

分析与解：要使 $6 \mid 2008 \square\square$ ，根据整除性质可知 $3 \mid 2008 \square\square$ ，由能被 3 整除的数的特征可知 $2 + 8 + \square + \square$ 的和最小是 12，也就是 $\square + \square$ 的和最小为 2。

再根据 $4 \mid 2008 \square\square$ $5 \mid 2008 \square\square$ ，可知补上的两位数为 20。

答：补上的两个数字的和最小可能值是 2，此时这个六位数是 $2008 \square\square$ 。

例 5 已知多位数 $\underbrace{33\dots3}_{991\text{个}} \square \underbrace{44\dots4}_{991\text{个}}$ 可被 7 整除，则 \square 中的数应是几？

分析与解：由于 $33\dots3 = 3 \times \underbrace{11\dots1}_{991\text{个}}$ ， $44\dots4 = 4 \times \underbrace{11\dots1}_{991\text{个}}$ ，由此可从研究 $11\dots1$ 着手。经试算，得 $7 \mid 111111$ ， $7 \mid 333333$ ， $7 \mid 444444$ ，而 $991 = 6 \times 165 + 1$ ；又 $\underbrace{33\dots3}_{991\text{个}} \square \underbrace{44\dots4}_{991\text{个}} = \underbrace{33\dots3}_{990\text{个}} \underbrace{300\dots0}_{993\text{个}} + 3 \square \underbrace{400\dots0}_{990\text{个}} + \underbrace{44\dots4}_{990\text{个}}$ ，其中 $7 \mid \underbrace{33\dots3}_{990\text{个}} \underbrace{300\dots0}_{993\text{个}}$ ， $7 \mid \underbrace{44\dots4}_{990\text{个}}$ ，要使 $7 \mid \underbrace{33\dots3}_{991\text{个}} \square \underbrace{44\dots4}_{991\text{个}}$ ，根据整除性质，只需 $7 \mid 3 \square \underbrace{400\dots0}_{990\text{个}}$ ，而 $7 \nmid \underbrace{400\dots0}_{990\text{个}}$ ， $7 \mid 3 \square 4$ ，经试算 $\square = 6$ ， \square 中的数应为 6。

例 6 从自然数 $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100$ 中，最多可取出多少个数，使得取出的数中任意四个数之和能被 12 整除？

分析与解：要使取出的数中任意四个数之和能被 12 整除，根据整除性质可知，取出的数必须是 12 的倍数，100 以内 12 的倍数有 12、24、36、48、60、72、84、96 这 8 个。

$$100 \div 12 = 8 \dots 4$$

答：最多可取出 8 个数，使得取出的数中任意四个数之和能被 12

整除。

例7 五张卡片,上面分别写着0、1、7、5、8,从中取出3张拼成一个三位数,使这个三位数可以被3整除,一共可拼成多少个这样的三位数。

分析与解:将五个数分为三组:(0)、(1、7)、(5、8)

要使所选三数之和为3的倍数。由五个数的分组情况可知应分别从三组中各取一数组成三位数。

所取的数可为(0、1、5)、(0、1、8)、(0、7、5)、(0、7、8)共四组;由0、1、5三个数字可组成的三位数有:105、150、501、510共四个。

而其余每组的情况均相同,故共可组成的三位数有 $4 \times 4 = 16$ (个)。

所以,一共可拼成16个这样的三位数。

例8 在所有的五位数中,各位数字之和等于43且能被11整除的数有哪些?

分析与解:首先从极端情况来考虑:如果五位数是最大的,即为99999,数字之和为 $9 \times 5 = 45$ 。根据条件,数字之和为43,只有两种情况:

- ① 一个7、四个9组成的五位数;
- ② 两个8、三个9组成的五位数。

又因为要求五位数可以被11整除。通过适当排列。所以有97999、99979、98989三个数满足条件。

名师指津



1. 解决整除问题一般将除数进行适当的分解(一般应尽量将其分解为具有一定整除特征的因数之积),然后根据数的整除特征进行讨论。

2. 当未知数在一个多位数的末几位时,可利用带余数的除法来研究整除的问题。

名题求解



请你试一试

1. 在 \square 内填上适当的数字,使六位数 $843 \square 0 \square$ 能被 125(或 8) 整除。
2. 能被 17 和 11 整除的最小的偶数是多少?
3. 用 1~5 这五个数字分别组成能被 12 整除的最小五位数和最大五位数(每一个数的数字不能重复),最小的五位数是多少?最大的五位数是多少?
4. 从 1 到 500 共 500 个不同的自然数中,其中不能被 17 整除的数有多少个?
5. 无重复数字,能被 75 整除的五位数 $\overline{3a6b5}$ 有多少个?
6. 小华在一张纸上写了一个五位数 $3 * 6 * 5$,其中第二个数码和第四个数码看不清了,只知道这个五位数既是 3 的倍数,又是 25 的倍数。试找出满足上述条件的五位数中最大的一个。
7. 将自然数 1、2、3、4、5、6、7、8、9 依次重复写下去组成一个 2005 位数,试问:这个数能否被 9 整除?
8. 在 100 以内有 5 个自然数,它们各有 12 个约数,这 5 个自然数分别是多少?
9. 有一些三位数,它们都不能被 2、3、5、7 整除,但能被 11 整除。所有这些三位数的和是多少?
10. 期末考试五年级(3)班数学平均分是 85 分,总分是 $\square 59 \square$,这个班共有多少名学生?

动动小脑筋

1. 在 1 2 3 4 ... 1000 中,不能被 2 或 3 整除的数共有多少个?
2. 在 $693 \square \square$ 后面填上一个两位数,使这个五位数能被 58 整除。
3. 一个六位数的各位数字都不相同,最左边一个数字是 3,且此六位数

能被 11 整除。这样的六位数中的最小的数是多少？

4. 有 0、1、2、4、7 五个数字，从中选出四个数字组成一个四位数，把其中能被 3 整除的四位数按从小到大的顺序排列起来。
5. 一个五位数能被 72 整除，首尾两个数字不知道，千、百、十位上的数字是 6、7、9，这个数是多少？
6. 三个互不相等的自然数，已知每个数均为 2 的倍数，每两个数的和均为 3 的倍数，而三个数的和为 5 的倍数，则这三个数的和最小是多少？
7. 有一个三位数，如果它加上 1 就能被 5 整除，如果它加上 3 就能被 2 整除，如果它加上 5 就能被 3 整除，这样的三位数最大的是多少？最小的是多少？
8. 能同时被 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 整除的四位数有多少个？



做做小诸葛

1. 六位数 $\overline{865abc}$ 能被 3、4、5 整除，要使 $\overline{865abc}$ 尽可能小， a 、 b 、 c 之和是多少？
2. 已知一个两位数恰好是它的两个数字之和的六倍，求这个两位数。
3. 从 0、3、5、7 中选出三个数字能排成多少个三位数？其中能被 5 整除的三位数有多少个？
4. 在 100, 101, ..., 10000 这些数中，最多能取多少个数，使得在取出的数中，任意两个数的和能被 100 整除？
5. 在 $1, 2, 3, 4, 5, \dots, x-1, x$ 这 x 个自然数中最多能选出 77 个数，使得这 77 个数中的每两个数的和都能被 26 整除，那么 x 的最大值是多少？
6. 求各位数字都不相同的三位数，使它等于所有由它的数字组成的两位数之和。
7. 证明：任意一个三位数连着写两次得到一个六位数，这个六位数一定能同时被 7、11、13 整除。
8. 分别写有 $1, 2, 3, \dots, 14$ 的卡片各两张，任意抽出两张，并计算这两张卡片上的数的积，则这些积中最多有多少个能被 6 整除。



名师导航

1. 基本概念。

一个自然数除了 1 和它本身 ,没有别的约数 ,这样的数叫做质数 (或素数) ,如 2、3、5、7、11、13……都是质数。

一个自然数除了 1 和它本身 ,还有别的约数 ,这样的数叫做合数。如 4、6、8、9、10……都是合数。

1 既不是质数也不是合数 ,偶数中只有 2 是质数 ,最小的合数是 4。

2. 判断质数的方法。

自然数的个数是无限的。早在 2000 多年前古希腊数学家欧几里德就证明了质数有无限多个。

怎么判断一个数是不是质数?对于 100 以内的数 ,我们可以查 100 以内质数表来判断这个数是不是质数。对于一个不很大的自然数 $n(n > 1, n$ 为非完全平方数) ,可用下面的方法判断它是质数还是合数 :先找出一个大于 n ,而且最接近 n 的完全平方数 k^2 ,再写出 k 以内的所有质数 ,如果这些质数都不能整除 n ,则 n 是质数 ;如果这些质数中有一个质数能整除 n ,则 n 为合数。

3. 利用奇偶性原理解决问题。

牢记 2 是唯一偶质数 ,再根据奇数与偶数的加减乘得出结果 ,就可解决问题。


名题解析

例 1 请你判断 173、899 是质数还是合数?

分析与解 :根据名师导航中所谈到的判断质数和合数的方法来

判断。

因为 $173 < 14^2$,而 14 以内的质数有 2、3、5、7、11、13 都不能整除 173 ,所以 173 是质数。

因为 $899 < 30^2$,而 30 以内的质数有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29 ,
因为 $899 \div 29 = 31$,所以 899 是合数。

答 :173 是质数 ,899 是合数。

例 2 用 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这 9 个数字组成质数 ,如果每个数字都要用到 ,并且只能用 1 次 ,那么这 9 个数字最多能组成几个质数 ?

分析与解 :每个数字都要用到且只能用一次 ,同时又要组成的质数最多。我们在组成质数时 ,尽可能地将合数 4、6、8、9 和最小自然数组成两位数 ,同时数字 8 和 9 可以组成质数 89。另外 ,一位质数不能是 2、3、5、7 四个 ,不然数字 1、4、6、8、9 无法组成两位质数 ,那么当一位质数为 3 个时 ,两位数字也为 3 个。(例如 :2、5、7、43、61、89 或 2、3、5、47、61、89)

答 :最多可组成 6 个质数。

例 3 将 60 分成 10 个质数之和 ,要求最大的质数尽可能小 ,那么其中最大的质数是多少 ?

分析与解 :将 60 分成 10 个质数之和 ,最大的质数必大于 5 ,否则和将不大于 50。比 5 大的质数最小是 7 ,所以其中最大的质数是 7。举一例 : $60 = 7 \times 8 + 2 \times 2$ 。

答 :其中最大的质数是 7。

例 4 一个质数 ,把它分别加上 6、8、12 后 ,得到的数仍然都是质数 ,求满足此条件的最小质数是多少 ?

分析与解 :我们知道 2 是唯一的偶数质数。现要求的这个质数在加上 6、8、12 后仍然是质数 ,那么这三个质数一定是奇数 ,而 6、8、12 这三个数又都是偶数。根据奇偶性我们知道 ,原来的质数一定是一个奇数 ,这样我们就可以从较小的质数去试算 ,来求得解。

设这个质数为 3 时 $3 + 6 = 9$,而 9 是合数 ,所以舍去。

设这个质数为 5 $5 + 6 = 11$,11 是质数 $5 + 8 = 13$,13 是质数 $5 + 12 = 17$,17 也是质数。所以 5 就是要求的最小质数。

答：满足此条件的最小质数是 5。

例 5 已知 a 、 b 、 c 、 d 都是不同的质数，且满足 $a + b + c = d$ ，那么 $a \times b \times c \times d$ 的最小值是多少？

分析与解：要想 $a \times b \times c \times d$ 的值最小，只能将 a 、 b 、 c 、 d 的值尽可能取小，而题中又要求 a 、 b 、 c 、 d 都是质数，且 $a + b + c = d$ 。我们又知道最小的质数是 2，2 是唯一的偶数质数，而奇数 + 奇数 = 偶数，因此 a 、 b 、 c 、 d 中不可能有 2，现在我们就可以用 2 以外的较小质数来进行试算。

$3 + 5 + 7 = 15$ ，而 15 不是质数。

$3 + 5 + 11 = 19$ 符合条件。

$$3 \times 5 \times 11 \times 19 = 3135$$

答：四个质数相乘的积最小是 3135。

例 6 a 、 b 、 c 都是质数，且满足 $a \times b + c = 1993$ ， c 是一位数，那么 $a + b + c$ 的和是多少？

分析与解：因为 a 、 b 、 c 都是质数， c 又是一位数，所以 c 只能是 2、3、5、7 这四个质数中的一个。

又因为 $a \times b + c = 1993$

所以从 c 入手，用试算的办法来求出质数 a 和 b 。

当 $c = 2$ 时 $a \times b + 2 = 1993$ $a \times b = 1991 = 11 \times 181$

当 $c = 3$ 时 $a \times b + 3 = 1993$ $a \times b = 1990 = 2 \times 5 \times 199$

当 $c = 5$ 时 $a \times b + 5 = 1993$ $a \times b = 1988 = 2^2 \times 7 \times 71$

当 $c = 7$ 时 $a \times b + 7 = 1993$ $a \times b = 1986 = 2 \times 3 \times 331$

由此可以看出当 c 为 3、5、7 时， a 、 b 都不满足条件。所以只有当 $c = 2$ 时， a 、 b 才为质数，分别是 11 和 181。

$$a + b + c = 2 + 11 + 181 = 194$$

例 7 有一个长方体，它的正面和上面的面积之和为 209，如果它的长、宽、高都是质数，那么，这个长方体的体积是多少？

分析与解：因为 209 是奇数，而 209 是正面与上面的两个面的面积和，说明上面与正面这两个面的面积一个是奇数，另一个是偶数，即说明这个长方体的高或宽必定有一个为 2。

设这个长方体的长、宽、高分别为 a 、 b 、 c 如图。

因为 a 、 b 、 c 都为质数，

又因为 $a \times b + a \times c = 209$

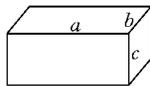
即 $a \times (b + c) = 209 = 11 \times 19$

$$a = 11 \quad b + c = 19 = 2 + 17$$

即 $a = 11 \quad b = 17 \quad c = 2$ 或 $a = 11 \quad b = 2 \quad c = 17$

长方体的体积为： $2 \times 11 \times 17 = 374$

答：这个长方体的体积是 374。



说明：本题是 1991 年小学奥林匹克数学决赛试题，试题本身没有说明单位，只说面积之和是 209，所以在解答时，也只能解到体积是 374。

例 8 把 37 拆成若干个不同质数的和，有多少种不同的拆法？将每一种拆法中拆出的那些质数相乘，得到的乘积中哪个最小？

分析与解：解本题主要靠列举，列举成功的关键在既不重复又不遗漏，而要做到这点，选择一个标准，按一定的顺序去找这很重要，本解取小于 37 的质数按从大到小排列。

小于 37 的质数有 31、29、23、19、17、13、11、7、5、3、2 共 11 个。

(1) 由 $37 = 31 + 6$ ，而 6 不能用 5、3、2 这三数中某些数的和得出；

(2) 由 $37 = 29 + 8$ ，而 $8 = 5 + 3$ ，故得 $37 = 29 + 5 + 3$ ；

(3) 由 $37 = 23 + 14$ ，而 $14 = 11 + 3 = 7 + 5 + 2$ ，故得 $37 = 23 + 11 + 3$ ， $37 = 23 + 7 + 5 + 2$ ；

(4) 由 $37 = 19 + 18$ ，而 $18 = 13 + 5 = 13 + 3 + 2 = 11 + 7 = 11 + 5 + 2$ ，故得 $37 = 19 + 13 + 5$ ， $37 = 19 + 13 + 3 + 2$ ， $37 = 19 + 11 + 7$ ， $37 = 19 + 11 + 5 + 2$ ；

(5) 由 $37 = 17 + 20$ ，而 $20 = 13 + 7 = 13 + 5 + 2 = 11 + 7 + 2$ ，故得 $37 = 17 + 13 + 7$ ， $37 = 17 + 13 + 5 + 2$ ， $37 = 17 + 11 + 7 + 2$ 。

这样共得到 10 种拆法。

在这 10 种拆法中，以 $29 \times 5 \times 3$ 最小。

答：共有 10 种拆法，在这 10 种拆法中，以 $29 \times 5 \times 3$ 最小。

名师指津



质数与合数是数论的一个重要内容。学习这一讲要注意：

1. 利用质数的特点和性质进行分析。
2. 判断质数、合数时，当找到符合条件的完全平方数后，用质数试除时，可根据质数和被除数的特点，灵活地判断两数是否存在整除关系。

名题求解



请你试一试

1. 判断 437、541 是质数还是合数。
2. 已知 A 是一个质数，而且 $A+4$ 、 $A+10$ 、 $A+12$ 所得的和均为质数，求符合条件的最小质数 A 是多少？
3. a 是最小的质数， b 是最小的合数，则 $a+b+a \times b$ 等于多少？
4. 有三张卡片，它们的上面各写有 1、2、3 这三个数字，从中抽出一张、二张、三张，按任意次序排列出来，可以得到不同的一位数、两位数、三位数，请你将其中的质数写出来。
5. 写出符合下列条件的所有质数：
 - (1) 它是一个两位数；
 - (2) 个位数字与十位数字都是质数。
6. 如果 a 是自然数， $(a \times a - 4) \div 7$ 是质数，那么 a 的最小两个数值是几？
7. 有两个质数，它们之和既是一个小于 100 的奇数，又是 17 的倍数，这两个质数分别是多少？
8. 23 乘以一个数，
 - a. 要使积仍是质数，应该乘多少？
 - b. 要使积是合数，乘数应该是多少？
 - c. 要使乘积是奇数，乘数应该是多少？

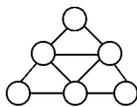
d. 要使乘积是偶数,乘数应该是多少?

动动小脑筋

1. 有 5 个质数,把它们按照从小到大的顺序排列在一起,便成为一个公差为 6 的等差数列。你能求出这个有限数列的和吗?
2. 用 2、3、4、5 这 4 个数中的三个数,组成一个三位数的质数,这个质数是多少?
3. 写出两个合数,使它们的和是质数,并且使这个质数尽可能地小,这两个合数分别是多少?
4. 在不大于 13 的自然数中,任取一个质数和一个非质数相乘,所有这些乘积的总和是多少?
5. 两个质数的和是 39,这两个质数的积是多少?
6. 在三张纸片上分别写上三个最小的奇质数,如果随意从其中至少取出一张组成一个数,其中有几个是质数,将它们写出来。
7. “不可能有五个质数,当它们按从小到大的顺序排列时,相邻数之间差相同”这句话对吗?说明理由。

做做小诸葛

1. 已知两个质数的和为 1999,求这两个质数的积是多少?
2. 如图,四个小三角形的顶点处有 6 个圆圈,如果在这些圆圈中分别填上六个质数(它们的和是 20),使得每个小三角形上三个顶点的三个数的和都相等,求这六个质数的积是多少?
3. 九个连续的自然数,它们都大于 100,那么其中质数最多有几个?
4. 有一个三位数,它的个位数与百位数之和是 10,且个位既是偶数,又是质数,又知道这个三位数能被 21 整除,求这个三位数。
5. 两个连续自然数的积加上 11,其和是一个合数,这两个自然数的和最小是多少?
6. 把 33 拆成若干个不同质数之和,如果要使这些质数的积最大,问这



第 2 题图

几个质数分别是多少？

7. 已知 $p \cdot q - 1 = x$,其中 p, q 为质数且均小于 1000 , x 是奇数 ,那么 x 的最大值是多少？
8. 五月份 ,班主任陈老师共进行五次家访 ,这五天的日期只有一天是合数 ,其他四天全是质数。这四个质数的顺次是 :这个合数减去 2 ,这个合数加上 2 ,这个合数的 2 倍减去 1 ,这个合数的 2 倍加上 1。陈老师还记得她第一次去家访与最后一次去家访相差半个多月。问陈老师家访的日期分别是 5 月多少号？

第十讲

分解质因数



名师导航



1. 自然数按约数的个数可以分为质数、合数和1。
2. 每个合数都可以写成几个质数相乘的形式,其中每个质数是这个合数的因数,我们就把这几个质数叫做这个合数的质因数。
3. 把一个合数用质数相乘的形式表示出来,叫做分解质因数。
4. 分解质因数的方法:把一个合数写成两个因数相乘的形式,如果两个因数都是质数,就不用再分解了;如果两个因数中还有合数,那么就要继续分解,一直分解到全部因数都是质数为止。
5. 求约数个数的计算方法:把任一自然数分解质因数,它的质因数分解式中每一个质因数的个数(指数)加上1的连乘积就是这个自然数的约数的个数。
6. 求一个自然数的全部约数和的方法:先将这个自然数分解质因数,将仅含有一种质因数的全部约数相加,再将这些和相乘,则积就是这个自然数的全部约数之和。

名题解析



例1 在下面算式的方框内,各填入一个数字,使得 $\square\square\square \times \square = 1995$ 成立。

分析与解:根据题意,要使一个三位数与一个一位数的积等于1995,那么这两个数的积应与1995有相同的质因数。先将1995分解质因数, $1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$,用1995的质因数3、5、7分别作一位数,可以写出三个满足条件的算式。即:

$$665 \times 3 = 1995; 399 \times 5 = 1995; 285 \times 7 = 1995.$$

例2 边长为自然数,面积为165的形状不同的长方形共有多少种?

