◇目录◇

3 + X·数学解题中的思想方法及运用⑥

第二十部分

3 + X·数学解题中的对称与旋转原理及其运用

对称原理 …… (1)
中学数学中的‘对称’ …… (6)
解题中的‘对称美’意识 …… (10)
对称地处理具有对称性的问题 …… (14)
对称变换及其应用 …… (18)
数学对称法在中学代数中的应用 …… (22)
对称性的解题功能 …… (25)
对称在解题中的应用(一) …… (27)
对称在解题中的应用(二) …… (29)
运用对称性解题(一) …… (34)
运用对称性解题(二) …… (36)
运用对称性解题(三) …… (39)
运用对称性解题(四) …… (42)
运用对称性优化解题的四条途径 …… (44)
利用图形的对称性解题 …… (47)
轴对称和路程最短问题 …… (50)
对称、轮换概念在解题中的应用 …… (52)
对称、旋转在解题中的应用 …… (55)
数学中的旋转变换 …… (60)
旋转变换在解题中的应用 …… (64)
旋转法在两类证题中的应用 …… (66)
运用旋转变换解题 …… (69)

几何题的旋转变换证法 …… (72)
用旋转法证明平面几何题 …… (74)
旋转变换在平几解题中的应用(一) …… (76)
旋转变换在平几解题中的应用(二) …… (80)

第二十一部分

3 + X·数学解题中的比较方法及其运用

数学解题中的尝试与比较 …… 84
中学数学中的比较方法及其功能 …… 88
几种常用的比较法 …… 94
证明题中的逐项比较法 …… 98
连比法在解题中的应用 …… 100
解题中寻找传递比的方法 …… 103
求商比较法在解题中的应用 …… 109
诱误·对比·反思 …… 114

第二十二部分

3 + X·数学解题中的‘变’的思想及其运用

数学解题中的‘变’(一) …… (117)
数学解题中的‘变’(二) …… (122)
数学变形对解题的作用 …… (127)
数学中常见变形类型 …… (131)
数学解题中的变与活 …… (135)
数学解题中的‘变’与‘辨’ …… (136)
数学教学中的变式教学 …… (139)
变式教学的六种类型 …… (141)
变式解题与递进思维培养 …… (146)
变更问题的表述 …… (149)
变更问题法解题 …… (153)
变易论题的两种方法 …… (156)

变更问题法在数学解题中的运用 …… (159)
数学变换在寻求简捷解题途径中的运用 …… (162)
附 空间图形的变式 …… (166)
数学变式题的配置 …… (172)
变更问题要注意等价性 …… (175)
附 解题不能变换题意 …… (176)

第二十三部分

3 + X · 数学解题中的变换与化归思想及其运用

变换与化归 …… 178
变换命题形式解题的思维方法 …… 186
变换法解题的六种形式 …… 189
变换题目的方法 …… 192
变换命题形式的八种方法 …… 197
变更命题与思维品质培养 …… 200
数学解题中的初等变换方法 …… 204
数学解题中的“等价变换”方法 …… 212
数学解题中的反射变换方法 …… 215
化归思想与数学教学 …… 217
数学解题中的化归思想(一) …… 220
数学解题中的化归思想(二) …… 224
化归思想形成的阶段性 …… 232
化归思想方法训练八法 …… 236
数学解题中的化归方法与原则 …… 239
化归思想在数学解题中的运用(一) …… 242
化归思想在数学解题中的运用(二) …… 246
数学解题中的化归方法 …… 248
化归方法在数学解题中的应用 …… 250
数学竞赛中的化归策略 …… 253
数学解题中的一般向特殊的化归方法 …… 259
一种特殊的化归方法 赋值法 …… 263
数学解题中的化归思想及其培养 …… 267

化归的一种重要方法“割补法”…… 271
初中数学化归常用技巧 …… 276
函数作图中的化归思想与方法 …… 277

第二十部分

3+X·数学解题中的对称与旋转原理及其运用

□对称原理

对称,照字面上讲,就是两个东西相对而又想称。因此,把这两个东西对换一下,好象没有动过一样,数学中的许多对象就其某个方面(图形、关系、形式、地位、作用等等)来说,也具有这种对称的意义。如等腰三角形、平行四边形、圆锥曲线、正棱锥、旋转体等,就是具有这种对称意义的图形;某些命题的条件和结论,如一元方程的根在韦达定理中,三角形的边与角在正弦定理中所处的地位也都具有上述对称的意义。

在解某些数学题时,如能充分利用命题本身或图形的对称性,常能帮助我们发现解题思路或简化解题过程。汉丁老师作了如下例析:

例1 若 a、b、c 表示三角形三边的长,求证:

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$

分析 在这个命题中,a、b、c 虽难有可能不相等,但就其在命题中所处的地位而言,它们是"全对称"的,即对待证结论中的字母 a、b、c 作任意"置换变换",即取 abc 的任一全排列来代替 abc,结论并无改变,这启示我们将 3abc 移到左边平分给三个加项,待证结论即为:$[a^2(b+c-a)-abc]+[b^2(c+a-b)-abc]+[c^2(a+b-c)-abc]\leqslant 0$ ①

由于对称性,我们只需变换左端中的一项:

$a^2(b+c-a)-abc=a^2b-abc+a2(c-a)$

$=ab(a-c)+a^2(c-a)=a(a-b)(c-a)$

可知,其余两项当分别为:

$b(b-c)(a-b),c(c-a)(b-c).$

又由于 a、b、c 全对称,故可假定 $a\geqslant b\geqslant c$,

，$a(a-b)(c-a)+b(b-c)(a-b)$

$=(a-b)[a(c-a)+b(b-c)]$

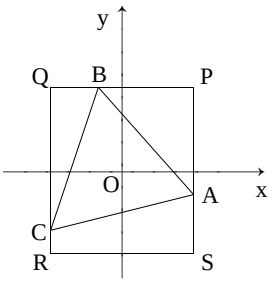
$=(a-b)[c(a-b)-(a^2-b^2)]$

$=(a-b)2[c-(a+b)]\leqslant 0$，

又 $c(c-a)(b-c)\leqslant 0$，

故①可获证，从而所给命题可获证。

注 若对于式子 $f(a,b,c)$，只有将 a、b、c 作轮换时，其值才不改变，即 $f(a,b,c)\equiv f(b,c,a)\equiv f(c,a,b)$. 这时称 $f(a,b,c)$ 关于 a、b、c 轮换对称。此时，只能“不妨设 $a\geqslant c,b\geqslant c$”，而不能象全对称那样“假定 $a\geqslant b\geqslant c$”.



例2 等边三角形的顶点在给定正方形的边上，试确定它们的重心的集合。

分析 正方形是对称图形，正三角形的三个顶点在给定正方形的边上，它们的“地位”是“对称”的，三角形的重心的坐标公式中所含顶点的坐标也是对称的。充分利用这些对称关系，可得此题的下面解法。

解 取正方形的两条对称轴为坐标轴建立直角坐标系(如图)。于是，可设正方形的各顶点为 $P(1,1)$、$Q(-1,1)$、$R(-1,-1)$、$S(1,-1)$.

若等边三角形的顶点 A 在 SP 上，B 在 PQ 上，C 在 QR 上，则可设：

$A(1,a)(-1\leqslant a\leqslant 1)$，$B(b,1)(-1\leqslant b\leqslant 1)$，$C(-1,1)(-1\leqslant c\leqslant 1)$

因 $|AB|=|BC|=|CA|$

，$(1-b)^2+(1-a)^2$

$=(1+b)^2+(1+c)^2$ ①

$=(1+1)^2+(a-c)^2$ ②

设△ABC 的重心为 G，则

$x=\frac{1}{3}(1+b-1)$ ③

$y=\frac{1}{3}(a+1+c)$ ④

下面由①～④消去参数 a，b，c：

由③、④得

$b=3x,a+c=3y-1$ ⑤

由①得$(2-a-c)(c-a)=4b$

收⑤代入，并约去因数 3，得：

$(1-y)(c-a)=4x$ ⑥

由⑤、⑥解之得：

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}\left(3y-1-\frac{4x}{1-y}\right) \\ c=\frac{1}{2}\left(3y-1+\frac{4x}{1-y}\right) \end{cases}$$

用 a、b、c 的表达式代入尚未用到的②得：

$$(1+3x)^2+\left[\frac{3}{2}(1-y)-\frac{2x}{1-y}\right]^2=4+\left(\frac{4x}{1-y}\right)^2$$

整理得 $[3(1-y)^2-4][(1-y)^2-4x^2]=0$

这表示直线 $y=\pm 2/\sqrt{3}$ 和点 $(0,1)$. 但 G 在正方形内，, $-1<y<1$；

又由⑤，有 $-1\leqslant b=3x\leqslant 1$，

, $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$.

再由对称性，可知全部轨迹是四条线段：

$y=\pm 1\mp 2/\sqrt{3}$，$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$；

$x=\pm 1\mp 2/\sqrt{3}$，$-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}$。

从这个例子还可以看出，由于命题本身的对称性决定了答案的对称性，根据这一点，我们可以判断解答是否失误。

某些平几命题，其条件与结论的联系很不明显，如果我们对命题图形的一部分或整个图形施行"对称变换"，就能使条件与结论的联系明朗化，从而使命题的解决易于反掌。

例 3 设 PQ 为⊙O 的一条弦，M 为 PQ 的中点，过 M 任作弦 AB、CD，连结 AD、BC 分别交弦 PQ 于 E、F，求证 ME = MF.

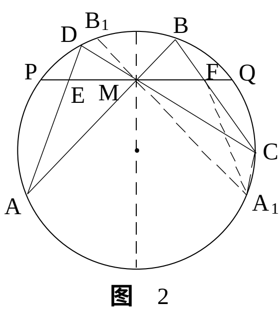


图 2

分析 ME、MF 是圆内两线段，很难直接证明它们相等，考虑到圆关于过 M 的直径对称，如果将弦 AB 依这条直径作"对称变换"至 A_1B_1，则证明 ME = MF 的问题转化为证明圆周角 $\angle A=\angle MA_1F$.

证明 作弦 AB 关于过点 M 的直径的对称弦 A_1B_1，由圆的对称性可知点 Q、A_1、B_1 分别为点 P、A、B 关于这条直径的对称点。于是，$AM=A_1M$，$\angle AME=\angle A_1MF$，$\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{B_1P}$. 连结 A_1C、A_1F，有 $\angle MFB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{QC})=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{QB}+QC)\frac{1}{2}\overset{\frown}{B_1C}=\angle MA_1C$，，M、$A_1$、C、F 四点共圆。从而 $\angle MA_1F=\angle MCB=\angle EAM$. 因此，$\triangle AME\cong\triangle A_1MF$，故 ME = MF.

找题·(能力型)解题教学指导书系·数学卷

例4 在△ABC中,点D是AB边的中点,E和F分别是边AC、BC上的点,证明△DEF的面积不超过△ADE与△BDF的面积之和。

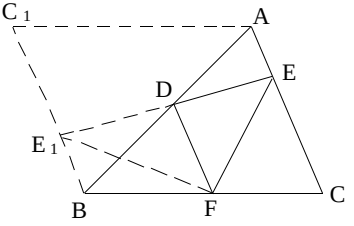


图 3

分析 问题的关键是将△ADE与△BDF这样两块拼在一起后与△DEF进行比较。

考虑到平行四边形对角线的交点是它们的对称中心,故将△ABC绕点D作"对称变换"至$\triangle BAC_1$,这时,A、B、C、E的对称点分别是B、A、C_1、E_1,容易知道:

$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BDE_1}$,$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DE_1F}$.

因为BE_1DF是凸四边形,

,$S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BDF}=S_{BE_1DF}>S_{\triangle DE_1F}=S_{\triangle DEF}$.

平面解析几何中,讨论曲线的对称性常用到下面的定理:

定理1 点(x,y)关于定点(a,b)的对称点,是$(2a-x,2b-y)$;曲$F(x,y)=0$关于定点(a,b)的对称曲线是$F(2a-x,2b-y)=0$.

定理2 点(x,y)关于直线$Ax+By+C=0$的对称点是$\left(x-\frac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},y-\frac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)$;曲线$F(x,y)=0$关于直线$Ax+By+C=0$的对称曲线是$F\left(x-\frac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},\right.$

$$\left.y-\frac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)=0.$$

这两条定理不难由对称的概念获得证明。将这两条定理特殊化便得下面的结论:

	$P(x,y)$	曲线$F(x,y)=0$
关于x轴的对称点(曲线)	$P'(x,-y)$	$F(x,-y)=0$
关于y轴的对称点(曲线)	$P'(-x,y)$	$F(-x,y)=0$
关于直线$x=m$的对称点(曲线)	$P'(2m-x,y)$	$F(2m-x,y)=0$
关于直线$y=n$的对称点(曲线)	$P'(x,2n-y)$	$F(x,2n-y)=0$
关于直线$y=x$的对称点(曲线)	$P'(y,x)$	$F(y,x)=0$
关于直线$y=-x$的对称点(曲线)	$P'(-y,-x)$	$F(-y,-x)=0$
关于点$(0,0)$的对称点(曲线)	$P(-x,-y)$	$F(-x,-y)=0$

兹对上述定理和结论的应用举例如下：

例5 求曲线 $y=x^2+2x-3$ 关于点 $(-1,-2)$ 的对称曲线的方程。

解 在题设方程中，用 $2\times(-1)-x$ 代 x，$2\times(-2)-y$ 代 y 代入，得 $-4-y=(-2-x)^2+2(-2-x)-3$，

即 $y=-x^2-2x-1$ 为所求曲线的方程。

例6 当 k 为何值时，曲线 $y^2-x+2y=0$ 上存在着两个对称于直线 $y=kx$ 的点。

解 显然，曲线 $y^2-x+2y=0$ 上不存在关于 x 轴对称的两点，因此 $k\neq0$。否则，曲线上存在两点 (a,b) 和 $(a,-b)$，其中 $b\neq0$。但这时有 $b^2-a+2b=0$ 和 $(-b)^2-a-2b=0$，相加得 $b=0$，矛盾。

设 $P(x,y)$、$P'\left(x-\frac{2k(kx-y)}{k^2+1},y+\frac{2(kx-y)}{k^2+1}\right)$ 是曲线上关于直线 $y=kx$ 对称的两点。则

$$\begin{cases} y^2-x+2y=0 & ① \\ \left[y+\frac{2(kx-y)}{k^2+1}\right]^2-\left[x-\frac{2k(kx-y)}{k^2+1}\right] & \\ \quad +2\left[y+\frac{2(2k-y)}{k^2+1}\right]=0 & ② \end{cases}$$

由②得：

$y^2+\frac{4y(kx-y)}{k^2+1}+\frac{4(kx-y)^2}{(k^2+1)^2}-x+\frac{2k(kx-y)}{k^2+1}+2y+\frac{4(kx-y)}{k^2+1}=0$. 将①代入后，同乘以 $(k^2+1)^2$. 又考虑到 P 和 P' 是两个不同的点（即它们不在 $y=kx$ 上），因此约去 $kx-y$，得：

$2(k^2+1)y+2(kx-y)+k(k^2+1)+2(k^2+1)=0$ 再将 $x=y^2+2y$ 代入，依 y 集项得：

$2ky^2+(2k^2+4y)y+(k+2)(k^2+1)=0$

此方程应有两个不同实根，

, $[2k(k+2)^2]-42k(k+2)(k^2+1)>0$，

即 $k(k+2)(k^2-2k+2)<0$，而 $k^2-2k+2>0$，

, $k(k+2)<0$，故得 $-2<k<0$.

例7 若曲线 $y=f(x)\ (x\in R)$ 关于直线 $x=m$ 对称，且关于点 (n,y_0) 对称，求证函数 $y=f(x)$ 是以 $4(n-m)$ 为周期的周期函数 $(n>m)$.

证明 曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=m$ 对称，且关于点 (n,y_0) 对称，故对其定义域内的一切 x 都有：

$f(x)=f(2m-x)$，$2y_0-f(x)=f(2n-x)$，

$$,\ f[x+4(n-m)]=f[2n-(4m-2n-x)]$$
$$=2y_0-f[4m-2n-x]$$
$$=2y_0-f[2m-(2n-2m+x)]$$
$$=2y_0-f(2n-2m+x)$$
$$=2y_0-f[2n-(2m-x)]$$
$$=2y_0-[2y_0-f(2m-x)]$$
$$=f(2m-x)=f(x)\quad(x\in R)$$

因此 $y=f(x)$ 是以 $4(n-m)$ 为周期的周期函数。

□中学数学中的“对称”

对称的美在日常生活中比比皆是，“它”给人一种平稳、舒适的感觉，如美丽的蝴蝶是成轴对称的，水滴池中激起一圈一圈的涟漪是成中心对称的，……，人们正是利用“对称”给人带来的这种视觉愉快，造起了各式各样的对称的建筑，设计多种多样的对称设备，为人类造福。

数学中的“对称”不仅给人们带来美的享受，激发起学习数学的兴趣，更重要的它还为解决数学问题带来了方便，有时甚至是极大的方便。杭州学军中学贺元泰老师分析了中学数学中的对称：

1.“对称”在代数中

代数中有“对称数集”，“对称多项式”，偶函数的图象关于 x 轴对称，奇函数的图象关于原点对称，二次函数图象关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称，函数及其反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称等等。

对称多项式是指：如果 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ 在将任意两个变元（量）交换位置后，所得结果仍与原式相同（即所得多项式与原式恒等）的多项式，简称对称式。

例 1　计算 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

分析如果依次相乘，那么先是出现十八项，后面还要合并同类项，显然是麻烦的，我们仔细观察会发现：$(x+y+z)$ 是一次齐次对称式。由于对称式具有“任意两个变元交换位置后，结果仍然不变”的特性，因此上述两式的积必然也是对称式，再考虑到积是三次的，因此积是三次齐次对称式。

解　设 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yx-zx)=a\cdot(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2z+z^2y)+c\cdot xyz$

令 $x=1, y=z=0$，求得 $a=1$

令 $x=y=1, z=0$ 及 $a=1$，求得 $b=0$

令 $x=y=z=1$ 及 $a=1, b=0$，

求得 $c=-3$

因此 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

此解法运用对称性设出结果，再运用恒等式关求出待定系数 a，b，c，就显得方便些了。

例 2 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{1+x^2}-x$

(1) 求它的定义域；

(2) 判断它的奇偶性，并进行证明；

(3) 证明在其定义域内是增函数。

解 (1) 由 $\sqrt{1+x^2}-x>0$，得

$$\sqrt{1+x^2}>x \qquad (一)$$

$\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|$，又 $|x|\geqslant x$

，(一) 式必成立，因此函数的定义域为一切实数。

(2) $f(-x)=\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{1+x^2}-x)$

$=-f(x)$

， $f(x)$ 是奇函数

(3) 由于 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点成中心对称，因此如果证得 $x\geqslant 0$ 时，此函数是增函数，那么利用对称性，就可以得 $x<0$ 时也是增函数了。

设 $x_1\geqslant 0, x_2>0, x_1<x_2$

由 $f(x_2)-f(x_1)=\log_{\frac{1}{3}})(\sqrt{1+x_2{}^2}-x_2)$

$-\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{1+x_1{}^2})-x_1)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt{1+x_1{}^2}+x_1}{\sqrt{1+x_2{}^2}+x_2}$

$x_1\geqslant 0, x_2>0, x_2>x_1$

$x_2{}^2>x_1{}^2$，$\sqrt{1+x_2{}^2}>\sqrt{1+x_1{}^2}$

因此 $\dfrac{\sqrt{1+x_1{}^2}+x_1}{\sqrt{1+x_2{}^2}+x_2}<1$，故 $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt{1+x_1{}^2}+x_1}{\sqrt{1+x_2{}^2}+x_2}>0.$

, $f(x_2)>f(x_1)$,因此 $f(x)$ 在其定义域内是增函数。

在(3)的证明中,我们用了对称性而使证明大为简化。

2.“对称”在平面几何中

平面几何中不少图形本身就是对称的,如线段与它的垂直平分线互为对称轴;角的平分线是这个角的对称轴,矩形有两条对称轴,对角线的交点是矩角的对称中心,圆既是直径的轴对称图形又是圆心的中心对称图形等等。

例3 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle BAC=80°$,又 O 为三角形内一点,且 $\angle OBC=10°$,$\angle OCB=20°$。

求 $\angle OAC$

解作 O 点关于 AC 的对称点 P,连结 PA,PB,PC(如图1)依对称性有 $OC=PC$ 且 $\angle OCP=2\angle OCA$

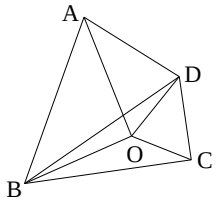


图 1

又 $\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)$

$=50°$,$\angle OCB=20°$,, $\angle OCA$

$=50°-20°=30°$,$\angle OCP=60°$

因此 $\triangle OCP$ 是等边三角形,

, $\angle COP=60°$

又 $\angle BOP=360°-\angle BOC-\angle COP=150°$

, $\angle BOP=\angle BOC=150°$

故 $\triangle BOP\cong\triangle BOC$,有 $\angle CBP=2\angle OBC$

$=20°$,$\angle BPC=\angle BPO+\angle OPC=80°$

$=\angle BAC$

因此 A、B、C、P 四点共圆。

故而 $\angle OAC=\angle CAP=\angle CBP=20°$

3.“对称”在平面三角中

在平面三角中,有些等式和不等式也是通过对称式表达出来的,如在 $\triangle ABC$ 中有,$tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$,$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

等等,因此也可以利用对称性来解决一些三角问题。

例4 在锐角 $\triangle ABC$ 中,求证

$$tg^nA+tg^nB+tg^nC>3+\frac{3}{2}n$$

$n\in N$,$n\geqslant 2$)

分析 由于求证式的左边是关于 tgA,tgB,tgC 的对称式,因此容易联想到能

否利用对称式 $tgA+tgB+tgC=tgAtgBtgC$ 来证明。

证明 在△ABC 中,有

$tgA+tgB+tgC=tgAtgBtgC$

A,B,C 均为锐角,, $tgA>0$,$tgB>0$,

$tgC>0$

因此 $tgA+tgB+tgC\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$

则 $tgAtgBtgC\geqslant 3\cdot(tgAtgBtgC)^{\frac{1}{3}}$

得 $tgAtgBtgC\geqslant 3\sqrt{3}$

又 $tg^nA+tg^nB+tg^nC\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^n}$

$=3(\sqrt{3})^n$

由 $\sqrt{3}>11.7>1+\frac{1}{2}$,利用二项式定理得

$(\sqrt{3})^n>(1+\frac{1}{2})^n=1+\frac{1}{2}n+\cdots\cdots>1+\frac{1}{2}n$

$tg^nA+tg^nB+tg^nC>3(1+\frac{1}{2}n)=3+\frac{3}{2}n.$

例 5 已知$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1$

求证$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}.$

分析由于在求证等式中无常数项,因此条件等式中的"1",应该用"$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$"来代换,再考虑到求证等式中 α,θ 是对称出现,因此这个"1"还要用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ 再代换一次,方能达到目的。

证明 由已知得

$$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$

$$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{-\sin^3\theta}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha$$

即 $$\frac{\cos^3\theta-\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\sin^3\theta}{\sin\alpha}\qquad(一)$$

又$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

即$$\frac{\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta)}{\sin\theta}\qquad(二)$$

(一)÷(二)得$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}$$

即得$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$.

4.“对称”在解析几何中

在解析几何中,抛物线是轴对称图形,圆、椭圆、双曲线既是轴对称又是中心对称图形,充分利用对称性,将给问题的解决带来很大的方便。

例7 已知抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形有两边与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,求证:三角形的第三边也与 $x^2=2qy$ 相切

证明设 $\triangle A_1A_2A_3$ 是抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形,且 $\triangle A_1A_2A_3$ 的边与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,再设切点 A_i 的坐标为 (x_i,y_i) $(i=1,2,3)$

由两点式得直线方程:

$$A_1A_2:\ y=\frac{2p}{y_1+y_2}x+\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}$$

同理 $$A_2A_3:\ y=\frac{2p}{y_2+y_3}x+\frac{y_2y_3}{y_2+y_3}$$

$$A_3A_1:\ y=\frac{2p}{y_1+y_2}x+\frac{y_1y_3}{y_1+y_2}$$

由 A_1A_2 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,得判别式

$$\Delta_1=2p^2q+y_1y_2(y_1+y_2)=0 \qquad (一)$$

同理 $$\Delta_2=2p^2q+y_2y_3(y_2+y_3)=0 \qquad (二)$$

欲证 A_3A_1 与 $x^2=2qy$ 相切,只须证明

$$\Delta_3=2p^2q+y_1y_3(y_1+y_3)=0$$

而由(一),(二)得

$$y_1y_2(y_1+y_2)=y_2y_3(y_2+y_3)$$

$$y_2(y_1-y_3)(y_1+y_2+y_3)=0$$

$$y_2\neq0,y_1\neq y_3\ ,\ y_1+y_2+y_3=0$$

$$y_3+y_1=-y_2,y_3=-(y_1+y_2)$$

$$\Delta_3=2p^2q+[-(y_1+y_2)]\cdot y_1\cdot(-y_2)$$

$$=2p^2q+y_1y_2(y_1+y_2)=\Delta_1=0$$

因此 A_3A_1 与抛物线 $x^2=2qy$ 也相切。

此例是1982年的高考数学(理工类)第八题,极大多数考生都因方法不对而陷入繁杂的计算而无法完成。本解法由于利用了轮换对称技巧,而使证明显得比较轻巧。

□解题中的“对称美”意识

从古希腊的时代起,对称形就被数学家看成是数学美的一个基本内容,对它的探究在一定程度上推动了建筑艺术、天体运动学和社会的发展。今天在中学数学教学中,如能唤起学生注重对称美的潜意识,同样有利于发展思维能力、开拓创新精神、扩大视野。汪祖亨老师就对称概念应用于某些具有对称结构的数式、图形及证题、解题思路等问题的分析解决过程作了探索。

1. 直接利用数式或图形的对称性解题

某些数学命题的条件或结论所涉及的数式呈现对称的结构,某些图形问题中的图形位置、关系等亦显示出各种对称的意义。这时如能充分利用命题本身或图形的对称性,常能帮我们发现解题思路或简化解题过程。

例1 求$(x+y+z)^3$的展开式。

解 因$(x+y+z)^3$是三元三次对称多项式,其展开式为三次对称式,故

$(x+y+z)^3=A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+Cxyz.$

令 $x=1,y=z=0$,可得 $A=1$;

令 $x=y=1,z=0$,可得 $8=2A+2B$,

即 $B=3$;

令 $x=y=z=1$,可得 $27=3A+6B+C$,

即 $C=6.$

故$(x+y+z)^3$的展开式为

$x^3+y^3+z^3+3(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+6xyz.$

例2 已知 a、b、c 为三角形三边长,求证 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$

思考 求证式显 a、b、c 的对称结构,宜将 3abc 均分给左边三项,用比较法证明。

证明:
$$\begin{aligned}&a^2(b+c-a)-abc\\&=a^2b-abc+a^2(c-a)\\&=ab(a-c)+a^2(c-a)\\&=a(a-b)(c-a),\end{aligned}$$

举一反三,知另二项为 $b(b-c)(a-b)$,$c(c-a)(b-c)$,不妨假定 $a\geqslant b\geqslant c$,则

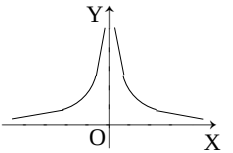
左 - 右 $= a(a-b)(c-a)+b(b-c)(a-b)$
$+c(c-a)(b-c)$
$\leqslant a(a-b)(c-a)+a(b-c)(a-b)$
$+c(c-a)(b-c)$
$=-a(a-b)^2+c(c-a)(b-c)\leqslant 0.$

因此,原命题获证。

例3 作出函数 $y=3^{\log_9 x^{-2}}$ 的大致图象。

解 先研究函数的对称性,因 $(-x)^{-2}=x^{-2}$,知为偶函数,其图象关于 y 轴对称。

再研究值域,知 $y>0$。



化简 $y=3^{\log_9 x^{-2}}$,

得 $y=3^{\log_3 x^{-1}}$,

$y=1/x.$ ①

据值域舍去①的第三象限部分,据对称性应补上第二象限的部分,得如上图的图象。

例4 n 为正整数,依次以(n,0)、(0,n)、(-n,0)、(0,-n)为顶点的正方形中(包括边界)有多少个整点?

解 以 a_n 表示正方形中的整点个数。

当 $n=1$ 时,整点为(0,0)、(1,0)、(0,1)、(-1,0)、(0,-1),共 5 个,故 $a_1=5$。

当 n 增加到 $n+1$,在第一象限及 x 轴的正半轴上将增加(1,n)、(2,n-1)、…、(n+1,0)这 $n+1$ 个整点,由对称性可知共增加 $4(n+1)$ 个整点,

即 $a_{n+1}=a_n+4(n+1).$ ①

由①及 $a_1=5$,有

$a_n=a_{n-1}+4n,$

$a_{n-1}=a_{n-2}+4(n-2),$

……

$a_2=a_1+4\cdot 2.$

各式相加,整理得 $a_n=2n^2+2n+1.$

例5 已知函数 f(x)的图象关于 y 轴对称,f(x)在 $x>0$ 时,严格单调,且有 $f(\sin^2 x)=f(-2\sin x\cos x-3\cos^2 x)$,求 x 的值。

解 由对称性,知函数 f(x)为偶函数,

有 $\sin^2 x=-2\sin x\cos x-3\cos^2 x,$ ①

或 $\sin^2 x=2\sin x\cos x+3\cos^2 x.$ ②

①式可化成 $\mathrm{tg}^2 x+2\mathrm{tg}x+3=0$,但此方程无实数解。

②式可化成 $tg^2x - 2tgx - 3 = 0$，

（ $\cos x \neq 0$）。

即 $tgx = -1$，或 $tgx = 3$.

，$x = k\pi - \frac{1}{4}\pi$，

或 $x = k\pi + \text{arc } tg3 (k \in Z)$.

例6 求通过点(0,2)、(-2,0)、(2,-8)且关于原点对称的圆锥曲线的方程。

解 设所求的曲线方程为

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ①$$

因曲线关于原点对犯法，知亦过(0,-2)、(2,0)，将(0,2)、(0,-2)、(-2,0)、(2,0)分别代入①，得

$$\begin{cases} 4C + 2E + F = 0, & ② \\ 4C - 2E + F = 0, & ③ \\ 4 - 2D + F = 0, & ④ \\ 4 + 2D + F = 0, & ⑤ \end{cases}$$

由②、③，得 $E = 0, C = \frac{1}{4}F$.

由④、⑤，得 $D = 0, F = -4$，于是 $C = 1$.

这样方程①成 $x^2 + Bxy + y^2 - 4 = 0$.

将(2,-8)代入，即得 $B = 4$，

故所求圆锥曲线的方程为

$$x^2 + 4xy + y^2 - 4 = 0.$$

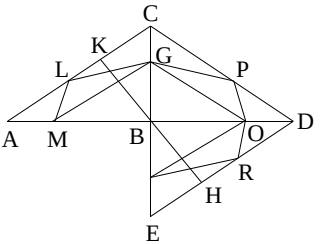
此外诸如对称式的因式分解、对称方程(组)、对称不等式、对犯法函数、对称图形问题等都可直接利用隐含的对称性来获得简捷的解法。

2. 发掘数式或图形中潜在对称性解题

有些数式或图形问题的对称性并不是那么直观(甚至需人为地添加来构成)，这时如能围绕对称美展开联想性思维，亦常能在纷繁的困惑中获得简捷的突破。

例7 证明直角三角形中任何一内接三角形的周长的一半大于斜边上的高。

证明 如图，在 Rt△ABC 中△LMG 为内接三角形。将△ACB 作关于 BC 的对称变换，得 Rt△BCD，再将△ACB 作关于 C 点的对称变换，得 Rt△DCE. 又 CD⊥AB。



∠BCK = ∠ECH，知 K、C、H 共线，且 HK⊥ED。

折线 LGQR = △LMG 的周长 > LR≥HK = 2CK。因此命题获证。

例 8 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 和直线 $y=2x+1$ 的交点是 A、B，另椭圆上有两点 C、D，且 ABCD 是平行四边形。求过 C、D 的直线方程。

思考：因椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 关于原点对称，故其内接平行四边形亦关于原点对称，（因为平行且相等的二弦距中心等远）即知直线 AB 与直线 CD 既互相平行又对称于原点。

解：承上，$k_{CD}=2$，因直线 AB 的截距为 1，据对称性，知直线 CD 的纵截距为 -1.

∴ 直线 CD 的方程为 $y=2x-1$.

例 9 已知 $\begin{cases}a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=c,①\\ a\csc^2\theta+b\sec^2\theta=d,②\end{cases}$ 消去 θ。

解：引入对称关系式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 与①联立，可得

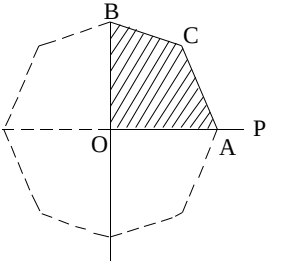
$$\sin^2\theta=\frac{c-b}{a-b},\quad \cos^2\theta=\frac{c-a}{b-a}。$$

即 $$\csc^2\theta=\frac{a-b}{c-b},\quad \sec^2\theta=\frac{b-a}{c-a}.$$

将它们代入②，整理得

$$a(a-b)(c-a)+b(a-b)(b-c)+d(b-c)(c-a)=0.$$

例 10 设有一直角 QOP，试在 OP 边上求一点 A，在 OQ 边上求一点 B，在直角内求一点 C，使 BC + CA 等于定长 l，且使四边形 ACBO 的面积最大。



思考：如图，若四边形 ACBO 恰达最大面积，将它按 x 轴、y 轴和原点对称地补成一个八边形，则此八边形亦有最大面积。据熟知命题“周长一定的凸 n 边形，以正 n 边形的面积为最大”，不难确定 A、C、B 的位置。（解略）

其实，在探求解（证）题思路时的分析法与综合法的并用；用换元法简化解题过程中的对称代换；证充要条件时的充分性与必要性的逆推等场合，我们都是自觉或不自觉地采用了对称美的原则来指导解题。一个优秀的数学教师须具备这种促使学生将‘被动的意识转化为主动的意识’的能力。

□对称地处理具有对称性的问题

数学中的对称,不单是指几何图形中的对称,代数表示式中,若各个字母互相替代,表示式不变,也称这个表示式关于这些字母是对称的。例如 $x+y+z$,$x^2+y^2+z^2$,$xy+yz+zx$,$x^3+y^3+z^3$ 等等,都是关于 x,y,z 的对称多项式。

一个问题如果在题设条件中具有对称性,则一般地在题断中也应该具有对称性,不仅如此,在解题过程中,也应该表现出对称性。对称地处理具有对称性的问题,是数学中的一个一般性原则。因此,对于具有对称性的问题,充分利用其对称性,往往可以帮助我们找到解题的方向。

对称性是数学美的重要表现之一。可见追求数学美也是数学发现的一个途径。数学园地处处开放着美丽的花朵,而且这片园地也正是按照美的追求开恳出来的。北京师大数学系王敬庚老师介绍分析了与对称多项式有关的几个例题:

例 1 设 x,y,z 均为实数,且 $x+y+z=xyz$,求证:$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

分析 本题题设和题断中的等式关于 x、y、z 都是对称的,因此在解题过程中要充分利用这种对称性。

将欲求证的等式左端通分,两端分母相等,因此只须证明两端的分子相等,即证

$$2x(1-y^2)(1-z^2)+2y(1-z^2)(1-x^2)+2z(1-x^2)(1-y^2)=8xyz.$$

我们从左往右证,将左端展开,再分组分解合并:

$$\begin{aligned}左&=2\{x-xy^2-xz^2+xy^2z^2+y-yz^2-\\&yx^2+yz^2x2+z-zx^2-zy^2+zx^2y^2\}\\&=2\{[(x+y+z)-[xy(x+y)+yz(y+z)\\&+zx(z+x)]+xyz(yz+zx+xy)\}\end{aligned}$$

考虑到题设 $x+y+z=xyz$,应用对称性,将中间方括号内的三个小括号都凑成 $(x+y+z)$,变形为 $[xy(x+y+z)+yz(y+z+x)+zx(z+x+y)-3xyz]$

$$=[(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz]$$

$=[xyz(xy+yz+zx)-3xyz]$.

于是得

左 $=2\{xyz-[xyz(xy+yz+zx)-3xyz]$

$+xyz(xy+yz+zx)\}=8xyz=$右.

上述证法中的“加一项,减一项”,“拼拼凑凑”是证明等式时常用的方法之一。怎样加减,怎样拼凑,在具有对称性的问题中,要注意应用和保持对称性。

例2 设 $x+y+z=0$,$xyz\neq 0$,试证

$$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+3=0$$

分析 注意到题设 $x+y+z=0$,因此若能把要证的等式左端化成具有因式$(x+y+z)$的形式,等式就得证了。

充分利用对称性,将左端前3项的每个括号内各加一项,都凑成$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$,而减去三项$\frac{x}{x}$,$\frac{y}{y}$,及$\frac{z}{z}$,恰好与式中原有的3相抵消。于是可以提出公因式$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$得

左 $=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{x}{x}-\frac{y}{y}-\frac{z}{z}+3$

$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)=0=$右.

例3 分解因式$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.

分析 若按通常的办法,先用乘法公式将式子展开,再设法分组,提取公因式,计算较繁,我们现在应用对称性来解。

用 $y=z$ 代入原式等于零,知原式有因式$(y-z)$.同理有因式$(z-x)$及$(x-y)$。因为原式是3次齐次对称多项式,而$(x-y)(y-z)(z-x)$亦为3次齐次对称多项式,于是可设$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=k(x-y)(y-z)(z-x)$,此处 κ 为一未知常数。由于两端相同项的系数应相等,因此通过比较两端相同项的系数,即可确定常数 κ 的值。例如 y^2z 项的系数,左端为 -3,右端为 $-\kappa$,得 $\kappa=3$。于是分解式为$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

上述解法中,通过分析得到对称多项式因式,然后设出含有未定系数的分解式,再应用待定系数法定出系数,这种方法是解具有对称性的多项式的因式分解问题时常用的方法之一。

例4 分解因式 $a^3+b^3+c^3-3abc$.

分析：用 $a+b=-c$ 代入原式等于零，知原式有因式 $a+b+c$. 原式为 3 次齐次对称多项式，而 $a+b+c$ 是 1 次齐次对称多项式，因此原式的另一个因式亦应为对称多项式，且应为 2 次齐次的，故可设为

$$m(a^2+b^2+c^2)+n(ab+bc+ca).$$

于是有 $a3+b3+c3-3abc=(a+b+c)[m(a^2+b^2+c^2)+n(ab+bc+ca)]$. (*) 等式两端相同项的系数应相等，例如比较 a^3 的系数得 $m=1$，比较 abc 的系数得 $n=-1$. 代入(*)即得所求的分解式。

例 5 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ (1)

求证 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}$ (2)

分析：由观察发现，只须 a,b,c 中有两个互为相反数，则等式(2)即成立。于是只须证明由条件(1)可得 a 与 b 或 b 也 c 或 c 与 a 互为相反数，亦即 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ (3)即可。

由条件(1)得

$$\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c},$$

即 $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$ (4)

于是问题转化为由(4)式求证(3)式。

易知 $(a+b)$，$(b+c)$，$(c+a)$ 皆为(4)式左端的因式，且(4)式左端是 3 次齐次对称多项式，而 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 亦为 3 次齐次对称多项式，故可设 $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=\kappa(a+b)(b+c)(c+a)$. 比较等式两端相同项的系数，例如 a^2b 的系数，得 $\kappa=1$. 于是由(4)式可得(3)式，因而(2)成立。

求解本题的过程，是一系列分析转化的过程。最初的一步，即观察出(2)成立的充分条件 a 与 b 互为相反数，需要一定的洞察力。再考虑到关于 a,b,c 的对称性，得到充分条件与 a 与 b 或 b 与 c 或 c 与 a 互为相反数，继而是用明确的数学式子(等式(3))表示上述充分条件。这样就把原问题变成一个易于求解的因式分解题或证明等式题。

例 6 已知 $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$

求证：x,y,z 中至少有一个是 1.

分析：欲证的结论等价于 $(x-1)(y-1)(z-1)=0$. 于是原题变为已知 $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求证 $(x-1)(y-1)(z-1)=0$. 而这是一道易于证明的常见题。

由上可见，求解本题的关键在于把用文字叙述的求证，用一个明确

的数学式子——一个等式表示出来,使证明变得易于着手。

找出本题与例5之间的联系是很有趣的,请读者思考。

例7 假设x,y,z都是实数,且 $x+y+z=a$ (1),$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}(a>0)$ (2),求证x,y,z都不能是负数,也都不能大于$\frac{2}{3}a$(北京市1957年中学数学竞赛题).

分析 欲证的结论等价于 $0\leqslant x,y,z\leqslant\frac{2}{3}a$. 由于在问题中x,y,z是平等的,因此只须证明 $0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}a$. 而这又等价于证明 $z\left(z-\frac{2}{3}a\right)\leqslant 0$ (3),这样,原问题就变成一个证明不等式的问题了。

由(1)得 $x+y=a-z$ (4)

由(2)得 $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}-z^2$ (5)

(4)^2-(5)得 $2xy=\frac{a^2}{2}-2az+2z^2$ (6)

再应用平均值不等式 $2xy\leqslant x^2+y^2$,代入(6)得

$$x^2+y^2\geqslant\frac{a^2}{2}-2az+2z^2 \quad (7)$$

比较(5)与(7)得 $\frac{a^2}{2}-z^2\geqslant\frac{a^2}{2}-2az+2z^2$

即 $3z^2-2az\leqslant 0$,$z\left(z-\frac{2}{3}a\right)\leqslant 0$.

这正是所要证明的。

(当然,本题也可赋予(4)及(5)几何意义:(4)看作直线,(5)看作圆,然后用解析几何方法来解,读者不妨一试。)

□对称变换及其应用

对称是几何作图和研究图象性质的重要方法。我们知道,在平面直角坐标系里,如果曲线上的点的坐标与方程 $f(x,y)=0$ 之间建立了一一对应关系,那么对曲线和方程的讨论便是一回事了。四川内江地区教师进修学院欧述芳老师在平面直角坐标系里,导出了关于点和直线对称变换公式,相应地得到有用的定理和推论,并举例说明了它们在

求与对称有关的曲线方程以及判别已知曲线是否是中心对称与轴对称图形等方面的应用。

1. **关于点的对称变换**

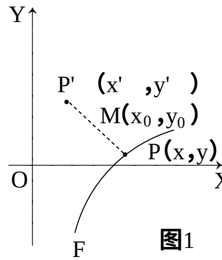


图1

定义 1　**将图象** F **上每一点** P(x,y) **作关于点** $M(x_0,y_0)$ **的对称点** P'(x',y')，**如图** 1。**则所有相应的对称点组成的点集** F' **叫做关于点** M **的对称图象，这种变换叫做关于点的对称变换。**

定理 1　**设点** P(x,y) **关于点** $M(x_0,y_0)$ **的对称点是** P'(x',y')，**则变换公式是**

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

证明： $x_0 = \frac{x + x'}{2}, y_0 = \frac{y + y'}{2}$，

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

推论　**设点** P(x,y) **关于原点对称的点是** P'(x',y')，**则变换公式是**

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad (\mathrm{I}_1)$$

根据定理 1 **及推论易得以下有用的结论：**

定理 1'　**已知曲线方程** f(x,y)=0，**则它关于点** $M(x_0,y_0)$ **对称曲线的方程是**

$$f(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0 \qquad (\mathrm{I}')$$

推论　**已知曲线方程** f(x,y)=0，**则它关于原点对称的曲线的方程是**

$$f(-x, -y) = 0 \qquad (\mathrm{I}_1')$$

例 1　**求曲线** $y=\sqrt{x}$ **关于点** M(0,2) **对称的曲线方程。**

解：由方程 $f(x,y) = y - \sqrt{x} = 0$，

根据公式(Ⅰ')，**关于点** M **对称曲线的方程是** f(-x,4-y)=0，**即**

$4 - y - \sqrt{-x} = 0 (x \leqslant 0)$

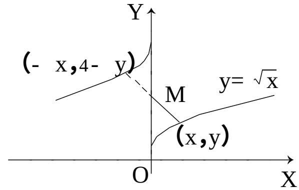


图2

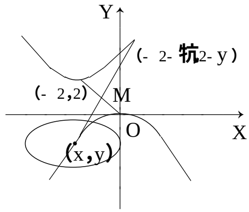


图3

例2　设椭圆方程为

$$\frac{(x-2t)^2}{9}+\frac{(y+t^2)^2}{4}=1$$

试求它的中心轨迹关于点 M(-1,1)**对称图形的轨迹方程,并指出它是什么曲线。**

解:设椭圆的中心坐标为(x,y),

则　$x=2t, y=-t^2$,**消去参数** t **得椭圆中心的轨迹方程:**

$f(x,y)=x^2+4y=0$,

由公式(Ⅰ'**)知,它关于点** M **对称的轨迹方程为** $f(-2-x,2-y)=0$,

即　$(-2-x)^2+4(2-y)=0$,

亦即　$(x+2)^2=4(y-2)$.

显然它是以(-x,2)**为顶点,**$x=-2$ **为轴的抛物线。**

定理1"　若方程 $f(x,y)=0$ **的图象关于点** $M(x_0,y_0)$ **对称,则**

$$f(2x_0-x,2y_0-y)\equiv f(x,y)\qquad(Ⅰ")$$

由定理1",上述结论是显然成立的。

例3　方程 $y-\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=0$ **的图象是否是中心对称图形?如果是,求出它的对称中心**

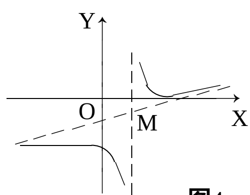


图4

解:原方程可变形为

$f(x,y)=4xy-4y-x^2+6x-9=0,(x\neq1)$

由定理1"。若方程 $f(x,y)=0$ **的图象关于点** M

(x_0,y_0)对称,那么 $f(2x_0-x,2y_0-y)\equiv f(x,y),(x\neq 1)$.

即 $4(2x_0-x)(2y_0-y)-4(2y_0-y)$

$-2(x_0-x)^2+6(2x_0-x)-9$

$=4xy-4y-x^2+6x-9,(x\neq 1)$

整理并比较系数得

$$\begin{cases}16x_0y_0-8y_0-4x_0^2+12x_0=0,\\4-8x_0=-4,\\4x_0-8y_0=12,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}x_0=1,\\y_0=-1.\end{cases}$$

所以原方程的图象是中心对称图形,其对称中心是点 $M(1,-1)$.

2. 关于直线的对称变换

定义2 如图5。将图象 F 上每一点 P 关于直线 l 作对称得到对应的点 P',则所有对应点组成的点集 F' 叫做关于直线 l 对称的图象,这种变换叫做关于直线 l 的对称变换。

定理2 设点 $P(x,y)$ 关于直线 $l:\ AX+BY+C=0$ 的对称点是 $P'(x',y')$,则变换公式是

$$\begin{cases}x'=-\dfrac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C)+x,\\y'=-\dfrac{2B}{A^2+B^2}(Ax+By+C)+y.\end{cases}\quad(\text{Ⅱ})$$

证明:设 $A、B\neq 0$,

则 $k_l=-\dfrac{A}{B}$,

$k_{PP'}=-\dfrac{B}{A}$,

直线 PP' 的方程为

$$Y-y=\frac{B}{A}(X-x),$$

于是 l 与 PP' 的交点坐标为

$$\left(\frac{B^2x-ABy-AC}{A^2+B^2},\frac{A^2y-ABx-BC}{A^2+B^2}\right)$$

利用中点坐标公式得

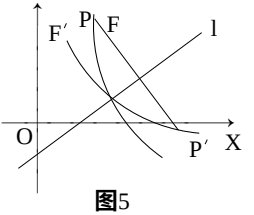


图5

$$\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=\dfrac{B^2x-ABy-AC}{A^2+B^2},\\ \dfrac{y+y'}{2}=\dfrac{A^2y-ABx-BC}{A^2+B^2}。\end{cases}$$

由此不难解得公式(Ⅱ),(当 $A^2+B^2\neq 0$ 公式(Ⅱ)亦成立)

由公式(Ⅱ)易得如下定理：

定理 2',已知曲线方程 $f(x,y)=0$,则它关于直线 $AX+BY+C=0$ 对称的曲线方程是

$$f\left(-\frac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C)+x,\ -\frac{2B}{A^2+B^2}(Ax+By+C)+y\right)=0\ (Ⅱ')$$

□数学对称法在中学代数中的应用

所谓数学对称法,就是指用数学的理论和方法来定量,从而精确地描述客观事物对称性的一种方法。数学中的对称问题比比皆是,我们若能合理利用数学对称法,则可以使解题简单明了,迅捷巧妙。

定义　多项式 $f(x,y,\cdots,z)$ 中的任意两个自变量对换后,仍是原多项式,则称它为关于 x、y、…、z 的对称多项式。

仿此,可定义对称方程、对称不等式(略)。

湖南邵东十二中曾仕君老师举数例说明了其应用。

1. 运用对称法证明不等式

例 1　设 $a>0,b>0,c>0$,求证 $a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

证明 :因不等式关于 a、b、c 对称,所以不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,则

$$\frac{a^ab^bc^c}{(abc)^{\frac{a-b-c}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\geqslant 1.$$

所以 $a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

说明 :此题利用 a、b、c 的对称性排定它们的大小顺序。但在非对称的情形下,此法不适。

例 2　已知 $0<a<4,0<b<4,0<c<4$,

求证 $abc(4-a)(4-b)(4-c)\leqslant 4^3$.

证明：因结论是关于 a、b、c 对称的不等式，因此只需证明 $a(4-a)\leqslant 4$ 即可。

因 $0<a<4$，所以 $4-a>0$，则有

$2\sqrt{a(4-a)}\leqslant a+4-a=4$，

即 $a(4-a)\leqslant 4$，

根据对称性可得：

$b(4-b)\leqslant 4$，$c(4-c)\leqslant 4$，

三式相乘即得结论。

说明：有时根据所需证的不等式的特点，只需证其中某一部分不等式成立，其他部分可由对称性轮换得出，这样便简化了过程。

例 3 （瑞士数学竞赛试题）设 a、b、c 为正数，求证 $abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

证明：由对称性可设 $a\geqslant b\geqslant c>0$.

当 $a\geqslant b+c$ 时，不等式右边 $\leqslant 0$，结论显然成立。

当 $a<b+c$ 时，则

$$a=\frac{a+b-c}{2}+\frac{a+c-b}{2}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}}$$

$=\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}$，由对称性得

$b\geqslant\sqrt{(b+a-c)(b+c-a)}$，

$c\geqslant\sqrt{(c+a-b)(c+b-a)}$，三式相乘得

$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

例 4 已知 $a、b\in R^+$，且 $a+b=1$，求证 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$.

证明：由对称性，不妨设 $a=\frac{1}{2}+t$，$b=\frac{1}{2}-t$。则

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1+2t}{2}+\frac{2}{1+2t}\right)\left(\frac{1-2t}{2}+\frac{2}{1-2t}\right)$$

$=\dfrac{t^4+\frac{3}{2}t^2+\frac{25}{4}}{\frac{1}{4}-t^2}\geqslant\frac{25}{4}$. 结论得证。

说明 根据 $a+b=1$ 的对称性，常作变换：$a=\frac{1}{2}+t$，$b=\frac{1}{2}-t$.

2. 运用对称法求函数的最值

例 5 当 $x+y+z=1$ 时，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值。

解 由对称性,可设 $x=\frac{1}{3}+m, y=\frac{1}{3}+n, z=\frac{1}{3}-m-n$,则

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}m+m^2+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}n+n^2+\frac{1}{9}+m^2+n^2-\frac{2}{3}m-\frac{2}{3}n+2mn$$

$$=\frac{1}{3}+2m^2+2n^2+2mn=\frac{1}{3}+m^2+n^2+(m+n)^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

当且仅当 $m=n=0$,即 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时等号成立。

所以 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$.

说明 根据 $x+y+z=1$ 的对称性,也常作以下变换:$x+y=\frac{1}{2}+t, z=\frac{1}{2}-t$. 但不能设 $x=\frac{1}{3}+t, y=\frac{1}{3}+2t, z=\frac{1}{3}-3t$(为什么?).

3. 运用对称法分解因式

例 6 将 $(a+b)^6-a^5-b^5$ 分解因式。

解 原式是关于 a、b 的五次奇次对称式,当 $a=0$ 时原式为零,故含有因式 a,据对称性可知原式一定含有因式 b. 又当 $a=-b$ 时,原式为零,所以含有因式 $a+b$,从而原式含有因式 $ab(a+b)$. 另一因式必为 a、b 的二次奇次对称式,所以说原式 $=ab(a+b)[m(a^2+b^2)+nab]$,通过比较系数或设值代入计算可得:$m=n=5$,故

原式 $=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

说明 对称多项式的和、差、积、商仍为对称多项式,若找到了原对称式的一个因式,可通过轮换得到其它一些因式,最后要找的因式必定还是对称式,再用待定系数法求解。

4. 运用对称法解方程(或方程组)

例 7 (加拿大数学竞赛试题)求方程 $w!=x!+y!+z!$ 的所有正整数解。

解 根据对称性,设 $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z$,显然有 $w\geqslant z+1$,所以有 $(z+1)!\leqslant w!\leqslant(3z)!$,所以 $z+1\leqslant 3$,即 $z\leqslant 2$.

通过观察和简单的计算,不难得出原方程的唯一解:$x=y=z=2, w=3$.

例 8 (美国第一届数学邀请赛试题)设两复数 x 和 y 的平方和为 7,它们的立方和为 10,$x+y$ 能取到的最大值是多少?

解 由题意可得关于 x、y 对称的方程组:

$$\begin{cases}x^2+y^2=7 & ①\\ x^3+y^3=10 & ②\end{cases}$$

作变换:$x+y=u, xy=v$,则由①得 $u^2-2v=7$,

所以 $v=\frac{u^2-7}{2}$ ③

由②得 $u^3-3uv=10$ ④

将③代入④并化简得 $u^3-21u+20=0$,则

$(u-1)(u+5)(u-4)=0$,故 $u1=1$,$u_2=-5$,$u_3=4$,所以 u 的最大值为 4,即 $x+y$ 的最大值为 4。

说明 解关于 x、y 的对称方程(或方程组),常常作以下变换:(i) $x+y=u$,$xy=v$;(ii) $x+y=u$,$x^2+y^2=v$;(iii) $x+y=u$,$(x-y)^2=v$;(iv) $x^2+y^2=u$,$xy=v$;(v) $x^2+y^2=u$,$(x-y)^2=v$. 要根据方程(或方程组)的特点灵活地选用变换。

□对称性的解题功能

在数学教育中重视数学美的教育是素质教育的要求。对称反映了数学的形式美,美的形式反应了美的内涵。因此,巧妙地利用数学问题中的对称性,有助于找到简洁优美的解法,也利于学生思维水平的提高。云南文山师专杨爱民老师介绍有:

1. 分解因式

例 1 将 $(ab-1)^2+(a+b-2)(a+b-2ab)$ 分解因式。

解 原式是一个对称式,令 $ab=x$,$a+b=y$,则

原式 $=(x-1)^2+(y-2)(y-2x)$

$=x^2-2(y-1)x+(y-1)^2$

$=[x-(y-1)]^2=[ab-(a+b)+1]^2$

$=[(a-1)(b-1)]^2=(a-1)^2(b-1)^2$

2. 求极值

例 2 已知两数 x 和 y 的平方和为 7,它们的立方和为 10,$x+y$ 能取到的最大实数值是多少?

解 依题意得

$$\begin{cases}x^2+y^2=7,\\ x^3+y^3=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=7,\\ (x+y)^3-3xy(x+y)=10.\end{cases}$$

作对称变换,令 $P=x+y$,$Q=xy$

则 $\begin{cases}P^2-2Q=7,\\ P^3-3PQ=10.\end{cases}$

$\Rightarrow P^3-21P+20=0$,

$\Rightarrow (P-1)(P-4)(P+5)=0.$

, $(x+y)_{max}=P_{max}=4.$

3. 解方程

例3 解方程组

$$\begin{cases} x^2y^2+x^2+y^2-9xy-6=0, \\ x+y=6. \end{cases}$$

解:令 $m=x+y, n=xy$. 则原方程组化为

$$\begin{cases} n^2+m^2-11n-6=0, \\ m=6. \end{cases}$$

则 $n^2-11n+30=0$. 解得 $n_1=5, n_2=6$ 从而原方程组为

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5. \end{cases} \text{或} \begin{cases} x+y=6, \\ xy=6. \end{cases}$$

原方程的解为

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=5, \end{cases} \begin{cases} x_2=5, \\ y_2=1, \end{cases} \begin{cases} x_3=3-\sqrt{3}, \\ y_3=3+\sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} x_4=3+\sqrt{3}, \\ y_4=3-\sqrt{3}. \end{cases}$$

4. 求值问题

例4 已知 α,β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实根,求 $\alpha^4+3\beta$ 的值。

解:设 $m=\alpha^4+3\beta$,则 m 的对称式为 $n=\beta^4+3\alpha$ 由根与系数的关系,$\alpha+\beta=1$,$\alpha\beta=-1$

则 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3, \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=4$

$m+n=\alpha^4+\beta^4+3\alpha+3\beta=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2+3(\alpha+\beta)=10$

$m\cdot n=\alpha^4\beta^4+3\alpha^5+3\beta^5+9\alpha\beta=(\alpha\beta)^4+3[(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)]+9\alpha\beta=25$,于是可得 $m=n=5$,即 $\alpha^4+3\beta=5$.

5. 证明不等式

例5 设 a、b、$c\in R^+$ 证明

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等式成立。

证:令 $b+c=x$、$c+a=y$、$a+b=z$. 则 x、y、z 均为正数。

$a=\frac{y+z-x}{2}, a=\frac{x+z-y}{2}, a=\frac{x+y-z}{2}$,原不等式左边 $=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-3\right]\geqslant 3/2$$

显然 a = b = c 时等号成立。

□对称在解题中的应用(一)

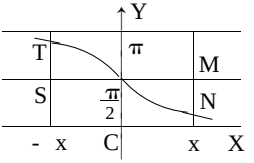
在中学数学中对称性是一个重要概念,正确应用对称性解题往往能收到事半功倍的效果。近几年来高考中应用对称思想解的题较多。对称思想不仅表现在图形的对称性,还有有关知识的对称性,题设呈现的对称性等等,浙江长兴中学王耀采老师举例如下:

1. 应用图形的对称性

(1)应用互为反函数图象关于直线 y = x 对称

例 1 求证:arcctg(- x) = π - arcctgx.

分析 根据互为反函数图象关于直线 y = x 对称,可作出 y = arcctgx 的图象,由图可知,图象关于(0,$\frac{\pi}{2}$)点成中心对称,分别过(x,0)与(- x,0)作 y 轴的



平行线,交直线 y = $\frac{\pi}{2}$与 y = arcctgx 图象于 S、M、T、N,则 | MN | = $\frac{\pi}{2}$ - arcctgx, | ST | = arcctg(- x) - $\frac{\pi}{2}$,由于 T、N 在图象上,且关于(0,$\frac{\pi}{2}$)对称,故 | MN | = | ST |,即:$\frac{\pi}{2}$ - arcctgx = arcctg(- x) - $\frac{\pi}{2}$,得:arcctg(- x) = π - arcctgx

注:应用对称性及图形推证,直观形象、不仅能加深知识间的有机联系、而且对内在规律有更深的理解。

例 2 解不等式:$\sqrt{\frac{3x-1}{2}} > \frac{2x^2+1}{3}$.

分析:此题若按常规解计算较繁,若令:

$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2}}$, $g(x) = \frac{2x^2+1}{3}$,由图象法可知,满足 f(x) > g(x) 的区间即为所求不等式的解,而其中 $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2}}$ $(x \geq \frac{1}{3})$, $f(x) = g^{-1}(x)$,由互为反函数可见,f(x) > g(x) 与 f(x) > x 同解(*),解(*)得:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{3x-1}{2} > x^2, \\ x \geq \frac{1}{3}; \end{cases}$$

或$\begin{cases} x<0, \\ \frac{3x-1}{2}>0. \end{cases}$所以解为$\frac{1}{2}<x<1$.

(2)利用函数图象的对称性

例3 设$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$,求和式$f(\frac{1}{1001})+f(\frac{2}{1001})\cdots+f(\frac{1000}{1001})$之值。

分析 若$f(x)+f(2m-x)=2n(*)$,则$f(x)$的图象关于点(m,n)对称,由$\frac{1}{1001}+\frac{1000}{1001}=\frac{2}{1001}+\frac{999}{1001}=\cdots=1$,且$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=1$,即$f(x)+f(1-x)=1$与$(*)$比较得,$f(x)$关于$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$点中心对称,因此$f(\frac{1}{1001})+f(\frac{2}{1001})+\cdots+f(\frac{1000}{1001})=500$.

例4 函数$f(x)$对一切实数x,满足$f(x-3)=f(4-x)$,若方程$f(x)=0$恰有六个不同的实数根,求这六个根的和。

解 由题意函数$f(x)$有一对称轴$\frac{-3+4}{2}=x$即$x=\frac{1}{2}$,由几何意义,这六个根成三对,每一对的和为$2\times\frac{1}{2}=1$,因此六根之和为3。

2. 利用数列的对称性质解

例5 在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_1-a_4-a_3-a_{12}+a_{15}=2$,求$a_3+a_{13}$的值。

分析 由等差数列的对称性质:下标和相同的两项之和相等,所以,$a_1+a_{15}=a_4+a_{12}$,由已知:$(a_1+a_{15})-(a_4+a_{12})-a_8=2$

所以,$a_8=-2$,故$a_3+a_{13}=2a_8=-4$.

对称性有时是隐含条件,应加以挖掘、显示、或稍加变形即可应用。

例6 $nC_n^0+2nC_n^{n-1}+3nC_n^2+\cdots(n^2+n)C_n^n$值。

分析 令所求值为S,将它倒写得:

$S=(n^2+n)C_n^n+n^2C_n^{n-1}+\cdots+3nCn^2+2nC_n^1+nC_n^0$. 所以,$2S=[(n^2+n)C_n^n+nC_n^0]+[n^2C_n^{n-1}+2nC_n^1]+\cdots+[(n^2+n)C_n^n+nC_n^0]$,化简得:$(n^2+2n)C_n^0+(n^2+2n)C_n^1+\cdots+(n^2+2n)C_n^n=(n^2+2n)(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)=(n^2+2n)2^n$. 所以,$S=(n^2+2n)2^{n-1}$.

3. 利用题设呈现的对称性解题

例7 设$a、b、c\in R^+$,求证:$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

分析 由题设呈现对称轮换性,利用这点,一般可设:$a\geqslant b\geqslant c>0$,则$a-b,b-c,a-c$,均为非负数,$\frac{a}{b}、\frac{b}{c}、\frac{a}{c}$均不小于1的正数,作商比较:$(\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{8}}(\frac{b}{c})^{\frac{b-c}{8}}\cdot$

$(\frac{a}{c})^{\frac{a-c}{8}} \geqslant 1 \Rightarrow a^{\frac{a-b}{8}+\frac{a-c}{8}}$、$b^{\frac{b-a}{8}+\frac{b-c}{8}}$、$c^{\frac{c-b}{8}+\frac{c-a}{8}} \geqslant 1 \Rightarrow a^{\frac{2a}{8}} b^{\frac{2b}{8}} c^{\frac{2c}{8}} \geqslant a^{\frac{b+c}{8}} b^{\frac{a+c}{8}} c^{\frac{a+b}{8}} \Rightarrow a^a b^b c^c \geqslant (abc)\, a^{\frac{a+b+c}{8}}$的原式成立。

对称思想解题在代数、三角、解几、立几中应用广泛,在教学中应引起足够的重视。

□对称在解题中的应用(二)

对称,照字面来讲,就是两个东西相对而又相称(或者说相仿,相等)。因此,把这两个东西对换一下,好象没有动过一样。在解决具有对称性的问题时,若能灵活利用其对称性,可大大简化解题过程,达到以简驭繁之目的。潜江市张金中学邹长发老师作了举例说明。

1. 多项式的分解、求值

例1 已知 $x^2+x+1=0$,试求有理式 $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$的值。(1978 年重庆市中学数学竞赛复赛第一试第 5 题)。

解: $x=0$ 不是 $x^2+x+1=0$ 的根。

, 方程两边可同除以 x,得 $x+\frac{1}{x}=-1$

于是,$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=-1$

$x^3+x^{-3}=(x^2+x^{-2})(x+x^{-1})$

$-(x+x^{-1})=2$

$x^4+x^{-4}=(x^2+x^{-2})^2-2=-1$

, $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=(x^7+x^{-7})^2-2$

$=[(x^4+x^{-4})(x^3+x^{-3})+1]②-2$

$=-1$ (即 $+1)^2$)

说明:已知与所求的表达式都是关于 x 和$\frac{1}{x}$对称的。因此,可利用这种对称表达式的运算规律:$x^{m+n}+\frac{1}{x^{m+n}}=(x^m+\frac{1}{x^m})(x^n+\frac{1}{x^n})-(x^{m-n}+\frac{1}{x^{m-n}})$来简化计算。

例2 在实数范围内把多项式:$(y-z)(y+z)^4+(z-x)(z+x)^4+(x-y)(x$

$+y)^4$ 分解因式。

解 当 $x=y$ 时，多项式等于零，$x-y$ 是其因子并由“对称性”，$(y-z)$、$(z-x)$ 都是多项式的因子，由于原多项式是齐次多项式故原式 $=(x-y)(y-z)(z-x)[A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)]$

比较系数得 $A=-3$ 取 $x=1, y=-1, z=0$ 得 $B=-5$；

故原多项式可分解为

$-(x-y)(y-z)(z-x)[3(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)]$

2. 证明不等式

例3 已知 $x、y、z$ 为非负实数，且 $x+y+z=1$。求证：

$$0\leqslant xy+xz+yz-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$$

（第廿五届国际数学竞赛题第1题）

解 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，则

$$z\leqslant\frac{1}{3},y\leqslant\frac{1}{2},x+y\geqslant\frac{2}{3},$$

$$2xyz\leqslant 2x\cdot z\cdot\frac{1}{2}=xz。$$

$$0\leqslant xy+yz+xz-2xyz$$

又设 $x+y=\frac{2}{3}+t$，则 $z=\frac{1}{3}-t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3},1-2t>0\right)$ 于是

$$\begin{aligned}&xy+yz+zx-2xyz\\&=z(x+y)+xy(1-2z)\\&\leqslant z(x+y)+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\cdot(1-2z)\\&=\left(\frac{1}{3}-t\right)\left(\frac{2}{3}+t\right)\\&+\left(\frac{1}{3}+\frac{t}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}+2t\right)\\&=\frac{7}{27}-\frac{t^2}{4}(1-2t)\leqslant\frac{7}{27}\end{aligned}$$

注意到对称性，原命题得证。

说明 利用题目所具有的对称性，将待征的许多对称性的结论只证其中之一，是对称的一个重要应用。

例4 设 $a、b、c$ 均为实数，证明 $(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$ 三数中至少有一个数不大于 $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$。

证明 据对称性，可设 $a\geqslant b\geqslant c$。

故令 $a=b+a$，$c=b-\beta$ 其中 $a\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$。

如果 $\alpha\leqslant\beta$，则 $(a-b)^2$，$(b-c)^2$，$(c-a)^2$ 三数中最小的是 α^2。

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-a^2$$

$$=\frac{(b+\alpha)^2+b^2+(b-\beta)^2-2\alpha^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[3b^2+2(\alpha-\beta)b+(\beta^2-\alpha^2)]$$

令 $y=\frac{1}{2}[3b^2+2(\alpha-\beta)b+(\beta^2-\alpha^2)]$

即 $y=\frac{3}{2}b^2+(\alpha-\beta)b+\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$

若 $b=0$，则 $y=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)\geqslant 0$

若 $b\neq 0$，

$$\triangle=(\alpha-\beta)^2-4\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$$

$$=(\alpha-\beta)^2-3(\beta^2-\alpha^2)$$

$$=(\alpha-\beta)^2+3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

$$=(\alpha-\beta)(4\alpha+2\beta)\leqslant 0$$

， $y\geqslant 0$

综上可知 $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\geqslant\alpha^2$。

对 $\beta\leqslant\alpha$，则 $(a-b)^2$，$(b-c)^2$，$(c-a)^2$ 三数中最小的是 β^2，仿上可证

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\geqslant\beta^2$$

于是 $(a-b)^2$，$(b-c)^2$，$(c-a)^2$ 三数中之最小者不大于 $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$，故所证成立。

说明 实数 $a\geqslant b$ 的等价条件是 $a=b+\varepsilon$ 或 $b=a-\varepsilon(\varepsilon\geqslant 0)$，巧妙利用这个简单的结论，证明某些不等式是十分有效的。

例 5 假设 x、y、z 都是实数，又知道它们满足：

$x+y+z=a(a>0)$ ①

$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}a^2$ ②

试证：x、y、z 都不能是负数，也都不能大于 $\frac{2}{3}a$（57 年北京市数学竞赛试题）

证明：由①得 $y+z=a-x$ ③

由②配方得 $(x+y+z)^2$

$=\frac{a^2}{2}+2(xy+yz+zx)$ ④

把①代入④并整理，得

$yz=\frac{a^2}{4}-(xy+zx)=\frac{a^2}{4}-x(a-x)$

$=x^2-ax+\frac{a^2}{4}$ ⑤

由③、⑤可见，y、z是关于t的二次方程 $t^2-(a-x)t+(x^2-ax+\frac{a^2}{4})=0$ 的两实根

$\triangle=(a-x)^2-4(x^2-ax+\frac{a^2}{4})\geqslant 0$

，$0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}a$

由对称性知，$0\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}a$，

$0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}a$

说明：这里用到了一种新方法。由题设条件及数量关系，构想、组合成新方程，使问题在新的关系下实现转化。这种运用构造性思维解题的方法，称为构造法。

3. 解方程组

例6 求方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0 & ①\\ x^3+y^3+z^3=-18 & ②\end{cases}$$

的整数解。（1978年全国中学数学竞赛决赛·第一试·第10题）

解：由1得 $z=-(x+y)$ ③

③代入②得：$x^3+y^3-(x+y)^3=-18$

化简得 $xy(x+y)=6$

即 $xyz=-6$

用观察法知 $x=1,y=2,z=-3$ 是方程组的一组解，由对称性得方程组的解为

$$\begin{cases}x=1,1,2,2,-3,-3\\ y=2,-3,1,-3,1,2\\ z=-3,2,-3,1,2,1。\end{cases}$$

说明 如果($a_1,a_2,\cdots,a_n$)是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称方程组的一组解(这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不等)则($a_1,a_2,\cdots,a_n$)的任一顺序的排列都是该方程组的解,而所有这种排列的种数为 $1\cdot 2\cdot\cdots n$。

例 7 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=11 & ① \\ x^2+y^2+z^2=155 & ② \\ yz=63 & ③ \end{cases}$$

(陕西省 1978 年中学数学竞赛复赛第二试第 2 题)

解:由①得 $y+z=11-x$ ④

②+③×2 得 $x^2+(y+z)^2=281$ ⑤

④代入①得 $x^2+(11-x)^2=281$

解得 $x=-5$ 或 $x=16$

当 $x=-5$ 时,$y+z=16$ ⑥

由③、⑥联立,它们是关于 y、z 的对称方程组,可得

$y=7,z=9$ 或 $y=9,z=7$

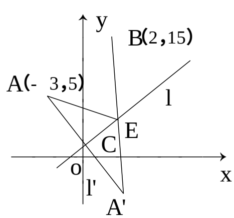
而 $x=16$ 不适合方程组,故方程组的解为

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=7 \\ z=9 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-5 \\ y=9 \\ z=7 \end{cases}$$

说明 此题中,抓住方程组关于 y、z 对称,结合方程③,得到 y、z 只能取 7 或 9,断言 x 只能取 -5,达到了事半功倍之目的。

4. 几何作图与计算

例 8 有一条光线从点 A(-3,5)射到直线 l:$3x-4y+4=0$ 以后,再反射到一点 B(2,15),求这条光线从 A 到 B 的长度。(1978 年北京市中学数学竞赛复赛第二试第 1 题)



解:如图 1,过 A 作直线 $l'\perp l$,则 l' 的解析式为 $4x+3y=3$

由 $\begin{cases} 3x-4y+4=0 \\ 4x+3y=3 \end{cases}$

得 l 与 l' 的交点 C(0,1)

设 A 关于直线 L 的对称点为 A',则 $AC=A'C$ 于是,由中点公式可得 $A'(3,-3)$。

连结 $A'B$ 交直线 l 于 E,则 E 为光线在 l 上的反射点,于是光线的长为 $AE+EB=A'E+EB=A'B$,由两点间的距离公式,有

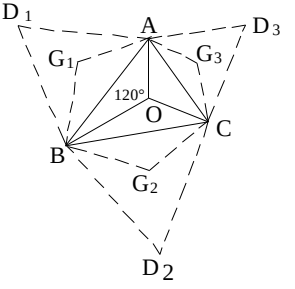
$A'B=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}$

$=5\sqrt{13}$。

说明：此题是对称原理在解析几何中的一个典型应用。同时也反映了数学中的对称原理与物理学中的反射原理的一致性。

5. **几何证明**

例 9 设 a、b、c 为△ABC 的三边，S 为面积，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$



证明：结论可变为$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)\geqslant S$，其几何意义是以 a、b、c 为边的三个正三角形的面积和的$\frac{1}{3}$不小于以 a、b、c 为三边的三角形的面积。

设△ABD_1、△BCD_2，△CAD_3，分别是以△ABC 中的 a、b、c 为边向形外作的正三角形（如图 2），它们的中心分别为 G_1、G_2、G_3，则

$$S_{\triangle ABG_1}+S_{\triangle BCG_2}+S_{\triangle CAG_3}$$

$$=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABD_1}+S_{\triangle BCD_2}+S_{\triangle CAD_3})$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

下证 $S_{\triangle OAB}\leqslant S_{\triangle ABG_1}$，$S_{\triangle OBC}\leqslant S_{\triangle BCG_2}$ $S_{\triangle OCA}\leqslant S_{\triangle CAG_3}$。据对称性，只证 $S_{\triangle OAB}\leqslant S_{\triangle ABG_1}$。

即△ABC 内一点 O，使∠AOB＝∠BOC＝∠COA＝120°，因△ABG_1 与△ABO 的底边与顶角为定值，且△ABG_1 为等腰三角形，所以有 S△ABO≤S△ABG_1。

故 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$ （当△ABC 为正三角形时取等号）。

说明：①本题的结论关于 a、b、c 对称。不仅如此，三角形的三边如不计本身的大小，其地位是对称的，比如，反映角边关系的正弦定理$\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=\frac{b}{\mathrm{Sin}B}=\frac{c}{\mathrm{Sin}C}$在形式上是对称的。

□运用对称性解题(一)

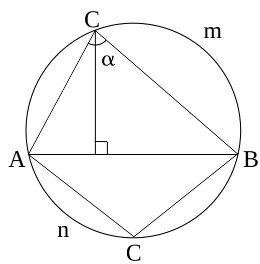
中学数学里常遇见一些具有某种对称性质的问题,例如,对称多项式问题、对称图形问题以及对称变换问题等等,若应用对称性解题,除了简洁、明瞭,还能提供一种清晰的想象力。南京市宁海中学冯艾池老师举例作了说明:

例1 若 $0<x_i<1$ 且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$,问 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 何时取最小值并证明你的结论。

解 因为 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 是对称多项式(即互换其中任何两个变量时表达式不变)由此我们猜测在条件 $0<x_i<1$ 且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ 下 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 的最小值应在 $x_i=\frac{1}{n}(i=n,2\cdots\cdots,n)$ 时取得,下面只要验证这一猜测即可,事实上由柯西不等式易知 $(\sum_{i=1}^{n}1\cdot x_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}1^2\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

即 $1\leqslant n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2$。所以 $\sum_{i-1}^{n}x_i^2\geqslant1/n$,当 $x_i=\frac{1}{n}(i=1,2\cdots,n)$ 时,$\sum_{i-1}^{n}x_i^2$ 的最小值为 $\frac{1}{n}$。

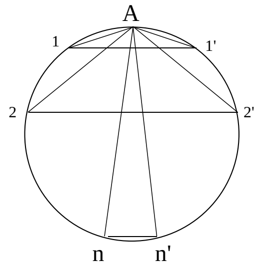
例2 已知半径为 R 的圆上有两点 A 和 B,AB 间的距离是 l,试问:当点 C 位于该圆上何处时,AC^2+BC^2 所能取的最大值是什么?