分析与解:因为面积为165,也就是长方形的长与宽的积是165。而 $165=3 \times 5 \times 11$,把165分成两个因数的积,可以是 1×165 , 3×55 , 5×33 , 11×15 。那么面积是165的形状不同的长方形共有四种。

例3 用216元去买一种拖鞋,正好将钱用完。如果每双拖鞋便宜1元,则可多买3双,钱也正好用完。问一共买了多少双拖鞋?

分析与解:根据“鞋子的单价 \times 双数=总价(216)”,可先将216分解质因数,再转化成两个数相乘的形式。因为 $216=2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$,写成两个数相乘的形式可有: $(3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 3) = 9 \times 24$; $(2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3) = 8 \times 27$ 。即如果拖鞋每双9元,可以买24双;如果每双8元,可以买27双。正好多买 $27 - 24 = 3$ 双,符合题意。

答:一共买了24双拖鞋。

例4 将下列8个数平均分成两组,使这两组数的乘积相等。

12 18 33 35 36 65 77 104

分析与解:把8个数平均分成两组,每组4个数,要使两组数的乘积相等,那么这两组数的乘积中所含有的质因数的大小及个数必须完全相同。因此,我们先将这8个数分别分解质因数:

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \times 2 \times 3, & 18 &= 2 \times 3 \times 3, \\ 33 &= 3 \times 11, & 35 &= 5 \times 7, \\ 36 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3, & 65 &= 5 \times 13, \\ 77 &= 7 \times 11, & 104 &= 2 \times 2 \times 13 \times 2. \end{aligned}$$

由此可知,8个数中含有质因数2共8个,质因数3共6个,质因数5、7、11、13各2个。然后将相同的质因数平均分成两组,即可求出答案。

因为 $12 \times 36 \times 65 \times 77 = 18 \times 33 \times 35 \times 104$,所以这两组数分别是12、36、65、77和18、33、35、104。

例5 在乘积 $1000 \times 999 \times 998 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ 中,末尾有多少个零?

分析与解:因为 $2 \times 5 = 10$,产生一个末尾的零。末位的零也只能

由以上乘式中的一个质因数 2 与一个质因数 5 相乘得到,所以,只需考虑把以上乘式分解成质因数的连乘积以后,有多少个质因数 2,有多少个质因数 5,其中哪一个的个数少,以上乘式的末尾就有那么多个零。

由于 1、2、3、4、...、999、1000 中有 200 个数是 5 的倍数,它们是 5、10、15、20、25、...、995、1000。在这 200 个数中,有 40 个能被 $25 = 5^2$ 整除,它们是 25、50、75、100、125、...、1000。在这 40 个数中,又有 8 个能被 $125 = 5^3$ 整除,它们是 125、250、375、500、625、750、875、1000。在这 8 个数中,有 $625 = 5^4$,它含有 4 个质因数 5。所以以上乘式中的质因数 5 的个数等于 $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ (个)。而以上乘式中质因数 2 的个数,远远大于 249(因为能被 2 整除的数就有 500 个)。所以,乘积 $1000 \times 999 \times 998 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ 的末尾有 249 个零。

例 6 720 的约数有多少个?

分析与解:我们可以先将 720 的约数一一写出,再数一数它的约数个数,但这种方法显然非常麻烦,而且在写约数的过程中容易发生重复或遗漏现象。我们可以这样分析,先把 720 分解质因数, $720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$,这个式子可以写成 $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$,其中 2^4 表示 4 个 2 连续相乘,这里的 4 叫指数, 3^2 表示 2 个 3 相乘,这里的指数是 2; 5 表示 1 个 5,可以写成 5^1 ,这里的指数是 1。

从 2^4 来分析,它有 1、2、 2^2 、 2^3 、 2^4 五种约数的情况;从 3^2 来分析,它有 1、3、 3^2 三种约数的情况;从 5 来分析,它有 1、5 两种约数的情况。根据乘法原理,720 共有 $5 \times 3 \times 2 = 30$ (个)约数,即 720 的约数个数 = $(4 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 30$ (个)。

所以 720 的约数有 30 个。

例 7 144 的全部约数之和是多少?

分析与解:因为 $144 = 2^4 \times 3^2$,由 2^4 可知 144 的约数有 1、2、4、8、16,由 3^2 可知 144 的约数有 1、3、9。

而 144 的全部约数是由(1、2、4、8、16)中每一个数与(1、3、9)中每一个数相乘的结果。所以 144 的全部约数的和是 $(1 + 2 + 4 + 8 + 16) \times 1 + (1 + 2 + 4 + 8 + 16) \times 3 + (1 + 2 + 4 + 8 + 16) \times 9 = (1 + 2 + 4 + 8 + 16) \times (1 + 3 + 9) = 31 \times 13 = 403$ 。

即 144 的全部约数之和是 403。

名师指津



1. 巧用分解质因数的方法,能使一些难题趣题获得简便解法。
2. 在所有的质因数中,只有 2 和 5 相乘的积的末尾有零,且只有一个零,因此一个数中含有几个 2 与 5 的积,其末尾就有几个零。
3. 求一个自然数的约数个数用列举法比较麻烦,可借助于分解质因数的方法求解。任何一个自然数 N 的所有约数的个数的计算方法是:先将 N 分解质因数,即 $N = p^a \times q^b \times \dots$,那么 N 的约数个数为 $(a+1) \times (b+1) \times \dots$ 。比如 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$,它的约数个数为 $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$ 。
4. 任何一个自然数 N 的全部约数之和可以这样计算:先将 N 分解质因数,即 $N = p^a \times q^b \times \dots$,那么 N 的全部约数之和为: $(1 + p^1 + p^2 + \dots + p^{a-1} + p^a) \times (1 + q^1 + q^2 + \dots + q^{b-1} + q^b) \times \dots$,比如, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$,它的全部约数之和就是 $(1 + 2 + 4) \times (1 + 3) \times (1 + 5) = 168$ 。

名题求解



请你试一试

1. 下面各题,把正确答案的序号填在括号里。
 - (1) 下列哪些算式是正确的?()
 - ① $2^3 = 6$
 - ② $3^3 = 9$
 - ③ $7^4 = 7 + 7 + 7 + 7$
 - ④ $3^2 \times 5 = 45$
 - (2) 下面哪一组数全部都是质数?()
 - ① 1、29、57
 - ② 13、87、91
 - ③ 47、53、97
 - ④ 67、73、87
 - (3) 下列哪一个数的质因数个数最多?()

- ① 24 ② 144 ③ 105 ④ 243

(4) 将 540 分解质因数后得到 $540 = 2^m \times 3^n \times 5^p$, 则 $m + n + p = (\quad)$ 。

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8

(5) 2730 的质因数不包括下列哪一个数? ()

- ① 3 ② 5 ③ 13 ④ 91

2. 判断。(对的在括号里打“√”,错的打“×”)

- (1) 把 30 分解质因数可以写成 $30 = 5 \times 6$ 。 ()
 (2) 2、3、5、7 都是 210 的质因数。 ()
 (3) 一个数的约数一定是这个数的质因数。 ()
 (4) 两个数的全部质因数相同,这两个数一定相同。 ()
 (5) 一个数含有质因数 2,这个数一定不是奇数。 ()

3. 将下列各数分解质因数。

- (1) $988 = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $2295 = \underline{\hspace{2cm}}$;
 (3) $1024 = \underline{\hspace{2cm}}$; (4) $1155 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 把下面各数分解质因数,并分别写出它们所有的约数。

	分解质因数	约 数
21		
78		
500		

5. 下面分解质因数的算法对吗?如果有错误请改正。

$$\begin{array}{r} (1) 2 \overline{) 54} \\ \underline{3 \overline{) 27}} \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) 3 \overline{) 84} \\ \underline{4 \overline{) 28}} \\ \underline{2 \overline{) 4}} \\ \underline{2 \overline{) 2}} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3) 2 \overline{) 30} \\ \underline{3 \overline{) 15}} \\ 5 \end{array}$$

$$54 = 2 \times 3 \times 9$$

$$84 = 3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1$$

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

6. 填空。

(1) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times \dots \times 23 \times 24 \times 25$ 的积的末尾有 () 个 0。

(2) 我们知道,一个正整数的质因数是这样的质数,它大于1并且能整除该数,那么2002的所有质因数之和是()。

(3) 三个自然数的乘积是120,在这三个自然数中,两个较小数的和等于另一个自然数。这三个自然数分别是()、()、()。

7. 杨昕翻开数学课本,看了看这相邻两页的页码数,发现它们的积是210。你知道这两个页码数各是多少吗?
8. 学校进行大型团体操表演,有180名学生参加,现在要变成每行人数在10至20之间,共有几种分法?
9. 有91盆鲜花,要分成几堆,且使每堆的盆数都相等,应怎样分?
10. 把下面八个数每4个分成一组,使这两组数的乘积相等。

14 33 35 30 75 39 143 169

动动小脑筋

1. 求540的约数有多少个?540所有约数的和是多少?
2. 五个儿童的年龄和为37,积为18480。如果每一个儿童的年龄不超过13岁。问这五个儿童的年龄各是多少?
3. 原价为5元一本的书,降价几角钱出售,共得款235元。那么售出书多少本?
4. 自然数 $A=2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$, A 有许多约数是两位数,这些两位约数中,最大的是多少?
5. 岸边有294名学生,要乘船到河对岸。来了一批小船,每船载人人数量相等,三次往返,把学生全部运到对岸。问有多少只船,每船每次载多少人?
6. 有图书15370本,平均分配给市区的各小学,学校数是一个质数,分到最后还余下19本。问市区共有多少所小学?
7. $975 \times 935 \times 932 \times (\quad)$ 要使这个乘积的最后四位数字都是0,括号内最小应填什么数?
8. 有人说:“任何7个连续整数中一定有质数。”请你举一个例子说明这句话是错的。(第一届“华罗庚杯”决赛二试题)

- 如果两个数之和是 64 ,两数的积可以整除 4875 ,那么这两个数之差是几 ?
- 爷爷今年 84 岁了 ,有人问他 :“ 你的孙子都已经长大成人了吧 ?” 爷爷摸了摸白胡须 ,笑着说 :“ 多数已成人 ,只有三个小孙子 ,他们年龄的乘积等于我的年龄 ,其中两人年龄之和等于另一个人的年龄。” 请你算算他三个小孙子的年龄。



做做小诸葛

- 筐中有 60 个苹果 ,将它们全部取出来 ,分成偶数堆 ,使得每堆中苹果的个数相同 ,问有多少种方法 ? (第四届华杯赛初赛试题)
- 一个小朋友用 1.8 元买了一种小图片 ,如果每张图片的价格减少 1 分钱 ,那么他就可以多买 2 张 ,问他原来买了几张小图片 ?
- 李师傅每天生产零件数是一个三位数 ,这个三位数由 3 个质数组成 ,而这个三位数又能被它每一位上的数整除。李师傅每天生产多少个零件 ?
- 三个素数的和是 62 ,这三个素数的积是多少 ?
- 一个自然数可以分解为三个质因数的积 ,如果三个质因数的平方和是 7950 ,这个自然数是多少 ?
- 班主任杨老师带领五(1)班同学去种树 ,全班同学恰好可以平均分成 3 组。如果老师与学生每人种树的棵数一样多 ,则共种了 364 棵树。五(1)班有学生多少人 ? 每人种树多少棵 ? (每班人数在 50 人左右)
- 已知数 2581 与 1852 称为一对反序数。现有一对反序数的乘积等于 30492 ,求出这两个数。
- 有一种最简真分数 ,它们的分子与分母的乘积都是 420。如果把这样的分数从大到小排列 ,那么第四个分数是多少 ?
- 筐里有 300 个桃子 ,如果不是一次全部拿出 ,也不是一个一个地拿 ,要求每次拿的个数同样多 ,拿到最后正好不多不少 ,问共有多少种不同的拿法 ?
- 在射箭运动中 ,每射一箭的环数是 0(脱靶)或者是不超过 10 的自然数 ,甲、乙两名运动员各射了 5 箭 ,每人 5 箭的环数之积是 1764 ,但甲的

总环数比乙的总环数多 4 环。求甲、乙两人的总环数各是多少？



名师导航



1. 几个数公有的约数,叫做这几个数的公约数;其中最大的一个,叫做这几个数的最大公约数。
2. 几个数公有的倍数,叫做这几个数的公倍数;其中最小的一个,叫做这几个数的最小公倍数。
3. 自然数 a, b 的最大公约数可以记作 (a, b) , 最小公倍数记作 $[a, b]$ 。
4. 如果 a 与 b 互质, 那么 $(a, b) = 1$; $[a, b] = a \times b$ 。
5. 如果 a 是 b 的整数倍, 那么 $(a, b) = b$; $[a, b] = a$ 。
6. 两个数的最大公约数与最小公倍数的积等于这两个数的乘积, 即 $(a, b) \times [a, b] = a \times b$ 。
7. 如果 $a > b$, 那么 $(a - b)$ 与 b 的最大公约数就等于 a 与 b 的最大公约数。
8. $(a + b)$ 与 b 的最大公约数就等于 a 与 b 的最大公约数。

名题解析



例1 师大附小买来 435 枝圆珠笔和 262 本笔记本, 平均奖励给全校各班评选出来的“校园明星”。最后圆珠笔还余 15 枝, 练习本还余 10 本。师大附小评选出的“校园明星”最多有多少名? 每位“校园明星”得到的圆珠笔和笔记本各多少?

分析与解: 根据题意可知, 用于奖励的圆珠笔有 $435 - 15 = 420$ 枝, 笔记本有 $262 - 10 = 252$ 本。由于是平均奖励给全校的“校园明星”, 显然“校园明星”人数应该是 420 和 252 的公约数, 又因为求“校

“园明星”最多有多少名,就应该求 420 和 252 的最大公约数。

$$435 - 15 = 420(\text{枝}) \quad 262 - 10 = 252(\text{本})$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 420 \quad 252} \\ 2 \overline{) 210 \quad 126} \\ 3 \overline{) 105 \quad 63} \\ 7 \overline{) 35 \quad 21} \\ \quad 5 \quad 3 \end{array}$$

$$(420, 252) = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

$$420 \div 84 = 5(\text{枝}) \quad 252 \div 84 = 3(\text{本})$$

答：“校园明星”最多 84 名,每位“校园明星”得到圆珠笔 5 枝,笔记本 3 本。

例 2 某工厂加工一种零件有 3 道工序,采用流水生产的方式。第 1 道工序每个工人每小时完成 48 个,第 2 道工序每个工人每小时可完成 32 个,第 3 道工序每个工人每小时可完成 28 个。在每道工序至少安排多少工人,才能搭配合适,使每道工序不产生积压或停工待料。

分析与解:要使每道工序的产品不能有积压现象或停工待料现象,必须使每道工序在相同时间内生产出同样多的零件数。要使在相同时间内生产出同样多的零件数,每道工序人数的分配应根据相同时间内能生产相同的零件数来分配,这相同的零件数就是 48、32 和 28 的最小公倍数。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48 \quad 32 \quad 28} \\ 2 \overline{) 24 \quad 16 \quad 14} \\ 2 \overline{) 12 \quad 8 \quad 7} \\ 2 \overline{) 6 \quad 4 \quad 7} \\ \quad 3 \quad 2 \quad 7 \end{array}$$

$$[48, 32, 28] = 2^4 \times 3 \times 2 \times 7 = 672$$

$$\text{第一道工序: } 672 \div 48 = 14(\text{人})$$

$$\text{第二道工序: } 672 \div 32 = 21(\text{人})$$

$$\text{第三道工序: } 672 \div 28 = 24(\text{人})$$

答:第一、二、三道工序应分别安排 14、21、24 人。

例 3 学校体育器材室有两堆同样大小但数量不等的垒球,一共

有 120 个。把每堆垒球分别放在几个盒子里,每个盒子最多放 24 个,都正好放完,没有剩余。你知道这两堆垒球各有多少个吗?

分析与解:根据题意可知,两堆垒球个数的和为 120,它们的最大公约数是 24,可以根据求最大公约数的方法,用代数法求解。

设两堆垒球分别有 A 个和 B 个。

$$24 \begin{array}{l} | \quad A \quad B \\ \hline a \quad b \end{array}$$

即 $A+B=120$, $A=24a$, $B=24b$

$24a+24b=120$, 即 $24(a+b)=120$

得 $a+b=120 \div 24=5$,

$5=1+4=2+3$, 如 $a=1$, $b=4$, 得

$$A=24 \times 1=24(\text{个}) \quad B=24 \times 4=96(\text{个})$$

如 $a=2$, $b=3$, 得

$$A=24 \times 2=48(\text{个}) \quad B=24 \times 3=72(\text{个})$$

答:两堆垒球有 24 个和 96 个或 48 个和 72 个。

例 4 已知两个数的最大公约数是 20,最小公倍数是 560,符合条件的两个数中差最小的两个数各是多少?

分析与解:设这两个数分别为 A、B。

$$20 \begin{array}{l} | \quad A \quad B \\ \hline a \quad b \end{array} \quad (a, b \text{ 互质})$$

即 $20 \times a \times b=560$

$$a \times b=560 \div 20=28$$

因为 a、b 互质,所以 $28=1 \times 28=4 \times 7$, 当 $a=4$, $b=7$ 时差最小。

$$20 \times 4=80 \quad 20 \times 7=140$$

答:符合条件的两个数中差最小的两个数分别是 80 和 140。

例 5 求被 4 除余 1,被 5 除余 2,被 6 除余 3 的最小自然数。

分析与解:因为余数都比除数少 3,所以这个数加上 3 能被 4、5、6 整除。要求此数最小是几,即先求 4、5、6 的最小公倍数再减去 3 即可。

$$[4 \ 5 \ 6]=60, \quad 60-3=57$$

答:符合条件的最小自然数是 57。

例6 三个连续自然数的最小公倍数是9828,这三个自然数的和等于多少?

分析与解:因为是三个连续的自然数,且最大数与最小数相差2。所以这三个数只可能有以下两种情况:

(1) 奇数、偶数、奇数,最小公倍数就是它们的乘积。

(2) 偶数、奇数、偶数,最小公倍数就是它们乘积的一半。

先把它们的最小公倍数9828分解质因数,再进行分析。

$$9828 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 13 = 13 \times 3^3 \times (2^2 \times 7) = 13 \times 27 \times 28$$

可以看出,只要把13乘以2,就可以得到三个连续的自然数,所以这三个数分别是偶数、奇数、偶数,最小公倍数应是它们乘积的一半。三个连续自然数是26、27、28,和是 $26 + 27 + 28 = 81$ 。

答:这三个自然数的和等于81。

名师指津



1. 在解题审题过程中应区分是求公约数还是最大公约数,是公倍数还是最小公倍数。

2. 在解最大公约数和最小公倍数的问题中,常用到短除法,并结合分解质因数法。

3. 结合短除法,用代数法的思想方法解答最大公约数和最小公倍数问题比较直观。

4. 有关最大公约数与最小公倍数的应用题,其叙述方式多种多样,在解题时一定要认真审题,不能简单地在题中看到“最多”就认为是求最大公约数,看到“最少”就认为是求最小公倍数。

5. 为了更好地解决有关最大公约数、最小公倍数的问题,同学们必须扎实掌握有关整除的知识。

6. 解答问题一般都有多种解法,同学们一定要选择快捷简便而又适合自己思路的方法。

7. 在解题中常用到的一种规律:对于任何自然数 a 、 b 均有 $a = (a, b) \times p$, $b = (a, b) \times q$ (其中 p 、 q 为自然数,且 p 、 q 互质), p 和 q 就

分别是 a、b 各自“独有的因数”。

名题求解



请你试一试

1. 两个自然数的最小公倍数是 A, 最大公约数是 B。已知 $A=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$, $B=2 \times 3 \times 3 \times 5$ 。那么这两个自然数分别是多少?
2. 用一个数去除 30、60、75, 都能整除, 这个数最大是多少?
3. 一个数用 3、4、5 除都能整除, 这个数最小是多少?
4. 有三根铁丝, 长度分别是 120 厘米、180 厘米和 300 厘米。现在要把它们截成相等的小段, 每根都不能有剩余, 每小段最长多少厘米? 一共可以截成多少段?
5. 已知两个自然数的和为 165, 它们的最大公约数为 15, 求这两个数。
6. 两个数的最大公约数是 12, 最小公倍数为 420, 求这两个数。
7. 一位老奶奶说:“我篮子里的鸡蛋 4 个 4 个的数正好多 1 个, 5 个 5 个的数正好多 1 个, 6 个 6 个的数还是多 1 个。”你说老奶奶篮子里有多少个鸡蛋?(篮子里鸡蛋不超过 100 个)
8. 在“手拉手献爱心”活动中, 五年级同学共捐了练习本 320 本, 铅笔 240 枝, 笔盒 160 个, 现在要分成数量相同的若干份装入纸袋, 送给“手拉手”学校的同学们, 袋数要求最多, 可装多少袋? 每袋中三种学习用品各装多少?
9. 有一批图书, 总数在 1000 本以内, 若按 24 本书包一捆, 最后差 2 本, 若按 28 本书包一捆, 最后一捆还是差 2 本, 若按 32 本书包一捆, 最后也是差 2 本。这批图书有多少本?
10. 有一堆弹形巧克力糖, 两粒一数多 1 粒, 三粒一数多二粒, 五粒一数多四粒, 七粒一数多六粒。这堆糖至少有多少粒?

动动小脑筋

1. 五(1)班同学上体育课, 排成 3 行少 1 人, 排成 4 行多 3 人, 排成 5

- 行少 1 人 排成 6 行多 5 人。问上体育课的同学最少多少名？
2. 从运动场一端到另一端全长 96 米,从一端起到另一端每隔 4 米插一面小红旗。现在要改成每隔 6 米插一面小红旗,问可以不必拔出来的小红旗有多少面？
 3. 杨知宸家有一种电子钟,每到整点响一次铃,每走 9 分钟亮一次灯。中午 12 点整,它既响铃又亮灯。问下一次既响铃又亮灯时是几点钟？
 4. 把 1 米 3 分米 5 厘米长、1 米 5 厘米宽的纸裁成同样大的正方形,而没有剩下纸,这正方形最大的边长是多少？共可裁成几块？
 5. 两个数的和是 70,它们的最大公约数是 7,这两个数的差是多少？
 6. 兄弟三人在外工作,大哥 6 天回家一次,二哥 8 天回家一次,小弟 12 天回家一次。兄弟三人同时在十月一日回家,下次三人再见面是哪一天？
 7. 一个两位数,它被 9 除余 7,被 8 除余 6,被 4 除余 2,求这个两位数。
 8. 一块长方形地长 90 米,宽 48 米,要在它的四周种树(四角都种),相邻的两棵树中间的距离相等,最少要种几棵树？相邻两棵树中间的距离是多少？



做做小诸葛

1. 如图所示,街道 ABC 在 B 处拐弯,在街道一侧等距离装路灯,要求 A、B、C 处各装一盏路灯。这条街道最少装多少盏路灯？

520米

C

A

B

715米

第 1 题图
2. 一次会餐共有三种饮料,餐后统计,三种饮料共用了 65 瓶,平均每 2 个人饮用一瓶 A 饮料,每 3 人饮用一瓶 B 饮料,每 4 人饮用一瓶 C 饮料。问参加会餐的有多少人？
3. 有三根钢管,其中第 1 根的长度是第 2 根的 1.2 倍,是第 3 根的一半,第 3 根比第 2 根长 280 厘米。现在把这 3 根钢管截成尽可能长而又相等的小段,问:共可以截成多少段？
4. 甲、乙两数的最大公约数与最小公倍数之积是 1824,甲数是 24,甲、乙两数的最大公约数与最小公倍数各是多少？

5. 已知 3 个自然数的和是 404 ,那么这 3 个自然数的最大公约数最大是几 ?
6. 甲、乙两数都含有质因数 3 和 5 ,它们的最大公约数是 45。已知甲有 12 个约数 ,乙有 10 个约数 ,那么在 800 ~ 1000 之间 ,甲、乙两数的和是多少 ?
7. 有一个自然数分别除 360、314、245 得到的余数相等 ,问这个自然数是几 ?
8. 大雪后的一天 ,小华和爸爸同时步测一个圆形花坛的周长。他俩的起点和步行的方向完全相同 ,小华每步长 54 厘米 ,爸爸每步长 72 厘米。由于两人脚印有重合的 ,所以各走完一圈后 ,雪地上留下 60 个脚印。求圆形花坛的周长。

第十二讲

余数问题



名师导航



两个整数相除(除数不等于零)常常会出现余数,如 $18 \div 4 = 4 \dots 2$ 。被除数和除数之间的关系为:被除数 = 商 \times 除数 + 余数。一般地若整数 a 除以自然数 b ,那么一定有两个整数 q 和 r

$$a \div b = q \dots r$$

a, b, q, r 之间的关系:

1. 余数一定小于除数即($r < b$)。
2. 被除数减去余数一定能被除数整除。

$$a \div b = q \dots r \quad (a - r) \div b = q$$

3. 两个整数 a, b 被自然数 m (不为 0) 除余数相同,则 a 与 b 的差一定能被 m 整除。

$$a \div m = q \dots r \quad b \div m = p \dots r$$

则 $(a - b) \div m = c$ ($a > b$, q, p, c 均为整数)。

4. 同余还有如下性质:

① a, c 两数的和被 n 除的余数等于 a, c 两数分别被 n 除所得余数的和。即“和的余数等于余数的和”。

② 差的余数等于余数的差。

③ 积的余数等于余数的积。

④ 幂的余数等于余数的幂。

(乘方的结果叫做幂,如 $2 \times 2 \times 2 = 2^3$, 2^3 叫做幂。)

名题解析



例 1 两数相除,商是 19,余数是 17,又知被除数、除数、商及余数

四数之和为 513 ,求被除数是多少 ?

分析与解 :根据除法算式 : $a \div b = 19 \dots\dots 17$ 知 $a = 19b + 17$,则 $a + b + 19 + 17 = 19b + 17 + b + 19 + 17$ 。

即 $20b + 53 = 513$, $b = 23$, $a = 23 \times 19 + 17 = 454$ 。

答 :被除数是 454。

例 2 两整数相除 ,商是 24 ,余数是 15 ,且被除数比除数大 843 ,求被除数是多少 ?

分析与解 :这道带余数除法的算式告诉了我们了商和余数以及被除数与除数的差 ,我们知道被除数等于除数乘商再加上余数 ,即被除数是除数的 24 倍还多 15 ,这就转化成差倍问题了。将被除数减去 15 后 ,就是除数的(24 或 1)倍。

$(843 - 15) \div (24 - 1) = 36$ $36 \times 24 + 15 = 879$ 或 $36 + 843 = 879$

答 :被除数是 879。

例 3 一个数除以 8 ,所得到的商和余数相同 ,求这个数。

分析与解 :根据余数必须小于除数的性质 ,我们可以知道这道题的余数只可能是 1、2、3、4、5、6、7 这 7 个数。由题意可知商和余数相同 ,那么商也只能为 1、2、3、4、5、6、7 这 7 个数 ,那么被除数是 :

$$1 \times 8 + 1 = 9 \quad 2 \times 8 + 2 = 18 \quad 3 \times 8 + 3 = 27$$

$$4 \times 8 + 4 = 36 \quad 5 \times 8 + 5 = 45 \quad 6 \times 8 + 6 = 54$$

$$7 \times 8 + 7 = 63$$

答 :被除数是 9、18、27、36、45、54、63 这 7 个数。

例 4 一个三位数除以 45 ,所得的商与余数相同。求这个三位数最大是多少 ?

分析与解 :此题与例三颇为相似 ,我们从例 3 中找些规律 :

$$a \div 45 = q \dots\dots q \quad a = 45q + q = 46q$$

也就是说被除数一定能被 46 整除 ,而且这个三位数尽可能大。我们知道三位数最大是 999 ,而 $999 \div 46 = 21 \dots\dots 33$,说明 999 不是我们所求的数。现在再看看下面几个算式 :

$$23 \div 5 = 4 \dots 3 \quad (23 - 3) \div 5 = 4$$

$$34 \div 7 = 4 \dots 6 \quad (34 - 6) \div 7 = 4$$

也就是说两数相除有余数,被除数减余数得到的差一定能被除数整除,所以

$$999 \div 46 = 21 \dots 33$$

$999 - 33 = 966$, 966 一定能被 46 整除,就是说

$$966 \div 46 = 21 \dots 21$$

答:这个最大的三位数是 966。

例 5 483 除以一个两位数,得到的余数是 39,求这个两位数。

分析与解:这是一道带余数除法应用题,已给出被除数和余数求除数,因此我们从带余数的除式入手。

因为被除数 \div 除数 = 商 \dots 余数

即被除数 - 余数 = 商 \times 除数

所以 $483 - 39 = \text{商} \times \text{除数}$ $444 = 2 \times 2 \times 3 \times 37$

又因为余数一定小于除数,除数是二位数,所以除数只能是 $37 \times 2 = 74$ 。

答:这个两位数的除数是 74。

例 6 300、262、205 除以同一个整数,得到的余数相同。求这个整数是多少?

分析与解:几个不同的整数除以同一个不为 0 的整数得到的余数相同,这类问题称为同余问题。在同余问题中根据本文第三性质,即两数之差定能被除数整除可知:

$$300 - 262 = 38 = 2 \times 19$$

$$262 - 205 = 57 = 3 \times 19$$

$$300 - 205 = 95 = 5 \times 19$$

这些差的公约数 19 就是我们所求的整数。

答:这个整数是 19。

例 7 有三个吉利数字 888、158、518 同除以一个整数,得到的余数分别为 a 、 $(a + 5)$ 、 $(a + 8)$,求这个整数是多少?

分析与解：这是一道同余问题的变形题。我们可以这样想：888 除以这个整数，余数为 a ；158 除以这个整数，余数为 $a + 5$ ；若 158 减去 5，则 $(158 - 5)$ 除以这个整数，余数同为 a ，这样我们就把它转化成同余问题了。设这个整数为 b ，

$$\text{则} \quad 888 \div b = \text{商} \dots\dots a$$

$$(158 - 5) \div b = \text{商} \dots\dots a$$

$$(518 - 8) \div b = \text{商} \dots\dots a$$

$$\text{即} \quad 888 - 510 = 378 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$510 - 153 = 357 = 3 \times 7 \times 17$$

$$888 - 153 = 735 = 3 \times 5 \times 7 \times 7$$

这些差的最大公约数是 21。

答：这个整数是 21。

例 8 一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 2，求适合这些条件的最小数是多少？

分析与解：解这道题很容易，因为除以 3 余 2，除以 7 余 2，根据最小公倍数，就是 23。而 23 也恰好是除以 5 余 3 的数，所以 23 就是我们要求的数。

例 9 一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 4，求适合这些条件的最小数是多少？

分析与解：如果例 8 觉得很简单，不用动笔用心算就能做出来的话，那么这道题恐怕就不那么容易做出来了。不过，不要紧，我们找出满足除以 3 余 2，除以 5 余 3 的最小整数。

$3 + 2 = 5$ ， $5 + 3 = 8$ ，即 8 满足除以 3 余 2，除以 5 余 3 的最小整数。很显然 8 除以 7，余数不为 4。没关系我们再慢慢去找就可以了。因为 8 满足前 2 个条件，而 3 和 5 的最小公倍数是 15，就是说，在 8 的基础上每次加上 15，得出的和永远满足除以 3 余 2，除以 5 余 3 这个条件，直到得出的和也满足除以 7 余 4 时为止。

$8 + 15 + 15 + 15 = 53$ ，53 就是我们要求的最小数。

这种先找到满足 2 个条件，再逐步加这两数最小公倍数直到满足

全部条件的做法,虽然有些笨,但却很实用。

例 8 这类题,又称中国剩余定理或孙子定理。例 8 这类题,有四句诗概括出另一种解法。

三人同行七十稀 五树梅花廿一枝
七子团圆正半月 除百零五便得知

意思是用 70 乘除以 3 所得的余数,21 乘除以 5 所得的余数,15 乘除以 7 所得的余数,然后加起来,若和大于 105,就除以 105,取所得的余数,就是我们要求的数。为什么呢,我们来看 70 是这样的数,能被 5 和 7 整除,而除以 3 余数是 1。21 能被 3 和 7 整除,而除以 5 余数是 1。15 能被 3 和 5 整除,而除以 7 余数是 1。如 $70a + 21b + 15c$ 就是一个除以 3 余 a ,除以 5 余 b ,除以 7 余 c 的数,当然它不一定是满足以上条件的最小整数,所以要除以 105,取余数。现在回头再用这四句诗来求例 9 的解。

$$70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 4 = 263$$

$$263 \div 105 = 2 \dots 53$$

所以 53 就是我们要求的数。

名师指津



余数问题通常包括带余数的除法、同余原理和孙子定理这三部分内容。

在带余数除法中往往解题要用到余数比除数小和被除数 = 除数 \times 商 + 余数这两个原理。

在同余原理中,运用的是被除数减余数的差能被商或除数整除。同余数相减同样也是这个原理。

在中国剩余定理或孙子定理的运算中,我们通常用步步逼近的方法。孙子定理和同余原理有本质的不同。同余原理是两个被除数被同一个除数相除所得的余数相同,而孙子定理是一个被除数分别被几个不同的除数相除所得到的余数不同。

名题求解



请你试一试

1. $(\quad) \div (\quad) = 17 \dots 8$ 算式中,被除数最小是多少?
2. $(\quad) \div 17 = 9 \dots (\quad)$ 算式中,被除数最大是多少?
3. $18 \div (\quad) = (\quad) \dots (\quad)$ 算式中,不相同的余数有多少个? 分别是多少?
4. $(\quad) \div 7 = (\quad) \dots (\quad)$ 算式中,商和余数相同,被除数有哪些数?
5. 在被除数小于 100 的条件下,求 a、b、c、d 各是多少?

$$a \div \begin{cases} b=4 \dots 4 \\ c=5 \dots 5 \\ d=6 \dots 6 \end{cases}$$

6. 474 除以一个两位数,得到的余数是 6,求满足这个条件的所有数是多少?
7. 一个数除以 72,所得的余数是 56,求这个数除以 24 后,所得的余数是多少?
8. 某年的 3 月 1 号是星期二,这年的 6 月 1 号是星期几?若这年 2 月份只有 28 天,那么去年的最后一天是星期几?
9. 两个整数相除,商是 22,余数是 8,被除数、除数、商、余数的和是 866,这两个数分别是多少?
10. 小明在做一道除法算式时误把被除数 291 当成 219 计算,结果商少了 3 而余数恰好相同,求这题中正确的商是几?

动动小脑筋

1. 一个数除以 19 得到的余数是 3,若把这个数扩大 9 倍,再除以 19,得到的余数应该是多少?
2. 一个三位数,除以 37 后,得到的余数和商相同,这个三位数最大是

多少？最小是多少？

3. 已知 2005 年 5 月 1 号是星期日，那么 2006 年元月 1 号是星期几？2008 年 5 月 1 号是星期几？那么 2004 年元月 1 号是星期几？
4. 三个整数 492、2241、3195 分别除以同一个整数，所得的余数都是 15，求这个除数是多少？
5. 5397 除以一个质数，得到的余数为 15，求这个质数是多少？
6. 把 4 到 30 之间的每个整数除以 4，余数为 1 的数都加起来，其和除以 4，所得的余数是多少？
7. 有一个四位数，除以 99 后，所得的商和余数相同，这个四位数最小是多少？最大是多少？
8. 某个数被 4 除余 3，被 5 除少 2，被 7 除少 4，这个数最小是多少？
9. 小王叔叔加工一批机器零件，数量在 150 到 200 之间，平均装入 5 个盒子，最后多出 1 个；若改用 6 个盒子去装，最后又多出 4 个；若再改用 7 个盒子平均装，最后却多出 5 个。这批零件有多少个？



做做小诸葛

1. 账本上记着买机器用去 $\square\square$ 12 元，其中千位数字和百位数字模糊不清，但采购员还记得这个钱数减去 7 能被 7 整除，减去 8 能被 8 整除，减去 9 能被 9 整除。问买这台机器用去了多少元钱？
2. 一个四位数除以 17 的竖式计算中，每一次商后的余数都是 5，满足这样条件的所有四位数有哪些？
3. 有 6 个口袋，里面分别装有糖果 18、19、20、24、31、34 个，小明从中取走 3 个袋子，小亮从中取走 2 个袋子。说来也巧，小明取走的糖果总数恰是小亮取走的糖果总数的 2 倍。问小明取走的是哪三个口袋？
4. 一个质数去除 63、91、129，得到 3 个余数，这三个余数的和是 25，求这个质数是多少？
5. 一个数除以 5 余 3，除以 6 余 4，除以 7 余 1，求适合这些条件的最小自然数。

- 
6. 在 1 到 4000 之间的自然数中 ,能同时被 3、5、7 除都余 2 的数共有多少个 ?
 7. 一个数 ,把它加上 1 ,就能被 6 整除 ,把它加上 3 ,就能被 8 整除 ,把它加上 5 就能被 10 整除。又知这个数分别除以 6、8、10 所得的三个商的和是 235 ,求这个数是多少 ?
 8. 一个整数除以 2 余 1 ,用所得的商除以 5 余 3 ,再用这时所得的商除以 6 余 4 ,如果用这个整数除以 60 ,则余数是多少 ?

第十三讲

奇数与偶数



名师导航



1. 能被 2 整除的整数叫做偶数,不能被 2 整除的整数叫做奇数。
2. 奇数 \pm 奇数 = 偶数
偶数 \pm 偶数 = 偶数
奇数 \pm 偶数 = 奇数
3. 奇数个奇数相加的和是奇数;偶数个奇数相加的和是偶数。
4. 奇数 \times 奇数 = 奇数
偶数 \times 偶数 = 偶数
奇数 \times 偶数 = 偶数
5. 若干个奇数的积是奇数,若干个偶数的积是偶数,相邻两个自然数的积是偶数。

名题解析



例 1 41 个同学,由 5 只小船运过河去,要求每只小船上装偶数个同学,想一想,是否可能?

分析与解:如果能满足条件,即每条船上装偶数个同学,那么 5 只小船上的学生总数为 5 个偶数之和,其和必为偶数,而 41 为奇数,奇数 \neq 偶数,所以要求的运法是不可能的。

例 2 一串数排成一行,它们的规律是头两个数都是 1,从第三个数开始,每个数都是前两个数的和,如下所示:1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... 问这串数的前 2005 个数(包括第 2005 个数)中,有多少个偶数?

分析与解：观察这列数字排列的奇偶性变化，可知：奇、奇、偶、奇、奇、偶、奇、奇、偶……即每3个数中有一个偶数。 $2005 \div 3 = 668 \dots 1$ ，所以前2005个数中有668个偶数。

例3 A、B、C、D、E、F、G七盏灯各自装有一个拉线开关，开始，B、D、F亮着，一个小朋友按从A到G，再从A到G，再从A到G……的顺序依次拉开关，一共拉了2000次，这时亮着的灯是哪几盏？

分析与解：因为拉了奇数次开关的电灯的状态同原来相反，拉了偶数次开关的电灯的状态同原来相同，我们只要求出每盏灯拉了奇数次还是偶数次就可以知道这盏灯目前的状态。因为 $2000 \div 7 = 285 \dots 5$ 。前5盏灯的开关被拉了286次（偶数次），原来亮着的B、D仍然亮着；后两盏灯的开关被拉了285次（奇数次），原来暗着现在变亮的是G，原来亮着的F变暗。所以最后亮着灯的是B、D、G。

例4 已知等式 $1993 \times a + 4 \times b = 6063$ ，其中a、b都是非0的自然数。求a+b的和。

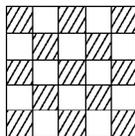
分析与解：由于6063为奇数， $4 \times b$ 肯定是偶数，可知 $1993 \times a$ 为奇数，所以判定a为奇数。因为 $1993 \times 4 = 7972 > 6063$ ，所以a只能为1或3。

当 $a = 1$ 时， $b = (6063 - 1993 \times 1) \div 4$ 不是整数。

当 $a = 3$ 时， $b = (6063 - 1993 \times 3) \div 4 = 21$ 符合题意。

∴ $a + b = 3 + 21 = 24$ 。

例5 育才小学一年级二班共有25名同学，教室座位恰好排成5行，每行5个座位。把每一个座位的前、后、左、右的座位叫做原座位的邻位。问：让这25个学生都离开原座位坐到原座位的邻位，是否可行？



分析与解：为了便于分析，我们借助黑白染色图帮助分析。

我们把每一个黑、白格看作是一个座位。从图中可知，已在黑格“座位”上的同学要换到邻位，必须坐到白格上；已在白格“座位”上的同学要换到邻座，又必须全坐到黑格“座位”上。因此，要使全部学生都换到邻位上，必须黑、白格数相等。从图上可知：黑色座位有13个，

白色座位有 12 个, $13 \neq 12$, 因此不可能使每个座位的人换为邻座。

例 6 能否找到自然数 a 和 b , 使 $a^2 = 2002 + b^2$ 。请说明。

分析与解: 因为 $a^2 = 2002 + b^2$, 所以 $a^2 - b^2 = 2002$, 即 $(a+b)(a-b) = 2 \times 1001$ 。

如果 a, b 同为偶数或同为奇数, 那么 $(a+b)(a-b)$ 必为偶数 \times 偶数;

如果 a, b 为一奇一偶, 那么 $(a+b)(a-b)$ 必为奇数 \times 奇数;

上述两种情况均与等式右边的偶数 \times 奇数相矛盾, 所以找不到自然数 a, b 使 $a^2 = 2002 + b^2$ 。

例 7 东风小学一年级两个班和二年级四个班的同学为希望工程捐款。已知二年级捐的钱数是一年级的 2 倍。现在每个班捐的钱分别装入 6 个信封里, 并且每个信封上都标明了里面的钱数: 78 元、94 元、80 元、85 元、84 元、86 元。你能根据上面的条件, 找出哪 2 个信封的钱是一年级捐的吗?

分析与解: 根据题意可知: 二年级捐的钱数必为偶数, 又二年级捐的钱是 4 个信封里的钱数和, 利用加法的奇偶性规律可以推知 4 个信封的钱数和要么全为偶数, 要么有偶数个奇数。而题中只有一个信封里的钱数是奇数, 所以标明“85 元”的信封中的钱数是一年级捐的。

一年级捐的总钱数为:

$$(78 + 94 + 80 + 85 + 84 + 86) \div (2 + 1) = 507 \div 3 = 169 (\text{元})$$

$$169 - 85 = 84 (\text{元})$$

所以一年级捐的钱分别为 84 元和 85 元。

名师指津



1. 在解奇偶数问题时常用反证法。自然数不是偶数就是奇数。利用这种非奇即偶性, 比如先假定某结论为“奇”, 证明其不成立, 则结论必为“偶”。

2. 将图染成黑白相间的颜色或标作不同的记号, 从而进行奇偶分

析,可使一些复杂的问题简单化。

3. 在解答奇偶数与质数方面的问题时,要特别注意“2 是所有质数中唯一的偶数”。

4. 掌握常用的奇偶性质,是解决奇偶问题的关键。

5. 自然数中的“非奇即偶”性在日常生活中有着广泛的应用,同学们要善于把生活中的一些相似的问题归纳成“奇偶问题”来解答。

名题求解



请你试一试

- 任意取出 2004 个连续自然数。它们的总和是奇数还是偶数？
- 25 个连续偶数的和是 2000,其中最大的偶数是多少？
- 不计算,请你判断 $1 + 2 + 3 + \dots + 1998 + 1999$ 的和是奇数还是偶数？
- 在右表中有 15 个数,选出 5 个数,使它们的和等于 30,你能做到吗?为什么?