解 由非充足理由推理引导我们猜测当 C 位于优弧 AmB 的中点时 AC^2+BC^2 将取最大值。为了验证这一点,设 C 为圆上任意一点,记 $\angle ACB=\alpha$,则 $M=AC^2+BC^2=l^2+2AC\cdot BC\cdot\cos\alpha$,欲求 M 的最大值,只须 $AC\cdot BC\cos\alpha$ 最大,当 C 位于劣弧 $\overset{\frown}{AnB}$ 上时,$90°<\alpha<180°$,cos 为负,显然不合题意。当 C 位于优弧 $\overset{\frown}{AmB}$ 上时,由于 α 值相同,只须使乘积 $AC\cdot BC$ 最大,由 △ABC 面积公式可知 $AC\cdot BC=\frac{2S}{\sin\alpha}$,当面积 S 最大时,$AC\cdot BC$ 亦最大,因 AB 为定值,当 △ABC 的高最长时 S 最大,而当 C 位于 $\overset{\frown}{AmB}$ 中点时满足条件,因此,当 C 位于优弧中点时 AC^2+BC^2 取最大值,此时最大值

$$M=4R^2+2R\sqrt{4R^2-l^2}(l\leqslant2R)。$$

例 3　**已知** $2tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\gamma + tg^2\alpha tg^2\beta + tg^2\beta tg^2\gamma + tg^2\gamma tg^2\alpha = 1$，**求** $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ **的值。**



解　**问题具有对称性，利用**

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{\csc^2\alpha} = \dfrac{1}{1+ctg^2\alpha} = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$**可知**

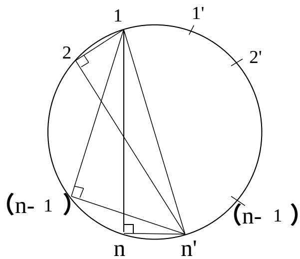
原式 $= \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \dfrac{tg^2\beta}{1+tg^2\beta} + \dfrac{tg^2\gamma}{1+tg^2\gamma}$

$= [tg^2\alpha(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma) + tg^2\beta(1+tg^2\gamma)(1+tg^2\alpha) + tg^2\gamma(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)] / [(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)]$ **考虑分子第一项：**$tg^2\alpha(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma) = tg^2\alpha + tg^2\alpha tg^2\beta + tg^2\gamma tg^2\alpha + tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\gamma$

利用对称性得原式分子 $=(tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma) + 2(tg^2\alpha tg^2\beta + tg^2\beta tg^2\gamma + tg^2\gamma tg^2\alpha) + 3tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\gamma$，**将已知条件代入得原式** $=1$。

例 4　**（1）连接正** $2n+1$ **边形的顶点可组成多少个等腰三角形？**

（2）连接正 $2n$ **边形的顶点可组成多少个斜三角形？**



解（1）设 A **为正** $2n+1$ **边形的任意一个顶点，其余顶点按对称性分别用** 1，1'，2，2'，…，n，n' **表示。（如图）自** A **点分别连接** A_1、A_1'、A_2、A_2'；…，A_n，A_n'，**可得到几个等腰三角形。**

因为所给图形是 $2n+1$ **边形，由此可知总共可组成** $n(2n+1)$ **个等腰三角形。**

（2）仿（1）利用对称性连接正 $2n$ **边形的顶点可组成** $2n(n-1)$ **个直角三角形，由去杂法可知所求斜三角形的个数为**

$$C_{2n}^3 - 2n(n-1) = \frac{4n(n-1)(n-2)}{3}\text{个}$$

□运用对称性解题（二）

对称不仅给人以美的享受，而且运用对称性还可以简捷地解决一些数学问题。安徽宣州市高级职业中学翟大健老师总结有：

1. 运用图形的对称性，可以缩小被研究对象的范围，从而使问题简化

例 1　**在一个由** 8×8 **个方格组成的边长为** 8 **的正方形棋盘内放一个半径为** 4 **的圆，若把圆周经过的所有小方格的圆内部分的面积之和记为** S_1，**把圆周经过的所有小方格的圆外部分的面积之和记为** S_2，**则** $\dfrac{S_1}{S_2}$ **的整数部分是（　）**

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

(1992 年全国初中数学联合竞赛试题)

分析　依题设,半径为 4 的圆是边长为 8 的正方形的内切圆。由于正方形和它的内切圆关于正方形相对两边中点的连线成轴对称,所以只需要考察整个图形的四分之一。

解　设在正方形棋盘的四分之一中,圆周经过的所有小方格的圆内部分面积之和为 S_1',圆周经过的所有小方格的圆外部分面积之和为 S_2',可得

$S_1'=4\pi-8$,$S_2'=(16-1)-4\pi=15-4\pi$。于是 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4S_1'}{4S_2'}=\frac{S_1'}{S_2'}=\frac{4\pi-8}{15-4\pi}\approx\frac{4.56}{2.44}$,故 $\frac{S_1}{S_2}$ 的整数部分是 1,选(B)。

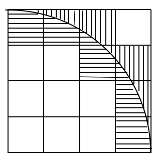


图1

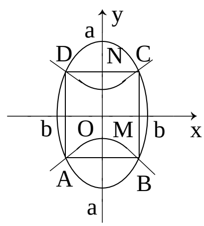


图2

例 2　给定椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$,求与这椭圆有公共焦点的双曲线,使得以它们的交点为顶点的四边形面积最大,并求相应的四边形的顶点的坐标。(1989 年高考文科第 24 题)

分析　设所求的双曲线的方程为 $\frac{x^2}{b'^2}+\frac{y^2}{a'^2}=-1$。由于椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{b'^2}+\frac{y^2}{a'^2}=-1$ 都关于坐标轴对称,故以它们的交点为顶点的四边形 ABCD 是矩形,且 $S_{\text{矩形}ABCD}=4S_{\text{矩形}OMON}$(如图 2),因此矩形 ABCD 面积的大小由点 C 的坐标所决定。

解　设位于第一象限的交点 C 的坐标为 (x_0,y_0),由题设及上面的分析知

$c^2=a^2-b^2=b'^2+a'^2\Rightarrow a'^2=c^2-b'^2$。

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\\ \frac{x^2}{b'^2}-\frac{y^2}{a'^2}=-1\end{cases}$ 解得 $C(\frac{bb'}{c},a\sqrt{1-\frac{b'^2}{c^2}})$;

，$S_{矩形ABCD}=4x_0y_0=4ab\cdot\frac{b'}{c}\sqrt{1-\frac{b'^2}{c^2}}$

$=4ab\sqrt{\frac{b'^2}{c^2}(1-\frac{b'^2}{c^2})}$。

，$\frac{b'^2}{c^2}>0,1-\frac{b'^2}{c^2}>0$，且$\frac{b'^2}{c^2}+(1-\frac{b'^2}{c^2})=1$（定值）

，当且仅当$\frac{b'^2}{c^2}=1-\frac{b'^2}{c^2}$，即$(\frac{b'}{c})^2=\frac{1}{2}$时，$S_{矩形ABCD}$取得最大值$2ab$。

这时，$b'^2=\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$，$a'^2=\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$。故所求的双曲线方程是$\frac{y^2}{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}-\frac{x^2}{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}=1$，相应的四边形顶点的坐标是

$(\frac{\sqrt{2}}{2}b,\frac{\sqrt{2}}{2}a),(-\frac{\sqrt{2}}{2}b,\frac{\sqrt{2}}{2}a),(-\frac{\sqrt{2}}{2}b,-\frac{\sqrt{2}}{2}a),(\frac{\sqrt{2}}{2}b,-\frac{\sqrt{2}}{2}a)$。

例3　确定方程$80\sin x=x$的实数解的个数。

解　方程$80\sin x=x$的实数解个数，等于函数$y=80\sin x$与$y=x$的图象的交点个数。因为正弦曲线$y=80\sin x$和直线$y=x$都是关于原点成中心对称的，所以两图象在第一象限和在第三象限内交点的个数相等，因此只需研究在第一象限内的交点个数。

两图象在$[0,\pi),(2\pi,3\pi),(4\pi,5\pi),\cdots,(2k\pi,(2k+1)\pi)$每一个区间内各有两个交点，且不难由$2k\pi+\frac{\pi}{2}<80\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})<2(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$（k为非负整数），解得$k=12$。

，两函数图象在第一象限内（包括原点）交点个数为$2\times13=26$，根据对称性知两函数图象在第一、三象限及原点处共有交点$2\times26-1=51$（个），即方程$80\sin x=x$的实数解有51个。

2. 运用对称性，有时可以使两个相关问题中的一个获解，另一个问题亦伴随获解

例4　已知复数z满足$|z-5i|\leqslant3$，求z的辐角主值的最大值、最小值及相应的两个复数z的值。

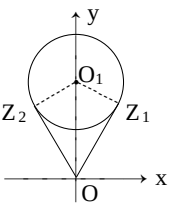


图3

分析　满足$|z-5i|\leqslant3$的复数z在复平面内对应的点集是以点$O_1(0,5)$为圆心，半径等于3的圆面，此圆面关于y轴对称（如图3），显然圆O_1的两条切线OZ_1、OZ_2的切点Z_1、Z_2对应的两个复数z_1、z_2是辐角主值最小、最大的两个复数。不

难求得 $z_1=\frac{12}{5}+\frac{16}{5}i$，$\arg z_1=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$。由于 Z_1 与 Z_2 关于 y 轴对称，所以 $z_2=-\frac{12}{5}+\frac{16}{5}i$；$\arg z_2=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$。

例5 设 $0<a<1$，试判断函数 $f(x)=\frac{x(a^x-1)}{(a^x+1)\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)}-1n(\sqrt{x^2+1}+x)$ 在区间(0，+)和(- ，0)上函数值的正负。

分析 通过求导是可以确定 f(x)在所给两区间上函数值的正负，而用初等方法能否解决这个问题呢？因为 f(x)是由指数函数，对数函数，幂函数及常数，经过有限次四则运算和有限次函数的复合而得出的，所以有可能用初等方法判断 f(x)在区间(0，+)和(- ，0)上函数值的正负。

不妨先讨论在区间(0，+)上的情况。

当 $x>0$ 时，$0<a<1$，$a^x<1$，$a^x-1<0$，且由 $0<\sqrt{x^2+1}-x<1$，$\sqrt{x^2+1}+x>1$ 知

$\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)>0$，$1n(\sqrt{x^2+1}+x)>0$；又 $a^x+1>0$，$f(x)<0$，即在区间(0，+)上 f(x)的值恒为负。

而当 $x<0$ 时，就不易确定 f(x)的符号了。但不难证明 f(x)是奇函数，奇函数的图象关于坐标原点成中心对称，所以在区间(- ，0)上，f(x)的值恒为正。

类似地，若已知函数 y=f(x)的图象关于点(a，0)或直线 x=a 对称，则由 y=f(x)在关于点(a，0)或直线 x=a 对称的两区间之一上(内)的单调性，便可知 y=f(x)在另一区间上(内)的单调性。

运用对称性作函数图象，也是作图象的基本方法之一。

□运用对称性解题(三)

1. 利用已知对称关系及其结论化繁为简

例1 已知两曲线 $y=kx+1$ 和 $x^2+y^2+kx-y-4=0$ 的两个交点关于直线 $y=x$ 对称，求两交点坐标。

解 因两曲线的两交点关于直线 $y=x$ 对称，则直线 $y=kx+1$ 和直线 $y=x$ 垂直。故 $k=-1$。

解方程组 $\begin{cases}y=-x+1\\x^2+y^2-x-y-4=0\end{cases}$ 得两曲线交点为(2，- 1)和(- 1，2)。

评注 若设两交点为(a，b)，(b，a)列三元(a，b，k)方程组则较繁。

例2 设 $a\in R$，若函数 $y=f(x)$ 与 $y=10^x+3$ 关于直线 $y=x$ 对称，且 $y=f(x)$

与 $y=\lg(x^2-x+a)$ 有公共点,求 a 的范围。

解:由 $y=f(x)$ 与 $y=10^x+3$ 关于直线 $y=x$ 对称知,$y=f(x)$ 与 $y=10^x+3$ 互为反函数,, $y=f(x)=\lg(x-3)$。

又 $y=\lg(x^2-x+a)$ 与 $y=f(x)$ 有公共点,则 $x^2-x+a=x-3$ 在(3,)上有解。

即 $a=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2\quad(x>3)$ 故 $a<-6$。

评注:由对称性分析出 $y=f(x)$ 与 $y=10^x+3$ 互为反函数是解题的关键

2. 挖掘隐含的对称关系将问题等价转化

例 3　方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=z\\x+y+z=a\end{cases}$ 有唯一的一组实数解(x,y,z),求实数 a 及方程的解

解:方程组关于 x、y 是对称的。若(x,y,z)是一组解,则(y,x,z)显然也是此方程组的一组解。由方程组有唯一解知 $x=y$。,　原方程化为

$\begin{cases}2x^2=z\\2x+z=a\end{cases}$ 消去 z 得 $2x^2+2x-a=0$　由 $\Delta=0$ 得 $a=-\frac{1}{2}$,相应的方程组的解为 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

评注:解答的关键在于从原方程的结构挖出隐含的“关于 x、y 对称”关系,从而将问题等价转化。

例 4　若 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,求 $\sqrt{3x^2-5xy+3y^2}$ 的值。

解:由已知得 :$x+y=10$,$xy=1$

,　原式 $=\sqrt{3(x+y)^2-11xy}=\sqrt{289}=17$。

评注:若直接代入显然计算量较大,找出隐含的一组基本对称式,问题便简捷得多

3. 作图或由图寻找对称关系巧用几何特征

例 5　在直线 $3x-y+2=0$ 上求一点,使它到两点 A(8,6)、B(2,-2)的距离之和最小。

解:设点 B 关于已知直线 l :$3x-y+2=0$ 的对称点为 C(a,b),则

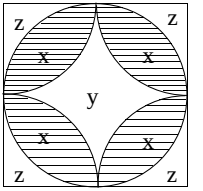
$\begin{cases}\frac{b+2}{a-2}=-\frac{1}{3}\\3(\frac{a+b}{2})-(\frac{b-2}{2})+2=0\end{cases}$ 解得 4 $\begin{matrix}a=-4,\\b=0。\end{matrix}$

,　求可得 AC 的方程为 $x-2y+4=0$。解得 AC 与直线 l 的交点 P 的坐标为

(0,2)。由平面几何知识:点 P(0,2)为所求的点。

评注:平面几何中点 P 到 A、B 两点距离满足 $|PA|+|PB|\geqslant|AB|$ 考虑取等号的条件,知 P 为所求的点。若由距离公式列出 $|PA|+|PB|$ 的表达式求解则无法进行。

例 6 如图,正方形 ABCD 中,有一个以正方形中心为圆心,正方形边长之半为半径的圆。再分别以 A、B、C、D 为圆心,以正方形边长之半为半径画弧,若正方形边长为 2a,求所围成阴影部分的面积。



解 如图,设 x,y,z 分别为三类图形的面积

由图形的对称得:

$$\begin{cases}4x+y=\pi a^2\\ x+z=\dfrac{\pi}{4}a^2\\ 4x+y+4z=4a^2\end{cases}$$

解得 $x=\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)a^2$。

故所求阴影部分面积为 $4x=(2\pi-4)a^2$

评注:图形的对称性直观,找出图形的对称关系,并灵活应用,解题也更清楚。

4. 换元假设构造对称关系化难为易

例 7 已知 a,b 为实数,且 $a+b=2$,求证:$a^4+b^4\geqslant 2$.

证明:由 $a+b=2$ 可设 $a=1+x,b=1-x$,则

$$a^4+b^4=(1+x)^4+(1-x)^4=2x^4+12x^2+2\geqslant 2。$$

例 8 实数 x,y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$,$S=x^2+y^2$,求 $\dfrac{1}{S_{max}}+\dfrac{1}{S_{min}}$ 的值。(1993 年全国高中数学联赛题)

解:设 $x=a+b,y=a-b$ 代入已知得:

$$4(a+b)^2-5(a+b)(a-b)+4(a-b)^2=5$$

即 $3a^2+13b^2=5b$

$$\therefore\quad b^2=\frac{1}{13}(5-3a^2)$$ 则 $5-3a^2\geqslant 0$

$$\therefore\quad 0\leqslant a^2\leqslant\frac{5}{3}。$$

$$S=(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)=\frac{20}{13}a^2+\frac{10}{13}$$

当 $a^2=0$ 时,$S_{min}=\dfrac{10}{13}$。当 $a^2=\dfrac{5}{3}$ 时,$S_{max}=\dfrac{10}{3}$。

故$\frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}=\frac{3}{10}+\frac{13}{10}=\frac{8}{5}$

评注 构造一组对称式,通过换元、减元变换、改变结构,化难为易,以上只是应用对称性解题的几个方面,由于对称问题类型的多样性和存在的广泛性因而对对称性问题及其应用的研究也应重视。

□运用对称性解题(四)

我们学习了轴对称和中心对称两种对称图形,这两种对称图形的很多性质对我们证明命题提供了很好的条件,但在具体证题中它们的性质又常被忽视,或者不能够很好地挖掘题设条件构造对称图形帮助解题,实际上巧妙地利用对称的性质解题,能化难为易,以简驭繁,贵州省剑河县南加中学杨通刚老师举例活用对称性质,巧解几道竞赛题,我们从中不难领略对称性质证题的优越性。

例1 如图1,在Rt△ABC中,M是斜边BC的中点,P、Q分别为AB、AC上的点。

求证:△MPQ的周长大于BC。

(1987年青岛市初中数学竞赛试题)

证明 作点M关于AB、AC的对称点M_1和M_2,连结AM_1、AM_2、AM、PM_1和QM_2。

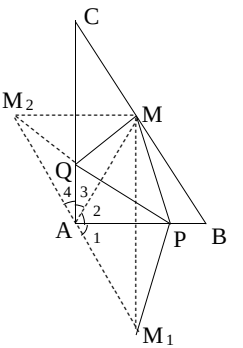


图1

由对称性有

$PM_1=PM, QM_2=QM$,

$\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$,

$\because \angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3=90°$,

$\therefore M_1、A_1、A_2$ 三点在一条直线上,

又 $AM=AM_1=AM_2, AM=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore M_1M_2=BC$,

又 两点间连线中线段较短。

$\therefore M_1P+PQ+QM_2=PM+PQ+QM>M_1M_2=BC$。

故 △MPQ的周长大于BC

例2 如图2,设a、b、c分别表示△ABC中∠A、∠B、∠C所对的边,h表示AB边上的高。

(1)求证:$a+b\geqslant\sqrt{c^2+4n^2}$;

(2)说明:当已知△ABC具备什么条件时,上述结论中的等号成立。

(第九届缙云杯初中数学竞赛试题)

证明 (1)过C作CG∥AB,作A关于CG的对称点A',连结BA'与CA',则

$AD = A'D = h$,$CA' = b$,

在Rt△BAA'中

$BA' = \sqrt{c^2 + 4h^2}$。

, $a + b \geqslant \sqrt{c^2 + 4h^2}$

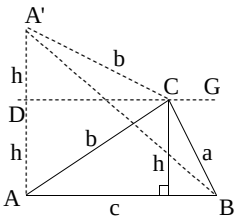


图2

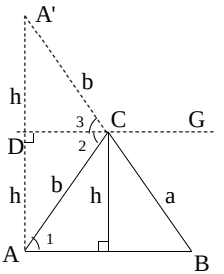


图3

(2)从图2可知,当A'在BC的延长线上时有$BC + CA' = BA'$,

如图3所示,此时有

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle B$,

, 当已知△ABC为等腰三角形时,(1)式$a + b \geqslant \sqrt{c^2 + 4h^2}$中的等号成立。

例3 如图4,已知P、Q分别在Rt△ABC两直角边AB、AC上,M为斜边BC的中点,且$PM \perp QM$,求证:$PB^2 + QC^2 = PM^2 + QM^2$。

(1982年芜湖市初中数学竞赛试题)

证明 延长PM到P',使$MP' = MP$,连结P'C、P'Q、PQ

由对称性有$PQ = P'Q$,

又 △BPM和△CP'M关于点M成中心对称,则有

$\angle 1 = \angle B$,$PB = P'C$,

又 $\angle B + \angle 2 = 90°$,, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$

, $P'Q^2 = CQ^2 + P'C^2 = CQ^2 + PB^2$,

又 $PQ^2 = PM^2 + QM^2$,$PQ^2 = P'Q^2$,

, $PB^2 + QC^2 = PM^2 + QM^2$。

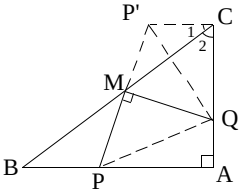


图4

例4 如图5,△ABC中,D是AB边的中点,E、F分别在AC、BC上,求证:△DEF的面积不大于△ADE与△BDF的面积之和。

(苏联第17届奥林匹克数学竞赛题)

证明 作 E 关于 D 点的对称点 E'，连结 BE' 和 E'F

AD = DB，DE' = DE，

∴ △DBE' 与△DAE 关于点 D 成中心对称，故有 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle BDE'}$

∴ $S_{四边形BFDE'} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF}$

又 $S_{\triangle FDE'} = S_{\triangle FDE}$，

∴ $S_{\triangle DEF} \leqslant S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF}$

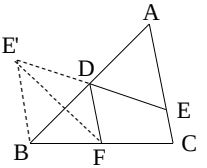


图5

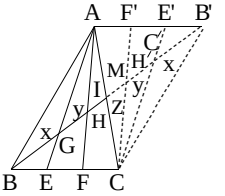


图6

例 5 如图 6，在△ABC 中，E、F 为 BC 边的三等分点，M 为 AC 中点，BM 与 AE、AF 分别相交于 G、H，求 BG∶GH∶HM

（1982 年天津市初中数学竞赛试题）

解 以 M 为定点，将整个图形旋转 180°得到其中心对称图形，设 BG = x，GH = y，HM = z，

根据对称性质

x∶2(y + z) = 1∶2，

即 x = y + z ①

(x + y)∶2z = 2∶1，

即 x + y = 4z ②

由①、②得 $x = \frac{5}{2}z, y = \frac{3}{2}z$，

∴ $x : y : z = \frac{5}{2}z : \frac{3}{2}z : \frac{2}{2}z$

= 5∶3∶2

即 BG∶GH∶HM = 5∶3∶2。

□运用对称性优化解题的四条途径

对称，顾名思义，就是两个事物（或同一事物的两个方面）相对而又相称。如果 A、B 是具有对称性的两个事物（或同一事物的两个方面），那么把 A、B 交换顺序，其结果不变，这就是对称原理。纵观近年

来的高考,笔者发现不少试题隐藏着对称性,在解答它们时,若能挖掘出潜在的对称性,充分利用对称原理求解,则能在纷繁的困惑中求得简捷的突破,获得问题的最优解。福建省松溪一中刘桦老师分析了挖掘对称性解题的几种途径。

1. 挖掘函数图象中的对称性

$f(x)$是奇(或偶)函数的充要条件得$f(x)$的图象关于原点(或y轴)对称;$f(x)$与$f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称;若$f(A-x)=f(A+x)$,则$f(x)$的图象关于直线$x=A$对称;等等。这些性质常是挖掘对称性的重要依据。

例1 函数$y=0.2^{-x}+1$的反函数是(A)$y=\log_5x+1$;(B)$y=\log_5x+1$;(C)$y=\log_5(x-1)$;(D)$y=\log_5x-1$(1986年高考题)

分析 由互为反函数的函数图象关于直线$y=x$对称可知,若点(a,b)在函数$y=f(x)$的图象上,则点(b,a)必在其反函数$y=f^{-1}(x)$的图象上;反之亦然。观察函数$y=0.2^{-x}+1$结构知,其图象过点$(0,2)$,因此,反函数图象必过点$(2,0)$。不难知,只有(C)满足点$(2,0)$的坐标,故选(C)。

例2 如果函数$f(x)=x^2+bx+c$对任意实数t都有$f(2+t)=f(2-t)$,那么(A)$f(2)<f(1)<f(4)$;(B)$f(1)<f(2)<f(4)$;(C)$f(2)<f(4)<f(1)$;(D)$f(4)<f(2)<f(1)$(1992年高考题)

分析 由$f(2+t)=f(2-t)$知,二次函数$f(x)$的图象关于$x=2$对称,

, $f(x)$在$[2,+\quad)$上是增函数。

$f(1)=f(3)$,且$f(2)<f(3)<f(4)$,

, $f(2)<f(1)<f(4)$,故选(A)。

2. 挖掘等差(比)数列中项的对称性

等差(比)数列的项具有对称性,因而有"若a_p,a_q,a_l,a_m为等差(比)数列中的任意四项,当$p+q=l+m$时,就有$a_p+a_q=a_l+a_m$($a_p\cdot a_q=a_l\cdot a_m$)"这一重要的结论。利用它解题,可简化运算环节。

例3 已知$\{a_n\}$是等比数列,且$a_n>0$,$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$,那么a_3+a_5的值等于(A)5;(B)10;(C)15;(D)20(1991年全国高考题)

分析 由对称性知,$a_2a_4=a_3^2$,$a_4a_6=a_5^2$,于是已知等式可化为$(a_3+a_5)^2=25$,$a_n>0$,, $a_3+a_5=5$,故选(A)。

例4 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,已知$a_3=12$,$S_{12}>0$,$S_{13}<0$,(Ⅰ)求出公差d的取值范围;(Ⅱ)指出$S_1,S_2,\cdots,S_{12}$中哪一个值最大,并说明理由(1992年高考题)

解 (Ⅰ)$-\frac{24}{7}<d<-3$(解答略)。

(Ⅱ)由等差数列的对称性,得

$$\begin{cases} S_{12}=\dfrac{12(a_1+a_{12})}{2}=\dfrac{12(a_6+a_7)}{2}>0 \\ S_{13}=\dfrac{13(a_1+a_{13})}{2}=\dfrac{13\cdot 2a_x}{2}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_6>0 \\ a_7<0 \end{cases}$$

又由(Ⅰ)知,$\{a_n\}$为递减数列,故 S_6 最大。

3. 挖掘排列中元素位置的对称性

例5 A、B、C、D、E 五人并排站成一排,如果 B 必须站在 A 的右边(A、B 可以不相邻),那么不同的排法有(A)24 种;(B)60 种;(C)90 种;(D)120 种(1990 年高考题)

分析 对这五人的全排列仅有两种情况:B 在 A 的左边或 B 在 A 的右边,而这两种情况的机会完全相等,故由对称原理得所求排列数为 $\frac{1}{2}P_5^5=60$ 种,选(B)。

4. 挖掘数式或图形中的对称性

某些数学命题的条件或者结论所涉及的数式呈现对称的结构,某些图形问题中的图形位置、关系等亦具有各种对称的意义。此时,若能围绕数式或图形的对称性展开联想性思维,则能帮助我们发现解题的捷径。

例6 求 $\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cdot\cos 80°$ 的值(1992 年高考文科试题)

分析 原式是关于 $\sin 20°$ 和 $\cos 80°$ 的对称式,可从构造对偶式或运用对称式代换进行思考探求

解法1° 设 $x=\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cdot\cos 80°$,$y=\cos^2 20°+\sin^2 80°-\sqrt{3}\cos 20°\cdot\sin 80°$。两式相加得

$$x+y=2-\sqrt{3}\sin(80°-20°)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \quad ①$$

两式相减得 $y-x=\cos 40°-\cos 160°-\sqrt{3}\sin(80°+20°)=-2\sin 100°\sin(-60°)-\sqrt{3}\sin 100°=0$ ②

由①、②解得 $x=y=\frac{1}{4}$,故原式 $=\frac{1}{4}$

解法2° 作对称代换:$\sin 20°=A+B$,$\cos 80°=A-B$,则有 $A=\dfrac{\sin 20°+\cos 80°}{2}=\dfrac{\sin 20°+\sin 10°}{2}=\sin 15°\cdot\cos 5°$,$B=\dfrac{\sin 20°-\sin 10°}{2}=\cos 15\cdot\sin 15°$,将这两式代入原式 $=(A+B)^2+(A-B)^2+\sqrt{3}(A+B)(A-B)=(2+\sqrt{3})A^2+(2-\sqrt{3})B^2=\operatorname{ctg}15°\cdot(\sin 15°\cos 5°)+\operatorname{tg}15°(\cos 15°\sin 5°)^2=\sin 15°\cos 15°\cos^2 5°+\sin 15°\cos 15°$

$\sin^2 5° = \sin 15°\cos 15° = \frac{1}{2}\sin 30° = \frac{1}{4}$(注:$\operatorname{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$,$\operatorname{ctg}15° = 2 + \sqrt{3}$)。

以上两种解法都是在“对称”的启发下,通过构造对偶数或对偶式造成新的“对称”,从而找到优美、独特的解题途径。

例 7 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$,A、B 是椭圆上的两点,线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 $P(x_0, 0)$,证明 $-\frac{a^2 - b^2}{a} < x_0 < \frac{a^2 - b^2}{a}$(1992 年高考题)。

这是一道灵活性较强的压轴题,按标准卷上的方法证明,过程曲折,运算繁复。而利用“曲线对称法”来推证,技高一筹,别具一格。

证 设弦 AB 的中点为 $M(m,n)(n \neq 0)$,作椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ①关于点 M 对称的椭圆,则其方程为$\frac{(x - 2m)^2}{a^2} + \frac{(y - 2n)^2}{b^2} = 1$ ② AB 是两椭圆的公共弦,, 由① - ②即可得 AB 所在直线方程为 $b^2mx + a^2ny - b^2m^2 - a^2n^2 = 0$,于是 $k_{AB} = -\frac{b^2m}{a^2n}$。

若 $m = 0$,则 $x_0 = 0$,结论显然成立;若 $m \neq 0$,则由题意得 $k_{MP} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{a^2n}{b^2n}$,又 $k_{MP} = \frac{n}{m - x_0}$,, $\frac{a^2n}{b^2m} = \frac{n}{m - x_0} \Rightarrow x_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}m$, 点 M 在椭圆①内,, $-a < m < a$,, $-\frac{a^2 - b^2}{a} < x_0 < \frac{a^2 - b^2}{a}$,故原命题得证。

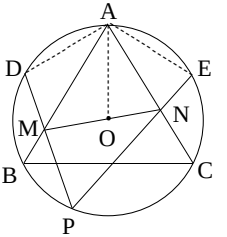
总之,在解题教学中,教师深入挖掘题中潜在的对称性,引导学生用对称的眼光去审视问题,用对称的变换去调整数式或形的关系,这样,不仅能为解决数学问题开辟出一条新的捷径;同时还能让学生领略到数学对称美的神韵,使学生在“美”的情境中,激发学习兴趣,发展思维品质,提高思想情操,增强创新意识。

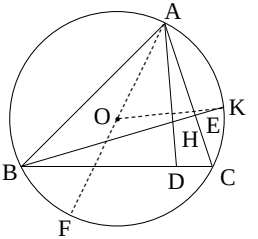
□利用图形的对称性解题

通过反射变换作轴对称图形是几何解题的一个重要方法。但在许多问题中,往往图形本身或其部分就具有对称性,只要我们善于发现并加以利用,就能给解题带来很大的方便。江苏省淮安市四中陈国康老师分析举数例如下:

例1 正三角形 ABC 内接于⊙O，D、E 分别是$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$的中点，P 在$\overset{\frown}{BC}$上，PD、PE 分别交 AB、AC 于 M、N，求证：M、O、N 共线。

连接 OA、OM、ON，只须证∠AOM + ∠AON = 180°注意到点 O、D 关于 AB 对称，点 O、E 关于 AC 对称，故∠AOM = ∠ADM，∠AON = ∠AEN，而∠ADM + ∠AEN = 180°，本题得证。





例2 锐角△ABC 的顶点 A 到外心 O 与垂心 H 的距离相等，求∠A 的所有可能的值。（第 30 届 IMO 预选题第 32 题）

联想初中《几何》课本第 161 页第 4 题知点 H 关于 AC 的对称点必在圆 O 上，故延长 BE 交圆 O 于 K，易得 AK = AH，从而△AOK 为等边三角形，∠KAO = 60°。再由△ABF ∽ △AEK 可证∠KAC = ∠BAO，便可得∠BAC = 60°。

例3 在凸五边形 ABCDE 中，边 BC、CD、DE 相等，每一对角线与一边平行（AC 平行于 DE，BD 平行于 AE 等等），证明：ABCDE 是正五边形。（第 29 届 IMO 预选题第 47 题）

由题设得 BCDS 为菱形，故直线 CS 为其对称轴。

又由∠1 = ∠3 = ∠4 = ∠2，得 AS = ES。而 AE // BD，故 CS 亦为等腰三角形 SAE 的对称轴。

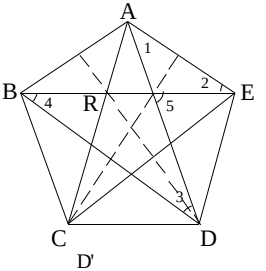
，五边形 ABCDE 关于直线 CS 为对称。

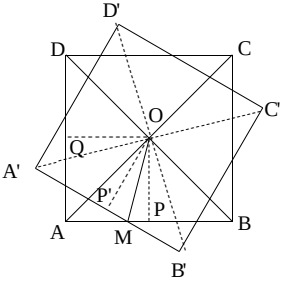
同理，五边形 ABCDE 又关于直线 DR 为对称。

可得 AB = BC = CD = DE = EA，

∠A = ∠B = ∠C = ∠D = ∠E，

，ABCDE 是正五边形。





例4 边长为1的正方形ABCD,绕其中心O旋转角$\alpha(\alpha<90°)$,试求旋转后的正方形A'B'C'D'与正方形ABCD重叠部分的面积。(江苏省1988年初中数学竞赛第五题)

由对称性,显然可把所述重叠部分划分成四个全等形求其面积。

作出正方形ABCD的弦心距OP、OQ,正方形A'B'C'D'的弦心距OP',由"垂线段最短"知OP、OP'、OQ都在题述重叠部分内,P、P'、Q在边界上,且$OP=OP'=OQ=\frac{1}{2}$,$\angle POP'=\alpha$,$\angle P'OQ=90°-\alpha$。

连OM,得$Rt\triangle POM\cong Rt\triangle P'OM$,$\angle POM=\angle P'OM=\frac{1}{2}\alpha$。

$$PM=OP\cdot tg\angle POM=\frac{1}{2}tg\frac{1}{2}a,$$

$$S_{OPMP'}=2S_{\triangle OPM}=\frac{1}{4}tg\frac{1}{2}a,$$

同法可求$S_{OP'NQ}=\frac{1}{4}tg(45°-\frac{1}{2}a)$,

重叠部分面积$S=4S_{OQNMP}$

$$=tg\frac{1}{2}a+tg(45°-\frac{1}{2}a)$$

本例若推广为:边长为a的正n边形绕其中心旋转角$a(a<2\pi/n)$,求旋转后的正n边形和原n边形重叠部分面积。我们用同样的方

法可求得其面积为 $S=nr_n^{2}\left(\text{tg}\,\frac{1}{2}a+\text{tg}\left[(\pi/n)-\frac{1}{2}a\right]\right)$,其中 $r_n=\frac{1}{2}a\cdot\text{ctg}(\pi/n)$。

抓住图形的对称性,不但可以帮助我们迅速打开思路,有时还可以得到一些新颖别致的解法。

□轴对称和路程最短问题

在平面几何中,我们学习了轴对称图形。课本中有这样的例题。

例 1　直线 l 外,在同侧有两个点 A、B,试在 l 上定一点 P,使 AP+PB 最短。

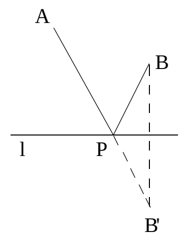


图1

略解 如图 1,作出 B 点关于 l 的对称点 B',连 AB',必与 l 相交于一点 P,P 点就是所求。

由这个例题引伸一步,可得

例 2　已知∠XOY 是锐角,角内一点 A。在 OX 和 OY 上分别定一点 B 和 C,使△ABC 的周长最短。

作法:图 2 中,分别作出 A 点关于 OX 和 OY 的对称点 A_1 和 A_2,连接 A_1A_2,顺次交 OX、OY 于 B、C,顺次连接 ABC,△ABC 就是所求。

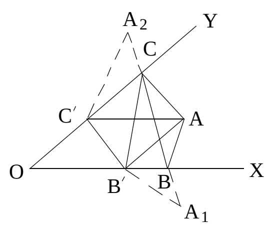
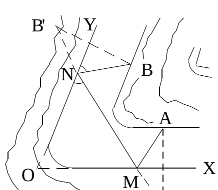


图2

证明:由作法,A_1、B、C、A_2 在同一条直线上,$A_1A_2=A_1B+BC+CA_2=AB+BC+CA=$△ABC 的周长。如果在 OX 上另取一点 B',连 AB'、B'C,得△AB'C,因为 $AB'=A_1B'$,$A_1B'+B'C>A_1C$,即 $A_1B'+B'C>AB+BC$,故△AB'C 的周长>△ABC 的周长 如果在 OY 上另取一点 C',连 B'C'、AB'、AC',得△AB'C',因为 $AB'=A_1B'$,$AC'=A_2C'$,而 $A_1B'+B'C'+C'A_2>A_1A_2$,即 $AB'+B'C'+C'A>AB+BC+CA$,故△AB'C'的周长>△ABC 的周长。所以△ABC 是题设所要求的周长最短的三角形。

在现实生活中,光线是直进的,并且光路是最短的。光的反射遵循入射角与反射角相等的规律。因此,一些光路问题可归于几何问题。请看下面的例题。

例 3　盘山公路的拐弯处,公路折成一个圆顶锐角,如图 3。在路旁 A、B 两处,各设一交通岗。A、B 为山所隔,需在公路边 OX 和 OY 上设置两块反光镜 M 和 N,使 A、B 能互相望见。问这两块反光镜应设置在什么地方?



解:分别作 A 关于 OX 的对称点 A',B 关于 OY 的对称

点 B'。当 A'B' 连线不为山脚所隔时,设其顺次交 OX、OY 于 M、N 两点。这就是设置反光镜的地方。

证明 由作法知,A、A' 关于 OX 对称,所以 ∠AMX = OMB'。同理,B、B' 关于 OY 对称,∠A'NO = ∠YNB。故光路为 AM—MN—NB。

由光线的反射可以联想到球碰撞平面的反弹问题。如果平面是理想平面,球是质地均匀富有弹性的球,那么它的撞击路线和反弹路线与光路相仿,也是反射角等于入射角。这样我们可以研究台球(打弹子)的问题。

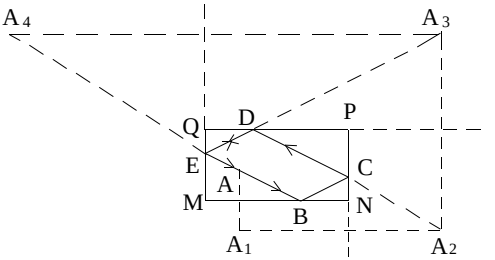


图4

例 4 图 4 是一个台球台子的平面图。A 处有一球 A,问用足够的力量使球 A 撞击 MN 边的什么地方,可以顺次反弹到 PN,再反弹到 PQ,最后反弹到 QM 后回到 A 处?

解 作 A 关于 MN 的对称点 A_1,作 A_1 关于 MP 的对称点 A_2,作 A_2 关于 PQ 的对称点 A_3,作 A_3 关于 QM 的对称点 A_4。连结 A_4A,如果 A_4A 与线段 MQ 相交(就是交点在 M、Q 之间),那么问题有解;否则因 A 的位置不当,问题无解,就是球 A 在该位置时,不会有一条和四边碰撞后又回到原处的路线。

当问题有解时,设 A_4A 交 MQ 于 E,连结 EA_3,交 QP 于 D,连 DA_2,交 PN 于 C;连 CA_1,交 MN 于 B,连 AB,B 点就是球 A 撞击 MN 的地方。撞击时,球沿着 AB→BC→CD→DE→EA 的路线回到 A 处。

读者可进一步思考:这条路线是不是唯一的?是不是最短的?封闭折线 ABCDEA 是几边形?为什么?怎样用语言描述它?

对于一些要求条件更高的路程问题、直线夹角问题也可以用轴对称的方法处理,如下面二例。

例 5 在已知直线 l 的同侧有两个点 A、B,在 l 上求两点 C、D,使 CD 为定长 a,且 AC + CD + DB 最短。

解 因 CD = a 为定长,依题意 AC + BD 应最短。图 5 中,可作 $AA_1 // l$,使 A、B 两点靠近,且 $AA_1 = a$,作 A_1 关于 l 的对称点 A_2,连 A_2B,交 l 于 D。在 l 上,沿 A_1A 方向截取 DC = AA_1 = a,连 AC,这样 AC→CD→DB

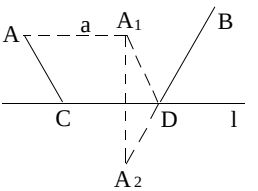


图5

就是所求。

例6 A、B为直线MN的同侧两点,试在MN上找一点C,使∠ACM=2∠BCN。

分析:假设图已作成,如图6。延长AC至A',则∠A'CN=∠ACM=2∠BCN,若作∠A'CN的平分线CT,则∠TCN=∠BCN。就是说CN是∠BCT的平分线。于是想到B点关于MN的对称点B'应在CT上,B'点可作。又B'在∠A'CN的平分线上,这可由圆的切线解决。

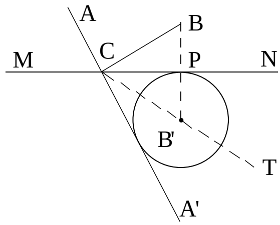


图6

作法:作B点关于MN的对称点B'。连BB',交MN于P。以B'为圆心,B'P为半径作圆。作直线AA'和该圆相切,AA'交MN于C。连CB,则∠ACM=2∠BCN,C点就是所求。

读者可进一步思考:这个问题有几个解?为什么?如果A、B在MN的两侧呢?

□对称、轮换概念在解题中的应用

关于几个元素的对称式、轮换式的概念和性质,对于发现解(证)题思路、简化解题步骤、产生类比联想等常有帮助,山西省新绛县教师进修学校冯景元老师作了下面举例说明:

1. 用于解方程(组)、分解因式

例1 解方程组

$$\begin{cases} x^5+y^5=33, & ① \\ x+y=3。 & ② \end{cases}$$

x^5+y^5 是关于x和y的对称式,根据对称多项式的基本定理,它可以化为以"$x+y$"和"xy"为元的多项式(注),然后把②式代入,可得到关于"xy"为元的方程。解出"xy"后再与②式联立,使问题得以解决。

解:$x^5+y^5=(x+y)^5-5(x+y)^3\cdot xy+5(x+y)x^2y^2$ ③

把①和②代入③得

$$(xy)^2-9(xy)+14=0。$$

解这个方程得 $xy=2$,或 $xy=7$。

从而得x,y的两个方程组

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases} \text{或} \begin{cases} x+y=3, \\ xy=7. \end{cases}$$

解这两个方程组得原方程组的四组解为：

$$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=2,\\y_2=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=\frac{3+\sqrt{19}i}{2},\\y_3=\frac{3-\sqrt{19}i}{2};\end{cases}\begin{cases}x_4=\frac{3-\sqrt{19}i}{2},\\y_4=\frac{3+\sqrt{19}i}{2}。\end{cases}$$

（注）对称多项式的基本定理，可参考有关高等代数书籍。次数较低或特殊的对称多项式的化法，不一定拘泥于定理中所述的方法，见下面例3。

例2　分解因式　$x^3+y^3+z^3-3xyz$

解：所给多项式是关于 x,y,z 对称的，根据对称多项式的基本定理，它可以化为以"$x+y+z$"、"$xy+yz+zx$"和"xyz"为元的多项式：

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3-3xyz\\=&(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)\\=&(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\end{aligned}$$

2. 用于降幂

例3　证明 $\cos^8\frac{\pi}{8}+\cos^8\frac{3\pi}{8}+\cos^8\frac{5\pi}{8}+\cos^8\frac{7\pi}{8}=\frac{17}{16}$

证：$\cos^8\frac{\pi}{8}+\cos^8\frac{3\pi}{8}+\cos^8\frac{5\pi}{8}+\cos^8\frac{7\pi}{8}$

$$=2\left(\cos^8\frac{\pi}{8}+\cos^8\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$=2\left(\cos^8\frac{\pi}{8}+\sin^8\frac{\pi}{8}\right).$$

式子 $\cos^8\frac{\pi}{8}+\sin^8\frac{\pi}{8}$ 是关于 $\cos^2\frac{\pi}{8}$ 和 $\sin^2\frac{\pi}{8}$ 为对称的式子，它可以化为以"$\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}$"和"$\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}$"为元的多项式，而前一个式子的值为 1，后一个式子等于 $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{4}$，是可以求其值的。

$$2\left(\cos^8\frac{\pi}{8}+\sin^8\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=2\left[\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}\right)^2-2\cos^4\frac{\pi}{8}\sin^4\frac{\pi}{8}\right]$$

$$=2\left[\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right]^2-$$

$$4\left(\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{4}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{16}。$$

3. 帮助发现解(证)题思路

例4 为使抛物线$(y+1)^2=x+1$上存在关于直线$y=kx$对称的点,求k值的范围。

解 设抛物线上有两点$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$关于直线对称(显然$y_1\neq y_2$)。

P_1P_2在抛物线上,

$$(y_1+1)^2=x_1+1 \quad ①$$

$$(y_2+1)^2=x_2+1 \quad ②$$

又因P_1和P_2关于$y=kx$对称

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot k=-1, \quad ③$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=k\cdot\frac{x_1+x_2}{2}. \quad ④$$

由①和②解出x_1,x_2,代入③和④得

$$y_1+y_2+k+2=0, \quad ⑤$$

$$k(y_1^2+y_2^2)+(2k-1)(y_1+y_2)=0。 \quad ⑥$$

⑤、⑥二式左边都是关于y_1和y_2的对称多项式,所以,从⑤、⑥二式消去y_1或y_2可得到同一个关于y_1和y_2的二次方程,其中系数含有字母k,由$y_1\neq y_2$同时满足这个二次方程而知道$\triangle(k)>0$,从而确定k值的范围。

事实上,由⑤和⑥消去y_1或y_2得

$$2ky_i^2+2k(k+2)y+(k+2)(k^2+1)=0,$$

$$(i=1,2)$$

这就是说,二次方程(关于μ)

$$2k\mu^2+2k(k+2)\mu+(k+2)(k^2+1)=0$$

有两个不相等的实根y_1和y_2,

$$\triangle=-k(k+2)(k^2-2k+2)>0$$

$k^2-2k+2>0$ 恒成立

$$k(k+2)<0$$

$$-2<k<0。$$

4. 简化解题过程

例5 若抛物线$y^2=2px$的内接三角形有两边与抛物线$x^2=2qy$相切,证明这

个三角形的第三边也与 $x^2=2qy$ 相切。(82 年高考理科试题)

证 设 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 和 $P_3(x_3,y_3)$ 为抛物线 $y^2=2px$ 上相异三点,且直线 P_1P_2(记为 L_1)和 P_2P_3(记为 L_2)都与 $x^2=2qy$ 相切(这时显然有 $x_1\neq x_2$,$x_2\neq x_3$;$y_1\neq y_2$,$y_2\neq y_3$,且 x_1,x_2,y_1,y_2 均不等于 0),下面证明直线 P_3P_1(记为 L_3)也与 $x^2=2qy$ 相切。

直线 L_1 的方程为

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

即 $$y=\frac{2P}{y_1+y_2}\left(x-\frac{y_1^2}{2P}\right)+y_1。 \qquad ①$$

把①代入 $x^2=2qy$ 得

$$(y_1+y_2)x^2-4pqx-2qy_1y_2=0。 \qquad ②$$

因 L_1 与 $x^2=2qy$ 相切

$$\therefore\quad \triangle_1=16p^2q^2+8qy_1y_2(y_1+y_2)=0。 \qquad ③$$

直线 L_2 的方程可由 L_1 的方程①把(x_1,y_1)换成(x_2,y_2),同时(x_2,y_2)换成(x_3,y_3)得到,因此由 L_2 与 $x^2=2qy$ 相切得

$$\triangle_2=16p^2q^2+8qy_2y_3(y_2+y_3)=0. \qquad ④$$

同样,若 L_3 也与 $x^2=2qy$ 相切,应有

$$\triangle_3=16p^2q^2+8qy_3y_1(y_3+y_1)=0. \qquad ⑤$$

③、④、⑤三式是由诸 y 轮换而互相得到,所以可以设想出③、④能够推出⑤。

事实上,由③—④可得

$$y_2(y_1-y_3)(y_1+y_2+y_3)=0。$$

由于 $y_2\neq0$,$y_1\neq y_3$

$$\therefore\quad y_1+y_2+y_3=0,$$

$$y_2=-y_1-y_3。$$

代入③或④均可知⑤式确实成立,所以 L_3 也与 $x^2=2qy$ 相切。

□对称、旋转在解题中的应用

旋转和平移是数学中常见方法,在日常教学和学科活动中有意识地组织这方面的训练,不仅能使一些题目化难为易,而且对培养学生的变换能力大有好处。上海市市北中学金能杰、盛诗祥老师就旋转、对称法的应用例举说明如下:

【例 1】A、B 是直线 l 同侧两点,在 l 上求一点 P,使|AP|+|PB|最小。

解　作点 A 关于直线 l 的对称点 A',连结 AB 交 l 于 P,则 P 即为所求(见图1)。

此例也可理解为光学原理,AP 是入射光线,PB 是反射光线时,|AP|+|PB|最小。

注:若平面 M 和空间两点 A、B(在 M 同侧),在平面 M 内同样可找一点 P,使|AP|+|BP|最小(图2)。

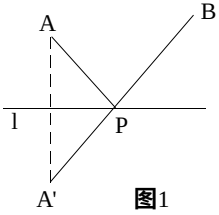


图1

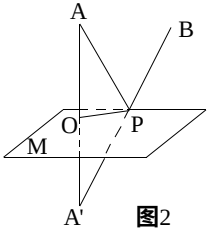


图2

【例2】　已知 A、B 是直线 l 两侧两个定点,在 l 上求一点 P 使|AP|-|PB|最大。

解　作点 A 关于直线 l 的对称点 A',连结 A'B 交直线 l 于 P,则 P 为所求(图略)。

【例3】　求函数

$Y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+5}$的最小值。

解　$Y=\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x-2)^2+1}$,要求 Y 最小值就是在 X 轴上求一点 P(X,0),使它到两点 A(1,2)、B(2,1)距离之和为最小。

A、B 在 X 轴同侧,B(2,1)关于 X 轴对称点 B'(2,-1),

, $|AB'|=\sqrt{(1-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$为点 P(x,0)到 A(1,2)、B(2,1)两点的距离和为最小。

, $Y=\sqrt{10}$。

【例4】　求函数 $Y=\sqrt{(X^2-2X+5)}-\sqrt{X^2+4X+5}$的最大值。

解　$\sqrt{(X-1)^2+2^2}-\sqrt{(X+2)^2+1^2}$,要求 Y 最大值,即在 X 轴上求一点 P

(X,0)到两定点 A(1,2)、B(-2,1)距离之差为最大。

A、B 在 X 轴同侧,AB 直线与 X 轴交点 P(-5,0)即为所求。

即当 X=-5 时,Y=|AB|=$\sqrt{10}$。

【例 5】已知 X+Y-1=0,求函数 $\sqrt{(X+3)^2+Y^2}+\sqrt{X^2+(Y+1)^2}$ 的最小值。

解 这是条件极值问题,利用例 1 来解较为方便,求 Y 最小值就是在直线 X+Y-1=0 上找一点 P(X,Y)到两定点 A(-3,0)、B(0,-1)距离之和为最小。

由离差公式知 A、B 在直线 l:X+Y-1=0 的同侧,作 B 关于直线 l 的对称点 B',连结 AB' 交 l 于 Q,可知 AB' 为最短,显见 B' 是以 BB' 为一边的正方形在第一象限内的一个顶点,

, B'(2,1),

, |AB'|=$\sqrt{26}$。易得 Q($\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$)。故当 X=$\frac{1}{3}$,Y=$\frac{2}{3}$时,所求函数的最小值为 $\sqrt{26}$。

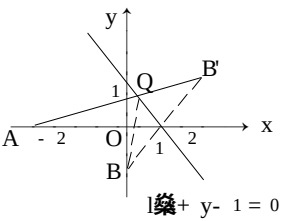


图3

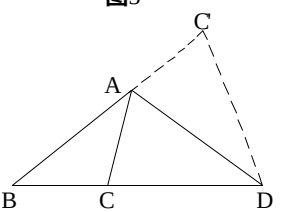


图4

【例 6】 已知 AD 是△ABC 外角平分线交 BC 延长线于 D,求证 BD:CD=AB:AC。

略证 利用角平分线可作△ADC 关于 AD 对称的△ADC',显然 B、A、C' 共线(图 4),, ∠1=∠2,AC=AC',CD=DC',由内角平分线性质知 AB:AC'=BD:DC',即得 AB:AC=BD:CD。

【例 7】 已知:△ABC 中,∠ABC=2∠C,AD 平分∠A,过 BC 中点 M 作 ME⊥AD 交 AB 延长线于 E。

求证：$BE=\frac{1}{2}BD$。

略证 将△ABC沿角平分线AD作对称图形△AGF。可见△AFC是等腰△，

，AD⊥FC，又EM⊥AD，，EM∥FC且M是BC中点。易得BD=BF，，$BE=\frac{1}{2}BF$

$=\frac{1}{2}BD$（图5）。

【例8】已知：四边形ABCD中，∠A=∠C，BD平分CA，判断ABCD是怎样的四边形？

略解 作△ABD关于直线BD的对称图形△A'BD。

（1）若A'与C重合，那么ABCD是以BD为对称轴的轴对称图形（筝形）。

（2）若A'与C不相重合，由AO=OC可知A、C到BD距离相等，

，A'、C到DB距离相等。，A'C∥BD。又∠BAD=∠BA'D=∠BCD，

，B、A'、C、D共圆且A'CDB是等腰梯形，，DC=BA'=AB，BC=A'D=AD，可知ABCD是平行四边形。

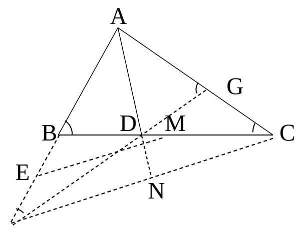


图5

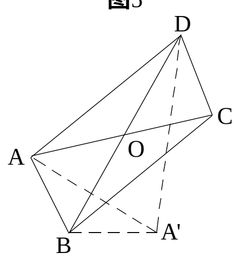


图6

【例9】 已知△ABC的BC边上有两点D、E，且BD=EC，求证：AB+AE>AD+AC。

证 取BC中点O，作△ADE关于O点的中心对称图形（绕O点旋转180°）△A'DE，显然△A'BC是△ABC关于点O的中心对称图形，即ADA'E、ABA'C均为平行四边形。延长A'D交AB于F，

A'B + BF > A'D + DF，

AF + DF > AD，

两式相加得 A'B + AB > AD + A'D，

即 AB + AC > AD + AE。

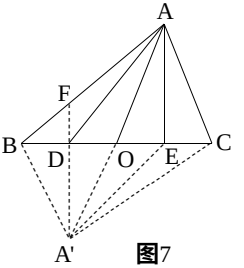


图7

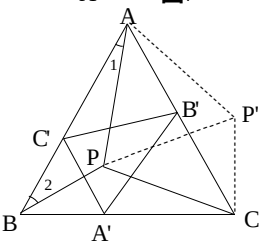


图8

【例10】 **设P为正△ABC内任一点，A'、B'、C'分别为P在三边BC，CA，AB上射影，证明** **以PA，PB，PC为三边恒能构成一个三角形，而且此三角形面积与△A'B'C'的面积之比为常数（《数学通报》征答题）。**

略证 **（1）将△APB以A以中心逆时针旋转到△ACP'位置，则△PCP'为以PA、PB、PC为边长构成的三角形，** PA + PB > AB = AC > PC，**故此三角形恒存在。**

由 P、A'、C、B'**共圆**
∠PA'B' = ∠PCB'
由 P、A'、B、C'**共圆**
∠PA'C' = ∠PBC'
∠PBC = ∠P'CA
} ∠PCP' = ∠C'A'B'

又 A、C'、P、B'**共圆，**

∠PAB' = ∠PC'B'，

∠A'C'P = ∠A'BP，

∠B'C'A' = ∠PAC + ∠PBA'

= 120° - （∠1 + ∠2），

，∠AP'P=60°。

，∠PP'C

=120°-(∠P'AC+∠P'CA)

=120°-(∠1+∠2)，

，∠PP'C=∠A'CB'，

，△PCP'∽△A'B'C'，

$$\frac{S_{\triangle PCP'}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\frac{P'C}{A'C'}\right)^2$$

$$=PB^2/(PB\sin 60°)^2=\frac{4}{3}。$$

【例11】 △ABC中，∠B=60°，AB∶BC=2∶1，△ABC内一动点P到三个顶点距离和的极小值是$2\sqrt{7}$，求△ABC的面积。(注 因不少资料有解，解略)

综上，根据等腰三角形、正三角形、平行四边形、圆、特殊点的几何性质或角平分线、光学原理等，运用旋转、对称法解题，可以繁为简，化难为易，并能够提高学生转化问题的能力，加强思维训练。

□数学中的旋转变换

我们先用一例子说明在平面几何中如何利用旋转变换。

例1 若P是正方形ABCD内部一点，且PA∶PB∶PC=1∶2∶3，求∠APB的大小。

解 由已知PA∶PB∶PC=1∶2∶3，可设PA=a，PB=2a，PC=3a，为了把它们集中在一个三角形中，我们用旋转变换的方法。以B点为旋转中心，把△BCP顺时针旋转到△BAP'的位置(如图1)。

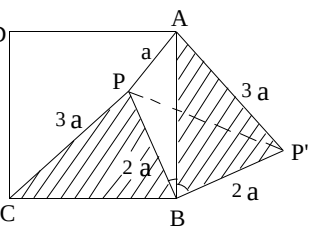


图1

PB⊥BP'，PB=AP'=2a，

，PP'=$2\sqrt{2}$a

在△APP'中，PC=AP'=3a，

$(3a)^2=a+(2\sqrt{2}a)^2$，

，∠APP'=90°，

那么 ∠APB=90°+45°=135°

这是一个较难的平面几何题，我们用旋转变换轻而易举地解决了。可见旋转变换是几何中的重要的方法与技巧，许多题目用它解答分外

简便。

所谓旋转变换,就是平面图形 F 以一个固定点 O 为中心,沿着一个方向(顺时针或逆时针)旋转一个角度 a,得到一个新图形 F'。

不难证明旋转变换有如下简单的性质。

〔设旋转角为 $\alpha(0<\alpha\leqslant\pi)$,旋转中心是 O 点〕

(1)图形 F 与图形 F'全等。

(2)图形 F 与图形 F'的对应直线段(或曲线段)相等。

(3)图形 F 与图形 F'的对应直线段(或曲线段)的对应点的顺序相同。

(4)图形 F 与图形 F'的对应点 A、A'与中心 O 的视角 $\angle AOA'=\alpha$。

(5)图形 F 与图形 F'的对应角相等。

(6)图形 F 与图形 F'的任意一对对应线段的夹角都相等(当 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,这个夹角 $=\alpha$,当 $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$ 时,这个夹角 $=\pi-\alpha$)。

旋转变换的出发点是把分散的已知条件,经过旋转某一个角度后,集中在一起,便于使用,利用解题,它是化难为易的一种巧妙方法。它的关键是选择适当的旋转中心,寻找合理的旋转角,然后用旋转变换的六个性质,解答有关的平面几何问题。下面以常见的正方形、等边三角形、任意三角形为例谈谈它的应用。

例 2 在正方形 ABCD 的顶点 A 向 BC 边上引任一直线 AE,且 $AE\cap BC=E$。作 $\angle EAD$ 的平分线 AF,且 $AF\cap DC=F$,求证:$AE=DF+BE$。

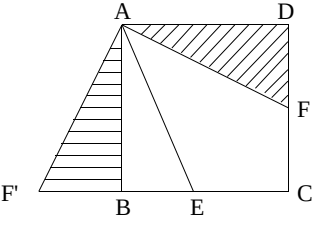


图2

证明:(如图 2)以 A 点为中心,把 $Rt\triangle ADF$ 顺时针旋转 90°到达 $Rt\triangle ABF'$ 的位置。

$EF'=BE+BF'=BE+DF$,

要证 $AE=DF+BE$,

只要证 $AE=EF'$,

即证 $\angle EAF'=\angle AF'E$,

但 $\angle EAF'=\angle FAF'-\angle EAF=90°-\angle FAD=\angle DFA=\angle AF'E$,

, $\angle EAF'=\angle AF'E$。

例 3 在正方形 ABCD 的边 CD 上任取一点 Q,连 AQ,过 D 作 $DP\perp AQ$,交 AQ 于 R,交 BC 于 P,$AC\cap BD=O$,求证:$OP\perp OQ$。

证明: $\angle RDQ=90°-\angle DQA=\angle DAQ$,$AD=DC$,

,　$Rt\triangle ADQ\cong Rt\triangle DCP$。

以 O 为中心将 $Rt\triangle ADQ$ 顺时针方向旋转 90°（如图 3），那么就与 $\triangle DCP$ 重合。这时，点 Q 与 P 重合，即 Q 与 P 为旋转变换的对应点，由性质（4）知，$OP\perp OQ$。

例 4　从等腰直角三角形的直角顶点 C 向中线 BD 引垂线 CE，延长 CE 交 AB 于 F，求证：$\angle BDC=\angle FDA$。

证明：　$\angle CBD=\angle ACE$，$BC=CA$，$BC\perp CA$，

,　**以斜边 AB 中点 M 为中心将直角 $\triangle BCD$ 逆时针旋转 90°到达 $Rt\triangle CAG$ 的位置（如图 4），$\angle BDC=\angle CGA$。**

$$\left.\begin{aligned}&DA=CD=AG\\&\angle DAF=\angle GAF=45^\circ\\&AF=AF\end{aligned}\right\}\Rightarrow\triangle DAF\cong\triangle GAF$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow\angle AGF=\angle ADF\\&\angle AGF=\angle CDB\end{aligned}\right\}\Rightarrow\angle BDC=\angle FDA。$$

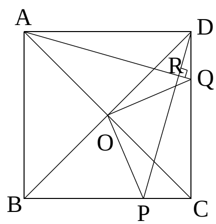


图3

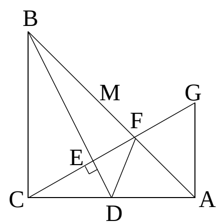


图4

小结：例 1、例 2 中的旋转变换是正方形的一个顶点为中心将某个图形旋转 90°；例 3、例 4 是以正方形中心为旋转中心，将某个图形旋转 90°（例 4 中等腰直角三角形可看作正方形一半）。一般地说，关于正方形通常有两种实用的旋转变换：

（1）以某一个顶点为中心，把某个图形旋转 90°；

（2）以正方形中心为旋转中心，将某个图形旋转 90°。

例 5　（如图 5）已知圆内接正三角形 ABC，P 是⊙ABC 内部一点，求证：$PA<PB+PC$。

证明：以 B 点为中心，把 $\triangle PBC$ 逆时针旋转 60°，到达 $\triangle P'BA$ 的位置。

$$\left.\begin{aligned}&\angle PBP'=60^\circ\\&BP=BP'\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\angle BPP'=60^\circ\\&\angle BPA>60^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow P、P'、A\text{ 不共线}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&PP'+AP'>AP\\&PP'=BP\\&AP'=PC\end{aligned}\right\}\Rightarrow AP<BP+PC。$$

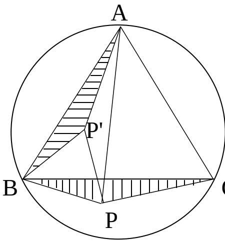


图5

例 6　**以** △ABC **之** AB、AC、BC **为边,向**△ABC **的** BC **边同侧各作正三角形** ABD、ACF、BCE,**求证:四边形** ADEF **是一个平行四边形。**

证明:　BC = BE,BA = BD,∠CBA = ∠EBD,

,　**以** B **为中心,将** CBA **逆时针方向旋转** 60°,**正好与**△EBD **重合(图** 6)。**由性质(**6)**知,**AC **与** DE **的夹角** = **旋转角** 60°。

∠CAF = 60°,

,　AF ∥ DE,DE = AC = AF,**即** AF // DE,

,　DAFE **是一个平行四边形。**

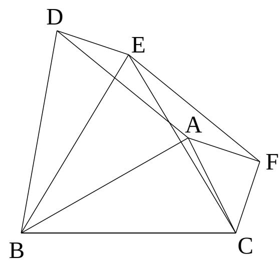


图6

例 7　**在等边**△ABC **中,在边** AB、BC、CA **上分别取点** A'、B'、C',**使** AA' = BB' = CC',**且** CA' ∩ BC' = D,AB' ∩ CA' = E,BC' ∩ AB' = F,**求证:**△DEF **是一个正三角形。**

证明 设 O **是正三角形** ABC **中心,**

△AC'B≌△BA'C,**作** OH⊥BC,OR⊥AB,

那么　∠ROH = 12°。

以 O **为中心,将**△ABC' **逆时针方向旋转** 120° **与**△BCA' **重合(图** 7),**由性质(**6)**知,对应线段** C'B **与** A'C **的夹角为** 180° - 120° = 60°,**即**∠EDF = 60°,**同理**∠DEF = 60°,,　△DEF **是一个正三角形。**

从例 5、**例** 6、**例** 7 **可以看出,关于正三角形图形通常有下列两种实用的方法:**

(1)**以一个顶点为中心将某个图形旋转** 60°**;**

(2)**以正三角形中心为中心,将图形旋转** 60°。

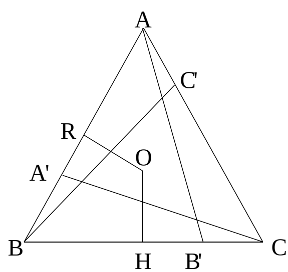


图7

例 8　**设**△ABC **的每一个内角都小于** 120°,M **是** △ABC **内部一点,且** ∠AMB = ∠BMC = ∠CMA = 120°,P **是**△ABC **内部任一点,求证:**PA + PB + PC ≥ MA + MB + MC。

证明 以 B **为中心将**△BPA **按逆时针方向旋转** 60°**到**△BP'A'**的位置(图** 8),**连结** CA'、PP',,BP = PP'**(注意,这是旋转** 60°**的一个明显性质),**AP = A'P'。

PC + PP' + A'P' ≥ CA',**即** PA + PA + PC ≥ CA',**等号仅在** C、P、P'、A、**共线时成立,当** C、P、P'、A' **共线时,则**∠BPC = 180° -

60°=120°,∠BP'A'=120°,, ∠BPA=120°,∠CPA=120°,P 与 M 重合。, MA+MB+MC=CA',即 PA+PB+PC≥MA+MB+MC。

这是 Fermat 问题,在每一个内角都小于 120°的三角形内,存在一点 M,当∠AMB=∠BMC=CMA=120°时,则 M 到三角形的三个顶点的距离之和最小,点 M 叫做 Fermat 点。这个问题用旋转变换较为简捷。

例 9 在 Rt△ABC 中,斜边 AB=2,△ABC 内有一动点 M 到三个顶点距离之和的最小值 $\sqrt{7}$,求这个三角形的两个锐角。

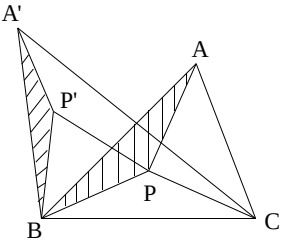


图8

解:由例 8 知,点 M 就是 Fermat 点,且∠CMA=∠AMB=∠BMC=120°,以 C 为中心,将△CMB 顺时针旋转 60°到△CM'B'的位置(图 9),连结 MM'。

易知 A、M、M'、B'共线,AB'=$\sqrt{7}$。

设∠BAC=α,

AB=2,则 CA=2cosα,BC=2sinα.