1	3	5	7	9
1	3	5	7	9
1	3	5	7	9
- 一个自然数分别与它相邻的两个偶数相乘所得的积相差 34。这个数是多少？
- 9 个连续奇数,最大的一个是 999,这 9 个奇数的平均数是多少？
- 在如图所示的一张 5×5 的方格纸上,每个方格内填入这方格最上边与这方格最左边两个数的乘积。例如 $a = 5 \times 3 = 15$,在填入的 25 个数中,奇数有多少个?偶数有多少个?

	1	3	4	5	7
1					
2					
3				a	
4					
5					
- 若 x, y, z 是满足 $x^2 + y^2 = z^2$ 的自然数,则 x, y, z 中可能有多少个偶数?

第 7 题图



动动小脑筋

- 五只茶杯,杯口全部朝上,每次将其中两只同时翻转称为一次运动。

问 能否经过若干次运动,使茶杯口全部向下?

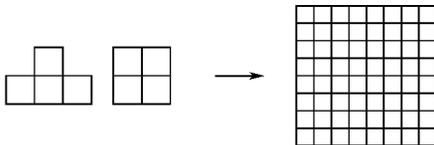
2. 有一本 500 页的书,从中任意撕下 20 张纸,这 20 张纸上的所有页码之和是否是 1999?
3. 新年快到了,同学们相互送贺年卡,每人只要接到别人赠的贺年卡就一定回赠贺年卡,那么送了奇数张贺年卡的人数是奇数还是偶数?
4. 已知 A、B、C 中有一个是 7,一个是 8,一个是 9,则 $(A-3) \times (B-4) \times (C-5)$ 的结果一定是奇数还是偶数?为什么?
5. 由三个不同的自然数 \square 、 \triangle 、 \circ 组成一个等式: $\square + \triangle + \circ = \square \times \triangle - \circ$ 。这三个数中最多有多少个奇数?
6. 在黑板上写出三个整数,然后擦去一个换成其他两数之和加 1,这样继续操作下去,最后得到 35、47、81。问:原来写的三个整数能否为 2、4、6?
7. 两个十位数 1111111111 和 9999999999 的乘积有几个数字是奇数?
8. 求证:四个连续奇数的和一定是 8 的倍数。



做做小诸葛

1. a、b、c 都是质数, c 是一位数,且 $a \times b + c = 1993$,那么 $a + b + c$ 的和是多少?
2. 有一串数 1 9 9 8, ... 从第 5 个数起,每个数字都等于它前面 4 个数字之和的个位数字,这样一直写下去,在前 99 个数(包括第 99 个数)中,有多少个偶数?
3. 某市举办小学生数学竞赛,试卷上共有 30 道试题,评分标准是:基础分 15 分,答对一题加 5 分,未答一题加 1 分,答错一题倒扣 1 分。如果有 2005 个学生参赛,问参赛同学的总分是奇数还是偶数?
4. 已知 $a \times b + 6 = Q$,其中 a、b 均为小于 1000 的质数, Q 是偶数,那么 Q 的最大值是多少?
5. 已知 $1999 \times \triangle + 4 \times \square = 9991$,其中 \triangle 和 \square 是非 0 的自然数,求 \square 。
6. 能否用 5 个“田”字形纸片和 11 个“T”字形纸片(如下页图),恰好

拼成一个 8×8 的正方形棋盘？为什么？



第 6 题图

7. 能否在下式的 \square 内填入加号或减号，使下式成立？为什么？

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 10$$

8. 黑板上写有从 1 开始的若干个连续的奇数：1, 3, 5, 7, 9, ... 擦去其中的一个奇数，剩下的所有奇数之和为 1998，那么擦去的奇数是多少？

第十四讲

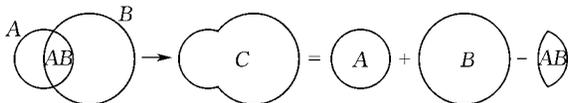
包含与排除



名师导航

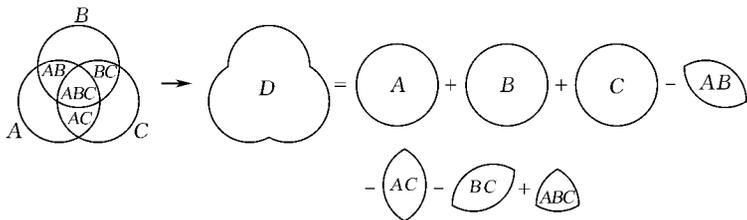


1. 原理一：如果被计数的事物有 A、B 两类，那么：A 类或 B 类元素个数(C) = A 类元素个数 + B 类元素个数 - 既是 A 类又是 B 类的元素个数。(如图)



即 $C = A + B - AB$ 或 $AB = A + B - C$ 。

2. 原理二：如果被计数的事物有 A、B、C 三类，那么：A 类、B 类或 C 类元素个数(D) = A 类元素个数 + B 类元素个数 + C 类元素个数 - 既是 A 类又是 B 类的元素个数 - 既是 A 类又是 C 类的元素个数 - 既是 B 类又是 C 类的元素个数 + 既是 A 类又是 B 类而且是 C 类的元素个数。(如图)



即 $D = A + B + C - AB - AC - BC + ABC$
 或 $ABC = D - (A + B + C - AB - AC - BC)$

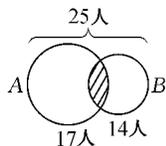
名题解析



例 1 五(1)班同学参加数学小组和作文小组的总人数是 25 人，

其中参加数学小组的有 17 人,参加作文小组的有 14 人,数学和作文两个小组都参加的有几个人?

分析与解:如图所示,用 A 表示参加数学小组的 17 人,用 B 表示参加作文小组的 14 人,A 与 B 相交的部分(阴影部分)表示两个小组都参加的人数。从图中容易看出,如果我们将 17 与 14 加起来,那么阴影部分



所包含的人数就被加了两次,结果比 25 人多出来的人数正好是两个小组都参加的人数。根据包含与排除原理一:

$$17 + 14 - 25 = 6(\text{人})$$

答:两个小组都参加的有 6 人。

例 2 在 1, 2, 3, …, 2005 这 2005 个数中,既不能被 8 整除,也不能被 12 整除的数共有多少个?

分析与解:从反面着想,先求出能被 8 或 12 整除的数有多少个,再从 2005 个数中扣除能被 8 或 12 整除的数的个数即可。

(1) 能被 8 整除的数有:

$$2005 \div 8 = 250(\text{个}) \dots\dots 5$$

(2) 能被 12 整除的数有:

$$2005 \div 12 = 167(\text{个}) \dots\dots 1$$

(3) 既能被 8 整除又能被 12 整除的数有:

$$2005 \div [8, 12] = 2005 \div 24 = 83(\text{个}) \dots\dots 13$$

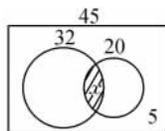
(4) 能被 8 或 12 整除的数有:

$$250 + 167 - 83 = 334(\text{个})$$

(5) 既不能被 8 整除也不能被 12 整除的数有:

$$2005 - 334 = 1671(\text{个})$$

例 3 五年级(2)班 45 名同学到森林公园春游,有 32 人划了船,20 人爬了山,有 5 名同学既没划船也没爬山,他们参观了蝴蝶标本展览。问:既划了船也爬了山的同学有多少人?



分析与解:画图分析,用大圆表示划船的 32 人,小圆表示爬山的

20人,重叠部分即是既划了船也爬了山的人数。用长方形表示全班45人。则圆外,但长方形之内,即是既没划船也没爬山的5人。根据包含与排除原理一:

设既划了船也爬了山的有 x 人,

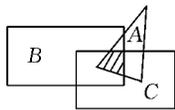
$$32 + 20 - x = 45 - 5$$

$$52 - x = 40$$

$$x = 12$$

答:既划了船也爬了山的同学有12人。

例4 如图所示,A、B、C分别表示面积为12、28、16的三张不同形状的纸片,它们放在一起盖住的面积为38,并且A与B、B与C、C与A公共部分的面积分别为8、7、6,求A、B、C三个图形公共部分(阴影部分)的面积。



分析与解:观察图形可知,此题正好符合包含与排除原理二。直接用公式计算。

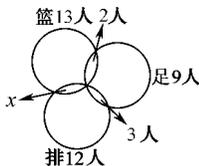
设公共部分面积是 x ,那么

$$12 + 28 + 16 - 8 - 7 - 6 + x = 38$$

$$x = 3$$

答:三个图形公共部分的面积是3。

例5 25名男同学中喜欢打篮球的有13人,喜欢打排球的有12人,喜欢踢足球的有9人,既喜欢篮球又喜欢足球的有2人,既喜欢足球又喜欢排球的有3人,但没有一个男同学同时喜欢三种球类,也没有不喜欢任何一种球的。求有多少男同学既喜欢篮球又喜欢排球?



分析与解:画图分析,分别标出各块所表示的数量。注意三种球都喜欢的没有,可用0表示。根据包含与排除原理二,直接用公式计算。

设既喜欢篮球又喜欢排球的有 x 人,

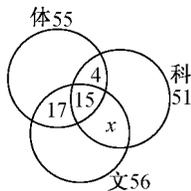
$$13 + 12 + 9 - 2 - 3 - x + 0 = 25$$

$$x = 4$$

答：既喜欢篮球又喜欢排球的有 4 人。

例 6 五年级 100 名同学，每人至少爱好体育、文艺和科学三项中的一项。其中爱好体育的有 55 人，爱好文艺的有 56 人，爱好科学的有 51 人，三项都爱好的有 15 人，只爱好体育和科学的有 4 人，只爱好体育和文艺的有 17 人。问：有多少人只爱好科学和文艺两项？只爱好文艺的有多少人？

分析与解：画图，分块标出数据，根据包含与排除原理二列方程解答。先求只爱好科学和文艺两项的，最后根据图示求出只爱好文艺的人数。



设只爱好科学和文艺两项的有 x 人，

$$55 + 51 + 56 - (4 + 15) - (17 + 15) - (x + 15) + 15 = 100$$

$$x = 11$$

只爱好文艺的： $56 - 17 - 15 - 11 = 13$ (人)

答：只爱好科学和文艺的有 11 人。只爱好文艺的有 13 人。

名师指津



1. 根据包含与排除原理，当计数部分有重复时，为了不重复地计数，应从它们的和中减去重复的部分，重复多少就减去多少，既不能多减也不能少减。

2. 同学们应熟记两个包含与排除原理公式，对照相应的示意图，指出各部分所表示的含义。

3. 包含与排除问题可使用公式直接解答，也可画示意图，设未知数 x 用代数方法解答。

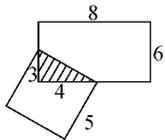
4. 在思考解答包含与排除问题的解答方法时，有时从“包含”入手比较困难，可以从其反面“不包含”去想比较容易。

名题求解



请你试一试

- 有长 8 厘米, 宽 6 厘米的长方形与边长 5 厘米的正方形(如图)放在桌面上, 阴影部分表示重叠部分。那么这两个图形盖住桌面的面积是多少平方厘米。
- 某班学生每人至少订一种报纸, 订《现代少年报》的有 27 人, 订《青少年科普报》的有 21 人, 两种报纸都订的有 8 人。全班共有多少人?
- 一个班有 48 人, 参加美术组的有 30 人, 参加信息技术小组的有 25 人, 有 5 人没有参加。两个小组都参加的有多少人?
- 38 人参加测验, 答对第一题的有 25 人, 答对第二题的有 23 人, 两题都答对的有 15 人。问有几人两题都没答对?
- 某班 45 名同学参加了体育测试, 其中百米得优者 20 人, 跳远得优者 18 人, 跳高得优者 22 人。又知百米、跳远均得优者 7 人, 跳高、百米均得优者 6 人, 跳远、跳高均得优者 8 人, 全班只有 1 名同学各项都没达到优。求三项都是优的人数。
- 桌面上有 3 张纸片, 圆形纸片面积是 26 平方厘米, 方形纸片面积是 22 平方厘米, 三角形纸片面积是 16 平方厘米, 圆形与方形纸片重叠部分是 7 平方厘米, 圆形与三角形纸片重叠部分是 6 平方厘米, 方形与三角形重叠部分是 5 平方厘米, 3 种纸片的公共部分是 2 平方厘米。3 种纸片一共盖住桌面的面积是多少?
- 刘杰和他的父母一起买东西, 中午吃饭共用 30 元, 回家后列账单如下:



第 1 题图

	衣服(元)	玩具(元)	书(元)	午饭(元)
刘杰	60	10	12	30
父	20	0	28	30
母	0	0	11	30

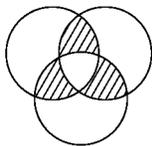
他们一家共花了多少钱？

8. 100 个学生只有一人没有学过外语,学过英语的有 39 人,学过法语的有 49 人,学过俄语的有 41 人,学过英语也学过法语的有 14 人,学过英语也学过俄语的有 13 人,学过法语也学过俄语的有 9 人。
问:三种语言都学过的有多少人?



动动小脑筋

1. 全班有 46 名同学,仅会打乒乓球的有 18 人,会打乒乓球又会打羽毛球有 7 人,不会打乒乓球又不会打羽毛球的有 6 人。问:仅会打羽毛球的有多少人?
2. 一次数学小测验只有两道题,结果全班有 10 人全对,第一题有 25 人做对,第二题有 18 人做错,那么两题都做错的有多少人?
3. 一个外国人组成的旅行团共 35 人,来我国武汉市参观。导游小姐为便于向他们介绍情况,需要了解这些来宾懂得哪国语言。请懂英语的人举手,有 22 人;请懂日语的人举手,有 15 人;请懂法语的人举手,有 18 人。显然,有些人是举了两次或三次手的。经了解,每人至少举一次手,且举了两次手的有 12 人,那么懂英、法、日三国语言的有多少人。
4. 在 1~100 的自然数中,不是 3 的倍数也不是 5 的倍数的数有多少个?
5. 在 1~100 的自然数中,能被 2 或 3 或 5 整除的数有多少个?
6. 在桌面上有三个两两重叠形状相同的圆纸片。它们的面积都是 120 平方厘米,盖住桌面的面积是 164 平方厘米,三张纸片共同重叠面积是 65 平方厘米,那么阴影部分的面积是多少平方厘米?
7. 某班 30 名学生中,有 20 人通过了数学考试,有 22 人通过了科学考试,有 25 人通过了英语考试。问:至少有多少人通过了这三门课程的考试?
8. 在光明小学“创新杯”展览会上,展品中有 26 件不是六年级的,有 25 件不是五年级的。已知五、六年级展品共 35 件,那么五年级的展品有多少件?

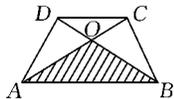


第 6 题图

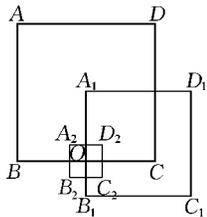


做做小诸葛

- 学校数学竞赛出了 A、B、C 三道题,至少做对一道题的有 25 人,其中做对 A 题的有 10 人,做对 B 题的有 13 人,做对 C 题的有 15 人。如果三道题都做对的只有一人,那么只做对两道题和只做对一道题的各有多少人?
- 在 1~1000 的自然数中,既不是平方数也不是立方数的自然数有多少个?
- 分母是 1001 的最简真分数共有多少个?
- 如图,梯形 ABCD 的面积是 45 平方分米,下底 AB = 10 分米,高 6 分米,三角形 DOC 的面积为 5 平方分米。试求三角形 AOB 的面积。
- 在一个炎热的夏日,10 个小学生去冷饮店每人都买了冷饮。其中 6 人买了汽水,6 人买了可乐,4 人买了果汁,有 3 人既买了汽水又买了可乐,1 人既买了汽水又买了果汁,2 人既买了可乐又买了果汁。问:只买一样的有几人?
- 参加大型团体操的同学共 240 名,他们面对教练站成一排,自左至右按 1、2、3、4... 依次报数,教练让每个同学记住自己报的数并做以下动作:先让报数是 3 的倍数的学生向后转,接着又让报数是 5 的倍数的学生向后转,最后让报数是 7 的倍数的学生向后转。问此时还有多少学生面对教练?
- 在 1~1998 的自然数中,能被 2 整除但不能被 3 或 7 整除的数的个数有多少?
- 边长分别为 15、13、6 的三个正方形 ABCD、 $A_1B_1C_1D_1$ 和 $A_2B_2C_2D_2$ 放在桌面上。其中 A_1 是正方形 ABCD 的中心, O 为正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的中心,求图中三个正方形盖住桌面的面积。(单位:平方厘米)



第 4 题图



第 8 题图



名师导航



1. 人们在研究走路、行车、行船等运动的时候,离不开计算速度、时间或路程。关于行程问题的基本关系式是:速度 \times 时间=路程。

2. 行程问题的内容相当广泛。从运动路线分,有直线运动与圆周运动。从运动物体的数量分,有单个物体运动和两个或两个以上物体运动。从运动方向分,有同向行程问题、反向行程问题。

3. 反向行程问题是研究两个运动物体相向而行或相背而行的应用题,其基本关系式是:速度和 \times 时间=路程。

4. 同向行程问题是研究两个运动物体同向而行的应用题,其基本关系式是:速度差 \times 时间=路程。

5. 流水行船问题是行程问题中的一种。其基本关系式是:

顺水速度=船速+水速

逆水速度=船速-水速

如果已知船的顺水速度和逆水速度,可以求出船速和水速。

船速=(顺水速度+逆水速度) \div 2

水速=(顺水速度-逆水速度) \div 2

名题解析



例1 小刚晚上7时离家去影院观看演出,以每分钟50米的速度步行,预计能提前10分钟到影院。刚走出500米,发现忘了带门票,便以每分钟100米的速度跑回家。找门票花了2分钟,再以每分钟70米的速度行走,结果提前1分钟到影院。求家到影院的距离。

分析与解:根据“速度 \times 时间=路程”,关键要求出小刚第二次从家到影院所用时间。由题目知,小刚两次从家出发相距 $\frac{500}{50} + \frac{500}{100} + 2 =$

17(分)。如果第二次仍然以每分钟 50 米的速度走 将迟到 $17 - 10 = 7$ (分)。实际提前 1 分钟 所以每分钟 70 米的速度比每分钟 50 米的速度少用 $7 + 1 = 8$ (分)。第二次从家到影院用 $50 \times 8 \div (70 - 50) = 20$ (分)。

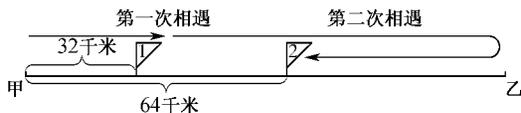
由此可求出家到影院的路程：

$$70 \times 20 = 1400 \text{ (米)}$$

答：家到影院的距离为 1400 米。

例 2 A、B 两辆汽车从甲、乙两站出发 相向而行。第一次相遇，在距离甲站 32 千米处 相遇后继续前行，各自到达甲、乙两站后，立即沿原路返回，第二次相遇在距甲站 64 千米处，两站相距多少千米？

分析与解：根据题意，画出示意图



自 A、B 两辆车同时从两站开出到第二次相遇时，共行了三个全程。两辆车合行一个全程时，从甲站到乙站的汽车行 32 千米，两辆车合行三个全程时，这辆汽车行了 3 个 32 千米。这时距甲站还有 64 千米，也就是再行 64 千米的话，共行的路程相当于甲乙两站距离的 2 倍。

$$(32 \times 3 + 64) \div 2 = 80 \text{ (千米)}$$

答：两站相距 80 千米。

例 3 甲、乙两辆车的速度分别为每小时 55 千米和每小时 43 千米。它们同时从 A 地到 B 地去。出发后 15 小时，甲车遇到一辆迎面开来的摩托车。2 小时后，乙车也遇到这辆摩托车，这辆摩托车每小时行多少千米？

分析与解：出发后 15 小时，甲车遇到摩托车。由于乙车的速度比甲车慢，则此时乙车与摩托车之间有一段距离。这段距离是“双重身份”，它既是甲、乙两车同行 15 小时的路程差（如下页图），也是乙车与摩托车 2 小时共行的路程。这就是我们解答这类问题的突破口，由此求出乙车与摩托车的速度和。示意图如下：

①甲车与摩托车相遇：

②乙车与摩托车相遇：



$$(55 - 43) \times 15 \div 2 - 43 = 90 - 43 = 47 \text{ (千米)}$$

答：这辆摩托车每小时行 47 千米。

例 4 张宏、李桐和王丽三个人相约骑车从甲地到乙地旅游。上午 6 时 张、李二人一起从甲地出发，张每小时骑 10 千米，李每小时骑 8 千米，王丽因事晚两个小时才从甲地出发，傍晚 6 时，王、张同时到达乙地，那么王丽什么时候追上李桐？

分析与解：根据张宏的骑车速度与时间可求出甲乙两地的距离，然后求出王丽的骑车速度。根据追及问题的基本关系式：追及路程 \div 速度差 = 追及时间，可求出王丽追上李桐的时间。

$$\text{两地距离：} 10 \times (18 - 6) = 120 \text{ (千米)}$$

$$\text{王丽速度：} 120 \div (12 - 2) = 12 \text{ (千米)}$$

$$\text{追及时间：} (8 \times 2) \div (12 - 8) = 4 \text{ (小时)}$$

由于王丽是上午 8 时才开始追及李桐的，故在中午 $8 + 4 = 12$ 时追上李桐。

答：王丽在中午 12 时追上李桐。

例 5 两人骑自行车沿着 900 米的环形跑道行驶，他们从同一地点反向而行，经过 18 分钟两车相遇。如果他们从同一地点同向而行，那么经过 180 分钟后快车追上慢车一次。求两人骑自行车的速度。

分析与解：两人骑自行车从同一地点出发反向而行到相遇共行 900 米路程，18 分钟相遇，据此可求出两人的速度和。

他们同向而行到快车追上慢车，追及的路程为 900 米，追及时间为 180 分钟，据此可求出两人的速度差。

根据两人的速度和与速度差，按和倍问题的解题规律，可分别求出两人骑自行车的速度。

$$(900 \div 18 + 900 \div 180) \div 2 = 27.5 \text{ (米)}$$

$$(900 \div 18 - 900 \div 180) \div 2 = 22.5 \text{ (米)}$$

答：快车每分钟行 27.5 米，慢车每分钟行 22.5 米。

例6 一艘轮船顺水行48千米需4小时,逆水行48千米需6小时。现在这艘轮船从上游A城到下游B城,两城的水路长72千米。开船时一旅客将水壶遗失被水冲走,船到B城时水壶离B城还有多少千米?

分析与解:由条件我们很容易求出轮船的顺水速度和逆水速度,并由此求出船在静水中的速度和水流的速度。

水壶顺流而下,轮船与水壶同向而行,这时轮船与水壶每小时相距一个速度差。

用水路全长72千米除以轮船的顺行速度,得出轮船的顺行时间。顺行时间乘以速度差,即可求出船到B城时水壶离B城的距离。

$$\text{顺行速度: } 48 \div 4 = 12 (\text{千米})$$

$$\text{逆行速度: } 48 \div 6 = 8 (\text{千米})$$

$$\text{船速: } (12 + 8) \div 2 = 10 (\text{千米})$$

$$\text{水速: } (12 - 8) \div 2 = 2 (\text{千米})$$

$$\text{水壶离B城距离: } (12 - 2) \times (72 \div 12) = 60 (\text{千米})$$

答:船到B城时水壶离B城还有60千米。

例7 东方轮船公司每天中午同时有2艘客轮从A港开往B港,与其同时,也有2艘客轮从B港开往A港。每艘客轮沿同一航线匀速航行,往返时间都是10天。今天中午从A港开往B港的客轮,从开航至到港的航程中,会遇到几艘从B港开往A港的客轮?

分析与解:由条件知,每天都有2艘从B港开往A港的客轮,10天就会有 $2 \times 10 = 20$ 艘客轮开出。而当从A港开出的客轮到达B港时,又会遇到2艘从B港开出的客轮。

最后整理从A港开出的客轮,在整个航程中,一共会遇到几艘从B港开往A港的客轮。

$$2 \times 2 \times 10 + 2 = 42 (\text{艘})$$

答:会遇到42艘从B港开往A港的客轮。

名师指津



1. 不论怎样复杂的行程问题,都要围绕速度、时间和路程三个量

之间的关系进行分析、推理。分析时常需要结合图解法。

2. 当运动物体不止一个时,分析物体的运动方向及运动结果,以确定将速度相加或相减,这是正确解答行程问题的前提。

3. 两个运动物体从两地出发,第一次相遇,合走1个全长,第二次相遇,合走3个全长,第三次相遇,合走5个全长……依此类推。

名题求解



请你试一试

1. 甲乙两地相距 360 千米,客车和货车同时从甲地出发驶向乙地。货车速度每小时 60 千米,客车速度每小时 40 千米,货车到达乙地后停留半小时,又以原速返回甲地。从甲地出发后几小时两车相遇?
2. 亮亮从家步行去学校,每小时行 5 千米。回家时骑车,每小时行 13 千米。骑车的时间比步行的时间少 4 小时,亮亮家离学校有多少千米?
3. 兄妹二人同时由家上学,哥哥每分钟走 90 米,妹妹每分钟走 60 米,哥哥到校门时发现忘带课本,立即沿原路回家去取,行至离校 180 米处和妹妹相遇,他们家离校多少米?
4. 甲、乙两站相距 480 千米,快车上午 5 时从甲站开往乙站,慢车同时从乙站开往甲站,两车在上午 11 时相遇,下午 3 时快车到达乙站后,慢车还要继续行几小时才能到达甲站?
5. 有一铁路桥长 1000 米,一列火车从桥上通过,测得火车从开始上桥到完全下桥共用 120 秒,整列火车完全在桥上的时间为 80 秒。这列火车的速度和长度分别是多少?
6. 两辆汽车同时从 A、B 两地相向而行,第一次相遇在距 A 地 180 千米的地方,相遇后继续前进,各自到达 B、A 两地后沿原路返回,第二次相遇距 A 站 260 千米的地方。A、B 两站相距多少千米?
7. 两名运动员在湖的周围环形道上练习长跑。甲每分比乙多跑 50 米。如果两人同时同地同向出发,则经过 45 分甲追上乙。如果两人同时同地反向出发,则经过 5 分可以相遇。求甲、乙两人的速度。

8. 小船运木材,逆流而上,在途中掉下一块木头在水里。2分钟后,小船掉头追木头(掉头时间不算),再经过几分钟小船追上木头?



动动小脑筋

1. 花山果园地形是个近似的圆,周长约180千米。两辆汽车同时从同地背向出发绕果园行驶了2.5小时相遇。如果其中一辆车先出发了72千米,那么在另一辆车出发几小时后,两车相遇?
2. 甲、乙、丙三人,甲每分走100米,乙每分走80米,丙每分走75米。甲从东村,乙、丙从西村同时出发相向而行,途中甲与乙相遇后3分又与丙相遇。求东西两村的距离。
3. 王强与李丽在长112米的斜坡上练习跑步。两人同时从坡顶出发,在A、B之间不停地往返奔跑(B为坡底)。如果男运动员上坡速度是每秒3米,下坡速度是每秒5米,女运动员上坡速度是每秒2米,下坡速度是每秒3米,两人第二次迎面相遇的地点离坡顶A多少米?
4. 龟兔赛跑,全程2000米,龟每分钟爬25米,兔每分钟跑320米。兔自以为速度快,途中睡了一觉,结果龟到终点时,兔离终点还有400米。兔在途中睡了多少分钟?
5. 从甲地到乙地有84千米,汽车和自行车同时从甲、乙两地相向而行。相遇时,汽车距甲地48千米,汽车每小时比自行车多行8千米,汽车还要行多少小时到达乙地?
6. 某校举行趣味跑步比赛,运动员跑到离起点60米处要返回到起跑点。领先的运动员每秒跑5米,最后的运动员每秒跑3米,起跑后距起点多少米处这两个运动员相遇?
7. 一艘轮船航行于武汉和宜昌之间,从宜昌向武汉行驶了24小时后,离武汉还差26千米;从武汉行驶到宜昌需31.3小时。已知这艘轮船逆水航行的速度是每小时20千米,那么这艘轮船在静水中的速度是多少?
8. 一艘轮船顺流航行2小时,行了120千米,返回原地用了4小时。一艘驳船顺水航行同一段水路,用了3小时。驳船返回原地比去时多用了几个小时?



做做小诸葛

1. 张、王两人骑车同时从甲地出发,向同一方向行进,张的速度比王的速度每小时快4千米,张比王早20分钟通过途中乙地时,张又前进了8千米,那么甲、乙两地相距多少千米?
2. 两辆汽车上午7时整分别从相距210千米的甲、乙两镇相向而行。第一辆汽车在途中修车停了45分钟,第二辆车因加油停了半小时,结果在当天上午10时整相遇。如果第一辆汽车每小时行40千米,那么第二辆汽车每小时行多少千米?
3. 在一环形跑道上,甲与乙同向,丙与他们背向,都从同一地点出发。每秒甲跑8米,乙跑5米,丙跑7米。跑道周长为240米,出发后三人第一次相遇时,丙跑了多少圈?
4. 王东步行20分从A地到B地,李华乘车10分可从B地到A地。当王东和李华在路上相遇时,王东已经走了12分,李华接王东乘车返回B地,还需要几分钟?
5. 小明回家距家门300米时,妹妹和小狗一齐向他奔来。小明和妹妹的速度都是每分钟50米,小狗的速度是每分钟200米,小狗遇到小明后用同样的速度不停地往返于小明与妹妹之间,当小明与妹妹相距10米时,小狗一共跑了多少米?
6. 轻轨旁有一条小路,一列长为105米的轻轨列车以每小时90千米的速度向东驶去,8点整追上向东行走的一名军人,5秒后离他而去;8点6分迎面遇到一个向西行走的农民,4秒后离开这个农民。军人与农民何时相遇?
7. 一支运输船队第一次顺流航行42千米,逆流航行8千米,共用11小时,第二次用同样的时间,顺流航行24千米,逆流航行14千米。这支船队在静水中的速度和水流速度分别是多少?



第一讲 小数运算技巧



请你试一试

1. 98.98 2. 12 3. 200 4. 4.5 5. 0.0001 6. 4.8 7. 420
8. 100 9. 1400 10. 16.9

动动小脑筋

1. (1) 0.509375

$$\begin{aligned} \text{提示：原式} &= 0.335 \times (0.225 + 0.775) + 0.775 \times 0.225 \\ &= 0.335 \times 1 + 0.775 \times 0.225 = 0.509375 \end{aligned}$$

- (2) 1748

$$\text{提示：原式} = 17.48 \times (37 - 19 + 82) = 17.48 \times 100 = 1748$$

- (3) 423

$$\begin{aligned} \text{提示：原式} &= 375 \times 0.423 \times 3.6 - 125 \times 0.423 \times 2.8 \\ &= 125 \times 0.423 \times 4 \times (3 \times 0.9 - 0.7) = 423 \end{aligned}$$

- (4) 484

$$\begin{aligned} \text{提示：原式} &= 78.2 \times 4.6 + 0.8 \times 8.2 + 21.8 \times (4.6 + 0.8) \\ &= 4.6 \times (78.2 + 21.8) + 0.8 \times (8.2 + 21.8) \\ &= 484 \end{aligned}$$

- (5) 111.1

$$\begin{aligned} \text{提示：原式} &= 11.11 \times 0.8 \times 9 + 11.11 \times 2.8 \\ &= 11.11 \times (7.2 + 2.8) \\ &= 111.1 \end{aligned}$$

2. (1) $a + b = 0.\underbrace{00\dots0}_{97\text{个}0}133$

(2) $a - b = 0.\underbrace{00\dots0}_{97\text{个}0}1117$

(3) $a \times b = 0.\underbrace{00\dots0}_{196\text{个}0}1$

(4) $a \div b = 125 \div 8 = 15.625$

3. $A < B$

提示：A = 2004.2007 × 2003.2007 + 0.0001 × 2003.2007

B = 2004.2007 × 2003.2007 + 0.0001 × 2004.2007

做做小诸葛

1. (1) 原式 = 2424.2424 ÷ (2424 × 0.1)

$$= 2424.2424 \div 2424 \div 0.1$$

$$= 10.001$$

(2) 原式 = (5.04 ÷ 9) × 25 × (154 ÷ 11)

$$= 0.56 \times 25 \times 14$$

$$= 196$$

(3) 原式 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8) × 11.11

$$= 333.3$$

(4) 原式 = 1.1 + 2 × 1.1 + 3 × 1.1 + ... + 100 × 1.1

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \times 1.1$$

$$= 5555$$

(5) 原式 = $\underbrace{0.125 \times 0.125 \times \dots \times 0.125}_{10 \text{ 个 } 0.125} \times \underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{10 \text{ 个 } 5} \times \underbrace{8 \times 8 \times \dots \times 8}_{11 \text{ 个 } 8} \times$

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{12 \text{ 个 } 2}$$

$$= \underbrace{(0.125 \times 8) \times (0.125 \times 8) \times \dots \times (0.125 \times 8)}_{10 \text{ 个 } (0.125 \times 8)} \times$$

$$\underbrace{(5 \times 2) \times (5 \times 2) \times \dots \times (5 \times 2)}_{10 \text{ 个 } (5 \times 2)} \times 8 \times 2 \times 2$$

$$= 32 \times 10^{10}$$

2. 因为 18 元和 40.95 元相差几十元，所以小李是将一条鱼的标价的小数点向左移了一位，这两条鱼的标价分别是：

$$(40.95 - 18) \div 9 \times 10 = 25.50(\text{元})$$

$$40.95 - 25.50 = 15.45(\text{元})$$

3. 将原式变形为 $0.27 \times 1.5 + \square \times 10 \times 1.5 + 1.5 \times 0.32 = 0.77 \times 1.5$

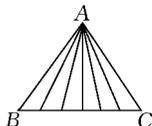
$$\square = 1.5 \times (0.77 - 0.27 - 0.32) \div 15 = 0.018$$

第二讲 多边形

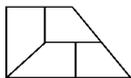


请你试一试

1.



2.

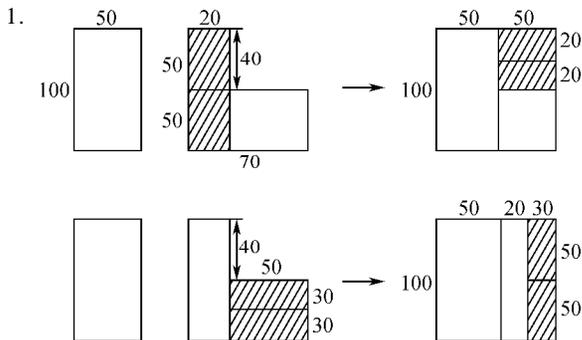


3. 8 平方厘米

4. 128 平方米

5. 5 厘米 6. 30 7. $\frac{1}{32}$ 8. 6

动动小脑筋



2. 6.48 平方厘米

提示：AB 边被三等分，每份长 3.6 厘米。

3. 38.75 平方厘米

提示：梯形的高 AD 是 14.5 厘米，则 AE 是 6 厘米。连结 EC，阴影部分面积 = $(S_{\square ABCD} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle EDC}) \div 2$ 。

4. 67.5

提示：本题关键求出 EC 的长后，利用高 = (三角形面积 $\times 2 \div$ 底) 求出 BF 的长，即可求出四边形 ABCD 的面积。

5. 4.5 厘米

提示：连结 AD。

6. 55 平方厘米

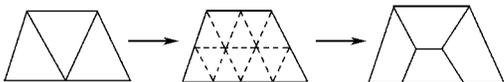
提示： $S_{\triangle BEC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle FCD}$ 则

$$S_{\triangle BEC} - S_{\triangle BFP} - S_{\triangle FCQ} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle FCD} - S_{\triangle BFP} - S_{\triangle FCQ},$$

$$\text{即 } S_{\text{阴}} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle CDQ}$$

做做小诸葛

1. 先将等腰梯形分成三个等边三角形，再将每个等边三角形再四等分，共得到 12 个小三角形。要将 12 个小三角形组成四个相等的图形，每个应由 3 个小三角形组成，如下页图。



2. 50 平方厘米 因为 $S_{\triangle DHF} = S_{\text{梯形CEFD}} - S_{\text{梯形CEFH}} = \frac{1}{2}(EF + CD) \times EC - \frac{1}{2}(EF + CH) \times EC,$

而 $S_{\triangle BHC} = S_{\triangle BEF} - S_{\text{梯形CEFH}} = \frac{1}{2}(BC + CE) \times EF - \frac{1}{2}(EF + CH) \times EC = \frac{1}{2}(EF + CD) \times EC - \frac{1}{2}(EF + CH) \times EC,$ 故 $\triangle DHF$ 的面积 = $\triangle BHC$ 的面积。

$$S_{\triangle BFD} = S_{\triangle BCD} = S_{\text{正方形ABCD}} \times \frac{1}{2}$$

因此, $S_{\triangle BFD} = 10^2 \times \frac{1}{2} = 50$ (平方厘米)

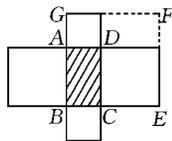
3. $\frac{3}{5}$ 连结 BD。因为 $AD = \frac{1}{4}AC$, 所以 $AC = 4DC$, 推知 $S_{\triangle ABC} = \frac{4}{5}S_{\triangle DBC}$ 。又

因为 $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}S_{\triangle DBC} = \frac{2}{5}S_{\triangle DBC}$, 所以 $S_{\triangle DBE} = \frac{3}{5}S_{\triangle DBC}$, 即 $BE = \frac{3}{5}BC$ 。

4. 15 平方米 设想将一个和长方形 ABCD 一样的图形拼补在右上角上, 如下图 这样可得到正方形 BEFG, 它的边长恰好等于长方形 ABCD 周长的一半 则可求出正方形 BEFG 的面积。又因为正方形 BEFG 的面积等于两个正方形的面积加上两个长方形面积。两个正方形的面积和为 $68 \div 2 = 34$ (平方米), 即可求出长方形 ABCD 的面积。解法如下:

$$BE = 16 \div 2 = 8(\text{米})$$

$$S_{\square ABCD} = (8^2 - 68 \div 2) \div 2 = 15(\text{平方米})$$

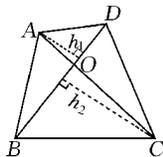


5. 2 倍 分别从 A, C 向 BD 作垂线, 如图。

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD}, \text{ 则 } h_1 = \frac{1}{3}h_2$$

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{3}S_{\triangle COD}, \text{ 则 } AO = \frac{1}{3}CO$$

$$\frac{CO}{DO} = \frac{3AO}{DO} = \frac{3 \times 2}{3} = 2$$



6. $\frac{1}{3}$ 连结 GD, 由于 AC 是对角线 根据正方形的对称性可知: $S_{\triangle BAG} = S_{\triangle ADG}$

$$S_{\triangle AGM} = S_{\triangle GMD} = \frac{1}{2}S_{\triangle AGD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABG}$$

$$\text{因为 } S_{\triangle BAM} = \frac{1}{4} = S_{\triangle AGM} + S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABG} + S_{\triangle ABG} = \frac{3}{2}S_{\triangle ABG}$$

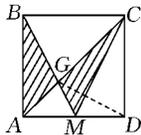
$$\text{所以 } S_{\triangle ABG} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MBC}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} - S_{\triangle GBC} = S_{\triangle MBC} - S_{\triangle GBC}$$

$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle CMG} = \frac{1}{6}$$

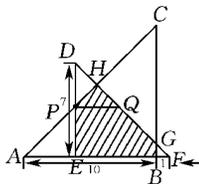
$$\text{所以 } S_{\text{阴}} = S_{\triangle ABG} + S_{\triangle CMG} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$



7. 21.75 平方厘米 给图注上字母。过点 P 作 AF 的平行线, 设与 DF 交于 Q, 那么 $\triangle DPQ$ 也是等腰直角三角形。

因为 $AE = AF - EF = 10 + 1 - 7 = 4$, 所以 $PE = 4$, $DP = DE - PE = 7 - 4 = 3$ 。又因为 $PQ = DP = 3$, $GB = BF = 1$, 所以 $\triangle DPH$ 的面积 = $\triangle DPQ$ 的面积 $\div 2 = 3 \times 3 \div 2 \div 2 = 2.25$ (平方厘米), $\triangle GFB$ 的面积 = $1 \times 1 \div 2 = 0.5$ (平方厘米)。

那么阴影部分的面积 = $\triangle DEF$ 的面积 - $\triangle DPH$ 的面积 - $\triangle GFB$ 的面积 = $7 \times 7 \div 2 - 2.25 - 0.5 = 21.75$ (平方厘米)。



8. 240 平方厘米 由于 P 点是在正方形中任取的一点, 所以不妨将 P 点取在正方形中点的位置, 这样使计算更简便。

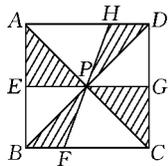
$$S_{\triangle AEP} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}S_{\square ABCD} = \frac{1}{8}S_{\square ABCD}$$

$$S_{\triangle CGP} = \frac{1}{2}S_{\triangle CPD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}S_{\square ABCD} = \frac{1}{8}S_{\square ABCD}$$

$$S_{\triangle BFP} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCP} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}S_{\square ABCD} = \frac{1}{12}S_{\square ABCD}$$

$$S_{\triangle DHP} = \frac{1}{3}S_{\triangle ADP} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}S_{\square ABCD} = \frac{1}{12}S_{\square ABCD}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{阴}} &= S_{\triangle AEP} + S_{\triangle CGP} + S_{\triangle BFP} + S_{\triangle DHP} \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) \times S_{\square ABCD} \\ &= \frac{5}{12} \times 24 \times 24 = 240 \text{ (平方厘米)}. \end{aligned}$$