在△ACB'中,AC=2cosα,B'C=2sinα,∠ACB'=90°+60°=150°,

由余弦定理,得

$(2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha)^2-2\times4\cdot\sin\alpha\cos\alpha\cos150°=7$,

, $\sin2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

, $\alpha=30°$,或 60°,

, 这个三角形的两个锐角是 30°、60°。

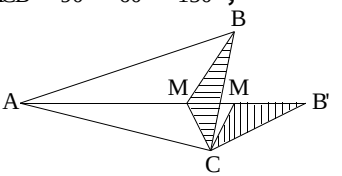


图9

旋转变换不仅是平面几何中的一种解题方法,而且它有利于培养学生用运动的观点去认识事物的内在联系和本质。所以在平面几何教学中,适当加强旋转变换的教学是非常必要的。

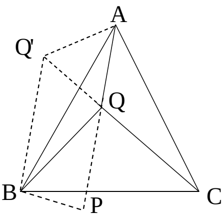
□旋转变换在解题中的应用

旋转变换指将平面图形绕着定点沿一定方向旋转一定角度,得到与原图形全等的图形的方法。应用它可将已知和未知中的有关元素集中在同一个三角形中或集中到两个全等的三角形中。一般多对等腰三角形、正三角形、正方形、正多边形施用。四川达县申家乡初中谭登志老师作了如下分析:

1. 旋转角为 60°(或 90°)时,旋转后得到与原图形形状和大小完全一样的图形

例 1 Q 为等边△ABC 内一点,已知 QA = 6,QB = 8,QC = 10,则最接近△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 的整数是____。

(1988 年江苏省初中数学竞赛试题)



略解: AB = AC,将△ABC 绕着 A 点沿顺时针方向旋转 60°。C 点必重合于 B,Q 点转到 Q' 点,得到△AQ'B ≌△AQC;易知△AQ'Q 是正三角形。, ∠AQQ' = 60°,QQ' = QA = 6 在△QQ'B 中,$Q'B^2 = QC^2 = 100$,$Q'Q^2 + QB^2 = 100$,, ∠Q'QB = 90°,, ∠AQB = 150° 在△AQB 中,由余弦定理得,$AB^2 = 6^2 + 8^2 + 2 \times 6 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100 + 48\sqrt{3}$,

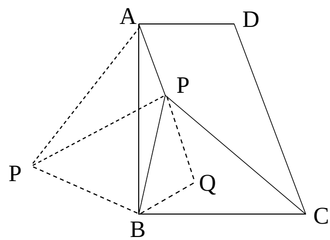
, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB$。

$\sin\angle BAC = \frac{1}{2}(100 + 48\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 25\sqrt{3} + 36$(取整) = 79。

求 AB 也可用勾股定理,过 B 作 BP ⊥ AQ,交 AQ 的延长线于 P,先求 PQ,PB,再求 AB 和正三角形的高,从而避免用余弦定理。

例 2 如图,四边形 ABCD 为直角梯形,且 AB = BC = 2AD,PA = 1,PB = 2,PC = 3,求 ABCD 的面积。(1987 年'缙云杯'初中数学邀请赛试题)

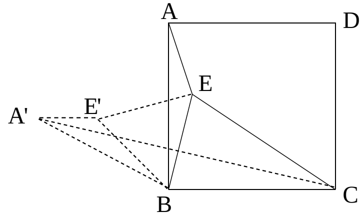


分析 此题隐含着等腰直角△ABC,P 是其内一点。

略解:AB = AC,将△CBP 绕着 B 点沿逆时针方向旋转 90°,C 点必重合于 A 点,得到△AP'B≌△CPB,连接 P'P,易知△P'BP 是等腰 Rt△;, ∠P'PB = 45°;在△AP'P 中,由勾股定理可知∠APP' = 90°,, ∠APB = 135° 过 B 作 BQ⊥AP 交 AP 的延长线于 Q,得等腰 Rt△PQB,可知 PQ = BQ = $\sqrt{2}$;

在 Rt△ABQ 中,可求得 AQ = $1\sqrt{2}$。AB = $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$; $S_{ABCD} = \frac{1}{2}$(AD + BC)。AB = $15/4 + 3\sqrt{2}/2$。

若用余弦定理求 AB 更简单。



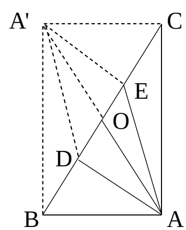
例 3 已知正方形 ABCD 内一点 E,E 到 A、B、C、三点的距离之和的最小值为$\sqrt{2}+\sqrt{6}$,求正方形边长。(1983 年湖北初中数学竞赛题)

略解 将△ABE 绕着 B 点逆时针方向旋转 60°到△A'BE'的位置,连接 EE',可求得∠A'BC=150° 连接 A'C,有 EA+EB+EC=A'E' +E'E+EC,易知 A'C 的长度等于 A'E' +E'E+EC 的最小值。

, A'C=$\sqrt{2}+\sqrt{6}$,在△A'BC 中,A'B=BC,由余弦定理,可求得 BC=2。

2. 旋转角为 180°时,旋转后得到原图形关于旋转定点(旋转中心)的对称图形

例 4 过直角三角形斜边所对的顶点作斜边的三等分点的连线,这两条线段的长分别是 a 和 b,且 $a^2+b^2=1$,求斜边的长。



解 如图,在△ABC 中,∠BAC=90°,BD=DE=EC,不妨设 AD=a,AE=b,设 BC 的中点为 O,将△ABC 绕着 O 点旋转 180°,B 点必重合于 C 点,D 点必重合于 E,得△A'BC 关于 O 点和△ACB 中心对称,连结 A'D、A'E,, A'D=AE=b,A'E=AD=a,连结 AA',则 AA'必过 O 点,且可知 AEA'D 是平行四边形,ABA'C 是矩形,, AA'=BC,设∠A'EA=α,, ∠DAE=∠180°-α,在△A'EA 中,由余弦定理得 $A'A^2=b^2+a^2-2ab\cos a$;……①

在△ADE 中,由余弦定理得 $DE^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-a)=a^2+b^2+2ab\cos a$。……②

由①+②有 $A'A^2+DE^2=2(a^2+b^2)$,即 $10DE^2=2$,, $DE=\sqrt{5}/5$,$BC=3DE=3\sqrt{5}/5$。故斜边长为 $3\sqrt{5}/5$。

□旋转法在两类证题中的应用

证平面几何题,关键是添好辅助线。常见添辅助线的方法,或连结、或延长、或平移、或旋转,因题而异、各有用途。本文要讲的是旋转法在证平面几何题中的应用。

安徽省怀宁县江镇中学黄全福老师认为,有两类几何题,常常要用到旋转法。

第一类:

当已知图形中出现有线段及其中点时,往往把某个三角形绕着中点旋转180°,造成中心对称图形,随着图形的搬家,问题就迎刃而解了。

例1 过△ABC的边AB中点G引一直线交AC于P、交BC延长线于Q,试证:$\frac{AP}{PC}=\frac{BQ}{QC}$。

证明 把△AGP绕着中点G旋转180°至△BGP'位置(图1),显然BP' = AP,$\frac{AP}{PC}=\frac{BP'}{PC}$。

不难证明BP' // CA,△P'BQ∽△PCQ,, $\frac{BP'}{PC}=\frac{BQ}{QC}$,故得$\frac{AP}{PC}=\frac{BQ}{QC}$。

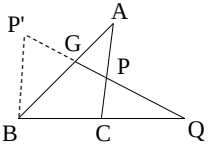


图1

例2 在Rt△ABC中,O为斜边AB之中点。在AC、BC各取一点P、Q,满足∠POQ = 90°。求证:$AP^2 + BQ^2 = CP^2 + CQ^2$。

证明 将△OBQ绕着中点O旋转180°至△OAQ'位置,连结PQ、PQ'(图2)。易证∠PAQ' = ∠PAB + ∠Q'AB = ∠PAB + ∠B = 90°,, $AP^2 + BQ^2 = AP^2 + AQ^{12} = PQ^{12}$。

另外由于OQ = OQ',PO⊥Q'Q(Q'、O、Q共线),, PQ' = PQ,故$AP^2 + BQ^2 = PQ = PQ^2 = CP'^2 + CQ'^2$。

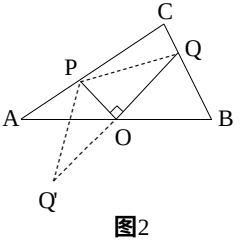


图2

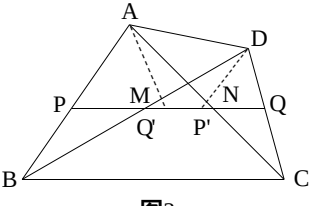


图3

例3　M、N是凸四边形ABCD的BD、AC之中点，直线MN交AB、DC于P、Q。试证：$\frac{AP}{PB}=\frac{CQ}{QD}$。

本题乍看，似乎难以下手。但考虑到出现有线段（BD、AC）和中点（M、N），不妨将与点有关的三角形加以旋转，视图3：

（1）将△MBP绕着中点M旋转180°至△MDP'位置，点P'必在PQ上；

（2）将△NCQ绕着中点N旋转180°至△NAQ'位置，点Q'亦在PQ上。

此时易证明AQ'∥DQ，DP'∥AP，加上P、Q'、P'、Q四点共线，故有△APQ'∽△DP'Q，，$\frac{AP}{DP'}=\frac{AQ'}{DQ}$。但DP'=PB，AQ'=CQ，，$\frac{AP}{PB}=\frac{CQ}{QD}$。

需要指出，本例只是证明了直线NM内分AB、CD成比例的情形。事实上，直线MN也同时外分BC、DA成相同的比例。请读者不妨运用旋转法试一试。

第二类

当已知图形中含有特殊的图形（如等腰三角形、正多边形等），往往把该图形内部的有关三角形绕着某一顶点旋转一个固定的角度（一般是特殊角），随着图形的搬家，问题的证法就逐渐有眉目了。

例4　△ABC的AB=AC，P是形内一点，若PB<PC，则∠APB>∠APC。

证明：将△ABP绕着顶点A旋转一个顶角到△ACP'位置，连结PP'（图4）。此时，AP=AP'，，∠APP'=∠AP'P。又PB<PC，即P'C<PC，，∠CPP'<∠CP'P。故∠APC<∠AP'C。但∠APB=∠AP'C，所以∠APB>∠APC。

例5　E、F两点分别在正方形ABCD的边BC、CD上，满足∠EAF=45°。试证：不论E、F的位置如何，点A到EF之距离恒为一个定值。

证明：将Rt△ADF绕着点A旋转90°至Rt△ABG位置，显然G、B、C共线（图5）

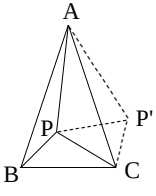


图4

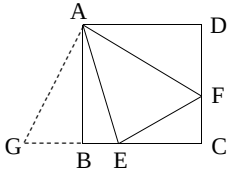


图5

∠GAE=GAB+∠BAE=∠DAF+∠BAE=90°-∠EAF=45°=∠EAF，AG=AF，AE=AE，，△AGE≌△AFE。

根据全等三角形对应边上的高相等的性质知，点A到EF之距离等于AB的长，所以它是一个定值。

例 6 点 X 在正三角形 ABC 的外部且居∠BAC 的内部。证明:XA≤XB+XC。

将△ABX 绕着点 A 旋转 60°到△ACY 位置,连结 XY(图 6)。显然△AXY 亦为正三角形,XY=XA,YC=XB。由 X、C、Y 三点的位置关系,不难得到 XY=YC+XC,即 XA≤XB+XC。

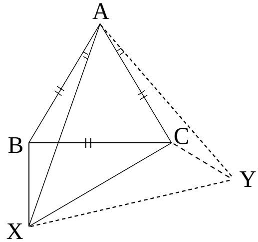


图6

当且仅当点 C' 在 XY 上时,XA=XB+XC。此时∠ABX+∠ACX=∠ACY+∠ACX=180°,故 A、B、X、C 四点共圆。视圆内接四边形 ABXC,根据托勒米(Ptolemy)定理,有 XA·BC=XB·AC+XC·AB,消去公因式,即得 XA=XB+XC。正好与上述结论一致!

例 7 若正三角形内部一点至各顶点的距离为 a、b、c,试计算这个正三角形的面积。

解:点 O 在正三角形 ABC 的内部,OA=a,OB=b,OC=c。由图 7 所示:(1)得△AOB 绕着点 B 旋转 60°至△CDB 位置,连结 OD;

(2)将△BOC 绕着点 C 旋转 60°至△AEC 位置,连结 OE;(3)将△COA 绕着点 A 旋转 60°至△BFA 位置,连结 OF。

易证△OAF、△OBD、△OCE 均为正三角形,边长分别是 a、b、c,其面积分别是$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$、$\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$、$\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$。

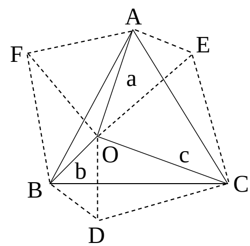


图7

同时还可证明△OCD≌△EOA≌△BFO,它们三边的长都是 a、b、c。显然面积为:

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$(p 为三角形的半周长)。

不难证明△ABC 面积=凸六边形 AFBDCE 的一半,故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)+3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}(a^2+b^2+c^2)+\frac{3}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}。$$

□运用旋转变换解题

旋转变换就是将已知图形(或某部分),绕一定点按一定的方向旋转一定角度,使原先条件与结论中较隐蔽的联系显露出来,达到解题目

的的一种几何解题方法。在已知中有线段相等这一条件时,可以考虑运用旋转变换法来求解。旋转的角度一般为 60°、90°、180°或等于某已知确,旋转的定点一般为线段的端点或中点以及图形的中心等。贵州省剑河县南加中学杨通刚老师举例作了说明:

例 1 如图 1,已知正△ABC 内接于⊙O,P 为$\overset{\frown}{BC}$上任一点。求证:PA = PB + PC。

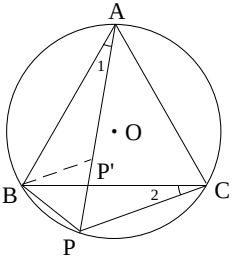


图1

证明:因 AB = BC,∠1 = ∠2,所以以 B 为定点将△BPC 旋转 60°到△BAP'的位置上。

△BPC≌△BAP',

, AP' = PC。

又 BP = BP',∠PBP' = 60°,

, △BPP'为等边三角形,故 PP' = PB。

, AP = PP' + P'A = PB + PC.

例2 如图2,已知正方形 ABCD 中,DE 六 AB 于 E,DF 交 BC 于 F,且 $\angle EDF = 45°$,$DM \perp EF$ 于 M。试证 DM 为定值。

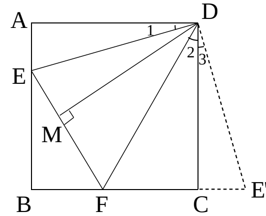


图2

证明 以点 D 为定点,将△AED 按逆时针方向旋转 90°。因 DA = DC,则 DA 与 DC 重合,$\triangle DAE \cong \triangle DCE'$。

$\angle DCF = \angle DCE' = 90°$,

, F、C、E'三点共线。

由 $\angle 1 + \angle 2 = 45°$,$\angle 1 = \angle 3$,

有 $\angle 2 + \angle 1 = 45°$。

又 DF = DF,DE = DE'

, $\triangle DEF \cong \triangle DE'F$,

, DM = DC(定值)。

例3 已知 E、F 为△ABC 的边 BC 上的三等分点,中线 BM 交 AE 于 Q。试求 BP∶PQ∶QM 的值。

解 以 M 为定点将整个图形旋转 180°,如图3所示。根据中心对称性,有 AE∥CF'。PQ = P'Q',QM = Q'M,由 AE∥CE',有 $\frac{x}{2(y+z)} = \frac{BF}{EC} = \frac{1}{2}$,

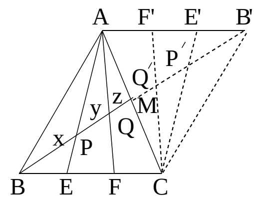


图3

即 $x + y = z$。 ①

由 AF∥CF',

有 $\frac{x+y}{2z} = \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$,

即 $x + y = 4z$。 ②

由①、②解得 $x = \frac{5}{2}z$,$y = \frac{3}{2}z$。

, $x∶y∶z = \frac{5}{2}z ∶ \frac{3}{2}z ∶ \frac{2}{2}z = 5∶3∶2$。

即 BP∶PQ∶QM = 5∶3∶2。

例4 如图4,已知△ABC 中,AB = AC,P 为△ABC 内一点,且 PB > PC。

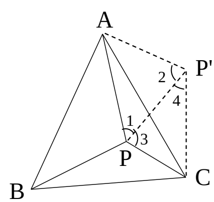


图4

求证:$\angle APB < \angle APC$。

证明 以∠A 为定点,将△ABP 按逆时针方向旋转∠BAC 的度数,则 AB 与 AC 重合,P'C = PB,连结 PP'。

AP = AP',

, $\angle 1 = \angle 2$。

又 $PB = P'C$，

$PB > PC$，

∴ $P'C > PC$，

∴ $\angle 3 > \angle 4$。

∴ $\angle APC = \angle 1 + \angle 3 > \angle 2 + \angle 4 = \angle AP'C$，

而 $\angle APB = AP'C$，

∴ $\angle APB < APC$。

□几何题的旋转变换证法

将平面图形 N_1，绕平面内一定点 M 旋转一个定角 α 的一个新位置 N_2，这样的变换叫做旋转变换。M 点叫做旋转中心，α 旋转角。平面图形经旋转变换后，它的位置发生了变化，但图形中线段的长度和角的大小保持不变。据此性质，便可利用旋转变换来证明几何题。

对于给定的几何证明题，当图中有两条相等线段，且它们是共端点时，便可考虑是否能用旋转变换法证之。用此法证几何题时，首先应选择适当的旋转中心，然后确定旋转角的大小以及旋转方向，在一般情况下，可考虑选两条相等线段的公共端点为旋转中心，它们的夹角的旋转角。此证法对证明有些几何题是比较简便的。如：

例 1 已知，如图 1，P 为正方形 ABCD 内一点，且 $PA:PB:PC = 1:2:3$，求证 $\angle APB = 135°$。

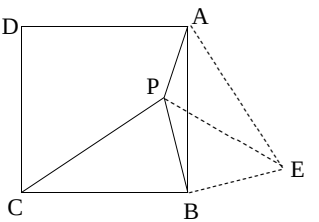


图1

证明：将 $\triangle CPB$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ABE$ 的位置，连结 PE，则 $BE = BP$。

$\angle PBE = 90°$

∴ $\angle BPE = 45°$，由勾股定理，得 $EP = 2\sqrt{2}k(k \neq 0)$。

在 $\triangle APE$ 中，由于三边满足 $k + (\sqrt{2k})^2 = (3k)^2$，

∴ $\angle APE = 90°$，$\angle APB = 135°$。

例 2 如图 2，$\triangle ABC$ 是正三角形，P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，求证：$PA = PB + PC$。

证明：将 $\triangle APC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ADB$ 的位置，则 $\angle ABD = \angle ACP$，$PC = DB$。

$\angle ACP + \angle ABP = 180°$，

，$\angle ABD + \angle ABP = 180°$，即 $PD = PB + BD = PB + PC$。

$\angle APD = \angle PAD = 60°$，，$PD = PA$。

，$PA = PB + PC$。

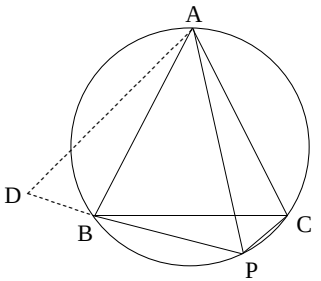


图2

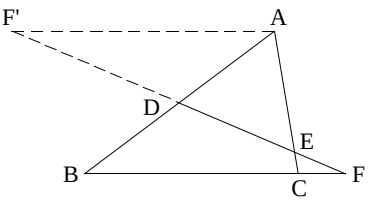


图3

例3 如图3，在△ABC中，D是AB的中点，在AC上任取一点E，直线DE交BC的延长线于F。

求证：$AE \cdot FC = BF \cdot EC$。

证明：将△DBF绕点D顺时针旋转180°至△DAF'的位置，则 $AF' = BF$。

$\angle AF'E = \angle CFE$，，△AEF' ~ △CEF。

，$\frac{AF'}{CF} = \frac{AE}{EC}$，即 $\frac{BF}{CF} = \frac{AE}{EC}$，，$AE \cdot CF = BF \cdot EC$。

例4 如图4，在△ABC中，AD是BC边上的中线，过B作射线BE，分别交AC、AD于E、F。已知 AF：FD = 1：5，求证：AE：EC = 1：10。

证明：将△FBD绕点D顺时针旋转180°至△GCD的位置，则 $\angle FBC = \angle GCB$。

，$EF \parallel GC$。

AF：FG = AF：（FD + DG），FD = DG，

，AF：FG = AF：2FD = 1：10，即 AE：EC = 1：10。

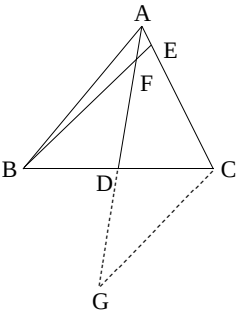


图4

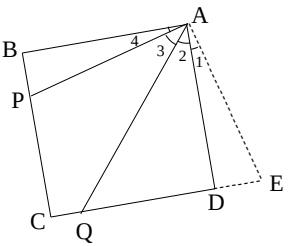


图5

例5 如图5,P为正方形ABCD的边BC上一点,AQ平分∠DAP,交CD于Q。求证:AP=BP+DQ。

证明:将△ABP绕点A逆时针旋转90°至△ADE的位置,则BP=DE,∠1=∠4。

∠1=∠2,, ∠BAQ=∠EAQ。

∠BAQ=∠AQE,

∠QAE=∠AQE,

, EQ=EA。

AP=AE,, AP=QE。

QE=DQ+DE,, AP=BF+DQ。

□用旋转法证明平面几何题

平面几何中的旋转,是指以某点为中心,将一已知图形按一定方向(顺时针或逆时针)旋转一定的角度到达一个新的位置。由于旋转后

的图形与原图形中的对应元素(角、边)相等,这样就可以将图形中有角、线段等较为集中,使之沟通,从而使证明比较直观,简洁。江苏东台市城南中学沈德仁老师分析了下例

例1 已知 如图1,点C为线段AB上一点,△ACM、△CBN是等边三角形,连接AN、BM分别与CM、CN、交于E、F点。

求证 :1°AN = BM;

2°CE = CF。

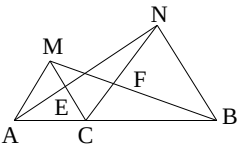


图1

证明 将△ACN绕C点按顺时针方向旋转60°,则 :1°A点与M点重合,N点与B点重合。

即 △ACN与△MCB重合。

从而 AN = BM。

2° ∠MCN = 60°,, △ACN中的线段CE经过旋转落在CN上。 点E既在CE上又在AN上,, 经过旋转点E既在CN上又在MB上,故应为F点,即E点与F点重合,从而CE = CF。

注 :此题中第1°小题一般常采用证二个三角形全等即可,第2°小题的证明就比较麻烦。而用旋转法来证明此题时则比较简便。

练习 :已知,如图2,以△ABC各边分别向外侧作等边三角形A'BC、B'AC、C'BA,

求证 :AA' = BB' = CC'。

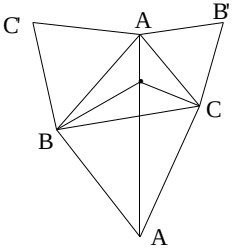


图2

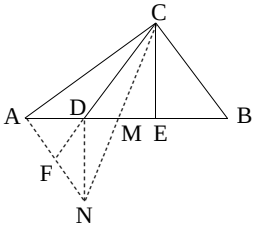


图3

例2 已知,如图3,在△ABC中,D、E为AB边上的三等分点,

求证:CA + CB > CD + CE。

证明 取AB中点M,连接CM,将△BMC绕M点按顺时针方向旋转180°,则B点与A点重合,E点与D点重合,C点到达它关于M点对称的点的位置N(如图3所示)连接DN,延长CD交AN于F,显然有CB = AN,CE = DN。

CA + AF > CF = CD + DF,

DF + FN > DN,

, CA + AF + FN > CD + DN。

即 CA + CB > CD + CE。

注:此题一般常采用作辅助线后先证明:△ANM≌△BCM,△DNM≌△ECM,从而得到有关对应线段相等,然后再证明所要证的结论;而用旋转法证明此题时,由旋转后直接就可以得到有关对应线段相等,从而简化了证明过程。

练习:求证:三角形三边的和大于三中线的和。

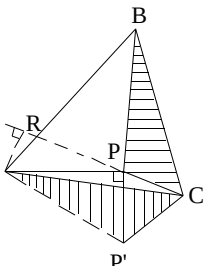
□旋转变换在平几解题中的应用(一)

"旋转变换"在平几解题中有着重要的应用,特别是对于有关正三角形、正方形等一类问题的求解。这里谈的"旋转变换"指的就是平面图形绕定点的旋转,因此,在一般情况下,其图形的形状和大小均不改变。浙江湖洲市菱湖中学吴伯钦老师作了如下例析:

1. 以正三角形为基础的图形的旋转变换。

例1 P为正△ABC内一点,PC = 3,PA = 4,PB = 5,求正三角形边长。(如图)

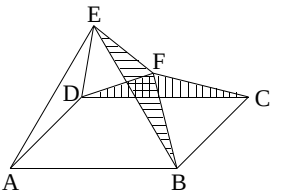
分析:本题中线段PA、PB、PC如能设法使之成为同一三角形的三边,就找到了解题途径。考虑到△ABC是正△,为此把△BCP绕C点逆时针方向旋转60°得△ACP'。



解:以C为中心,将△BCP逆时针方向旋转60°,那么B落在A点,P落在P'点,连接PP', CP = CP', ∠PCP' = ∠BCA = 60°,, △PCP'是正三角形,PP' = PC = 3,P'A = PB = 5,PA = 4。 $PP'^2 + PA^2 = P'A^2$,, △APP'是Rt△,∠APP' = 90°,作AR⊥PC于R,那么∠APR = 180° - 60° - 90° = 30°,, $AR = \frac{1}{2}AP = 2$, $PR = \frac{1}{2}\sqrt{3}AP = 2\sqrt{3}$, $RC = 3 + 2$

$\sqrt{3}$,在 Rt△ARC 中,$AC=\sqrt{AR^2+CR^2}=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$。

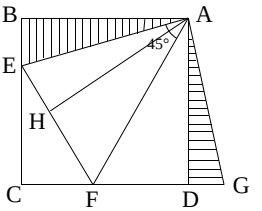
例 2 已知:▱ABCD,分别以 AB、BC 为边向平行四边形内侧作正三角形 ABE 和 BCF,求证:△DEF 是正三角形。(如图)



证明:以 F 为中心,把△FDC 接顺时针方向旋转 60°,则 FC 变到 FB 位置, CD $\underline{\underline{/\!/}}$ AB,∠EBA = 60°, , CD 变到 BE 位置,故 FD = FE,且∠DFE = 60°, , △DEF 是正三角形。

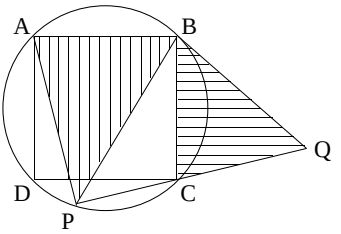
2. 以正方形为基础的图形的旋转变换。

例 3 已知:在正方形 ABCD 内有△AEF,∠EAF = 45°,E、F 分别在 BC、CD 上任意滑动。(如图)求证:(1)△AEF 的高 AH 为定值。(2)EF = BE + FD。



分析:当 E 在 BC 上滑动、E 和 B 点重合时,∠EAF = 45°,F 和 C 重合;E 和 C 重合时,F 和 D 重合,因此可以猜想△AEF 的高 AH 是正方形的边长。

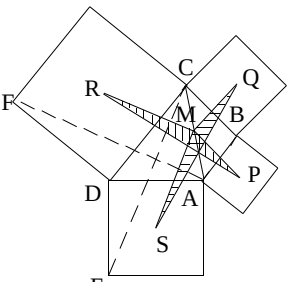
证明:把△ABE 绕 A 点按逆时针方向旋转 90°,在正方形外得△ADG,则 AE = AG,∠FAG = ∠EAF = 45°, , △AEF≌△AGF,故 AH = AD(定长),且 EF = FG = BE + FD。



例 4 ABCD 为圆内接正方形,P 是$\overset{\frown}{CD}$上一点,连 PA、PB、PC,过 B 作 BQ⊥PB 交 PC 延长线于 Q。求证:PA + PC = PQ。(如图)

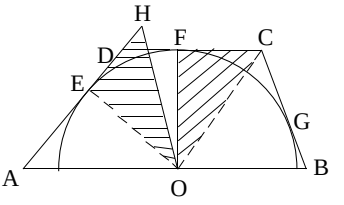
证明:以 B 为中心,把△BAP 按逆时针方向旋转 90°,则 BA 和 BC 重合,BP 落在 BQ 方向, ∠BCQ = ∠BAP,, AP 落在 CQ 方向,, △BAP≌△BCQ,从而 PA = CQ,, PA + PC = PQ。

例 5 ABCD 为任意四边形,以其四边各向四边形外侧作正方形,如图,设 P、Q、R、S 为四个正方形的中心。求证:(1)PP,(2)



例 4y 上

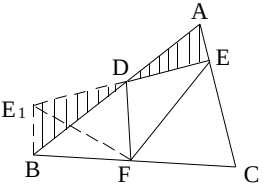
求 M:以 D 为旋转中心,把△ADF 按顺时针方向旋转 90°得△EDC,则 AF = EC,AF⊥EC。连接 AC,取 AC 中点 M,连接 MS、MQ、MR、MP, $MS \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}EC$, $MR \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AF$,, MS = MR,MS⊥MR,同理 MP = MQ,



证明:设 E、F、G 是切点,O 是内切圆心,以 O 为中心,把△OFC 逆时针方向旋转∠EOF,OE = OF,故 F 变到 E 点,FC 落在 AD 上,C 点落在 AD 上 H 处,令∠OCF = ∠OHE = θ,则∠OCB = θ, A、B、C、D 四点共圆,, ∠OAH = 180° - 2θ,∠AOH = 180° - (180° - 2θ) - θ = θ,, ∠AOH = ∠AHO,AH = AO = AE + EH = AE + GC,同理 OB = BG + ED,两式相加得:AB = AD + BC。

4. **旋转 180°——中心对称。**

例 9 在△ABC 中,点 D 是 AB 边的中点,E、F 分别是 AC、BC 上的点。

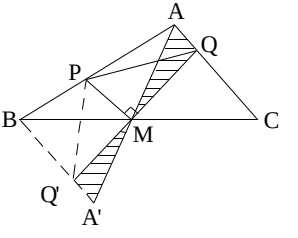


证明:△DEF 的面积不超过△ADE 和△BDF 的面积之和。(如图)

分析:考虑如何把△ADE 和△BDF 拼成一块图形,然后和△DEF 的面积比较。

证明:以 D 为对称中心,把△ADE 旋转 180°变换成△BDE$_1$,则四边形 BFDE$_1$ 是凸四边形。, $S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BDE_1} + S_{\triangle BDF} = S_{四边形BFDE_1} \geqslant S_{\triangle DE_1F} = S_{DE}$(当 E 和 A 重合或 F 和 B 重合时,上式取等号)。

例 10 已知 M 是 Rt△ABC 斜边 BC 的中点,P、Q 分别在 AB、AC 上,且 PM⊥QM,求证:$PQ^2 = PB^2 + QC^2$。(如图)

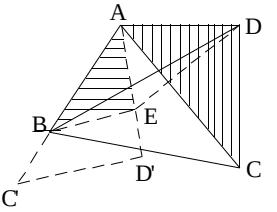


分析:能否使 PB、QC、PQ 构成一个 Rt△的三边是解题的关键。考虑到 PM⊥QM,MA = $\frac{1}{2}$BC,故为 M 为中心,把△AMQ 旋转 180°得△A'MQ'。

证明: AA' = BC,且互相平分,, A'Q' ∥ AQ,A'B⊥AB,且 Q' 在 A'B 上,连接 PQ', PM⊥QQ',MQ = MQ',, PQ' = PQ,又 BQ' = CQ,故在 Rt△PBQ' 中有:$PQ'^2 = PB^2 + Q'B^2$,即 $PQ^2 = PB^2 + QC^2$。

前面列举的都是平面图形绕定点旋转,而不改变其形状、大小的情形。如果以某定点“旋转”后,又以它为位似中心,再进行图形的放大或缩小而得到新的图形,从而达到解题的目的,那末这是一种“旋转”加“位似”的变换,它属于所谓“仿射变换”。举一例介绍如下:

例 11 在任意凸四边形 ABCD 中,求证:AC·BD≤AB·CD + AD·BC(如图)



分析：考虑 $AC\cdot BD\leqslant AC(BE+ED)=AB\cdot CD+AD\cdot BC$，使得 $AC\cdot BE=AB\cdot CD$，$AC\cdot DE=BC\cdot AD$ 成立的这样的 E 点是否存在？由 $AC\cdot BE=AB\cdot CD$，得 $\frac{BE}{AB}=\frac{CD}{AC}$，能否找到 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$。

证明：以 A 为中心，先把 $\triangle ACD$ 顺时针方向旋转 $\angle BAC$ 得 $\triangle AC'D'$，再以定比 $K=\frac{AB}{AC}$ 为位似比，变换成 $\triangle ABE$，连接 ED，则 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，且 $\triangle AED\backsim\triangle ABC$，（两边对应成比例，夹角相等），$\frac{BE}{AB}=\frac{DC}{AC}$，即 $BE\cdot AC=DC\cdot AB$，同理可得 $DE\cdot AC=BC\cdot AD$，两式相加得：$AC(BE+DE)=AB\cdot CD+AD\cdot BC$，$BE+DE\geqslant BD$，，$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$。当 E 在 BD 上时，ABCD 是圆内接四边形，上式取等号。

通过以上例题分析，可知旋转变换在平几解题中如能恰当而灵活地应用，会使部分难题化难为易，迎刃而解。虽然它在解析几何、复数领域内有着更广泛的应用，但在平面几何中较早地应用这种方法解题，将会有助于学生开拓思路，提高兴趣，增强能力，为今后的学习打下良好的基础。

□旋转变换在平几解题中的应用（二）

变换是近代数学的一种重要的思想方法。在几何证题中，应用旋转变换探索解题途径，寻找解题方法，是变换思想在几何中的具体应用。倘若我们在几何教学中，能适当运用旋转变换，这对于开阔视野，启迪思维，提高学生的解题能力都是有益的。江苏无锡向阳中学芮林森老师分析了旋转变换在平几教学中的应用。

1. 证明几何等式

例 1 已知 P 为等边三角形内一点，且 $\angle APB=150°$，求证：$PC^2=PA^2+PB^2$

证明：如图 1，将 $\triangle APC$ 以 A 点为中心，按顺时针旋转 60°，则 C 转到 B，设 P 转到 P'，连 P'B，P'P 则 $P'B=PC$，$\triangle AP'P$ 为等边三角形，，$\angle P'PB=150°-60°=90°$，，$\triangle P'PB$ 为直角三角形，，$PC^2=P'B^2=P'P^2+PB^2=PA^2+PB^2$。

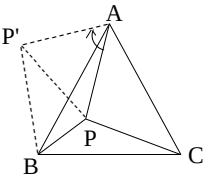


图1

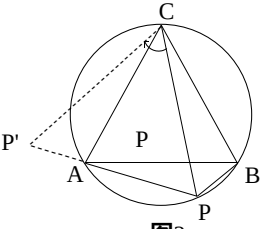


图2

例2 已知 P 为等边△ABC 外接圆的劣弧$\overset{\frown}{AB}$上任意一点，求证：PA + PB = PC。

证明 如图2，将△CBP 以 C 点为中心，按顺时针旋转60°，则 B 转到 A，设 P 转到 P'，这时△CBP 转到△CAP'，，CP' = CP，P'A = PB，∠CAP' = ∠CBP，因而∠CAP' + ∠CAP = ∠CBP + ∠CAP = 180°，，P'、A、P 共线，又三角形 CP'P 为等边三角形，，P'C = P'P = P'A + PA，，PA + PB = PC。

2. 证明几何不等式

例3 已知△ABC 中，AB = AC，P 是△ABC 内一点，∠APB > ∠APC。

求证：PB < PC。

证明 如图3，以 A 为中心，以∠BAC 为旋转角，将△ABP 作一逆时针旋转。设△ABP 转到△ACP'。连结 PP'，则 AP = AP'，，∠APP' = ∠AP'P，又∠AP'C = ∠APB > APC，故∠P'PC < ∠PP'C，，PB = P'C < PC。

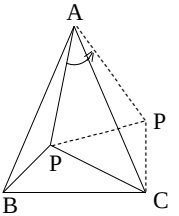


图3

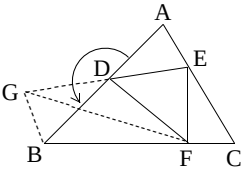


图4

例4 在△ABC中，D是AB的中点，E、F分别在AC、BC上。证明：△DEF的面积不大于△ADE与△BDF的面积之和。（苏联第17届奥林匹克竞赛题）

证明 如图4，将△ADE绕着中点D旋转180°，得△BDG，则 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BDG}$，$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DCF}$ 而四边形BGDF是凸四边形，，$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DGF}<S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BDF}$。

3. 确定几何量的大小

例5 如图5，点M、N分别在正方形ABCD边BC、CD上，已知△MCN的周长等于正方形ABCD周长的一半，求∠MAN。（第四届初中《祖冲之杯》数学竞赛题）

解 将△AMB绕点A按逆时针方向旋转90°，边AB落在AD上，M点到M′点。

∠ADM′ = ∠ABM = 90°，，∠NDM′ = ∠NDA + ∠ADM′ = 180°，，N、D、M′共线，△MCN的周长 = 正方形ABCD周长的一半 = BC + CD，，MN = BM + ND = M′N，又AM′ = AM，AN = AN，，△ANM′ ≌ △ANM，，$\angle MAN=\angle NAM'=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$。

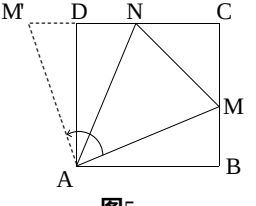


图5

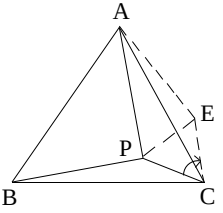


图6

例6 如图6，已知P是等边△ABC内的一点，PB=2，PC=1，∠BPC=150°，求PA。（浙江省第一届初中数学竞赛初赛A卷题）

解 将△PBC绕C点顺时针旋转60°至△EAC处，则PC=EC=1，PB=AE=2，∠PCE=60°，△PCE为等边三角形，PE=1，∠PEC=60°，∠AEP=∠AEC-∠PEC=150°-60°=90°，在Rt△APE中，AP=$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$。

第二十一部分

3+X·数学解题中的比较方法及其运用

□数学解题中的尝试与比较

很多数学应用问题,常常不是直接套用我们所熟悉的定理或公式就能解决的。对它们常需要反复进行尝试和比较,才可能求得所需要的答案,四川西昌师专张文忠老师分析了如下一个简单有趣的寻求体积最佳值的应用题的例子:

有一块边长为 a 的正方形铁皮,想用它来焊接一个有盖的长方体的油箱。当不计铁皮的厚度和接头的重叠部分,并且每个面的铁皮也没有迸缝时,如何下料才能使它的容积最大?

对这个问题,我们所熟悉的结论‘表面积相同的长方体中,正方体的体积最大”显然不适用。因为在每个侧面不准拼接的条件下,若焊成一个正方体,它的棱长最多只能是$\frac{a}{3}$,如图 1,下料将丢掉阴影部分的一大块铁皮,此时焊成的正方体的容积为 $V_1=(\frac{a}{3})^3=\frac{a^3}{27}$

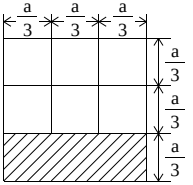


图1

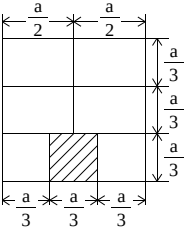


图2

改进一点，按图 2 下料，焊成一个底面边长为$\frac{a}{3}$的正方形，高为$\frac{a}{2}$的长方体，其容积为 $V_2=(\frac{a}{3})^2\frac{a}{2}=\frac{a^3}{18}$

显然，$V_2>V_1$。

再尝试着将底面从正方形变成矩形，如图 3 下料以减少丢掉的阴影部分的铁皮。这时将得到长、宽、高分别为$\frac{2a}{5}$，$\frac{3a}{10}$，$\frac{a}{2}$的长方体，其容积为 $V_3=\frac{2a}{5}\cdot\frac{3a}{10}\cdot\frac{a}{2}=\frac{3a^3}{50}$。

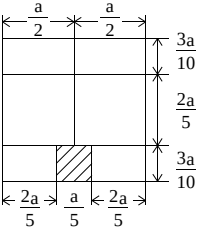


图3

因$\frac{3a^3}{50}>\frac{3a^3}{54}=\frac{a^3}{18}$，故 $V_3>V_2$。

此时可以看出，如果保持长方体的高为$\frac{a}{2}$，改变底面长方形的长和宽，其体积就会跟着变化。底面的长和宽取多少时，才会使长方体的容积最大呢？就不需要再这样尝试下去了。此时我们熟悉的二次函数求极值的方法正好派上用场。

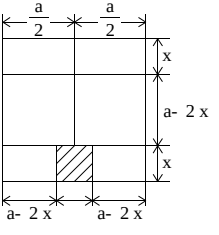


图4

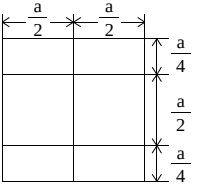


图5

如图 4，设所作出的长方体底面长方形的长为 x，则宽为 a-2x 时能最大限度地利用材料，长方体的高仍为$\frac{a}{2}$。其容积为

$$V=x(a-2x)\frac{a}{2}=-ax^2+\frac{a^2}{2}x$$

$$=-a(x-\frac{a}{4})^2+\frac{a^3}{16}。$$

因 $a>0$,故当 $x-\frac{a}{4}=0$,即 $x=\frac{a}{4}$时,V取得极大值 $V_4=\frac{a^3}{16}$。

这时应如图5这样下料,恰好整块铁皮都用上了,所得长方体的长、宽、高分别为$\frac{a}{4}$、$\frac{a}{2}$、$\frac{a}{2}$。

因$\frac{a^3}{16}=\frac{3a^3}{48}>\frac{3a^3}{50}$,故 $V_4>V_3$。

虽然按上面的这种下料方式的尝试已经不能再改进了,但还不能由此草率地下结论说V就是要求的最大容积。因为还存在另外一种下料的方式,还必须进行尝试和比较。

如图6那样下料,可焊成长、宽、高分别为$\frac{a}{4}$、$\frac{a}{4}$、$\frac{3a}{4}$的正四棱柱,其容积为

$$V_5=\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{3a}{4}=\frac{3a^3}{64}。$$

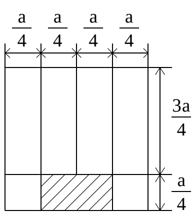


图6

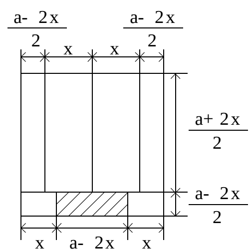


图7

显然 $V_4>V_5$。

类似于前面的办法,若改变底面长方形的长和宽(高也会随着改变),则长方体的体积会改变。如图7,设底面的长为 x,则宽为$\frac{a-2x}{2}$能最好地利用材料,相应地长方体的高为 $a-\frac{a-2x}{2}=\frac{a+2x}{2}$相应的容积为

$$V=x\cdot\frac{a-2x}{2}\cdot\frac{a+2x}{2}=\frac{1}{4}a^2x-x^3。$$

这里V是x的三次函数,用导数求极值的方法(*)易证明,当 $x=$

$\frac{\sqrt{3}}{6}a$ 时其容积最大为

$$V_6=\frac{1}{4}a^2\frac{\sqrt{3}}{6}a-(\frac{\sqrt{3}}{6}a)^3=\frac{\sqrt{3}}{36}a^3。$$

因$\frac{a^3}{16}=\frac{2a^3}{32}>\frac{\sqrt{3}}{36}a^3$，故 $V_4>V_6$。

不再有其它的下料方式了，于是按上面的比较结果知，图 4 的下料所焊成的长方体的容积 $V_4=\frac{a^3}{16}$ 为最大。

若将所提出的问题改为焊成一个无盖的长方体容积，其余的条件不变，应当如何下料才能使容积大呢？

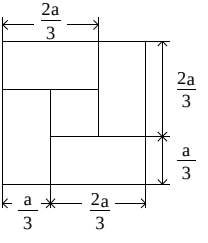


图8

尝试一下就知道，再按图 4 下料（去一块）所得的容积 $V=\frac{a^3}{16}$ 已不是最大的了。因为我们可以如图 8 这样下料，一点铁皮都不丢地焊成一个底面是边长为 $\frac{a}{3}$ 的正方形，高为 $\frac{2a}{3}$ 的无盖长方体容器，其容积为

$$V_8=(\frac{a}{3})^2\cdot\frac{2a}{3}=\frac{2a^3}{27}。$$

因$\frac{2a^3}{27}>\frac{2a^3}{32}=\frac{a^3}{16}$故 $V_8>V_4$。

我们按图 9 这样在铁皮的各角截去相同的小正方形后折起各边焊成无盖的长方体容器。它的容积随小正方形的边长 x 的改变而变化，

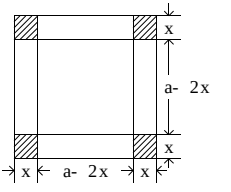


图9

能否变得超过图 8 的容积 V_8 呢？为此，只需讨论容积 $V=x(a-2x)(a-2x)$ 的极大值。注意到三个正数的几何平均值不超过其算术平均值，有

$$\sqrt[3]{4V}=\sqrt[3]{4x(a-2x)(a-2x)}$$

$\leqslant \frac{4x+(a-2x)+(a-2x)}{3}=\frac{2a}{3}$，

由此得 $V\leqslant\frac{2a^3}{27}$，等号当且仅当 $4x=a-2x$，

即 $x=\frac{a}{6}$ 时取最大值，这就是说，当取 $x=\frac{a}{6}$ 时，用图 9 的方式下料所得容积 $V_9=\frac{2a^3}{27}$ 最大。它在数值上恰好与图 8 的结果 V_8 相同，此时还顺带说明了应用问题中取得最大值的方式不一定唯一。

类似地，我们还可以用给定的正方形或其它形状的铁皮，在同样的约定下设计出容积最大的正三棱锥、正三棱柱等等不同的几何体，它们都需要经过仔细地尝试和比较才可能获得最佳的结果。

＊ 因 $V'=\frac{1}{4}a^2-3ax^2$，当 $V'=0$ 时，$x=\frac{\sqrt{3}}{6}a$。且 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}a$ 时，$V''=-6x<0$ 故此时 V 取极大值。

□中学数学中的比较方法及其功能

所谓比较就是在思维中确定所研究对象的异同。比较是数学教学的重要手段，是学生理解和掌握知识的重要方法。心理学中的研究表明，在教学中切当地运用比较，有利于引导学生逐步分辨问题的本质特征和非本质特征。正如苏联著名教育家乌申斯基所说的那样："比较是一切理解和思维的基础，我们正是通过比较来了解和认识世界上的一切的。"由于我们要'了解"的内容不同，所以比较的方法各异，功能有别。江苏教育学院毛毓球、连云港市教科所臧雷老师结合中学数学教学分析了比较的方法及其功能。

1. 鉴别比较，区分异同

在教学中，为了加深对某些相关概念的认识和理解，掌握种属关系概念外延范围，我们可通过对具体事例的鉴别比较，区别不同点，明确相关概念的逻辑关系。

例如，下列各式是代数式还是函数？

$x-2$，$\frac{1}{1-a^2}$，$\frac{1}{\sqrt{t^2-2}}$。

在初中代数第一册提到这些都是代数式，这时 x，a，t 分别表示某个数的常量，各式只有一个值即代数式的值。在初中代数第四册提到 $x-2$ 是 x 的函数，$\frac{1}{1-a^2}$是 a 的函数，$\frac{1}{\sqrt{t^2-2}}$是 t 的函数，这时，x，a，t 在函数的定义域上任意取值，函数式的对应值全体组成其值域。通过鉴别比较，代数式、函数这两个概念的本质特征及关系显露出来，学生易于理解和掌握。

2. 易混比较，排除干扰

心理学研究表明：对比抗干扰。在教学中，若能加强对易混知识的比较，找准分化点，有利于排除干扰，促使易混知识在学生头脑中彻底分化，提高思维的准确性。

中学里，函数最值与极值是两个常常困扰学生头脑的易混概念。通过图 1，图 2 中直观比较，就能使学生明确最值具有整体性，是函数在整个区间上所取得的最大（小）函数值；而极值具有局部性，是函数在某个局部区间上取得的最大（小）值。

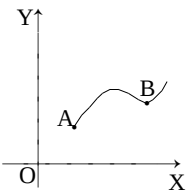


图1

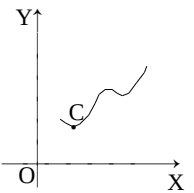


图2

所以，图 1 中 A 点是最小值但不是极小值，B 点是极小值但不是最小值。但是有时函数在整个区间上的极小值也是最小值如图 2 中 C 点。

3. 正误比较，揭示病源

我们知道，正确与错误是一对矛盾，通过矛盾双方的比较，可以找准病源点，揭示错误的方法，暴露不正确的思维途径，是预防和纠正学生学习中出现错误的有效措施。

例如,在高中复数讲学中常有这样习题:计算$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^n+(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^n$(n为整数)。

误解:原式$=[(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3]^{\frac{n}{3}}$

$+[(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3]^{\frac{n}{3}}=1^{\frac{n}{3}}+1^{\frac{n}{3}}=2$。

正解:原式$=(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})^n$

$+[\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})]^n$

$=(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3})$

$+(\cos\frac{2n\pi}{3}-i\sin\frac{2n\pi}{3})$

$=2\cos\frac{2n\pi}{3}$。

$=\begin{cases}2(\text{当}3|n\text{时})\\-1(\text{当}3|n\text{时})\end{cases}$

揭示病源:$a\in R^+$时,$a^{mn}=(a^m)^n$对任意实数m,n成立,若$z\in C$,则仅当m,n为整数时才有$z^{mn}=(z^m)^n$;当m,n有一为分数时,$z^{mn}=(z^m)^n$即不成立。在中学教材中,复数的分数指数幂不定义(若定义,则为多值),故在复数计算中,是不允许使用分数指数的。

4. 纵向比较,深化知识

从知识结构角度来审视,新授知识有时是旧知识纵向深度的延伸。为突出新授知识的特点,可以进行纵向比较,达到深化知识的目的。

现行中学数学教材将二次函数的内容安排在初中和高中两个阶段。初中阶段在定义域R上研究二次函数,到高中阶段在限定区间上讨论二次函数,这是初中知识的延伸点,也是高一学生认识上的"转轨处"。例如:若$3x^2+2y^2=6x$求$p=x^2+y^2$的最大值。按初中所学知识易知$p=x^2+y^2=3x-\frac{1}{2}x^2$,此时应提醒学生要注意x的取值范围,即由题设条件可求出$0\leqslant x\leqslant 2$,本题就要在区间〔0,2〕上求p的最大值。这是初中所学知识的深化。我们要引导学生认真审题,注意挖掘隐含条件,把握解题的正确方向。

5. 横向比较,开拓思路

从知识结构角度审视，有些新问题往往是旧知识横向范围的拓展，为突出新知识、新问题的特点，可以进行横向比较，把握拓展点，广开思路，大胆联想，创造性地解决新问题。

例如：若四个正数 p_1, p_2, q_1, q_2 满足 $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$，求证：$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} < \frac{p_2}{q_2}$。

联想到初中的比例问题，经常设 $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = k$，得 $p_1 = kq_1$，$p_2 = kq_2$ 再代入题目条件去解题，可是本题是不等号，单设一个 k 就行不通了，通过比较等式与不等式，拓宽了思路。可设为 $\frac{p_1}{q_1} = k_1$，$\frac{p_2}{q_2} = k_2$，$k_1, k_2 > 0$，

则 $k_1 < k_2$，$p_1 = k_1 q_1$，$p_2 = k_2 q_2$，

，$\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} = \frac{k_1 q_1 + k_2 q_2}{q_1+q_2} > \frac{k_1 q_1 + k_1 q_2}{q_1+q_2}$

$= k_1 = \frac{p_1}{q_1}$，同理可证：$\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} < \frac{p_2}{q_2}$。

6. 直接比较，直观明了

直接比较是常用的比较方法，通过直接比较能使概念式问题的异同直观地显露出来，易于迅速把握问题的本质特征。在直接比较中，只要设法找准问题之间的对应点，还能简化比较程序。

如图 3，在等腰△ABC 中，CD 是底边 AB 上的高，E 是腰 BC 的中点，AE 交 CD 于 F。

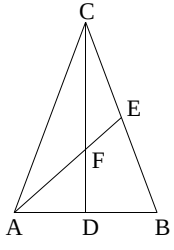


图3

现给出两条路线：

(a) A→F→C→E→B→D→A；

(b) A→D→B→E→F→C→A。

设它们的长度分别是 L(a)、L(b)，试比较 L(a) 与 L(b) 的大小。

分别考察 L(a) 和 L(b) 两条路线如图 4(1)、(2)。

在图 4(1)、(2) 中分别找出对应相等的线段：AB↔AB，BC↔AC，CF↔CF，AF↔BF，在图 4(2) 中 BE + EF > BF，，BE + EF > AF，故 L(b) > L(a)。

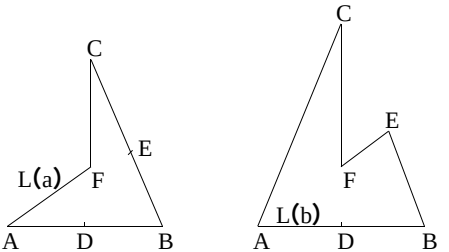


图4

7. 间接比较,以退求进

当对某两个问题进行直接比较不易暴露其本质特征及内在关系或比较有困难时,可考虑施用间接比较,即在两个问题之间选择一个“参照点”,通过先对“参照点”的比较,再来确定这两个问题的关系或通过“参照点”来沟通原问题间的内在联系,这样以退求进促使问题的解决。

如图5。E是▱ABCD边CD上的一点且▱ABCD的面积为14,求△ABE的面积。

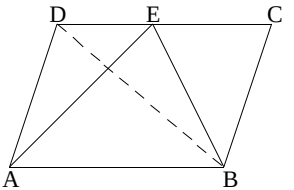


图5

本题实质上是要比较△ABE与▱ABCD的面积关系。

由于E点位置不定,直接求积比较困难,我们先作等积变换将E点移到D点或C点,显然有 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}\times 14=7$。从而,$S_{\triangle ABE}=7$。

8. 相对比较,揭示本质

相对比较就是将相对的问题成对地出现在学生面前,使学生用统一的观点认识它们的异同,进而揭示相对问题的本质。

正弦函数与反正弦函数是两个相对概念。为了使学生掌握反正弦函数概念的本质特征。可先复习与其相关的各种概念,提出一个相对问题:$y=\sin x$中$x=\frac{\pi}{6}$时,$y=$?然后再提出$y=\frac{1}{2}$,$x=$?通过对比,使学生发现确定函数$y=\sin x$的映射不是从定义域R到值域$[-1,1]$上的一一映射,故无反函数。要使函数$y=\sin x$存在反函数,必须:(1)函数$y=\sin x$是单调的(映射是单射);(2)函数$y=\sin x$能取得它的一切函数值(映射是满射);(3)函数$y=\sin x$是连续的,显然$y=\sin x$在它的

每一个单调区间上都满足这三个要求，考虑到应用上的方便，我们选择区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，由此得出反正弦函数的定义。$y=\sin x$ 与 $x=\arcsin y$ 既是相对立，但又可互相转化，转化条件是 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，

$y=\sin x$←- - - - - - →$x=\arcsin y$，

$y\in[-1,1]$。即

$$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

这就是说，它们都表示 3x，y 间的关系，只是表达形式不同，前者是用三角函数的形式表示的，后者是用反三角函数形式表示的。之所以表示相同的数量关系，是因为我们出发点不同，而选择了不同的自变量。

9. 数形比较，加深理解

为了形成准确清晰的概念，加深对问题的理解，我们可通过数形比较，找准各感知对象的共同点，认识数量关系和几何形体的本质属性。

怎样使学生透彻地理解公式：$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ 呢？

如果说由于思维定势的作用，学生能自然地由 $\sin(-x)=-\sin x$，接受 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$，那么面对 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，联想到 $\cos(-x)=\cos x$ 则将会感到困惑不解，但若藉助于图象（如图 6）就不难明了。$\arccos(-x)=|MQ|=|MN|-|QN|=\pi-|PK|=\pi-\arccos x$。

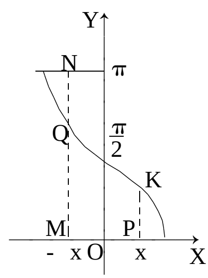


图6

这一有趣的几何解释无疑是有助于加深对这一公式的理解。

10. 正反比较，防止曲解

为了防止学生片面理解概念、定理、公式、法则等，还可以巧用反例弥补正面讲授概念的空隙，加深对所学知识的理解，即从正反两面的角度来巩固所授知识。

由于受 π、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$等无理数表面特征的影响，思维会产生定势，进而错误地认为“无理数就是无规律的数”。我们可通过反例加以比较说明 如：0.2121121112……，从而揭示出无理数的本质是“无限不循环”

的小数,又如,由于正方形都是相似的,学生往往也会误认为所有矩形也相似,我们可给出反例:“所有矩形是否都相似?”

数学教学中可以进行比较的问题是多种多样的,只要我们依据不同的教学目的,问题的不同特征,设计出各种各样的比较方案,恰当地运用比较方法,充分发挥比较方法在教学中的功能,就能促进中学数学教学质量的稳步提高。

□几种常用的比较法

大家知道,比较是人们认识客观事物最常用的重要方法之一,它是“一切理解和一切思维的基础”(乌申斯基《教育论文选》教育出版社俄文版第448页)。在数学教学中运用比较法,有利于活跃学生思维,锻炼他们的智力,所以往往收到良好的教学效果。福建省宁德一中李于青老师归纳几种比较法:

1. 对应比较法

对某些关系密切又相似的事物,就其组成的各部分逐一对应比较,从而总结它们的共同点与不同之处。例如把等差数列与等比数列的通项公式进行如下的对比:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_n & = & a_1 & + & d & (& n & - & 1) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a_n & = & a_1 & \cdot & q & (& n & - & 1) \end{array}$$

在比较中不难看到组成这两个公式的字母(除d与q外)是一样的,而公式中的运算后者比前者高一级(即前者的加减、乘法分别对应于后者的乘法、乘方)。通过这样的比较,对这两个公式的认识就深刻多了。

又如对积化和差四个公式经过适当变形后把它们摆在一起进行对照:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\beta+\alpha)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

据此得到这四个公式外形结构上有如下特征，

(1)系数左边都是1，右边都是$\frac{1}{2}$；

(2)右边都是两角差在前，两角和在后；

(3)异名积化为正弦和、差，同名积化为余弦和、差；

(4)积中有余弦，中间为加号，积中无余弦，中间为减号。

掌握了这些特征，记住这些公式就容易了。

2. 列表法

列表法是把需要比较的东西，通过表格设置若干项目，简明扼要地把相应的内容一一填上，因此可以使人清晰地有的甚至是一目了然地看出它们的异同。

例1 不少学生对有理数与无理数这两个概念的联系和区别不甚理解。但经过下表各项的对比，能够搞清这个问题。

	定 义	有限性	无穷性	循环性
有理数	整数和分 数	有(整数与有限小数)	有(无限循环小数)	有(无限循环小数)
无理数	无限不循环小数	没有	有	没有

例2 平行四边形、矩形、菱形和正方形的对角线性质的比较，通过下表便一目了然。

对角线性质 \ 图 形	平行四边形	矩 形	菱 形	正方形
平 分	✓	✓	✓	✓

相　　等	○	✓	○	✓
垂　　直	○	○	✓	✓

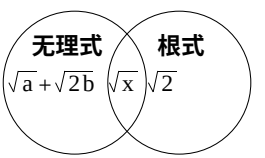
例3　函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ 与数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$，粗看似乎没有什么区别，但通过列表比较，它们之间的差异就明显出来了。

	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$
定义域	(0, +　)	自然数集
自变量的变化	$x\to+\infty$　(连续)	$n\to+\infty$　(离散)
极限定义	任意给定 $\varepsilon>0$，总存在正数 R，当 $x>R$ 时，不等式 $\left\|\frac{1}{x}-0\right\|<\varepsilon$ 恒成立。	任意给定 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $\left\|\frac{1}{n}-0\right\|<\varepsilon$ 恒成立。

3. 关系比较法

任何一个概念都不可能孤立地存在，概念之间总是有着一定的关系(如从属关系、对立关系、矛盾关系、并列关系等)，只有在概念的关系中，才能对概念进行分析、比较，从而把握它们的联系和区别，否则就无法理解概念的确切的含义。比如立几中的异面直线概念，若不把它与其并列关系的平行直线、相交直线联系对比，那么对异面直线的理解无法深入。

根式与无理式是两个既有联系又有区别的概念。为了掌握好这两个概念，明确它们间是什么关系是极为重要的。因为无理式不一定都是根式(如$\sqrt{a}+\sqrt{2b}$是无理式但不是根式)，根式也不一定都是无理式(如$\sqrt{2}$是根式但不是无理式)，故它们是属于交叉关系(如右图)。



在关系比较中，利用韦恩(Venn)图效果很好。既能确切地表示关系，又很直观。

4. 反例衬托法

教材中有很多表面形式相似的内容，学生学习起来容易形成错误的联想，而彼此混淆。预防或消除这类错误的一个有效办法是在教学中，适时举些反例，从正反两方面进行对比。现将笔者在教学中用过的几例写出，供参考。

例1　学生在学习具有相反意义的量时，忽视“量”字，为此让学生判别下列各题是否是具有相反意义的量：

(1)某种东西的新与旧。

(2)某种事情的好与坏。

(3)气体膨胀与压缩。

(4)扩大3倍与缩小2倍。

例2　在讲授排列组合时，为了引起学生重视考察问题与元素的排列顺序是否有关这一点，特编出下面这题让学生练习：张、王、李、周四人中每两人互相(1)握手；(2)通电话；(3)通信一次，共有多少次？

应用定理解题往往遗漏定理中的某些条件，这是学生常犯的毛病，为纠正这种现象，教学中采用反例十分见效。

例3　有的学生应用在实数系数一元n次方程中虚数根总是成对出现的这一定理时，不注意“实数系数”这一重要条件，就让学生解：“已知方程 $x^4-3x^3-10x^2+42x-20=0$ 有一个根是 $3+i$，解这个方程”这题的同时还布置下面这题：“已知 $x^3+2x^2-3x+2-4i=0$ 方程有一个根是 $-i$，解这个方程”。

解题时不认真审题，缺乏深思熟虑，对定理、公式和常用方法生搬硬套，是学生常犯的又一毛病。通过反例教学来克服这种倾向，也是极为有用的。

例4　当a取什么数值时，代数式 $|3a^2-5a+2|+\sqrt{2a^2+5a-7}$ 的值等于零？

大部分学生解这题是能够得到正确答案的，但是把题目改为不等于零，情况就不一样了，不少学生是这样解的：

要使代数式的值不等于零，必须

$$\begin{cases}3a^2-5a+2\neq 0\\2a^2+5a-7\neq 0\end{cases}$$

即当 $a\neq -\frac{7}{2}$、$\frac{2}{3}$、1时，该代数式的值不等于零。

显然这种解法是有错误的。这是错误地由 $|3a^2-5a+2|+\sqrt{2a^2+5a-7}=0 \Longleftrightarrow |3a^2-5a+2|=0$，$\sqrt{2a^2+5a-7}=0$ 类推出，$|3a^2-5a+2|+\sqrt{2a^2+5a-7}\neq 0 \Longleftrightarrow |3a^2-5a+2|\neq 0$，$\sqrt{2a^2+5a-7}\neq 0$ 的结果。而忽略了

$\begin{cases}3a^2-5a+2=0\\2a^2+5a-7\neq 0\end{cases}$, $\begin{cases}3a^2-5a+2\neq 0\\2a^2+5a-7=0\end{cases}$

这两种情况。(答案是当 $a\neq 1$ 时代数式的值不等于 0)

这类问题通过这样正反两方面的互相衬托,理解就深透了。

□证明题中的逐项比较法

有如下一类习题:

求证:$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$,$(n\in N$,且 $n\geqslant 2)$。

求证:$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$,$(n>1)$。

对于不等式 $\sum_{i=1}^{n}b_i \lessgtr f(n)$ 的证明,许多资料上均有不少的论述,然而介绍的证明方法如出一辙,不外乎数学归纳法、放缩法等。浙江桐乡二中宓彤波老师介绍了一种证明的新途径——逐项比较法。

所谓逐项比较法,是把不等式 $\sum_{i=1}^{n}b_i \lessgtr f(n)$ 右边的 $f(n)$ 视为某一数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 S_n,即令 $f(n)=S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$,则原不等式变形为 $\sum_{i=1}^{n}b_i \lessgtr \sum_{i=1}^{n}a_i$,尔后 $\sum_{i=1}^{n}b_i$ 与 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 逐项比较,以达到证明之目的。

例 1 求证 $\sum_{i=1}^{n}i^{-2}<2-\frac{1}{n}$,$(n\in N$,且 $n\geqslant 2)$。

证明:设 $S_n=2-\frac{1}{n}$,那么

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(2-\frac{1}{n})-(2-\frac{1}{n-1})$$
$$=\frac{1}{n(n-1)},(n\geqslant 2)。$$

显然 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$,即 $b_n<a_n$,$(n\geqslant 2)$。

又 $a_1=S_1=1=b_1$,

所以 $\sum_{i=1}^{n}b_i<\sum_{i=1}^{n}a_i$,$(n>1)$。即

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<2-\frac{1}{n},(n>1)$。

例 2　**求证**　$\sum_{i=1}^{n} i\cdot i!<(n+1)!$。

证明 设　$S_n=(n+1)!$,那么

$a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot n!=b_n,(n\geqslant 2)$。

又　$a_1=S_1=2,b_1=1$,

所以　$a_1>b_1,\sum_{i=1}^{n}b_i<\sum_{i=1}^{n}a_i$,

即　$\sum_{i=1}^{n} i\cdot i!<(n+1)!$。

例 3　**求证** $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i(i+1)}$

$$<\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1。$$

证明 设　$S_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$,那么

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{1}{2}(n+1)[(n+2)-n]$

$=n+1,(n\geqslant 2)$。

显然 $\sqrt{n(n+1)}<n+1$,**即** $b_n<a_n(n\geqslant 2)$。

又　$a_1=S_1=2>\sqrt{2}=b_1$,

故　$\sum_{i=1}^{n}b_i<\sum_{i=1}^{n}a_i$。

所以 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i(i+1)}<\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$。

从上面例题可见,利用逐项比较法证明不等式 $\sum_{i=1}^{n}b_i \lesseqgtr f(n)$,不但思路清晰简捷,且构思新颖巧妙。值得提醒的是,用逐项比较法证明形如 $\sum_{i=1}^{n}b_i=f(n)$ 的恒等式,同样明快奏效。

例 4　**求证** $\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$。

证明 设　$S_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,那么

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{1}{4}n^2[(n+1)^2-(n-1)^2]$

$=\frac{1}{4}n^2\cdot 4n=n^3$,$(n\geqslant 2)$。

又 $a_1=S_1=1$,所以 $a_n=n^3$。而 $b_n=n^3$。

故 $b_n=a_n$,$\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}a_i$,

即 $\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$。

例5 设 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$,

求证 $\sum_{i=1}^{n}\sin i\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$。

证明:设 $S_n=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$,那么

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)$

$=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$。

$=\sin n\alpha$,$(n\geqslant 2)$。

又 $a_1=S_1=\sin\alpha$,所以 $a_n=\sin n\alpha$。

而 $b_n=\sin n\alpha$,故 $b_n=a_n$,

$\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}a_i$,

即 $\sum_{i=1}^{n}\sin i\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$。

□连比法在解题中的应用

在解含有连比的问题中,常设 $\frac{a}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=t$ 来进行处理。

因为在一个问题中,它能够用一个参数把其他参数表示出来,使问题得到简化。

例1、已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$,求(1)$\frac{x+y+z}{x+y-z}$,(2)$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$的值。

解:令$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=t$,则$x=2t,y=3t,z=4t$,

故,$\frac{x+y+z}{x+y-z}=\frac{2t+3t+4t}{2t+3t-4t}=9$

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{6t^2+12t^2+8t^2}{4t^2+9t^2+16t^2}=\frac{26}{29}$$

本题中(1)为1980年安徽省中专、高中招生试题。

例2、已知a. b. c. d皆不为0,且$a+b+c+d\neq 0$,$ab=cd$,

化简$\frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}$

解:由$ab=cd$得,$\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$,令$\frac{a}{d}=\frac{c}{b}=t$,则$a=dt\quad c=bt$,

$$\frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}$$

$$=\frac{(dt+bt)(dt+d)(b+bt)(b+d)}{(dt+b+bt+d)^2}$$

$$=\frac{tbd(b+d)^2(t+1)^2}{(b+d)^2(t+1)^2}=tbd=ab=cd。$$

例3、已知二次函数$y=ax^2+bx+c$,且$a:\ b:\ c=2:\ 3:\ 4$,

若该函数的极值为$\frac{23}{4}$,写出函数的解析式。

此题为1980年浙江省中专、技校招生试题。

解:令$a:\ b:\ c=2:\ 3:\ 4=t$,则$a=2t,b=3t,c=4t$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{32t^2-9t^2}{8t}=\frac{23}{4},t=2$$

故$a=4,b=6,c=8$

二次函数的解析式为$y=4x^2+6x+8$。

例4、已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq 0$,求证:(1)$a^2+c^2,ab+cd,b^2+d^2$成等比数列;(2)$\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}=\frac{ab-cd}{ab+cd}$。

证:令$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=t$,则$a=bt,c=dt$,

(1) $(ab+cd)^2=(bt\cdot b+dt\cdot d)^2=t^2(b^2+d^2)^2$

$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(b^2t^2+d^2t^2)(b^2+d^2)=t^2(b^2+d^2)^2$

即$(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$,

故,a^2+c^2,$ab+cd$,b^2+d^2 成等比数列。

(2) $\dfrac{a^2-c^2}{a^2+c^2}=\dfrac{b^2t^2-d^2t^2}{b^2t^2+d^2t^2}=\dfrac{b^2-d^2}{b^2+d^2}$

$\dfrac{ab-cd}{ab+cd}=\dfrac{b^2t-d^2t}{b^2t+d^2t}=\dfrac{b^2-d^2}{b^2+d^2}$

故,$\dfrac{a^2-c^2}{a^2+c^2}=\dfrac{ab-cd}{ab+cd}$。

例 5、若$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$,而 a、b、c 各不相等,

则 $x+y+z=$?(1951 年全国高考试题)

解:令$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}=t$

则 $x=(a-b)t$,$y=(b-c)t$,$z=(c-a)t$,

故 $x+y+z=(a-b)t+(b-c)t+(c-a)t=0$。

例 6、设 A、B、C 为三角形三个内角,a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边,求证:

$(a-b)\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}=0$

此题为 1978 年上海市第七届中学生数学竞赛题

证:令$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}=t$,$(t\neq 0)$

则 $\sin A=at$ ①

$\sin B=bt$ ②

$\sin C=ct$ ③

① - ②并乘以 $\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$,得:

$$t(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=(\sin A-\sin B)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=-(\cos A-\cos B)\quad④$$

② - ③并乘以 $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$,得 $t(b-c)\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}=-(\cos B-\cos C)$ ⑤

③ - ①并乘以 $\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$,得 $t(c-a)\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}=-(\cos C-\cos A)$ ⑥

④+⑤+⑥,得:$(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(b-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(c-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=0$。

例7、已知 a、b、c 都是正数,且$\frac{a(b+c-a)}{\lg a}=\frac{b(c+a-b)}{\lg b}=\frac{c(a+b-c)}{\lg c}$

求证:$a^b b^a=a^c c^a=b^c c^b$。

证:令$\frac{a(b+c-a)}{\lg a}=\frac{b(c+a-b)}{\lg b}=\frac{c(a+b-c)}{\lg c}=t$,而 $t\neq 0$

则 $a(b+c-a)=t\lg a$ (1)

$b(c+a-b)=t\lg b$ (2)

$c(a+b-c)=t\lg c$ (3)

(1)×b+(2)×a,得 $t(\lg a^b+\lg b^a)=2abc$

即 $t\lg(a^b\cdot b^a)=2abc$

同理,有 $t\lg(a^c\cdot c^a)=2abc$,, $t\lg(a^b\cdot b^a)=t\lg(a^c\cdot c^a)$,而 $t\neq 0$

, $a^b\cdot b^a=a^c\cdot c^a$。

同理,$a^c\cdot c^a=b^c\cdot c^b$。

故,$a^b b^a=a^c c^a=b^c\cdot c^b$。

例8、设$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$,

求证:$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

证:令 $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}=t$

则 $x=t(b+c-a)$ (1)

$y=t(c+a-b)$ (2)

$z=t(a+b-c)$ (3)

(1)×(b-c)+(2)×(c-a)+(3)×(a-b),得

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=t(b-c)(b+c-a)+t(c-a)(c+a-b)+t(a-b)(a+b-c)=0$。

□解题中寻找传递比的方法

在证明比例线段问题,或通过比例线段间接证明其它一些问题时,常出现这样的情况:要正的比例式难于直接得到,这时往往需要引进第三比,使它与要证的比例式中的二个比相等。这个起传递作用的第三比我们称做"传递比"。无疑,传递比的寻找将是证明这类问题的关键,江苏省苏州地区师范席振伟老师总结介绍了若干寻找传递比的规

律和方法。

1. 所证的成比例的四线段若在一直线上,由于三角形一角的内、外角平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例,所以这时,传递比往往就是三角形这角两边的比。

为取得传递比,首先要构作具有内、外角平分线的三角形使所证的成比例的四线段恰好是内、外分点分第三边所成的四线段。

例 1　如图 1,CD 为直径,AB 为弦,且 CD⊥AB,AP 交 CD 于 E,BP 交 CD 的延长线于 F,求证$\frac{CF}{CE}=\frac{DF}{DE}$。

分析　由题设 CF、CE、DF、DE 在一直线上,传递比可能是三角形的两边的比。为此必须使 C 是某三角形的内角平分线与第三边交点、D 是外角平分线与第三边交点。考察图形间角的关系知 BC、BD 确是△BFE 的内、外角平分线,故$\frac{BF}{BE}$是传递比。

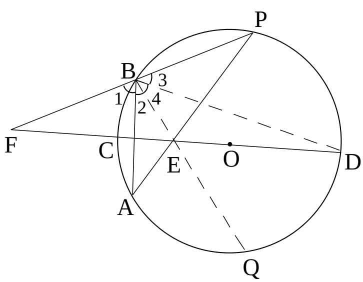


图1

证明　连结 BC、BD、BE,且 BE 的延长线交属于 Q。

FD 过圆心 O,AB⊥FD,,　A、B 关于 FD 对称。又点 E 在对称轴 FD 上,故 BEQ 与 AEP 关于 FD 为对称,且 P、Q 为对称点。

,　$\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{QD}$,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AQ}=\overset{\frown}{BP}$。

,　$\angle 3=\angle 4$,$\angle 1=\angle 2$.

故 BC、BD 分别是△BFE 的内、外角平分线,

,　$\frac{CF}{CE}=\frac{BF}{BE}=\frac{DF}{DG}$,因此 $\frac{CF}{CE}=\frac{DF}{DE}$.

例 2　锐角三角形 ABC 中,AD、BE、CF 为三边上的高,H 为垂心,DE 交 CF 于 G,求证:CF·HG=CG·FH。

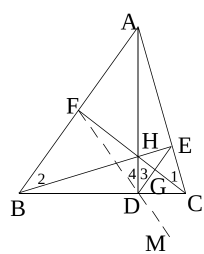


图2

证　连结 FD 并延长至 M,

$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,而$\angle 2=\angle 4$,　$\angle 1=\angle 3$,故 DH 是△DFG 的内角平分线,显然$\angle EDC=\angle FDB=\angle CDM$,

,　DC 是△DFG 的外角平分线,

故$\frac{DG}{DF}$是传递比,即

$\frac{GH}{HF}=\frac{DG}{DF}=\frac{CG}{CF}$，，$\frac{GH}{HF}=\frac{CG}{CF}$，

因此，$GH\cdot CF=CG\cdot HF$。

2. 要证四线段 m、n、p、q 成比例，若它们虽位于两三角形中，但此两三角形难于证明它们相似，这时若有线段 r、s，它们与线段 m、n 和 p、q 分处在两对相似三角形中且是对应线段，那么寻求传递比关键在于构造两对相似三角形。

例 3 圆上任意一点到一弦的距离等于该点到过弦端的两切线的距离之比例中项。

已知 如图 3，BC 为 $\odot O$ 的弦，$AF\perp BC$、BL、CS 分别与 $\odot O$ 相切于 B、C，且 $AD\perp BL$，$AE\perp CS$

求证 $AF^2=AD\cdot AE$

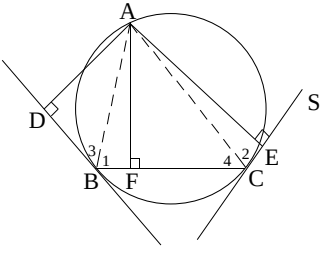


图3

分析 由于 AF、AD、AE 位于 $\triangle ADF$ 和 $\triangle AFE$ 中，但一时难于直接证明它们相似。考虑构造两组相似三角形使以上三线段恰好是二组相似三角形的对应边。鉴于题设中有切线和垂直条件，不难看出两组相似三角形是 $\triangle ADB$ 与 $\triangle AFC$，$\triangle AFB$ 与 $\triangle AEC$，传递比是 AB: AC。

证明(略)。

例 4 两圆相交于 P、Q，在一圆上任取一点 A，连 AP、AQ 交另一圆于 B、C，试证弦 BC 的长与 A 点的位置无关而恒为一定。

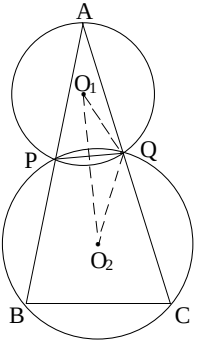


图4

分析 鉴于问题中 PQ、O_1O_2 及两圆半径都是定量，若能证得 BC 与上述四线段中的三条成比例，问题就得到解决。若证$\frac{BC}{PQ}=\frac{O_1O_2}{O_1Q}$，所以四线段不能构成两相似三角形，但它们恰为两对相似三角形 APQ 与 ACB 及 O_1QO_2 与 APC 的对应线段，故传递比即为$\frac{AC}{AP}$。

证明 连结 O_1O_2，O_1Q，O_2Q、PC，

$\angle AQP=\angle B$， $\angle A=\angle A$，

，$\triangle ABC\backsim\triangle AQP$.

，$\frac{BC}{PQ}=\frac{AC}{AP}$

又 $\angle A=\angle O_2O_1Q$，$\angle ACP=\angle O_1O_2Q$，

，$\triangle APC\backsim\triangle O_1QO_2$，

$\frac{AC}{AP}=\frac{O_1O_2}{O_1Q}$

，$\frac{BC}{PQ}=\frac{O_1O_2}{O_1Q}$

，$BC=\frac{O_1O_2\times PQ}{O_1Q}$为一定。

3. 若题目含有若干平行条件，由于平行线截三角形的边成比例线段，这时常应用平行截割定理利用已知的平行线或添置的平行线寻找传递比

例5 设 D、E、F 各是△ABC 的 BC、CA、AB 三边上的一点，且 DE // BA，DF // CA，则 $\triangle AEF=\sqrt{\triangle BFD\cdot\triangle CDE}$

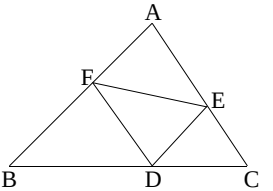


图5

分析 问题要证$\frac{\triangle AEF}{\triangle CDE}=\frac{\triangle BFD}{\triangle AEF}$，而 $\frac{\triangle AEF}{\triangle CDE}=\frac{AE}{EC}$，$\frac{\triangle BFD}{\triangle AEF}=\frac{BF}{AF}$，于是只要证 $\frac{AE}{BC}=\frac{BF}{AF}$. 显然必需寻找传递比。由于 ED // AB 及 FD // AC，传递比为 $\frac{BD}{DC}$，即$\frac{AE}{BC}=\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{AF}$，故命题可得证。

例6 ABCD 是平行四边形，过直线 AC 上任一点 P 随意作两直线，设一直线交 AB、CD 于 E、G，一直线交 BC、DA 于 E、H，则 EH // FG。

分析 结论要证两线平行，从证角入手，如要证∠1 = ∠2，即要证△EPH ∽ △GPF。显然由于∠EPH = ∠GPF，问题又可归结为证$\frac{EP}{PG}=\frac{HP}{PF}$，AE // CG，AH // CF，传递比便为$\frac{AP}{AC}$。

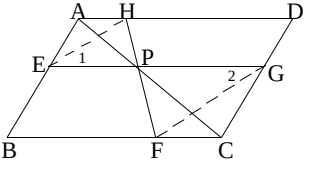


图6

证明 AE // CG，，$\frac{EP}{PG}=\frac{AP}{PC}$。

又 AH // CF，，$\frac{HP}{PF}=\frac{AP}{PC}$。

，$\frac{EP}{PG}=\frac{HP}{PF}$，△EPH ∽ △GPF，

故∠1 = ∠2，，EH // FG。

4. 若题设中三角形具有等底或等高或一对应角相等或互补的条件，这时传递比往往就是这些三角形的面积比。

例 7　$\triangle ABC$ **中，**AD **是** BC **边上的中线，**$\angle BAD=\angle CAD'$**，试证**$\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB^2}{AC^2}$.