第三讲 一元一次方程



请你试一试

1. (1) $x=15$ (2) $x=2.15$ (3) $x=5$ (4) $x=4.5$ (5) $x=256$
2. 63 3. 18 年 4. 10 天 5. 25500 米

动动小脑筋

1. (1) $x=20$ (2) $x=2.5$

u2. $x=36$; $x=27$

3. 每个篮球 40 元, 每个排球 30 元, 每个足球 38 元。

提示: 可设每个排球 x 元, 则每个篮球 $(x+10)$ 元, 每个足球 $(x+8)$ 元。

4. 20 人

提示: 设这个小队男生 x 人, 则姓 $(3x-4)$ 人。依题意列方程 $(x+1) \times 2 = 3x - 4$ 后可求解。

5. 2400 米

提示: 设张明家到学校有 x 米, 列方程得 $x \div 60 = x \div 80 + 10$

方程两边同时乘 240, 即可求解。

6. 甲种货车装载的货物多。

提示: 设甲种货车每辆装 x 吨, 乙种货车每辆装 y 吨。列方程 $5(3x+4y) = 4(5x+3y)$, 解得 $x = \frac{8}{5}y$ 。所以甲种货车装载货物多。

7. 80 厘米

提示: 题中没有明确指出哪一条边是底或腰, 所以必须分不同情况来分析。

假设 AC 是腰的情况不可能存在, 假设 AC 是底时求得 $BC=80$ (厘米)。

8. 9 个

提示: 设乙堆原有苹果 x 个, 则甲堆原有苹果 $(2x+2)$ 个。依题意列方程 $2x = (x-3) \times 3$ 后可求解。

做做小诸葛

1. 现在父亲的年龄是 45 岁。

设 10 年前女儿的年龄是 x 岁, 父亲的年龄是 $7x$ 岁。15 年后女儿的年龄是 $(x+10+15)$ 岁, 父亲的年龄是 $(7x+10+15)$ 岁。依题意列方程得:

$$7x+10+15=(x+10+15) \times 2$$

解得 $x=5$

现在父亲的年龄 $5 \times 7 + 10 = 45$ (岁)。

2. 每千克苹果 2 元,每千克雪梨 2.5 元。

设每千克苹果 x 元,则

$$3x + (15.5 - 4x) \div 3 \times 2 = 11$$

$$\text{解得 } x = 2$$

每千克雪梨为: $(15.5 - 4 \times 2) \div 3 = 2.5$ (元)

3. 7 天

设 x 天后乙书架上书的本数是甲书架上书的本数的 2 倍。列方程得:

$$(32 + 4x) \times 2 = 57 + 9x$$

$$\text{解得 } x = 7$$

4. 原正方形面积为 1225 平方厘米。

设正方形的边长为 x 厘米,则正方形的面积为 x^2 平方厘米,长方形的长为 $(x + 14)$ 厘米,宽为 $(x - 10)$ 厘米。列方程得:

$$(x + 14) \times (x - 10) = x^2$$

$$(x + 14)x - (x + 14) \times 10 = x^2$$

$$x = 35$$

原正方形面积为 $35 \times 35 = 1225$ (平方厘米)

5. 需要 9 秒。

设第一列火车的速度为每秒 x 米。由于火车通过隧道(桥梁)所行的路程等于火车的车身长与隧道长的和,用第一列火车的速度乘以过隧道(桥梁)的时间,求出总路程后再减去相应的隧道(桥梁)的长度,即求出了火车的车长。根据车长一定可列出方程,求出火车的车长。

求出第一列火车的速度和车长后,根据错车所行的路程等于两列火车的车长之和,速度为两车速度和,便可求出两车的错车时间。

$$15x - 300 = 12x - 180$$

$$3x = 120$$

$$x = 40$$

第一列火车的车长: $15 \times 40 - 300 = 300$ (米)

错车时间: $(300 + 330) \div (40 + 108000 \div 3600) = 9$ (秒)

6. 最后阶段有 6 天。

设中间阶段时间为 x 天,则开始阶段的时间是 $2x - 13$ (天)。最后阶段时间为 $20 - (2x - 13) - x = 33 - 3x$ (天)。由题意知道中间阶段的读书量是 $5 \times 2 = 10$ (页),最后阶段的读书量是 $10 \times 2.5 = 25$ (页)。列方程为:

$$5 \times (2x - 13) + 5 \times 2 \times x + 5 \times 2 \times (1.5 + 1) \times (33 - 3x) = 265$$

$$x = 9$$

最后阶段天数为： $33 - 3x = 33 - 3 \times 9 = 6$ (天)

7. 共折 378 只。

设妹妹每天折 x 只，则姐姐每天折 $(x+5)$ 只。列方程为：

$$(21 - 3)x \times 2 = 21 \times (x + 5)$$

$$\text{解得 } x = 7$$

姐姐每天折 $7 + 5 = 12$ (只)

共折千纸鹤： $7 \times 18 + 12 \times 21 = 378$ (只)

8. 现年 113 岁。

现在是 2005 年，这人一百多岁了，那么他最迟生于 1904 年，设这人生于 \square 年。由于公元 x^2 年时他年龄为 x 岁，那么

$$x^2 - \square = x$$

从而 $x^2 - x = \square$ ，即 $x \times (x - 1) = \square$

若 $x = 45$ ，则 $x \times (x - 1) = 45 \times 44 = 1980$ (不合题意)

若 $x = 44$ ，则 $x \times (x - 1) = 44 \times 43 = 1892$ 年

经试算这人 44 岁时 $44^2 - 1892 = 44$ (符合题意)

所以这位寿星现年为 $2005 - 1892 = 113$ (岁)。

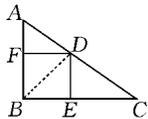
9. 108 平方厘米。

连结 DB，设 DE 长 x 厘米。根据 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC} = S_{\triangle ABC}$ ，列方程：

$$\frac{20x}{2} + \frac{30x}{2} = \frac{20 \times 30}{2}$$

$$\text{解得 } x = 12$$

$S_{\triangle DEC} = (30 - 12) \times 12 \div 2 = 108$ (平方厘米)



10. 这个三位数是 272。

设这个三位数是 $\overline{xa x}$ ，则：

$$100x + 10a + x + 100x + 10x + a = 499$$

$$211x + 11a = 499$$

因为 $x < 3$ ，所以分为 $x = 2$ 、 $x = 1$ 两种情况考虑。

如果 $x = 2$ ， $a = 7$ ；

如果 $x = 1$ ， $a \approx 26$ (不合题意)

所以原数为 272。

第四讲 消长问题



请你试一试

1. 4天 2. 15头 3. 20头 4. 105天 5. 8人 6. 6头
7. 30天 8. 12台

动动小脑筋

1. 6天 2. 20只 3. 6人、“0”时
4. 1100米/分钟

提示：骑车人速度为：

$$(1500 \times 3 - 2000 \times 2) \div (3 - 2) = 500(\text{米/分钟})$$

追及距离为：

$$4000 - 500 \times 2 = 3000(\text{米})$$

慢车速度为：

$$3000 \div 5 + 500 = 1100(\text{米/分钟})$$

5. 38头

提示：卖了15头牛后还吃4天，节省草量为： $15 \times 4 = 60$ 。把这60个单位草量加入原草量，转化成不卖即可。

6. 70亿
7. 6个
8. 3天

提示：设锅炉每天烧煤1个单位，大汽车5天运回的煤量为 $45 + 5 = 50$ (个)，每天运 $50 \div 5 = 10$ ，2辆小货车9天运回的煤量为 $45 + 9 = 54$ (个)，1辆小货车每天运 $54 \div 9 \div 2 = 3$ ，一辆大汽车和两辆小货车每天能运回 $10 + 3 \times 2 = 16$ ，需要的天数为 $45 \div (16 - 1) = 3$ 天。

做做小诸葛

1. 11个

解：设每个检票口每分钟放1个单位旅客，则每分钟新来旅客

$$(4 \times 15 - 8 \times 7) \div (15 - 7) = 0.5(\text{个})$$

开放前有多少个单位旅客在等候

$$56 - 7 \times 0.5 = 52.5(\text{个})$$

5分钟时间内检票口共需放进多少个单位的旅客

$$52 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 5 = 55$$

需设立几个检票口

$$55 \div 5 = 11(\text{个})$$

2. 36 天

将 10000 平方米扩大 3 倍, 转换成 30000 平方米的草场可供 $12 \times 3 = 36$ 头牛吃 28 天, 可供 21 头牛吃 63 天, 这样 30000 平方米的草场每天新生长的草量为

$$(21 \times 63 - 36 \times 28) \div (63 - 28) = 9(\text{个})$$

30000 平方米的草场原有草量

$$21 \times 63 - 9 \times 63 = 756(\text{个})$$

那么 72000 平方米草场每天新生长的草量

$$9 \times 72000 \div 30000 = 21.6(\text{个})$$

72000 平方米的草场原有草量

$$756 \times 72000 \div 30000 = 1814.4(\text{个})$$

$$1814.4 \div (72 - 21.6) = 36(\text{天})$$

3. 2 台

算出每小时流入 80 立方米的水可供多少台抽水机抽 1 小时即可。

4. 2 个

5. 39 头

8 公顷草场每周新生长草量

$$36 \times 12 - 48 \times 6 \div (12 - 6) = 24(\text{个})$$

8 公顷草场原有草量

$$48 \times 6 - 24 \times 6 = 144(\text{个})$$

10 公顷草场原有草量

$$144 \div 8 \times 10 = 180(\text{个})$$

10 公顷草场每天新生长草量

$$24 \div 8 \times 10 = 30(\text{个})$$

$$180 \div 20 + 30 = 39(\text{头})$$

6. 50 只

第五讲 推理



请你试一试

1. C 做的。
2. $A \rightarrow E, C \rightarrow F, B \rightarrow D$
3. 3 号
4. 2 场
5. 张 \rightarrow 孙, 王 \rightarrow 钱, 李 \rightarrow 赵
6. 语文
7. 白色
8. C 第一, B 第二, A 第三, D 第四

动动小脑筋

1. 1 号浙江, 2 号江苏, 3 号陕西, 4 号辽宁, 5 号山东。
提示: 列表打“ \checkmark ”、“ \times ”推理。
2. 甲与丁, 乙与丙是同伴。
提示: 由(3)知丁的同伴是甲或丙。再用假设法推理。
3. C 第一, B 第二, A 第三, E 第四, D 第五。
提示: 对于 E 的名次只有一种预测。
4. A 在化妆, B 在看书, C 在修指甲, D 在做头发。
提示: 列表推理。
5. 李明获第 1(师大附小), 张华获第 2(育才), 刘冬获第 3(实验小学)。
提示: 用实线连接有关联的量, 用虚线连接无关联的量, 根据虚实线表示的关系推理。
6. 姓刘的老年女老师教数学。
提示: 假设是男老师, 由(2)(3)(5)知, 他既不是青年、中年, 也不是老年, 矛盾, 所以是女老师。再由(1)知, 她不教语文, 不是中年人。假设她教外语, 由(3)(5)知她必是中年人, 矛盾, 所以她教数学。由(2)(4)知她是老年人, 由(3)知她姓刘。
7. 李。
提示: 列表推理。
8. 乐乐—英语—北京; 明明—语文—上海; 牛牛—数学—重庆。

做做小诸葛

1. 把姓名、城市和名次分三个集合, 用实线连接有关系的量, 虚线连接无关系的量。小强是 C 市的选手, 小华得了三等奖。
2. A 与 C 一起出访。由条件(1)若假设 A 出访, 则由条件(2)与(4), 可知 C 也一起出访; 若假设 B 出访, 则由条件(2)与(5), 可知 C 也一起出访, 再由条件(4), 又知 A 也一起出访, 由此可见 A 与 B 一起出访与出访条件(1)矛盾。故应是 A 与 C 一起出访。
3. 甲猜中黄色, 乙猜中蓝色, 丙猜中红色, 丁猜中白色, 戊猜中紫色。

假设黄珠子在第3包,列表画“√”、“×”。

	红	蓝	黄	白	紫
甲			3√		2×
乙	4×	2√			
丙	1√			5×	
丁		3×		4√	
戊			2×		5√

4. 罪犯是乙。从4人供词可看出,乙、丁两人观点一致,因此乙、丁两人的供词应该是同真或同假。如果乙说的是真话,那么丁说的也是真话,甲、丙两人说的是假话。由乙说真话,可得出“丙是罪犯”的结论,由甲说假话,可以得出“乙、丙、丁3人不是罪犯”的结论。所以两结论矛盾。由此确定乙、丁两人说的是假话,而甲、丙两人说的是真话。由甲、丙说真话,可以推出罪犯是乙。
5. A。如果A被评上,由A、B所说,推知A、B、C都被评上,只有D没评上,这与C所说矛盾,所以A没评上三好学生。
6. 是86240。因为每人猜对两个数字,三人共猜对 $2 \times 3 = 6$ 个数字,而电话号码只有5位,所以必有一位数字被两人同时猜对。猜对的是左起第三位数字2。因为每人猜对的两个数字不相邻,所以张、李猜对的另一个数字分别在两端,从而王猜对的数字是6和4,进一步推知李猜对0,张猜对8,电话号码为86240。
7. 3。前面1的对面是6,6挨着2,2的对面是5,5挨着3,3的对面是4;上面的1的对面是6,所以拐弯那块的右侧是2或5。假设是2,2挨着6,6的对面是1,按规则,1应挨着7,不可能。所以拐弯那块右侧是5,5挨着3,3的对面是4,4的对面是3,即打“?”的这面是3。
8. 3分。B队得分是奇数,并且恰有两场平局,所以B队是平2场胜1场,得5分。A队总分第一,并且没有胜B队,只能是胜2场平1场(与B队平),得7分。因此C队与B队平局,负于A队,得分是奇数,所以只能得1分。D队负于A队和B队,胜C队,得3分。

第六讲 平均数



请你试一试

- $(0.5 \times 56 + 1 \times 140 + 2 \times 236 + 5 \times 64 + 10 \times 4) \div (56 + 140 + 236 + 64 + 4) = 2(\text{元})$
- $(66 - 60) \times 4 = 24 \quad 60 - 24 = 36$
- $29 \times 2 - 24 \times 2 = 10(\text{元})$
- $(160 + 90 \times 4) \div (1 + 4) = 104(\text{元})$
- $360 \times 2 \div [360 \div 60 + 360 \div (60 + 30)] = 72(\text{千米})$
- $(30 \times 2 + 34 \times 2 + 32 \times 2) \div 2 \div 3 = 32$
- $8.8 \times 5 + 9.5 \times 4 - 7.5 \times 8 = 22$
- $(100 - 84) \div (86 - 84) = 8(\text{次})$

动动小脑筋

- 5.54 元

提示：假设所用一种糖果的总钱数为 24 元。

$$24 \div 4 = 6(\text{千克}) \quad 24 \div 6 = 4(\text{千克})$$

$$24 \div 8 = 3(\text{千克}) \quad 24 \times 3 \div (6 + 4 + 3) \approx 5.54(\text{元})$$

- 0.75 千米

提示：假设每段路长 6 千米。

$$6 \div 0.5 = 12(\text{天}) \quad 6 \div 1.5 = 4(\text{天})$$

$$(6 \times 2) \div (12 + 4) = 0.75(\text{千米})$$

- 91 分

提示：这 10 分平均分给另外 10 人，就是 11 人的平均成绩。

- 12.46

提示：设正确答案为 x ，则 $12.40 \leq x \leq 12.49$ 。由于计算平均数是四舍五入，所以四舍五入之前 $12.395 \leq x \leq 12.495$

$$12.395 \times 13 = 161.135 \quad 12.495 \times 13 = 162.435$$

因为 13 个自然数的和应该是 161.135 与 162.435 之间的整数，只有 162 符合条件。

- 45 名

提示：两次计算全班总分增加了 $97 - 79 = 18$ 分，而平均成绩提高了 $96 - 95.6 = 0.4(\text{分})$ ，也就是将这 18 分平均分给全班每个人，每人增加 0.4 分，从而可以求出这个班有多少学生。

- 2240 元

提示：原有的人平均每人应付车费减少了 $40 - 35 = 5(\text{元})$ ，是因为后来增加的 8 个人共应付的 $35 \times 8 = 280(\text{元})$ 分担了这笔费用，从而可以求出原有乘客，进

而求出出租车费用。

7. 许庆、李辉、王敏、彭湃

提示：某位同学算得的平均分越高，则他自己的得分就越低。

8. 40岁

提示：从4个人的年龄和中减去较小的3个人可能最小的年龄之和。

做做小诸葛

- (1) $45 \text{ 分} = 0.75 \text{ 时}$ $50 \div 0.75 = 66.66\dots \approx 67$ (千米)
(2) $75 \text{ 分} = 1.25 \text{ 时}$ $100 \div 1.25 = 80$ (千米)
(3) $30 \text{ 分} = 0.5 \text{ 时}$ $300 \div 3.5 \approx 86$ (千米)
- 乙的总得分比甲多 $(9.73 - 9.72) \times 10 = 0.1$ (分)，乙的最高分与最低分之之和比甲多 $(9.85 - 9.84) \times 2 = 0.02$ (分)，所以去掉最高分和最低分后的有效得分，乙比甲多 $0.1 - 0.02 = 0.08$ (分)。
最后得分乙比甲高 $0.08 \div 8 = 0.01$ (分)。
- 女生总分： $93 \times 18 = 1674$ (分)
按全班平均分计算女生总分： $90 \times 18 = 1620$ (分)
女生总分相差 $1674 - 1620 = 54$ (分)。根据移多补少的思想，这54分平均分给每位男生使其平均分提高，故可求出男生的人数： $54 \div (90 - 88) = 27$ (人)。
- $[(1 + 2 + 3 + \dots + 123) \div 3 \div (123 \div 3)] \times 3 = 186$
- $(700 - 500) \times 3 \div (800 - 700) = 6$ (个)
 $4 + 6 - 1 = 9$ (月)
- 假设前4名平均分为 a ，则前2名平均分为 $a + 1$ ，前6名平均分为 $a - 2$ 。
第三、四名得分之和： $4a - 2 \times (a + 1) = 2a - 2$
第五、六名得分之和： $6 \times (a - 2) - 4a = 2a - 12$
第三、四名得分之和比第五、六名得分之和多： $(2a - 2) - (2a - 12) = 10$ (分)。

第七讲 长方体和正方体



请你试一试

- (1) $96 \div 6 = 16$ (平方厘米) (2) $(48 - 16 \times 2) \div 4 \div 4 = 1$ (厘米) (3) $16 \times (4 + 1) = 80$ (平方厘米)
- 40平方分米 3. 98平方厘米
- 10厘米、600平方厘米 1000立方厘米

5. 112 立方厘米 6. $8ab$ 7. 18 平方厘米
 8. 208 平方厘米、192 立方厘米 9. 72 块 10. 10 立方厘米、34 平方厘米

动动小脑筋

1. 204 立方厘米

提示：立体图形的体积等于正方体的体积减去截去的长方体的体积，切割前后表面积没有变化。

2. 54 平方厘米

提示：立体图形的表面积应该是从上下、前后、左右分别看到的图形的面积之和。

3. 22 厘米

提示：从 36 厘米中去掉 2 个 5 厘米，就是盒子的长，从宽中去掉 2 个 5 厘米就是盒子的宽，盒子的高是 5 厘米，再根据体积与长、宽、高的关系可列方程求得。

4. 400 立方厘米

提示：增加的表面积就是底面面积的 2 倍，从而可求出底面边长，然后根据该长方体的表面积求出其高，于是体积可求。

5. 可以拼成 6 种不同的长方体。

	a	b	h
(1)	9 厘米	4 厘米	1 厘米
(2)	9 厘米	1 厘米	4 厘米
(3)	4 厘米	3 厘米	3 厘米
(4)	6 厘米	6 厘米	1 厘米
(5)	6 厘米	1 厘米	6 厘米
(6)	9 厘米	2 厘米	2 厘米

提示：将 36 分成三个数相乘的积即可，注意有序思考。

6. 8 厘米

提示：两容器中水的体积等于水的总体积。

7. 262 平方厘米、168 立方厘米

提示：表面积等于长方体的表面积减去上、下被挖去的两个正方形的面积加上正方形孔四周面积，体积是长方体的体积减去中孔的体积。

8. 1 分米

提示：两堆碎石的体积之和除以大水缸的底面积即得水面上升的高度。

9. 724 平方厘米

提示：当拼成的长方体长、宽、高最接近时，拼成的长方体的表面积才是最小的。

做做小诸葛

1. 184 平方厘米

(1) 原长方体的表面积为： $2 \times (6 \times 4 + 4 \times 2 + 2 \times 6) = 88$ (平方厘米)

(2) 增加的表面积。

①将棱长 2 厘米的棱切割两次后增加的表面积为：

$$6 \times 4 \times 2 \times 2 = 96 \text{ (平方厘米)}$$

②同理，将棱长 4 厘米的棱切割成两段后增加的表面积为：

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48 \text{ (平方厘米)}$$

③将棱长为 6 厘米的棱切割两段后增加的表面积为：

$$4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \text{ (平方厘米)}$$

故表面积之和最大为： $88 + 96 = 184$ (平方厘米)

2. 128 平方厘米 当长方体长、宽、高最接近时表面积最小，因为 $120 = 4 \times 5 \times 6$ ，所以应拼成长 6 厘米，宽 5 厘米，高 4 厘米的长方体，这个长方体的表面积是：

$$(6 \times 5 + 6 \times 4 + 5 \times 4) \times 2 = 128 \text{ (平方厘米)}$$

3. 390 平方厘米 正方体的棱长为 7 厘米，从六个面的中心位置各挖去一个棱长为 2 厘米的正方体，这样得到的玩具中心部分是实体。

原正方体的表面积为： $7^2 \times 6 = 294$ (平方厘米)

在它的六个面各挖去一个棱长为 2 厘米的正方体后增加的表面积为： $2^2 \times 4 \times 6 = 96$ (平方厘米)

这个玩具的表面积为： $294 + 96 = 390$ (平方厘米)

4. 864 平方厘米 将这个立体图形看成由 8 个棱长为 4 厘米的正方体和 12 个棱长为 2 厘米的正方体粘合而成。其中 8 个棱长为 4 厘米的正方体在大正方体的八个顶点上，棱长为 2 厘米的正方体在大正方体的棱的中间。由于每个小正方体都有两个面分别粘接两个较大的正方体，相对于不粘接，对粘接面减少了 $2 \times 2 \times 6 = 16$ (平方厘米)的表面积，所以这个立体图形的表面积为：

$$(4 \times 4 \times 6) \times 8 + (2 \times 2) \times 6 \times 12 - 16 \times 12 = 768 + 288 - 192 = 864 \text{ (平方厘米)}$$

5. 可直接依据本讲例 4 归纳的方法求得。

(1) 一面红色的正方体个数是： $6 \times (5 - 1)^2 = 96$ (个)

(2) 两面红色的正方体个数是： $12 \times (5 - 1) = 48$ (个)

(3) 三面红色的正方体个数是 :8 个

(4) 没有一面染上红色的正方体个数是 : $(5-1)^3=64$ (个)

6. 84 立方厘米 $10=2 \times 5$, 所以原长方体的长、宽、高各棱平均切割了 $(5+1)$ 刀、 $(2+1)$ 刀、2 刀, 即原长方体的长、宽、高分别为 7 厘米、4 厘米、3 厘米, 于是体积可求得为 : $7 \times 4 \times 3=84$ (立方厘米)

7. 455 立方厘米 设长方体的长、宽、高分别为 a 厘米、b 厘米、c 厘米, 依题意, $a > b > c$, 将长方体横切两刀、竖切两刀后各增加 4 个截面面积, 所以有 :

$$4ab + 4ac = 624, \text{ 即 } a(b+c) = 156$$

因为 a、b、c 都为质数, 而

$$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 13 \times (7+5)$$

所以 $a=13, b=7, c=5$

体积为 : $V=13 \times 7 \times 5=455$ (立方厘米)

8. 294 立方厘米 解: 设长方形长为 x 厘米, 正方形边长为 y 厘米,

$$\text{则 : } 4xy + 2y^2 = 266, 2xy + y^2 = 133, y(2x+y) = 7 \times 19,$$

$$x=6, y=7, 6 \times 7 \times 7 = 294 \text{ (立方厘米)}$$

第八讲 整除



请你试一试

1. 843 $\overline{00}$ $\overline{00}$ 2. 374 3. 13524 54312 4. 471 5. 3 6. 39675

7. 不能 8. 60 72 84 90 96 9. 10406 10. 54

动动小脑筋

1. 333 个

提示 : 先求出能被 2 或 3 整除的数有多少个 ?

2. 69310 或 69368

提示 : 假设末两位是 0, 先用这个数除以 58, 再比较余数和除数相差多少。

3. 301246

提示 : 可依题意, 设所求的六位数为 $\overline{30124a}$, 再根据这个数能被 11 整除可求得 a 的值。

4. 1047, 1074, 1407, 1470, 1704, 1740, 4017, 4071, 4107, 4170, 4701, 4710, 7014, 7041, 7104, 7140, 7401, 7410 共 18 个

提示 : 将所给五个数按被 3 除的余数分为 3 组 : (0), (1, 4, 7), (2), 其中四

个数的和能为3的倍数的只能是0、1、4、7。

5. 36792

提示：这个数能被72整除，说明这个数能同时被8和9整除，再根据能被8或9整除的数的特征解决。

6. 60

提示：依题意可知三个数均为6的倍数。故设三数分别为 $6a$ 、 $6b$ 、 $6c$ ， $6(a+b+c)$ 为5的倍数，而 $a+b+c \geq 1+2+3 > 5$ 。故 $a+b+c$ 最小为10。

7. 979 109

提示：此数被2、5除，余数不是1，而被3除余1。

8. 3个

提示：只需考虑能同时被5、7、8、9整除。

做做小诸葛

1. $2+0+0=2$

根据能被4、5整除的数的特征， $\overline{865abc}$ 要最小，其末两位必是0， b 和 c 均为0。又因为 $\overline{865abc}$ 能被3整除，所以 $8+6+5+a+b+c$ 的和一定是3的倍数，因为 $b=c=0$ ，那么 $8+6+5+a+b+c=19+a$ ，要使 $\overline{865abc}$ 最小， a 只能是2。所以 $\overline{865abc}$ 中， $a=2$ ， $b=c=0$ 。

2. 54

解：设这个两位数是 \overline{ab} ， $\overline{ab}=(a+b) \times 6$ ， \overline{ab} 一定能被6整除，能被6整除的两位数有：12、18、24、30、36、42、48、54、60、66、72、78、84、90、96。只有54是两个数字和($5+4=9$)的六倍。

3. (1) 由乘法原理可知共有 $3 \times 3 \times 2 = 18$ (个)没有重复数字的不同三位数。

(2) 另个位数是5的有 $2 \times 2 = 4$ (个)；个位数是0的有 $3 \times 2 = 6$ (个)，故个位数是5和0的三位数共有 $4+6=10$ (个)

4. 最多能取100个数。

解：任意两个数的和能被100整除，这样的数有两种：末两位是“50”或末两位是“00”的。

在100~10000的自然数中，末两位是“50”的数有150, 250, 350, ..., 9950共99个，末两位是“00”的有100, 200, 300, 400, ..., 10000共100个。

5. $x=26 \times 77 + 12 = 2014$

6. 132、264、396

解：设这样的三位数为 \overline{ABC} 。

$$\overline{ABC} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BA} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{CB}$$

$$100A + 10B + C = 22A + 22B + 22C$$

$$26A = 4B + 7C$$

$$A = \frac{4B + 7C}{26}$$

$$, 26 | (4B + 7C)$$

$$\text{又 } 0 \leq A, B, C \leq 9$$

$$, 4B + 7C \text{ 的最大值为 } 4 \times 9 + 7 \times 9 = 99。$$

A 的取值只能是 1、2、3。

当 A=1 时, B=3, C=2;

A=2 时, B=6, C=4;

A=3 时, B=9, C=6。

7. 证明: 设任意一个三位数为 \overline{abc} , 则六位数

$$\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1000 + \overline{abc}$$

$$= 1001 \times \overline{abc}$$

$$= 7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc}$$

所以, 这个六位数一定能同时被 7、11、13 整除。

8. 根据题意可知最小值是 $1 \times 1 = 1$, 最大值是 $14 \times 14 = 196$, 那么 1 与 196 不是 6 的倍数。

这样, 在得到的许多不相等的积中, 能被 6 整除的最小值是 $1 \times 6 = 6$, 最大值是 $12 \times 14 = 6 \times 28$, 而介于 6×1 与 6×28 之间的 6 的倍数并非每个积都是两张卡片上的数的积, 如 $6 \times 17, 6 \times 19, 6 \times 23, 6 \times 25, 6 \times 27$ 这五个 6 的倍数就不是的。

因此, 这些积中能被 6 整除的数共有: $28 - 5 = 23$ (个)。

第九讲 质数与合数



请你试一试

1. 437 是合数, 541 是质数。 2. A 是 7 3. 14

4. 共可组成的数有:

一位数有 1, 2, 3 这三个;

两位数有 12, 21, 13, 31, 23, 32 这 6 个;

三位数有 123, 132, 231, 213, 312, 321 这 6 个;

其中质数有 2, 3, 13, 23, 31 这 5 个。

- 符合条件的两位数有 : 23、37、53、73。
- a 的最小两个数为 5、9。 7. 2 和 83
- a. 1 b. 大于 1 的自然数
c. 奇数 d. 偶数

动动小脑筋

- 和为 85。

提示 $5 + 11 + 17 + 23 + 29$

- 523

提示 : 先组成不同的三位数 , 然后根据数的整除特征排除一些合数 , 再根据判断质数的方法即可发现质数。

- 4 和 9

提示 : 要使和尽可能小 , 则合数尽可能小 , 最小的合数是 4。

- 2050

提示 : $(2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13) \times (1 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12) = 2050$

- 74

提示 2 是唯一的偶质数。

- 6 个 , 它们是 3、5、7、37、53 和 73。

提示 : 分类取一张、两张、三张来讨论 , 找出符合题意的数。

- 不正确

提示 5、11、17、23、29。

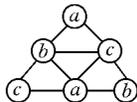
做做小诸葛

- $1999 = 2 + 1997$

$1997 \times 2 = 3994$

- 900

解 : 因为 6 个质数之和为 20 , 20 是 4 的倍数。而大三角形三边中间三个数每个数字都被加了三遍 , 因而这三个数的和也必须是 4 的倍数。即 4, 8, 10, 12, 16, 20。而最小的三个质数为 2, 3, 5 ,



5 , 所以这三个数只能是 2, 3, 5。同样因为 6 个质数之和为 20 , 所以另三个也只能是 2, 3, 5 , 故 6 个质数之积为 $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 900$

- 质数至多有 4 个。

大于 2 的质数一定是奇数 , 大于 100 的九个连续自然数中最多只有 5 个奇数 ,

所以质数的个数不大于 5。

在三个连续奇数中至少有一个能被 3 整除,所以这五个连续的奇数中至少有一个是合数,因此质数最多有 4 个。

如 101 ~ 109 中,质数有 101、103、107、109。

4. 882

由题意易知个位为 2,那么百位为 8,又因为这个数能同时被 3 和 7 整除,则十位是 8。

5. 和最小是 21。

由枚举法知 $10 \times 11 + 11 = 121$ 是合数,这两个自然数的和最小是 $10 + 11 = 21$ 。

6. 假设把 33 分成 5 个质数之和(分成 6 个或 6 个以上质数之和不可能),33 是奇数,因此 5 个质数中不可能有 2,取最小的 3、5、7、11、13 的和是 39,超过 33,所以不行。

假设 33 可以分成 4 个质数之和,33 是奇数,因此,其中必有一个偶数 2, $33 - 2 = 31$,经试算其他 3 个数分别是 (3、5、23)、(3、11、17)、(7、11、13)、(5、7、19),在这里乘积最大的是 $7 \times 11 \times 13 = 1001$ 。

假设 33 可分成 3 个质数之和,只可能是 (3、13、17)、(3、11、19)、(3、7、23)、(5、11、17)。

以上乘积均小于 $2 \times 7 \times 11 \times 13 = 2002$ 。

假设 33 分成两个质数之和,只可能是 2 和 31,乘积更小,故应将 33 写成四个质数 2、7、11、13 的和时它们的乘积最大。

7. 1993

因为 x 为奇数,若 pq 为奇数,则 $pq - 1$ 为偶数,故 p, q 中有一个一定是偶质数 2,令 $p = 2$,则 $2q - 1 = x$,当 $q = 997$ 时, x 有最大值 $x = 2 \times 997 - 1 = 1994 - 1 = 1993$ 。

8. 13、15、17、29、31 这 5 天。

合数有 4、6、8、9、10、12、14、15, ... 最大的合数本题只能用到 15,因为月份里最多只有 31 天, $15 \times 2 + 1 = 31$ 。而这个合数又必须是奇数,所以只有 9 或 15。若是 9,则这 5 天分别是 7、9、11、17、19,即第一次与最后一次时间只隔 12 天,不合题意。

第十讲 分解质因数



请你试一试

- (1)④ (2)③ (3)② (4)② (5)④
- (1)× (2)√ (3)× (4)√ (5)√
- (1) $988 = 2^2 \times 13 \times 19$ (2) $2295 = 3^3 \times 5 \times 17$ (3) $1024 = 2^{10}$
(4) $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$
- $21 = 3 \times 7$ 约数 1、3、7、21 $78 = 2 \times 3 \times 13$ 约数 1、2、3、6、13、26、39、78
 $500 = 2^2 \times 5^3$ 约数 1、2、4、5、10、20、25、50、100、125、250、500
- (1)× $54 = 2 \times 3^3$ (2)× $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ (3)× $30 = 2 \times 3 \times 5$
- (1)6 (2)33 (3)3 5 8 7. 14 和 15
- 3 种。 $180 = 20 \times 9 = 18 \times 10 = 15 \times 12$ 。每行人数可以是 12 人、15 人或 18 人。
- 分成 7 堆,每堆 13 盆或分成 13 堆,每堆 7 盆。
- $33 \times 169 \times 14 \times 75 = 143 \times 39 \times 35 \times 30$ 。

动动小脑筋

- (1)24 (2)1680

提示:根据一个数的质因数的指数与这个数的约数的个数之间的关系以及一个数的质因数的指数与约数总和的关系进行计算。 $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$, $(2+1) \times (3+1) \times (1+1) = 24$ (个) $(1+2+4) \times (1+3+9+27) \times (5+1) = 1680$ 。

- 5 岁、6 岁、7 岁、8 岁、11 岁。

提示:先将 18480 分解质因数,再根据质因数的特点及儿童年龄的特点设法分配这些质因数。

- 5 本

提示:为了计算方便,以角为单位。据题意,售价在 40 角至 50 角之间,那么由此质因数乘式可知,售价为 47 角。再求售出的本数。

- 最大的两位约数是 96。

提示:两位数约数可以按从大到小的顺序开始考虑,结合数 A 以及两位数约数的特点,采取排除的方法逐个分析。

- 可能是 7 条小船,每船载 14 人;或有 14 条小船,每船载 7 人;或者是 49 条小船,每船载 2 人。

提示:先求出每次运多少人到河对岸。再将每次所运的人数分解质因数,分析出每批船的只数和每只船载的人数。 $294 \div 3 = 98$, $98 = 2 \times 7 \times 7 = 14 \times 7 = 2 \times 49$ 。

- 市区共有 43 所小学。

提示:先求出共分配了多少本书,再分析学校的数目。

7. 括号内最小应填 20。

提示 这个乘积的最后四位数字都是 0 ,说明这个乘积可以写成 $a \times 10000$ (a 为整数)的形式 ,但 $10000 = 2^4 \times 5^4$,这说明在此乘积的分解式中至少要含有 4 个因数 2 及 4 个因数 5 ,所以只要找出已知的 3 个数中因数 2 与 5 的个数就好了。

8. 可举 89 与 97 这两个相邻的质数为例。

提示 题目要求我们具体找出 7 个连续的合数。中间夹着 7 个连续合数的两个质数 ,其差一定大于 7 ,所以只要找到差大于 7 的两个相邻质数即可。

9. 14

提示 先把 4875 分解质因数 ,从它的约数中找到和为 64 的两个数 ,再求这两个数的差。这两个数分别是 39 和 25 ,它们的差是 $39 - 25 = 14$ 。

10. 三个孙子的年龄是 3 岁、4 岁和 7 岁。

提示 将爷爷的年龄分解质因数 ,再依据题目要求求解。

做做小诸葛

1. 8 种 $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$,60 个苹果可以分为 2 堆、4 堆、6 堆、10 堆、12 堆、20 堆、30 堆、60 堆。共 8 种。
2. 18 张 把 180 分解质因数后 ,再分析各种情况 ,只有 $9 \times 20 = 10 \times 18$ 。故他原来买了 18 张图片。
3. 735 个 零件数中每位上数字相同 ,则这些数可能是 222、333、555、777 ;不同数为 735。
4. 62 是偶数 ,在素数中除 2 以外都是奇数 , $62 - 2 = 60$,两个素数和为 60 的有 7 和 53 ,13 和 47 ,17 和 43 ,23 和 37 ,29 和 31 ,所以本题的答案有 $2 \times 7 \times 53 = 742$, $2 \times 13 \times 47 = 1222$, $2 \times 17 \times 43 = 1462$, $2 \times 23 \times 37 = 1702$, $2 \times 29 \times 31 = 1798$ 。
5. 890 由 7950 是偶数 ,这三个数平方和必然两奇一偶 ,即一个是 2 的平方 , $7950 - 2^2 = 7946$,另两个奇数的平方和是 7946。而奇数平方的个位只能是 1、5、9 ,所以这两个奇质数的平方的个位只能是 5 和 1 ,又 $5^2 = 25$, $7946 - 5^2 = 7921 = 89^2$,即两个奇质数分别是 5 和 89 ,所以这个自然数是 $2 \times 5 \times 89 = 890$ 。
6. 51 人 7 棵。 因为 364 是每人种树棵数与总人数的乘积 ,所以 ,先将 364 分解质因数 , $364 = 2 \times 2 \times 7 \times 13$,然后按题意重新组合 ,使之为两数之积。由于一个班的学生人数通常在 50 人左右 ,每个学生种树棵数应在 10 棵以内 ,所以组合成 $364 = 7 \times 52$ 较为合理 ,即 52 为师生总数 ,这个班有学生 51 人 ,每人种树 7 棵。
7. 132 , 231 将 30492 分解质因数 ,再根据题目要求将它调整为一对反序数的

乘积。 $30492 = (2^2 \times 3 \times 11) \times (3 \times 7 \times 11) = 132 \times 231$ 。这两个数为 132 和 231。

8. $\frac{7}{60}$ 先把 420 分解质因数,再把满足条件的分数排出来,进而求出第四大的分数。 $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$,分子可以是 1、3、5、7、12、15、20。符合条件的分数从大到小依次是 $\frac{20}{21}$ 、 $\frac{15}{28}$ 、 $\frac{12}{35}$ 、 $\frac{7}{60}$ 、 $\frac{5}{84}$ 、 $\frac{3}{140}$ 、 $\frac{1}{420}$,而第四大的分数是 $\frac{7}{60}$ 。
9. 16 种 求 300 的约数的个数,去掉 1 和它本身两个。 $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$
300 约数的个数: $(2+1) \times (1+1) \times (2+1) = 18$ (个),去掉 1 和 300 两个约数共有 16 种不同的拿法。
10. 把 1764 分解质因数,由于每箭的环数不大于 10,甲、乙两人 5 箭中必有两箭射中 7 环,其他三环必是 $2 \times 2 \times 3 \times 3$ 的约数,且小于 10。
 $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$,因为 7×2 、 7×3 都大于 10,所以甲、乙两人都有两箭射中 7 环,其他三环可能为 $2^2 \times 3^2 = 1 \times 4 \times 9 = 1 \times 6 \times 6 = 2 \times 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 6 = 3 \times 3 \times 4$ 。结合题意分析可知甲的总环数应为 $7+7+1+4+9=28$ (环),乙的总环数为 $7+7+3+3+4=24$ (环)。

第十一讲 最大公约数与最小公倍数



请你试一试

1. 180 和 630 2. 15 3. 60 4. 每段最长 60 厘米,一共可截成 10 段。
5. 15 与 150, 30 与 135, 45 与 120, 60 与 105, 75 与 90。
6. 12 与 420, 60 与 84。 7. 61 个
8. 80 袋。每袋 4 本练习本, 3 枝铅笔, 2 个笔盒。
9. 670 本 10. 209 粒

动动小脑筋

1. 59 人。

提示: 如果这个班再多 1 人的话,那么排 3 行、4 行、5 行、6 行都正好无余。

2. 9 面。

提示: 第 1 面红旗不拔出来,以后每隔 12 米[4 6]的一面红旗不必拔出来。

3. 15 时。

提示: 由于电子钟每走 9 分钟亮一次灯,每走 60 分钟响一次铃,因此再响铃又亮灯时必须经过 9 与 60 的最小公倍数的时间。

4. 最大边长是 15 厘米, 63 块。

提示:这个正方形的边长应是长方形长和宽的最大公约数。

5. 56 或 28。

提示:用代数法,可先求两数独有因数的和,根据两独有因数互质,推算两个数,最后再求差。

6. 10 月 25 日。

提示:下次再见面应经过 6、8、12 的最小公倍数的天数。

7. 70。

提示:该两位数被 9 整除少 2,被 8 整除少 2,被 4 整除少 2。即该两位数加上 2 就能被 9、8、4 整除。

8. 最少种 46 棵,相邻两棵距离 6 米。

提示:种树棵数最少,间距就应最大,由题意,种树的间距必是长和宽的最大公约数。

做做小诸葛

1. $(715, 520) = 65$ (米).....灯距

$$(715 + 520) \div 65 + 1 = 20 \text{ (盏)}$$

2. $[2, 3, 4] = 12$, 参加会餐的人数是 12 的倍数。

$$12 \div 2 = 6 \text{ (瓶)} \quad 12 \div 3 = 4 \text{ (瓶)} \quad 12 \div 4 = 3 \text{ (瓶)}$$

$$6 + 4 + 3 = 13 \text{ (瓶)} \dots\dots 12 \text{ 人共用 A、B、C 三种饮料 13 瓶}$$

$$65 \div 13 = 5, 12 \times 5 = 60 \text{ (人)} \dots\dots \text{会餐人数}$$

3. 23 段 依题意,第 3 根钢管的长度是第 2 根钢管长度的 2.4 倍。

$$280 \div (2.4 - 1) = 200, 200 \times 1.2 = 240, 240 \times 2 = 480$$

$$(200, 240, 480) = 40, (200 + 240 + 480) \div 40 = 23 \text{ (段)}$$

4. $1824 \div 24 = 76$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24 \ 76} \\ 2 \overline{) 12 \ 38} \\ \quad 6 \ 19 \end{array}$$

$$(24, 76) = 2 \times 2 = 4$$

$$[24, 76] = 2 \times 2 \times 6 \times 19 = 456$$

5. 101 设最大公约数为 d ,于是可设 3 个数分别是 ad 、 bd 、 cd ,所以 $ad + bd + cd = 404$

$$(a + b + c)d = 4 \times 101。$$

取 $d = 101$,则 $a = b = 1, c = 2$ 。

三个自然数分别是 101、101、202。

$(101, 101, 202) = 101 \dots\dots$ 三个数的最大公约数最大 101。

6. 甲乙两数最大公约数是 45, 那么它们公有质因数为 $3^2 \times 5$ 。甲有 12 个约数, 而 $12 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$, 所以甲数可能为 $3^5 \times 5$, $3^3 \times 5^2$, $3^2 \times 5^3$, $3^2 \times 5 \times a$ (a 为大于 5 的质数)。乙有 10 个约数, $10 = 2 \times 5$, 则乙数为 $3^4 \times 5 = 405$ 。由于甲、乙两数公有质因数是 3^2 和 5, 因此符合条件的甲数为 $3^2 \times 5^3$ 或 $3^2 \times 5 \times a$ 。又 $3^2 \times 5^3 = 1125 > 1000$, 不合题意, 故甲为 $3^2 \times 5 \times a$ 。