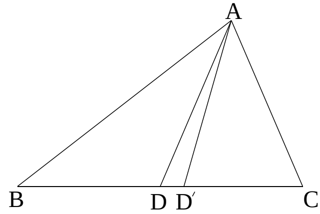


图7

分析　要证的比式左端是$\frac{BD'}{D'C}$**，两线段分别在**$\triangle ABD'$**和**$\triangle ACD'$**中，此两三角形有相同的高，右端是**$\frac{AB^2}{AC^2}$**，两线段** AB、AC **亦在上述两三角形中，它们具有一组角相等的条件，因此**$\triangle ABD'$**与**$\triangle ACD'$**的面积比便是本题中的传递比。**

证明　$\frac{BD'}{D'C}=\frac{\triangle ABD'}{\triangle ACD'}=\frac{AB\times AD'\times \sin BAD'}{AC\times AD\times \sin CAD'}$.

，　$\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB\times \sin BAD'}{AC\times \sin CAD'}$

同理，$1=\frac{BD}{DC}=\frac{AB\times \sin BAD}{AC\times \sin CAD}$**，**

$\angle BAD'=\angle CAD$　$\sin BAD'=\sin CAD$

，$\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB\times \sin BAD'}{AC\times \sin CAD'}\cdot\frac{AB\times \sin BAD}{AC\times \sin CAD}$

$=\frac{AB^2}{AC^2}$.

本例中，AD'**叫做**$\triangle ABC$ **的类似中线，于是它表明：三角形一边上的类似中线分这边为两段的比等于三角形另两边的平方比。**

例 8　**在**$\triangle ABC$**中，**AM**是中线，**AD**是**$\angle A$**的平分线，过** AMD **作圆交** AB、AC **于** L、N。**求证：**$BL=CN$。

分析　问题可变为证$\frac{BL}{CN}=1$**，连结** ML、MN **后它们位于**$\triangle BLM$**和**$\triangle CMN$ **中。**　A、L、M、D **共圆，，**

$\angle LMB=\frac{1}{2}\angle EAC$

同理$\angle CMN=\frac{1}{2}\angle BAC$,　$\angle LMB=\angle CMN$.

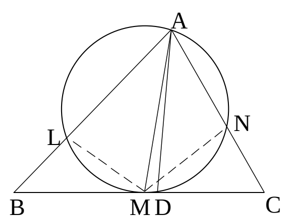


图8

即此两三角形具有一组角相等的条件。

又$\angle BLM+\angle CNM=180°$，　$\sin BLM=\sin CNM$. **故**$\frac{BL}{CN}$**可通过**$\frac{\triangle BLM}{\triangle CMN}$**表示，因此，**$\frac{\triangle BLM}{\triangle CMN}$**为传递比。**

证明(略)。

例 9　在四边形 ABCD 中,已知 AB = CD。又 E、F 分别是 BC、AD 的中点,延长 EF 分别交 BA、CD 的延长线于 G、H,求证∠EGB = ∠EHC.

证明　选择△BGE 和△CHE 的面积比为传递比得

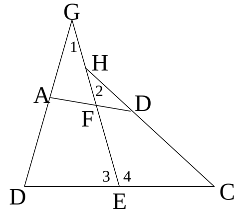


图9

$$\frac{GB\cdot GE\cdot \sin\angle 1}{CH\cdot EH\cdot \sin\angle 2}=\frac{\triangle GBE}{\triangle CHE}=\frac{GE\cdot BE\cdot \sin\angle 3}{HE\cdot CE\cdot \sin\angle 4}=\frac{GE}{HE},$$

,　$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{CH}{GB}\qquad(1)$$

同理由△GAF 和△HFD 的面积比为传递比得

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{DH}{GA}\qquad(2)$$

由(1)·(2)和等比定理得

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{HC-HD}{GB-GA}=\frac{CD}{AB}=1.$$

,　$\sin\angle 1=\sin\angle 2$,但$\angle 1+\angle 2<\angle 1+\angle 3<180°$,,　$\angle 1=\angle 2$ 即 $\angle EGB=\angle EHC$.

当然,本题的证明可以连结 BD,并取其中点 M,连 MF、ME,利用三角形中位线定理,等腰三角形性质及平行线性质定理证明。但用传递比的思想,仍不失为一种很好的证题方法。

5. 两个三角形中,如果有一组边对应相等,其对角相等或互补,根据正弦定理它们的外接圆便相等,此时外接圆直径常常是问题中的传递比

例 10　已知 ABCD 是正方形,F 是 AB 上任一点,∠DFE 为直角,BE 是∠CBG 的平分线,则 DF = FE

分析　连结正方形的对角线 DB,DF、FE 分别在△DFB 和△BFE 中,它们有公共边 BF,其对角∠FDB = ∠FEB,则其外接圆相等,利用它为传递比,$\frac{DF}{\sin FBD}$与$\frac{FE}{\sin FBE}$的相等关系使可揭示出来,从而证得 DF = FE。

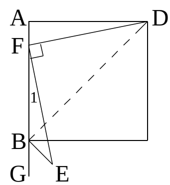


图10

证明　　$\angle FDB=45°-\angle 1$

而　$\angle FEB=180°-\angle 2-\angle FBE=180°=\angle 2-135°=45°-\angle 2$,又$\angle 1=\angle 2$

,　$\angle FDB=\angle FEB$.

,　$$\frac{DF}{\sin FBD}=\frac{FB}{\sin FDB}=2R=\frac{FB}{\sin FEB}$$

$= \frac{FE}{\sin FBE}$ ， $\frac{DF}{\sin FBD} = \frac{FE}{\sin FBE}$

$\angle FBD = 45°$，$\angle FBE = 135°$，

， $\sin FED = \sin FBE$.

故 $DF = FE$.

以上五点是证几何题时寻求传递比所应注意的几个方面。在许多问题中，各种传递比往往要综合地应用，寻求时要具体地分析问题的条件和结论的特点进行。

例1 $\triangle ABC$ 中，设 BC 边在 $\angle A$ 的外角平分线上的射影为 B'、C'，则 BC'、CB' 与 $\angle A$ 的平分线共点。

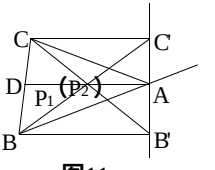


图11

分析 设 $\angle A$ 的平分线 AD，AD 交 $B'C$ 于 P_2，BC' 交 $B'C$ 于 P_1。证 BC'、CB'、AD 共点，即证 P_1、P_2 重合。若能证得 $\frac{P_2B'}{P_2C} = \frac{P_1B'}{P_1C}$，则 P_2 与 P_1 重合。于是问题归结为要证 $\frac{P_2B'}{P_2C} = \frac{P_1B'}{P_1C}$。

$BB' // CC'$，由平行截割性质得

$\frac{P_1B'}{P_1C} = \frac{P_1B}{P_1C'} = \frac{BB'}{CC'}$ 又由 $Rt\triangle AC'C \backsim Rt\triangle AB'B$ ， $\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC}$.

由传递性 $\frac{P_1B'}{P_1C} = \frac{AB}{AC}$. …… ①

又 $P_2D // BB'$ ， $\frac{P_2B'}{P_2C} = \frac{BD}{DC}$

但按角平分线性质 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

， $\frac{P_2B'}{P_2C} = \frac{AB}{AC}$ …… ②

由①、②得 $\frac{P_1B'}{P_1C} = \frac{P_1B'}{P_2C}$ 因此命题得证。

上题证明中①的得出应用了平行截割性质和相似直角三角形，传递比是 $\frac{BB'}{CC'}$，②的得出应用了平行截割性质和角平分线性质，传递比是 $\frac{BD}{DC}$。

□求商比较法在解题中的应用

利用比较法证明不等式的一种形式为：

若 a、b 为两个实数，则当 $a-b\geqslant 0$ 时，$a\geqslant b$，这种方法也叫求差比较法。

利用比较法证明不等式的另一种形式为：

若 a，b 为两个实数且 $b>0$。则当 $\frac{a}{b}\geqslant 1$ 时，$a\geqslant b$。

这种方法也叫求商比较法。

在中学数学教科书及数学杂志中通常只介绍求差比较法在证明不等式时的应用，而很少专题讨论求商比较法。本文将以近年来的高考题为例来说明求商比较法在解题中的应用。从这些实例可以看出，利用求商比较法解某些问题是相当方便的。合肥工业大学数学力学系苏化明老师作了如下例析

例 1 设 $0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$，比较 $|10g_a(1-x)|$ 与 $|10g_a(1+x)|$ 的大小。（要写出比较过程）（1982 年全国理科高考题）

解 因为

$$\frac{|10g_a(1-x)|}{|10g_a(1+x)|}=\left|\frac{10g_a(1-x)}{10g_a(1+x)}\right|$$

$$|\log_{1+x}(1-x)|$$

$$=-\log_{1+x}(1-x)\text{（因为 }1+x>1,0<1-x<1\text{）}$$

$$=\log_{1+x}\frac{1}{1-x}$$

$$=\log_{1+x}\frac{1+x}{1-x^2}$$

$$=\log_{1+x}(1+x)-\log_{1+x}(1+x^2)$$

$$=1+[-\log_{1+x}(1+x^2)]>1,$$

（因为 $1+x>1$，$0<1-x^2<1$，$-\log_{1+x}(1-x^2)<0$），所以当 $0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$ 时，

$$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$$

例 2 已知 $x_1>0$，$x_1\neq 1$，且 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$（$n=1,2,\cdots$）。试证：数列 $\{x_n\}$ 或者对任意自然数 n 都满足 $x_n<x_{n+1}$，或者对任意自然数 n 都满足 $x_n<x_{n+1}$。

(1986 年全国理科高考题)

证 因为 $x_1 > 0$. 故由数列 $\{x_n\}$ 的定义可知 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) 和 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^2 + 3}{3x_n^2 + 1}$.

(i) 若 $0 < x_1 < 1$, 则应有如下等价的式子 $x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow \frac{x_n^2 + 3}{3x_n^2 + 1} > 1 \Leftrightarrow x_n^2 + 3 > 3^{x_n^2} + 1 \Leftrightarrow 1 - x_n^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - x_n > 0$〔最后一步是因为 $x_n > 05 \Rightarrow 1 + x_n > 0$. ($n = 1, 2, \cdots$)〕。

下面只须证明 $1 - x_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$)。

显然 $n = 1$ 时, $1 - x_1 > 0$。

设 $n = k$ 时, $1 - x_k > 0$, 由此知

$$1 - x_k > 0 \Rightarrow (1 - x_k)^3 > 0 \Rightarrow x_k(x_k^2 + 3) < 3x_k^2 + 1 \Rightarrow \frac{x_k(x_k^2 + 3)}{3x_k^2 + 1} < 1 \Rightarrow x_{k+1} < 1 \Rightarrow 1 - x_{k+1} > 0,$$

即当 $n = k + 1$ 时, $1 - x_n > 0$ 成立。

因此, 对一切自然数 n 都有 $1 - x_n > 0$. 从而对一切自然数 n 都有 $x_{n+1} > x_n$.

(ii) 若 $x_1 > 1$, 同理可证, 对一切自然数 n 都有 $x_{n+1} < x_n$.

例 3 设 $x > 0, y > 0$, 证明不等式

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} > (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}.$$

(1986 年上海市理科高考题)

证 因为 $x > 0, y > 0$, 所以要证的不等式和下面的不等式等价

$$\frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}} > 1$$

即 $$\left[\left(\frac{x^3}{x^3 + y^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y^3}{x^3 + y^3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} > 1. \quad ①$$

令 $\left(\frac{x^3}{x^3 + y^3}\right)^{\frac{1}{3}} = a$, $\left(\frac{y^3}{x^3 + y^3}\right)^{\frac{1}{3}} = b$, 则 $a > 0, b > 0$, 且 $a^3 + b^3 = 1$, 而①即为

$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} > 1 \Leftarrow\Rightarrow a^2 + b^2 > 1$, 因此要证的不等式和下面的问题等价:

设 $a > 0, b > 0$, 且 $a^3 + b^3 = 1$, 则有 $a^2 + b^2 > 1$ ②

下面证明②。

因为 $a > 0, b > 0, a^3 + b^3 = 1$,

所以 $0 < a < 1, 0 < b < 1, a^2 > a^3, b^2 > b^3$,

从而 $a^2 + b^2 > a^3 + b^3 = 1$,

故不等式②成立, 因此原不等式成立。

例4 设实数 $a\neq 0$,数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a,公比为 $-a$ 的等比数列,记

$b_n=a_n\lg|a_n|$,$n=1,2,\cdots$;

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,$n=1,2,\cdots$.

(1)求证:当 $a\neq -1$ 时,对任意自然数 n,都有 $S_n=\dfrac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}(1+n+na)a^n]$;

(2)请问:当 $0<a<1$ 时,是否存在自然数 M,使得对任意自然数 n,都有 $b_n\leqslant b_M$?证明你的结论。(1987 年广东省高考题)

证 (1)依题设,有

$a_n=a(-a)^{n-1}=(-1)^{n-1}a^n$,

所以 $b_n=a_n\lg|a_n|$

$=(-1)^{n-1}na^n\lg|a|$,$n=1,2,\cdots$.

而 $S_n=b_1+b_1+\cdots+b_n$

即有 $S_n=(a\lg|a|)[1-2a+3a^2-\cdots+(-1)^{n-1}na^{n-1}]$,

故 $aS_n=(a\lg|a|)[a-2a^2+3a^3-\cdots+(-1)^{n-1}na^n]$,

两式相加,得

$(1+a)S_n=(a\lg|a|)[1-a+a^2-\cdots+](-1)^{n-1}a^{n-1}+(-1)^{n-1}na^n]$.

因为 $a\neq -1$,所以 $1+a\neq 0$,故

$$S_n=\frac{a\lg|a|}{1+a}\left[\frac{1-(-a)^n}{1-(-a)}+(-1)^{n-1}na^n\right],$$

即 $S_n=\dfrac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}a^n(1+n+na)]$,

这便是所要证明的等式。

(2)所要求的自然数 M 存在。

因为 $0<a<1$,故 $\lg|a|=\lg a<0$,而 $b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg a$,

所以,当 n 为奇数时 $b_n<0$,当 n 是偶数时,$b_n>0$.

设 K 为自然数,则有

$$\frac{b_{2+2}}{b_2}=\frac{(2K+2)a^2}{2K}=\left(1+\frac{1}{K}\right)a^2.$$

所以,当 $\dfrac{1}{K}\geqslant\dfrac{1}{a^2}-1$ 时,$\left(1+\dfrac{1}{K}\right)a^2\geqslant 1$;

当 $\dfrac{1}{K}<\dfrac{1}{a^2}-1$ 时,$\left(1+\dfrac{1}{K}\right)a^2<1$.

因为 $0<a<1$,所以 $1-a^2>0$,$a^2>0$,

从而

当 $K\leqslant\dfrac{a^2}{1-a^2}$ 时,$\left(1+\dfrac{1}{K}\right)a^2\geqslant 1$,

当 $K\leqslant\frac{a^2}{1-a^2}$时,$(1+\frac{1}{K})a^2<1$。

若记 N 为不大于$\frac{a^2}{1-a^2}$的最大整数,则有

$$\frac{b_{2k+2}}{b_{2k}}\begin{cases}\geqslant 1,\text{当 } K\leqslant N \text{ 时},\\ <1,\text{当 } K>N \text{ 时},\end{cases}$$

即有 $b_2\leqslant b_4\leqslant\cdots\leqslant b_{2N}\leqslant b_{2N+2}$,

$b_{2N+2}>b_{2N+4}>b_{2N+6}>\cdots$,

而对任意自然数 K,2K - 1 是奇数,都有

$b_{2k-1}<0<b_{2N+2}$,

于是,若取 $M=2N+2$,则对任意自然数 n,都有 $b_n\leqslant b_M$.

例 5 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$,公比 $q>-1$ 且 $q\neq 0$. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $b_n=a_{n+1}+a_{n+2}(n\in N)$,数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项的和分别记为 A_n、B_n。试比较 A_n 和 B_n 的大小。(1989 年上海市理科高考题)

解 因为 $b_n=a_{n+1}+a_{n+2}=a_n(q^2+q)$,

所以 $B_n=(q^2+q)A_n$.

当 $q>0$ 时

因为 $a_1>0$,$a_n=a_1q^{n-1}>0$,

所以 $A_n>0$;

当 $-1<q<0$ 时,

因为 $a_1>0$,$1-q>0$,$1-q^n>0$,

所以 $A_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0$,

故当 $q>-1$ 且 $q\neq 0$ 时总有 $A_n>0$.

解方程 $q(q+1)=1$,即 $q^2+q-1=0$ 得 $q=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

故当$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$时,$q(q+1)<1$;

当 $q=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$或 $q=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$时,$q(q+1)=1$;

当 $q<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$或 $q>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$时,$q(q+1)>1$.

由$\frac{B_n}{A_n}=q(q+1)$,$A_n>0(n\in N)$,$q>-1$ 且 $q\neq 0$,所以

(i) 当 $-1<q<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$且 $q\neq 0$ 时,$A_n>B_n$;

(ii) 当 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$A_n=B_n$；

(iii) 当 $q>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$A_n<B_n$.

□诱误·对比·反思

在数学教学中，针对学生的弱点，在其可能发生错误的地方，我们通常要做些正面引导，以防止错误发生的工作。然而，当学生独立地处理这些有关问题时仍然错误百出。如何从根本上使学生克服这些弱点呢？我们进行了这样的尝试：精心设置"陷井"，诱使学生得出错误，再利用"对比"激起"反思"，使他们自己明辨是非。以直线方程教学中的一个片段为例，山东郓城实验中学于加月老师作了说明：

1. 诱误

经验告诉我们，在利用直线方程的截距式解题时，学生通常忽视直线截距为零的情况。对此，我们把它作为"陷井"，编拟了下列的题目：

直线 l 经过点 P(2，-1)，它在 y 轴上的截距等于它在 x 轴上截距的 2 倍，求 l 的方程。

通过练习，不出所料学生作出了如下的解答：

设 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

则 $b=2a$ ①

$P(2,-1)\in l$，

，$\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1$ ②

由①、②得：$a=\frac{3}{2}$，$b=3$.

，l 的方程为 $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{3}=1$，即 $2x+y-3=0$.

2. 对比

针对上述解法中的错误，笔者并没有急于指出，而提出了如下问题：此题还有其它解法吗？稍加思考，多数学生能给出如下解法：

设 l 的方程为 $y+1=k(x-2)$，

令 $x=0$ 得 $y=-2k-1$；

令 $y=0$ 得 $x=\frac{2k+1}{k}$.

由题意得 $-2k-1=2,\frac{2k+1}{k}$.

解之,得 :$k=-2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$.

, l 的方程为 $y+1=-2(x-2)$，

或 $y+1=-\frac{1}{2}(x-2)$.

即 $2x+y-3=0$， 或 $x+2y=0$.

这时两种解法所得的结论形成了强烈鲜明的对比。

3. 反思

同一道题目,却因解法不同而答案各异,岂非咄咄怪事！第二种答案的出现就象一颗石子投入了平静的湖面,一石激起千层浪,顿时同学之间不由自主地展开了热烈的讨论。

原因究竟出在哪里？

学生甲 :第一种解法一定是错误的。因为方程 $x+2y=0$ 符合题设条件,应是所求的方程,而在第一种解法中却没有求出。

产生错误的原因是什么？

学生乙 :因直线的截距式方程不能表示截距为零的直线,而方程 $x+2y=0$ 表示的直线在两轴上截距为零,故利用截距式无法将其求出。

如果用第一种方法求解,那么需要采取哪些补救措施？

学生丙 :分截距等于零和不等于零两种情况讨论,……。

到此,问题已经全部解决了,可是仍有很多学生纷纷举手要求发言。

学生丁 :也可利用直线方程的斜截式求解；

学生戊 :也可利用直线方程的两点式求解。

通过满怀激情地反思,学生不仅明辨了是非,而且还看到了直线方程各种形式的内在联系。这对他们以后正确灵活地利用直线方程的各种形式解题无疑起到了良好作用。

事实表明上述的教学方式效果是良好的。作为作业我们布置了课

本上一道类似的习题(《平面解析几何》·全一册·P_{27}第13题),除极个别学生因基础问题外,其他都做得准确无误,并且还有许多学生给出了几种解法。

第二十二部分

3+X·数学解题中的“变”的思想及其运用

□数学解题中的“变”(一)

科学发展的全部成果都证明世界上的一切事物都处在不停的运动变化之中。在数学领域,大到数学本身的发展、数学知识的应用,小到数学题的求解,无不反映了矛盾的不断产生和解决,反映了一个“变”。山东招远市十六中宋炳杰老师分析了数学题求解中的“变”。

1. 掌握“变”的方向,驾驭数学学习

在数学题的求解过程中,常会遇到各种各样的“变”,正是这种“变”,实现了从未知到已知,从条件向结论的转化,也正是“变”,使转化过程简单、道路平坦,因此,掌握“变”的方向,对数学学习有着重要的作用。

(1)变主元

例1　因式分解:

$x^3-x^2y-2xy+y^2-1.$

析解　一般地说可选用次数较低的元素作主元,因为次数低易看出规律而利于求解。本题以 y 为主元较简。原式整理成关于 y 的二次三项式:

原式 $=y^2-(x^2+2x)y+x^3-1$

$=[y-(x-1)][y-(x^2+x+1)]$

$=(y-x+1)(y-x^2-x-1).$

例2　已知方程 $x^2+2px+1=0$ 的一个根大于1,一根小于1,求实数 p 的取值范围。

析解　此题宜变换成以 $(x-1)$ 为未知数的二次方程。令 $y=x-1$,则 $x=y+1$,代入原方程得

$(x-1)^2+(2-2p)(x-1)+2-2p=0$。

由题意得$\begin{cases}(2-2p)^2-4(2-2p)>0\\2-2p<0,\end{cases}$

，$p>1$。

(2)变式子

例3　解方程组$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{9}\\\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{11}\\\dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{1}{12}\end{cases}$

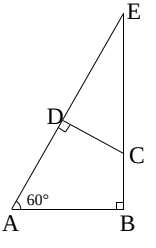
解　原方程组即$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=9\\\dfrac{y+z}{yz}=11\\\dfrac{x+z}{xz}=12,\end{cases}$

或$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=9\\\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=11\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=12,\end{cases}$ 有$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=5\\\dfrac{1}{y}=4\\\dfrac{1}{z}=7。\end{cases}$

即　$x=\dfrac{1}{5}$，$y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{7}$，验根略去。

(3)变图形

例4　四边形ABCD中，$\angle A=60°$，$\angle B=\angle D=90°$，$AB=2$，$CD=1$，求BC和AD。



析解　此题宜将原图变形(补)为含30°角的直角三角形。延长AD、BC相交于E，则$\angle E=30°$。

在$Rt\triangle CDE$中，易知$CE=2$、$DE=\sqrt{3}$。

在$Rt\triangle ABE$中，$AE=4$，$BE=2\sqrt{3}$。

则

$BC=2\sqrt{3}-2$，$AD=4-\sqrt{3}$。

(4)变方法

例5　证明 存在三边长为$\sqrt{a^2-a+1}$、$\sqrt{a^2+a+1}$、$\sqrt{4a^2+3}$的三角形，且它的面积a无关。

析证 由于题中三个数都有根号，使我们联想到两点间的距离。数 $\sqrt{4a^2+3}$ 的根号内不含一次项，由此入手，试找三角形的顶点可能较为方便，由此可得如下构图证法：

$$AC=\sqrt{(a+a)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

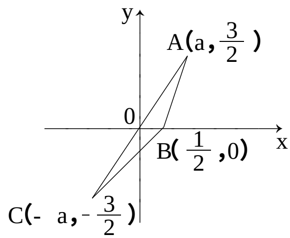
$$=\sqrt{4a^2+3},$$

$$AB=\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}$$

$$=\sqrt{a^2-a+1},$$

$$BC=\sqrt{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+a+1}。$$



由图可知存在以

$\sqrt{a^2-a+1}$、$\sqrt{a^2+a+1}$、$\sqrt{4a^2+3}$

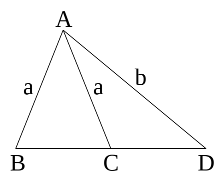
为三边长的三角形 ABC。其面积

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$（与 a 无关的定值）。

例 6 已知：△ABC 中，AB = AC = a，AD = b，且交 BC 的延长线于 D，求 DC · DB 的值。



略解 设 BD = x，CD = y，由余弦定理得：

$a^2=x^2+b^2-2bx\cos D$，

$\Rightarrow x^2-2bx\cos D+b^2-a^2=0$，

$a^2=y^2+b^2-2by\cos D$，

$\Rightarrow x^2-2by\cos D+b^2-a^2=0$。

则 x、y 是方程 $z^2-2bz\cos D+b^2-a^2=0$ 的两个根，于是 $x\cdot y=b^2-a^2$，即

$DC\cdot DB=b^2-a^2$。

综上所述，数学题是在‘变’中求得答案，在‘变’中得到正确的结论和好的解题途径，必须在实践中不断总结提高，努力掌握‘变’的方向，驾驭数学学习。

2. **认识‘变’的意义，指导数学学习**

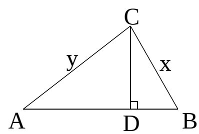
在数学学习中,牢固掌握基础知识,提高分析问题和解决问题的能力,是数学学习的主要目的,解数学题是实现目的的必要手段和途径,因此,必须认识'变'的意义和作用,以'变'来指导数学学习,努力提高以下能力:

(1)从数学题的数字、式子的结构特征出发,培养由此及彼的联想能力

例7 已知:x、y、z、r均为正数,且 $x^2+y^2=z^2$,$z\cdot\sqrt{x^2-r^2}=x^2$,求证:$xy=rz$。

析证 此题中的题设 $x^2+y^2=z^2$ 与勾股定理的结论相同,故可构造两直角边为x、y的直角三角形,将代数题转变为几何题来研究。

作Rt△ABC,使BC=x,AC=y(如图),则斜边AB=z.又作CD⊥AB于D,由题设及射影定理知有CD=r.



于是 $2S_{\triangle ABC}=xy=rz$,得证。

例8 已知 实数x、y、z满足 $x=6-y$,$z^2=xy-9$.求证:$x=y$.

析证 此题已知条件中有

$$x+y=6,xy=z^2+9.$$

于是联想到二次方程根与系数的关系,即将x、y看作是二次方程

$$t^2-6t+(z^2+9)=0$$

的两个根,由于此方程的根的判别式 $\triangle=-4z^2$ 只能为零,从而证得两根相等,即 $x=y$.

以上两题均是由题中数、式的结构特征引起联想寻求解题途径,这在数学解题中是普遍存在的。如果经常注意和加强这方面的示范、引导、训练,则将有利于拓宽解题思路,提高综合运用知识的能力,培养思维的广阔性。

(2)从个别特例出发,培养从特殊到一般、由个别到整体的归纳推理能力

例9 设x、y、z为三个互不相等的非零实数,且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$.

求证:$x^2y^2z^2=1$.

析解 先考虑两个变元的情形,即x、y为两个互不相等的非零实数,且

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{x},$$

来证 $x^2y^2=1$.用xy去乘两端,得

$$xy(x-y)+(x-y)=0,$$

立得 $xy=-1$，便有 $x^2y^2=1$.

由此启发，用 xyz 去乘等式的各端，得

$$x^2yz+xz=xy^2z+xy=xyz^2+yz,$$

分别移项，可得：

$$xyz(x-y)=x(y-z),$$

$$xyz(y-z)=y(z-x),$$

$$xyz(z-x)=z(x-y).$$

三式相乘即得 $x^2y^2z^2=1$.

例 10 求证 若直角三角形三边为 a、b、c（c 为斜边），则必有

$$a^n+b^n<c^n(n\geqslant 3).$$

析解 此题先从特殊情况：当 $n=3$、4 时入手考虑（推导从略）。受此启发可得一般性的证明如下：

$$a^n+b^n-c^n=a^n+b^n-c^{n-2}(a^2+b^2)$$

$$=a^2(a^{n-2}-c^{n-2})+b^2(b^{n-2}-c^{n-2})<0,$$

$$a<c, b<c,$$

, $a^n+b^n<c^n$.

以上两题都是从特殊、个别情况观察入手，通过归纳推理，得到一般性的结论和证明方法，这种归纳推理有利于把思维对象的本质属性抽取出来，使认识理性化，培养思维的深刻性。

（3）从数学题的特点要求出发，培养灵活运用知识的能力

例 11 解方程：

$$a^4\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^4.$$

析解 本题是关于 x 的一元四次方程，无法按常规去解。通过观察可知 a、b、c 都是原方程的解。设第四个根为 x_4，则

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-x_4)=0,$$

展开并整理，得：

$$x^4-(a+b+c+x_4)x^3+(ab+ac+ax_4+bc+bx_4+cx_4)x^2-(abc-abx_4+acx_4+bcx_4-abcx_4)=0.$$

由原方程的 x^3 的系数为 0，易得：

$$a+b+c+x_4=0, x=-(a+b+c).$$

所求原方程的四个根为 a、b、c、-（a+b+c）. 这种灵活运用知识、方法的训练，将有助克服思维定势，培养思维的灵活性和敏捷性。

综上所述，以‘变’来指导数学学习，加强启发、引导、训练，有利于培养良好的思维品质，在培养能力，发展智力方面有十分重要的意义。

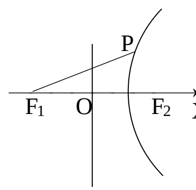
□数学解题中的‘变’（二）

在解题中应注意对问题作类比、联想与结构的变化，数学基本解题方法的变化和一些常用数学思想方法的变化，以培养学生良好的思维品质和数学能力。江苏省浅水县中严碧友老师认为总结的方法是：

1. 运用一题多变的方法，举一反三、触类旁通

在数学中如果只是就题论题，而不注意问题的变化与延伸，那么学生得到的只能是分散的知识。对于一个命题，我们可以找出其逆命题中的真命题，或者用类比与联想的方法进行变化，使学生从会解一道题到会解一类题。

例 1　已知双曲线 $16x^2-9y^2=144$，F_1，F_2 是左、右两焦点，P 在双曲线上，且 $|PF_1|\cdot|PF_2|=32$，求 $\angle F_1PF_2$ 的大小。



分析：方程化为：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，由定义知：$|PF_1|-|PF_2|=6$，$|F_1F_2|=10$，由余弦定理得：$|PF_1|^2+|PF_2|2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$ $(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|(1-\cos\angle F_1PF_2)=100$. $1-\cos\angle F_1PF_2=1$，$\angle F_1PF_2=90°$.

我们可以得出这样一个结论：已知双曲线方程，F_1、F_2 为两焦点，P 为双曲线上一点，若 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 为已知，则 $\angle F_1PF_2$ 可求。

在解题过程中，运用了余弦定理和圆锥曲线的定义这两个重要性质。通过找逆命题并适当变化，可得：

变题 1，已知双曲线 $16x^2-9y^2=144$，F_1、F_2 是左、右焦点，P 为双曲线上一点，若 $\angle F_1PF_2=60°$，求三角形 PF_1F_2 的面积。

变题 2，已知双曲线 C 的离心率为 2，F_1、F_2 为左、右两焦点，P 为双曲线上一点，$\angle F_1PF_2=60°$，$S_{\triangle PF1F2}=12\sqrt{3}$，求双曲线方程。

题 1 解略。题 2 分析：该题在利用几何性质求方程上作一些变化。

$|F_1F_2|=2c$，$a=\frac{c}{2}$.

$|PF_1| - |PF_2| = 2a = c$. 在$\triangle PF_1F_2$中。

$4c^2 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot (1 - \cos 60°)$.

$4c^2 = c^2 + |PF_1| \cdot |PF_2|$ 又 $S = \frac{1}{2}$.

$|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin 60° = 12\sqrt{3}$.

得：$|PF_1| \cdot |PF_2| = 48$. $c^2 = 16$，方程可求。

用类比法可得关于椭圆的类似问题：

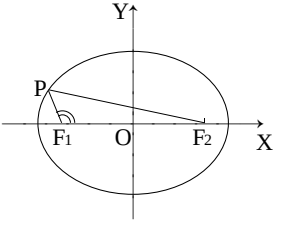
变题3，已知椭圆方程为$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$，$F_1$、$F_2$是左、右两焦点，P是椭圆上一点，且$|PF_1| \cdot |PF_2| = 72 - 36\sqrt{3}$，求$\angle F_1PF_2$.

变题4，已知椭圆方程为$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$，$F_1$，$F_2$是左、右两焦点，P是椭圆上一点，且$\angle F_1PF_2 = 45°$，求$\triangle PF_1F_2$的面积。

变题5，已知椭圆的中心在原点，焦点在x轴上，离心率$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$，F_1，F_2为左、右两焦点，P是椭圆上一点，且$|PF_1| \cdot |PF_2| = 72 - 36\sqrt{3}$，$\angle F_1PF_2 = 30°$，求椭圆方程。

通过联想以及与其他知识的联系，我们可以得到下面的命题。

变题6，已知椭圆的焦点$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，P为椭圆上一点，且$|PF_1|$、$|F_1F_2|$、$|PF_2|$成等差数列，$\angle PF_1F_2 = 120°$，求$\triangle PF_1F_2$的面积及椭圆方程。

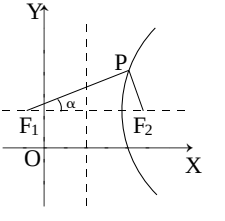


分析：$|PF_1| + |PF_2| = 2|F_1F_2| = 4 = 2a$. $a = 2$，$c = 1$，椭圆方程为：$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$|FP_2|^2 = |PF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|PF| \cdot |F_1F_2| \cos 120°$. $|PF_2|^2 - |PF_1|^2 = 4 + 2|PF_1|$. $4 \cdot (|PF_2| - |PF_1|) = 4 + 2|PF_1|$. $3|PF_1| - 2|PF_2| + 2 = 0$.

解得：$|PF_1| = \frac{6}{5}$，$|PF_2| = \frac{14}{5}$，$S = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |F_1F_2| \sin 120° = \frac{3}{5}\sqrt{3}$.

变题7，已知双曲线的两焦点为$F_1(-1,2)$，$F_2(5,2)$，P是双曲线上一点，$|F_1F_2|$，$|PF_1|$，$2|PF_2|$成等差数列，且$\triangle PF_1F_2$的面积为$\frac{27(1+\sqrt{3})}{8}$，求$\angle PF_1P_2$的大小。



分析：$c = 3$，$|F_1F_2| + 2|PF_2| = 2|PF_1|$. $|PF_1| - |PF_2|$

$|=3=2a$，$a=\frac{3}{2}$.

由 $\begin{cases}|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1|\cdot|F_1F_2|\cos\alpha\\ \frac{1}{2}|PF_1|\cdot|F_1F_2|\sin\alpha=\frac{27(1+\sqrt{3})}{8}\end{cases}$

得：$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=4|PF_1|\cos\alpha-12\\ |PF_1|\cdot\sin\alpha=\frac{9(1+\sqrt{3})}{8}\end{cases}$，

或 $\begin{cases}2|PF_1|-3=4|PF_1|\cos\alpha-12\\ |PF_1|\sin\alpha=\frac{9(1+\sqrt{3})}{8}\end{cases}$，

得：$\frac{9\sin\alpha}{4\cos\alpha-2}=\frac{9(1+\sqrt{3})}{8}$　$\alpha=30°$

即　$\angle PF_1F_2=30°$.

2. 通过一题多解和多题一解加强基本解题方法的训练

在教学过程中，应注意引导学生从多角度全面认识问题，以把握其本质。另外还应注意抓住一些问题的共性，组织一些具有类似解法的习题，以增强解题技巧的熟练性。通过两个方面的共同努力，学生在不断变化中提高了解题技能。

例2　证明：$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

思路1：用倍角公式，

左边 $=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=$右边。

思路2：用半角公式，

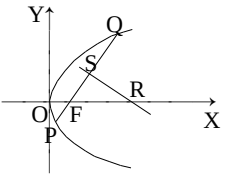
左边 $=\frac{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}+1}{\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+1}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+1}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=$右边。

思路3：用万能公式。证略。

思路4：用比例性质，

$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$（等比定理）。

通过证法的不断变化,三角函数的恒等变形和公式的掌握得到的训练。



例3 过抛线焦点 F 的直线交该抛物线于 P、Q 两点,线段 PQ 的中垂线交抛物线的对称轴于 R,求证:$|FR| = \frac{1}{2}|PQ|$.

思路1:用直线参数方程。设 PQ 方程为:

$$\begin{cases} x = \frac{P}{2} + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases} (t \text{ 为参数})$$

代入 $y^2 = 2Px$ 得:$t^2\sin^2\alpha - 2Pt\cos\alpha - P^2 = 0$,再利用韦达定理可得:$|PQ| = |t_1 - t_2| = \frac{2P}{\sin^2\alpha}$. $|SF| = \left|\frac{t_1 + t_2}{2}\right| = \frac{P|\cos\alpha|}{\sin^2\alpha}$. 在 $Rt\triangle SFR$ 中,$|FR| = \left|\frac{SF}{\cos\alpha}\right| = \frac{P}{\sin^2\alpha}$. 故 $|PQ| = 2|FR|$.

思路2:利用直线与圆锥曲线的关系,设 PQ 方程为 $y = K(x - \frac{P}{2})$,代入 $y^2 = 2Px$ 得:$K^2x^2 - p(K^2 + 2)x + \frac{1}{4}K^2p^2 = 0$. 设 $P(x_1, y_1)$,$Q(x_2, y_2)$,$S(x_0, y_0)$,则 $x_1 + x_2 = \frac{P(K^2 + 2)}{K^2}$。$|PQ| = |PF| + |QF| = (x_1 + \frac{P}{2}) + (x_2 + \frac{P}{2}) = x_1 + x_2 + p = \frac{2P(K_2 + 1)}{K_2}$. 而 $y^0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{K(x_1 + x_2) - KP}{2} = \frac{P}{K}$. 设 $\angle RFS = \theta$,则:$|SF| = \frac{|y_0|}{\sin\theta}$,$|FR| = \frac{|SF|}{\cos\theta} = \frac{|y_0|}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{|y_0|}{tg\theta}\sec^2\theta$ 而 $tg\theta = K$,故 $|FR| = \frac{p(k_2 + 1)}{K_2}$,$|PQ| = 2|PR|$.

思路3:由于问题涉及焦点弦长,故可用极坐标方程,以 F 为极点,对称轴为极轴建立极坐标系,方程为 $\rho = \frac{P}{1 - \cos\theta}$. 设 $P(\rho_1, \theta)$,$Q(\rho_2, \theta + \pi)$. 则:

$$\rho_1 = \frac{P}{1 - \cos\theta}. \quad \rho_2 = \frac{P}{1 + \cos\theta}.$$

$$|PQ| = \rho_1 + \rho_2 = \frac{2P}{1 - \cos^2\theta} = \frac{2P}{\sin^2\theta}.$$

$$|FS| = \frac{||FP| - |QF||}{2} = \frac{1}{2}\left|\frac{P}{1 - \cos\theta} - \frac{P}{1 + \cos\theta}\right| = \frac{\rho|\cos\theta|}{\sin^2\theta}.$$

$$|FR| = \frac{|SF|}{|\cos\theta|} = \frac{P}{\sin^2\theta}, \text{故} |PQ| = 2|FR|.$$

通过几种方法的对比,有关直线与圆锥曲线问题的处理方法可得

到加强。由以上两例可见,只有深入剖析一个问题才能真正得以掌握并融汇贯通。

3. 通过变更问题,培养学生常用的数基本方法与思想

数学家波利亚说过:"我们如果不用'题目的变更',几乎是不能有什么进展的"。在解题过程中如原命题求解很困难,可考虑一个等价的命题或能导致原命题解决的新命题。再者还应通过题型的变化逐步培养学生掌握一些基本思想方法,如分类思想、数形结合、探索法、分析综合法、数学归纳法等,另外,在训练思想方法的同时还可培养学生的数学思维能力。

例4 求证:抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-1$ 上不存在关于直线 $y=x$ 对称的两点。

分析:可假设抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-1$ 上存在关于直线 $y=kx$ 对称的两点,从而求出 k 的范围(这类问题的解法是熟知的),再说明 $k=1$ 不在所得范围内。当然这道题也可用反证法,这里限于篇幅,不再赘述。

例5 $f(x)=\lg\frac{1+3^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x\cdot a}{n}$,$n$ 是给定的自然数,$n\geqslant 2$,$x\in(-\quad,1]$,如果 $f(x)$ 有意义,求 a 的取值范围。(90 年高考试题)

分析:由 $1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x\cdot a>0$ 得:

$$a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right].$$

由于该不等式对于 $(-\quad,1]$ 内的一切 x 成立。所以只须求右边函数的最大值。这样问题就转化为求函数

$$g(x)=-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}^x\right)\right].$$

的最大值。由于 $g(x)$ 是关于 x 的增函数,所以当 $x=1$ 时达到最大值为

$$-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1-n}{2}.$$ 于是 $a>\frac{1-n}{2}$.

例6 直线 $y-ax-1=0$ 和曲线 $3x^2-y^2=1$ 相交于 A、B 两点,a 为何值时,以 AB 为直径的圆经过原点?

这是一道很常见的解几题,如果改成:直线 $y-ax-1=0$ 和曲线 $3x^3-y^2=1$ 相交于 A、B 两点,问是否存在这样的实数 a,使以 AB 为直径的圆经过原点,并证明你的结论。这样就增加了难度,融入了探索法思想。再如习题:证明 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2=-n(2n+1)$ 可以改成:是否存在这样的实数 a,b,c,使得对一切自然数 n 均有:$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2=a\cdot n^2+bn$

$+c$. 对于问题:求函数 $y=\sin^2x-3\cos x+2$ 的最大值与最小值,学生是不以为然的,如改成求 $y=\sin^2x-a\cos x+2$ 的最大值与最小值。就要求对 a 进行讨论,培养分类讨论的思想。再改成:已知 $y=\sin^2x-a\cos x+2$ 的最大值为 5,求其最小值,问题又递进一步,体现了逆向思维的思想方法。……

以上对通过变题培养学生掌握数学基本思想方法作了些浅显的讨论。在教学过程中,如能贯穿“变”的思想,使学生在变化中把握知识的内在联系和问题的本质,就一定能逐步培养学生灵活运用知识的能力,不断提高数学教学质量。

□数学变形对解题的作用

众所周知,完成数学运算所需要的最基本的能力就是数学变形的能力。提高解题中的变形能力,对于提高运算能力以及利用运算进行推理的能力,是教学中一个十分重要的环节。

殷堰工老师把数学变形分为两大类:一是数和式的分解变形;一是公式的变形。

1. 数和式的分解变形

所谓“分解变形”,可以这样认为:按照给定的法则把一个数或式分解成几个数或式的变形方法称之为“分解变形”。恰当而又正确地应用数与式的“分解变形”往往使运算化繁为简,问题化难为易,能正确迅速地达到目的。

例 1 解方程 $2(x+\sqrt{x^2-1})=(x-1+\sqrt{x+1})^2$.

解 把 $2x$ 变成 $(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{x-1})^2$,则原方程变形为

$$(\sqrt{x+1})^2+2\sqrt{(x+1)(x-1)}+(\sqrt{x-1})^2$$

$$=(x-1+\sqrt{x+1})^2,$$

即 $$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2$$

$$=(x-1+\sqrt{x+1})^2,$$

亦即 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+1}+x-1$,

整理得 $(x-1)(x-2)=0$,故 $x_1=1$,$x_2=2$,

检验 $x=1$,$x=2$ 均为原方程的根。

例 2 设 $S_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$,

求 $\lim\limits_{n\to}S_n$。

解： 把数列通项的分子 1 分解成

$(n+1)-n$，

则 $\dfrac{1}{1+n+n^2}=\dfrac{(n+1)-n}{(n+1)n+1}=\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n+1}}$，

于是有 $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+n+n^2}$

$=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+1}$.

从而 $S_n=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\cdots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+1}$

$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+1}$，

故 $\lim\limits_{n\to}S_n=\dfrac{\pi}{4}$.

例 3 设 $a>0,b>0,c>0$，

求证 $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

证明 这是一道用一般方法比较难证的题目，用分解变形的方法可以获得简洁、巧妙的证明。

$a>0,b>0,c>0$，

，$\dfrac{2c}{a+b}+\dfrac{2a}{b+c}+\dfrac{2b}{c+a}$

$=\dfrac{a+b+2c}{a+b}+\dfrac{b+c+2a}{b+c}+\dfrac{c+a+2b}{c+a}-3$

$=\dfrac{(a+c)+(b+c)}{a+b}+\dfrac{(a+b)+(a+c)}{b+c}+\dfrac{(a+b)(b+c)}{c+a}-3$

$=\dfrac{a+c}{a+b}+\dfrac{b+c}{a+b}+\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{a+c}{b+c}+\dfrac{a+b}{c+a}+\dfrac{b+c}{c+a}-3$

$\geqslant 6\sqrt[6]{\dfrac{a+c}{a+b}\cdot\dfrac{b+c}{a+b}\cdot\dfrac{a+b}{b+c}\cdot\dfrac{a+c}{b+c}\cdot\dfrac{a+b}{c+a}\cdot\dfrac{b+c}{c+a}}-3=6-3=3$，

即 $\dfrac{2c}{a+b}+\dfrac{2a}{b+c}+\dfrac{2b}{c+a}\geqslant 3$，

亦即 $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

窥一斑而见全豹,从上面三个例子我们不难看出分解变形对解题的作用。

2. 数学公式的变形

将数学公式合理变形,并熟悉它,那么在解题时可左右逢源,灵活自如,使"死"公式"活"起来,起到事半功倍的效果。如,对基本公式:

$a^2+b^2\geqslant 2ab$,可变形为$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,

$(a>0,b>0)$. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$, $1+a^2\geqslant 2a$.

又可变形为 $b\geqslant\frac{a^2}{2a-b}(2a-b<0)$,

$\frac{a^2+b^2}{a}\leqslant 2b(a<0)$, $\frac{a^2+b^2}{ab}\leqslant 2(ab<0)$.

也可变形为 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$, $a^2\geqslant b(2a-b)$, $2a\leqslant\frac{a^2+b^2}{b}(b>0)$ 等等。再如,乘法公式可以变形为 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$等。类似的例子很多,下面举几个具体的实例说明公式变形在解题中的作用。

例1 设 $x+y=1$, $x^3+y^3=3$,

求 x^2+y^2 的值。

解 本例如用一般解方程组方法处理较繁,利用乘法公式的变形来解则十分简捷。

$x^3+y^3=(x+y)-3xy(x+y)$,

即 $3=1-3xy$,, $xy=-\frac{2}{3}$,从而 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2(-\frac{2}{3})=2\frac{1}{3}$.

例2 试证 $tg80°=tg10°+2tg20°+4tg50°$

解 注意到公式 $tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$,将此公式变形有 $tg\alpha\pm tg\beta=tg(\alpha\pm\beta)(1\mp tg\alpha tg\beta)$.

则 $tg80°-tg10°-2tg20°-4tg50°$

$=tg70°(1+tg80°tg10°)-2tg20°-4tg50°$

$tg70°(1+ctg10°tg10°)-2tg20°-4tg50°$

$=2(tg70°-tg20°)-4tg50°$

$=2tg50°(1+tg70°tg20°)-4tg50°$

$=4tg50°-4tg50°=0$，即

$tg80°=tg10°+2tg20°+4tg50°.$

值得指出的是，上面的公式可以有许多的变形。如 $tg\alpha+tg\beta=tg(\alpha+\beta)-tg(\alpha+\beta)tg\alpha tg\beta$；(1)

$tg(\alpha+\beta)=tg\alpha+tg\beta+tg(\alpha+\beta)tg\alpha tg\beta$；(2)

$tg\alpha tg\beta=1-\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{tg(\alpha-\beta)}-1$；(3)

$tg\alpha tg\beta+(tg\alpha+tg\beta)\cdot ctg(\alpha+\beta)=1.$ (4)

等等

利用这些变形，可以解决一些较为复杂的问题。

例3 若 $\alpha=\frac{\pi}{12}$，求 $tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{5\alpha}{2}+tg\frac{5\alpha}{2}$ 的值。

解：注意到 $\alpha=\frac{\pi}{12}$，$ctg(\frac{\alpha}{2}+\frac{5\alpha}{2})=ctg\frac{\pi}{4}=1.$ 将所求式子与(4)比较，即得 $tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{5\alpha}{2}+tg\frac{5\alpha}{2}=1.$

例4 试证 $tg20°+tg40°+\sqrt{3}tg20°tg40°=\sqrt{3}.$

证明 注意到 $tg(20°+40°)=tg60°=\sqrt{3}$，并将要证的等式与(2)比较，得结论。

从本例我们还可发现，只要当 $\alpha+\beta=45°$ 时，由(2)可得 $tg\alpha+tg\alpha tg\beta+tg\beta=1$，即 $(1+tg\alpha)(1+tg\beta)=2$. 这样，下题：

$(1+tg1°)(1+tg2°)\cdots\cdots(1+tg44°)=2^{22}$，就能轻而易举地证得。

例5 若 a、b、c、d、e 均为正数，试证明：

$a^4(b+c+d+e)+b^4(c+d+e+a)+c^4(d+e+a+b)+d^4(e+a+b+c)+e^4(a+b+c+d)\geqslant 20abcde.$

证明 这道证明不等式的题比较棘手，但利用著名的平均值不等式公式的变形处理，就不难解决。由

$\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$，(其中 $a_i>0$，$i=1,2,\cdots n$) 变形得 $\sum_{i=1}^{n}a_i^n\geqslant n\prod_{i=1}^{n}a_i$. 令 $n=4$，得

$a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4\geqslant 4a_1a_2a_3a_4$. 于是要证不等式左边 $=e(a^4+b^4+c^4+d^4)$

$+a(b^4+c^4+d^4+e^4)+b(c^4+d^4+e^4+a^4)$

$+c(d^4+e^4+a^4+b^4)$

$+d(e^4+a^4+b^4+c^4)\geqslant 4abcde+4abcde+4abcde+4abcde+4abcde=20abcde$

由例子可以看出,加强变形能力的培养,对于提高解题能力乃至发散性思维能力,都是有百利而无一弊的大好事,宜加以重视。

□数学中常见变形类型

变形是中学数学教学的一个重要内容。所谓变形,是对数式乃至命题的本质认识的不断反复。它是认知机智的体现,也是思维灵活性、深刻性的一个标尺。有些学生尽管能掌握一些变形的方法、技巧,但对为何要进行这种变形却感到茫然。问题的症结在于我们在教学中只一味给学生介绍变形的方法、技巧,却忽略了对学生进行何以要变形的动因揭示。江苏省无锡县梅村中学陈佑庄老师就这个问题介绍了一些常见的变形类型:

1. 为运用公式、定理和法则创造条件所作的变形

例1 求证 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2.$

证此不等式可作变形:先运用放缩法尔后再裂项。

证明 $\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{2\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2(\sqrt{K+1}-\sqrt{K})$。

顺次令 $k=1,2,3,\cdots,n$ **并将它们相加,得**

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2[(\sqrt{2}-1)$

$+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$

$=2(\sqrt{n+1}-1)>2\sqrt{n}-2.$

2. 便于应用题设条件的变形

有些问题,所给条件尚不能直接被利用,需要将其变形或将命题中的待证解式变形再应用题设条件。

例2 求证 $5^{6n-1}+7^{6n+1}$ **能被9整除**$(n\in N)$。

在用数学归纳法证明 $n=K+1$ **这一步时,为利用假设** $5^{6k-1}+7^{6k+1}$ **能被9整除这一条件,就需要作如下变形:**

$5^{6k+5}+7^{6k+1}=5^6(5^{6k-1}+7^{6k+1})$

$+(7^6-5^6)\cdot 7^{6k+1}$,**又**

$7^6 5^6 = (7-5)(7+5)(49+35+25)(49-35+25)$

$= 2 \cdot 12 \cdot 109 \cdot 39 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 109$ 能被 9 整除。

3. 有利于分析、判断的变形

有些问题未知量多而条件少，似乎难于确定解答；也有些问题要进行判断，而从表面上看可能性又非常多。倘若运用恰当的变形，则可以从飘忽不定的关系中作出确定的判断，从无数的可能中得出有限种可能。

例 3　$\triangle ABC$ 中角 A、B、C 所对的边 a、b、c 成等差数列，复数 $z = [\cos(\pi + \frac{A}{2}) + i\sin(\pi + \frac{A}{2})] \cdot [\sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{C}{2}) + i\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{C}{2})]$，求复数 z 的辐角主值的最小值。

因 A、B 是不确定的可变因素，故只有经过变形，对条件作出进一步判断，才可能有确定的解。

解　由 a、b、c 成等差数列，有 $\sin A + \sin C = 2\sin B$，即得　$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

$\cos(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}) + i\sin(\frac{A}{2} + \frac{C}{2})$.

，　$\frac{A}{2}, \frac{C}{2}, \frac{A}{2} + \frac{C}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$，

，　$$\operatorname{tg}(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}) = \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\geqslant \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}.$$

即 $\operatorname{tg}(\frac{A}{2} + \frac{C}{2})$ 的最大值为 $\sqrt{3}$，而正切函数在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是增函数，故所求复数 z 的辐角主值的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

4. 能揭示问题的特征或规律的变形

有时需要通过变形把所给条件中的特征或规律体现出来，这样才便于确定问题的类型和解法；有些问题需要通过若干特殊情形的考察，把所得结果通过变形探究出规律，然后再进行论证或计算。

例 4　数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1}\cos x + \cos(n-1)x$，$x \neq k\pi\ (k \in z)$，$n \geqslant 2$，

求 a_n.

解：$a_1=1, a_2=\cos x+\cos x=2\cos x$,

$a_3=2\cos^2 x+\cos 2x=3-4\sin^2 x$

$=\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\sin x}=\frac{\sin 3x}{\sin x}$.

由 $a_3=\frac{\sin 3x}{\sin x}$的特征分析可倒推出

$a=\frac{\sin x}{\sin x}$, $a_2=\frac{\sin 2x}{\sin x}$,

由此可以猜测 $a_n=\frac{\sin nx}{\sin x}(n\in N)$.

用数学归纳法很容易证明上述猜想，由本题可以看出，对 a_3 的结果进行变形至关重要，由此才诱发对 a_1, a_2 的倒推变形，进而方可由这三种特殊情形上升为规律。

5. 通过换元进行的变形

换元可将复杂的问题化解为几个较简单的问题，从而降低问题的难度。换元时可以将一个命题转化为与其等价的容易证明的新命题。

例5 设在平面内表示复数 z_1, z_2, z 的三点依次为 A,B,P，且有 $z=\frac{1-it}{2}z_1+\frac{1+it}{2}z_2$；$(t\in R)$ 当 A、B 为两定点时，求点 P 的轨迹。

倘按常规用代数形式代入后再用消去法可得出所求轨迹方程，但运算过程势必冗长繁杂。注意到

$\frac{1-it}{2}+\frac{1+it}{2}=1$，且此两复数互为共轭，于是可用换元法将几何命题转化为代数命题来解。

解：设 $\alpha=\frac{1-it}{2}$，则 $1-\alpha=\frac{1+it}{2}$，且有 $\bar{z}=1-\alpha$. 于是有

$z=\alpha z_1+(1-\alpha)z_2=\alpha(z_1-z_2)+z_3$,

, $z-z_2=\alpha(z_1-z_2)$. ①

同理可得 $z-z_1=(1-\alpha)(z_2-z_1)$ ②

①÷②得 $\frac{z-z_2}{z-z_1}=-\frac{\alpha}{1-\alpha}$.

$\bar{\alpha}=1-\alpha$, , $|\alpha|=|1-\alpha|$.

故有 $\frac{|z-z_2|}{|z-z_1|}=\frac{|-\alpha|}{|1-\alpha|}=1$,

即 $|z-z_1|=|z-z_2|$. 因此 P 点的轨迹是线段 AB 的垂直平分线。

6. 利于简化运算的变形

例 6 求 $(x^{-1}-1+x)^5$ 展开式中的常数项

解 $(x^{-1}-1+x)^5=[(x+x^{-1})-1]=(x+x^{-1})^5-5(x+x^{-1})^4+10(x+x^{-1})^5-10(x+x^{-1})^2+5(x+x^{-1})-1$,又常数项存在 $(x+x^{-1})^{2k}$ 中 $(K\in N)$,

∴ 可得常数项是 $-5C_4^2-10C_2^1-1=-51$.

7. 对公式、定理的变形

有时将公式、定理变形,然后去解题会带来意想不到的方便,常收事半功倍之效。

例如,将余弦定理进行配方变形,

$$a=\sqrt{(b+c)^2-2bc(1+\cos A)}$$

或 $$a=\sqrt{(b-c)^2+2bc(1-\cos A)}$$

如将其进行三角形变形则得

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$$

或 $$\sin^2(B+C)=\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C\cdot\cos(B+C).$$

下面我们举例说明上述四个变形公式的应用。

例 7 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上有一点 P,F_1 与 F_2 是椭圆的焦点,且 $\angle F_1PF_2=0$,试求 $S_{\triangle F1PF2}$.

解 设 $|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,则 $m+n-2a$,又 $|F_1F_2|=2c$,在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由公式(1)得 $(2c)^2=(m+n)^2-2mn(1+\cos\theta)$,

即 $2mn(1+\cos\theta)=(m+n)^2-4c^2=4a^2-4c^2=4b^2$,

∴ $$mn=\frac{2b^2}{1+\cos\theta},$$

∴ $$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2\sin\theta}{1+\cos\theta}\sin\theta=b^2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

例 8 若 $\triangle ABC$ 的面积为定值 S,且 $\angle A$ 为定角试判定 $\triangle ABC$ 为何种三角形时 BC 边长为最小

解 由 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 得 $2bc=\frac{4S}{\sin A}$. 是由公式(2)得

$$a=\sqrt{(b-c)^2+\frac{4S(1-\cos A)}{\sin A}}。$$

显见,当 $b=c$ 时边长 BC 为最小,即 $\triangle AB$ 为以 A 为顶角的等腰三角形时 BC

(2)的形式。

解 略

例3 在△ABC中,求证:$ctg^2A+ctg^2B+ctg^2C\geqslant 1$.

证: $A+B+C=\pi$

, $ctgActgB+ctgBctgC+ctgCctgA=1$

由不等式 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$,得 $ctg^2A+ctg^2B+ctg^2C\geqslant ctgActgB+ctgBctgC+ctgCctgA=1$.

例4 设△ABC是锐角三角形,求 tgAtgBtgC 的最小值。

分析:由 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ 可得 $tgA+tgB+tgC\geqslant 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$,再将 tgA+tgB+tgC 替换为 tgAtgBtgC 即可得解为 $3\sqrt{3}$.

例5 在△ABC中,BC边上的高 AD=3,BD=m,DC=n,且 $\frac{1}{\log m^3}+\frac{1}{\log n^3}<2$.

求证:∠A必为锐角。

分析:由已知条件易求得 $tgB=\frac{3}{m}$,$tgC=\frac{3}{n}$,将 tgA+tgB+tgC=tgAtgBtgC. 作为 tgA 的方程,于是求得 $tgA=\frac{3(m+n)}{9-mn}$,由已知不等式可得 mn<9,则 tgA>0,∠A为锐角。

通过上面几例我们可以看到:

①如果已知条件或所求问题中含有 a+b+c、abc 或 ab+bc+ca 形式的式子时,应用公式(1)或(2)常使思路顿开茅塞,进而使所求问题简捷、明快地获得解决。

②虽然所求问题中不含有上述形式的式子,但通过适当的变换(如例2、例3)使之含有上述式子,进而可应用公式解题。

③在证(解)题时,用 tgAtgBtgC 替代 tgA+tgB+tgC(A+B+C=kπ)或把 tgA+tgB+tgC=tgAtgBtgC(A+B+C=kπ)作为某角正切(如tgA)的方程,求这个角的正切,是不可忽视的解题技巧。

应用两角和正切公式,还可得到:

若 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$,则

$ctg\alpha+ctg\beta+ctg\gamma=ctg\alpha ctg\beta ctg\gamma$.

$tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha=1$.

在证(解)题时,它们的应用与公式(1)、(2)类似。

□数学解题中的“变”与“辨”

数学题多如牛毛，深如海洋，千变万化。这往往使一些同学感到数学难学，但是，我们如果能辨别出它的变化，就能以不变应万变，以少胜多，达到举一反三、触类旁通的目的。

所说不变，指所学的定义、定理、公式、法则不变，只要这些基本的知识掌握的准，再能分析清题的类型，然后采取相应的方法，就令迎刃而解。河北容城张市中学张占坡老师作了如下举例说明：

1. 关于非负数问题

例　已知：$(x-5)^2+(3y-9)^2=0$，且 x、y 为实数，求 x、y 的值。

〈分析〉实数有一个很重要的性质，就是：若干个非负实数之和等于零，则每一非负数必为零。又知任何实数的平方就是非负数。所以必有：$(x-5)^2=0$，$(3y-9)^2=0$，故得解法如下。

解：x、y 为实数，

，　$(x-5)^2=0$，$(3y-9)^2=0$，

即　$\begin{cases}x-5=0,\\3y-9=0,\end{cases}$

，　$\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$

非负数在中学数学里有三个表现形式，即平方形式 $x^2\geqslant 0$；绝对值形式 $|x|\geqslant 0$；算术根形式 $\sqrt[2n]{x}\geqslant 0$. 因此，上题可以变形为：

1. $|x-5|+|3y-9|=0$；
2. $\sqrt{x-5}+\sqrt{3y-9}=0$；
3. $(x-5)^2+\sqrt{3y-9}=0$；
4. $(x-5)^2+|3y-9|=0$；
5. $|x-5|+(3y-9)^2=0$；
6. $|x-5|+\sqrt{3y-9}=0$；
7. $\sqrt{x-5}+|3y-9|=0$；
8. $\sqrt{x-5}+(3y-9)^2=0$.

如果再进一步变化，那就成为较为难的题了，但其本质仍然不变。例如：

1. 若 $x^2+9y^2-10x-54y+106=0$，且 x、y 为实数，求 x、y 的值。

2. 若 $x^2+9y^2-10x-54y+106=0$，且 x、y 为实数（$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$），求 $\lg xy$ 的值。

3. 初中代数第三册第 24 页第 21 题。

4. 初中代数第三册第 39 页第 12 题。

以上各题均属非负数的变形。

〔注〕以上课本指 1981 年版本。

2. 关于不等式的变形

如果要解不等式 $x^2-4x-12>0$，这是很容易的事。但是，对于它的变形，就要很好的分辨分辨。下面仅举几例。

例 1　x 为何值时，$y=\sqrt{x^2-4x-12}$ 有意义。

〈分析〉本质是解不等式 $x^2-4x-12>0$.

例 2　当 m 为何值时，方程

$(m+3)x^2-mx+1=0$ 有二不等实数根？

〈分析〉欲使方程有二不等实数根，必须使判别式 $\Delta=(-m)^2-4(m+3)=m^2-4m-12>0$，且 $(m+3)\neq 0$，

即解不等式 $\begin{cases} m^2-4m-12>0, \\ m+3\neq 0. \end{cases}$

例 3　当 m 为何值时，函数

$y=(m+3)x^2-mx+1$ 与 x 轴有两个交点？

〈分析〉二次函数与 x 轴有两个交点，即方程 $(m+3)x^2-mx+1=0$ 有不等二实数根，以下与例 2 相同。

例 4　当 m 为何值时，方程

$(m+3)x^2-mx+1=0$ 无实数根？

〈分析〉欲使方程无实数根，必须使判别式 $\Delta=(-m)^2-4(m+3)=m^2-4m-12<0$.

即解不等式组 $\begin{cases} m^2-4m-12<0, \\ m+3\neq 0. \end{cases}$

例 5　当 m 为何值时，函数

$y=(m+3)x^2-mx+1$ 与 x 轴无交点？

〈分析〉二次函数与 x 轴不相交，又分两种情况：①图象在 x 轴上方；②图象在 x 轴下方。故分两种情况解：

①即解不等式组 $\begin{cases} m+3>0, \\ m^2-4m-12<0. \end{cases}$

②即解不等式组$\begin{cases} m+3<0, \\ m^2-4m-12<0. \end{cases}$

例6 当m为何值时,代数式

$(m+3)x^2-mx+1$的值恒为正?

〈分析〉欲使二次三项式的值永远为正数,即函数$y=(m+3)x^2-mx+1$的图象在x轴上方,且与x轴不相交,相当于例5中的①。

例7 当m为何值时,代数式$(m+3)x^2-mx+1$的值恒为负?

〈分析〉此题就相当于例5中的②。

例8 当m为何值时,代数式

$(m+3)x^2-mx+1$的值非零?

〈分析〉此题是例6、7的综合(略)。

初中代数(81年版)第四册第20页第3题也属于不等式的变形。

只要在掌握基本概念、基础知识上,运用分析的方法。"辨"出数学题"变化"的来龙去脉,就会收到良好的效果。

□数学教学中的变式教学

变式教学是应试教育向素质教育转化的重要手段之一,具有培养学生灵活性。提高能力。"减负提质"等功能。重庆綦江县松局子弟中学贺刚老师从三方面分析了变式教学的应用。

1. 概念教学中应用变式教学

数学概念是解题的基础,是推理的依据,加强概念的学习,要做到"懂、记、用"。在教学中除正面阐述概念。还应对概念从变式教学过程加深理解。

(1)对概念叙述"等价变式"。如"非负数"⇔大于或等于零的实数⇔$\alpha\geqslant 0\Leftrightarrow\mu\not<0$;从概念"等价变式"加深学生对"非负数"概念的理解。又如:a、b不全为零⇔$>a^2+b^2\neq 0$等。

(2)画"变式图形",对于几何概念还可通过画它的变式图形排除"标准位置"、"标准图形"的影响。例如:平几中"等腰三角形"的本质是"有两边相等"。可通过画"标准型"、"胖点"、倒立"、"底在侧面"、"组合图形"及"三边相等"等变式图形,让学生真正理解"等腰三角形"。又如"垂线"概念的理解。通过变式图形排除"铅垂向下"的影响。"平行"只限于"水平"平行的影响。

(3)用“去”、“换”、“拆”等变式方法,对于概念教学,还可通过“去”(去要点),“换”(换条件),“拆”(拆开看)等变式方法加深对概念理解。如:“线段的垂直平分线”的定义中去掉“过中点”,则过线段上任一点垂直于线段的直线位置就出来了。如去掉“垂直”则过中点与线段相交的直线位置就出来了。

2. 公式定理教学中应用变式教学

(1)构造系列变式,层层递进,逐步理解。例如:多项多乘法中平方差公式:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,学生如何理解公式中的 a、b,可通过

变式一:$(6+y)(6-y)=$_____

变式二:$(3m+n)(3m-n)=$_____

变式三:$(4a-b)(4a+b)=$_____

变式四:$(7x+5y)(7x-5y)=$_____

变式五:$(-x+a)(-x-a)=$_____

变式六:$(3m^4+4n^2)(3m^4-4n^2)=$_____

变式七:$(-\frac{1}{3}x-2y)(\frac{1}{3}x-2y)=$_____

……

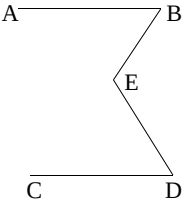
(2)对数学公式“逆向应用”,对一公式,不但要“正向”应用,即从左向右应用,还必须“逆向”应用,即从右向左应用,这也是一种变式手段。如:$(ab)^n=a^nb^n$ 的应用,“正向”应用 $(5a)^2=25a^2$,“逆向”应用 $2^{16}\times5^{10}=(2\times5)^{10}=10^{10}$.

(3)几何定理证明画出变式图形,体现“分类”的数学思想。如:“圆周角度定理”的证明过程,通过画出变式情形,圆心在角内、角的边上、角外部三种情况进行证明。即全面解答了问题,又体现了“分类”思想。

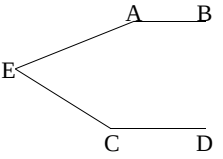
3. 解题教学中应用变式教学

在解题教学中应用变式教学,可以让学生达到对问题举一反三的目的。同时也能加强逻辑思维训练,增强解题能力,培养学生思维灵活性和深刻性,解决思维障碍。

例 1 如图(1)已知 $\angle E=\angle B+\angle D$. 求证:$AB\parallel CD$。



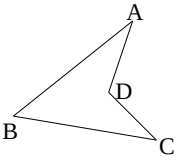
图(1)



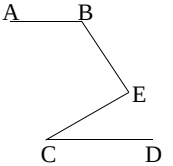
图(2)

注:用平行线的判定定理证明,至少有三种引辅助线方法加以证明(1)连结BD。(2)延长BE交CD,(3)过E作AB的平行线。

变式例2 如图(2),AB∥CD,∠A=150°,∠E=70°,则∠C=_____.



图(3)



图(4)

注:在例1基础上联想,同样可引类似三条辅助线加以计算。

变式例3 如图(3)至少用两种方法证明:∠A+∠B+∠C=∠ADC.

注:可看成例1中,要证的两平行线相交于一点,同样可引类似辅助线加以证明。

变式例4 P是△ABC内任一点,求证:

∠A<∠BPC.

注例4可看成例3,图形将A、C连结起来。

变式例5 如图(4)AB∥CD,∠B=120°,∠C=25°,求∠E.

由此可见,变式教学可应用于教学的各个环节,同时可采用许多手段(变式图形,变式过程,变式条件等)。通过构造系列变式,从认知过程达到知识和能力的培养,渗透数学思想和方法。实现应试教育向素质教育的转变。

□变式教学的六种类型

近年来,高考试题"源于课本,高于课本的趋势越来越明显,使得中学教师回归课本,以达到"减负提质"之目的。历年的高考试题不是

课本题目的简单再现,而是取材于课本,加以变式来得到。这就要求教师在数学教学中,对课本上的例题、习题不能只停留在模仿,照搬的基础上,而应以课本知识体系为依托,进行变式教学,从而达到启发、训练、优化学生思维品质之目的。重庆南开中学解传江老师总结了六种类型:

1. 辨析型变式教学

教学中的一些概念、公式、定理,或因内容相似相近,或因形式相似相近,易造成混淆。在教学中,运用辨析型变式教学,就能促使学生在错综复杂的事物联系中,发现问题的实质,学会客观地评价事物,加深对事物的理解。

例 1　判断正误,并说明理由。

①分别在两个平面内的两条直线是异面直线;

②若 z 是复数,那么 $|z|^2=z^2$;

③数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+3}+a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列。

通过辨析,既能防止产生概念混淆,又能帮助学生揭示问题各自的内在规律,从而培养学生思维的批判性。

2. 类比型变式教学

类比是思维的一种重要形式,经过类比能使知识向更深的层次或更广阔的领域迁移,发展。在教学中,若教师从知识的顺延、从属、引伸、互逆、相似等方面考虑和发掘类比因素,进行类比型的变式教学,无疑对训练、启发、培养学生思维的变通性大有裨益。

例 2　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$(是高中课本《代数》(必修)上册第 162 页的公式)。有如下类比型变式。

(变 1)证明:$\cos2\alpha=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

(变 2)求函数 $y=\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)-\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$ 的最值,并证明该函数的值与 α 无关。

分析:(变 1)与例 2,只需将例 2 中的 α,β 分别换为 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 就行。(变 2)与(变 1)本质上无区别,但(变 2)是一道由计算与证明组成的综合题。又因为 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,仿(变 1)有:

(变 3)$\sin2\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

(变 4)证明:

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)};$$

(变 5)已知 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$,$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$ 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根,求 $\mathrm{tg}2\alpha$

的值。

分析：由例 2 出发去思考，则解题易。

3. 等价型变式教学

将原题的条件或结论，甚至整个题用其等价的形式替代，得到新题目称为原题的等价变式。这是由于一个数学问题常有许多不同的表现形式或不同的表达方式而决定的。故等价型变式教学，有利于学生创造性思维能力的发展。

例 3　已知 $|a|<1$，$|b|<1$，求证：$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.（高中课本《代数》（必修）下册第 27 页的例 4）。因为 $|a|<1$，$|b|<1\Rightarrow|ab|<1\Rightarrow1+ab>0$，故例 3 等价于：（变 1）已知：$|a|<1$，$|b|<1$，$a,b\in R$，求证：$|a+b|<1+ab$. 令 $a=\frac{\alpha}{\varepsilon}$，$b=\frac{\beta}{\varepsilon}$，$\varepsilon>0$ 代入（变 1），（变 2）已知：$|\alpha|<\varepsilon$，$|\beta|<\varepsilon$，$\alpha,\beta\in R$，$\varepsilon\in R^+$，求证：$\varepsilon|\alpha+\beta|<\varepsilon^2+\alpha\beta$.（变 2）的逆向探求：（变 3）已知：$\varepsilon|\alpha+\beta|<\varepsilon^2+\alpha\beta$. $|\alpha\beta|<\varepsilon^2$，$\alpha,\beta\in R$，$\varepsilon\in R^+$，求证：$|\alpha|<\varepsilon$，$|\beta|<\varepsilon$.（变 4）已知关于 x 的实系数方程 $x^2+ax+b=0$，有两个实根 $\alpha,\beta,\varepsilon\in R^+$，证明：（Ⅰ）若 $|\alpha|<\varepsilon$，$|\beta|<\varepsilon$，那么 $\varepsilon|\alpha|<\varepsilon^2+b$ 且 $|b|<\varepsilon^2$；（Ⅱ）若 $\varepsilon|\alpha|<\varepsilon^2+b$ 且 $|b|<\varepsilon^2$，那么 $|\alpha|<\varepsilon$，$|\beta|<\varepsilon$. 特别地取 $\varepsilon=2$，（变 4）为 1993 年全国高考理科压轴题。

4. 发散型变式教学

发散型变式教学就是教师在教学中，引导学生从平常中发现不平常，去探索各种结论或未确定条件的各种可能性。不受“定势”“模式”的束缚，有助于学生发散思维能力的培养与发展。

例 4　过抛物线 $y^2=2px$ 焦点的一条直线和此抛物线相交，两交点的纵坐标为 y_1,y_2，求证：$y_1y_2=-p^2$.（《平面解析几何》（必修）第 99 页 8 题），由于 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 均在抛物线 $y^2=2px$ 上，得 $x_1\cdot x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{p^2}{4}$，（ $y_1y_2=-p^2$）.（变 1）将例 4 的条件不变，改为求证：$x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$.（变 2）已知点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上不同的两点，则 $y_1\cdot y_2=-p^2$（或 $x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$）是两直线 P_1P_2 过抛物线焦点 F 的充要条件。（变 3）抛物线 $y^2=2px$ 上不同的两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，则 $x_1\cdot x_2=a^2$（或 $y_1\cdot y_2=-2pa$）$(a>0)$ 是直线 P_1P_2 过定点 $A(a,0)$ 的充要条件。

5. 探究型变式教学

运用联系的观点，发展的观点处理课本的例、习题，深入挖掘其潜

在功能。在保持已知条件不变的情况下,探索能否得出更深刻,更广泛的结论,或改变命题条件,结论的若干元素,组成新型的,更一般的命题,并探究其正确性,不落俗套,培养学生思维的广阔性。

例5 求 $\cos20°\cos40°\cos80°$ 的值(高中《代数》上册第196页)易知 $\cos20°\cos40°\cos80° = \frac{1}{4}\cos(3\times20°) = \frac{1}{8}$.(变1)化简:$\cos5°\cos55°\cos65° = \frac{1}{4}\cos15° = \frac{1}{4}\cos(3\times5°)$,例5与(变1)具有相似性,是偶然,或者有规律可循?通过提问,诱发学生的求知欲,使其进入思维的求索空间。

(一)纵向探究:(变2)$\cos(60°-\alpha)\cos\alpha\cos(60°+\alpha)$

$= \frac{1}{4}\cos3\alpha$. 所以有 $\cos6°\cos42°\cos66°\cos78°$

$= \frac{(\cos6°\cos54°\cos66°)(\cos18°\cos42°\cos78°)}{\cos54°\cos18°}$

$= \frac{\frac{1}{4}\cos18°\cdot\frac{1}{4}\cos54°}{\cos54°\cdot\cos18°} = \frac{1}{16}$,….

(二)变更函数名称,横向探究:

(变3)$\sin\alpha\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha) = \frac{1}{4}\sin3\alpha$;

(变4)$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60°-\alpha)\operatorname{tg}(60°+\alpha) = \operatorname{tg}3\alpha$.

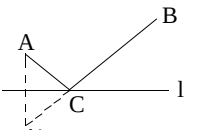
(三)提出新问题,进行再探究:60°是变式2—4成立的必要条件吗?当 β 为怎样的角时,有 $\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha) = \frac{1}{4}\sin3\alpha$ 成立?分析:原式$\Leftrightarrow -2(\cos2\beta-\cos2\alpha)\sin\alpha = \sin3\alpha \Leftrightarrow 2\cos2\alpha\cdot\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos2\beta = \sin3\alpha \Leftrightarrow \sin3\alpha - \sin\alpha - 2\sin\alpha\cos2\beta = \sin3\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha(2\cos2\beta+1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos2\beta+1 = 0$(α为任意角)$\Leftrightarrow \beta = k\cdot180°\pm60°$($k\in Z$)时,原式成立。故将变式2—4的60°换成 $k\cdot180°\pm60°$($k\in Z$)时,均成立。

通过对课本习题的变更,猜想,探索,养成学生勤于思考,爱探索的好习惯。

6. 递进型变式教学

递进型变式教学注重知识的纵向延伸,使学生的思维由表及里,由浅入深地不断递进。培养学生思维的深刻性。

例6 一条小河l的同旁有两个村庄A、B,在河边修一个抽水站,问:该站应建在何处才能使它到A、B的距离之和最短。



见图1,学生均会解该题,知道抽水站应建在C处,A'与A关于l对称,它只是"会解",就有些可惜,引导学生向前走一步。

(变1)小河两岸(设两岸是平行的)有两个村庄A、B,要在河上修一座与河岸垂直的桥,使两树庄间的距离最近,桥应修在何处?

解答见图2,应修在CD处,与例6比较,其实质相同,但思维层次明显提高。

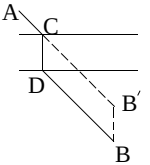


图2

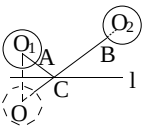


图3

(变2)设在直线l同旁有两定圆⊙O_1和⊙O_2,在⊙O_1,⊙O_2和l上各找一点A,B和C,使AC+BC最小。

解答见图3,前面的问题局限于平面,若思维递进到空间又会怎样呢?

(变3)在平面α上找一点C,使C到平面α同旁的两点A、B距离之和为最小。解答见图4,A,A'关于平面α对称。

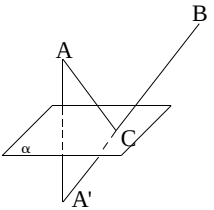


图4

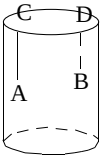


图5

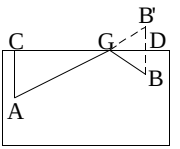


图6

(变4)如图5,在圆柱形的桶外侧面A处有一小虫,请为它设计一条最短线路,使它沿桶外侧爬到桶内壁的B处。

解答见图6,将桶的侧面展开为一矩形,取点B关于CD的对称点B',则G点为所求,即小虫沿桶外侧AG方向爬到G点,再从G点沿内壁GB方向爬到B点,距离为最短。这不就是前面的例6吗?但(变4)的思维层次远远高于例6。通过递进变式,学生的思维一次又一次地飞跃,思维品质得到优化。

变式教学,形式多样,其作用显而易见,限于篇幅,不再赘述。但编拟变式题一定要从教材,大纲出发,突出基础知识,基本能力,基本方法,不能追求偏、难、怪。再则,要把握好分寸,不要使学生有"炒现饭"的感觉,也不要使学生茫然失措,无从下手。总之,教学是一门艺术,数学问题千变万化,在教学中,由具体知识的特点,结合学生实际,来进行

变式教学,无疑对优化学生思维品质十分有益。

□变式解题与递进思维培养

思维是寻求新问题答案的过程,是通过分析、比较、抽象和概括来完成的。传统的"注入式"教学方法舍弃了"寻求"这一过程,学生看到的是各自相互独立的"新问题的答案",这种方法显然不利于思维能力的培养。那么怎样才能在传授知识的同时使学生的思维能力得以有条理、有步骤、循序地递进呢?充分、合理地应用变式能起到事半功倍的效果。

上海市卢湾区教育学院附中孙爱民老师以三垂线定理应用的教学为例,说明了运用变式发展学生的思维:

1. 创设情境,激发直觉思维

在可行课中,新概念的引进利用熟知的图形或式子层层设问,步步引入,激发学生的探知热情,引导学生思考,发现新知识。

如图1,在直立于板面 α 上的三角板 PAO 中,考虑:

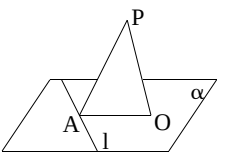


图1

①AO、PO、PA与 α 的关系;(面内线,垂线,斜线)

②PO 与 α 及 α 内各线的关系;(垂直)

③PA与 α 及 α 内各线之间可能有几种关系,有没有特殊关系?(在诸多关系中重点考虑垂直关系)

注:可借助其他教具及实物进行观察、思考,并试图说明理由。

2. 剖析知识点,严密逻辑思维

对知识点进行透彻剖析,通过变换形式,使学生不仅掌握正向思维,而且掌握逆向思维方式,避免产生思维僵化。

在完整严密地论述和证明了三垂线定理之后,我们从另一个角度来剖析和归纳该定理:

一面:α;

四线:垂线、斜线、射影、面内线;

三垂直:垂线 $\perp \alpha$(面内线);

斜线 $\perp$ 面内线 $\Longleftrightarrow$ 射影 $\perp$ 面内线。

注:虽然三垂线定理实际上涉及两个面,但只有一个面起决定作用。

3. 变式训练,逐步递进思维

通过一题多问、一题多变和一题多解,逐步拓宽思路,充分理解概念(定理)的内涵和外延,系统、灵活地掌握概念(定理)。

例1 在正方体(图2)中:

(1)证明:$DB_1 \perp AC$。

分析与略解:

一面:面 AC;

四线:垂线 BB_1、斜线 DB_1、射影 DB、面内线 AC,且 $DB \perp AC$,因此有 $DB_1 \perp AC$(正定理)。

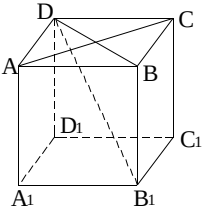


图2

(2)DB_1 与 BC_1 是否垂直?为什么?

略解:与(1)同理,$BC_1 \perp B_1C \Rightarrow DB_1 \perp BC_1$(正定理)。

本题意图:射影常常给人以竖直向下的印象,本题以水平射影为例,目的在于使学生消除这种错觉。

(3)找出与 DB_1 垂直的面对角线。

本题意图:将(2)的结论加以推广和强化。

变式1. 如图3,切下正方体的一角 $A\text{-}A_1B_1D_1$,求 A 到 B_1D_1 的距离。

分析与略解:作 $AM \perp B_1D_1$,垂足为 M。

一面:面 $A_1B_1D_1$;

四线:垂线 AA_1、斜线 AM、射影 A_1M、面内线 B_1D_1。

$AM \perp B_1D_1 \Rightarrow A_1M \perp B_1D_1$(逆定理)。易求出 $AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}AA_1$。

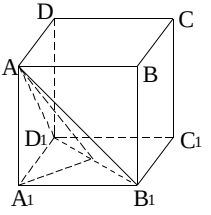


图3

变式2. 如图4,三棱锥 $A_1\text{-}ABC$,$A_1A \perp$ 面 ABC,$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle ABC = 90°$。求证 $A_1B \perp BC$。

分析与略解:

一面:面 ABC;

四线:垂线 A_1A、斜线 A_1B、射影 AB、面内线 BC。

$AB \perp BC \Rightarrow A_1B \perp BC$(正定理)。

提问:此三棱锥可作为何种典型多面体的一部分?

本题意图:本题作为图形训练,目的是使学生能够迅速、准确地抓住图形的实质。如图4所示,该图

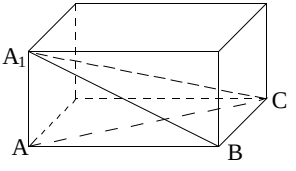


图4

形可作为正六面体的一部分。及时发现图形间的这种联系对于提高解题的速度和质量具有非常重要的意义。

例2　已知：P为△ABC所在平面外一点，PA⊥BC。

求证：P在面ABC内的射影O为△ABC中BC边上的高AE上一点。

分析与略解：

一面：面ABC；

四线：垂线PO、斜线PA、射影AO、面内线BC。PA⊥BC⇒AO⊥BC（逆定理）。

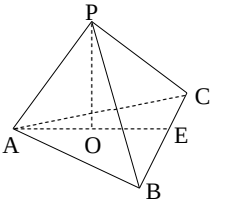


图5

变式1. 增加条件PB⊥AC，则O为垂心，且有PC⊥AB。

变式2. 若O为垂心，则有PA⊥BC、PB⊥AC及PC⊥AB。

变式3. 若PB=PC，AB=AC，则PA⊥BC。

变式4. 在例2条件下：

(1)指出侧面PBC与底面ABC的二面角的平面角；

(2)指出两侧面PAB与PAC所成的二面角的平面角。

分析与略解：由例2，AE⊥BC，连接PE。

一面：面ABC；

四线：垂线PO、斜线PE、射影AE、面内线BC。AE⊥BC⇒PE⊥BC（正定理）。

变式5. 条件同变式2，且有PB⊥PC，结论如何？

略解：AP⊥BP且AP⊥CP。

注：一面、四线、三垂直是多题的“一解”，通过多题一解使知识得到了精炼，使学生学会抓住问题的实质，提高了分析问题和解决问题的能力。

4. 灵活运用，发展创造思维

创造思维是在分析、比较、抽象、概括等基础上的更高层次的思维活动，通过知识的深化、拓广，使学生切身体会到所学的知识可以得到广泛的应用，进而不断发现新的应用方向和方法。

(1)已做过习题的应用。　某些典型习题，其结论可直接用来解答其他问题。例如课本P.117第3题：

如图6，AB和平面α所成的角是θ_1，AC在平面α内，AC和AB的射影AB_1所成的角是θ_2，设$\angle BAC=\theta$。求证：$\cos\theta_1\cos\theta_2=\cos\theta$。

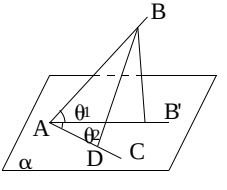


图6

将此题的结论用于解决其他问题，会使解题思路巧妙、简捷，取得更好效果。例如解课本P.47第13题：

已知一个直角三角形的两直角边长为a、b，把这个三角形沿斜边上的高折成二面角。求两直角边夹角的余弦。

此题的一般解法，其步骤较繁，若直接应用上题结论则十分简便。

如图 7，设 $\angle ACD=\theta_1$，$\angle BCD=\theta_2$，$\angle ACB=\theta$，

则 $\cos\theta_1=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta_2=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

因此 $\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2=\dfrac{ab}{a^2+b^2}$。

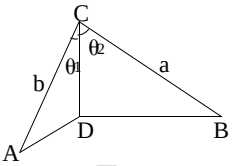


图7

应用前题的结论给出这个问题的新的、更简捷的解法，不仅使学生对这两个问题的解题过程和结论加深了印象，更重要的是能够激发学生主动去发现各内容之间的内在联系，以利于抓住纲要。

（2）课本中习题的变式。 课本习题：P. 117 第 4 题。

变式：如图 8，P 为矩形 ABCD 外一点。如果 $PD\perp AD$，$AB=a$，$BC=b$，$PD=d$，面 PAD 与面 ABCD 成 θ 角。求 PB 的长。

略解：$PD\perp AD\Rightarrow PD$ 及 PC 在面 ABCD 上的射影与 CD 共线，故 $PC\perp BC$。PC 可求，则 PB 可求。通过此题可进一步使学生深入、透彻地掌握定理，提高应用的能力。

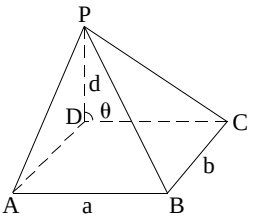


图8

通过以上的训练，学生在完整、系统地掌握知识的基础上，能够灵活自如地进行应用。这种应用能力的获得在于将变式训练适当地引入教学环节中，使学生的思维得以深化、递进，以达到系统、透彻地理解掌握，灵活、自如地加以运用的程度。

□变更问题的表述

不少同学在解题过程中不习惯于变更问题的表述，这无疑是一个欠缺。什么是变更问题的表述呢？虽无严格定义，但一般是指：指日常语言变更为数学语言，变更为公式语言来表达，或者把代数语言表达为几何语言等等。是通过等价形式的表达而使问题思路明朗化。比如证明“函数 $y=\cos x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 是减函数”，可以变更表述为“已知 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$，证明，$\cos x_1>\cos x_2$”。这要明确得多。周春荔老师以二次三项式的例子，示范分析了变更问题表述的方法及其益处。

例 1 当 a 为何值时，方程 $x^2+ax+a=0$ 的根大于 1？

多数同学解本题都详细地求根，

$$x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4a}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2}。$$

并且解不等式组 $\Delta \geqslant 0, x_1 > 1, x_2 > 1$。如果能考虑到 x_2 这个较小的根大于 1 也就保证了 $x_1 > 1$ 的话，有的同学就解如下的两个不等式 $\Delta \geqslant 0, x_2 > 1$。

当你具备很好的解无理不等式的技巧时，当然，这个方法可以达到目的。然而，若应用韦达定理，立刻变得清楚了，所要求的 a 值并不存在：这两个根的乘积 a 大于 1 而它们的和 $(-a)$ 也应是正数。这是矛盾的。

我们有兴趣地注意到，如果这个问题是问：当 a 为何值时，方程两个根都是正的？则会有更多的人就会想到韦达定理——本来这就是它的标准的应用。

例 2　当 a 为什么值时，由不等式 $1 < x \leqslant 2$ 可以得到 $x^2 - 2ax + a < 0$？

这个问题的条件意味着，二次三项式

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2$$

在区间 $1 < x \leqslant 2$ 上是负的。而这又等价于 $1 < x \leqslant 2$，这个区间位于已知二次三项式的两根之间（因为 x^2 的系数是正的）。但这个条件又等价于区间的两个端点位于二次三项式二根之间。最后这个条件又等价于不等式 $f(1) \leqslant 0, f(2) < 0$　即

$$\begin{cases} 1 - a \leqslant 0 \\ 4 - 3a < 0, \end{cases}$$

由此得出　　$a > \frac{4}{3}$。

例 3　证明方程

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) = 0$$

对任何 a、b、c 都有实根。

表达这个问题的直接方法是去括号，然后证明所得的二次三项式的判别式非负，这将导致繁重的计算。

我们利用下面事实：最高次项系数为正数的二次三项式有实根当且仅当至少它在一个点取负值或等于 0。

然后很自然地考察在 a、b、c 各点函数的值，这时三个被加项只剩下了一个，即

$$f(c) = (c-a)(c-b)$$

$$f(b) = (b-a)(b-c)$$

$$f(a) = (a-b)(a-c)$$

乘积的符号与 a,b,c 在 x 轴上的排列有关,为确定起见,设 $a \leqslant b \leqslant c$,则有 $f(b) = (b-a)\cdot(b-c) \leqslant 0$,即二次三项式在点 b 取负值或 0 值,表明二次三项式有实根。

在上述三个问题中,问题条件明显地包含二次三项式,因此所变更问题的表述并不过份离开它的条件,下面我们再看另外的例子。

例 4 求证 若 $x^2+y^2+z^2>0$ 时,则

$x^2+19y^2+6z^2-8xy-4xz+12yz>0$。

如果试图碰运气去分组,并没有把握取得成功。然而应当看到,左边是一个带有参数 y 和 z 关于 x 的二次三项式。这完全清楚用分组法构成完全平方,如果进一步注意,变换常数项之后,表示关于 y 的二次三项式(z 是参数)于是方程左边改写为

$$(x-4y-2z)^2+3y^2+2z^2-4yz$$

$$=(x-4y-2z)^2+3\left(y-\frac{2}{3}z\right)^2+\frac{2}{3}z^2。$$

因此,对 x、y、z 的一切值都是非负的。

它能够等于 0 吗?显然,当且仅当三个加项都等于 0,那么同时成立等式

$$x-4y-2z=0,\ y-\frac{2}{3}z=0,\ z=0$$

立刻得出 $x=y=z=0$,与条件 $x^2+y^2+z^2>0$ 相矛盾。因此,论断完全得证。

例 5 x 为何值时

$$t=\frac{\sqrt{x^2+16}}{3}-\frac{x}{5} \qquad (1)$$

取最小值?

在这个类型问题中,容易首先求所给表达式、所给函数的最小值,然后求当取这个最小值时的自变量的值。

然而求最小值有时可以解更一般的问题:求出函数的全部值域,然后在值域中找最小值。

求最小函数值的问题是可能的,如果问题改变叙述的话,这个事实是,数 A 属于函数 $y=f(x)$ 的定义域,在方程的术语中意味着方程 $f(x)=A$ 至少有一个解。

在所给的问题中注意,由公式(1)给出的函数 $t=t(x)$ 与函数 $s=15t(x)$ 对同一个自变量的值达到最小值。为了简化计算,我们考察函数

$$s=5\sqrt{x^2+16}-3x$$

方程 $5\sqrt{x^2+16}-3x=A$

或者 $5\sqrt{x^2+16}=3x+A \qquad (2)$

两边平方后化为方程

$$16x^2-6Ax+400-A^2=0 \qquad (3)$$

方程(2)有解,当且仅当方程(3)有满足条件 $3x+A\geqslant 0$ 的根 x。但这等价于方程(3)的判别式非负并且方程(3)的较大根大于或者等于 $-\frac{A}{3}$。这样我们得到不等式组

$$\begin{cases}25A^2-6400\geqslant 0\\ \dfrac{3A+\sqrt{25A^2-6400}}{16}\geqslant -\dfrac{A}{3}。\end{cases}$$

这个不等式组可以用通常方法求解,结果得到 $A\geqslant 16$。所以 A 的最小值等于16。但方程(3)在这时有唯一的根 $x=3$,这个根也是方程(2)的根。因此,表达式(1)当 $x=3$ 时取最小值。

进一步补充指出,解所得的不等式组能够做某些简化,如果你立刻想象到,函数 $s=s(x)$ 对任何 x 都是正的话:

$$5\sqrt{x^2+16}>5\sqrt{x^2}=5|x|\geqslant 3|x|\geqslant 3x。$$

因此可以认为 $A\geqslant 0$,那么在不等式组中包含的无理不等式就自动成立了。

例6　求函数 $y=(x-1)(x-5)(x-6)(x-2)$ 的最小值。

第1与第3项相乘,第2与第4项相乘,我们得到函数 $y=(x^2-7x+6)(x^2-7x+10)$。

可以看出,y 是变量 $z=x^2-7x$ 的二次三项式,z 本身又是 x 的二次三项式。

结果我们得到下面的问题 求二次三项式 $y=(z+6)(z+10)$ 的最小值,但不是在全体实数 z 的集合上,而只是在二次三项式 $z=x^2-7x$ 的值域上求解。后一个值域很容易求得,它是无穷区间 $z\geqslant -\frac{49}{4}$。由此,我们应求二次三项式 $y=z^2+16z+60$ 在集合 $z\geqslant -\frac{49}{4}$ 上的最小值。

为了求这个最小值我们注意,当 $z_0=-8$ 时,作为 z 的函数,y 在 $z\geqslant -\frac{49}{4}$ 范围有绝对最小值。因此,在这个范围内 y 的最小值与 y 的绝对最小值一致,在点 $z_0=-8$ 时达到这个最小值。

这样一来,y 的最小值等于 -4,并且当 $x^2-7x=-8$ 时达到。也就是,在两个点

$$x_1=\frac{7+\sqrt{17}}{2},\quad x_2=\frac{7-\sqrt{17}}{2}$$

时达到。

例7　函数 $y=\frac{2+x}{x}$ 的图形与横轴成 α 角的直线相交于两个点。求两个交点

在 x 轴上的射影与坐标原点所成两线段之长的几何平均值。

在这个问题中应首先确切理解它的条件并把它用公式的语言来表达。

函数 $y=1+\frac{2}{x}$ 的图形是双曲线(画出它!),条件中所谈到的直线是倾斜的。(也就是 $a\neq\frac{\pi}{2}$,$a\neq0$),因为所给的双曲线无论与垂直于 x 轴还是平行于 x 轴的直线都不能交于两个点。换言之,直线方程具有 $y=x\mathrm{tg}a+b$ 的形式,其中 $\mathrm{tg}a\neq0$。双曲线与直线相交于两点这个事实,意味着方程

$$\frac{2+x}{x}=x\mathrm{tg}a+b,$$

或者　方程

$$x^2+x(b-1)\mathrm{ctg}a-2\mathrm{ctg}a=0 \qquad (4)$$

有两个相异的实根。(因为 $x=0$ 不是方程(4)的根)

在问题的条件中,已知这个事实是成立的。

如果方程(4)的根用 x_1 和 x_2 表示。则连结坐标原点与直线与双曲线交点在 x 轴上射影的线段之长分别等于 $|x_1|$ 和 $|x_2|$。因此需要计算

$$\sqrt{|x_1|\cdot|x_2|}=\sqrt{|x_1\cdot x_2|}$$

的值,其中 x_1 和 x_2 是方程(4)的根。而这容易用韦达定理得出:

$$\sqrt{|x_1x_2|}=\sqrt{2|\mathrm{ctg}a|}。$$

这就是问题的解。

□变更问题法解题

解数学题时,利用等价变换把一个命题换成另一命题,以利问题的解决,这种方法叫变更问题法。

善于分析、揭示公式的变形特征,仔细地由此及彼地观察,是实现问题变更的有效方法。这种方法时能使解法简捷而巧妙。上海嘉定安亭中学杨思源老师作了如下举例说明:

例 1　求证 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数。

分析　本题要证 $f(-x)=-f(x)$,可改证 $f(-x)+f(x)=0$,而利用对数运算可以巧妙地达到目的。

证明　$f(-x)+(x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})+\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$

$$=\log_a(-x^2+x^2+1)=\log_a1=0。$$

故 $f(x)$ 是奇函数。

例 2 设 $0<x<1, a>0$ 且 $a\neq 1$，比较 $\log_a|(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小。(1982 年高考试题)

分析 我们可以用差值比较两数大小，即判断 $|a|-|b|$ 的符号。分析平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的形式特征，可将它变形为 $a-b=(a^2-b^2)/(a+b)$。于是结合本题的特点，立即可摆脱绝对值符合，使问题化繁为简。

解： $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$$=\frac{|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2}{|\log_a(1-x)|+\log_a(1+x)|}$$

$$=\frac{\log_a^2(1-x)-\log_a^2(1+x)}{|\log_a(1-x)|+|\log_a(1+x)|}$$

$$=\frac{[\log_a(1+x)+\log_a(1+x)]}{|\log_a(1-x)+\log_a(1+x)|}\cdot[\log_a(1-x)-\log_a(1+x)]$$

$$=\frac{\log_a(1-x^2)\cdot\log_a(1-x)/(1+x)}{|\log_a(1-x)|+|\log_a(1+x)|}。$$

$0<x<1$，， $0<1-x^2<1$，

，$0<\frac{1-x}{1+x}<1.$

故无论 $0<a<1$ 还是 $a>1$，$\log_a(1-x^2)$ 与 $\log_a\frac{1-x}{1+x}$ 永远同号，其积为正。又分母

$|\log_a(1-x)|+|\log_a(1+x)|>0$，这就证得 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$。

例 3 试求使 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 对于任意正数 x、y 都成立的最小正数 a。

解：$\sqrt{x}+\sqrt{y}-a\sqrt{x+y}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(a\sqrt{x+y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+a\sqrt{x+y}}$

$$=\frac{x+y+2\sqrt{xy}-a^2(x+y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+a\sqrt{x+y}}\leqslant 0。$$

，$x+y+2\sqrt{xy}-a^2(x+y)=(x+y)(1-a^2)+2\sqrt{xy}\leqslant 0$。即 $(a^2-1)(x+y)\geqslant 2\sqrt{xy}$。

，$a^2-1=1$。即 $a=\sqrt{2}$ 为所求最小正数。

例 4 求 $\sin15°+\cos15°$ 的值。

分析 注意到 $\sin^215°+\cos15°=1$，且 $2\sin15°\cos15°=\sin30°=1/2$，再结合恒等式

$|a|=\sqrt{a^2}$，本题可得如下简捷解法：

解 设 $\sin15°+\cos15°=x, x>0$。

则 $x=\sqrt{x^2}=\sqrt{(\sin15°+\cos15)^2}=\sqrt{1+1/2}=\sqrt{3/2}$。

故 $\sin15°+\cos15°=\sqrt{6}/2$。

例 5 证明对于任意实数 t，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$ 的模 $\gamma=|z|$ 适合 $\gamma\leqslant\sqrt[4]{2}$。（1983 高考试题）

证明 $\gamma=|z|=\sqrt{(\sqrt{|\cos t|})^2+(\sqrt{|\sin t|})^2}$

$=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}$。

，$\gamma^2=|\cos t|+|\sin t|$，

$\gamma^4=1+2|\cos t|\cdot|\sin t|\leqslant1+|\sin t|^2|\cos t|^2$。

即 $\gamma^4\leqslant1+|\sin t|^2+|\cos t|^2=2$。

故 $\gamma\leqslant\sqrt[4]{2}$。

例 6 已知 $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求证 x、y、z 中至少有一个等于 1。

分析 本题结论不是用式子表达，难以直接计算。若变更为等价命题 $(x-1)(y-1)(z-1)=0$，就容易了。

证明 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，，$xy+yz+zx=x\cdot y\cdot z$。由此 $(x-1)(y-1)(z-1)$

$=xyz-(xy+yz+xz)-1+(x+y+z)=0$。

故 x、y、z 中至少有一个值等于 1。

例 7 a 为何值，三直线 $2x-y+3=0$、$x+y+3=0$ 与 $ax+y-13=0$ 相交于一点？

分析 若把两条直线写成 $(2x-y+3)(x+y+3)=0$，即变为二次曲线。若第三条直线 $ax+y-13=0$ 与之相交一点，可用二次方程的判别式来求 a。

解 据分析及题意可知：

$\begin{cases}(2x-y+3)(x+y+3)=0,\\ ax+y-13=0\end{cases}$ 有两组相同的实数解。由此可得

$(a+2)(a-1)x^2-(26a+22)x+160=0$，

$\triangle=(26a+22)^2-640(a+2)(a-1)=9(a+7)^2=0$。

故当 $a=-7$ 时，三条直线相交于一点。

例 8 设 a、β、γ 是锐角，且 $\cos^2a+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos a\cos\beta\cos\gamma=1$，

求证 $a+\beta+\gamma=\pi$。

分析 若要证 $a+\beta+\gamma=\pi$，仅要证 $\cos a=-\cos(\beta+\gamma)$ 即可。由此可把条件看成关于 cosa 的一元二次方程。这样本题就变更为解方程问题。

解 把条件改写为 $\cos^2 a + (2\cos\beta\cos\gamma)\cos a + (\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1) = 0$。

则 $\cos a = \frac{1}{2}\{-2\cos\beta\cos\gamma \pm \sqrt{4\cos^2\beta\cos^2\gamma - 4(\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1)}\}$

$= \{\cos\beta\cos\gamma \pm \sin\beta \cdot \sin\gamma\}$

$= -\cos(\beta \pm \gamma)$,

由已知条件 a、β、γ 皆为锐角,知

$\cos a = -\cos(\beta - \gamma)$ 应舍去,故

$\cos a = -\cos(\beta + \gamma)$ 成立,即得 $a + \beta + \gamma = \pi$。

□变易论题的两种方法

有些命题,给它的条件和结论作适当的等价变化,建立一个与原命题密切相关的新论题,通过对新论题的考察,寻求原题的证明途径,达事半功倍的效果。江苏淮阳市清浦区教研室段安贵、江苏淮阳市或志中学徐耀华老师介绍了以下两种方法:

1. 变易命题的条件

当命题的已知条件比较复杂,不易进行推证时,可利用辅助未知数(量),显示已知条件和结论之关系,开拓证题思路。

[例 1] 证明:

$(a-b)^6 + (b-c)^6 + (c-a)^6 - 9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$

$= 2(a-b)^3(a-c)^3 + 2(b-c)^3(b-a)^3 + 2(c-a)^3(c-b)^3$

思考方法:作代换:$x = a-b, y = b-c, z = c-a$

则 $x + y + z = 0$

导出 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$。再将要证明的式子和它比较。

证明:设 $x = a-b, y = b-c, z = c-a$

则 $x + y + z = 0$

, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

$= 0$

, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$(x^3 + y^3 + z^3)^2 = (3xyz)^2$

, $x^6 + y^6 + z^6 + 2x^3y^3 + 2y^3z^3 + 2x^3z^3$

$= 9x^2y^2z^2$

再把 $x = a-b, y = b-c, z = c-a$ 代入上式

得 $(a-b)^6 + (b-c)^6 + (c-a)^6 - 9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$

$=2(a-b)^6(a-c)^3+2(b-c)^3(b-a)^3+2(c-a)^3(c-b)^3$

[例 2] 已知：

$$\frac{tg(\theta+a)}{x}=\frac{tg(\theta+\beta)}{y}=\frac{tg(\theta+\gamma)}{z}$$

求证：$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(a-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-a)=0$

证明：设 $\frac{tg(\theta+a)}{x}=\frac{tg(\theta+\beta)}{y}=\frac{tg(\theta+\gamma)}{z}=\frac{1}{m}$

则 $x=mtg(\theta+a)$

$y=mtg(\theta+\beta)$

$z=mtg(\theta+\gamma)$

将 x、y、z 代入结论中再化简即得。

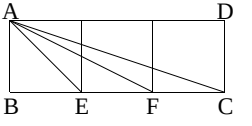
（读者完成）

2. 变化命题的结论

有些命题，可以通过简化它的结论；分解结论；等价替换结论等方法，寻求证明方法的钥匙。

[例 3] 已知：矩形 ABCD 中，AD 是 AB 的 3 倍，E、F 分 BC 成三等份。

求证：$\angle AEB+\angle AFE+\angle ACF=\frac{\pi}{2}$.



思考方法：根据题意画出图形，显见 $\angle AEB=\frac{\pi}{4}$，从而只要证明 $\angle AFE+\angle ACF=\frac{\pi}{4}$ 即可。

证明：设 $AB=a$，因矩形 ABCD，AD 是 AB 的 3 倍，E、F 分 BC 成三等份，故 $AB=BE=EF=FC=a$，

在 Rt△AFB 中，

$$tg\angle AFB=\frac{AB}{BF}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

在 Rt△ACB 中，

$$tg\angle ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$$

，　$\angle AFB$，$\angle ACB$ 皆为锐角

，　$tg(BFC+\angle ACB)$

$$\frac{tg\angle AFC+tg\angle ACB}{1-tg\angle AFB\cdot tg\angle ACB}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,\quad \angle AFB+\angle ACB=\frac{\pi}{4}$$

又 $\angle AEB=\frac{\pi}{4}$

故 $\angle AEB+\angle AFE+\angle ACF=\frac{\pi}{2}$

[例4]设A为锐角,n为自然数,

求证:$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{A}{n}}+\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\cdots+\frac{1}{\cos\frac{A}{n}}>\frac{1}{\sin A\cdot\cos A}+$

$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{A}{n}\cos\frac{A}{n}}$

思考方法 本题从结论的特点出发,把它分解为:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\cos A}>\frac{1}{\sin A\cdot\cos A}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}>\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}$$

……

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{n}}+\frac{1}{\cos\frac{A}{n}}>\frac{1}{\sin\frac{A}{n}\cdot\cos\frac{A}{n}}$$

将上式逐个证明,这样,化难为易。

证明: $0<A<\frac{\pi}{2}$

, $(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A>\sin A+\cos A>1$

不等式两边同除以 $\sin A\cdot\cos A$ 得:

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}>\frac{1}{\sin A\cdot\cos A}①$$

同理:$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}>\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}②$

……

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{n}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{n}}>\frac{1}{\sin\frac{A}{n}\cdot\cos\frac{A}{n}}$$

(n为自然数)③

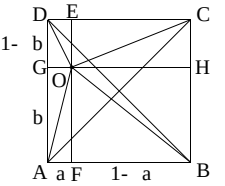
①+②+…+③即得:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{A}{n}}+\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\cdots+\frac{1}{\cos\frac{A}{n}}>\frac{1}{\sin A\cdot\cos A}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{A}{n}\cdot\cos\frac{A}{n}}$$

[例5] 已知a、b为小于1的正数

求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$

思考方法：二次根式内的数是a、b、1-a、1-b、两两平方和，可联想平几中的勾股定理，作边长为1的正方形，按图示划分成边长为a、b、1-a、1-b的四个矩形，则结论左边的四个根式恰好可用四个矩形的对角线和表示，右边的$2\sqrt{2}$正好是正方形两条对角线的和，从而原题的结论可改变为求证 $OA+OB+OC+OD\geqslant AC+BD$。



这样用几何方法给出原题的证明。

证明：(略)

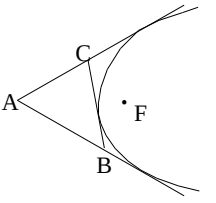
□变更问题法在数学解题中的运用

解数学题时，若直接解原问题比较繁难，则不妨将它变换为另一个比较容易解决的新问题，通过解决新问题，从而达到最终解决原问题的目的，这种解题的思考方法，称为变更问题法。江西省赣州师范学校熊曾润教师通过若干例题，分绍了变更问题法在解题中的一些运用。

1. 运用变更问题的思考方法解题，一般是利用等价变换，将原问题变换为与它等价的新问题。因此，解出新问题，原问题便得到解决

代数、三角、初等几何及解析几何，是中学数学课程里的几门基础学科。每一门学科的解题方法，虽然适用于本学科所讨论的问题，但并不总是方便的。这门学科里的繁难问题，若变换为另一门学科的等价问题，则常常可以方便地得到解决。

例1 设以 F 为焦点的抛物线上三点的切线交成△ABC(右图),试证△ABC 的外接圆必经过焦点 F。



证明 因为抛物线的焦点在它的切线上的射影的轨迹,是抛物线顶点处的切线,所以,若从焦点 F 作三切线 AB、AC、BC 的垂线,则三垂足共线(同在抛物线顶点处的切线上)。于是,根据西摩松定理的逆定理知,A、B、F、C 四点共圆,即△ABC 的外接圆经过焦点 F。

此例若单纯用解析法证明,则计算量颇大,由于将解析几何问题变换为平面几何问题,从而避免了繁难的计算,简便地得到了证明。

例2 已知 x、y 均为实数,且 $\frac{x-y}{1+xy}=\sqrt{3}$,求 $\frac{|1+xy|}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$ 的值。

解 因 x、y 均为实数,故可设 $x=tg\alpha, y=tg\beta$。于是,由题设条件有

$$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}=tg(\alpha-\beta)=\sqrt{3},$$

$$\frac{|1+xy|}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}=\frac{|1+tg\alpha tg\beta|}{\sqrt{1+tg^2\alpha}\cdot\sqrt{1+tg^2\beta}}=\left|\frac{1+tg\alpha tg\beta}{sec\alpha sec\beta}\right|=|cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta|=|cos(\alpha-\beta)|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\alpha-\beta)}}=\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}。$$

此例是一个有约束条件的代数式求值问题,若用代数方法直接解原问题,则较繁难。由于根据问题的特点,将它变换为三角函数式求值问题,从而运用三角方法简便地得到了解决。

例3 如下图,P 是定角∠XAY 的平分线上的定点,过 A、P 两点任作一圆,交∠XAY 的二边于 B、C,求证 AB + AC 为定值。

证明 设∠XAP = ∠PAY = α,AP = 1,则 α、1 均为定值。根据正弦定理,在△BAP 和△PAC 中有

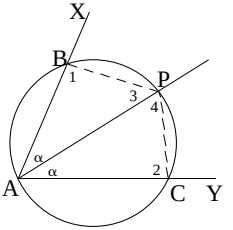
$AB=\frac{1\sin\angle 3}{\sin\angle 1}$，$AC=\frac{1\sin\angle 4}{\sin\angle 2}$。

因 A、B、P、C 四点共圆，故

$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3+\angle 4=180°-2\alpha$，

又 $\angle 3-\angle 4=(180°-\alpha-\angle 1)-(180°-\alpha-\angle 2)=(180°-\alpha-\angle 1)-(\angle 1-\alpha)$
$=180°-2\angle 1$。

于是



$$AB+AC=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 1}+\frac{1\sin\angle 4}{\sin\angle 2}$$
$$=1\cdot\frac{\sin\angle 3+\sin\angle 4}{\sin\angle 1}$$
$$=1\cdot\frac{2\sin\frac{\angle 3+\angle 4}{2}\cos\frac{\angle 3-\angle 4}{2}}{\sin\angle 1}$$
$$=21\cdot\frac{\sin(90°-\alpha)\cos(90°-\angle 1)}{\sin\angle 1}$$
$$=21\cos\alpha。$$

因 1、α 均为定值，故知 AB + AC 为定值。

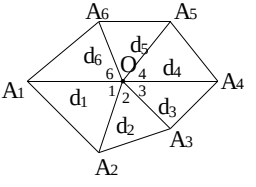
用几何方法证明几何定值问题，通常需由动元素的特殊位置找出定值，然后在动元素的一般位置证明结论，颇为繁难。但把欲证其等于定值的几何量表为三角函数式，几何定值问题就变换为三角函数式求值问题，极易解决。

总之，一门学科里的繁难问题，常可考虑把它变换为另一学科的等价问题来解决，从而得到简便的解法。

现在我们来看另一种情况：正面的问题难以解决，不妨考虑解决反面的问题；反面的问题解决了，正面的问题也就迎刃而解了！常用的反证法和同一法，都是出于这种考虑的变更问题法。

例 4 有若干个城市，它们之间的距离彼此不等。如果从每个城市都起飞一架飞机飞到离它最近的城市降落。证明：每个城市降落的飞机都不超过 5 架。

分析 如果城市的个数不超过 5 个，那么命题显然成立。难就难在城市的个数超过 5 个，即有 6 个或者更多个的情况，命题是否成立呢？这时，我们可以将原题变换为：证明不存在这样一点 O，它到同一平面上六个点（或更多的点）A_1、A_2、…、A_6 的距离 d_1、d_2、…d_6 能使 $d_1<A_1A_2$、$d_1<A_1A_6$；$d_2<A_2A_3$；



$d_2 < A_2A_1$;…;$d_6 < A_6A_1$、$d_6 < A_6A_5$ 同时成立。

设 O 在多边形 $A_1A_2\cdots A_6$ 内部(上图),因 $d_1 < A_1A_2$、$d_2 < A_2A_1$。故 A_1A_2 为不等边$\triangle A_1OA_2$ 中的最大边,所以$\angle 1 > 60°$。同理可得$\angle 2 > 60°$、…、$\angle 6 > 60°$。于是$\angle 1 + \angle 2 + \cdots + \angle 6 > 360°$。这显然是荒谬的,故这样的O点不可能存在。

若设O在多边形 $A_1A_2\cdots A_6$ 外部或边上,同样可以证得这样的O点也不可能存在。由此可知,原题结论成立。

2. 运用变更问题的思考方法解题,有时也利用非等价变换,将原问题变换为与它不等价的新问题。这时,解决新问题虽然不等同于解决原问题,但能为解决原问题铺平道路,最终达到解决原问题的目的

例 5　已知 15 个砝码,每个砝码的重量都是整数克。如果其中任意 14 个砝码都可以分成重量相等的两组,每组 7 个砝码,试证明这 15 个砝码的重量彼此相等。

证明　先证明这 15 个砝码的克数必同为奇数或同为偶数(不言而喻,此命题与原命题不等价)。事实上,若它们的克数不都是奇数,也不都是偶数,即有奇有偶,那么,考察这 15 个砝码的克数之和 S。若 S 为奇数(或偶数),则从中取出一个偶数克(或奇数克)的砝码,剩余 14 个砝码克数的总和便是奇数,它们将不能分成重叠相等的两组,与题设条件相矛盾。故知这 15 个砝码的克数必同为奇数或同为偶数。

今证这 15 个砝码的重量彼此相等,事实上,若它们的克数不都相等,其中最小的克数为 m,则每个砝码都减少 m 克后,将得到 15 个"新砝码",这些"砝码"显然仍满足题设条件,而其中必有一个"砝码"的克数为零(偶数),故知所有"砝码"的克数都是偶数,但不全是零。这些"砝码"的克数都除以 2 后,又得到 15 个"新砝码",它们显然仍满足题设条件。经过若干次除以 2 的变换后,至少有一个"砝码"的克数是奇数,但又至少有一个"砝码"的克数是零(偶数),这与前面已证明的命题相矛盾。故知这 15 个"砝码"的重量必彼此相等。

这里是保持原命题的条件不变,先将命题的结论减弱,从而得到一个极易证明的新命题。而新命题的确立,使原命题的证明获得了有力的依据。

□数学变换在寻求简捷解题途径中的运用

大家知道,变换是数学中最基本又最重要的概念,从初等数学到高等数学,变换无所不在。新疆石油教育学院李成章老师通过具体实例分析了运用数学变换,去寻求简捷解题的途径的方法:

例1 求函数 $f(a,b)=(a-b)^2+\left(\sqrt{2-a^2}-\frac{9}{b}\right)^2$ 的最小值。

分析 本例用代数法求解较困难,经观察,并联系问题的几何意义,不难发现函数 $f(a、b)$ 是两动点 $P\left(a,\sqrt{2-a^2}\right)$ 和 $Q\left(b,\frac{9}{b}\right)$ 之间的距离的平方。于是问题可转化为求 P、Q 两点之间的最短距离。又因为 $a^2+(\sqrt{2-a^2})^2=2$,且 $b\cdot\frac{9}{b}=9$,故动点 P 在圆 $x^2+y^2=2$ 上,而动点 Q 在双曲线 $xy=9$ 上,问题又进一步明确为"求圆 $x^2+y^2=2$ 和双曲线 $xy=9$ 间的最短距离"。

$\sqrt{2-a^2}\geqslant 0$,, P 点在上半圆周 $x^2+y^2=2(y\geqslant 0)$ 上,易知,只需考虑 Q 点在双曲线 $xy=9$ 位于第一象限的那一支。如图1所示,设 $Q(x,y)$ 为 $xy=9(x>0)$ 上任一点,则点 P 应在圆心与 Q 的连线上,因三角形两边之和大于第三边知,$OP'+P'Q>OP+PQ$,$P'Q>PQ$。于是可先求 $|OQ|$ 的最小值, $|OQ|^2=x^2+y^2\geqslant 2xy=2\times 9=18$,, $|OQ|\geqslant\sqrt{18}$,且当 $x=y=3$ 时 $|OQ|=\sqrt{18}$,, 当 Q 点在 $(3,3)$ 时,$|PQ|$ 有最小值 $\sqrt{18}-2$,即当 $a=1,b=3$ 时,$f(a,b)_{\min}=8$。

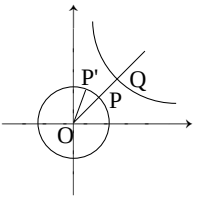


图1

例2 已知 $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$,

求证:a、b、c 中至少有一个是1。

分析 将结论"a、b、c 中至少有一个是1"等价变换为 $(a-1)(b-1)(c-1)=0$。

$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-bc-ca+a+b+c-1$。易见从题设条件 $a+b+c=1\Rightarrow a+b+c-1=0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Rightarrow\frac{bc+ac+ab}{abc}=1\Rightarrow abc-ab-bc-ca=0$,从而有 $(a-1)(b-1)(c-1)=0$ 的结论成立。

在同一数学系统下,把所讨论的问题中有关的命题或对象的表现形式做可逆的逻辑改变称之为等价变换。数学解题中利用等价变换常能使问题转化的明显易求。

例3 若 $x,y,z\in R^+$,且 $x+y+z=1$,求函数 $u=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)$ 的最小值。

分析 对 u 表达式进行等价变换并利用题设条件,有

$u=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{1}{xyz}(1-x)(1-y)(1-z)=\frac{1}{xyz}(1-x-y-z$

$+xy+yz+zx-xyz)=\frac{1}{xyz}(xy+yz+zx-xyz)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-1$。

显然,只需在题设条件下去求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的最小值即可。

由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\geqslant\frac{3}{\frac{x+y+z}{3}}=9$,从而知当$x=y=z=\frac{1}{3}$时,u 有最小值$9-1=8$。

本例通过等价变换,将一个较复杂的问题转化为一个简单熟知的问题。

例4　已知方程$\sin t\cdot\cos t+\sin t+\cos t=p$在区间$[0,\frac{\pi}{2})$上有两个不同的实根,试确定 p 值的取值范围。

分析　本题若直接用三角函数的表达式去处理会很麻烦。现用变量替换将原问题转化为直观又易于处理的新形式。原方程化为$(\sin t+1)(\cos t+1)=p+1$,令$\cos t=x,\sin t=y,t\in[0,\frac{\pi}{2})$时,$x、y\geqslant 0$。于是有

$$\begin{cases}(y+1)(x+1)=p+1 & ①\\ x^2+y^2=1 & ②\end{cases}$$

①表示反比例函数曲线(双曲线族),对称中心为点$(-1,1)$;②表示圆心在原点的单位圆。由$x、y\geqslant 0$知,原问题等价地转化为求曲线①、②在第一象限内有两个不同交点时,p 值的取值范围。

由于曲线①、②都关于直线$y=x$对称,所以曲线①同时过点$(1,0)$和$(0,1)$,又知两曲线相切于点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则令$x=1,y=0$。代入①得$p=1$;令$x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$,代入①得$p=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$,从而知 p 的取值范围是$[1,\frac{1}{2}+\sqrt{2})$。

数学上利用'等价变换'就是在不改变事物本质结构的条件下去找出事物最理想的表现形式,以方便处理解决问题,本例就是根据这一原理,将$\sin t$和$\cos t$用 y 和$x(x^2+y^2=1)$表示,使问题呈现出其直观性,促使了问题的解决。

例5　设$x、y\in R$且$3x^2+2y^2=6x$,求x^2+y^2的最值。

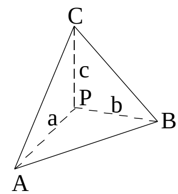
解　将$3x^2+2y^2=6x$化为$(x-1)^2+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$,这是一个椭圆,引入参数 t,令

$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \end{cases}$ $(0\leqslant t<2\pi)$,于是,有 $x^2+y^2=(1+\cos t)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)^2=-\frac{1}{2}(\cos t-2)^2+\frac{9}{2}$。由于 $|\cos t|\leqslant 1$ 且函数随 $\cos t$ 增大而增大。易见,当 $t=\pi$ 即 $\cos t=-1$,$x=y=0$,$(x^2-y^2)_{min}=0$;

当 $t=0$ 即 $\cos t=1$,$x=2$,$y=0$,$(x^2+y^2)_{max}=4$。

引入参数使问题解决明快,这也是数学上常用的变换方法之一。本例的解各代表了一类问题的解题思路和方法,即当动点 (x,y) 在二次曲线 $f(x,y)=$ 上变动时,求函数 $u(x,y)$ 的最值,常常可用二次曲线 $f(x,y)=0$ 的参数方程去求解。

例 6 三棱锥 P-ABC 中 PA、PB、PC 两两垂直且六条棱的长度之和为常数 l,求三棱锥的体积 V 的最大值。



分析 如图记 $PA=a$,$PB=b$,$PC=c$,问题即在条件 $a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=l$ 下,求 $V=\frac{1}{6}abc$ 的最大值。直接入手很困难,依据三条侧棱 PA、PB、PC 的地位的对称性,我们猜想当 $a=b=c$ 时体积 V 值最大,此时由题设知 $a=b=c=\frac{l}{3(\sqrt{2}+1)}$ 时,$V=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{6}\left[\frac{l}{3(\sqrt{2}+1)}\right]^3=\frac{5\sqrt{2}-7}{162}l^3$。

以下我们给以证明:

由平均值不等式可得

$l=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}+(\sqrt{2ab}+\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca})\geqslant 3\sqrt[3]{abc}+3.\sqrt[3]{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{2bc}\cdot\sqrt{2ca}}$

$=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$。

即有 $abc\leqslant\left[\frac{l}{3(1+\sqrt{2})}\right]^3$,当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立。所以三棱锥的体积

$V=\frac{1}{6}abc\leqslant\frac{1}{6}\left[\frac{l}{3(1+\sqrt{2})}\right]^3=\frac{5\sqrt{2}-7}{162}l^3$。

当 $PA=PB=PC$ 时,体积 V 取最大值 $\frac{1}{162}(5\sqrt{2}-7)l^3$。

这题本是一道计算题,在我们猜想结果的条件下就转化成了一道证明题。寻找出一条简捷解题途径。对于数学上的一些难以入手问

题，有时采用猜想、证明的方法常可凑效，猜想到证明来解决问题，也属于数学变换的方法之一。

附：空间图形的变式

李根水

立体几何解题的成败常取决于我们对空间图形的认识与处理，将空间图形的一种形式转化为另一种形式通常叫做空间图形的变式，它是我们认识与处理空间图形的重要技能，利于汇聚元素，揭示某些元素的关系。因此，空间图形的变式利于化难为易，正确、迅速地解答某些立几问题。下面介绍常见的变式：

1. 平移与旋转

空间图形中某些元素（点、线、面）的平移与旋转，利于汇聚几何元素，转化为平面图形，然后借助于平面几何知识达到解决问题的目的。

例1　两异面直线夹在两平行平面 α、β 中间的部分是 AB、CD，若 AB = a，CD = b，且 AB 与 CD 所成之角为 Q，又 AC = m，BD = n，求 AC、BD 的夹角中 $\varnothing$。

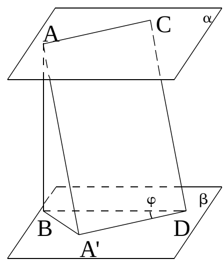


图1

分析：条件与结论都涉及到异面直线的夹角，求此夹角需要平移异面直线中的一条，根据题设，可把 CD 平移到 AA'，由于 $\alpha /\!/ \beta$ 得 AC // A'D，这样 $\angle BAA' = \theta$。而 $\angle A'DB = \varnothing$，问题就转化为解 $\triangle ABA'$ 与 $\triangle BA'D$。

在 $\triangle ABA'$ 中，$A'B = a^2 + b^2 - 2obcos\theta$。

在 $\triangle BDA'$ 中，有 $\cos\varnothing = \left|\frac{m^2 + n^2 - A'B^2}{2mn}\right| = \left|\frac{m^2n^2 - a^2 - b^2 + 2abcos\theta}{2mn}\right|$

评注：在解决异面直线的夹角，常考虑平移变换，把有关元素汇聚在一个平面内。

例2　已知二面角 P - a - Q 的两个面 P，Q 上分别有两点 A、B，试在二面角的棱 a 上找一点 M，使它到 A，B 的距离之和为最短。

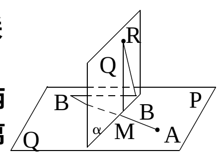


图2

思考方法：如图2，将半平面 Q 绕着 a 旋转到半平面 Q' 的位置（Q' 是 P 的反向半平面），于是 B 到了 B' 点的位置，连接 AB' 与 a 相交于 M，则 M 即为所求（证明略）。

2. 解剖与提炼

立几与平几有着密切的联系，立体图形的局部性质可以透过平面图形的性质去认识，借助于截面可以将空间图形解剖，取出某些图形，将立几问题转化为平几问题去解决。如利用截面可以将柱体中的元素关系转化为平行四边形中的元素

关系，锥体中的元素关系转化为三角形中的元素关系，台体中的元素关系转化为梯形中的元素关系，球体中的元素关系转化为圆中的元素关系。

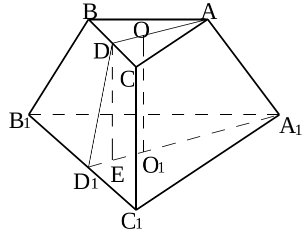


图3

例3 正三棱台上、下底面的边长分别为 a 和 b，若侧面与底面所成的二面角为 α，求棱台的侧面积和体积。

思考方法 根据棱台的侧面积和体积公式，必须求出棱台的斜高和高，过高 OO_1 和侧棱 AA_1 作截面，将正三棱台解剖，从空间图形中分离出平面图形 AA_1D_1D，这个截面不仅含有侧棱、高、斜高，还含有侧面和底面的夹角 $\angle DD_1A_1=\alpha$，其中 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$A_1D_1=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，在直角梯形 OO_1D_1D 中划出直角三角形 DD_1E，可求得 $D_1E=\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)$，高 $OO_1=DE=\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)tg\alpha$，斜高 $DD_1=\frac{D_1E}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6\cos\alpha}$

，
$$S_{棱台侧}=\frac{1}{2}(3a+3b)\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6\cos\alpha}$$
$$=\frac{\sqrt{3}(b^2-a^2)}{4\cos\alpha}$$
$$V_{棱台}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)$$
$$tg\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}ab\right)=\frac{b^3-a^3}{24}tg\alpha。$$

在立体几何里，有时会遇到几个球按照一定的法则‘叠加’的问题，简称为‘多球’问题，对于这类问题，我们往往可以从多球中提炼出球心所组成的立体图形，将问题简化，然后通过解决这简化的问题，获得原问题的探求结论，这是解决‘多球’问题的一个常用的方法。

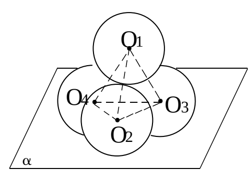


图4

例4 在桌面上放着四个两两相切半径为的球，试确定其顶端离桌面的高度。

思考方法 将这四个球的球心提炼出一个正四面体，其棱长恰为两球半径之和，即为 2r，因此，只要求出这个正四面体的高，再加上半径的两倍，即得所求之高度为$\left(2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)r$。

3. **分割与补形**

某些立体几何问题,如果直接根据已给出的图形解题困难时,那么不妨将此图形巧妙地分割或成补形,转化为我们所熟悉的或易于研究的问题。从而化繁为简,化难为易,便于解决问题。

例5 已知四面体 ABCD,棱 AB = a,CD = b,AB 与 CD 间的距离为 d,其所求之角为 90°。

(1)求这四面体的体积;

(2)若这四面体被平行于棱 AB,CD 的平面 α 截成两部分,设 AB、CD 到平面 α 的距离之比为 K,求这四面体被平面 α 分成两部分的体积之比。

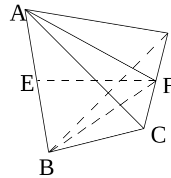


图5

分析 分割、补形、等积法是解决几何体体积的常用技巧,于是题(1)可得到下面三种思考方法,对于题(2)可利用平行棱锥底面的截面性质探求。

(1)思考方法一 如图5,设 AB、CD 的公垂线 EF = d,连 BF、AF,截面 AFB 将四面体分割成两部分。

CD⊥AB,CD⊥EF,, CD⊥平面 ABF,

, $V_{A-BCD}=V_{A-BCE}+V_{A-BDE}$

$=V_{C-ABF}+V_{D-ABF}=\frac{1}{3}CF\cdot S_{\triangle ABF}+\frac{1}{3}DF\cdot S_{\triangle ABF}=\frac{1}{3}(CF+DF)S_{\triangle ABF}=\frac{1}{3}\cdot b\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot d=\frac{1}{6}abd$。

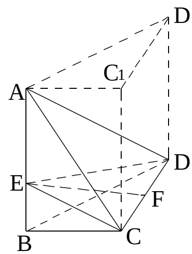


图6

思考方法二,如图6、补形成三棱柱,于是 $V_{三棱柱}=AB\cdot S_{\triangle CED}$($\triangle CED$ 是直截面)$=AB\cdot\frac{1}{2}\cdot CD\cdot EF=\frac{1}{2}abd$。

, $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}V_{三棱柱}=\frac{1}{6}abd$。

思考方法三,如图7等积变形。

BG $\underline{\parallel}$ CD, AB⊥CD,, AB⊥BG

, $V_{A-BCD}=V_{A-BGD}=V_{D-ADG}=$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot BG\cdot EF=\frac{1}{6}abd$。

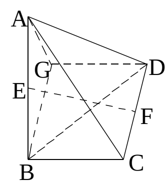


图7

(2)思考方法 设平面 α 交 AC,AD,BC、BD 于 M、R、E、N、过 M 作 MP∥BC 交 AB 于 P,连 PR,则 PMR - BLN 为三棱柱,设 AO' = h',AO = h 分别为四面体 A - PMR,A - BCD 的高,△BCD 的面积为 S。由 AB、CD 到平面 α 的距离之比为 k,易得 $\frac{BL}{LC}=k$ 于是 $\frac{BL}{BC}=\frac{BL}{BL+LC}=\frac{k}{k+1}$。

，$\frac{S_{\triangle PMR}}{S}=\frac{AO^{k2}}{AO^2}=\frac{PM^2}{BC^2}=\frac{BkL^2}{BC^2}=\frac{k^2}{(k+1)^2}$。

，$S_{\triangle PMR}=S\cdot\frac{k^2}{(k+1)^2}$，$V_{A\_PMR}$

$=\frac{1}{3}sh\cdot\frac{k^3}{(k+1)^3}$

$V_{三棱柱}=S_{\triangle PMR}\cdot O'O$

$=S\cdot\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot\frac{h}{k+1}$

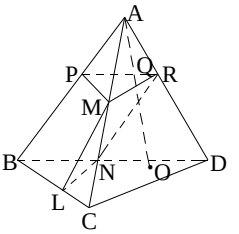


图8

，$V_{AB\_MLNR}=V_{A\_PMR}+V_{三棱柱}$

$=\frac{shk^2(k+3)}{3(k+1)^3}$

$V_{CD\_MLNR}=\frac{sh}{3}-V_{AB\_MLNB}$

$=\frac{sh(3k+1)}{3(k+1)^3}$

，$\frac{V_{AB\_MLMD}}{V_{CD\_MLNR}}=\frac{k^2(k+3)}{3k+1}$。

评注：1. 割补法是解决几何问题常用的思考方法，本例题(1)的三种方法各有特色。

2. 本例题(1)的条件“AB与CD所成之角为90°”，若改为“AB与CD所成之角为θ”，其它条件不改变，那么可得到四面体ABCD的体积$V_{A_BCD}=\frac{1}{6}abd\sin\theta$。宜用上述的思考方法三求解。

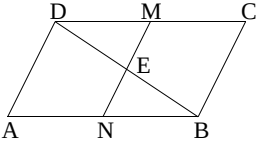
4. 翻折与展开

如果将平面图形沿着某直线(或线段)翻折成立体图形，我们通常称它为平面图形的翻折，其实质是一种旋转变换。线过翻折以后，由于原来图形的某些元素的位置发生了变化，因此图形的性质也随着发生变化。解决这类问题的一般步骤是：

(1)对照平面图形，正确画出翻折以后的立体图形；

(2)根据题意和有关的立几概念，适当添辅助线，寻找与探求元素有关的三角形，并注意翻折前后元素的变化情况。

(3)根据有关三角形的边角关系，结合代数、三角等知识，获得探求结论。



(1)

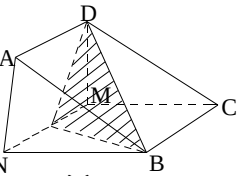
例6 平行四边形ABCD中，$\angle A=60°$，$AD=a$，$AB=2a$，M，N分别是CD和AB的中点，以MN为轴转动

平行四边形 ADMN,当转成的二面角为 A-MN-B 是 60°时求,三棱柱 ABN-DCM 的侧面积和体积。又当二面角 A-MN-B 多大时,此三棱柱有最大体积。

分析 如图 9。

翻折前:AD = a,AB = 2a,∠A = 60°解得 BD = $\sqrt{3}$a,∠ADB = 90°,推出 BD ⊥ AD,BD ⊥ MN。

翻折后:当平行四边形 ADMN 以 MN 为轴转成 60°的二面角 A-MN-B 时,得到斜三棱柱 ABN-DCM,△DEB 为此斜三棱柱的直截面,且△DEB 是正三角形(∠BED = 60°,BE = ED),斜三棱柱的三个侧面是全等菱形。易得 $S_{侧}=\frac{2\sqrt{3}}{2}a_2$, $V=\frac{2\sqrt{3}}{11}a_3$



(2)
图9

又设∠BED = θ,则

$S_{\triangle BED}=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2\cdot\sin\theta$

$V=a\cdot S_{\triangle BED}=\frac{3}{8}a_3\sin\theta$。

当 θ = 90°时,$V_{最大}=\frac{3}{8}a_3$。

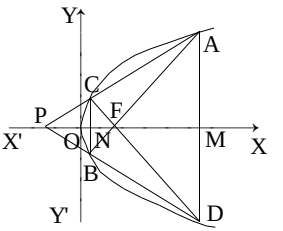
评注:由平面图形翻折成空间图形,要有丰富的空间想象能力,要注意翻折前后图形中的几何元素哪些发生了变化,哪些没有发生变化,正确地画出翻折前后的图形,便于正确、迅速地获得探求结论。

例 7 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,作两条互相垂直的弦,其中一条的倾角为 $\frac{\pi}{4}$,分别交抛物线 A、B、C、D,若以 X 轴为折线,把平面折成 60°的二面角。

(1)求证:A,B,C,D 四点共面;

(2)求|CB| + |AD|的值。

分析 画出翻折前后的图形,观察几何元素中哪些发生了位置的变化,利用解方程组确定平面图中的点 A,B,C,D 的坐标,根据图形的对称性进行证明与计算。



(1)

解:(1)在平面图形中,焦点 F(1,0),AB:y = x - 1。CD:y = 1 - x。

解 $\begin{cases}y^2=4x\\y=x-1\end{cases}$ 得 A(3 + 2$\sqrt{2}$,2 + 2$\sqrt{2}$),B(3 - 2$\sqrt{2}$,2 - 2$\sqrt{2}$)

解 $\begin{cases}y^2=4x\\y=1-x\end{cases}$ 得 C(3 - 2$\sqrt{2}$,2$\sqrt{2}$ - 2),D(3 + 2$\sqrt{2}$, - 2 - 2$\sqrt{2}$)

A、D 关于 x 轴对称，B、C 关于 x 轴对称。

∴ BC⊥x 轴，AD⊥x 轴，且 AC、BD 的交点 P 在 x 轴上。翻折后，有 AC∩BD = P，∴ AC、BD 共面。

∴ A、B、C、D 四点共面。

(2) 设在平面图中，AD 交 x 轴于 M，BC 交 x 轴于 N。则翻折后有 CN⊥x 轴，BN⊥x 轴。AM⊥x 轴，DM⊥x 轴

∴ ∠CNB = ∠AMD = 60°。

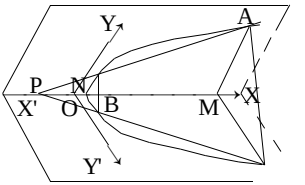
又 $|CN| = |BN| = 2\sqrt{2} - 2$

$|AM| = |DM| = 2\sqrt{2} + 2$。

∴ $|BC| = 2\sqrt{2} - 2$。

$|AD| = 2\sqrt{2} + 2$。

∴ $|BC| + |AD| = 4\sqrt{2}$。



(2)
图10

评注 本例是一道解析几何、立体几何综合题，应注意观察翻折前后几何元素的变化情况，揭示图形的结构特征，形数结合，利于解题。

我们知道，直棱柱、圆柱的侧面展开图是长方形，正棱锥的侧面展开图分别是多角扇形和扇形，正棱台和圆台的侧面展开图分别是由大、小多角扇形相减和大、小扇形相减而得到几何图形。在计算其侧面积时，我们是由展开图而得到计算公式。当我们在研究几何体表面上不共面的两点的最短路径时，往往也是将几何体表面沿着棱柱、棱锥、棱台的棱或者圆柱、圆锥、圆台的母线展开，从而找出两点间的距离为最短路径。

例 8 如图。已知圆台上、下底面圆半径分别为 a，2a，母线 AB = 4a，从母线 AB 的中点 M 拉一绳子，围绕圆台的侧面转到 B 点，试求这条绳子至少要多长？这条绳子上的点和圆台上底圆周上的点之间的距离中，最短的是多少？

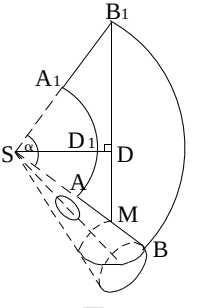


图11

思考方法 从 AB 处剪开，将圆台侧面如图 11 展开。设扇形的中心角为 α，

则 $\alpha = \frac{R - r}{L} \cdot 360° = \frac{2a - a}{4a} \cdot 360°$

$= 90°$。

在 $Rt\triangle SB_1M$ 中，$SB_1 = SA + AB = 8a$，

$SM = SA + AM = 4a + 2a = 6a$。

∴ $MB_1 = \sqrt{SM^2 + SB_1^2} = 10a$，即为最短绳长。

作 $SD \perp MB_1$，垂足为 D，则 SD 即为 S 到绳的最短距离，DD_1 即为绳子上的点和圆台上底圆周上的点之间的最短距离。

$SD \cdot MB_1 = SM \cdot SB_1$

，$SD=\frac{SM\cdot SB_1}{MB_1}=\frac{6a\cdot 8a}{10a}=4\frac{4}{5}a$

$DD_1=SD-4a=\frac{4}{5}a$。

综上所述，空间图形的变式很丰富，应根据题目的条件，图形的特征，选择恰当的变式，以利于沟通几何元素之间的联系，转化问题的形式，便于解决立体几何问题。在立体几何教学和综合复习时，以图形变式为专题选讲，利于发展学生的空间想象能力，逻辑思维能力和正确迅速的运算能力，提高学生分析问题和解决问题的能力。

□数学变式题的配置

1. 一个值得引起注意的问题

在数学教学中有效地利用习题，对于学生在课堂上独立地、积极地进行认识活动是有重要作用的。配置合适的习题，进行解题训练，既是使学生熟练掌握系统的数学基础知识、技能和技巧的重要手段，又是数学学习活动的重要形式。

习题配置问题，数学教师一直是比较重视的。可是如何使习题配置得好，却至今尚未完善解决。例如，目前学校教学中还存在着以下倾向：1. 教师总是尽可能多地让学生做题目，企图复盖各种习题内容和解法；2. 解题的讲授方法采用公式化的示范方法，而不是引导学生自己思考；3. 配置习题不符合学生的心理特点和思维规律，或索然无味，或失之偏颇，等等。学生化费大量时间在课上或课后的解题作业上，时间利用率不高，影响数学课的质量。

从现代的观点看，学习不仅仅是理解和记忆所学的知识和技能，还在于使探究和解决问题的能力得到发展。美国学者 D·M·麦基确定了“智力区别于简单的计算能力”的四个基本特点：

①智力是根据信息的重要性有效地处理和组合信息的能力；

②智力是查验、寻求和过渡到现有信息表面上找不到的东西的能力；

③智力是在“接近答案的意识”的支配下，寻找和探究解题过程的能力；

④智力是对那些有局限性，然而却是相当多的与问题有关的一些

论点和结论进行分析的能力。

从麦基的论述可知,现代习题教学应当具备的某些特点,以及它在整个数学中的重要作用。由此可见,如何合理配置习题,提高训练效率,确已成为一个值得引起注意的问题。

2. 标准题和它的变式

当学生刚开始学习某个数学概念或基本技能时,常常需要先解一些标准题。就是说,这种题目的条件是很明确的,解法和解题根据是学生业已了解的。例如,对初二学生来说,解方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 就属于标准题。如果对标准题进行变化,使条件变得隐蔽,解法出现曲折,或者解题根据复杂化,那就是标准题的变式。例如 $tg^2x - 5tgx + 6 = 0$ 就是前述标准题的简单变式。在学生掌握标准题解法的基础上进行适当变式练习,是使学生熟练掌握基本解题技能技巧的有效措施。

青浦中学翁志勋老师总结了下面几种主要的变式类型。

(1)变化习题的形式。 如教了完全平方公式后,可选择这样一些不同形式的习题:

①$(m+n)^2$;

②$(a^2 - 2ab + b^2) \div (a - b)$;

③$(-5x^3 + y^2)^2$;

④$(a + b - c)^2$;

⑤$(3a - 2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$ 错在哪里?