当 $a = 2$ 时, $3^2 \times 5 \times a = 90$, $90 + 405 < 800$, 不符合要求。

当 $a = 7$ 时, $3^2 \times 5 \times a = 315$, $315 + 405 < 800$, 不符合要求。

当 $a = 11$ 时, $3^2 \times 5 \times a = 495$, $495 + 405 = 900$, 符合要求。

当 $a = 13$ 时, $3^2 \times 5 \times a = 585$, $585 + 405 = 990$, 符合要求。

所以在 800 ~ 1000 之间, 甲乙两数和为 900 或 990。

7. 23 三个自然数分别除以同一个自然数, 得到相同的余数, 那么 $360 - 314 = 46$, $314 - 245 = 69$, 余数已一同减去, 46 与 69 都是这个自然数的倍数。(46, 69) = 23。这个自然数是 23。
8. 21.6 米 $[54, 72] = 216$ 厘米, 从起点到第一个脚印重合时止, 小华的脚印有 $216 \div 54 = 4$ (个), 爸爸脚印有 $216 \div 72 = 3$ (个)。因为有一个脚印是重合的, 所以在 216 厘米长的这段内共有 $4 + 3 - 1 = 6$ (个) 脚印。 $60 \div 6 = 10$, $216 \times 10 = 2160$ (厘米) = 21.6 (米)。

第十二讲 余数问题



请你试一试

1. 161 2. 169 3. 8 个, 分别是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 4. 8, 16, 24, 32, 40, 48
 5. $a = 60$, $b = 14$, $c = 11$, $d = 9$ 6. 12, 13, 18, 26, 36, 39, 52, 78 7. 8
 8. 星期三、星期五 9. 800, 36 10. 12

动动小脑筋

1. 8
 2. 988, 114

提示: 将最大的三位数 999 除以 38, 商为 26, 余数 11, 将 999 减去 11 即是求的最大数。

3. 星期日, 星期四, 星期五
 4. 53 或 159

提示: $3195 - 15 = 3180 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 53$

$2241 - 15 = 2226 = 2 \times 3 \times 7 \times 53$

$$492 - 15 = 477 = 3^2 \times 53$$

5. 23 6. 3 7. 最小 1000 最大 9800
8. 143 提示: 本题转换成某数除以 4 余 3, 除以 5 余 3, 除以 7 余 3 的题型, 就变成了求最小公倍数问题了。
9. 166 个 提示: 从一个数除以 6 余 4, 除以 7 余 5 入手, 满足这两个条件的最小数是 40, 然后再逐步加上 42。
 $40 + 42 = 82$ $82 + 42 = 124$ $124 + 42 = 166$

做做小诸葛

1. 1512 提示: $\square\square\square12$ 能被 7、8、9 三个数整除, 能被 8 整除的末三位只能是: $\square112$, $\square312$, $\square512$, $\square712$, $\square912$
 能被 9 整除的只能是 5112, 3312, 1512, 9712, 6912
 能被 7 整除的只能是 :1512
2. 9066、7366、5666、3966、2266、1586、1416、1246、1076
3. 19、31、34 这三袋。 把问题转化成: 小明、小亮两人共取走 5 袋糖果, 小明取走的三袋糖果数是小亮那两袋糖果数的 2 倍。这样就变成 5 袋糖果的总数能被 3 整除。运用余数性质非常简单, 这 6 个数除以 3 得到的余数是: 18 的余数为 0, 19 的余数是 1, 20 的余数是 2, 24 的余数是 0, 31 的余数是 1, 34 的余数是 1。可见余数为 0 的有 2 个, 余数为 1 的有 3 袋, 而 3 个 1 的和又恰好能被 3 整除。所以小明拿的三袋是 19、31 和 34, 小亮拿的 2 袋是 18 和 24。
4. 43 设这个质数为 A, 则有
 $A|(63 - a)$ $A|(91 - b)$ $A|(129 - c)$
 $A|[(63 - a) + (91 - b) + (129 - c)]$
 $A|[283 - (a + b + c)]$
 $A|258$ $258 = 2 \times 3 \times 43$
5. 148 提示: 先找出满足除以 5 余 3, 除以 6 余 4 的最小数 28。然后逐步加 5 和 6 的最小公倍数 30, 直到满足除以 7 余 1 为止。
6. 39 个
7. 605 提示: 转换成一个数除以 6 余 5, 除以 8 余 5, 除以 10 也余 5, 这样的数最小是 $120 + 5 = 125$, 然后加上若干次 120 到满足条件即可。
8. 47

第十三讲 奇数与偶数



请你试一试

1. 偶数 2. 104 3. 偶数
4. 不可能。因为任意 5 个奇数的和都是奇数。 5. 17 6. 991
7. 奇数 12 个, 偶数 13 个。 8. 1 个或 3 个。

动动小脑筋

1. 不能。提示: 要将 5 只杯口全翻转, 每只应翻奇数次, 翻的总次数为奇。而实际每次翻 2 只, 不管翻若干次, 总次数只能是偶数。
2. 不是。提示: 每张纸上两个页码之和是奇数, 20 个奇数之和是偶数。
3. 偶数。提示: 将送贺年卡的人分成两类(送偶数张贺年卡和送奇数张贺年卡)来讨论。
4. 偶数。提示: A、B、C 无论是 7、8、9 中哪个, 都能保证 $A-3$ 、 $B-4$ 、 $C-5$ 中至少有一个是偶数, 所以 $(A-3) \times (B-4) \times (C-5)$ 必是偶数。
5. 1 个。提示: 用等号两边的奇偶性判断。
6. 不能。提示: 如果一开始是 2、4、6, 那么从第一次改变后, 三个数永远是一奇两偶。
7. 10 个。提示: 找规律 $1 \times 9 = 9$ (1 个奇数), $11 \times 99 = 1089$ (2 个奇数); $111 \times 999 = 110889$ (3 个奇数).....。
8. 证明: $(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + (2n+7) = 8(n+2)$

做做小诸葛

1. 194 a、b、c 都是质数, 由 $a \times b + c = 1993$ 知 $a \times b$ 与 c 的奇偶性不同。当 $a \times b$ 为偶数时, 设 $a=2$, c 为奇数, c 的值只能是 3、5、7, 则 b 分别为: $(1993-3) \div 2 = 995$, $(1993-5) \div 2 = 994$, $(1993-7) \div 2 = 993$, 而 995、994、993 都不是质数, 不合题意。当 $a \times b$ 为奇数时, $c=2$, $a \times b = 1993 - 2 = 1991 = 11 \times 181$, 不论 a、b 谁是 11 或 181, $a + b + c = 2 + 11 + 181 = 194$ 。
2. 20 个 写出一些这列数的奇偶性, 发现规律再计算。奇、奇、奇、偶、奇、奇、奇、奇、偶、奇、奇、奇、奇、偶..... $(99-4) \div 5 = 19$ (个) $19+1=20$ (个)
3. ①如果 30 道题都答对了, 则可得到的分数为 $15+5 \times 30=165$, 是个奇数。
②如果答错一题, 就要从 165 分中减去 $5+1=6$ 分, 不论答错几个题, 都将从 165 中减去 6 的倍数(偶数), 得分仍是个奇数。
③如果有一题未答, 就要从 165 分中减去 $5-1=4$ 分, 因而不论几个题未答, 都将从 165 中减去 4 的倍数(偶数), 得分也是奇数。
所以无论每个同学如何答题, 他们的得分总是奇数。因为有 2005 个同学(奇数个)参赛, 奇数个奇数相加, 和仍为奇数, 所以参赛同学的总得分是奇数。
4. 2000 因为 $a \times b + 6 = Q$, Q 是偶数, 由偶数 + 偶数 = 偶数, 可知 $a \times b$ 的积一定是偶数, a、b 均为小于 1000 的质数, 质数中除了 2 以外都是奇数, 奇数 \times 奇数 \neq 偶数, 可推知 a、b 中一定有一个是 2; 假设 $a=2$, 要求 Q 的最大值, 则 b 是接近 1000 并小于 1000 的质数, 得 $b=997$, 所以 $Q=2 \times 997 + 6 = 2000$ 。

5. 1998 因为“ $4 \times \square$ ”为偶数,所以“ $1999 \times \triangle$ ”必为奇数,则 \triangle 为奇数。

又 $1999 \times 5 = 9995 > 9991$, \triangle 为小于5的奇数,即 \triangle 为1或3。

当 $\triangle = 1$ 时, $\square = (9991 - 1999 \times 1) \div 4 = 1998$ 。

当 $\triangle = 3$ 时, $\square = (9991 - 1999 \times 3) \div 4 = 998.5 \neq$ 自然数。所以 $\square = 1998$ 。

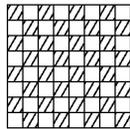
6. 不可能。将 8×8 正方形黑、白染色,其中黑格和白格各32个。

不管怎样拼,“田”字形纸片所占据的总是两个白格,5个“田”字

形纸片占偶数个白格,而每个“T”字形纸片恰好占1个或3个白

格,总之是奇数个白格,这样11个“T”字形纸片总共占11个奇

数之和,也就是奇数个白格,奇数个白格+偶数个白格=奇数个白格,与32个白格矛盾。所以不可能。



7. 不能。9个数中有5个奇数,奇数个奇数相加减其和或差仍为奇数,再加(或减)4个偶数的和(或差),其结果仍为奇数。而10是偶数,奇数 \neq 偶数。

8. 27 由奇数求和公式可知: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2$

设擦去的奇数为 x ,则 $1998 + x = n^2$ ($x \leq n$),又因为 $1998 > 44^2$,假定 $1998 + x =$

$45^2 = 2025$,可解得 $x = 27$ 符合题意,假定 $1998 + x = 46^2$ 或 $1998 + x = 47^2$ 均无

符合题意的解。所以擦去的奇数是27。

第十四讲 包含与排除



请你试一试

1. 67 平方厘米 2. 40 人 3. 12 人 4. 5 人 5. 5 人

6. 48 平方厘米 7. 171 元 8. 6 人

动动小脑筋

1. 15 人。提示:画示意图,分块计算。

2. 3 人。提示:画示意图,标数据,分块计算。

3. 8 人。提示:直接用公式解答。

4. 53 个。提示:反向思考。先用包含与排除原理一求出是3或5的倍数的数的个数,再从100个数中减去这个个数即为所求。

5. 74 个。提示:能被2整除的、能被3整除的、能被5整除的三类,用原理二公式求解。

6. 66cm^2 。提示:把3块阴影部分分别用A、B、C表示。根据原理二列方程:

$120 \times 3 - (A + 65) - (B + 65) - (C + 65) + 65 = 164$ 解出 $(A + B + C)$ 的值即为所求。

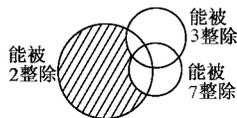
7. 7 人。提示:先求出各门未通过的人数及总和。从30人中扣除未通过的总

人数就可求出至少通过这三门课程的人数。

8. 18 件。提示：一至四年级与五年级的展品共 26 件；一至四年级与六年级的展品共 25 件；五、六年级展品共 35 件，可求全校展品： $(26 + 25 + 35) \div 2$ 。再求五年级展品。

做做小诸葛

1. 设做对两道题的有 x 人，则 $10 + 13 + 15 - x + 1 = 25$ 解得 $x = 14$
 $14 - 1 \times 3 = 11$ 人……只对两道题 $25 - (11 + 1) = 13$ (人)……只对一道题
2. 962 个。因为 $31^2 < 1000 < 32^2$ ， $10^3 = 1000$ ，所以在前 1000 个自然数中有 31 个平方数，10 个立方数，同时还有 3 个 6 次方数 ($1^6, 2^6, 3^6$)
 所求自然数共有 $1000 - (31 + 10) + 3 = 962$ (个)。
3. 最简真分数共 720 个。分母是 1000 的真分数共 1000 个。 $1001 = 7 \times 11 \times 13$ ，
 $\left[\frac{1000}{7} \right] = 142$ (个)； $\left[\frac{1000}{11} \right] = 90$ (个)， $\left[\frac{1000}{13} \right] = 76$ (个)， $\left[\frac{1000}{7 \times 11} \right] = 12$ (个)；
 $\left[\frac{1000}{7 \times 13} \right] = 10$ (个)， $\left[\frac{1000}{11 \times 13} \right] = 6$ (个)， $\left[\frac{1000}{7 \times 11 \times 13} \right] = 0$ (个)
 $1000 - (142 + 90 + 76 - 12 - 10 - 6 + 0) = 1000 - 280 = 720$ (个)
4. 20 平方厘米 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 等底、等高，，它们的面积相等，都可按三角形面积公式求出面积来。但两个 $\triangle ABO$ 重叠了一次。 $\triangle AOB$ 的面积 = $(10 \times 6 \div 2) \times 2 + 5 - 45 = 20$ (平方厘米)
5. 设三样都买的有 x 人，则 $6 + 6 + 4 - 3 - 1 - 2 + x = 10$ 解得 $x = 0$
 只买一样的有 $(6 - 3 - 1) + (6 - 3 - 2) + (4 - 1 - 2) = 4$ (人)
6. $\left[\frac{240}{3} \right] = 80$ (名)， $\left[\frac{240}{5} \right] = 48$ (名)， $\left[\frac{240}{7} \right] = 34$ (名)， $\left[\frac{240}{3 \times 5} \right] = 16$ (名)，
 $\left[\frac{240}{3 \times 7} \right] = 11$ (名)， $\left[\frac{240}{5 \times 7} \right] = 6$ (名)， $\left[\frac{240}{3 \times 5 \times 7} \right] = 2$ (名)
 共有 $240 - (80 + 48 + 34) + (16 + 11 + 6) \times 2 - 4 \times 2 = 136$ (名)
7. 能被 2 整除的有 $\left[\frac{1998}{2} \right] = 999$ (个)；能被 2、3 同时整除的有 $\left[\frac{1998}{2 \times 3} \right] = 333$ (个)；能被 2 和 7 同时整除的有 $\left[\frac{1998}{2 \times 7} \right] = 142$ (个)；能同时被 2、3、7 整除的有 $\left[\frac{1998}{2 \times 3 \times 7} \right] = 47$ (个)。
 所求的数为 $999 - (333 + 142 - 47) = 571$ (个)
 ，能被 2 整除，但不能被 3 或 7 整除的有 571 个。



第十五讲 行程问题



请你试一试

1. 7.5 小时
2. 32.5 千米
3. 900 米
4. 5 小时
5. 速度是 10 米/秒 车长是 200 米。
6. 400 千米
7. 甲每分跑 250 米,乙每分跑 200 米。
8. 2 分

动动小脑筋

1. 1.5 小时 提示 从 180 千米中减去 72 千米 即两车在相同时间内所行的路程和。
2. 18900 米 提示 甲与乙相遇后 3 分又与丙相遇的这段路程 是甲与丙 3 分共行的路程 也是乙、丙在甲、乙相遇时刻所行路程差 因此可求出第一次相遇时间。
3. 48 米 提示 设 $AB = x$ 米 根据题意分别计算男女运动员跑步方向变化时与出发点 A 的距离 列表如下:

时刻	男第一次 到达 B	二人第一次 相遇	女第一次 到达 B	男第一次 返回 A	二人第二 次相遇
男运动员与 A 距离	x	$\frac{4}{5}x$	$\frac{3}{5}x$	0	$\frac{3}{7}x$
女运动员与 A 距离	$\frac{3}{5}x$	$\frac{4}{5}x$	x	$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{7}x$

从表中可知 二人第二次相遇点与 A 的距离是 $\frac{3}{7}x = \frac{3}{7} \times 112 = 48$ (米)

4. 75 分钟 提示 根据龟跑到终点的时间 $2000 \div 25 = 80$ (分) 算出兔如果没有睡觉应该跑的距离 $80 \times 320 = 25600$ (米) 这段距离与兔实际跑的距离之差就是由于睡觉而耽误的 既而求出睡觉的时间。
5. 1.125 小时 提示 “相遇时间”是解答本题的突破口。根据“路程差 \div 速度差 = 相遇时间”可求出相遇时间 $[48 - (84 - 48)] \div 8 = 1.5$ (小时) 汽车速度为 $48 \div 1.5 = 32$ (千米) 进而求出汽车还要行的时间。
6. 45 米 提示 从起跑跑到相遇 共行了两个全程。求出相遇时间即可求出相遇点距起点处的距离。
7. 22.5 千米/小时 提示 根据速度 \times 时间 = 路程 可求出武汉到宜昌之间的水路距离 $20 \times 31.3 = 626$ (千米)。这段距离不变 可求出这艘轮船顺行速度 $(626 - 26) \div 24 = 25$ (千米/小时)。根据静水中速度 = (顺行速度 + 逆行速度) $\div 2$ 可求出静水中速度。
8. 9 小时 提示 根据水流速度 = (顺水速度 - 逆水速度) $\div 2$ 求出水流速度为 15 千米/小时。再求出驳船的逆水速度 $120 \div 3 - 15 = 10$ (千米/小时) 即可求解。

做做小诸葛

1. 40 千米 已知张 20 分钟行 8 千米,可以求出张 1 小时行 $8 \times (60 \div 20) = 24$ (千米)。王每小时行 $24 - 4 = 20$ (千米)。

张和王同时从甲地出发,到王到达乙地这段时间,张比王共多行 8 千米。又由张每小时比王多行 4 千米,可求出这 8 千米是在几小时内多行的,进而求出王从甲地到乙地的时间,即可得出甲、乙两地间的距离:

$$[8 \times (60 \div 20) - 4] \times (8 \div 4) = 40(\text{千米})$$

2. 48 千米 本题根据“路程和 - 第一辆车行驶路程 = 第二辆车行驶路程”,可得第二辆车相遇时行驶了 $\left[210 - 40 \times \left(10 - 7 - \frac{3}{4} \right) \right] = 120$ (千米),第二辆车相

遇时行驶了 $\left(10 - 7 - \frac{1}{2} \right) = 2.5$ (小时),因而速度为 48 千米/小时。

3. $2\frac{1}{3}$ 圈 由题意可得甲与乙第一次相遇需要时间为 $240 \div (8 - 5) = 80$ (秒),甲与丙第一次相遇需要时间为 $240 \div (8 + 7) = 16$ (秒)。80 是 16 的倍数,说明甲与乙第一次相遇时必定与丙也相遇,即三人第一次相遇。此时丙跑的圈数为 $7 \times 80 \div 240 = 2\frac{1}{3}$ (圈)。

4. 4 分钟 由题意知李华乘车的速度是王东步行的速度的 2 倍。李华接王东时,王东还差 $(20 - 12) = 8$ (分)的路程,乘车只需 $8 \div 2 = 4$ (分)。

5. 580 米 本题关键要求出小狗跑的时间。而小狗跑的时间就是小明与妹妹从距家门 300 米到相距 10 米的时间,求得 $(300 - 10) \div (50 + 50) = 2.9$ (分),小狗共跑了 $200 \times 2.9 = 580$ (米)。

6. 8 点 30 分两人相遇。 列车的速度为 $90 \times 1000 \div 60 = 1500$ (米),军人的速度为每分 $\left(1500 \times \frac{5}{60} - 105 \right) \div \frac{5}{60} = 240$ (米),农民的速度为 $\left(105 - 1500 \times \frac{4}{60} \right) \div \frac{4}{60} = 75$ (米)。8 点整军人与农民相距 $(1500 + 75) \times 6 = 9450$ (米),两人相遇还需 $9450 \div (240 + 75) = 30$ (分),即 8 点 30 分两人相遇。

7. 船速为 4 千米/小时,水速为 2 千米/小时。顺水速度是逆水速度的 $(42 - 24) \div (14 - 8) = 3$ 倍。假设第二次航行全是逆水航行,则

逆水速度为 $(24 \div 3 + 14) \div 11 = 2$ (千米/小时)

顺水速度为 $24 \div (11 - 14 \div 2) = 6$ (千米/小时)

船速为 $(2 + 6) \div 2 = 4$ (千米/小时)

水速为 $(6 - 2) \div 2 = 2$ (千米/小时)