⑥应用完全平方公式计算 51^2,98^2。

这些习题,题面虽不相同,但都是为了巩固和灵活掌握完全平方公式。

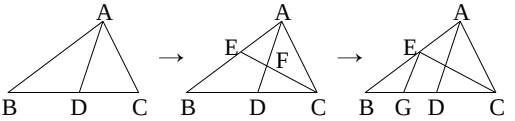
(2)变化解题的方法。 这就是平常所说的多解题。一般地说,选择多解题作练习,能培养学生灵活转换的能力。教学实验证明,一题多解的训练效率高于一题一解的训练。

另外,对于有些题目来说,不同解法的简捷程度很不相同,应当引导学生进行比较。

(3)对习题进行引伸和变化。 如在教了三角形内角平分线性质定理后,可选择如下习题:(1)在三角形 ABC 中 AD 平分 $\angle A$,$AB = 9cm$,$AC = 6cm$,$BC = 10cm$。求 BD 及 DC 的长。

学生完成该题后,可将原题作如下引伸:(2)如果加一条 $\angle C$ 的平

分线 CE,CE 交 AD 于 F,可以得出哪些比例式?(3)根据原数据,请同学们就第(2)题的图形编拟几道计算题或证明题。(4)再过 E 作 AD 的平行线交 BC 边于 G,求 BG、GD 的长(如图)。



这里,从第(2)题到第(4)题,图形背景逐渐复杂,怎么从变式和背景的干扰中摆脱出来?训练要求步步提高。而且,第(2),(3)两题,结论都要学生自己去想,由学生自己编题,这样做,可让他们对习题的结构有更深透的理解。

(4)需要创造性地运用知识技能的变式。 这可以通过一个例子来说明。我们知道分子为 1 的任何分数都是不可约的。将此结论进行变化,可得如下证明题:分数$\frac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 都是不可约的。解题的方法是先把它改写,使之出现真分数:$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$,考虑$\frac{7n+1}{14n+3}$的倒数$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}$,因为$\frac{1}{7n+1}$不可约,所以原分数不可约。解这道题只需具备很简单的基础知识,关键是学生必须深刻理解和创造性地运用这些知识。

3. 如何配置变式习题

(1)明确目的,区别阶段。 数学教学大纲是实施教学的重要依据。因此教师选配变式习题要达到什么目的,着重练什么,练到什么程度,都必须以大纲为准则,这是衡量选题好坏的一个首要标准。离开了大纲要求去组织变式习题,从难从深从多,或者选一些偏题,怪题,这都是不正确的。

根据学生的认识特点,变式练习应区别为三个不同的阶段:第一,初步练习阶段,这是在初学新知识之后,为着牢固掌握基础知识并初步学会运用这些知识而进行的。所选习题的变化不能太大,难度不宜太高。第二,熟练掌握阶段,这是在学生已初步掌握基本知识和技能的基础上组织的练习,可采用多种形式的变式题,精心挑选,合理编排,通过训练使学生达到预期的技能技巧水平。第三,灵活应用阶段,这是在学

生已熟练掌握一般练习的基础上进行练习,此时可选择一些有一定难度的综合题、技巧题等,训练学生灵活应用知识的本领。

(2)重点突出,以点带面。 选配变式习题,应当注意突出重点,就是说:①重点知识要多选我练,务使学生牢固掌握。而对于次要的和一般的知识也应当适当选配一些练习。变式习题的选择,不能平均使用力气。重点知识应当化大力气抓过关,如初一的解应用题,初二的几何论证。②所选习题应具有一定的代表性,在整册教材中能起承前启后带动全面的作用。③选择多解、多变的习题,进行有效的重点训练,尽量体现"少、精、活"的原则。

(3)题面多样,适当重复。 应使题面形式有所变化,避免单调划一。这样做,既训练了学生的审题能力,又可使他们的练习兴趣和积极性得以提高。此外,学生掌握知识、技能是个复杂的认识过程,需要经过多次反复练习才能逐步巩固,因此,选择习题必须注意有一定的重复,尤其是重点知识。当然这种反复不应当是机械重复,而应当在形式上不断变化,要求上不断提高。

(4)针对实际,因人而异。 选配变式习题一定要从学生的实际程度出发,同时还必须根据不同程度学生的特点,因人而异。程度低些的学生要偏重于最基本的知识、技能训练,联系旧知识进行查漏补缺。对于程度高些的学生则可使用补充题和思考题。

□变更问题要注意等价性

有这样的一道题:

k为何值时,$y=\frac{5x^2-2kx+50}{4x^2-10x+25}$的极小值是1。

不少同学一见题目,便匆忙下笔,给出下列解法:

解 此函数的极小值是1,而

$$4x^2-10x+25=(2x-\frac{5}{2})^2+\frac{75}{4}>0,$$

, 对于任意$x\in(-\quad,+\quad)$,总有

$$5x^2-2kx+50\geqslant 4x^2-10x+25,$$

即$x^2-2(k-5)x+25\geqslant 0$,

, 应有$\Delta=4(k-5)^2-100\leqslant 0$。

, 　$0 \leqslant k \leqslant 10$。

这种解法是错误的。我们不妨看看 $k=5$ 时的情形。依题目当 $k=5$ 时，$y=\frac{5x^2-10x+50}{4x^2-10x+25}$有极小值 1。解方程$\frac{5x^2-10x+50}{4x^2-10x+25}=1$，得 $x^2=-25$。即无论 x 取何实数，该函数的值都不可能是 1，矛盾。

那么，导致上述解法错误的根源是什么呢？很明显，上述过程是利用变更问题进行求解，也就是将原问题进行一系列的等价变换，而使本质的数学内容暴露出来，从而找到解题途径。由此可知，由原题目进行等价变更所得的相对简单的题目要同原题目完全等价，而上述解法恰恰忽视了这一点。实际上，“$5x^2-2kx+50 \geqslant 4x^2-10x+25$”同“$\frac{5x^2-2kx+50}{4x^2-10x+25}$的最小值是 1”不完全等价，这便是此解法的错误的根源。因此，除了考虑 k 对于 $x \in (- \quad, + \quad)$ 有 $5x^2-2kx+50 \geqslant 4x^2-10x+25$ 必须成立外，还要使 $5x^2-2kx+50=4x^2-10x+25$ 有实根。

综上所述，我们不难得出正确解法：

解　　$y=\frac{5x^2-2kx+50}{4x^2-10x+25}$的极小值是 1，

, 　k 要满足

$5x^2-2kx+50=4x^2-10x+25$ 有实根，

, 　$k \geqslant 10$ 或 $k \leqslant 0$　　①，

同时，k 也要满足

对于任意 $x \in (- \quad, + \quad)$，总有

$5x^2-2kx+50 \geqslant 4x^2-10x+25$，

, 　$0 \leqslant k \leqslant 10$　　②。

联系①，②，我们可得：

当 $k=0$ 或 $k=10$ 时，$y=\frac{5x^2-2kx+50}{4x^2-10x+25}$的极小值是 1。

附：□解题不能变换题意

王业和

原题　设 a 为实数，试解关于 x 的四次不等式：$x^4-2ax^2+a^2+2a-3>0$。

原解　以 a 为主元，得到关于 a 的二次不等式　$a^2+2(1-x^2)a+x^4-3>0$。

　a 为实数，且首项系数为 $1>0$，

, 　$\Delta=[2(1-x^2)]^2-4(x^4-3)<0$。

化简得 $x^2>2$，即　$x<-\sqrt{2}$或 $x>\sqrt{2}$。

此处解答欠妥！试看当 $a=3/2$，时，原不等式为 $x^4-3x^2+9/4>0$，其解应为 $x\neq\pm\sqrt{6}/2$ 的一切实数，显然和原答案不符，那么错误原因何在？

原题中字母 a 是不确定的常数，我们称之为参数，一般地解含有参数的不等式或方程时，由于参数值的变化，方程或不等式可能有解亦可能无解，故需分情况讨论。而胡老师在解题时以 a 为主元，由二次项系数 >0，再根据 $\Delta<0$ 求出 x 的取值范围即为原不等式之解。这实质上将题目改变为"对一切实数 a，恒有 $x^4-2ax^2+a^2+2a-3>0$ 成立，求 x。（即默认 $\forall a$，上述不等式皆成立）。因原题未解调"对任意实数 a，不等式恒成立"等关键字，显然该解答有误，不合题意。事实上，原不等式可变形为：

$(x^2-a)^2>3-2a$。 （*）

（1）当 $3-2a<0$ 时，即 $a>2/3$ 时，对一切 $x\in R$。（*）式恒成立。故原不等式的解为一切实数。

（2）当 $3-2a=0$ 时，即 $a=3/2$ 时，则只需 $x^2\neq a$，即 $x\neq\pm\sqrt{6}/2$。

故原不等式的解为 $x\neq\pm\sqrt{6}/2$ 的一切实数。

（3）当 $3-2a>0$，即 $a<3/2$ 时，原四次不等式等价于下列两个二次不等式：

（3-1） $x^2>a+\sqrt{3-2a}$；

（3-2） $x^2<a-\sqrt{3-2a}$。

由（3-1）得

$$x>\sqrt{a+\sqrt{3-2a}}$$

或 $x<-\sqrt{a+\sqrt{3-2a}}$；

（3-2）又分两种情况：

在 $1<a<3/2$ 时，

$$-\sqrt{a-\sqrt{3-2a}}<x<\sqrt{a-\sqrt{3-2a}}$$；

在 $a\leqslant 1$ 时，无解。

小结 数学解题过程中可以运用各种技巧，但要注意的是不能随便变换题意。

第二十三部分

3+X·数学解题中的变换与化归思想及其运用

□变换与化归

变换是数学中最常用、最重要的一种思想方法。通过各种变换,常常可以把复杂或未知转化为简单和已知,从而达到化归的目的。

“‘变换’,亦称‘映射’、‘映象’、‘映照’、‘对应’等。设 A 与 B 是两个集,如果按照某个对应法,使 A 的每一个元素在 B 中有一个确定的元素与它对应,称这个对应法为从 A 到 B 的‘变换’。”(《辞海》,一九七九年版)初中数学没有也不可能介绍变换的这个定义,但是初中数学的全部教学内容几乎都与变换有关。常州市教研室杨裕前老师结合初中代数教学内容,分析了渗透一些基本的变换的做法:

1. 换元变换

初中代数课本第二册“解分式方程组”一节中,正式提出了换元法。实际上,在此之前的教学中可以尽早渗透换元变换的思想方法。

小学数学中,在类似 25 - ( ) = 18 这些算式中,用括号表示一个未知数,引进了字母表示数后,便用 a + b = b + a 等这类式子表示运算律、运算性质,后来又出现了 25 - x = 18 这种简易方程,这里实质上已隐含了“元”的概念。

初一代数中,教学字母表示数和代数式时,可以告诉学生:不仅单个字母“a”、“x”……可以表示数,而且代数式“a + b”、“p + q”……同样可以表示数。这样就为后续教学中,“把代数式 p + q 看作字母 a”这种换元变换打下基础,进而可以用下面的例子加以说明。

对于式子(a + b)(x + y),如果把其中的“x + y”看作字母“c”,那么根据乘法分配律,可以得到(a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by。这实际上就是多项式乘多项式的法则。

在教学“合并同类项”、“同底数幂相乘”等内容时,可以设计由简

到繁的变换。

比如，$3a+5a=8a$，那么计算 $3xy+5xy$、$3(p-q)+5(p-q)$ 时，只要把 xy、$p-q$ 看作“a”就可以了。

又如，$x^3 \cdot x^2 = x^5$，若用“$p+q$”替换其中的“x”，则可以知道 $(p+q)^3 \cdot (p+q)^2 = (p+q)^5$。

这种由简到繁的变换，可以让学生逐渐体会，把一个复杂的式子看作一个字母（换元）的方法，常常可以把问题化繁为简。

在“乘法公式”的教学中，则可以让学生观察下列式子：

$(a+b)(a-b)$ (1)

$[2x+(y-3)][2x-(y-3)]$ (2)

若把(2)式中的“$2x$”与“$y-3$”，分别看作“a”与“b”，则(2)式就变成了(1)式。通过比较使学生直观地感知换元变换的方法。

接着，教学公式 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 时，不妨要求学生指出下列各题是对公式中的“a”与“b”作了怎样的变换后编成的：

计算：(1) $(4x+3y)^2$；(2) $(\frac{1}{2}x-3y)^2$；

(3) $(-a^2-b)^2$。

上述前两题是变换了公式中的字母及系数，第(3)题则是变换了公式中字母的系数及指数。再让学生思考，怎样变换 $(a+b)^2$ 就成为 $(x+y+z)^2$？那么怎样计算 $(x+y+z)^2$ 呢？

至此，实际上已经初步渗透了换元变换的思想方法。

换元变换的思想方法不仅可以渗透在公式、法则的教学中，也可以有机地渗透在有关的计算与解法之中。

比如，教学“用代入法解二元一次方程组”时，应该结合课本例题：

解方程组 $\begin{cases} y=2x & (1) \\ x+y=3 & (2) \end{cases}$

向学生指出(1)式代入(2)式的实质就是换元——把(2)式中的“y”换成“$2x$”（其依据是(1)式）。

此外，还应引导学生用换元变换的方法简化某些计算题的解法。

比如，解方程组 $\begin{cases} 3x-y=2 & (1) \\ 3x=11-2y & (2) \end{cases}$

解这道习题（初中代数课本第二册第 19 页第 6(1)题）时，把“$3x$”看作一个“元”，直接把(2)式代入(1)式求解较为简捷。

换元思想渗透的更高层次的目标，是使学生会寻找“元”、构造“元”。为了达到这个目标，教学中更应精心考虑和设计切合学生实际

的渗透序列。

比如,教学"代数式的值"时,可以有意编制如下问题:

求代数式$(x-y)^3+2(x-y)^2-3x+3y+1$的值,其中(1)$x=3$,$y=1$;(2)$x=2\frac{1}{2}$,$y=0.5$;(3)$x=-1.5$,$y=-3.5$。

当学生发现计算所得的值都是11时,再让学生思考下面的问题:

(1)为什么三题中x、y的值不相等,但是代数式的值却都相等?

(2)你能否再给出x、y的一组值,使代数式的值仍然等于11?

(3)你能否简化原题?(可简化为:已知$a=2$,求代数式a^3+2a^2-3a+1的值。)

这样不仅可以使学生体会换元变换的"化繁为简"的功能,而且有助于学生逐步形成"换元"的意识,初步学习在解题过程中构造"元"的方法。

又如,教学"因式分解"时,可以先让学生把$(x+5)(x-3)-9$分解因式,再让学生思考:如何分解$(a^2-5a+5)(a^2-5a-3)-9$的因式?

通过比较学生将可能发现,只要把"a^2-5a"看作"x"(即设$a^2-5a=x$),则$(a^2-5a+5)(a^2-5a-3)-9$就变换成为$(x+5)(x-3)-9$。除了上述设元(构造元)的方法,有些学生还能够用设$a^2-5a+5=x$或$a^2-5a-3=x$的方法,将原式变换成$x(x-8)-9$或$(x+8)x-9$后求解。可以认为,这些学生已经基本掌握了换元变换的思想方法。

再如,应用余弦定理解三角形,有时会出现类似$\sqrt{100^2+200^2-2\times100\times200\times\frac{1}{2}}$的算式,若把其中的"100"看成"1"(类似于"换元"),就可以心算得出$100\sqrt{3}$的结果。可见,有了构造元的意识便可能灵活而简捷地简化计算。

为了测试渗透换元变换的教学效果,我们在教学"可化为一元二次方程的方程"时,不讲授换元法,直接用如下的一组题进行测试:

解方程:(1)$y^2+y=12$;

(2)$x+\sqrt{x}=12$;

(3)$x+3-\sqrt{x-3-6}=0$;

(4)$x^2-3x+5-\sqrt{x^2-3x-5}=6$;

(5)$2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$。

要求学生按(5)—(1)、(5)—(2)、(5)—(3)、(5)—(4)、(5)的顺序,解出第

(5)题即可。

据统计,受试的168名学生中,159名(占94.6%)直接解出了第(5)题。这说明经过较长时间的渗透,学生已经掌握了用换元变换解无理方程的方法。这可以作为渗透数学的思想方法,有助于实现"教是为了不教"的一个例证。

当然,学生掌握换元变换,和掌握其他数学思想的过程一样,不是"直线上升",而是波浪式前进,逐步达到自觉水平的。通常,在渗透的初期,学生应用换元变换需要特定的情境甚至暗示,这时的应用还是模仿,仍未达到认识上的飞跃。只有在反复的渗透中,学生才能逐步摆脱外部的条件,自觉地应用换元变换解决有关问题。

因此,在教学中渗透换元变换的思想方法,重要的是培养学生换元的意识和构造元的技能,如果把换元变换仅仅作为一种具体方法,对学生进行大量的操作训练,是很难从根本上取得效果的。

2. 恒等变换与同解变换

恒等变换是一种特殊的变换。它是按照某种对应法,将集合A的每一个元素变成"自身"的变换。初中代数中,数、式的计算、求值、化简就是一种恒等变换。这种变换改变了数、式的形式,而不改变它们仍为其"自身"的本质。数、式恒等变换的"对应法"就是有关的运算律、运算性质、公式、法则等。

众所周知,初中代数的大多数内容都与数、式的恒等变换有关,初中学生实际上对"恒等变换"有着丰富的感性认识。因此,在初中代数教学中渗透恒等变换的思想方法,既有着大量的机会,又是切实可行的。我们认为,其中应主要抓住以下两点:

(1)教学每一个运算律、运算法则、公式、运算性质等数式恒等变换的"对应法"时,不仅要教给学生结论,而且要帮助学生搞清这些结论的来源,更要让学生懂得这些结论用于变换的共同行征——数、式的形变值不变,即数、式的表达形式变化了,而其值没有变,仍是其"自身"。

比如,去括号法则:

形　变	来　源	值不变

a+(b+c)变形为a+b+c a-(b+c)变形为a-b-c	加法结合律的逆应用 减法性质的逆应用或乘法分配律	a+(b+c)与a+b+c的值相等 a-(b+c)与a-b-c的值相等

(2)强调“以理驭算”,即数、式进行变形必须有根有据,才能保持“恒等”。特别是刚刚教学一个运算法则、性质、公式后,应用它们进行恒等变换时,应要求学生指出每一步变换(计算)的理由,这不仅能帮助学生熟练掌握知识,而且可以强化他们恒变变换的意识。

比如,|-3|

=-(-3)〔负数的绝对值等于它的相反数〕

=+3。〔简化符号的法则〕

用“以理驭算”的方式渗透恒等变换的思想方法,贵在经常,贵在坚持,采用多种方式贯穿于初中代数教学的始终。这对于帮助学生正确地应用公式、法则,提高运算的正确率,以及形成良好的习惯都是有益的。

同解变换是对方程进行变形,而保持其解集不变的一种变换。它应用于探求各类方程的解法,较为典型地体现了“化归”的思想。从一元一次方程到二元二次方程组,各类方程(组)的解法成为初中代数中环环紧扣的一个知识系统,其中的每一个环节都体现了通过同解变换,不断地化繁为简,化未知为已知的思想。

教学中渗透同解变换,可以采用与渗透恒等变换相类似的方法。但是,应当指出它们是两种不同的变换,其主要区别在于:(1)前者通常是对一个方程进行变形,后者则是将一个式子进行变形;(2)前者保持变形后的方程与原方程的解集相等(通常,方程两边的代数式不仅形变,而且值也变),后者则保持变形后的式子与原式的值相等。

比如,方程$\frac{0.1x+0.2}{0.5}+\frac{0.3x+0.4}{0.2}=2$,若把它变形为$\frac{x+2}{5}+\frac{3x+4}{2}=20$,便是常见的一种错误,其实质是混淆了同解变换与恒等变换。

又如,把$\frac{1}{3}\left[x+\frac{1}{4}(x-3)\right]$变形为$4x+3(x-3)$也是错误的。其原因则是把式的变形当成方程的同解变换,即化简代数式$\frac{1}{3}\left[x+\frac{1}{4}(x-3)\right]$时,错误地应用了解方程中的“去分母”的法则。

初中代数教学中的几种主要变换——换元变换、恒等变换与同解变换的渗透。事实上,初中代数教学中还可以渗透其他的一些变换,比

如“问题的变换”就是其中重要的一种。

1.“实际问题——数学问题”的变换

把实际问题变换成为数学问题,并用数学知识解决,从而使实际问题得到解决,这种“实际问题——数学问题”的变换,最充分地体现了数学的魅力,也是数学教学中发展学生思维能力的一种重要手段。

这种变换在初中代数中最典型地隐含在“列方程解应用题”的教学中。不少教师对列方程解应用题常常采用题型教学的模式,这固然能使学生搞清基本数量关系,并能套用模式解决一些类似的问题。但是,这种教法往往不注重揭示实际问题是如何变换为数学问题的,不注重揭示问题之间的本质联系。因而,学生拘泥于范例的模仿,而不能通过变换思想从整体上把握列方程解应用题的思路,学习中仍会感到困难重重。为了改变这种状况,教学中可采用以变换为主线,以帮助学生掌握数学思想方法、发展思维能力为目标的方法。

(1)强化“语言叙述的等量关系——方程”的变换。 每一个应用问题总是采用显见的或隐含的方式给出等量关系,这是列方程的依据。教学中要注重揭示实际问题中的等量关系,并强化训练“语言叙述的等量关系(文字等式)——方程(符号语言叙述的数学等式)”之间的变换。比如,初中代数课本第一册第 142 页例 3:

甲、乙两站相距 360 公里。一列慢车从甲站开出,每小时走 48 公里;一列快车从乙站开出,每小时走 72 公里。

①两列火车同时开出,相向而行,经过多少小时相遇?

②快车先开 25 分钟,两车相向而行,快车开了几小时与慢车相遇?

分析题意时,应揭示①、②两题中的等量关系:快车行驶的路程与慢车行驶的路程之和等于 360 公里。这样就不难用符号语言把这个文字等式分别翻译为

①$48x+72x=360$;②$48x+72\left(x+\frac{5}{12}\right)=360$。

(2)改变实际应用问题中的具体数量,或改变等量关系的给出方式,但保持问题的本质不变,这种变换有助于学生灵活地把一类问题串成线,系统化。 比如,上述例题②可以变换为:

问题 1 甲、乙两人从相距 65 公里的 A、B 两地相向而行,甲每小时走 7.5 公里,乙每小时走 5 公里。甲先走 2 小时,问乙出发几小时后与甲相遇?

〔$7.5(x+2)+5x=65$。$x=4$。〕

问题 2 甲、乙两人分别从 A、B 两地出发相向而行,甲从 A 到 B 需要 8 小时

40 分钟,乙从 B 到 A 需要 13 小时。甲先走 2 小时,问乙出发几小时与甲相遇?

$\left[\frac{x+2}{8\frac{2}{3}}+\frac{x}{13}=1。\ x=4。\right]$

本题隐去了题 1 中的路程和速度的具体数量,但给出了路程与速度之比——时间,从而成为一个与工程问题相类似的问题。

问题 3　甲、乙两人从相距 65 公里的 A、B 两地相向而行,甲、乙两人的速度之比是 3:2。甲、乙两人同时出发,问相遇时两人各走了多少公里?

〔(65-x):x=3:2。　x=26,65-x=39。〕

题 3 隐去了题 1 中的速度,给出了甲、乙两人速度之比。由于简化了时间的条件(同时出发,两人相遇时所用的时间相等),可以用相同时间内速度与路程成正比的关系列方程,从而使题 3 与比例分配问题相类似。

(3)改变应用问题的实际意义,保持数量(等量)关系不变,这种变换常常使问题"面目全非",但数学表达式(方程)不变,有殊途同归、异曲同工之妙。　比如,上述例 3 可以变换为:

问题 4　甲、乙两人合做 360 个零件,甲每小时做 48 个,乙每小时做 72 个。

①甲、乙两人合做,几小时完成任务?

②甲先做 25 分钟后,甲、乙合做完成任务,问甲做了几小时?

〔本题所列方程与例 3 完全相同〕

问题 5　用 360 元钱买两种商品,甲种商品每公斤 48 元,乙种商品每公斤 72 元。

①若甲乙两种商品买一样多,问各买了几公斤?

②若甲种商品比乙种商品多买 5/12 公斤,问甲、乙两种商品各买多少公斤?

本题改编成为一个买卖问题,但其数量关系及所列方程与例 3 仍完全相同。

像这样的种种变换,将有助于学生沟通各类应用问题之间的本质联系。例如,行程问题中的路程、工程问题中的工作总量、买卖问题中的总金额是同一类量,在某些问题中都可以看作单位"1"。

2. 数学问题之间的变换

把一个数学问题等价地变换为另一个问题,从而使有待解决的问题化归为已经熟知的问题,这也是探索新知识的重要途径。

比如,"有理数减法法则"就较为典型地体现了这种思想方法,教学中应该有意识地加以渗透:

为了计算(+3)-(+5)的值,并得出减法法则,对这个算式可以

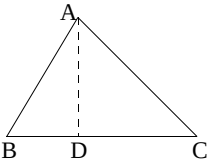
采用两种方式处理：一是利用减法是加法的逆运算，把（+3）-（+5）=？变换成（+5）+？=+3，从而知道“？”等于-2；二是把（+3）-（+5）=？中的减法变换成为加法（+3）+（ ），并使这个式子的值也是-2，于是找到了（+3）-（+5）=（+3）+（-5）的关系。这样就实现了“减法——加法”的变换，导出了有理数减法法则。

通过数学问题的变换去探索新知识的思想方法，还体现在“对数”的教学中。由于对数式 $\log_a N = b$ 与指数式 $a^b = N$ 有着内在的联系，因而研究对数时，常常可以把对数的问题变换为指数的问题，再利用指数的有关知识去解决。

比如，推导 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 时，先设 $\log_a M = p$，$\log_a N = q$，变换为 $a^p = M$，$a^q = N$，根据指数运算法则得 $M \cdot N = a^{p+q}$，然后由对数定义得 $\log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$。这个推导过程典型地体现了通过对数与指数之间的变换不断解决新问题的思想方法。

再如，在“解斜三角形”的教学中，不仅要注重正弦定理、余弦定理及其应用，而且也应该渗透变换的思想——化斜为直，即把解斜三角形转化为解直角三角形。例如，

如图，$\angle B = 60°$，$\angle C = 45°$，$AB + AC = 2 + \sqrt{6}$，求 BC。



简析 解此题时，通常先由正弦定理 $\frac{AB}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 60°}$，解得 $AB = 2$，$AC = \sqrt{6}$，再应用余弦定理求出 BC。这种解法计算过程较繁。

事实上，考虑到△ABC 是锐角三角形，若作高 AD，把原斜三角形化为两个直角三角形，设 $BD = x$，则 $AB = 2x$。$AD = \sqrt{3}x$，$DC = \sqrt{3}x$，$AC = \sqrt{6}x$。不难根据题意，由 $2x + \sqrt{6}x = 2 + \sqrt{6}$，得 $x = 1$。于是 $BC = BD + DC = 1 + \sqrt{3}$。显然这种解法要简捷得多。

3. 语言表达方式的变换，有时也能使某些数学问题变得较易理解和解决

比如，“有理数”的教学中，应注意训练学生逐步学会如下表达方式的相互变换：

a 是正数（负数）$\Longleftrightarrow a > 0$（$a < 0$）；

a、b 同号 $\Longleftrightarrow ab > 0$（$a > 0$ 且 $b > 0$ 或 $a < 0$ 且 $b < 0$）；

a、b 异号 $\Longleftrightarrow ab < 0$（$a > 0$ 且 $b < 0$ 或 $a < 0$ 且 $b > 0$）。

如果学生掌握了这种文学语言与符号语言的变换，那么在一元二次不等式解法的教学中，可以把一元二次不等式化归为一元一次不等式组求解。尽管课本没有介绍这种解法，但这种不借助二次函数图象的解法，不仅学生不难理解、掌握，而且对于初高中教学的衔接也是有益的。

此外，众所周知的初中代数有关一次、二次(代数式、方程、不等式、函数)的两串问题，也常常可以借助表达形式的变换，使难以处理的问题变得易于解决。例如，下列四个问题是可以相互变换的：

(1)证明：对于一切实数 x，二次三项式 x^2-2x+3 的值恒大于零。

(2)解不等式 $x^2-2x+3<0$，

或证明：不等式 $x^2-2x+3<0$ 的解集是空集。

(3)判断一元二次方程 $x^2-2x+3=0$ 的根的情况。

(4)证明：二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象在 x 轴的上方。

显然，上述第(1)、(4)两个问题难以处理，而第(2)、(3)两个问题则易于解决。

□变换命题形式解题的思维方法

变换命题是一种常见有效的数学思想方法。通常根据问题的特点，对原命题的结构、特征进行观察、联想、类比、变换成等价的或拓广的命题。将比较生疏的问题转化为比较熟悉的问题；将比较复杂的问题转化为比较简单的问题；将比较抽象的问题转化为比较具体的问题，从而使问题容易获解。江苏通州市刘桥中学徐新民老师通过列举范例分类阐述模型变换、数形变换、维数交换、动静交换、常量与变量的变换、特殊与一般的变换等六种变换命题形式求解问题的思维方法。

1. 模型变换

构造或选用某一数学模型，把命题转化为某种数学模式，把问题具体化，使解题思路畅通。

例1　由正方体的棱、面对角线、体对角线可组成多少对异面直线？

分析　显然直接计算，无从下手，若注意到这里的异面直线源于正方体的不共面的四个顶点，于是构造三棱锥作为模型，其每一组对棱都是异面直线，又以正方体的顶点为顶点作三棱锥，所能组成的三棱锥的个数为 $C_8^4-6-6=58$，而每个三棱锥能组成三对异面直线，故可得异面直线的对数为 $3\times58=174$。

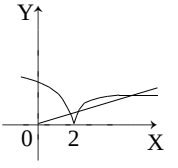
2. 数形变换

数形变换,是求解数学问题的一种常用思维方法。在解题中创设数形结合的情景,由形思数,由数想形,把代数式与几何图形的直观描述有机结合起来,从而使问题获解。

例2 当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时,$\sqrt{|2-x|} = kx$ 的解的个数是( )。

(A)3 (B)2 (C)1 (D)0。

分析 若直接求解则较繁。可由数想形,转化为求曲线的交点的个数。在直角坐标系中画出 $y = \sqrt{|2-x|}$、$y = kx$ 的图象(如图1),立即可得出交点的个数为3,故选(A)。



3. 维数变换

数学解题中,根据问题的特点,采用升维或降维思考,是寻求解题途径的有效方法。

例3 过点 P(0,1) 作直线 l 使它被两已知直线 l_1: $x-3y+10=0$,l_2: $2x+y-8=0$ 所截得的线段 MN 平分于 P 点,求此直线的方程。

分析 设所求的直线方程为 $y=kx+1$,代入方程 $(x-3y+10)(2x+y-8)=0$,

整理得 $(2-5k-3k^2)x^2+(28k+7)x-49=0$,

由韦达定理,得

$$x_M + x_N = -\frac{28k+7}{2-5k-3k^2} = 2x_p = 0,$$

, $k = -\frac{1}{4}$。

故所求的方程为 $x+4y-4=0$。

上述解法将两条"一次曲线"升格为一条"二次曲线",避开求交点的繁杂运算,思路清晰,过程简捷。

降维常见将立几(三维)问题变换成平几(二维)问题求解。在此不再赘述。

4. 动静变换

动与静是相对而言的,解题时变换思考角度,注意动静转换,常常能找到解题的突破口。

例4　如图2，在坐标平面 xoy 上的直角梯形 ABCD 中，$\angle C=45°$，$|AB|=|AD|=2\sqrt{3}$，$\angle A=90°$，此梯形在满足 $|OA|+|OB|=4$ 的条件下运动，求证：原点 O 到直线 CD 的距离 $d\geqslant\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$。

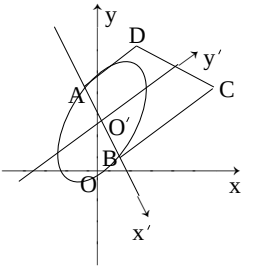


图2

分析　根据题意，梯形是动的，原点 O 是定（静）的，但是动与静是相对的，我们可以看成梯形是静的，原点是动的，逆序联想，则不难看出，动原点 O 的轨迹是以 A、B 为焦点的椭圆，这样问题就容易解决了。

证明　取 AB 的中点 O′ 为原点，AB 方向为 x′ 轴的正向，建立直角坐标系 x′oy′，在新坐标系中，$A(-\sqrt{3},0)$，$B(\sqrt{3},0)$，$D(-\sqrt{3},2\sqrt{3})$，依题意 O 点在以 A、B 为焦点，长轴为 4 的椭圆上，该椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x'=2\cos\theta,\\ y'=\sin\theta,\end{cases}$ 直线 CD 的方程为 $y'-2\sqrt{3}=x'+\sqrt{3}$

椭圆上的点到 CD 的距离

$$b=\frac{|2\cos\theta-\sin\theta+3\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}\sin(\varphi-\theta)+3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}。$$

其中 φ 满足 $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

易知 $\sin(\varphi-\theta)=-1$ 时，$d_{最小}=\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$

故 O 点到 CD 的最短距离 $d\geqslant\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$。

5. 常量与变量的变换

在处理某些特殊型的问题时，可以根据其形式特征，将问题中某个或某些特殊的已知数值换元，这样暂化“常量”为“变量”，从而打破思维定势，使问题迅速地获解。

例5　若 $9\cos B+3\sin A+\operatorname{tg}C=0$，

$\sin^2A-4\cos B\operatorname{tg}C=0$，

求证　$\operatorname{tg}C=9\cos B$。

分析　本题如果用三角公式证明，不仅代换复杂，而且很难找出 A、B、C 三角之间的关系，不易达到目的，现令 $3=a$，于是得到关于 a 的一元方程

$a^2\cos B + a\sin A + \mathrm{tg}C = 0$，

$\sin^2 A - 4\cos B\,\mathrm{tg}C = 0$，

当 $\cos B \neq 0$ 时，上述方程有两个相等的实根。

，$a = -\frac{1}{2}\sin A/\cos B = 3$，

，$\sin A = -6\cos B$，

，$9\cos B + 3(-6\cos B) + \mathrm{tg}C = 0$，

即 $\mathrm{tg}C = 9\cos B$。

当 $\cos B = 0$ 时，由已知等式易得 $\sin A = \mathrm{tg}C = 0$，结论显然成立。

6. 特殊与一般的变换

从特殊（一般）到一般（特殊）的思想方法是数学和其它科学领域中进行探索、发现真理知识的重要途径。

例6 设 $A = (p-1)^{\frac{p-1}{2}}$，则对任意奇数 $p > 1$ 有（　　）。

（A）$A+1$ 能被 p 整除

（B）$A-1$ 能被 $p-2$ 整除

（C）A 能被 p 整除

（D）$A-1$ 能被 $p-1$ 整除。

分析 对任意 $p > 1$ 的奇数都具有同一性质，可令 $p = 3, 5, 7, \cdots$，

$p = 3$ 时，$A = (3-1)^{\frac{3-1}{2}} = 2$，排除 C、D；

$p = 5$ 时，$A = (5-1)^{\frac{5-1}{2}} = 16$，排除 A；故选 B。

例7 求证

$\frac{(1+\sqrt{1995})^{1996} - (1-\sqrt{1995})^{1996}}{\sqrt{1995}}$ 必为整数。

分析 直接证明难以入手，我们考虑更一般的情形。

设 $f(x) = (1+x)^{1996} - (1-x)^{1996}$，则有 $f(-x) = -f(x)$，，$f(x)$ 是奇函数。

故 $f(x)$ 必是只含有奇次项的整系数多项式，从而 $\frac{f(x)}{x}$ 是只含有偶次项的整系数多项式。

特取 $x = \sqrt{1995}$，则得 $\frac{f(\sqrt{1995})}{\sqrt{1995}}$ 是整数。

□变换法解题的六种形式

当我们解题遇到障碍或困难时，采用变换的方法，能使问题呈现新

3. 视角变换

同一问题,从不同的角度去观察、处理,问题会呈现不同的性态,显示了不同的关系,也就给我们提供了多种选择解题方案的机会。

例3、 在数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=1$,$a_{n+1}>a_n$,且有 $a_{n+1}^2+a_n^2+1=2(a_{n+1}a_n+a_{n+1}+a_n)$ 成立。

(1)求 a_n;(2)求前项和 S_n;(3)求 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{S_n}{na_n}$。

分析 对数列 $\{a_n\}$ 所给出的递推关系,如果我们改视为关于 a_{n+1} 的二次方程,那么要求通项就容易了。

(1)解 数列 $\{a_n\}$ 递推关系可化为:

$a_{n+1}^2-2(a_n+1)a_{n+1}+(a_n-1)^2=0$,

, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}[2(a_n+1)$

$\pm\sqrt{4(a_n+1)^2-4(a_n-1)^2}$

$=a_n\pm2\sqrt{a_n}+1=(\sqrt{a_n}\pm1)^2$,

, $\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_n}\pm1$。

$a_1=1$,$a_{n+1}>a_n$,

, $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=1$,($\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=-1$ 舍去)

, 数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为1,公差为1的等差数列。

, $\sqrt{a_n}=n$,即 $a_n=n^2$。

(2)、(3)解略。

4. 主元变换

在"多参"多变元"问题中,往往根据需要改变对主参数、主变元的确定,由此来寻求解题的突破口。

例4、 证明 对任意实数 k,$y(1-k^2)-kx+2pk=0$ 必通过一个定点。

分析与解答 题中 x、y 是主变元,但我们改定 k 为主变元,按 k 整理得

$(-y)k^2+(2p-x)k+y=0$。

上式与 k 无关,

, $\begin{cases}-y=0\\2p-x=0\end{cases}\Rightarrow x=2p,y=0$,

, 恒通过(2p,0)这点。

5. 模型变换

数学模型是现实原型进行数学抽象的产物。有时,数学描述本身复杂,但它所描述的现象本身反而容易,这时,不如把数学模型变换到

现象本身。

例5、 证明：$C_m^0C_n^r + C_m^1C_n^{r-1} + C_m^2C_n^{r-2} + \cdots + C_m^rC_n^0 = C_{m+n}^r$ （$r \leqslant m$）。

分析与解答：构造模型：设有 $m+n$ 件产品，其中有 m 件废品，现从中任取 r 件（$r \leqslant m$），只有多少种不同的取法？

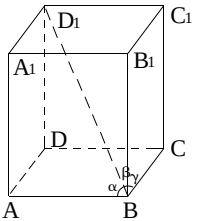
一方面由组合定义可知有 C_{m+n}^r 种不同的取法。

另一方面，这 r 件产品中可能没有废品，也可能有1件，2件，…，r 件废品，它们取法为：$C_m^0C_n^r$，$C_m^1C_n^{r-1}$，$C_m^2C_n^{r-2}\cdots C_m^rC_n^0$，综合上述两方面取法，知原等式成立。

6. 数形变换

数中有形，形中含数。当数学题目中有明显的几何意义，利用图形解题，确有独到之处。

例6、 已知 α、β、γ 均为锐角，且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，求证：$tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma \geqslant 2\sqrt{2}$。



分析与解答：由条件 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，联想到长方体的对角线与过同一点的三条棱所成角的余弦有此关系，因此上述问题可变换到长方体中来研究。

如图，设长方体 AC'，棱长分别为 a、b、c，对角线 BD' 与三棱所成角为 α、β、γ，由图形可知：

$$tg\alpha = \frac{AD'}{a} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a},$$

$$tg\beta = \frac{B'D'}{c} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c},$$

$$tg\gamma = \frac{D'C}{b} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b},$$

$$\therefore\ tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c} \cdot \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b} \geqslant \frac{\sqrt{2bc}}{a} \cdot \frac{\sqrt{2ab}}{c} \cdot \frac{\sqrt{2ac}}{b} = 2\sqrt{2}。$$

□变换题目的方法

思维的灵活性主要表现在是否善于变换，大胆联想，灵活转变。因此在平时的教学中，应从多角度、多方位进行猜测、创新，培养学生随问题变化而变化的能力，提高发现问题、解决问题的能力，航部二一〇研究所子校刘改正老师归纳了一题多变的几种情况：

1. 变换题目部分条件,加强横向联系

如 求平面上一动点 C 到两定点 A、B 距离之和等于定长的点的轨迹?

事实上,此题就是椭圆的定义,它的轨迹是以这两个定点为焦点的椭圆。

如果把此题中的条件"动点 C 到两定点 A,B 距离之和等于定长"稍加变化,就得到

例 1 设 A、B 为平面上,两定点,C 为此平面上的动点,求满足下列条件的动点 C 的轨迹形状:(1)$|CA| - |CB| = m$;$(m>0)$;(2)$|CA|^2 + |CB|^2 = m$;

(3)$|CA|^2 - |CB|^2 = m(m>0)$;

(4)$|CA| / |CB| = m(|CB| \neq 0)$;

(5)$tg\angle CAB + tg\angle CBA = m(m>0)$;

(6)$k_{CA}k_{BC} = m(m>0)$.

事实上,动点 C 的轨迹形状分别为

(1)双曲线;(2)圆;(3)直线;(4)圆;(5)双曲线;(6)双曲线。

可以看出,只要将条件加以适当的变化,动点的轨迹就会发生变化。

若继续变化题中的条件"动点 C 到两定点 A、B 距离之和等于定长",就会得到下面例 2、例 3、例 4。(供读者思考)

例 2 在平面上,A、B 为两定点,C 为平面上的动点,且在与 AB 平行的定直线上运动,求△ABC 的

(1)重心轨迹形状;

(2)外心轨迹形状;

(3)内心轨迹形状。

例 3 在平面上,A、B 为两定点,C 为平面上的动点,且 C 在以 AB 为弦,含角为定角 α 的弓形弧上运动,求△ABC 的

(1)重心轨迹形状;(2)垂心轨迹形状;(3)内心轨迹形状。

例 4 在平面上,A 为定点,l 为不过 A 的定直线;C 为平面上的动点,C 点到定点 A 与定直线 l 的距离分别为 m,n,求满足下列条件的动点 C 的轨迹形状。

(1)$m + n = d$;

(2)$m/n = \lambda, (\lambda > 0)$;

(3)$m - n = d$;

(4)$m^2 + n^2 = d^2, (d>0)$ l;

(5)$m^2 - n^2 = q$;

(6)$pm + qn = d$,(p,q,d 为正常量)。

此题通过如此变化,会使学生对二次曲线有一个新的认识,进一步

掌握求轨迹的一般方法。

2. 变换题目的图形,使题目向深化发展

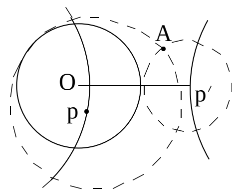
我们知道过平面上两定点 A,B 的圆的圆心的轨迹,是以 A,B 为端点的线段的垂直平分线。

如果将本命题的‘两个定点 A,B’加以变化,就会得到:

例 5　求与平面内定圆 O 相切且过定点 A 的圆的圆心轨迹。

事实上,(1)当定点 A 在定圆 O 外时,

设定圆 O 的半径为 r,若设过点 A 且与圆 O 外切的圆为 P,则 $|PO| - |PA| = r$…① 若设点 A 与圆 O 内切的圆为 P,则 $|PA| - |PO| = r$…②。①②合并为 $||PA| - |PO|| = r$,所以,P 在以 O,A 为焦点的双曲线上。



(2)当定点 A 在定圆周上时,过 A 作与圆 O 相切的圆,其圆心 P 的轨迹是连接 OA 的直线,但须除去 O,A 两点。

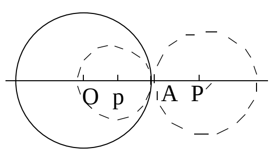
(3)当定点 A 在定圆 O 内,过 A 只能作圆 O 的内切圆,设圆心为 P,则 $|PO| + |PA| = r$。因此,P 的轨迹是以 O、A 为焦点的椭圆。

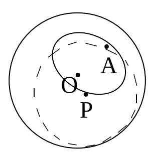
若将例 5 中的‘定点 A、定圆 O’改为‘平面上两定圆’就得到

例 6　设平面上两圆 A、B 的半径分别为 a、b($a > b$),求与两圆相切的圆的圆心轨迹。

事实上,平面上两圆的位置关系有五种情况,而在每一种情况里有 i)动圆 P 与两定圆 A、B 同时外切或内切,ii)动圆 P 与其一外切与另一个内切。因此,这是一道较为复杂的题目。

若将题中的图再加变化,就得到





例 7　平面上定圆 O 和定直线 l,作与圆 O 和直线 l 相切的圆,试求其圆心 P 的轨迹,按圆 O 和直线 l 不同的位置关系,画出其轨迹。

以上通过对题中的图由点到直线,进而到圆的变化,使题的难度由简单到复杂逐步升级。使求的结论形式各异。提高了学生思维的灵活性,复习面广。

3. 变化题目的结论,找出一般性规律

我们知道,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 若 $b^2-4ac>0$,则有两个不同的实根。

如果我们对此命题的结论"有两个不同的实根"加以变化或限制,就会得到下面一般性的结论:对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ (令 $f(x)=a^2x+bx+c$)

结　　论	充要条件
两个不同的实根	$b^2-4ac>0$
两个相等的实根	$b^3-4ac=0$
两个共轭虚根	$b^2-4ac<0$
两个同号实根	$\begin{cases}\triangle\geqslant0\\ c/a>0\end{cases}$
两个正实根	$\begin{cases}\triangle\geqslant0\\ c/a>0\\ b/a<0\end{cases}$
两个负实根	$\begin{cases}\triangle\geqslant0\\ c/a>0\\ b/a>0\end{cases}$
两个实根都小于 k	$\begin{cases}\triangle>0\\ k>-b/2a\\ a,f(k)>0\end{cases}$
两个实根分别处于某常数外	$af(k)<0$
两个实根在区间 (k_1,k_2) 内	$\begin{cases}\triangle\geqslant0\\ a\cdot f(k_1)>0\\ a\cdot f(k_2)>0\\ k_1<-b/2a<k_2\end{cases}$
两个实根满足 $x_1<k_1$,且 $x^2>k^2$ $(x_1<x_2,k_1<k_2)$	$\begin{cases}a\cdot f(k_1)<0\\ af(k_2)<0\end{cases}$

结　论	充要条件
根 x_1, x_3 有且仅有一个在 (k_1, k_2) 内	$f(k_1)f(k_2)<0$

此题经过这样变化,会使学生对一元二次方程根的分布情况有一个清晰的认识,同时对韦达定理和二次函数的图象更加理解,起到沟通、联结的作用,使知识系统化、条理化。

4. 进行正、逆问题变换,加强双向联系

所谓逆问题指的是:保留正问题的主要内容,变原来的未知部分为条件的一部分。而原来的条件的一个或几个元素却变成未知部分。

例8　正问题:已知圆锥的面积为 $18\pi(cm^2)$,侧面展开图是一个半圆,求这个圆锥的体积。

逆问题:1°已知圆锥的侧面展开图是一个半圆,且圆锥的体积为 $9\sqrt{3}\pi(cm^3)$,求这个圆锥的侧面积。

2°已知圆锥的侧面积为 $18\pi(cm^2)$,体积为 $9\sqrt{3}\pi(cm^3)$,试问圆锥的侧面展开图是怎样一个图(或试求侧面展开图的圆心角度数)。

5. 变换运算方式,探求新路子

往往有一类题目如果按照题目本身固有的运算方式进行计算或证明,显得比较繁,且无章可寻,可是,如果通过改变运算方式,就显得轻而易举。如构造方程(组)法、构造函数法、构造图形法,等等。

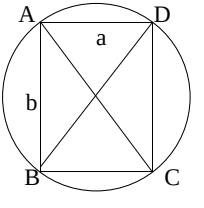
例9　已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,且 $0\leqslant a\leqslant 1$, $0\leqslant b\leqslant 1$. 求证:$a^2+b^2=1$。

分析:(思路一)给已知条件两边平方,得 $a^2(1-b^2)=1+b^2(1-a^2)-2b\sqrt{1-a^2}(0\leqslant a\leqslant 1, 0\leqslant b\leqslant 1)$

$(a^2-b^2-1)^2=4b^2(1-a^2)$,

整理得 $(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)+1=0$,

即 $(a^2+b^2-1)^2=0$, $a^2+b^2=1$。



(思路二)如图,在直径 $AC=1$ 的圆周上作弦 $AB=b$, $AD=a$ 的圆内接四边形 ABCD, $DC=\sqrt{1-a^2}$, $BC=\sqrt{1-b^2}$,据托勒密定理 $AD\cdot BC+AB\cdot DC=AC\cdot BD$,

即 $a\sqrt{1-a^2}+b\sqrt{1-b^2}=1\cdot BD$ 由条件得 $BD=1$,

, BD 也是圆的直径,故有 $a^2+b^2=1$。

（思路三） $0 \leqslant a \leqslant 1$，$0 \leqslant b \leqslant 1$。

，设 $a = \sin\alpha$，$b = \cos\alpha$，$(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2)$

，$\sin\alpha \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} + \cos^2\alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，

即 $a^2 + b^2 = 1$。

综上所述，如果能够长期坚持引导学生多思，多变，探索、总结规律，这不但是发展学生智力，培养能力的最好办法，而且还是培养发散思维的一种途径，同时可以不断地提高学生的解题能力。不但收到触类旁通，举一反三的效果，而且能积累丰富的解题经验。这对于培养学生思维的灵活性会收到良好效果。

□变换命题形式的八种方法

大家知道，问题是数学的心脏，解题是学习数学的基本手段，我们的数学教学无非是通过学生解题练习，练会练懂，及时发现和解决疑难，从而达到巩固双基、促进思维，形成能力的目的。但是，由于对教学具有重要的导向作用的中考命题几乎都属于常见的重点题型，因而诱使不少教师把各种题目分组归类，进行‘题型＋方法’的模式教学，忽视解题中探究过程，教师教给学生的是通过消除痕迹而处理了的解题模式，学生只能去进行对应的练习，这就严重地阻碍了学生思维能力的发展。这正是造成‘高分低能’的重要原因。

怎样减缓乃至消除这种弊端？首先必须端正教育思想。其次，应恢复解题模式的探究过程，充分创造条件，让学生在全面而形象的探索、发现、建立模式的再现过程中，发挥主体作用，深刻体会解题规律或方法的真正含义，时时保持探索性思难意向，建立完善的思维模式。但是，由于课本上的这类题目梯度小，仅凭模仿或照搬即可解答，久而久之使学生养成死记硬背，不尚思索的毛病，不利于思维训练教学。因此，广泛开阔题源，将已解过的题目，学过的公式、定理、概念、法则，通过变式、逆转、重构，设计一些巧妙新颖、有思考推敲余地，且有较高训练价值的新题实有必要。

湖北巴东茶店民族中学谭德军老师从不断完善和发展学生认识结构出发，以训练思维，提高能力为目的，以课本知识体系为依托，以充分发挥课本例题与习题的作用为基础，不断变换命题形式，力求使训练题

型多样化。除广泛使用问答、选择、填空、判断、改错等题型外，还编拟一些具技巧性、综合性、灵活性、应用性的题型，不仅弥补了课本的不足，更重要的是充实了教学，增强了思维教学功效。

1. 思考型

解答思考型题没有固定模式，需要在理解已有知识的基础上，独立思考，任何机械模仿或生搬硬套都无济于事。其解答过程就是学生积极思维，探索知识的过程，它有利于学生思维能力的考查。

例1　请写出尽可能多的表示1的数或式子。

（赏析）此类题要求通过不同的方面、不同的角度、不同的途径去思考、去寻求，它不依常规，可求变异，有利于学生思维广阔性训练。

例2　对于命题：两个锐角三角形有两边和其中一边上的高对应相等，则这两个三角形全等。若将“锐角”二字去掉，命题是否成立？并证明。

（赏析）该题是对一课本习题的再思考，它恰是针对学生易出错和进一步深化的问题而提出的。由于证明的入口宽（反例的形式亦多样），繁简程度及所涉及知识各异，就易克服学生思维的狭隘性，训练学生思维的发散性。

2. 阅读型

“要引导学生认真阅读课文和随时进行小结”是教学大纲的要求，学生通过阅读和独立思考、归纳、演绎，可使学生知识系统化、举一反三、触类旁通、思考创新，促进良好思维习惯的形成。

例3　阅读课本“相交弦定理”的证明过程，小结其证明思路。

（赏析）该题意在让学生亲自去揭示证题的关键所在，理解和掌握转化的方法。解答此题，有利于反思探究，保持思维过程的探索性，发挥思维的联想、发散、直觉、创造等功能，从而达到对知识归纳概括化，对技能的强化巩固规律化的目的。

3. 发散型

发散型题给出条件或给出结论与部分条件，去探索各种结论或未确定条件的各种可能性。解这类题不受“定势”、“模式”的束缚，有较强的创造性，能充分揭示思维的广度与深度，有助于学生发散思维能力的发展。

例4　AB为⊙O直径，P点在AB的延长线上，PM切⊙O于C，CD⊥AB于D，AM⊥PM，BN⊥MP于N。你能得出哪些结论？

（赏析）该题需学生突破“证明题”的模式，分析条件去发现结论。

由于涉及的等线段,等角较多,其内容丰富,涉及面广能让学生复习较多的知识,以少胜多。还可以由浅入深,由此及彼探寻解题途径,开阔了学生视野。因此,解此类发散题不仅对学习数学知识,提高解题能力有益,而且对学习数学的思维方法,提高思维能力有益。

4. 陷井型

这类题是为突破消极思维定势而有意设下的陷井,使题型与方法错位。它要求学生随机应变、多方发散、深入探索。这样不仅训练了学生思维的灵活性、敏捷性,而且培养了学生思维的深刻性、创造性。

例 5　AM 是⊙O 的切线,B 是切点,AE 过圆心 O 交⊙O 于 D、E,BC⊥AE 于 C,求证:$AB \cdot CD = AD \cdot BC$。

(赏析)本题表面看来可直接应用切割线定理证明,若抱此常规思路不放,便中了命题者的计,结果不仅浪费时间,而且使思维紊乱,影响解题。此时,只要果断放弃常规思路,就能摆脱被困境地。

5. 探究型

这里是指做完一道习题之后,保持已知条件不变,探究能否得出更深刻的结论;或改变命题条件、结论的若干元素,组成新型的、逆向的或更一般性的、高一层次的命题,并探究它的正确性。这对于培养学生的锲而不舍精神和创造思维能力大有好处。

例 6　下列两组算式的计算结果是否相等:$(3\times5)^2$ 与 $3^2\times5^2$,
$[(-1/2)\times4]^2$ 与 $(-1/2)^2\times4^2$。

试想 $(ab)^3=$?猜想当 n 为正整数时,$(ab)^n$ 等于什么?试证明你结论的正确性。

(赏析)这题主要考查初中常用来引出公式法则的不完全归纳法。它的独到之处在于突出了发展性。初中生的思维发展是渐进性的,他们思考问题的方法呈单向性,利用延伸法,就可设置思维发展阶梯,促进思维定势的正迁移,保持思维的趋向性和专注性、实现思维从单向性向发散性的过渡。

6. 变异型

所谓变异,是指在一组同类型习题的教学基础上,在学生自以为学得差不多的时候,选择似是而非的习题进行训练,以便暴露问题,从而进行追根求源,防止思维定势的负迁移,克服思维的呆板性。这样的训练可以促使学生积极思维,冲击思维定势,从而创造性思维能力得到提高。

例 7　解下列方程：

(1) $x^2-3x-\sqrt{x^2-3x+5}=1$；

(2) $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1)$。

变异题：$x^2-6x-6+x\sqrt{x^2-x-2}=0$。

(赏析)前两题通过适当变形,可用换元法求解,而变异题在方法上有所变化,尽管本质上还是要抓住根式部分特征进行换元,但层次上加深了,难度加大了。不过通过类比仍可求解。这样的训练是拓广学生思维的好方式。

7. 综合型

综合型题的思维链较长,代数、几何、三角的方法交替出现,使思维方式由点向线延伸,由平面向立体拓展,知识继承性也强,有利于发展学生智能。

例 8　a、b、c 是锐角△ABC 的三边,且 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$,$\sqrt{b}\sin A=\sqrt{a}\sin C$。

求证：△ABC 是正三角形。

(赏析)此题以解三角形为主线,不仅以纵向方式综合了解三角形的主要内容,而且又以横向方式综合了几何中的正三角形和代数中的方程及式的恒等变形等内容。其纵横交合对学生的知识结构和综合运用能力提出较高要求,是进行思维训练的好材料。

8. 辨析型

针对解题教学中往往只重“怎样做”,而对“不应怎么做”较少训练的弱点,命辨析型题大有必要。这也是培养学生思维批判性的一种重要方法。常见的做法还有习题评讲,试卷评析、改错练习等。批判之中力求维护数学的严谨性,从而培养学生思维的缜密性、深刻性。

此外,还有递进型、应变型、自编型,实用型,等等,限于篇幅,此不赘述。

总而言之,数学问题千变万化,但如果我们善于深入挖掘教材,从大量的问题中进行筛选,加工改造,有意识地研究积累那些能较好启迪学生思维的问题,相信有助于创造出更多更好的进行思维训练教学的方法和途径来。

□变更命题与思维品质培养

数学是思维的体操,思维是智力的核心,任何思维都是从问题开始的。在教学中若能恰当地创设新问题,把学生带到问题的情境之中,让学生提出新的问题,迫使学生去探求、摸索,揭示事物的规律,寻求解决新问题的方法,这样既有利于调动学生学习的积极性,又有利于培养和训练学生的思维品质,湖北枝城市二中姚永兆老师介绍了如下六种做法:

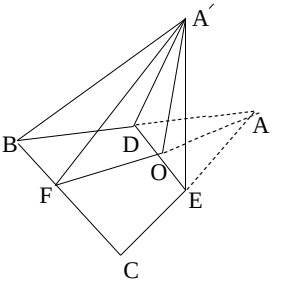
1. 变静为动,培养学生思维的深刻性

静与动是相对的,不少数学命题都是在静止状态下研究某一问题的,而这一状态正好是某种运动变化过程中的特例。变静为动,就能促使学生去探求这一运动状态过程,弄清运动中的实质,从而使学生对这一运动状态有较深刻的认识。

例1 正三角形 ABC 中,D、E 分别是 AB 与 AC 的中点,将△ABC 沿 DE 折成直二面角 A' - DE - B,求 A'B 的距离。

解 取 BC 中点 F,连 AF 交 DE 于 O,则 O 为 DE 中点,AF ⊥ DE, A' - DE - B 为直二面角,, A'O ⊥ DE,A'O ⊥ 半面 BCED,连 A'F,, BC ⊥ A'F(三垂线定理),设 $BC = a$,$A'O = FO = \frac{\sqrt{3}}{4}a$, $BF = \frac{1}{2}a$. , $|A'B| = \sqrt{A'O^2 + FO^2 + BF^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$.

现将例1改为例1',正三角形 ABC 中,D、E 分别为 AB、AC 上的点,且 DE // BC,将△ABC 沿 DE 折成直二面角 A' - DE - B,问 DE 在什么位置时,A'B 的距离最小?



经过改编的命题,DE 不再是静止的,而是与 BC 平行的一条直线,于是 A'B 的距离随 DE 的位置变化而变化。故可设 FO = x。将 A'B 的距离表为 x 的函数,利用函数极值求出这个最小距离。认识个这个实质,就可得出,$|A'B| = \sqrt{FO^2 + OA'^2 + BF^2}$

$= \sqrt{2(x - \frac{\sqrt{3}}{4}a)^2 + \frac{5}{8}a^2}$. 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{4}a$,即 DE 为中位线时 $|A'B|_{min} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$.

此结果正好说明例1是本题的特例。经过这样训练,就能使学生

的认识由表及里，由特殊到一般，不断深入，从而训练和培养学生思维的深刻性。

2. 变封闭式为开放式，培养学生思维的灵活性

一些等式证明和有唯一答案的解答题都可视为封闭式的题型。对于训练双基确实起到了应有的作用，但不利于应变能力及灵活性的训练。为了使学生能灵活地运用双基及多种数学思想方法，去解决有一定难度和灵活度的题型，增强应变能力，在教学中应经常将一些封闭式的题型改编为开放式的题型。

如将例 2，证明：$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)(n\in N)$. 改编为例 2'，是否存在这样的常数 a、b、c，使得 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{6}n(an^2+bn+c)$ 对于一切自然数 n 都成立？并证明你的结论。

改编后的命题，既不是简单地数列求和，也不是机械地归纳证明，形式活泼，思考性强。既要用待定系数法确定 a、b、c，又要用数学归纳法给予证明。如将解答题例 3，曲线 C: $3x^2-y^2=1$ 与直线 l: $y-ax=1$ 交于 A、B 两点，以 AB 为直径的圆经过原点，求 a 的值。改造为例 3'，已知曲线 C: $3x^2-y^2=1$ 与直线 l: $y-ax=1$，问是否存在实数 a，使得 C 与 l 交于 A、B 两点，且以 AB 为直径的圆恰过原点？经过这样一改，给思考方向带来了不确定性，也增添了问题韵味，本题略解。

由 $\begin{cases}3x^2-y^2=1\\y-ax=1\end{cases}$ 得

$(3-a^2)x^2-2ax-2=0$ ①

l 与 C 相交，, $\triangle\geqslant0$，$|a|\leqslant\sqrt{6}$. 以 AB 为直径的圆方程为 $\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$， 圆过原点，, $y_1y_2=-x_1x_2$，

由方程① $x_1+x_2=\frac{2a}{3-a^2}$，$x_1x_2=\frac{-2}{3-a^2}$，

又 $y_1y_2=a^2x_1x_2+a(x_1+x_2)+1$.

, $\frac{2}{3-a^2}=1$，$a=\pm1$.

故存在 $a=\pm1$，使得 C 与 l 的交点弦 AB 为直径的圆过原点。

3. 变确定式为探究式，培养学生思维的广阔性

一些数学命题是专门研究或解决某一个问题的，如解系数确定的

方程,证明函数在某一区间上的性质等均可视为确定式命题。这些问题对于训练学生的双基是非常有效的,但它往往使学生思维形成定势,不利于思维的广阔性发散性的培养和训练。为此,将这样的命题改为探究式命题,让学生在问题的探讨过程中,去全面细致地观察、思考这些新问题,不落俗套,不受习惯思维束缚,从而培养学生思维的广阔性及发散性。

如将命题例4,证明:函数 $f(x)=2^{1/(1-x^2)}$ 在(1,+)内为增函数改编为例4',试讨论函数 $f(x)=2^{1/(1-x^2)}$ 的单调性。例4'的目标不再是明确的,而需要进行探讨。首先应确定函数 f(x)的定义域,然后分区间讨论,注意到 f(x)为偶函数,故只需讨论当 $x\geqslant 0, x\neq 1$ 时单调性,就可求得在整个定义区间的单调性。

将命题5,已知抛物线 C: $(y+1)^2=x+1$ 和直线 l: y= - x,试求出抛物线 C 上关于直线 l 对称点的坐标。

改编为例5':已知抛物线 C:$(y+1)^2=x+1$ 和直线 l: y: kx,试问 k 在哪些范围内取值时,抛物线 C 上存在一对关于直线 l 对称的点?改编后的命题,思考面广,入口宽,探讨意识强,解题方法多种多样,解略。

4. 变解答式为讨论式,培养学生思维的敏捷性

在命题中渗透参数,将研究的数学问题改为讨论式。让学生在问题的研究中,学会对问题进行科学的划分,掌握因分类标准不一样,分类方法也有所不同,解题方法和技巧也随之变化的规律,灵活应变,寻找最佳解法,从而训练思维的敏捷性。

如将例6:解方程 $\frac{1g2x}{1g(4x-15)}=2.$

改编为例6':方程 $\frac{1g2x}{1g(x+a)}=2.$ 当 a 为何值时,方程无解?有一解?有二解?

例6'必须根据方程有解的必要条件判别式大于、小于、等于零分类,再结合对数方程的特点去讨论求解,解略。

5. 变概念题为是非题,培养学生思维的批判性

数学中的一些概念、公式、定理,或者因内容相似、相近,或者因形式相似、相近,易造成混淆。在教学中运用判断正误,辨析对比,要求学生指出正确的根据,错误的原因,就能促使学生在错综复杂的事物联系中,发现问题的实质,学会客观地评价事物,提高辨别是非的能力。

例7 下列命题中,哪些正确?哪些不正确?

并说明理由。

①分别在两个平面内的两条直线是异面直线。

②如果两个平面都平行于同一直线,则这两个平面平行。

③如果一条直线垂直于一个平面内的无数条直线,则这条直线垂这个平面。

通过辨析,既能防止产生概念混淆的错误,又能帮助学生揭示问题各自的内在规律。从而培养学生思维的批判性。

6. 变特殊为一般,培养学生思维的创造性

要使学生从平常中发现不平常,从特殊中寻找一般规律,发现和解决自己或别人所未发现和未解决的问题。要培养学生这种开拓性的思维。教师必须在教学中,有意识地给学生提供典型的或设计出隐藏着规律性的材料,引导学生去猜想,去发现。

如让学生做代数上册(P. 202 第 8 题。1)已知:$A+B=\frac{\pi}{4}$。求证:$(tgA+1)(tgB+1)=2$ 时,向学生提出,本题的条件是什么?结论是什么?能否将条件改为 $A+B=\frac{\pi}{3}$?学生通过验算回答。然后让学生解答:已知:$A+B=\frac{\pi}{4}$,$C+D=\frac{\pi}{4}$,求$(tgA+1)(tgB+1)(tgC+1)(tgD+1)$的值。

易得$(tgA+1)(tgB+1)(tgC+1)(tgD+1)=2^2$. 能发现什么规律吗?请同学们求下式的值。$(tg1°+1)(tg2°+1)(tg3°+1)\cdot\cdots\cdot(tg43°+1)(tg44°+1)=$?学生很快由前两式的结果猜想出此式的结果 2^{22}。这种方法是由教师提供材料,由特殊引导入手让学生探索,猜想出一般的规律,从而培养了学生思维的创造性。

□数学解题中的初等变换方法

变换是一个集合的任一元素到同一集合的元素的一一映射。它是数学中的一种重要思想,有助于我们深刻认识数学对象的内部联系。恰当地利用变换的观点和方法研究几何问题,常常能以简驭繁,给出灵活巧妙的解答方法。

在中学数学中,常用的初等变换有对称、平移、旋转、压缩等。江苏省苏州地区师范学校赵振威老师通过若干实例,探讨了初等变换在解题中的应用。

1. 对称变换

对称变换又称线镜反射(图1)。对于图形具有对称特征的命题,或用通常方法不易迁移元素位置的命题,一般可优先考虑用对称变换添设辅助线,以沟通条件与结论或条件与问题的联系,探明解题途径。

例1 设PQ为圆O的一弦,M为PQ的中点。过M任作两弦AB、CD,连AD、CB分别交弦PQ于E、F(图2)。求证:ME = MF。

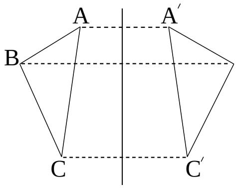


图1

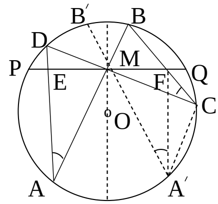


图2

思考方法 ME与MF是具有共同端点的两共线线段,要想在原图中推论它们的等量关系是困难的。注意到圆的对称性,可作弦AB关于过点M的直径的对称弦A′B′。这样,就可把原题归结为证明$\triangle AME \cong \triangle A'MF$。

证明 作弦AB关于过点M的直径的对称弦A′B′(图2)。由圆的对称性可知,Q、A′、B′分别为P、A、B关于过点M的直径的对称点。依点的对称性,有$AM = A'M$, (1) $\angle AME = \angle A'MF$, (2) $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{B'Q}$。 (3) 连结A′C、A′F,并注意到(3)式,有$\angle MFB \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PB} + \overset{\frown}{QC}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{B'Q} + \overset{\frown}{QC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{B'C} \overset{m}{=} \angle MA'C$。所以,M、A′、C、F四点共圆,有$\angle EAM = \angle MCF = \angle FA'M$. (4) 由(1),(2),(4)式即得 $\triangle AME \cong \triangle A'MF$。, $ME = MF$。

例1的条件和结论比较简单,但结构却较为复杂,解题的困难在于条件和结论难以直接联系起来。本题若用其他方法添线,一般不易成功,读者不妨一试。

例2 在$\triangle ABC$中,$AB = AC$,$\angle A = 80°$。设O为形内一点,$\angle OBC = 10°$,$\angle OCB = 20°$(图3)。求$\angle OAC$的大小。

思考方法 本题不大容易入手,如果用三角法解答,可利用正弦定理,把原题转化为求解三角方程,如解法一。注意到$\angle OCA = 30°$,作点O关于直线AC的对称点P,则$\angle OCA$迁移到$\angle CAP$的位置;且由对称性可知,$\triangle OCP$为等边三角形,$\triangle BOP \cong \triangle BOC$,从而可推得A、B、C、P四点共圆,把$\angle CAP$与$\angle CBP$联系起来,如解法二。

解法一 依题设,有$\angle OBA = 40°$,$\angle OCA = 30°$. 设$\angle OAC = \alpha$,则$\angle OAB = 80°$

$-\alpha$. 在△OCA、△OAB、△OBC 中,依正弦定理,有

$$\frac{OA}{OC}=\frac{\sin30°}{\sin\alpha},\frac{OA}{OB}=\frac{\sin40°}{\sin(80°-\alpha)},\frac{OC}{OB}=\frac{\sin10°}{\sin20°}.$$

比较以上各式,得$\frac{\sin30°}{\sin\alpha}=\frac{\sin20°\sin40°}{\sin10°\sin(80°-\alpha)}$,即$\frac{1}{2\sin\alpha}=\frac{2\sin40°\cos10°}{\sin(80°-\alpha)}$.

去分母,整理后得 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin80°}{4\sin40°\cos10°+\cos80°}=\frac{\sin80°}{2(\sin50°+\sin30°)+\cos80°}$

$$=\frac{\sin80°}{2\sin50°+1+\cos80°}=\frac{2\sin40°\cos40°}{2\cos40°+2\cos^{2}40°}=\frac{\sin40°}{1+\cos40°}=\mathrm{tg}20°$$

$0°<\alpha<80°$,, $\alpha=20°$。

解法二 由题设可知 $\angle OCA=30°$,$\angle BOC=150°$,作点 O 关于直线 AC 的对称点 P,连结 PA、PB、PC(图 3),依点的对称性,OC = PC, 且 $\angle OCP=2\angle OCA=60°$. 因此 △OCP 为等边三角形,有 OP = OC,$\angle COP=60°$.

, $\angle BOP=360°-\angle BOC-\angle COP=360°-150°-60°=150°=\angle BOC$.

由是 $\triangle BOP\cong\triangle BOC$., $\angle CBP=2\angle OBC=20°$,$\angle BPC=\frac{1}{2}(180°-\angle CBP)$

$=80°=\angle BAC$.

这就表明,A、B、C、P 四点共圆,所以 $\angle OAC=\angle CAP=\angle CBP=20°$.

解法一容易想到,但求解三角形方程计算量大,且需一定的技巧,弄得不好会在中途受到挫折 解法二则较巧妙,无需进行复杂计算即可得解,关键在于从命题的特点出发,灵活运用对称变换,沟通条件和问题的联系。

例 3 设 A、B 是定直线 l 同侧的两定点,在 l 上求一点 P,使 AP + BP 为最短。

思考方法 设点 P 为所求的点,则 AP + BP 为最短。作点 A 关于 l 的对称点 A',则 A'P = AP。这样,A'P + BP 为最短。由于 A'和 B 都是定点,且在所有连结两点的线中,线段为最短。因此,A'、P、B 三点共线,即点 P 应为定直线 A'B 与 l 的交点。

作法 作点 A 关于 l 的对称点 A',连结 A'B 交 l 于 P,则点 P 即为所求的点。

证明 在 l 上任取异于 P 的一点 Q,连结 AQ、A'Q、BQ(图 4),依作法,有 AQ = A'Q。在△A'BQ 中,即得 AQ + BQ = A'Q + BQ > A'B = A'P + BP = AP + BP。因此,点 P 是使 AP + BP 取最小值的点。

讨论 本题恒有一解。

例 3 通过对称变换顺利地确定了点 P 的位置。本题若用代数法求解,计算过程要复杂得多,需要利用微商的知识。

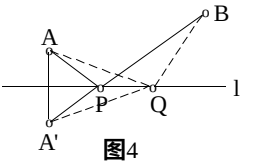


图4

从上面三个例子可以看出,对称变换的观点和方法,不仅可用以解答证明题(例1),也可用来解计算题(例2)和作图题(图3)。如果联系圆锥曲线的光学性质,还可将对称变换用于解答解析几何题。

例4 设PT、PT'是以F、F'为焦点的椭圆的两切线,T、T'为切点。求证:PF平分∠TFT',PF'平分∠TF'T'。

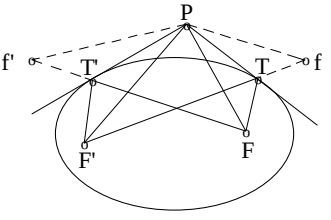


图5

思考方法 本题若用解析法推证,需要先建立一些辅助命题,证明过程十分复杂(留给读者思考)。注意到椭圆的光学性质,分别作F、F'关于切线PT、PT'的对称点f、f',则易证F'、T、f三点共线,F、T'、f'三点共线。这样,原题可转化为证明△PF'f≌△Pf'F。

证明 作F关于切线PT的对称点f,连结Tf,设椭圆长轴的长为2a,依椭圆定义,有 TF'+TF=2a。依点的对称点,并注意到椭圆的光学性质,有TF=Tf,∠2=∠1=∠3.
因此,F'、T、f三点共线,有 F'f=F'T+Tf=TF'+TF=2a.
又作F'关于切线PT'的对称点f',同理可证F、T'、f'三点共线,且f'F=2a.
连结Pf、Pf',在△PF'f和△Pf'F中,有F'f=f'F,Pf=PF,PF'=Pf'.
, △PF'f≌△Pf'F。
注意到点的对称性,即得 ∠TFP=∠TfP=∠PFT',
∠TF'P=∠T'f'P=∠PF'T.

2. 平移变换

平移变换可以看作对称轴互相平行的两次对称变换的积(图6)。对于需要集中图形中某些分散元素以考察其关系的命题,用平移变换常常能收到良好的效果。施行平移变换时,要注意平移的元素、平移的方向和平移的距离。

例5 设P是平行四边形ABCD内部的一点,∠PAB=∠PCB,

求证:∠PBA=∠PDA.

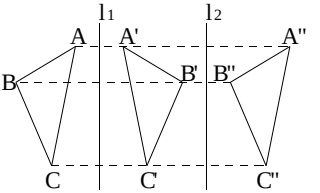


图6

思考方法 题中的四个角位置分散,一时难以发现它们的关系。为此不妨把△ABP平移到△DCP'的位置,使四个角集中在适当的图形里,以便作进一步考察。

证明 .依题设AD ∥ BD,故可将△ABP沿AD方向平移至△DCP'的位置(图7)。虽然四边形APP'D和PBCP'均为平行四边形,有 ∠P'PC=∠PCB=∠PAB

$=\angle P'DC$. 由是,P、C、P'、D 四点共圆,即得 $\angle PBA=\angle P'CD=\angle P'PD=\angle PDA$.

例 6 设 P、Q 各是梯形 ABCD 两底 AD、BC 上的内分点,$\frac{AP}{PD}=\frac{BQ}{QC}=\frac{1}{2}$,且直线 PQ 与 AB、CD 成等角。求证:$AB=\frac{1}{2}DC$。

思考方法 注意到 $AD/\!/BC$,可将线段 AB、DC 分别平移至 PM、PN。这样,条件和结论中的有关元素便集中在△PMN 中,易于发现它们之间的关系。

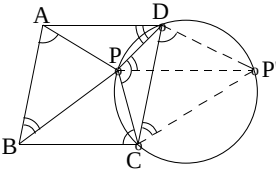


图7

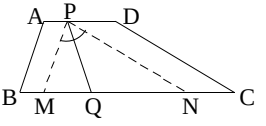


图8

证明 过 P 作 $PM/\!/AB$,交 BC 于 M;作 $PN/\!/DC$,交 BC 于 N,则 $\angle MPQ=\angle NPQ$. 又因 $AD/\!/BC$,则 $PM=AB$,$BM=AP$;$PN=DC$,$NC=PD$.

$$,\quad \frac{MQ}{QN}=\frac{BQ-BM}{QC-NC}=\frac{BQ-AP}{QC-PD}=\frac{BQ-AP}{2BQ-2AP}=\frac{1}{2}.$$

在△PMN 中,依三角形内角平分线性质,有 $\frac{PM}{PN}=\frac{MQ}{QN}=\frac{1}{2}$,即 $AB=\frac{1}{2}DC$.

从上面两个例子可以看出,对于夹在两平行线之间的图形,可以优先考虑用平移变换迁移元素的位置。

例 7 设 A、B 是定直线 l 同侧的两定点,试在 l 上求两点 P、Q,使 PQ 为定长 a,且 $AP=BQ$.

思考方法 设图已成。当平移 AP 至 CQ 时,APQC 即形成一个平行四边形,因而

$AC\perp PQ=a$,$CQ=AP=BQ$. 由此便知 C 为定点,Q 为 BC 的中垂线与定直线 l 的交点。从而 Q 与 P 引均可得以确定。

作法 过 A 作 $l_1/\!/l$,在 l_1 上取 $AC=a$;又作 BC 的中垂线,交 l 于 Q;在 l 上取 $QP=a$,使 A、P 在 CQ 的同侧,则 P、Q 为所求的两点。

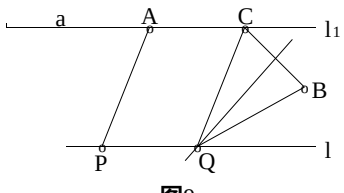


图9

证明 依作法,$PQ\perp AC=a$,所以 APQC 为平行四边形,注意到点 Q 在 BC 中垂线上,有 $AP=CQ=BQ$. 因此,P、Q 为所求之点。

讨论 在 l_1 上与 A 距离为 a 的点有两个(设为 C、C'),所以本题在通常情形下有两解;但若 BC 或 BC' 中有一线与 l 垂直,

则原题只有一解,又若 C 或 C' 合于 B,则本题之解为不定。

例 7 表明,平移变换也是解答作图题的一种重要思路。对于涉及中线的三角形作图题,涉及腰或对角线的梯形作图题,一般都可用平移变换来探求作法。

3. 旋转变换

旋转变换可以看作对称轴相交的两次对称变换的积(图 10)。对于图形具有等边特征的命题,一般都可考虑用旋转变换迁移元素的位置。施行旋转变换时要注意确定旋转中心,旋转角的大小和旋转的方向。

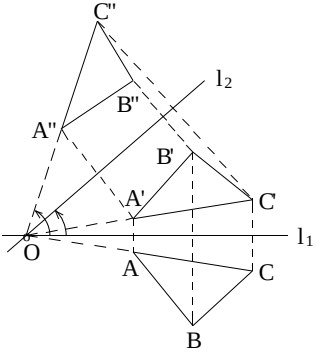


图10

例 8 设 E、F 各是正方形 ABCD 的边 BC、CD 上的一点,∠EAF = 45°,自 A 引 EF 的垂线 AG,垂足为 G。求证:AG = AB。

思考方法 本题的难处,在于 AG 与 AB 间关系一时不易沟通。由于 ∠EAF = 45°,有 ∠BAE + ∠DAF = 45°。这样,以 A 为中心将 △ADF 顺时针旋转 90°,原题就可归结为证明 △AEF ≌ △AEH(图 11)。

证明 以 A 为中心将△ADF 顺时针旋转 90°，因为 AD = AB，∠D = ∠ABC = 90°，所以旋转后点 D 合于点 B，点 F 落在 CB 延长线上的点 H 处。在△AEF 和△AEH 中，有 AE = AE，AF = AH，∠EAF = 45° = ∠BAE + ∠DAF = ∠BAE + ∠HAB = ∠EAH。

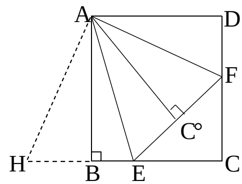


图11

， △AEF≌△AEH。

依全等三角形的对应高相等，即得 AG = AB。

例 9 设△ABC 是正三角形，P 是任意一点，求证：PB + PC ≥ PA。

思考方法 PA、PB、PC 不在同一个三角形中，难以直接比较大小。如果以 B 为中心将△BPC 逆时针旋转 60°，就可把 PB、PC 迁移到 DB、DA 的位置。由△BPD 是顶角为 60°等腰三角形，即得 PD = DB = PB。由是，PA、PB、PC 就集中于△PAD 中，原题就不难证出。

证明 以 B 为中心将△BPC 逆时针旋转 60°，因为△ABC 为正三角形，所以旋转后点 C 合于点 A，点 P 落在点 D 处（图 12）。当点 P 位于△ABC 的外接圆$\overset{\frown}{BC}$上时，∠BPA = 60°，则点 D 落在 PA 上；当点 P 不在$\overset{\frown}{BC}$上时，∠BPA ≠ 60°，则点 P 不在 PA 上。

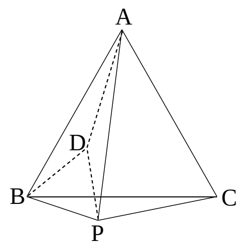


图12

连结 DP，则∠PBD = 60°（旋转角）。所以△BPD 为等边三角形，有 PD = DB = PB。因此，当点 P 位于$\overset{\frown}{BC}$上时，有 PB + PC = PD + DA = PA；

当点 P 不在$\overset{\frown}{BC}$上时，有 PB + PC = PD + DA > PA；

综合以上两种情形，原题即得所证。

例 10 在 Rt△ABC 中，斜边 AB 的长为 2，一动点至三顶点距离之和的极小值为$\sqrt{7}$。求两锐角的大小。

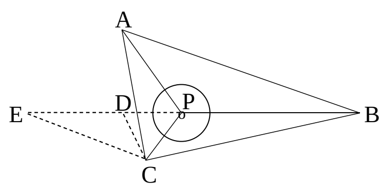


图13

思考方法 解答本题的关键有二：一是确定使距离和取极小值的动点的位置；二是使 PA、PB、PC 三线段合为一条。由于△ABC 的各个内角均小于 120°，由费马（Fermat）定理可知，当动点合于△ABC 的正等角中心（又称费马点）时，它至三顶点的距离之和为极小。由是，要使 PA、PB、PC 合为一线，只要以 C 为中心将△CPA 逆时针旋转 60°就可以了。

解 依费马定理，当动点合于 Rt△ABC 的正等角中心 P 时，PA + PB + PC 为

极小,这时$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$,$PA+PB+PC=\sqrt{7}$. (1)

以 C 为中心将△CPA 逆时针旋转 60°,得△CDE。连结 PD,则△CPD 为等边三角形。因此,由(1)式可知,E、D、P、B 四点共线,有

$EB=ED+DP+PB=PA+PB+PC=\sqrt{7}$。

设 $AC=EC=x$,则 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{4-x^2}$。

在△CBE 中,依余弦定理,有 $EB^2=EC^2+BC^2-2EC\cdot BC\cos ECB$。

即 $(\sqrt{7})^2=x^2+(\sqrt{4-x^2})^2-2x\sqrt{4-x^2}\cos(90°+60°)$。 (2)

解方程(2),取正根得 $x_1=1$,或 $x_2=\sqrt{3}$。

若 $x_1=1$,则 $AC=1$, 有 $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$,, $A=60°$,$B=30°$。

若 $x_2=\sqrt{3}$,则 $AC=\sqrt{3}$, 有 $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,, $A=30°$,$B=60°$。因此,两个锐角中一个为 30°,另一个为 60°。

上面,我们从定性的角度讨论了对称、平移、旋转三种初等变换在解题中的应用。对于某些复杂的问题,常常可以把这几种变换恰当地结合起来运用。如果从定量角度来考察平移变换和旋转变换,则可用于解答解析几何题,化简曲线的方程。这方面的内容,在中学教材中已作详细讨论,这里不再赘述。

4. 压缩变换

压缩变换由 $x'=kx$,$y'=ly$($k\neq0$,$l\neq0$)给出。

在这一变换下,横坐标和纵坐标总是按照固定的比伸长或缩短。压缩变换是从定量的角度研究图形的性质,多用于解答有关椭圆的问题。

例 11 试求 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接三角形面积的最大值。

思考方法 由于椭圆可看作是由它的辅助圆经过压缩变换得来的,所以可利用辅助圆内接三角形面积的最大值来推求椭圆内接三角形面积的最大值。

证明 对椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 作压缩变换 $x'=x$,$y'=\frac{a}{b}y$. (1)

则椭圆方程变换为 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$. (2)

方程(2)就是椭圆的辅助圆。设椭圆内接三角形 ABC 三顶点的坐标为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,经过压缩变换(1)得辅助圆的内接三角形 A'B'C',其顶点的坐标为 $A'(x_1,\frac{a}{b}y_1)$,$B'(x_2,\frac{a}{b}y_2)$,$C'(x_3,\frac{a}{b}y_3)$. 依三角形面积公

式,有

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & \frac{a}{b}y_1 & 1 \\ x_2 & \frac{a}{b}y_2 & 1 \\ x_3 & \frac{a}{b}y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot S_{\triangle ABC}\text{。}\quad ,\quad S_{\triangle ABC}=\frac{b}{a}S_{\triangle A'B'C'}\text{。}\qquad (3)$$

由(3)式可知,要求椭圆内接三角形面积的最大值,只要求圆内接三角形面积的最大值。因为半径为 a 圆内接三角形以正三角形的面积为最大,其最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$,所以椭圆内接三角形面积的最大值为 $S_{\triangle ABC}=\frac{b}{a}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$。

利用例 11 的思想方法,我们还可以推知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内接四边形面积的最大值为 2ab ,椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积为 πab。

在本文结束的时候,我们顺便指出,初等变换并不限于上述各种,还有相似变换、位似变换、反演变换等等。文中所及的各种变换都是仿射变换的特例,它们都可作定量的考察,有兴趣的读者可进一步阅读有关仿射几何学的参考书籍,平面几何中的不少难题,在仿射几何学中都能得到简便巧妙的解法。

□数学解题中的“等价变换”方法

所谓等价变换,是把问题 A 变更为与之等价的新问题 B。即问题 A 的结果与问题 B 的结果完全一致,问题 A 与 B 是可以互相推导的。等价变换则是一种常用的十分重要的数学思想方法,湖北荆门市教育局教研室甘家炎老师通过举例分析了它在解题中的地位和作用:

1. 同解原理

在解方程(组)、不等式的过程中,必须进行合理的推算,化繁为简,才能得到最后结果。同解原理则是合理推算的理论根据,只要每一步推算都是同解变换,最后结果一定是问题的解,是无须验证的。但

是,在解某类方程(组)、不等式时,我们只要是在变量的限定范围内求解,所得结果无疑仍然是问题的解,因为这样的推算是等价的。

例 1 解方程组 $\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3, & ①\\ y^2+2xy-8y+1=0。 & ②\end{cases}$

解:因为②中,$y\neq0$,两边同除以 y,得

$$y+2x-8+\frac{1}{y}=0,\left(x+\frac{1}{y}\right)+(x+y-3)=5,$$

令 $\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=u,\sqrt{x+y-3}=v$,

$$\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3\\ y^2+2xy-8y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ u^2+v^2=5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\mathrm{i})\begin{cases}u+v=3\\u-v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=4\\x+y-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1\\x=4-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm1\\x=4\mp1.\end{cases}\\ (\mathrm{ii})\begin{cases}u+v=3\\u-v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=1\\x+y-3=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-6y-1=0\\x=7-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\pm\sqrt{10}\\x=4\mp\sqrt{10}.\end{cases}\end{cases}$$

故原方程有四组解:

$\begin{cases}x_1=3\\y_1=1\end{cases}$; $\begin{cases}x_2=5\\y_2=-1\end{cases}$;

$\begin{cases}x_3=4-\sqrt{10}\\y_3=3+\sqrt{10}\end{cases}$; $\begin{cases}x_4=4+\sqrt{10}\\y_4=3-\sqrt{10}.\end{cases}$

此方程组无通法求解,通过观察比较,巧妙地将②式两边同除以 y,就得到与①式具有相同的形式,是借助换元法把复杂问题简单化——化为二元二次对称方程组求解。

例 2 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)<1$.

解:$\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)<1\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)[\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)-1]<1$

$$\Leftrightarrow\log^2_{\frac{1}{2}}(2^x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)<0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})<\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)<\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 是减函数,则 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}<2^x-1<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}+1<2^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}+1.$$

$y=10g_2x$ 是增函数，

，$10g_2[2^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}+1]<x<10g_2[2^{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}+1]$。

本题是先用换元法将超越不等式化为一元二次不等式求解，再还原回去，根据指数、对数函数定义及性质求得原未知数的值。

2. 变换命题的结论

一般地说，综合题的解法是不甚明显的，需要联想，通过试验，才能解明解题思路。而等价变换命题的结论，可化繁为简，化难为易，从而启发我们寻找解题思路。

例3　试证，没有整数 a，b，c 满足 $a^2+b^2-8c=6$.

分析：已知条件抽象，不便于使用，通过变换命题的结论，由 $a^2+b^2-8c=6$ 变形为 $a^2+b^2=8c+6$，问题就转化为，证明没有两个整数的平方和被 8 除余 6。根据数的整数性质，问题即可得证。

证明：　每个整数都具有下列形式之一：$4n,4n+1,4n+2,4n+3$，它们的平方分别是：$16n^2,16n^2+8n+1,16n^2+16n+4,16n^2+24n+9$。它们被 8 除的余数是 0，1，4。而这三个余数的任意两数（可以相同）的和都不等于 6。

，$a^2+b^2\neq 8c+6$，即没有整数 a，b，c 满足 $a^2+b^2-8c=6$ 成立。

例4　设 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，求证，$ctg^2A+ctg^2B+ctg^2C\geqslant 1$。

分析：我们知道，在 $\triangle ABC$ 中有 $ctgA\cdot ctgB+ctgB\cdot ctgC+ctgC\cdot ctgA=1$，因此，可将命题结论改为：$ctg^2A+ctg^2B+ctg^2C\geqslant ctgA\cdot ctgB+ctgB\cdot ctgC+ctgC\cdot ctgA$。根据重要不等式的性质，问题是容易证明的。

证明：　$ctg^2A+ctg^2B\geqslant 2ctgA\cdot ctgB$，

$ctg^2B+ctg^2C\geqslant 2ctgB\cdot ctgC$，$ctg^2C+ctg^2A\geqslant 2ctgC\cdot ctgA$。

，$ctg^2A+ctg^2B+ctg^2C\geqslant ctgA\cdot ctgB+ctgB\cdot ctgC+ctgC\cdot ctgA$。

而　$ctgA\cdot ctgB+ctgB\cdot ctgC+ctgC\cdot ctgA=1$，

，$ctg^2A+ctg^2B+ctg^2C\geqslant 1$。

3. 变换等价命题

凡有一定难度的题目，不是假设条件不明显，就是条件与结论相距太远，有的甚至难以理解题意。在这种情况下，将原命题变换为与之等价的命题，可帮助我们寻找解题思路，探索一条由假设条件通向所求结论的逻辑“通道”。

例5　设 a、b、c 互不相等，试证，不论 x 为何实数，

$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$ 恒成立。

分析：若按通常证明恒等式的方法，推算是比较繁的。我们知道，方程与函数

是有密切关系的,这里要证明的等式是关于 x 的二次方程,于是可设辅助(二次)函数 $P(x)$,其图象与 x 轴最多只有两个交点,若 $P(x_1)=P(x_2)=P(x_3)=0$,则有 $P(x)\equiv 0$。利用此结论,问题即可得证。

证明:令 $P(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1$,

$$P(a)=P(b)=P(c)=0,$$

而 $P(x)$ 是二次多项式,它的根不多于 2 个,故只能有 $P(x)\equiv 0$.

即 $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$ 对任何实数 x 恒成立。

例 6 试证:$\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k}=C_{m+n}^r$.

分析 要证明这个组合恒等式,直接计算是繁难的,联想二项式定理,$(1+x)^m\cdot(1+x)^n$ 乘积展开式中 x^r 的系数恰巧对应等式左端,而等式右端对应 $(1+x)^{m+n}$ 展开式中 x^r 的系数,又 $(1+x)^m\cdot(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$,于是只要比较等式两边系数,问题即可得证。

证明: $(1+x)^m\cdot(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$,依二项式定理展开,

左边 $=(C_m^0+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^mx^m)(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)$,

其中 x^r 项的系数为:$C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+C_m^2C_n^{r-2}+\cdots+C_m^rC_n^0$.

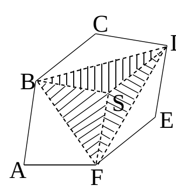
右边 $=C_{m+n}^0+C_{n+m}^1x+C_{m+n}^2x^2+\cdots+C_{m+n}^rx^r+\cdots+C_{m+n}^{m+n}x^{m+n}$.

比较二项式的展开式中的两边系数,取 x^r 的系数得:$\sum_{k=0}^{r}C_m^kC_n^{k-r}=C_{m+n}^r$。即等式得证。

□数学解题中的反射变换方法

所谓反射,就是把一个图形 F 变为它关于直线 l 的轴对称图形 F',这样的变换称为关于直线 l 的反射。

图形经反射变换后有许多性质和数量(比如平行性、角度、面积等)是不变的,因此在解题中巧妙地应用反射变换及其不变量,将使一些令人束手无策的问题变得一目了然。



例 1 在等边凸六边形 ABCDEF 中,顶角 $\angle A,\angle C,\angle E$ 的和等于顶角 $\angle B,\angle D,\angle F$ 的和。证明:相对顶点 $\angle A$ 和 $\angle D$,$\angle B$ 和 $\angle E$,$\angle C$ 和 $\angle F$ 相等。

证明 因为 $\triangle ABF$,$\triangle CDB$,$\triangle EFD$ 是腰长都相等的等腰三角形,且

$$\angle A+\angle C+\angle E$$
$$=\frac{1}{2}(6-2)\times 180^\circ=360^\circ$$

所以,将顶点 A、C、E 放在一起可组成一个新的三角形。显然,这个新三角形与△BDF 全等(三边对应相等),组成情况如图。

SF = FE = ED = DS = a,

, 四边形 SDEF 为菱形。

同理,四边形 SFAB,SBCD 也是菱形。

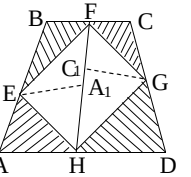
于是有 EF // SD // BC

和 ED // SF // AB。

, ∠B = ∠E(角的两边对应平行)

同理,∠A = ∠D,∠C = ∠F.

例 2 已知:点 E 和 G 分别是凸四边形 ABCD 的边 AB、CD 的中点,矩形 EFGH 满足顶点 F、H 分别在边 BC、AD 上。求证:四边形 ABCD 的面积是矩形 EFGH 的面积的 2 倍。



分析 只要能证明沿矩形的边把四边形 ABCD 在矩形外面的部分(阴影部分)反射到矩形内部后,能恰填满矩形,既没有空隙又不相重迭就可以了。

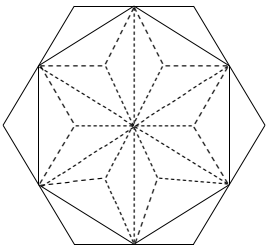
证明 因为 E 是 AB 的中点,所以 EA = EB,又∠FEH = 90°,所以

$$\angle AEH+\angle BEF=\angle FEH.$$

于是将四边形 ABCD 位于矩形外部的部分反射到其内部后,EB 与 EA 重合于 EA,同理,GC 与 GD 重合于 GC_1。

又∠AHE + ∠DHG = ∠EHG,所以 HA_1 与 HC_1 在一条直线上;同理 FC_1 与 FA_1 也在一条直线上。

若 A_1 与 C_1 重合于一点,于是反射后恰好填满。



若 A_1 与 C_1 不重合于一点,则 A_1,C_1 都在直线 FH 上,从而也恰好填满。

所以命题得证。

例 3 已知一个正六边形内接于一个圆,另一个正六边形外切此圆。不直接计算两个六边形的面积,试求这两个六边形面积之比是多少?

解 如图,将内接正六边形的顶点恰好放在外切正六边形的各边中点上。连接中心与内接正六边形的各顶点得六个等边三角形,再将外切正六边形位于内接正六边形外面的部分反射到其内部,易知各顶点的对称点是六个等边三角形的中心。于是我们得到构成外切正六边形的 24 个全等三角形,其中 18 个构成内接正六边形,所以内接正六边

形与外切正六边形的面积之比为

18: 24 = 3: 4。

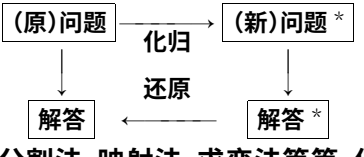
□化归思想与数学教学

数学教学,实质上是数学思维活动的教学。就是学生在教师指导下,通过教学活动,学习数学家思维活动的成果和思维方法,培养和提高思维能力。也就是说,数学教学,不仅要把数学知识传授给学生,使学生学到这些成果,更重要的是要使学生懂得那些结论、定理、法则、公式是如何得来的,前人是如何探求、思索,找出规律的,从而发展学生的智力、培养学生的创造能力,逐步树立辩证唯物主义的世界观。而数学家们在思维方法上独特的地方,就是特别善于使用‘化归’的方法来解决问题。因此,在数学教学中,教师最重要,最本质的活动——分析数学思维过程,应充分体现数学的思想方法,尤其是‘化归’的思想方法,注意化归意识的培养。江苏省新苏师范严建兵老师介绍的做法是:

1. 化归思想的实质

所谓‘化归’,就是说,在解决问题时,将原问题进行变形,使之转化,直至最终归结为我们熟悉的,或易于解决,或已经解决的(新)问题*。

利用化归法解决问题的过程可简单地归结为下面的图式:



化归的方法很多,有分割法、映射法、求变法等等,但有一个原则是:和原来的问题相比,化归后所得出的(新)问题*应是已经解决或是较为容易、较为简单的。即化归的方向应是:由未知到已知,由难到易,由繁到简,由一般到特殊。化归思想的实质就在于不应以静止的眼光,而应以变化、运动、发展,以及事物间相互联系和制约的观点去看待问题,即应善于对所要解决的问题进行变形。这实际上也是在数学教学中辩证唯物主义观点的生动体现。

数学教材中运用化归思想的例子很多,例如将平面(立体)图形通

过分割，组合成已知的简单图形，以便利用纸计算其面积（体积）等等；利用代数的工具，将几何问题转化为代数问题；将复合应用题化归为若干个简单应用题等等；总之材料是丰富的，教学中应注意这一思想方法的运用。当然，在实际应用化归法解决问题时，往往要经过多次化归。常用的‘分析——综合法’就是其中的实例之一。而且，正确的化归方向和方法亦往往需经过多次实践才能得到。

2. 数学教学如何体现化归思想

数学教学体现化归思想应注意以下几点：

（1）体现联系观点，培养化归意识，提高学生思维的灵活性。 辩证唯物主义观点告诉我们，事物是运动的，这就要求我们不应以静止的观点观察问题和处理问题，而应具有化归意识。数学内部的各部分之间更是存在着密切的联系，其中的函数，对应，同构等概念突出地反映了联系的观点。数学教材中的知识内容，后面的材料往往是建立在前面材料的基础上，由旧知识形成新知识有一个过程，具有一定的层次性，而且各个层次是有联系的，即新旧知识是有联系的，其中有一个个的接合点。因此，教师在讲授知识的同时，要有意识地逐步揭示出新旧知识的层次性，讲清新旧知识的接合点，让学生在思考问题时能很好地将新旧知识有机地联系起来，这样在化归的问题上就能容易确定方向，找到合适的化归途径。事实上化归意识的培养不仅有助于解决实际问题，而且有利于提高学生思维的灵活性。例如，在讲解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根 x_1、x_2 时，在得到韦达定理的过程中，曾给出两个形式相同的方程：$ax_1^2+bx_2+c=0$ 和 $ax_2^2+bx_2+c=0$ 并指出：如果将 a、b 作为未知数，这两个方程可看作一个二元一次方程组，由此说明二元一次方程组和一元二次方程之间是有联系的。然后在让学生解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2}x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}y+1=0\\[2ex]\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{2}x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}y+1=0\end{cases}$$

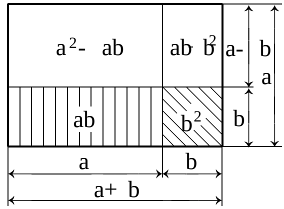
时，有些掌握了化归思想的学生，利用了上述联系的观点，这样求解：如果原方程组有解，那么 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ 和 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ 可看作是一元二次方程 $xu^2+yu+1=0$ 的两个根，依韦达定理得

$$\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{y}{x}\\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

由此得 $\begin{cases}x=-2\\ y=2\end{cases}$

这种解题方法超越了常规的处理,充分表明学生思维的灵活性。

(2)掌握化归的基本方式,让学生主动地进行认知活动。 化归的基本方式有两种:一种称外显的化归,即对问题进行变形,改组,使之同化纳入到学生原有的知识结构中去。如:要求四边形的内角和,只要作它的一条对角线,就把问题化归到学生已知的求三角形内角和了;要求立体几何中二面角的度数可将问题化归到平面几何中的角(平面角)来求,等等。另一种称内隐的化归,即遇到问题进行探索性的化归时还不能与以前的知识直接建立联系,就调整自己头脑中的知识结构来顺应它。如:当方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内没有解时,要建立新概念 $i^2=-1$,这时,就应调整学生原有知识结构,将原有实数视为复数的一部分,即当虚部为零时的特殊情形,在立体几何中,垂直于同一直线的两条直线平行或相交或既不平行也不相交(即异面),这和平面几何中的情况是不同的,因此,必须明确垂直于同一直线的两条直线平行,只是当这三条直线同在一个平面中才成立。当然,化归的两种方法式不是孤立的。化归思想的形成需要教师在教学中有意识地培养。而教师的主导作用,应当依据学生的认识活动的特点,与他们的认识过程同步;同时,知识只有成为学生思维的结果时,才算是学生自己的知识。学生要成为学习的主人,就是要能够自觉地、主动地、有效地学习。只有这样,才能引起教与学的"共振",取得理想的教学效果。例如,讲公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 不要照本宣科,而应把公式的建立充分体现化归的思想:把问题化归为多项式乘法进行形如两数和乘这两数差的积。还可以借助图形来理解,图中无阴影部分为:



$(a+b)(a-b)$

$=(a^2-ab)+(ab-b^2)$

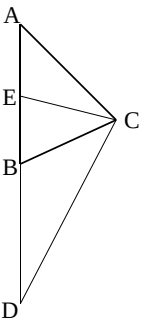
$=a^2-b^2$

这样,可避免学生在不理解的情况下死套公式,使学生能主动地进行认知活动,真正让学生成为学习的主体。

3. 注意教学的‘多维性’

数学的认识表现为一种‘螺旋式’上升的过程,在数学教学中,教师应注意教学的‘多维性’,即对于新知识应力求从不同的方面去揭示其本质,让学生从不同角度去理解它,对可化归的问题,着重分析过程,从而指引其化归的方向,寻找不同的化归途径,使学生从具体的实例中体会化归的思想方法。举一个平面几何中的题目:

已知:△ABC 中 AB = AC,延长 AB 至 D,使 DB = AB,E 为 AB 之中点,求证:$CE = \frac{1}{2}CD$ 教师在讲解此题时,应指出:在三角形中证两条线段相等,一般可以证此两条线段所在。



创造性思维是在一般思维的基础上发展起来的,主要是后天长期培养和训练的结果。因此,通过诱发对立联想培养学生的创造性思维能力,适于采取‘两条腿走路’的方针:一方面,在平时教学中鼓励和启发学生从相互对立的两个方面、从正反两个方向去思考问题,一面不行,考虑其‘对面’;一个方向不通,另选一个方向。既使一个方向通了,也不妨另觅新径,以寻同归的殊途。另一方面,教师根据素材特点和学生实际,在课堂教学中提出研究课题,师生共做‘专题文章’。实践证明,这种课堂内外相结合,不失时机地启发学生对立联想的做法,对培养学生思维的创造性是行之有效的。

□数学解题中的化归思想(一)

1. 化归思想概述

化归思想就是根据主体已有的知识经验,通过观察、联想、类比等手段,把问题进行变换、转化直至化为已经解决或容易解决的问题的思想。

例如,初中《代数》第二册中,在研究‘多项式的乘法’时,有这样一名话:‘先把(m+n)看成一个单项式,运用单项式与多项式相乘的法则,得(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)…’这样将多项式的乘法化归为单项式乘以多项式的问题,得出了多项式的乘法法则。

化归思想在数学中的应用非常广泛。化无限为有限,化不规则为规则,化高维为低维,化连续为离散,化曲为直,化形为数,化整为零,化难为易等等无不体现着“化归”思想的闪光。

初中数学课本虽然没有明确提出化归思想,但化归思想的存在,及其贯穿于整个初中数学课本的事实,已为众人所认识。如具有相反意义的量一提出,就用化归观点对正负数的表示方法作如下规定:“正的量用小学学过的数前面放上‘+’号来表示,也可以把‘+’号省略不写,仍用以前所学过的数表示;负的量就用小学学过的数的前面放上‘-’号来表示。”以后,又用化归思想把加减法统一成加法;复杂的一元一次方程化归为 $ax = b$ 的最简形式……可见,化归思想从初一课本第一页开始,就已经进入了认识问题、思考问题和解决问题的角色。关于化归思想和方法的教学的问题,值得引起探究和重视。

2. 化归思想的教学功能

化归思想在初中数学教学活动中有着特殊的地位和作用。安庆市杨桥职中任大益老师总结其教学功能主要表现在以下几个方面:

(1)梳理教材,明确重点,有助于避免教学活动中的盲目性。 数学教材是按一定的逻辑顺序编排的,各部分知识是相互关联着的。用化归思想梳理教材,有助于弄清其中每项具体内容在整个教材体系中的地位和作用,分清主次,明确重点。例如,平面几何中,就图形之间的内在联系而言,三角形是最基本的直线型,其它平面图形多半可以化归为三角形来研究。因此“三角形”是整个平面几何教学的重点。同样道理,根式的教学,以算术根为重点;三角函数,以锐角三角函数为重点。

(2)以旧引新,平易通用,有利于知识的形成与迁移。 化归思想能建立新旧知识的联系,使学生容易从已有知识推导出新的内容。例如,在乘法公式的教学中,根据乘方的意义和多项式相乘法则推导出 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 后,引导学生用“$-b$”替换公式中的 b,就得到两数差的完全平方公式。

人们在对一道新的数学命题的思考探索中,总是习惯于与已掌握的知识经验建立联系,即以既有生活经验为背景,凭借已有知识经验解决新问题,这本身就体现了化归思想。因此化归思想符合人的认识规

律和思维习惯,学生感到亲切,容易“吸收”、“同化”,形成观念。同时,新知识建立在旧知识之上,有利于纳入并丰富原有知识结构,并且顺利完成知识的正向迁移过程。

(3)拓开思路,活化知识,有助于提高分析问题和解决问题的能力。

例 设 A、B 为锐角三角形的两个角。求证:$tgA \cdot tgB > 1$。

分析 本题是道三角命题。从三角命题本身考虑:由于 $A + B > 90°$,所以 $A > 90° - B$,因此 $tgA > tg(90° - B) = \frac{1}{tgB}$,故有 $tgA \cdot tgB > 1$。但如结合平面几何知识,将它化为几何问题,则会有更多的启发和收获。

① 如图 1,作 $CD \perp AB$ 于 D,$CE \perp AC$ 并交 AB 的延长线于 E,则:$tgA \cdot tgB = \frac{h}{AD} \cdot \frac{h}{BD} = \frac{AD \cdot DE}{AD \cdot BD} > 1$。

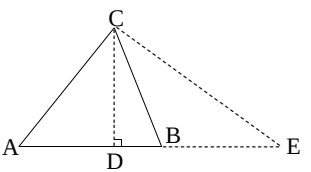


图1

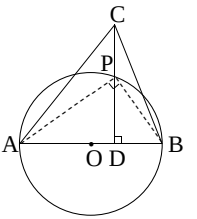


图2

② 如图 2,以 AB 为直径作⊙O,作 $CD \perp AB$ 于 D 交⊙O 于 P,连接 AP、BP。则:$tgA \cdot tgB = \frac{CD}{AD} \cdot \frac{CD}{BD} > \frac{PD^2}{AD \cdot BD} = 1$。

可见,运用化归思想能沟通不同的知识,使它们达到和谐统一。同时,灵活地变更问题,广阔地联系知识,不仅为正确地解题打下基础,更重要的是增强了思维的弹性,拓宽了分析问题和解决问题的思路。

(4)化难为易,化繁为简,有利于优化思维品质。 数学活动中最基本的活动形式是“解题”。有些数学题难以入手,但我们如果联想某些常用的数学方法,或从题目结构上把它化为某些熟悉的模式,往往能很快探明解题途径,收到事半功倍的效果。

例如:解方程 $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$。

分析:这是一道回归方程,显然 $x = 0$ 不是原方程的根,故可用 x^2 除方程两边。

整理得：

$6(x^2+\frac{1}{x^2})+5(x+\frac{1}{x})-38=0$。

令 $y=x+\frac{1}{x}$，则 $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$，

于是上式变为：

$6(y^2-2)+5y-38=0$

，$y_1=\frac{5}{2}$，$y_2=-\frac{10}{3}$

还原得原方程的根为：

$x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=-3$，$x_4=-\frac{1}{3}$。

这道方程求解中，关键是通过观察、变换，合理地使用换元法，将一元四次方程化为一元二次方程，简洁明快地解决了问题。可见，化归思想不仅能化难为易，化繁为简，更重要的是有助于提高思维的灵活性和敏捷性。因此，化归意识的形成是具有良好思维品质的重要表现。

3. 化归思想的教学历程

为了使化归思想作为重要的基础知识纳入学生的认识结构，使其成为学生认识问题、思考问题和解决问题的得力工具，我们应当在整个初中数学教学过程中，根据学生的知识基础，对化归思想的形成与应用作出如下设计和安排。

(1) 渗透阶段。 这一阶段可从初一上学期开始。它要求教师在理清其思想脉络的基础上，结合教学内容，适时渗透。比如课本上有关“当作”、“看成”等内容的表达就是化归思想的体现。同时，应当看到每个定理、公式都是数学化归的范例，即总是把它成立的结论化归到前面已学过的定理、公式或者明显事实成立的基础之上。

(2) 意识阶段。 这一阶段可从初一下学期开始。

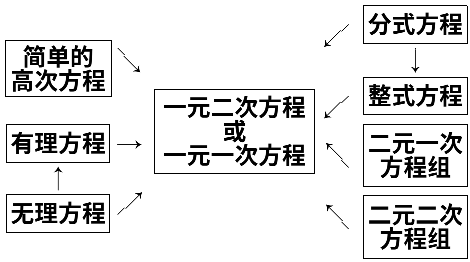
一方面，在认知活动中，提供知识发生的背景材料，展示知识的发生过程，点明其‘芽’点。另一方面，在数学解题活动中，有意识地引导学生将问题进行变换、转化，使之变为已经解决的问题或较易解决的问题，并展示其化归脉络。如三元一次方程组$\xrightarrow{\text{化为}}$二元一次方程组$\xrightarrow{\text{化为}}$一元一次方程。这样逐步使化归意识进入思考问题的思维轨道。

此外,还可以通过编拟化归题组等形式,将学生引入化归意境,激发其化归欲望。

(3)形成阶段。　这一阶段一般从初二下学期开始。其重点可以确定为:

通过复习小结,引导学生运用化归思想把学过的知识进行梳理。

例如,我们可以引导学生将解各种方程的化归思路作如下梳理:



这样,不仅突出了本章知识重点,而且明确了解各类方程的化归目标,同时使化归意识同步进入认知结构。

当然,在适当时期,可开设专题课或利用数学课外活动,系统介绍化归思想,揭示其内涵、外延、功能和作用。这对学生化归意识的形成将起到重要作用。

(4)应用阶段。　这一阶段从初三上学期开始。

逐渐放手让学生应用化归思想分析和解决数学问题。如在学习或接受新知识时,对学生追根求源,搞清知识的来龙去脉;在复习时,让学生对知识进行梳理,形成知识系统;在解题时,让学生学会分析,执果索因,不断变换、转化问题。使化归思想从无意应用过渡到有意应用阶段。

以上四个阶段的划分是相对的,其间是彼此交错、循环往复、螺旋上升的。因此,化归思想的教学是一项复杂的系统工程。我们应从长计议,着眼大局,精心设计教学活动过程,使化归思想随着教学的进程,逐步为学生掌握、应用和深化。

□数学解题中的化归思想(二)

作为数学方法论的研究,容易想到的一个问题是:和一般的(经验)科学家(例如物理学家)相比,数学家们在其研究方法上是否有其独特的地方?对此,一个可能的回答是:数学家们特别善于使用化归的方法来解决问题。这也就是说,在解决问题的过程中,数学家们往往不是对问题进行直接的攻击,而是对此进行变形、转化,直至最终把它化归为某个(些)已经解决的问题。

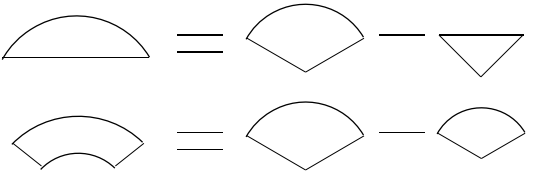
对于数学家的上述特性,匈牙利著名数学家 P. 罗莎曾通过以下的比喻十分生动地予以刻划。她写道:"假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴,现在的任务是要烧水,你应当怎样去做?"显然,正确的回答是:"在水壶中放上水,点燃煤气,再把水壶放到煤气灶上。"接着,罗莎又提出了这样的问题:"假设所有的条件都和原来的一样,而只有水壶中已经有了足够的水,这时你又应当怎样去做?"对于这一问题人们往往会回答说:"点燃煤气,再把水壶放到煤气灶上。"但是,罗莎指出,这并不是最好的回答。因为,"只有物理学家才会这样做,而数学家则会倒去壶中的水,并且声称我已经把后一问题化归成先前的问题了。"

罗莎的比喻当然带有夸张的成分,但是它的确表明了数学家思维方法的一个特点,那就是他们特别善于使用化归的方法来解决问题。南京大学郑毓信老师从以下几方面作了详细分析:

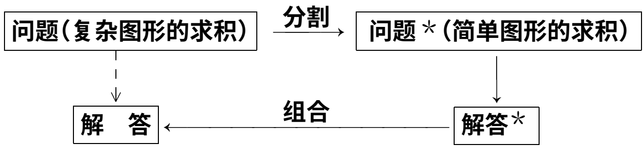
1. 利用化归方法解决数学问题的例子

化归方法在数学中有着十分重要的应用。例如,在中学数学的教材中就可以找到很多的典型的例子:

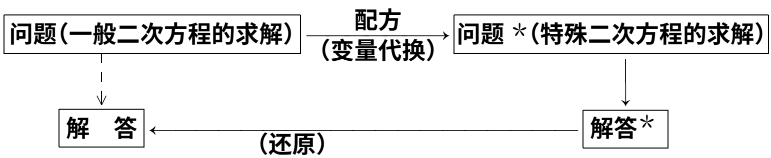
例一 在掌握了扇形和三角形的面积计算以后,我们就可以用分割的方法求出较复杂的图形的面积。如:



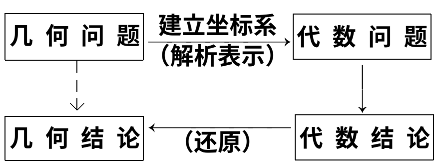
显然，这里所说的分割事实上就是化归的过程（因为，正是通过分割，较复杂图形的求积问题转化成了较简单图形的求积问题），因此，这一解决问题的过程就可归结为：



例二　由于特殊类型的二次方程（$x^2=k$）的求解问题是容易解决的，因此，只要能把一般的二次方程（$ax^2+bx+c=0$）转化成为这种特殊形式，它的求解问题也就可以解决了。显然，上述的转化可以通过配方来实现，而最终所得出的事实上就是二次方程的求解公式。这一解决问题的过程可表示成：



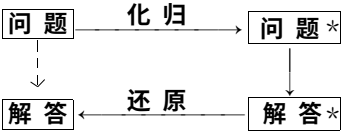
例三　解析几何的建立也可以看成用化归方法解决问题的典型例子。在初等数学中，数和形的研究是彼此独立地进行的 然而，由于笛卡儿通过建立坐标系在数（组）与点之间建立了对应关系，几何问题就被转化成了代数问题，从而，也就可以用代数方法来对此进行研究了。



在中学数学及高等数学中还可以找到很多这样的例子。由此可见，化归方法在数学中的确具有十分重要的作用。

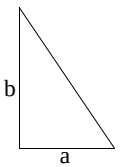
2. 关于化归方法的分析

（1）由上面的例子可以看出，用化归方法解决问题的过程可归结为：

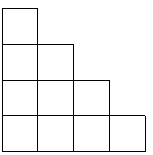


这里,作为化归方法应用的一个必要条件是:和原来的问题相比,化归后所得出的问题:必须或者是已经解决了的、或者是较为简单的(显然,否则化归就失去了意义)。

但是,应当指出,对于所说的"难"、"易"必须结合实际问题作具体的分析,而不能只根据"形式"作出简单的判断。例如,从形式上看,加倍去计算一个未知量显然比直接去计算这个未知量要更为复杂和繁琐(正象一个笑话中所说,只有蠢人才会用计算羊脚的方法去弄清自己倒底有多少头羊)。但是,如果能想到"加倍"这一方法的话,以下的问题就不难解决了,因为,在这样的变形以后,所得出的(新)问题就是比较简单、或已经解决了的。

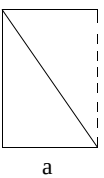


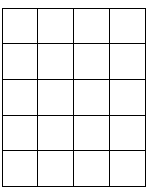
S= ?



N= ?

1+ 2+ 3+ …+ 98+ 99= ?





$S=\frac{1}{2}ab$ $N=\frac{1}{2}(4\times 5)=20$

1+ 2+ …+ 98+ 99+ 99+ 98+ …+ 2+ 1
= 100+ 100+ …+ 100,

$S=\frac{1}{2}(99\times 100)=4950$。

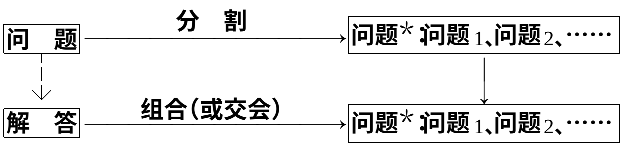
(2)就化归方法的实际应用而言,关键的问题显然在于如何实现由原来的问题向新的、较为简单问题的化归。

首先,就变化的成分来说,我们既可以对整个问题进行变形(如上面的例三),也可以对问题中的未知成分进行变形(如上面的例二),还可以对问题中的已知条件进行变形。例如,美国著名数学家 G. 波利亚

在《数学的发现》中所给出的关于“鸡兔同笼”问题的一个解法就可以看成是对已知条件进行变形的典型例子。波利亚所给出的问题是这样的：“一个农民有鸡兔若干，它们共有 50 个头和 140 个脚，问鸡兔各有多少？”波利亚写道，我们可以假想出现了这样一种奇特的现象（应当指出，这种假想正是“思想实验法”在数学中应用的实例）：所有的鸡都抬起了一只脚，同时，所有的兔子也仅用后腿站立在地下。显然，这时求出鸡兔数目的问题就是不难解决的了，因为，现在鸡的头数与脚的数目是相等的，而如果有一个兔子，脚的总数就要比头的总数大一，因此，现在的脚的总数（70）与头数的差（20）就是兔子的数目。这样，我们就通过已知条件的变形解决了原来的问题。

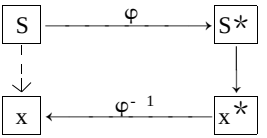
其次，就实现化归的方法而言，也有很多种不同的方法。例如，分割就是一种常用的方法。具体地说，我们既可以对问题中的未知成分进行分割（如上面的例一），也可以对未知成分所应满足的条件进行分割。事实上，几何作图中常用的轨迹交会法就是后者的实例。这里，原来的问题是按指定的条件去确定一个对象（如点），但我们现在不再把这种条件看成是一个整体，而是把它分割成若干个部分。这样，只要我们分别求出满足各个部分条件的对象集合，就可进而用交会的方法（即求取各个集合的公共部分）求得满足原来条件的对象。

即：



和分割的方法相比，映射的方法在现代的数学研究中有着更为重要的应用。例如，解析几何事实上就是通过（在数组与平面点集之间）建立映射而实现化归的例子。一般地说，所谓映射就是在两类数学对象或两个数学集合的元素之间建立“对应关系”；而如果所建立的是一一对应的关系，那我们就同时得到了互逆的两个映射（其中之一称为另一个的逆映射或反演）作为对于映射方法的总结，我国著名数学家徐利治教授在他的新著《数学方法论选讲》中提出了如下的“关系——映射——反演原则”（简记为 RMI 原则）：

“给定一个含有目标原象 x 的关系结构系统 S。如果能找到一个可定映映射 φ，将 S 映入或映满 S^*，则可从 S^* 通过一定的数学方法把目标映象 $x^* = \varphi(x)$ 确定出来，从而通过反演即逆映射 φ^{-1} 便可把 $x = \varphi^{-1}(x^*)$ 确定出来。这个过程的框图如下所示：



全过程包括的步骤为：关系——映射——定映——反演——得解。”

另外，通过对数计算、射影几何、微积分学、组合数学中大量实例的分析，徐利治教授指出“数学上的 RMI 原则对数学工作者很是有用。小而言之，可利用该原则解决个别的数学问题。大而言之，甚至可以利用该方法原则作出数学上的重要贡献。一般说来，如果谁能对一些十分重要的结构 S，巧妙地引进非常有用且具有能行性反演 φ^{-1} 的可定映映射 φ，就能作出较重要的贡献。”

最后，除去上述的方法以外，“参数变异法”也是一种可以实现化归的常见方法。对此我们可以通过三次方程求解公式的得出为例来进行说明。

由于二次方程的求解公式是已经得出了的，因此，求解三次方程的关键就在于如何把三次方程转化成二次方程来进行研究。在数学的发展史上，为了实现上述的化归，人类曾花费了大量的时间和精力，而只是到了十六世纪，这一问题才由意大利数学家塔塔里亚等得到了解决。

塔塔里亚在解决上述问题时所采用的就是“参数变异法”。具体地说，为了得出三次方程 $x^3 + px + q = 0$（显然，只须令 $y = x - \frac{b}{3a}$，一般形式的三次方程 $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ 就可转化为这种特殊的形式）的求解公式，塔塔里亚引进了参数 k，并令 $x = z + k$，

由此，原方程就变形为：

$$(z+k)^3 + p(z+k) + q = 0,$$

即 $$z^3 + 3kx^2 + 3k^2z + k^2 + pz + kp + q = 0,$$

也即 $z^3+(3kz+p)(z+k)+(q+k^2)=0$。

因此,如果取 $3kz+p=0$ (即令 $k=-\frac{p}{3z}$),上述方程就可简化为:

$$z^3+q-(\frac{p}{3})^3(\frac{1}{z})^3=0。$$

这样,只须再令 $y=z^3$,并用 y 同乘方程的两边,原来的问题就可通过求解以下的二次方程

$$y^2+qy-(\frac{p}{3})^3=0$$

而得到解决。

对上述的解题过程进行分析容易看出:这里的关键在于引进参(变)数 k:由于 k 的"不确定性",整个问题的表现形式(就这里的问题而言,就是解的结构)就处于可变的状态之中,这样,通过 k 的适当选择,我们就可最终达到简化问题(即化归)的目的——一般地说,这也就是"参数变异法"的主要特征。

如前所述,实现化归的方法是多种多样、甚至是不可穷尽的。但是,由上面的分析可以看出,各种化归方法的共同特点在于:我们应以可变的眼光、而不应以静止的眼光来看待问题,即应善于对所要解决的问题进行变形。这就是化归方法的核心。

(3)对于化归法在数学中的应用必须作广义的理解: 就应用的范围而言,化归法不仅可以用于解决具体的问题,也可以用于整个理论的分析(例如,非欧几何相对相容性的证明就是这种应用的实例);另外,就应用的性质而言,化归法不仅可以用于问题的求解,也可以用于证明原来问题的"不可能性"。

就后者而言,"几何三大问题"的不可能性的证明就是一个典型的例子。对此徐利治教授在《数学方法论》选讲中曾作了如下的分析。他写道:"为了确定尺规作图可能性准则,必须应用解析几何的形数(映射)方法才能获得成功。"具体地说,在坐标平面上,使用直尺作出的直线,使用圆规作出的圆周,它们的方程式无非是如下的形式:

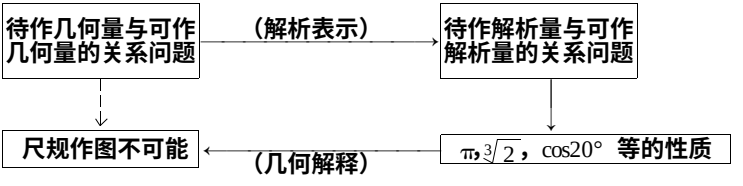
$$ax+by+c=0$$
$$(x-d)^2+(y-e)^2=r^2$$

其中 a、b、c、d、e、r 等都是由有理数出发经过有限次加、减、乘、除、开平

方等五种运算所得出的数量。由于尺规作图无非是利用直线与直线相交、直线与圆周相交、圆与圆相交等截取交点的几种基本方式来进行的;而按解析几何的观点来看,这些交点的坐标是由相应的两个一次联立方程、一次与二次联立方程、两个二次联立方程的代数解法来确定的。因此,所能得出的数量都是由有理数经过有限多次加、减、乘、除、开平方运算表示出的数量。尺规作图所能作出的只是这类形式的数量,这便是尺规作图法的一条准则。

由于与几何三大问题相应的数量分别为超越数(π),或是三次代数数(如$\sqrt[3]{2}\cos 20°$),因此,依据上述的准则,它们都是尺规作图所不可能解决的问题。

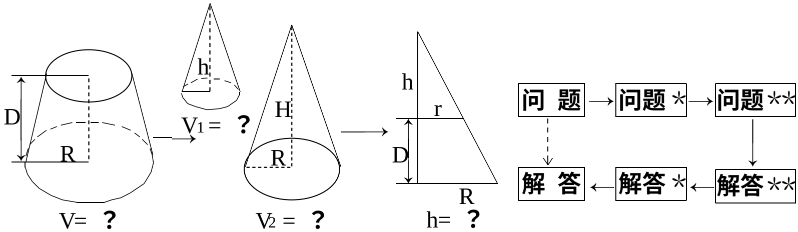
由于上述的推理过程也可归入以下的一般模式,因此,这也就是化归方法的一种应用。



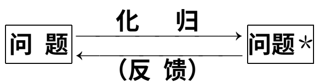
(4)最后,应当指出,上面所给出的关于化归方法的解题模式只是一种简化了的模式。 因此,在实际应用化归方法去解决问题时,我们就必须注意对此加以充实和发展。

首先,在实际应用中,我们所使用的就常常是多次的化归,而不只是一次的化归;而且,数学中经常使用的"分析——综合法"事实上也就可以看成是这种"多次化归法"的实例。

例如,下述的"分析"过程事实上就是一系列的"化归"过程,即是通过多次的变形而把问题逐步地转化成较简单的、已经解决了的问题。从而,整个的解题过程(即所谓的"分析——综合过程")事实上也就是较复杂(多环节)的化归方法的应用实例。



其次，化归方法的实际应用也不是一个简单的、"单向的"、完全确定的过程，而往往包含有多次的试验（失败）和大量的"反复"。因为，只有通过多次的试验（失败），我们才能确定正确的化归方向，并找到正确的化归方法；另外，化归的过程事实上也就是不断加深对原来问题的认识的过程，即包含有一定的"反馈"。



因此，总的来说，我们就不能以教条主义的态度来看待化归方法，而应实事求是，具体问题具体分析。

至此，我们从方法论的角度，对化归方法进行了分析。如前所述，化归方法在数学研究中有着重要的作用；但是，在肯定这种作用的同时，我们也应看到这一方法的局限性。具体地说，化归方法主要是一种解决问题（而不是发现问题）的方法。那么，数学中的问题是从何而来的呢？对此，我们将在《漫谈之二》*中予以讨论。

□化归思想形成的阶段性

在论及解题方法时，波利亚指出："解题就是把习题归纳为已经解过的问题。"象这样用化归方法解决问题的思想倾向，就称为化归思想。化归思想的形成和化归能力的提高，对于增强学生分析问题解决问题的能力，培养学生的数学思维能力起着重要的作用。

＊ 指《应当培养对于数学美的鉴赏能力——数学方法论漫谈之二》，本刊将在下期发表。

对初中学生来说,由于受到身心发展的水平、思维能力等多方面因素的影响,化归思想的形成是一个长期的缓慢过程。这就需要教者能用化归观念,对初中的整个教材进行再认识,在吃透教材、把握学生认知水平的基础上,制定出长期的合理的计划。江苏海安西场中学施琴分析介绍了在教学实践中对形成化归思想的阶段性的认识及一些具体做法:

1. 化归思想的渗透阶段

化归思想的渗透是以有理数的运算,一元一次方程的解法等内容为载体来实现的,现以解方程为例具体说明。

我们知道,解方程的过程就是不断地通过变形,把原方程化归为与之同解的最简方程的过程。因而化归思想应是解方程过程中思维活动的主导思想。可以说,解方程中科学的合理的思维活动总是在化归思想的指导下进行的。因此,解一元一次方程的教学一方面成为对学生渗透化归思想的好教材;另一方面,只有突出了化归思想,才有可能让学生真正地展开积极的思维活动。

解方程的过程可用如下框图来表示:

原方程 → 简单性的方程 →…→ 最简单方程

例如,解方程 $5x+2=7x-8$。

分析 (1)确定目标:$5x+2=7x-8 \rightarrow x=$?

(2)发现差异:右端多"$7x$"项,左端多"2"项

(3)消除差异:两边同时减去"$7x+2$",消除差异后得 $-2x=-10$。

将上面的过程再进行一次:

(1)确定目标:$-2x=-10 \rightarrow x=$?

(2)发现差异:x 项的系数为 -2。

(3)消除差异:两边同除以"-2",得 $x=5$。

在上面的解题过程中,化归这个词并未出现,但却具体地体现在解题的每一个步骤中。尽管在这里是如此地简单,但是一旦学生掌握了这些思想,就可以用来解决更为复杂的问题。因此,我们有理由认为,在解一元一次方程的教学中,让学生掌握"化归模式"这一隐形的教学任务,这比掌握解一元一次方程的方法更为重要。

2. 化归思想的突破阶段

二元一次方程组这一章的教学,应是化归思想的正面突破阶段。

所谓正面突破,就是正面地、直截了当地向学生介绍化归思想、化归方法,介绍化归方法的要点与关键。可让学生回忆以前解一元一次方程的具体例子,展开课堂讨论。进一步明确解一元一次方程的每一步骤的实质——把一个复杂的方程化归为一个较简单的方程,从而使学生产生应用化归方法解决问题的强烈愿望。

通过二元一次方程组的教学,让学生理解二元一次方程组解法的指导思想是将它化归为解一元一次方程,而代入消元、加减消元,则是实现化归的手段。

例如,解方程组:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 & ① \\ 4x-9y=8。 & ② \end{cases}$$

解题思路是:

(1)在方程①(或②)中,暂时把某一个未知数(比如 y)看成是已知数,解出另一个未知数:

$$x=\frac{-1+3y}{2} \qquad ③$$

(2)看这个解中哪些是方程②的解——将③代入②得到 y 的值。

师生共同分析明确以上解题思路后,总结出解二元一次方程组的实质就是将它化归为一元一次方程的问题。

在学生已掌握了代入消元法之后,让学生继续深入思考如下问题:用代入法解二元一次方程组的关键在于消元,从而将其化归为一元一次方程,而代入则是化归手段。能不能用其它的手段达到消元的目的呢?进而引出解二元一次方程组的另一种方法——加减消元法。

一般地说,化归思想通过解一元一次方程的渗透和解二元一次方程组的突破之后,学生的化归思想已基本形成,大都有比较正确地总结出解三元一次方程组的一般思路。但由于这一观念刚刚建立,认识上尚有许多模糊不清之处,应用上往往不很自觉,因而,在这一阶段教师的帮助指导是十分重要的。

3. 化归思想的应用阶段

初一学生在经历了化归思想的教学渗透和正面突破等阶段后,进入初二也就进入了检验性应用阶段和探索性应用阶段。初二数学的教学材料十分丰富,这就为化归思想的应用提供了广阔的前景。在教学

人们的青睐,早期发展和培养学生的化归思想已逐渐成为教师的共识。我们期待着同行们的指教,以使我们对此有更深的认识。

□化归思想方法训练八法

化归思想方法是处理数学问题的指导思想和一种基本策略。化归思想就是把未知问题化归为已知问题,把复杂问题化归为简单问题,把非常规问题化归为常规问题,从而使很多问题获得解决的思想。学生有了化归思想就能从更深层次上去揭示知识的内部联系,提高分析问题和解决问题的能力。山西省寿阳一中王文昌老师现举例说明了如何结合解题进行化归思想方法的训练:

1. 化繁为简

有些数学问题结构繁杂,使用常规解法的过程繁琐,对这类问题,可以从其结构入手,将结构进行转化,另辟解题途径。

例 1　求 $f(x)=3\sin(x+20°)+\sin(x+80°)$ 的最大值。

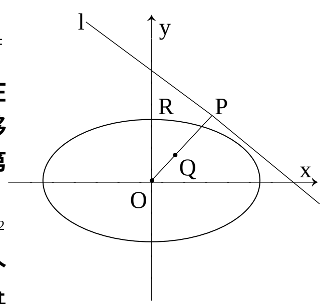
该题若运用公式展开相当繁琐,难以得出结果;若进行如下转化,则非常巧妙。

$$f(x)=3\sin(x+20°)+\sin[(x+20°)+60°]=\sqrt{13}\sin(x+20°+\varphi),$$

这里 φ 为辐角,则 $f(x)$ 的最大值即可得到。

2. 化高维为低维

例 2　已知椭圆 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,直线 $l:\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$,P 是 l 上一定,射线 OP 交椭圆于点 R,又点 Q 在 OP 上,且满足 $|OQ|\cdot|OP|=OR^2$,当点 P 在 l 上移动时,求点 Q 的轨迹方程。(1995 年高考(理)第 26 题)



本题难点在于轨迹条件中,$|OQ|\cdot|OP|=OR^2$ 是三条线段成等比数列的形式。实际上,化解这个难点的好方法来自解析几何的一个基本思想和基本方法——降维,化二维问题为一维问题。

设点 Q、R、P 的坐标分别为 (x,y)、(x_R,y_R)、(x_P,x_P),

则把关系 $|OQ|\cdot|OP|=OR^2$"投影"到 x 轴上得 $x\cdot x_P=x_R^2$。

又设 OP 的方程为 $y = kx$,则

$$\begin{cases} y_P = kx_P, \\ 2x_P + 3y_P = 24 \end{cases} \Rightarrow x_p = \frac{24}{2+3k};$$

$$\begin{cases} y_R = kx_R, \\ 2x_R^2 + 3y_R^2 = 48 \end{cases} \Rightarrow x_R{}^2 = \frac{48}{2+3k^2};$$

$$x \cdot x_P = x_R{}^2 \Rightarrow x = \frac{4+6k}{2+3k^2}, \quad ①$$

又 $y = kx$, ②

由①②消去 k,得标准方程

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}} = 1。$$

3. 化抽象为具体

很多数学问题是各种信息的高度浓缩和抽象。如果我们沿着‘抽象化为具体’的路子走下去,往往像入迷宫;如果我们改变方向,可使解决问题的途径简捷。

例 3 四个不同的小球,放入编号为 1,2,3,4 的四个盒子中,则恰有一个空盒的放法共有几种。(1995 年高考(理)第 20 题)

①按一般途径考虑,小球不同,盒子有编号,还恰有一个空盒,头绪很多,不好考虑;②把问题看作四个不同的小球分三堆,再把它看成 3 个元素占四个位置排列,就比较具体。分堆 1,1,2,有 C_4^2 种,排列数为 P_4^3,则有 $C_4^2 \cdot P_4^3 = 144$ 种。

4. 化非规范性问题为规范性问题

规范性问题有一定解题程式,这方面的问题学生比较熟悉。我们主要致力于非规范性问题向规范性问题转化。

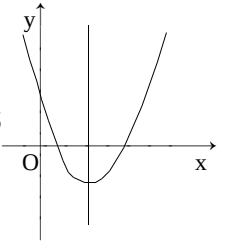
例 4 已知 $\sin\alpha + \sin\beta = a$,$\cos\alpha + \cos\beta = b(b \neq 0)$。求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值。

已知‘$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$的正切值,求 α 的六种三角函数值’是一个规范性问题。上述问题就是一个非规范问题,只要把已知二式分别化积再比,求得 $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$的值,就把它化归为规范性问题。这类问题还有:把非等差、等比数列化归为等差、等比数列问题,把复数问题化归为实数问题;把空间角、距离化归为平面内角、距离的问题;把非标准方程表示的曲线化归为标准方程表示的曲线,等等。

5. 化数为形

数与形之间存在着密切的联系,很多代数问题若能转化成图形,则思路和方法便可以从图形中直观地显示出来。

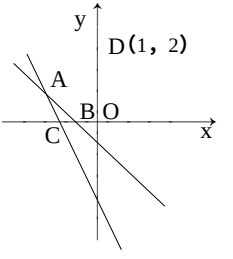
例5　实系数方程 $x^2+ax+2b=0$ 的一根在(0,1)之间,另一根在(1,2)之间,求$\frac{b-2}{a-1}$的范围。



若直接利用求根公式或根与系数的关系,则步履维艰;若把数的关系转化为图象,则条件便转化到图象上。令 $f(x)=x^2+ax+2b$,

可得$\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)<0,\\f(2)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}b>0,\\1+a+2b<0,\\2+a+b>0。\end{cases}$

它是(a,b)所要满足的条件,用图象表示点(a,b)的区域为△ABC的内部。可理解$\frac{b-2}{a-1}$的几何意义为过点(a,b)与(1,2)的直线的斜率,显然有$\frac{1}{4}=k_{AD}<\frac{b-2}{a-1}<k_{BD}=1$。



6. 化实际问题为数学问题

近年来,高考对应用题不断深化,我们要引导学生联系日常生活和熟悉生产实际。将实际问题转化为数学问题,实际上就是建立数学模型的问题。

例6　在测量某物理量过程中,因仪器和观察的误差,使得 n 次测量得到 a_1,a_2,…,a_n 共 n 个数据。我们规定所测量物理量的‘最佳近似值”a 是这样一个量:与其他近似值比较,a 与各数据的差的平方和最小。依次规定,从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 推出 a。(1994 年高考第 20 题)

问题就是求当

$$(a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots+(a-a_n)^2$$

取最小值时的 a 值,转化为 a 的二次函数

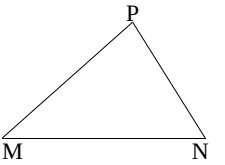
$$f(a)=na^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)a+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

当 $a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$时,f(a)取最小值。

7. 化综合为单一

综合题涉及较多方面的数学知识,解题时需用多种方法。有时综合考虑比较困难。而化成单一问题就容易解决。

例 7 在面积为 1 的△PMN 中，$\mathrm{tg}\angle PMN=\frac{1}{2}$，$\mathrm{tg}\angle MNP=2$。建立适当坐标系，求以 M、N 为焦点且过点 P 的椭圆方程。(1993 年高考第 27 题)



这是一个解析几何综合题，要是开始就建立坐标系，就较难入手。根据题中所给条件，△PMN 是确定的，所以我们可分两步解决：先解△PMN 求出三边的长；再以 MN 为 x 轴，MN 的中点为原点建立坐标系求椭圆方程。

8. 化一般为特殊

一般与特殊是事物的两个方面，是辩证统一的，由一般结论可推知特殊事物的本质属性，而且通过特殊性质又可考证一般原理。

例 8 已知 $x\in R$，$a\neq 0$，且 $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，问 $f(x)$ 是否为周期函数？若是，求出它的一个周期；若不是，说明理由。

取一个特殊函数作模型予以考察，易想到 $\mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$，而 $y=\mathrm{tg}x$ 是以 $\pi=4\times\frac{\pi}{4}$ 为周期的函数，由此猜想

$$f(x+4\times\frac{\alpha}{4})=f(x)。$$

证明：$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，

∴ $f(x+2a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=-\frac{1}{f(x)}$，

∴ $f(x+4a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$，

∴ $f(x)$ 是以 $4a$ 为周期的函数。

化归思想方法在培养人、提高人的素质方面起着比数学知识本身更重要的作用，限于篇幅，本文不再赘述。

□数学解题中的化归方法与原则

化归方法指的是：在解决问题的过程中，不是对问题进行直接的攻击，而是对其进行变形、转化，直至最终把它化归为某个(些)已经解决的问题，或者较为简单的问题。化归方法在数学中具有十分重要的作用。

利用化归方法解题，必须根据数学问题特征，遵循化归的基本原则，明确化归结果。甘肃省兰州市三中魏海仪老师总结化归的基本原则是：

1. 熟悉化原则

通过观察问题的整体特征及其内在联系，联想学过的知识，类比已掌握的方法，将所求问题转化为熟知的问题，从而找到解决问题的思路。

例1　已知 $ad\neq bc$，求证 $ac+bd<\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$。

分析1　观察式子的整体特征，由其结构‘$(\quad)^2<(\quad)(\quad)$’联想到判别式，于是可构造二次函数。

$f(x)=(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+(c^2+d^2)$

由 $ad\neq bc$ 知 $f(x)=(ax-c)^2+(bx-d)^2>0$，且 $a^2+b^2>0$。得

$\Delta=4(ac+bd)^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)<0$。

由此即可得所要证的不等式。

分析2　观察式子的局部特征，由不等式右端联想到复数的模，可构造复数。

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c-di$，a、b、c、$d\in R$。则

$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=|a+bi||c-di|$

$=|(ac+bd)-(ad-bc)i|$

$=\sqrt{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2}$

$>|ac+bd|\geqslant ac+bd$。

2. 简单化原则

抓住问题的本质及内在联系，通过对条件或结论进行转化、变形，直至把它转化或归结为某个或某些较简单的问题，从而使问题易于解决。

例2　计算 $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}$。

分析　这个式子直接计算无从下手，但是通过整体替换，可将其化归为简单的一元二次方程求解。

设 $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}$，则

$x^2=6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}$，

，$x^2=6+x$，即 $x^2-x-6=0$。

解得　$x_1=3$，$x_2=-2$（舍去）。

，$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}=3$。

例3 已知 PA、PB 是⊙O 的切线，$\angle APB=60°$，$AP=5\sqrt{3}$，C 为弦 AB 上的任一点，过 OC 作射线 OH，作 $PH\perp OH$ 于 H，求 $OC\cdot OH$ 的值。

分析 C 是弦 AB 上任一点，情况比较复杂，我们不妨根据简单化原则将问题简化。如图 1，取 AB 的中点 C'，对这个特殊情况进行研究。这时 H 与 P 重合，连结 OA，于是得到一个非常熟悉的基本图形：直角三角形斜边上的高线。由射影定理，可得 $OC'\cdot OP$ 等于半径的平方，而半径容易由已知求得，这样就探得了欲求的结论。当 C 在弦 AB 上的一般位置上时，我们只要证明 $OC\cdot OH=OC'\cdot OP$。由割线定理可知，只要证明 C、C'、P、H 四点共圆即可。因为 $\angle CC'P=\angle CHP=90°$，于是问题获证。

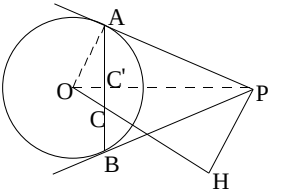


图1

3. **和谐化原则**

将问题的表现形式化归为更加符合数与形内部所固有的和谐统一的特点，从而突出该问题所涉及的数学对象之间的本质联系，以利于找到解决问题的思路。

例4 已知 $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$，求证 a、b、c 中至少有一个不等于 1。

分析 由于已知与欲证结论在表现形式上的差异，给证明带来一定的困难。为此，可将结论变形：a、b、c 中至少有一个等于 1 等价于 a - 1、b - 1、c - 1 中至少有一个为零，即

$$(a-1)(b-1)(c-1)=0。$$

至此，问题就不难解决了。由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ 得 $bc+ac+ab=abc$，

从而有 $(a-1)(b-1)(c-1)=0$。

例5 已知△ABC 三边 a、b、c 成等差数列，求证 $\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$。

分析 已知的是边的关系，求证的是角的关系，需边角和谐化。

由 a、b、c 成等差数列，知 $a+c=2b$。从而有 $\sin A+\sin C=2\sin B$；

求证的是半角关系，须使角和谐化。于是有 $2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$；

又因求证式中不含角 B，必须转化角 B 为角 A 与角 C，继续使角和谐化。所以有

$$\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2},$$

即 $\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$;

至此,只须函数和谐化,运算结构和谐化。故有

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

即 $3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$,从而得

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}。$$

问题得证。

□化归思想在数学解题中的运用(一)

1. 问题的提出:

我们先来看一个例题的解法:在△ABC中,求证:$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=2\sin A\sin B\sin C$

证明:左边 $=\frac{1}{2}(1-\cos2A)+\frac{1}{2}(1-\cos2B)-(1-\cos^2C)$

$=\cos^2C-\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B)$

$=\cos C^2-\cos(A+B)\cdot\cos(A-B)$

$=\cos^2C+\cos C\cdot\cos(A-B)$

$=\cos C[\cos C+\cos(A-B)]$

$=\cos C\cdot2\cos\frac{C+A-B}{2}\cos\frac{C-A+B}{2}$

$=2\cos C\cdot\cos\frac{180°-2B}{2}\cos\frac{180°-2A}{2}$

$=2\cos C\cos(90°-B)\cos(90°-A)$

$=2\sin A\sin B\cos C=$ 右边。

绝大多数同学按照证明三角恒等式的固有思路、习惯方法,作出如上繁难的证明。可是有的学生却抓住‘在△ABC中’的条件,利用正余弦定理、轻松地证明了。

左边 $=\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}-\frac{c^2}{4R^2}$

浅·编·(能力型)解题教学指导书系·数学卷

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4R^2}$$

$$\text{右边} = 2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

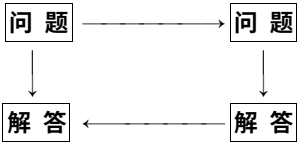
$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4R^2}$$

，等式成立。

以上两种解法我们看到：解法一采取“直解攻击”的战术，解题过程不免有些复杂；而解法二直接利用了现成的结论，因而大大缩短了解题的过程。

2. 化归思想：

象上面问题那样，在解决问题的过程中不是对问题直接攻击，而是对问题进行变形，转化直至把它化归为某个（些）已经解决的问题或容易解决的问题。这种处理问题的思想方法，我们称之为化归思想，利用化归思想解决问题的过程。我们归纳为如图所示的框图：



化归的实质是不断变更问题（将问题变形）匈牙利著名数学家 P. 罗莎曾用以下的比喻生动的说明了化归法的实质。她写道：“假若在你面前有煤气灶，水龙头、水壶和火柴。现在的任务是烧水，你应该怎样去做？”正确的回答是：“在水壶中放上水，点燃煤气灶，再把水壶放到煤气灶上”。接着罗莎又提出了第二个问题：假若所有的条件不变，只是水壶中已有了足够的水，这时你应该怎样去做？”对此，多数人的想法是：点燃煤气，再把壶放到煤气灶上。然而这并不是最好的回答，而我们要采取的方法是“把水倒掉”，这样就将后一问题化归成先前的问题。因此，建立化归思想的方法就是要想到“把水倒掉”，使我们要解决的问题化归为已经解决或容易解决的问题。

3. 实现化归的基本方法——分割法

因为化归的实质是不断的变更问题，因此实现化归一般是从变形的成分去考虑，即将问题的已知成分进行分割。这就是所说的分割法。

例一 如图（一）在三棱锥 P—ABC 中，已知 RA⊥BC，PA = BC = l，PA 与 BC 是

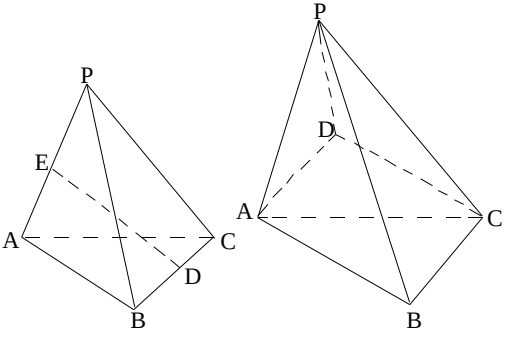
垂线 ED = h。

求证：三棱锥 P—ABC 的体积 $V=\frac{1}{6}l^2h$

(87 年高考题)。

分析 1： PA⊥BC，PA⊥ED。

，PA⊥面 EBC，将三棱锥分割成两个小棱锥，利用关系：$V_{P-ABC}=V_{P-EBC}+V_{A-EBC}$，不难证得本题。



图一　　图二

分析 2 如图二，将三棱锥 P—ABC 补成底面为平行四边形的四棱锥，由于 $V_{P-ABC}=V_{C-APD}$，而 BC∥AD，

，PA⊥AD 且 BC∥平开 PAD

，点 C 到 PAD 的距离即为 h，

从而 $V_{C-PAD}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAD}\cdot h$

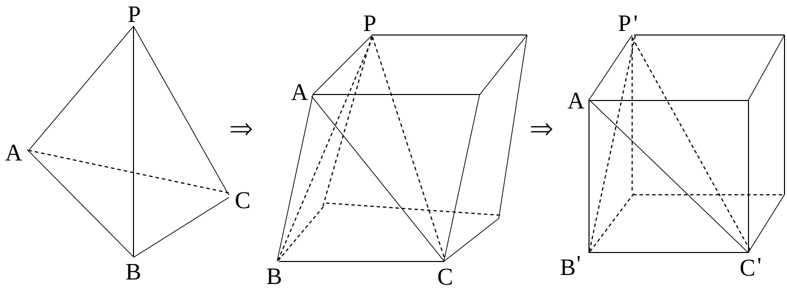
$=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}PA\cdot AD)h$

$=\frac{1}{6}l^2h$。

分析 3 如图三，把三棱锥补成平行六面体 PC，再由相距原理，把平行六面体等积变换为长方体 P'C'，从而

$V_{P-ABC}=V_{P'-A'B'C'}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\times P'A'\times A'B')\times B'C'$

$\frac{1}{3}(\frac{1}{2}PA\times h)\cdot BC=\frac{1}{6}l^2h$，



图三

例二 解方程 $\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2+4x+5}=6$

分析 按常规定势,应孤立根式,两边平方,整理后再孤立,再平方;从而化为有理式求解。这样一来,可能产生增根。更主要的是整理以后的有理方程将是四次方程,解四次方程是繁难的,中学教程中不予讨论。于是我们转换思考角度,分析特点后,我们这样考虑:是否可以把左边的两个根式看成两个两点间的距离,从而题设方程便变为两距离之和为一常数,据此再求 x 呢?也就是说,能否与椭圆进行联想,把解方程的问题化归为平面解析几何中有关椭圆的性质的问题呢?答案是肯定的

事实上,变形原方程得

$$\sqrt{(x-2)^2+1}+\sqrt{(x+2)^2+1}$$
$$=6$$

它表示点 (x,y) 到两定点 $(2,0)$ $(-2,0)$ 的距离之和为 $6(>4)$,纳入椭圆定式:即未知点 $(x,1)$ 的坐标满足椭圆方程 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(3^2-2^2)}=1$。

所以 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$,从而 $x=\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}$,检验后知 $x=\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 是原方程的解。

例三 已知 $25\cos A+5\sin B+\mathrm{tg}C$,$\sin^2B-4\cos A\,\mathrm{tg}C=0$

求证:$\mathrm{tg}C=25\cos A$

分析 当 $\cos A=0$ 时,命题显然成立。

当 $\cos A\neq0$ 时,由条件 $\sin^2B-4\cos A\,\mathrm{tg}C=0$

联想到一元二次方程的判别式,而另一条件式 $5^2\cos A+5\sin B+\mathrm{tg}C=0$,可视为具有此判别式:

$\sin^2B-4\cos A\,\mathrm{tg}C=0$ 的一元二次方程(把常数 5 视为未知数),于是化归关于 x 的一元二次方程。

解 可设 $x^2\cos A+x\sin B+\mathrm{tg}C=0$ (1)

$x=5$ 是方程(1)的根

又　方程(1)的判别式 $\Delta=\sin^2 B-4\cos A\,tgC=0$

，方程(1)有两个相等的实数根。

$x_1=x_2=5$。

由韦达定理知，$x_1x_2=\dfrac{tgC}{\cos A}=25$。

故 $tgC=25\cos A$

这里我们用了分割法，从而使复杂的问题简单化、抽象问题具体化。分割法是实现化归的一条基本方法。

当然，实现化归的方法有许多，这里仅仅列举了比较常用的分割法以期起到抛砖引玉的作用。

总之，在处理某些问题时，如果适时地利用化归方法，往往会收到别开生面，独辟蹊径之功效，并使问题的解决化繁为简，化难为易不落俗套。

□化归思想在数学解题中的运用(二)

化归思想是一种很重要的数学思想。它的实施目标是化未知为已知，化复杂为简单，化非常规为常规。等量代换是化归思想在几何中的一种普遍应用。下面几例可见其一斑。

例1　已知半圆的半径 OA=1，点 C、D 是这个半圆的三等分点。求弦 AC、AD、$\overset{\frown}{CD}$ 围成的面积 S。

析解　连接 OC、OD、CD，则显然△OCD 与△ACD 等积。用此等量代换立即将待求的阴影面积化为求扇形 OCD 面积。后者易求出为 $\pi/6$。

由以上析解我们还看到当 A 在直线 AB 上变动时，阴影面积恒为此值。有了这一说明可以简解如下例2。

例2　如图2，A 是半径为1的⊙O 外一点，OA=2，AB 是圆 O 的切线，B 是切点，且弦 BC∥OA。连结 AC，则阴影部分的面积等于多少？(答案：$\pi/6$)

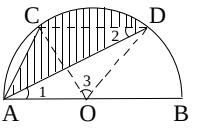


图1

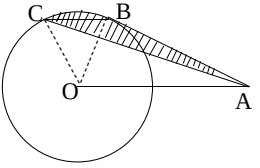


图2

例3 如图,已知 PBA 是⊙O 的割线,PC 是⊙O 的切线,C 为切点。过点 A 作 AD∥PC 交⊙O 于 D,连结 CD、BD、CA。求证:

(1) CD = CA。

(2) $CD^2 = PA \cdot BD$。

析解 (1) 由 ∠CAD = ∠PCD = ∠CDA,显然可得 CD = CA。

(2) 待证式即为 $\frac{CD}{PA} = \frac{BD}{CD}$,显然不能直接应用三角形相似证之。但应用等量代换 CD = CA,待证式化为 $\frac{CD}{PA} = \frac{BD}{CA}$,立见转机,可通过 △BCD∽△CPA 证之。

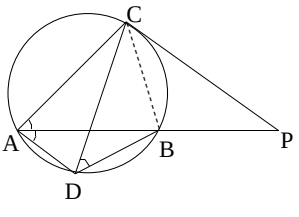


图3

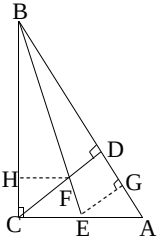


图4

例4 已知 △ABC 中,∠ACB = 90°,CD⊥AB,BE 平分 ∠B 交 CD 于 F。

求证:AE·FD = CF·EC。

析解 待证式即 $\frac{AE}{CF} = \frac{EC}{FD}$,此式尚不能直接应用三角形相似证明。作 EG⊥AB 于 G,FH⊥BC 于 H。则由角平分线性质,得 EG = EC,FH = FD。(等量代换)。待证式成为 $\frac{AE}{CF} = \frac{EG}{FH}$。这后一个比例式可通过证明 Rt△AEG∽Rt△CFH 而得出。

上述几例的证明方法不一定是最优方法,但重在解题中所渗透的思想方法,可丰富解题经验。而丰富的解题经验又可产生十分可靠的直觉。面对问题,能迅速找到解题的突破口,实现解题的思维起步,对

学生无疑是一种能力的提高。

□数学解题中的化归方法

福建省连城县一中伍永树、杭州大学数学系赵小云老师在中学数学范围内讨论和探索实施正确而有效的化归之途径和策略：

1. 化未知为已知

当人们面临一个未知的新问题时，总是通过联想，寻找转化为已知问题的途径。

例1　设 $y=ax^5+bx^3+x+5$，$x\in R$，当 $x=-3$ 时，$y=7$。试求当 $x=3$ 时，y 的值。

分析　显然，由已知条件我们无法确定字母 a、b 的值。注意到函数

$f(x)=y-5=ax^5+bx^3+x$

是奇函数，$f(-x)=-f(x)$。则可利用适当变换进行转化，使问题获解。

$f(-3)=7-5=2$，$f(3)=-f(-3)=-2$，

即　$y-5=a\cdot 3^5+b\cdot 3^3+3=-2$，$y=3$。

，当 $x=3$ 时，$y=3$。

例2　解方程：

$(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x$。

分析　将原方程转化为

$4\sin^2 3x\sin^2 x=5+\sin 3x$

由于　$4\sin^2 3x\sin^2 x\leqslant 4$，$4\leqslant 5+\sin 3x\leqslant 6$ 因此原方程两边都等于 4，从而可进一步转化为　$\sin 3x=-1$ 且 $|\sin x|=1$。

不难求得原方程的解为　$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$。

2. 化难为易

例3　已知 $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，求证 a、b、c 中至少有一个等于 1。

分析　由于欲证的结论没有用数学式子表示，这样就不容易直接证明。为此我们可先将结论用数学式子表示出来，a、b、c 中至少有一个等于 1，等价于 $a-1$，$b-1$，$c-1$ 中至少有一个为零，也就是

$(a-1)(b-1)(c-1)=0$。

到此，问题就不难解决了。

事实上由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ 可得 $bc+ac+ab=abc$，从而有 $(a-1)(b-1)(c-$

1)=0。

3. 化异为同

例4 设 $x\in[0,1]$,证明:

$\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$。

分析 这里出现的既有三角函数,又有反三角函数,因此我们应考虑两者之间的相互转化,化异为同。

解 设 $\arcsin x=\alpha$,则 $\sin=x$。由于 $x\in[0,1]$,故 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$,$\frac{\pi}{2}-x\in[\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}]$

$$\arcsin(\cos x)=\arcsin[\sin(\frac{\pi}{2}-x)]$$

$$=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\sin\alpha$$

$$\arcsin(\cos x)-\cos(\arcsin x)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\sin\alpha-\cos\alpha$$

$$=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$$

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\leqslant 1$$

$$\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\geqslant\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}>0。$$

$\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$。

4. 化多为少

例5 若 x_1、x_2、x_3、x_4 和 x_5 满足下列方程组:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6 & ①\\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=12 & ②\\ x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=24 & ③\\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=48 & ④\\ x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=96 & ⑤\end{cases}$$

试确定 $3x_4+2x_5$ 的值。

分析 将5个方程相加,可得

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=31 \quad ⑥$$

再将④、⑤分别与⑥作差,即可求得 $x_4=17$,$x_5=65$,从而 $3x_4+2x_5=181$。

5. 化特殊为一般,化一般为特殊

□化归方法在数学解题中的应用

解数学题的过程，从宏观上来说，就是将条件转化、归结为结论的过程。当要解决的问题难以下手或由条件难直接得出问题的结论，那么我们可以将原问题的条件或结论进行转化、变形，直至把它转化归结为某个或某些已经解决的问题，或容易解决的问题。在数学教学过程中，应用化归思想方法是提高学生分析问题和解决问题能力的有效途径。甘肃省培黎石油学校李明作了如下举例说明：

例1 已知 $a>0, b>0$，且 $a+b=1$

求证：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$。

此题用代数法解有一定的难度。这里，我们将其转化为三角问题来解。

证明 令 $a=\sin^2\theta, b=\cos^2\theta, \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 则

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\left(\sin^2\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(\cos^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$=\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{2}{1-\cos2\theta}\right)\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{2}{1+\cos2\theta}\right)$$

$$=\frac{(1-\cos2\theta)^2+4}{2(1-\cos2\theta)}\cdot\frac{(1+\cos2\theta)^2+4}{2(1+\cos2\theta)}$$

$$=\frac{(5+\cos^22\theta-2\cos2\theta)(5+\cos^22\theta+2\cos2\theta)}{4(1-\cos^22\theta)}$$

$$=\frac{(5+\cos^22\theta)^2-4\cos^22\theta}{4\sin^22\theta}$$

$$=\frac{25+6\cos^22\theta+\cos^42\theta}{4\sin^22\theta}$$

$$\geqslant\frac{25+6\cos^22\theta+\cos^42\theta}{4}\geqslant\frac{25}{4}。$$

例2 求证：$\frac{3}{4}\leqslant\frac{x^2+x+4}{x^2+4}\leqslant\frac{5}{4}$

$(x\in R)$

证明 首先将结论不等式转化为：

$-\frac{1}{4}\leqslant\frac{x^2+x+4}{x^2+4}-1\leqslant\frac{1}{4}$ 即

$|\frac{x}{x^2+4}| \leqslant \frac{1}{4}$。令 $u=\frac{x}{x^2+4}$，

则只须证明 $|u| \leqslant \frac{1}{4}$ 即可。为此构造方程 $u-\frac{x}{x^2+4}=0$，化简得 $ux^2-x+4u=0$。

$x \in R$ ，$\triangle = 1-16u^2 \geqslant 0$ 即 $u^2 \leqslant \frac{1}{16}$ 故 $|u| \leqslant \frac{1}{4}$，这正是所要证的。

例 3　已知 a、b 为实数，并且 $e<u<b$，e 为自然对数的底。证明 $a^b > b^a$。

证明　当 $e<a<b$ 时，要证 $a^b > b^a$，只要证 $b1na > a1nb$，即只要证 $\frac{1na}{a} > \frac{1nb}{b}$ 即可。

为了比较两个值的大小，构造辅助函数来“搭桥”，使这两个数值成为 f(x) 的两个函数值，从而将问题转化为比较两个函数值的大小的问题。

引入辅助函数 $f(x)=\frac{1nx}{x}(0<x<+\quad)$

$x>e$ 时，$f'(x)=\frac{1-1nx}{x^2}<0$

，f(x) 在 (e，+　) 内单调递减

已知 $e<a<b$ 所以 $\frac{1na}{a} > \frac{1nb}{b}$

即 $a^b > b^a$。

例 4　已知 $z_1=x+\sqrt{5}+yi$　$z_2=x-\sqrt{5}+yi$ 且 x、y 为实数，$|z_1|+|z_2|=6$。求 f(x，y) $=|2x-3y-12|$ 的极值。

解　由 $|z_1|+|z_2|=6$ 知

$$\sqrt{(x+\sqrt{5})^2+y^2}+\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}=6 \quad ①$$

按通常作法两边平方，化简将很繁琐，仔细观察①，就会发现，这正是动点 M(x，y) 到两定点 ($\pm\sqrt{5}$，0) 的距离的和为 6 (定值) 的轨迹，正符合椭圆的定义。因此①式的几何意义就是焦点为 ($\pm\sqrt{5}$，0)，长轴为 6 的椭圆。椭圆方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad ②$$

现在问题的条件由①转化为②，即问题转化成了求满足②的 f(x，y) 的条件极值。

求二元函数的极值是陌生的，我们可以再设法把它转化成为我们熟悉的一元函数的求极值问题，这一点可通过引入参数做到。

令 $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ ③

将③代入 $f(x,y)=|2x-3y-12|$

得 $f(\theta)=6|\cos\theta-\sin\theta-2|$ ④

这就化成了我们熟悉的求一元函数

$f(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta + c$

的极值问题。

因为 $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)$

则④变形为 $f(\theta) = 6|\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \theta) - 2|$ 因为 $-1 \leqslant \sin(\frac{\pi}{4} - \theta) \leqslant 1$ 则

当 $\sin(\frac{\pi}{4} - \theta) = 1$ 时 $f(\theta)$ 取得极小值；

当 $\sin(\frac{\pi}{4} - \theta) = -1$ 时 $f(\theta)$ 取得极大值。

所以当 $\frac{\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2}$ 即 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 时。亦即

$x = 3\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$y = 2\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$ 时

$f(x,y)$ 取极小值 $12 - 6\sqrt{2}$；

当 $\frac{\pi}{4} - \theta = \frac{3\pi}{2}$ 即 $\theta = -\frac{5\pi}{4}$ 时，亦即

$x = 3\cos(-\frac{5\pi}{4}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$y = 2\sin(-\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}$ 时

$f(x,y)$ 取得极大值 $6\sqrt{2} + 12$。

在几何中实现化归常用所谓‘形体分割’的方法，即对较复杂的几何图形或几何体进行分割，使之成为较简单的几何图形或几何体的组合。在此不再举例。

□数学竞赛中的化归策略

由于数学竞赛需要体现发现性和选拔性，因此数学竞赛的题目不仅新颖独特，而且知识复盖面宽广，技巧性和综合性强，化归是一种重要的数学方法，善于使用化归策略是数学解题思维的一个显明特点，许多难度较大的数学竞赛问题通过化归往往会收到意想不到的效果。分析和研究这一思维特征，对数学竞赛的培训工作是十分有益的。本文

就解决数学竞赛问题时,如何有效地实现正确的化归加以探讨。

大家知道,在用化归方法解决数学问题时,一个必要的前提是化归变形后的问题必须是能够解决的。因此我们化归的方向应该是由未知到已知,由复杂到简单,由难到易,由繁到简。杭州大学数学系赵小云老师作了如下分析:

例 1. 证明:对任意整数 $p、q(q\neq 0)$ 有不等式:

$|\sqrt{2}-\frac{p}{q}|>\frac{1}{3q^2}$ 成立。

思路分析:显然 $\frac{1}{3q^2}\leqslant\frac{1}{3}$,因此,若 $p=0$ 或 $p、q$ 异号,则均有 $\sqrt{2}-\frac{p}{q}\geqslant\sqrt{2}>\frac{1}{3}$,从而更有 $|\sqrt{2}-\frac{p}{q}|>\frac{1}{3q^2}$。这样,不失一般性。我们可以认为 $p、q$ 为自然数(若 $p、q$ 都是负数,则令 $p'=-p,q'=-q$,就可以把问题转化成证明不等式 $|\sqrt{2}-\frac{p'}{q'}|<\frac{1}{3q'^2}$,其中 $p'、q'$ 都是自然数)。显然,由于 $p、q\in N$,故 $\frac{p}{q}\neq\sqrt{2}$,因此由绝对值对称性,我们可以考虑:$\frac{p}{q}>\sqrt{2}$ 和 $\frac{p}{q}<\sqrt{2}$ 的两种情形。

首先考虑 $\frac{p}{q}>\sqrt{2}$ 的情形:

由于 $\frac{1}{3q^2}$ 从 $q=2$ 开始小于 $\frac{1}{16}$,而 $\sqrt{2}<1.42$,故当 $\frac{p}{q}>1.58$ 时,$\frac{p}{q}$ 与 $\sqrt{2}$ 之差大于 $\frac{1}{10}$,因此,对 $\frac{p}{q}>1.58$ 不等式显然成立,这样我们不妨可设 $\sqrt{2}<\frac{p}{q}<1.58$,从而 $(\frac{p}{q})^2-2=\frac{p^2-2q^2}{q^2}>0$,因此 $p^2-2q^2\in N$。

$\therefore (\frac{p}{q})^2-2\geqslant\frac{1}{q^2}$

即 $(\frac{p}{q}-\sqrt{2})(\frac{p}{q}+\sqrt{2})\geqslant\frac{1}{q^2}$

$\therefore (\frac{p}{q}-\sqrt{2})\geqslant\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{\frac{p}{q}+\sqrt{2}}$

由于 $\frac{p}{q}<1.58$。

$\therefore \frac{p}{q}+\sqrt{2}<1.58+1.42=3$

，$\frac{1}{\frac{p}{q}-\sqrt{2}}>\frac{1}{3}$。

从而有$\frac{p}{q}-\sqrt{2}>\frac{1}{3q^2}$。这就是需证明的结论。

其次，我们考虑$0<\frac{p}{q}<\sqrt{2}$的情形。

同前面的讨论类似，我们有$2-(\frac{p}{q})^2=\frac{2q^2-p^2}{q^2}\geqslant\frac{1}{q^2}$。由此$\sqrt{2}-\frac{p}{q}\geqslant\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{p}{q}}>\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{3p^2}$

这样，当$0<\frac{p}{q}<\sqrt{2}$时，有$\sqrt{2}-\frac{p}{q}>\frac{1}{3q^2}$成立。

由上面的讨论，我们对所有的整数p、$q(q\neq0)$证明了$|\sqrt{2}-\frac{p}{q}|>\frac{1}{3q^2}$。

例2. 恰有三个真分数，其分母小于100。由不规则的约分法约去一个数字后即为一个最简分数，其中之一是$\frac{26}{65}=\frac{2\not6}{\not65}=\frac{2}{5}$。求另外两个这样的分数，并证明没有其它这样的真分数。

思路分析 设从分子和分母由不规则的约分法约去数字后，所得到的最简真分数为$\frac{a}{b}(b>a>0)$。这样，由这种不规则的约分法得原来的分数只能属下面的四种形式之一。

(Ⅰ)$\frac{10a+n}{10b+n}$ (Ⅱ)$\frac{10n+a}{10n+b}$

(Ⅲ)$\frac{10n+a}{10b+n}$ (Ⅳ)$\frac{10a+n}{10n+b}$

这里a、b和n都是小于10的正整数。且$a<b$。

显然(Ⅰ)、(Ⅱ)均不可能。

若$\frac{a}{b}=\frac{10n+a}{10b+n}$则$n=\frac{9ab}{10b-a}$，而$9b<10b-a$，故$n<a$。$n+1\leqslant a$从而$b=\frac{an}{10n-9a}<0$。这是不可能的，即(Ⅲ)也不可能。这样仅剩(Ⅳ)有此可能。即有

$\frac{a}{b}=\frac{10a+n}{10n+b}$。从而$n=\frac{9ab}{10a-b}>\frac{9ab}{9a}=b$ 即$n>b$，故$n-b\geqslant1$

, $9(n-b)\geqslant 9\geqslant n$

类似地 $a=\dfrac{bn}{9(n-b)+n}\leqslant\dfrac{1}{2}b$

故$\supset a<5$。

又 $b=10a-\dfrac{9ab}{n}$**且** $a<b$。**故** $3|n$,**于是对于** a **和** n,**只剩下四对值。即**:1、6;1、9;2、6 **和** 4、9 **能使** b **为整数。这样得到分数为**:$\dfrac{16}{64},\dfrac{19}{95},\dfrac{26}{65},\dfrac{49}{98}$。**但最后一个按我们的约分法约去一个数字后。不是最简分数。因此,有且只有三个分母小于** 100 **的真分数,经不规则约分法约去一个数字后为最简分数。**

例 3. **序列** $\{a_n\}$ **是自然数的某一排列,用** $I(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$ **表示连分数**:

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$$

证明: I **不可能取**$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$**中的任何一个值**

思路分析:**由于本题从正面不易将问题转化,这样我们可以从反面思考,也就是考察要求结果的对立面,或假定结论不成立,看看能有什么结果。**

设 I **满足不等式**$\dfrac{1}{2}\leqslant I\leqslant\dfrac{2}{3}$,**我们用** I_1 **表示连分数**$\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$**则有** $I=\dfrac{1}{a_1+I_1}$,**由此。**

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{a_1+I_1}\leqslant\frac{2}{3}。$$

, $\dfrac{3}{2}\leqslant a_1+I_1\leqslant 2$,**不难证明** $0<I_1<1$ **故** $a_1=1$

, $\dfrac{1}{2}\leqslant I_1\leqslant 1$ (1)

由于在序列 $\{a_n\}$ **中,每个自然数出现且仅出现一次,因而** $a_2\geqslant 2$,**但这样一来**,I_1 **应该满足不等式** $I_1<\dfrac{1}{2}$,**这与**(1)**式矛盾,由此得原来的假设** $I\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$**是错误的。**

, $I\notin\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$

例 4 **设** I **是** n **个已知点的集合。**

(1)**若连接** I **中任意两点的直线必过** I **中的某个第三点,则此** n **点共线。**

(2)**若** I **中的点不都位于一直线上,则联结** I **中的每二点,至少可得** n **条不同**

的直线。

证明:(1)由于本题也不易从正面转化,故我们也用反证法证明。若 n 点不共线,不妨用 A、B、C 表示 n 点中不共线的三点,l 表示在平面 ABC 上过 A 的任一直且这直线不包含 I 中的其它任何点,又设 I 中的点对的联线与 l 相交,其交点分别为 P_1、P_2…显然,P_1、P_2…之中至少有一点不与 A 点重合,点 A,P_1,P_2,…分直线 l 成两线段或更多的线段,因此,在 P_1、P_2…之中,我们总能够找出一点 P,使得两线段之中一段 AP 不包含 P_1,P_2…中的其它点,由假设 P 不是 I 中的点,但它位于至少包含 I 中三点的某一直线 l' 上,设此三点顺次为 Q、R、S。显然 Q、R、S 至少有二点在 l 的同一侧,若仅 Q、R 在 l 的同侧(如图 1)则,由于 A、Q 是 I 中的点,, 直线 AQ 将包含 I 中的第三点 O。这样,无论 O 在何处,RO 或 SO 与线段 AP 总有交点,记为 P_1,显然这与 AP 的选择矛盾。若 Q、R、S 都在 l 的同侧(如图 2),则由于 A、R 是 I 中的点,, 直线 AR 将包含 I 中的第三点 O。这样无论 O 在何处,也有 QO 或 SO 与线段 AP 相交。论为 P_2,这也与 AP 的选择矛盾。

综上所述,I 中的 n 点必须是共线的。(2)由 I 中的 n 点不全共线,我们设 m 是这些点对中不同的联线数,由(1)的证明知,这 m 条直线中至少有一条必包含 I 中的两个点,设为 A_1,A_2,考虑除 A_1 外的 n - 1 点的集合,这个集合最多包含点对的 m - 1 条联线(因为 A_1A_2 不包含在这些联线中)照这样的方法,只要剩下的点不全共线,我们就可以不断重复从集中逐次除去一点的过程,设经 r 次这样的过程后,剩下 n - r 个点都共线,于是,在第 r 次前有 n - r + 1 个点,其中的 n - r 个点共线,这样恰存在 n - r + 1 条不同的联结线。但是由于从原集合 I 中减少了 r - 1 点,故有

$n - r + 1 \leqslant m - (r - 1)$ 即 $n \leqslant m$

这样,至少存在 n 条不同的联结线。

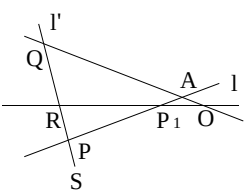


图1

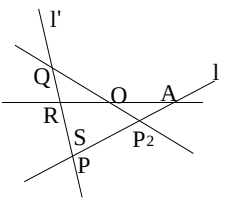


图2

由上面的例 3. 例 4 可以看出,对于“不存在”、“一定”等一类的问题,若从正面不易转化时,从反面着手往往会得事半功倍的好处。

例 5. 在自然数范围内,求方程:

$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$(1)的所有解。

思路分析 观察方程的特点，我们把方程（1）变形为：$y(y+1)=x^3(x+1)+x(x+1)$ 从而有 $y(y+1)=(x+1)(x^3+1)x$ （2）为了求出方程的全部自然数解。我们不妨用一些具体数字尝试之，注意到（2）的右端，我们让 x 从 1 开始

当 $x=1$ 时，方程（2）变为：$y(y+1)$

$=2\cdot2\cdot1$ 显然无自然数解。

当 $x=2$ 时，方程（2）变为：$y(y+1)$

$=3\cdot10\cdot1$ 这时方程有解 $y=5$。

当 $x=3$ 时，方程（2）变为：$y(y+1)$

$=3\cdot17\cdot4$ 无自然数解。

由上面的讨论，我们便产生这样的想法，要使方程（1）有自然数解。下面的方程组之一必须有自然数解（因为 y、y+1 是两个连续的自然数）

$$(\mathrm{I})\begin{cases}y=x\\y+1=(x+1)(x^2+1)\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}y=x+1\\y+1=(x^2+1)x\end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\begin{cases}y=x^2+1\\y+1=(x+1)x\end{cases}$$

解（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ），我们发现只有（Ⅲ）在自然数范围内有解：$x=2,y=5$。

例 6. 设内接于一给定圆的三角形的顶点是外切于此圆的三角形的切点。证明：由圆上的任一点到内接三角形的各边上的垂线之乘积等于由同点到外切三角形的各边上的垂线之积。

思路分析：如图 3. 已知圆的内接三角形 ABC 和在顶点 A、B、C 切于此圆的外切三角形 XYZ，由圆上一点 P 有 PM、PN、PR、PD、PE 和 PF 分别垂直于 AB、BC、CA、XY、YZ、ZX。

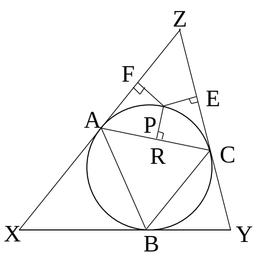


图3

我们要证明的是 $PM\cdot PN\cdot PR=PD\cdot PE\cdot PF$，由于这里的垂线较多，不易直接找到数量关系，但我们发现这六条垂线有这样的关系。若有 P 到圆内接三角形一边的垂线。则相应地有到该边端点的切线的垂线（如图 3 中的 PR 和 PE、PF）

因此，我们就可以进一步探索这样的三条垂线之间可能的数量关系，也就是说我们可先研究一下圆上一点到一条弦的垂线和该点到弦的端点的切线的垂线之间的关系。

如图4. 已知P是⊙O上的一点,AB是圆的弦PN垂直于AB。且PD、PE分别垂直于过A、B的切线。连PA、PB。显然:

∠PBE = ∠PAB。

∠DAP = ∠PBN

,$\frac{PE}{PN}=\frac{PB}{PA}=\frac{PN}{PD}$从而$PM^2 = PD \cdot PE$

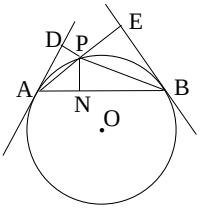


图4

这样,我们发现:

引理:圆上一点到一条弦的垂线是该点到弦的端点的切线的垂线的比例中项。

其实这也是一个大家十分熟悉的命题,有了这个结论,原来的问题就可能会容易地得到解决了。事实上,回到原来的问题(见图3),我们有:

$PR^2 = PE \cdot PF$。$PN^2 = PD \cdot PE$。

$PM^2 = PD \cdot PF$

从而不难得$PM \cdot PN \cdot PR = PD \cdot PE \cdot PF$这样本题的解决只要首先证明一个熟悉的引理。

从上面的例子可以看到。我们化归的方向始终是从复杂到简单。从陌生到熟悉。从困难到容易,但是对于所谓的"繁"和"简"、"难"和"易"等不能从形式上看,而必须具体问题具体分析。切从具体问题的实际出发,如在例2中,由不规则的约分法,我们把原来的分数归属到四种形式之中,尽管形式上繁了些。但原来的问题则变得十分具体了,而且也较为容易解决。又如例5。通过尝试,我们把原来的方程转化为三个方程组,这在形式上似乎复杂了许多,而实际上我们已经解决了问题的大部分。

总之,我们一方面应注意化归的方向,另一方面也应具体问题具体分析、不要犯教条主义的错误。

□数学解题中的一般向特殊的化归方法

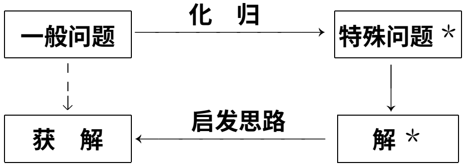
就人类思维活动来说,总是由特殊到一般,又由一般到特殊,这样循环往复。而这种循环不是机械的重复,而是每次循环达到一个新的高度,认识上有了新的飞跃。

不少数学问题的解决,思考方法也是遵循了这样的认识规律:往往把一个一般的问题特殊化,在解特殊化了的问题时,对解一般问题得到启迪,有利于寻找解决一般问题的思路;同时一般问题的解决,也有助

于解决更广泛的特殊问题。

在数学中,特殊问题的解决往往比较容易,比较简单。因此,数学中就经常用到一般向特殊的化归。它是指从对象的一个给定集合,转而考虑包含在这集合内的较小的集合。例如,从多边形转而考虑正 n 边形。还可从正 n 边形转而考虑等边三角形。这都是由一般向特殊的化归,但这两种化归的方式是显著不同的:前者从多边形到正 n 边形,引入了一个限制,即多边形所有角都是相等,所有边都相等;后者用了一个特定的对象代替了一个可变的对象,即把变数换成定数。

江苏教育学院毛毓球老师把一般向特殊化归的解题过程归结为:



1. 一般向特殊化归能启发解题思路,使问题化难为易

例 1 在 3×3 的正方形表格甲和乙中,每格填上"+"或"-"的符号,然后每次将表中的任一行或任一列的各格全部变号,试问经过重复若干次这样的"变号"程序后,能否从甲表变成乙表(第十届全俄中学生数学竞赛题)?

+	+	-
+	+	-
-	-	+

甲

-	-	+
+	-	-
-	-	+

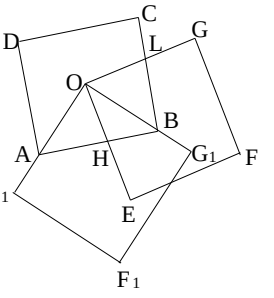
乙

+	+
+	+

-	-
+	-

解 把问题特殊化:在甲表和乙表中都去了最下一行和最右一列,得到 2×2 的表格。容易看出,按照"变号"程序,正号的个数或者不变,或者变动两个(增加或减少)。这样,特殊的"缩减"了的甲表中,原有四个正号,所以经过若干次"变号"程序后,表格中的正号数总是偶数,而特殊的"缩减"了的乙表中却只有一个正号。这就说明了"缩减"了的乙表不能通过"变号"程序由"缩减"了的甲表变化而来,对于 3×3 的表格更是如此。

例 2 两个边长为 1 的正方形,其中一个正方形的某个顶点位于另一个正方形的中心 O,并绕 O 旋转。求证:无论旋转到任意位置,两个正方形重迭部份的面积是一个定值。



解 先把一般情形化归为特殊情形:使旋转的正方形的两边恰好通过 A、B 两点,即 $OE_1F_1G_1$ 这个特殊位置。显然重叠部分为△OAB,其面积为正方形的 1/4,这是个与旋转无关的定值。现在,只需将一般情况化为特殊情况,即证明△LOB≌△HOA。

例 3 在 99 张卡片上各记上一个非负的整数,已知这 99 个整数的和 S 不超过 1583,求证:这 99 张卡片中至少有 4 张卡片上的数相等。

证 至少有 4 张卡片上的数相等,它的反面是至多有 3 张卡片上的数相等。现在采取一种特殊的记法:三个 0,三个 1,三个 2,…,三个 32。而这种记法,99 张卡片上数的总和应最小。

$S_{min}=3\times(0+1+2+\cdots+32)=1584>1583$。这与 $S\leqslant 1583$ 矛盾,所以假设不成立,即原结论正确。

例 4 n 只容积相同的量杯,盛有 n 种不同的液体,此外还有一只容积相同的空量杯。证明:可以通过有限步混合手续使它们成为成份相同的 n 杯溶液,此外还留一只空量杯。

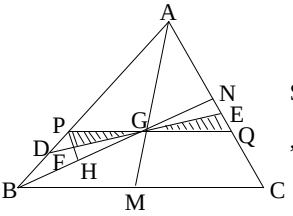
分析 当 n=1 时,用不着混合,结论显然成立。假设 n=k 时结论成立,要证明 n=k+1 时结论成立。怎样解决从 k 到 k+1 的过渡呢?一时可能拿不出方案来。那末让我们将这一问题先化归为特殊问题,看看对我们有什么启发。先来看 n=2 的情形,如果解决了 n=2 到 n=3 的过渡,就可顺利地解决由 n=k 到 n=k+1 的过渡。

n=2,只要先将一杯溶液倒 1/2 到空杯中,再将另一杯的溶液倒满上述两个杯子,混合过程即告完成。

n=3 时,怎样把前面已混合好的溶液同一杯未曾混合的溶液混合成三杯成份相同的溶液呢?由于这种特殊情形,杯数少,其中规律容易发现。只要再由混合好的两杯溶液中各倒 1/3 到空杯中,然后再利用剩下的一杯溶液倒满上述三个杯子,混合过程即告完成。现在可以解决从 n=k 到 n=k+1 的过渡了。只要将已混合好的 k 杯溶液各倒 1/(k+1)到空杯中,最后再利用剩下的一杯溶液分别倒满上述 k+1 个杯子,全部混合过程即告完成了。

例 5 过三角形的重心作一线段,把这个三角形分成两部分,证明:这两个部分面积之差不大于整个三角形面积的 1/9。

证 我们也先取特殊位置的线段来分析,令 G 为△ABC 的重心,由于对称关系,相对于其任一边,例如 BC 来说,过 G 有两条特殊的线段:一条是过 G 而平行于 BC 的线段 PQ,一条是中线 BN。



如果本题的结论成立,则 PQ 和 BN 必须成立。

(1)对线段 PQ,

$S_{\triangle APQ}: S_{\triangle ABC} = AG^2: AM^2 = 2^2: 3^2 = 4: 9$,

$S_{PBCQ} - S_{\triangle APQ} = \frac{5}{9}S_{\triangle ABC} - \frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$

$= \frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$ (1)

(2)对直线段 BN,

$S_{\triangle BCN} - S_{\triangle ABN} =$ (2)

令 DE 是过 G 的任一线段,题目要证的是

$0 \leqslant S_{DBCE} - S_{\triangle ADE} \leqslant \frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$ (3)

联系(1)、(2)、(3)就是证明

$S_{\triangle BCN} - S_{\triangle ABN} \leqslant S_{DBCE} - S_{\triangle ADE}$

$\leqslant S_{PBCQ} - S_{\triangle APQ}$ (4)

过 P 作平行于 AC 的直线段,交 DE 于 F,交 BN 于 H, 则有 $\triangle PFG \backsimeq \triangle QEG$, $\triangle HFG \backsimeq \triangle ENG$。

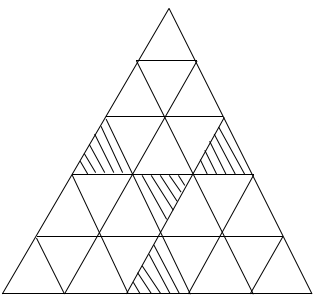
从而 $S_{\triangle PDG} > S_{\triangle PFG} = S_{\triangle QEG}$,

得(4)式右边不等式;

而 $S_{\triangle DBG} > S_{\triangle HFG} = S_{\triangle NEG}$,

得(4)式左边不等式。

例 6 用三条割线把一个给定的三角形分成七个部分,其中四个是三角形(其余的是三个五边形),其中一个三角形被三条割线所包围,另外三角形中的每一个都被给定的三角形的某一边和两条割线所包围,选择这三条割线使得四个三角形全等。按照这种方法分割,每片三角形的面积占给定三角形面积的几分之几?



解 先将问题化归为一个特殊的情形。首先考察特殊三角形(正三角形)。由于等边三角形的对称性,启发我们作这样的猜测:在这种情况下,四个三角形也将是等边的,如果是这样,三角形的边必定平行于给定三角形的边。这样,我们发现了这种图形的主要特征。我们不仅在特殊情况下得到了问题的解答,而且还可以由等边三角形过渡到一般的三角形。

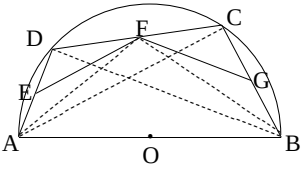
用四条与给定的三角形的一条边平行的直线,

将另两条边的每一条都分成五个相等线段。对于给定三角形的每条边,这样作三次图,把三角形分成 25 个与之相似的全等三角形。从这 25 个三角形中,我们不难选出题中所要求的那四个。其中每一个的面积为给定三角形的面积的 1/25。

2. 由一般向特殊的化归还能简明地证明一些不可能问题

例如要证明:有限次地使用圆规和无刻度的直尺不可能将任意角三等份。我们只要举出一个特例,譬如 60°角,如果 60°这样的特殊角尺规作图不可能,那么用尺规将任意角三等分更不可能。

否定一个命题最常用而且从某些方面来说是最好的方法就是举出一个和它不一致的对象,就是所谓举反例。未得证实的所谓普遍性命题是和对象的某一集合有关的。为了反驳这一命题,我们利用一般向特殊的化归,从集合中检出一个与命题不一致的对象,如果试验结果表明这个特例与普遍性命题不一致,则此命题就得到反驳,而我们的工作则得以完成。



例 7 在任意给定的凸四边形内是否存在顶点分别在四条边上(不包括顶点)的矩形?

解 给出一个特殊的四边形 ABCD。在直径为 AB 的半圆内作一个以直径为一条边的内接凸四边形 ABCD,再设 E、F、G 为 AD、CD、BC 三条边上任意三个点,连接 EF、FG、AF、FB、BD 及 AC,容易推出 $\angle EFG > \angle AFB > \angle ADB = 90°$,由此即知在此四边形 ABCD 内就不存在四个顶点分别在四条边上的矩形。因此问题的回答是否定的。

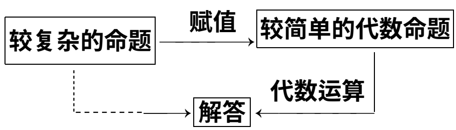
例 8 证明任意两个边长小于 1 的等边三角形不可能盖住一个边长为 1 的等边三角形。

证 我们抓住几个特殊点来考虑,即等边三角形的三个顶点,边长小于 1 的等边三角形能盖住边长为 1 的等边三角形的几个顶点?(只能盖住一个顶点)。因此两个边长小于 1 的等边三角形只能盖住边长为 1 的等边三角形的两个顶点。

解题中由一般向特殊的化归,这是符合人们的认识规律的。假如我们能从某种特殊情形学到适用于一般情形的东西,那么这种情形就是有启发性的。在初等数学和高等数学中恐怕都不能没有这种思考过程。但要把一般的问题化归为怎样的特殊问题以及解决了特殊问题又怎样推进到一般问题、普遍问题的解决,这就需要不断地积累解题经验以及依靠解题中的机智和灵活了。

□一种特殊的化归方法 赋值法

解析几何的出现,开创了几何代数化的时代。它借助坐标法实现几何结构的数量化,把形与数、几何与代数和谐地统一起来了,从而扩大了几何学的研究对象,丰富和发展了几何学的思想方法,同时,也为代数学的研究提供了新的工具和新的生命力。本文的目的是举例阐明赋值法。它是类比于坐标思想,使形、数信息转换,也就是说,恰当地对几何等命题中的点、线、元素赋予确定的特殊数值,使原来比较复杂的问题化归为简单、直观的代数问题,从而使命题易解。因此,用赋值法解题是化归思想在解题中的一种具体形式,其思维模式是:



使用赋值法解题,需要一定的技巧性和灵活性,不同于解析几何中的坐标法,使用赋值法的常规步骤是:

第一步　依据命题中元素间的结构特征,恰当地把某些元素赋予确定的特殊数值;

第二步　灵活应用代数知识,求解;

第三步　把赋值法的解答转化为原命题解答。

安徽黄山市永丰中学杜旭安、苏州大学伍帆老师举例阐明如下:

例 1　在直线 l 上依次排列着 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,每个点涂上红色或蓝色之一,若线段 A_iA_{i+1} 的两端点异色,则称线段 A_iA_{i+1} 为标准线段,又已知 A_1 与 A_n 异色。证明:直线 l 上的标准线段的条数一定是奇数。

证　设 l 上的标准线段共有 k 条,对 n 个点 A_i 赋值:$a_i=\begin{cases}1 & 若点 A_i 是红点\\ -1 & 若点 A_i 是蓝点\end{cases}$

$(a=1,\cdots,n)$,于是 $a_1a_n=-1$,$a_i^2=1(i=2,\cdots,n-1)$,可见

$-1=a_1a_n=a_1a_xa_2^2a_3^2\cdots a_{n-1}^2=(a_1a_2)$

$(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}a_n)=(-1)^k$,故 k 为奇数,由此命题得证。

例 2　已知△ABC 内有 n 个点(无三点共线)连同点 A、B、C 共 n+3 个点,以这些点为顶点把△ABC 分割为若干个互不重叠的小三角形,现把 A,B,C 分别染成红色、蓝色、黄色,而其余 n 个点,每点任意染上红、蓝、黄三色之一。证明:三顶点都不同色的小三角形的总数必为奇数。

块 1×4,1 块 2×2 的瓷砖恰好能铺盖 8×8 的正方形地面,那么这 64 个小方块中,某一种赋值的小方块应有 17 块,但实际上,赋值 1,2,3,4 的小方块各 16 块,矛盾。

1	2
2	3

2	3
3	4

3	4
4	1

4	1
1	2

证法二　赋值方法同证法一,如果能够恰好盖住,注意 1×4 小矩形瓷砖赋值之和是 $1+2+3+4=10$,所以 15 个 1×4 的小矩形瓷砖赋值的和是 10×15 不是 4 的倍数。而一块 2×2 的正方形瓷砖上赋值的和,或为 8,或为 12,都是 4 的倍数,因此所有各块赋值的总和不是 4 的倍数。但图中各块赋值总和为 4 的倍数,矛盾。

说明:用证法二可把本例推广为如下命题:证明:用 k 块 1×4 的矩形瓷砖和 $4n^2-k$ 块 2×2 矩形瓷砖不能恰好铺盖 $2n\times2n$ 的正方形地面(k 是奇数,$1\leqslant k\leqslant 4n^2$)。

以上四例是对几何命题中的点、线、面赋值,于是可使命题化归成简单的数字计算题,从而使命题得解,现在对一些不是几何命题用赋值法探讨。

例 5　男、女若干人围一圆桌而坐,相邻两人若为异性,就在其间放一朵蓝花,若为同性,就在其间放一朵红花,现已知红花数等于蓝花数,求证,男女总人数必是 4 的倍数。

证　设男、女总人数为 n 人,按座位顺序分别用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 记这 n 人,且赋值为:

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{若第 } i \text{ 人是男性}(i=1,2,\cdots,n)\\ -1 & \text{若第 } i \text{ 人是女性}\end{cases}$$

于是据题意

$$x_ix_{i+1}=\begin{cases}1 & \text{若第 } i \text{ 人与第 } i+1 \text{ 人之间放一朵红花}\\ -1 & \text{若第 } i \text{ 人与第 } i+1 \text{ 人之间放一朵蓝花。}\end{cases}$$

($i=1,2,\cdots,n$,其中 $x_{n+1}=x_1$)

且这 n 个乘积中有一半是 1,一半是 -1,故可令 $n=2k$,又因为

$1=(x_1x_2\cdots x_n)^2=(x_1x_2)(x_2x_3)\cdots(x_{n-1}x_n)$

$(x_nx_1)=(-1)^3$。所以 k 为偶数,由此可知 $x=2k$ 必是 4 的倍数。

例 6　某班有 50 个学生,男女各占一半,围成一圈开营火晚会,求证:必能找到一位学生其左、右相邻的学生是同性别的。

证　据题意,按学生座次分别用 $x_1,x_2,\cdots,x_{50}$ 记这 50 人,且赋值为:

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{若第 } i \text{ 人是男性}\\ -1 & \text{若第 } i \text{ 人是女性}\end{cases}$$

($i=1,2,\cdots,50$)

又因男、女各占一半,故 $x_1x_2\cdots x_{50}=(-1)^{25}=-1$。

如果围成一圈后,找不到一位学生,其左右相邻的学生是同性别的,于是有

$x_{i-1}\cdot x_{i+1}=-1(i=2,3,\cdots,50,$其中 $x_{51}=x_1)$ (*)

那么由(*)式得 $x_1x_{50}=x_1\cdot(-1)^{24}\cdot x_{50}=x_1[(x_2x_4)(x_3x_5)][(x_6x_8)(x_7x_9)]\cdots[(x_{46}x_{48})(x_{47}x_{49})]x_{50}=x_1x_2\cdots x_{49}x_{50}=-1$

同理,$x_{49}x_{50}=(-1)^{24}x_{49}x_{50}=[(x_1x_3)(x_2x_4)][(x_5x_7)(x_6x_8)]\cdots[(x_{45}x_{47})(x_{46}x_{48})]x_{49}x_{50}=x_1x_2x_3x_4\cdots x_{49}x_{50}=-1$ 因此 $x_1x_{49}=x_1x_{49}\cdot x_{50}^2=(x_1x_{50})(x_{49}x_{50})=(-1)^2=1$ 这与(*)式矛盾。由此得证。

例 7 在圆周上均匀地放 4 枚围棋子,规定操作规则如下:原来相邻棋子若同色,就在其间放一枚黑子,若异色,就在其间放一枚白子,然后把原来的 4 枚棋子取走,完成这一程序,就算一次操作,证明:无论开始时圆周上的黑白棋子的排列顺序如何,最多只须操作 4 次,圆周上就全是黑子了!

证 据题意,对开始时的第 1,2,3,4 这四枚棋子,依次地用 x_1,x_2,x_3,x_4 表示,且赋值为:

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{若第 i 子为黑子}(i=1,2,3,4)\\ -1 & \text{若第 i 子为白子}\end{cases}$$

则 $x_i^2=1$,且

$$x_ix_{i+1}=\begin{cases}1 & \text{若第 i 子与第 i+1 子同色}\\ -1 & \text{若第 i 子与第 i+1 子异色}\end{cases}$$

$(i=1,2,3,4,x_2=x_1)$,

因此各次操作后,棋子的赋值情况如下:

开始 $x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4$;

第一次操作后 $x_1x_2\quad x_2x_3\quad x_3x_4\quad x_4x_1$;

第二次操作后 $x_1x_2^2x_3=x_1x_3$,$x_2x_3^2x_4=x_2x_4$,$x_3x_4^2x_1=x_3x_1$,$x_4x_1^2x_2=x_4x_2$;

第三次操作后 $x_1x_2x_3x_4\qquad x_1x_2x_3x_4$

$x_1x_2x_3x_4\qquad x_1x_2x_3x_4$

第四次操作后 1, 1, 1, 1。

这是因为$(x_1x_2x_3x_4)^2=1$,因此最多只须操作四次,圆周上全是黑子了。

用赋值法解题远不至上面所说的这些例子,这里仅是抛砖引玉而已,只要我们仔细体会,善于总结,灵活地应用,一定能结出智慧之花,这对于培养学生的多向思维和提高他们的解题能力都是大有益处的。

□数学解题中的化归思想及其培养

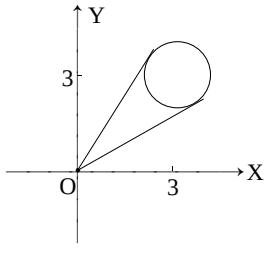
在中学数学教学中,我们常常把学生感到较难或较生疏的问题通

过某种转化,把它归结为学生所熟悉的问题,从而使学生能运用已掌握的知识去解决,这种转化的思想方法就叫做“化归法”。教学中重视化归思想的渗透,注意转化能力的培养,有利于学生解题能力的提高。

化归的原则是化繁为简、化难为易、化生为熟。选择怎样的途径才能达到目的,这就要求教者在解题教学时着力于转化分析,引导学生用联系、发展、运动的观点去观察事物,分析问题。明确化归的对象和化归的目标,通过联想和猜想发散思维去寻找化归的途径。江苏南通市第三中学陈蔚芬老师介绍如下:

1. 数形结合,化抽象为形象

化罗庚教授曾精辟论述:“近代数学的一切发展离不开‘数’与‘形’,两者不可偏废。……而结合又是为了更容易地看到全面,并且取得互相启发的作用。”用几何方法和图形构造不仅可以解决解析几何问题,也可以解决代数、三角等问题。



例1 已知 x、y 之间有关系式:$x^2+y^2-6x-6y+17=0$ 则

(A)既有最大值,又有最小值;

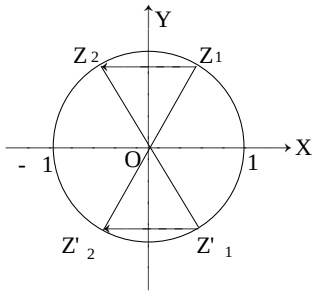
(B)既没有最大值,又没有最小值;

(C)有最大值,没有最小值;

(D)有最小值,没有最大值( )

分析:把方程配方得 $(x-3)^2+(y-3)^2=1$,则 (x,y) 表示圆上点的坐标,$\frac{y}{x}$ 表示圆上的点与原点连线的斜率,作出图形,很快得出结论(A)。

可以看出把式转化为图形,能正确、合理、迅速地作出选择。



例2 已知复数 z_1、z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=1$,且 $z_2-z_1=-1$,求:$\arg\frac{z_2}{z_1}$

分析:此题可以设复数为代数式或三角形式先求出 z_1 和 z_2,再求:$\arg\frac{z_2}{z_1}$

但运算量大。如果运用已知条件的几何意义,得 z_1、z_2 的对应点 Z_1'、Z_2' 在单位圆上。由 $z_2-z_1=-1$,得 $\overrightarrow{Z_1'Z_2'}=-1$,表示 $Z_1'Z_2'$ 的长度等于1,且

平行于 x 轴和 x 轴反向。所以点 O、Z_1'、Z_2' 构成一个正三角形。如图所示，再由复数除法的几何意义得 $\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$。

由此可见，数形结合，化抽象为形象，在解题策略中的作用，它有利于训练学生的思维能力，提高化归的灵活性。

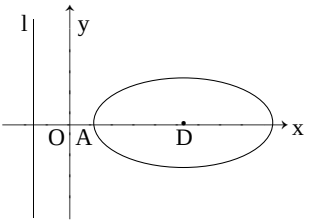
2. 回归定义，化隐为显

有些问题，如果按传统思维方法解题，好象题中缺少一些条件，且运算繁琐。如果能把题中涉及的概念归溯到定义，则最佳条件化隐为显，使问题不究自明。

例 3 点 A 是 C_1：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 与 C_2：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的一个交点。点 A 与 C_1 的二焦点距离之和为 m，点 A 与 C_2 的二焦点之差为 n，求 m+n。

分析 若按先求出交点和焦点的坐标，然后用距离公式求 m+n，则走了弯路。若回归到椭圆与双曲线的定义，就能马上把隐含条件 $m=2\times3=6$，$|n|=2\times2=4$，显示出来。答案 10 或 2 得来全不费功夫。

例 4 直线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$，其中 $p>0$，椭圆的中心为 $D(2+\frac{p}{2},0)$，焦点在 x 轴上，长半轴长为 2，短半轴长为 1，它的一个顶点为 $A(\frac{p}{2},0)$ 问 p 在哪个范围内取值时，椭圆上有四个不同的点，它们中每一个点到点 A 的距离等于该点到直线 l 的距离。



分析 由题设，椭圆上的四个点所满足的条件符合抛物线的定义，且抛物线方程为 $y^2=2px$，一个重要的条件“四个点且在抛物线 $y^2=2px$ 上”，就揭示出来。从而把此题归结为：p 为何值时，椭圆 $\frac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4}+y^2=1$ 与抛物线 $y^2=2px$ 有四个不同的交点。消去 y，得 $x^2+(7p-4)x+\frac{p^2}{4}+2p=0$，注意到抛物线开口向右，所以 x 的二次方程有两个不等的正根，列出不等式组

$$\begin{cases}(7p-4)^2-(p^2+8p)>0\\-(7p-4)>0\\p>0\end{cases}$$，解得 $0<p<\frac{1}{3}$。

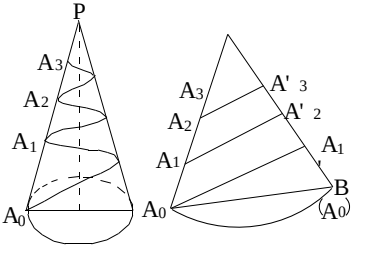
由上两例可以看出回归定义可以挖掘命题中的隐含条件，开拓解

题思路，它有利于训练学生分析推理能力，认识化归思想的深刻性。

3. 图形演变，化空间为平面

立体几何教材中，把求两条异面直线所成的角转化为与两异面直线分别平行的两相交直线所成的角，把二面角的大小归结到它的平面角的计算。这为我们解决空间图形问题转化为平面图形问题作出了示范。而多面体和旋转体侧面上的有关问题，运用此法尤为适宜。

例5　已知圆锥底面半径为 r，高为 $\sqrt{35}r$，一根绳子从底面圆周上一点 A_0，用最短路线绕圆锥侧面一周到 PA_0 上一点 A_1，再由 A_1 用最短路线绕圆锥侧面一周到 PA_0 上一点 A_2，如此无限继续下去，求绳子的总长。



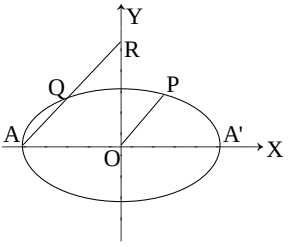
分析：空间曲线的计算是个难题，若沿 PA_0 把圆锥的侧面展开，就可在扇形中研究此问题。由题设可求出 $l=6r$，扇形圆心角为 60°，画出扇形，原来的绳子被剪成一段一段的。要使绳子最短，A_0A_1'，A_1A_2'……都得垂直于 PB，又因为 △PAB 是正三角形，所以 A_1'、A_2'…分别是 PB、PA_1'…的中点。绳子的总长就是以 A_0、A_1' 为首项、$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列各项的和。这样，又把几何问题转化为代数问题，计算出结果 $=\dfrac{3\sqrt{3}r}{1-\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}r$。

变化图形，化空间为平面，能沟通平几与立几、几何与代数的内在联系，是解决空间问题的基本方法，经常训练可拓宽学生的思路，培养化归的敏捷性。

4. 动静转移，化特殊到一般

动和静是相对的，利用运动变化的观点，能帮助我们看到某些数学对象在运动中保持的不变性。由于事物的普遍性寓于特殊性之中，所以先考察运动对象的特殊位置，常可以方便地发现问题的正确结论，然后再由特殊到一般，加以论证。

例6　P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的任意一点，过椭圆长轴的一端 A 引与 OP 平行的直线交椭圆于 Q、交 y 轴于 R，求证 $\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}$ 为定值。



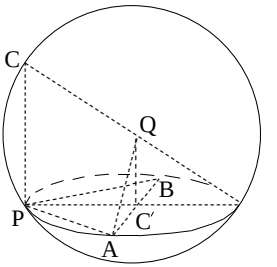
分析:由 P 点的任意性,得$|OP|$、$|AQ|$、$|AR|$都随着 P 点的移动而变化,要得出结论,不妨先把 P 点移到长轴的另一端 A',这时$|OP|=a$,$|AQ|=2a$,$|AR|=a$,得$\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}=2$,找到定值,心里就踏实了。再把 P 点移到一般位置进行证明。

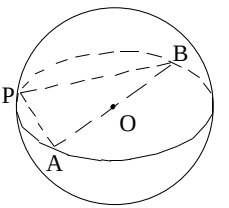
例 7 在半径为 R 的球面上任取一点 P,自 P 引这个球的三条两两垂直的弦 PA、PB、PC,求$PA^2+PB^2+PC^2=$?

分析:弦 PA、PB、PC 的位置和长度随着 P 点位置的移动而变化,似乎对原题难以作出确切的回答。不妨先考察三条弦的某些特例:

(1)若 PA 通过球心,显然有 PA=2R,PB=PC=0,这时$PA^2+PB^2+PC^2=4R^2$。

(2)若 PA、PB 是大圆内互相垂直的弦。显然有$PA^2+PB^2=AB^2=4R^2$,而 PC=0,这时$PA^2+PB^2+PC^2=4R^2$,于是可猜测正确答案为$4R^2$,再画出一般位置的图形加以证明,由 PA⊥PB 得 AB 为截面 PAB 小圆的直径,$PA^2+PB^2=AB^2=(2AO')^2=4(R^2-OO'^2)$,再由题设及截面性质得 PC、OO'同垂直于平面 PAB,得 OO'∥PC,且$OO'=\frac{1}{2}PC$,便可证得$PA^2+PB^2+PC^2=4R^2$。





由特殊到一般,是人类认识客观世界的基本规律,也是发现数学真理的重要工具。动静转换的运用有利于克服学生思想的呆板性,培养化归思想的运动性。

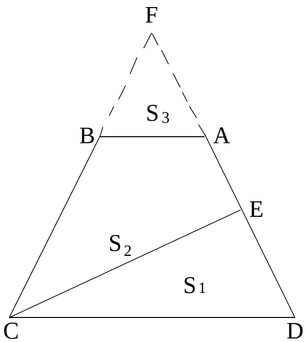
化归的途径多种多样,化多元为单元、化高次为低次。化虚为实、化整为零等都是常用的解题方法。可以把条件转化,也可以把结论转化。由于解题过程是一个系统工作,各种化归的思想方法又互相支撑,有些问题仅用一种转换尚不能奏效,还需要多种转化交替配合使用,如例 5。总之,在寻找化归途径的过程中,学生的思维得到充分的发挥,能激发他们的学习兴趣,培养他们探究和创造能力。

□化归的一种重要方法“割补法”

“割补法”是实施“化归”的一种重要方法，这种方法常用于初等几何的解（证）题。有些初等几何问题，解题关键在于把已知图形进行某种合理分割，或对已知图形补形，或割补兼用从而把未知“化归”为已知，或把一般“化归”为特殊，由此找到解题的突破口。

近年来国内外数学竞赛中，用“割补法”解（证）的平面几何题频频出现，呼兰师专数学系张荣琴老师作了如下例析：

例1 如图，在梯形 ABCD 中，AB∥DC，CE 是∠BCD 的平分线，CE⊥AD，DE = 2AE，CE 把梯形分成面积为 S_1 和 S_2 的两部分。若 $S_1 = 1$，则 $S_2 =$ ______（四川省1987年初中数学竞赛题）。



分析 由题设，延长 CB、DA 交于 F，原梯形即补成等腰三角形 CDF。

设△AFB 面积为 S_3，则

$S_2 + S_3 = S_1$。

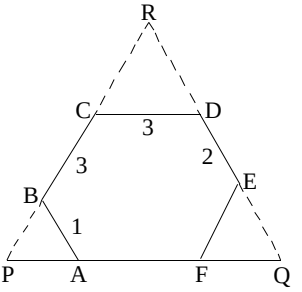
由△AFB∽△CFD 得

$$\frac{S_3}{S_{\triangle CFD}} = \left(\frac{FA}{FD}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

即 $\frac{S_3}{S_{\triangle CFD}} = \frac{S_3}{2S_1} = \frac{S_3}{2} = \frac{1}{16}$，$S_3 = \frac{1}{8}$。

， $S_2 = S_1 - S_3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$。

例2 一个六边形六个内角都是120°,连续四边的长依次是1,3,3,2,则该六边形的周长是_____。(上海市1988年初中数学竞赛题)。



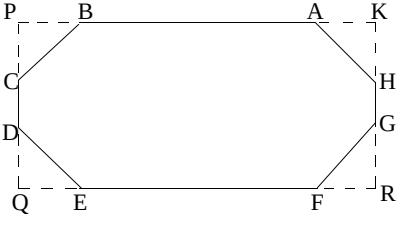
分析 如图,作六边形ABCDEF,AB=1,BC=CD=3,DE=2。因每个内角都是120°,所以延长BC、ED交于R,∠R=60°。设CB、FA延交于P,AF、ED延交于Q,则∠P=60°,∠Q=60°。于是原六边形补成正△PQR,其每边长为7。

, EF=EQ=2,AF=7-2-1=4,

六边形周长为15。

例3 凸八边形ABCDEFGH的八个内角都相等,边AB、BC、CD、DE、EF、FG的长分别为7、4、2、5、6、2,求该八边形的周长(南昌市1989年初中数学竞赛题)。

分析 由题设八内角均相等,延长相间四边,如图,设分别交于P、Q、R、K。原八边形被补成矩形(易证),且有△PCB、△QED、△RFG、△KAH为四个底角均相等的等腰直角三角形。



由勾股定理可求得

$QE=GD=\frac{5\sqrt{2}}{2}$,$FR=GR=\sqrt{2}$。$PC=PB=2\sqrt{2}$。

因此有

$$KP=QR=QE+EF+FR$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}+6+\sqrt{2}=6+\frac{7\sqrt{2}}{2},$$

$$PK=PQ=PC+CD+DQ$$

$$=2\sqrt{2}+2+\frac{5\sqrt{2}}{2}=2+\frac{9\sqrt{2}}{2},$$

$$AK=KP-PA=6+\frac{7\sqrt{2}}{2}-7-2\sqrt{2}$$

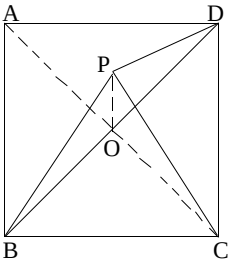
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1,$$

从而 $AH=3-\sqrt{2}$，$HG=PQ-KH-GR$

$$=3+2\sqrt{2}。$$

所以凸八边形周长为 $32+\sqrt{2}$。

例 4　如图，ABCD 是面积为 1 的正方形，△BPC 为正三角形，则△BPD 的面积为（　　）。（北京市 1984 年竞赛题）。



(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$；(B) $\frac{2\sqrt{3}-1}{8}$；

(C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$；(D) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$；(E) $\frac{1}{4}$。

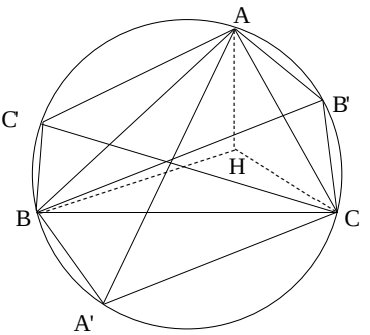
分析　连 AC 与 BD 交于 O，边 PO，则△PBD 被分割为等积的两部分△PBO 与△POD。且有

$S_{\triangle PBO}=S_{\triangle POD}=S_{\triangle POC}$。

，$S_{\triangle PBD}=S_{\triangle PBC}-S_{\triangle BOG}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$。

选择(D)。

例 5　△ABC 为锐角三角形，过 A、B、C 分别作此三角形外接圆三条直径 AA'、BB'、CC'，求证△ABC 的面积等于△A'BC，△AB'C，△ABC' 面积之和。（芜湖市 1981 年初中数学竞赛题）。



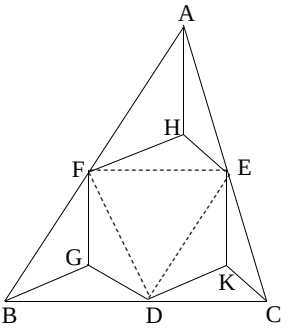
分析　由题设及所求，取△ABC 的垂心 H（如图），连 AH，BH，CH，易证 AHBC'、AHCB'、A'BHC。均为平行四边形。原△ABC 被分割成△ABH，△BCH，△ACH。且

$S_{\triangle ABH}=S_{\triangle ABC'}$，$S_{\triangle BCH}=S_{\triangle A'BC}$，

$S_{\triangle ACH}=\triangle AB'C$。

结论显然成立。

例6 在锐角三角形中，由每边中点向其它两边引垂线，证明这些垂线围成的六边形的面积等于三角形面积的一半。（第十九届全苏竞赛题 1985 年）



分析 如图，分别连结三边 AB、BC、CA 的中点 FD、DF、EF，即把六边形 DKEHFG 分割成 $\triangle DEF$，$\triangle KED$，$\triangle HFE$，$\triangle GDF$。其中，

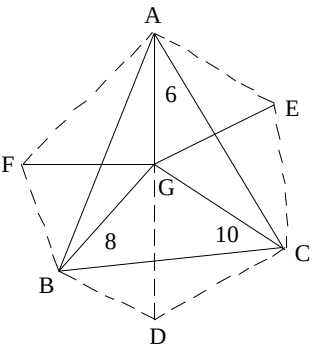
$$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BDF}=S_{\triangle CED}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}。$$

易证 $\triangle GDF\cong\triangle HEA$，$\triangle KED\cong\triangle HAF$，于是 $\triangle GDF$，$\triangle HAF$，$\triangle HFE$ 又补成 $\triangle AEF$。

所以六边形 DKEHEG 的面积

$$S=2S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}。$$

例7 Q 为等边 $\triangle ABC$ 内一点，已知 $QA=6$，$QB=8$，$QC=10$，则最接近 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 的整数是几？



分析 考虑到 6、8、10 是勾股数，$\triangle ABC$ 为等边三角形的特点，采用割补法，构成若干个新的等边三角形和直角三角形。

如图，分别将 $\triangle ABQ$、$\triangle BCQ$、$\triangle CAQ$ 移到 $\triangle ACE$、$\triangle BAF$、$\triangle CBD$ 处，连 QE、QF、QD，即得边长分别为 6、8、10 的等边 $\triangle AQE$，等边 $\triangle BQF$，等边 $\triangle CQD$ 及三边依次为 6、8、10 的 $R_t\triangle CEQ$、$R_t\triangle AFQ$、$R_t\triangle BDQ$。所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times8^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times10^2\right)+3\left(\frac{1}{2}\times6\times8\right)]$$

$$36+25\sqrt{3}$$

$$\approx79.3$$

$$\approx79。$$

可见最接近 $\triangle ABC$ 面积 $S_{\triangle ABC}$ 的整数是 79。

以上例 1—例 3 是根据题设，经补形将一般图形化归为特殊图形，使问题获解；例 4、例 5 是利用分割把未知化归为已知，从而找到解题

线索;例6、例7割补兼用,使问题获证。在解决平面几何问题时(如面积方面问题求解),运用此法,将助你走向成功之路。

□初中数学化归常用技巧

把待解决的问题化为已经解决或容易解决的问题,这是解数学题的一种基本方法——化归法。江苏省运河师范学校彭玉忠老师分析总结了初中数学中几个常用的化归技巧。

1. 进行语言翻译

数学题是用语言(日常语言和数学语言)表达的。当所给的表达形式不利于理解题意时,可将其翻译为“另一种说法”,这常可给顺利化归打开通道。

例1　解一个一元二次方程,甲看错了方程的常数项,因此得二根为5和2,乙看错了方程的一次项系数,因此得二根为-10和-1,求此方程。

分析　原题表达的意义较隐匿,不能直观反映方程的特征,故可先进行语言翻译。注意到在方程 $x^2+px+q=0$ 中,p定q变时,所有方程两根和都相等;q定p变时,所有方程两根积都相等。因此,甲看错常数项而得两根之和即是所求方程两根之和,乙看错一次项系数而得两根之积即是所求方程两根之积。于是原题条件可译为:所求方程两根 x_1、x_2 满足

$\begin{cases}x_1+x_2=7,\\x_1x_2=10。\end{cases}$经如此翻译,问题就化得很易解决了。

2. 构造数学模型

若欲解决的问题较为抽象或为实际问题,可考虑引入变量、坐标、图形等构造相应的数学模型,以此模型为桥梁而实现化归。

例2　A城气象台测得正西300公里B处有一台风中心,正以40公里/小时的速度向东北方向移动,距台风中心250公里范围内均受台风影响。问A城是否会受台风影响?若受影响,则可影响多长时间?

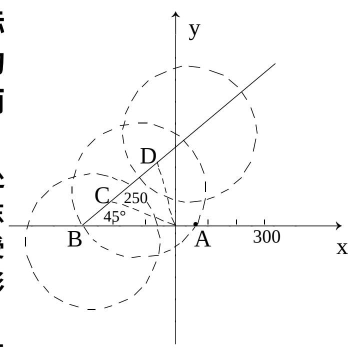


图1

分析　本题为实际问题,故应考虑先把其转化为数学问题。如图1把台风中心移动路线

用以 B 为端点的射线表示,影响范围用圆心在此射线上、半径为 250 公里的圆域系表示,再取 A 城为原点建立坐标系,则原问题即化为如图所示的数学模型。在此模型中,台风对 A 城的影响情况即取决于射线上的点到原点的距离,这就化归为△ACD 的边、角计算问题了。

3. 建立对应关系

若原问题的结构系统不利于分析研究,可以通过换元、函数等手段把原结构系统与另一结构系统相对应,在新系统中解决问题后再返回解决原问题。这种化归法又称 RMⅡ(关系映射反演)原则。

例 3 5 点到 6 点之间,时针和分针何时重合?

分析 直接就原问题结构不便解决,故可考虑变换转化。因时针和分针均作匀速运动,故可作如下对应:把时间(小时)用自变量 x 表示,所转圈数用因变量 y 表示,则时针、分针运动对应的函数关系式分别为 $y=\frac{x}{12}$、$y=x-5(5\leqslant x\leqslant 6)$,其图象都是线段。经如此对应,两针相交问题即化归为线段交点问题了。

4. 分解扩充变形

儿童玩积木可能会先摆成若干局部再拼成整体,也可能直接摆好整体再拿开而得到需要的部分图形。这种思想方法即是一种重要的化归技巧。反映在数学中,就是通过把整体分割为局部或将特殊扩充为一般而达到化归的目的。

例 4 比较 $\sqrt[3]{60}$ 与 $2+\sqrt[3]{7}$ 的大小。

分析 本题直接难以比较,若分别立方,则变得更为复杂。注意到 $\sqrt[3]{60}=\sqrt[3]{4(8+7)}$,$2+\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{7}$,故可考虑索性知难而进,研究一般性问题:比较 $\sqrt[3]{4(x+y)}$ 与 $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ 的大小。事实上,不难推得,对 $x>0$,$y>0$,总有 $\sqrt[3]{4(x+y)}\geqslant\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立(推导过程略)。由此即知 $\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$。

□函数作图中的化归思想与方法

将一个生疏的、复杂的问题,转化为熟悉的、简单的问题来处理的思维方法就是化归的思想。

石家庄铁路一中仇岷老师总结函数作图中的化归通常有三条途径。

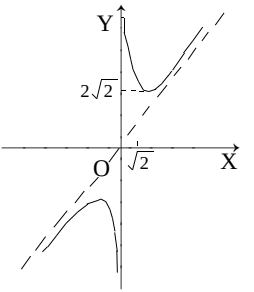
1. 利用函数性质化归

函数的性质可以借助于“数”与“形”两种语言来表达,函数的图象

是其性质的直观表述,把握了“形”所反映的数量特征,发挥“数”对“形”的支配作用,使可降低作图的难度,达到化繁为简、化生为熟的目的。

众所周知,函数的定义域、值域确定了图形的横向与纵向范围;奇偶性决定了图象的对称特征;利用周期性可以把无限的作图局限在长度为一个周期的区间内;利用单调性及渐近线可判断图象的总体趋势;这样,生疏的函数图象就有了基本形象。

例1 作 $y=x+\frac{2}{x}$ 的图象。



(图1)

解 (1)定义域:$x\neq 0$,则 y 轴上无图象;

(2)$f(x)$ 为奇函数,故可先作 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)$ 的图象;

(3)当 $x>0$ 时,$x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{2}$(当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时取等号),,图象在 y 轴右侧的最低点为$(\sqrt{2},2\sqrt{2})$;

(4)可以用定义证明:当 $x\in(0,\sqrt{2}]$ 时,$f(x)$ 为减函数,而当 $x\in[\sqrt{2},+\infty)$ 时,$f(x)$ 为增函数(过程略);

(5)设直线 $\bar{y}=x$,$y-\bar{y}=\frac{1}{x}$,当 $x\to+\infty$ 时,$y\to\bar{y}$,即 $y\to x$;当 $x\to 0$ 时,$y\to+\infty$,,图象在第一象限内以直线 $y=x$ 及 y 轴为渐近线;

据(3)~(5)可作出 $f(x)$ 在 y 轴右侧的图象;

(6)由奇函数图象关于原点对称,可相应作出其在 y 轴左侧的图象。(图1)

由上述分析可见:本题利用奇偶性使作图由二支化为一支(化繁为简);利用最值、单调性及渐近线使曲线逼近直线(化难为易)。

通过对函数性质的分析,逐步暴露其图象特征,是一种探索性化归,适用于研究未见过面的函数,事实上,解析几何中初次研究椭圆、双曲线等图形,均属这类化归过程。

2. 利用几何变换化归

平移、翻转、对称等变换,不改变图象的形状而改变其在坐标系中的位置,从而改变了函数的解析式,理解了上述变换的过程,便可反过来运用相应的变换把所求的复杂解析式的函数作图化归为基本的函数作图。

中学常用的几何变换有以下几种:

已知函数 $y=f(x)$ 的图象,作下列函数图象:①$y=f(x)+k$;②$y=f$

(x+m);③y=-f(x);④y=|f(x)|;⑤y=f(-x);⑥y=f(|x|);⑦y=f^{-1}(x);⑧y=af(x)(a>0)⑨y=f(ax)(a>0)

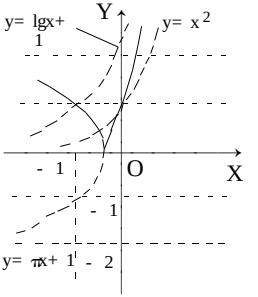
利用几何变换化归作图的训练可分两层次:

①任意给出已知函数图象,巩固上述各类变换的技能;(例略)

②直接给出变换后的函数的解析式(隐去已知函数图象)要求完成作图,该层次训练的关键是恰当选择可做为已知函数的奠基函数。

例2 作 $y=|\pi^{x+1}-2|$。

解 观察分析式结构,选择 π^x 为奠基函数,于是 $y=|\pi^{x+1}-2|$ 的图象可由 $y=\pi^x$ 的图象先向左平移 1 个单位,再向下平移 2 个单位,保留其 x 轴上方的图象,然后把 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折 180°而得(图 2)。



(图2)

由于这里的已知函数以隐蔽的形式出现,需要学生运用逆向思维进行挖掘,所以这一层次的训练对于形成化归意识,增进思维素质至关重要,教学中应充分调动学生思维主动性,利用自己熟悉的基本函数,编出相关的函数作图问题,如由 $y=\lg x\to y=\lg(x-1)\to y=|\lg(x-1)|\to y=|\lg(x-1)|+2$,从而编出作 $y=|\lg(x-1)|+2$ 这一作图问题,他自然会迅速选出奠基函数是 $y=\lg x$,历经这种'一来一往'的双向思维训练,学生必能体察化归的思维过程,达于深刻理解和运用纯熟。

3. 利用代数变换化归

解析式的恒等变换是研究复杂的函数与方程的有力杠杆。当作表示函数的解析式较为复杂时的图象,其障碍主要在于对应法则隐蔽,不易分辨是何种曲线,若在作图之前通过代数变形将解析式(或方程)化简,则可以隐为显,顺利作图。

利用代数变换化归进而作图的训练可通过两方面进行。

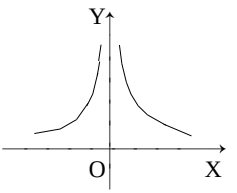
(1)简化表示函数的解析式(或方程)

例3 作 $y=(\sqrt{e})^{\ln x-2}$ 图象。

解 原函数可化为:

$$y=e^{\frac{1}{2}\ln x-2}=e^{\ln\sqrt{x}-2}=\sqrt{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}(x>0)\\ \dfrac{1}{x}(x<0)\end{cases}$$



(图3)

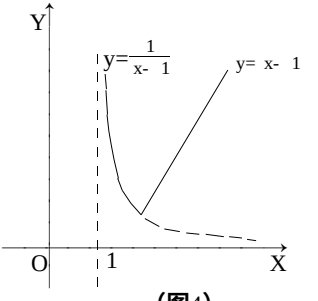
其图象如图 3 所示。

例 4　作 $y=10^{|\lg(x-1)|}$ 的图象。

解　原函数可化为

$$y=\begin{cases}10^{\lg(x-1)}=x-1\ (x\geqslant 2)\\ 10^{-\lg(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}\ (1<x<2)\end{cases}$$

其图象如图 4 所示。



(图4)

注：化简后配合几何变换（由 $y=\dfrac{1}{x}\to y=\dfrac{1}{x-1}$）

例 5　作满足方程

$\log_{(1-y)}x+\log_{(1-y)}x=2(\log_{(1+y)}x)(\log_{(1-x)}y)$ 的点 (x,y) 的图形。

分析：欲暴露 x、y 的关系，应去掉对数符号，为此换为以 x 为底的对数。

解　(1) 当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，

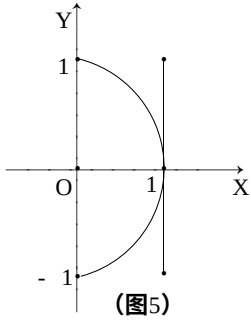
$$\frac{1}{\log_x(1+y)}+\frac{1}{\log_x(1-y)}$$

$$=\frac{2}{\log_x(1+y)\log_x(1-y)}$$

，$\log_x(1-y)+\log_x(1+y)=2$，即 $\log_x(1-y^2)=2$

，$1-y^2=x^2$，即 $x^2+y^2=1$

$(x>0$ 且 $x\neq 1)$



(图5)

此时图形为 y 轴右侧的半个单位圆并除掉 $(1,0)$，$(0,1)$，$(0,-1)$ 三个点；

(2) 当 $x=1$ 时，

只需 $\begin{cases}1+y>0\\1-y>0\end{cases}$ 且 $\begin{cases}1+y\neq 1\\1-y\neq 1\end{cases}$

便有方程恒成立。

此时图形为无端点的线段 $x=1(-1<y<1)$ 且除掉 $(1,0)$ 点。（图 5）

(2) 函数的解析式与曲线的方程相互转化。　给出曲线有两种方式：其一给出函数的解析式（即显函数），其二给出方程（即隐函数），这两种形式本来没有本质区别（函数解析式也是方程），抓住其形异质同的特征，因题置宜，向着自己所熟悉的方面转化，使代数函数的图象与解析几何中方程的图形互用，就拓宽了作图的道路。