

第一章分层演练卷(一) .....	( 员 )	第二章分层演练卷(四) .....	( 源缘 )
第一章分层演练卷(二) .....	( 缘 )	第二章知能闯关卷 .....	( 源怨 )
第一章分层演练卷(三) .....	( 怨 )	第二章考题荟萃卷 .....	( 缘猿 )
第一章分层演练卷(四) .....	( 员猿 )	第三章分层演练卷(一) .....	( 缘苑 )
第一章分层演练卷(五) .....	( 员苑 )	第三章分层演练卷(二) .....	( 远员 )
第一章分层演练卷(六) .....	( 圆员 )	第三章分层演练卷(三) .....	( 远缘 )
第一章知能闯关卷 .....	( 圆缘 )	第三章分层演练卷(四) .....	( 远怨 )
第一章考题荟萃卷 .....	( 圆怨 )	第三章知能闯关卷 .....	( 苑猿 )
第二章分层演练卷(一) .....	( 猿猿 )	第三章考题荟萃卷 .....	( 苑苑 )
第二章分层演练卷(二) .....	( 猿苑 )	模块水平测试卷 .....	( 愿员 )
第二章分层演练卷(三) .....	( 源员 )	参考答案 .....	( 愿缘- 愿愿 )

## 第一章分层演练卷(一)

测试内容 数列的概念 数列的函数特性

(时间 45分钟 满分 100分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 40分)

一、选择题 (每小题 4分,共 40分)

1. 下列说法中,正确的是 ( )

A. 数列  $1, 2, 3, 4, \dots$  可表示为  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

B. 数列  $1, 2, 3, 4, \dots$  与数列  $2, 3, 4, 5, \dots$  是相同的数列

C. 数列  $\{2n-1\}$  的第  $n$  项为  $2n-1$

D. 数列  $1, 2, 3, 4, \dots$  的第  $n$  项为  $n^2$

2. 已知  $a_n = 2n-1$ , 那么 ( )

A.  $1$  是数列中的一项

B.  $2$  是数列中的一项

C.  $\sqrt{2}$  是数列中的一项

D.  $\sqrt{3}$  是数列中的一项

3. 已知数列  $\{a_n\}$  中  $a_1 = 1, a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ , 则  $a_4$  是这个数列的 ( )

A. 第 1 项

B. 第 2 项

C. 第 3 项

D. 第 4 项

4. 在数列  $\{a_n\}$  中  $a_1 = 1, a_n = \sqrt{a_{n-1}}$  ( $n \geq 2$ ), 则  $a_4$  等于 ( )

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{4}$

C.  $\frac{1}{8}$

D.  $\frac{1}{16}$

5. 数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = 2n-1$ , 则此数列的最小项是 ( )

A. 第 1 项

B. 第 2 项

C. 第 3 项

D. 第 4 项

6. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = 2n-1$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 则使得  $a_n > 10$  成立的最小正整数  $n$  的值为 ( )

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

7. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_n = \sqrt{a_{n-1}}$  ( $n \geq 2$ ), 若  $a_n = \frac{1}{16}$ , 则  $n$  等于 ( )

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

8. 已知数列  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ , 那么  $\frac{1}{16}$  是该数列中某一项值的应当有 ( )

粤源

月猿个

悦圆个

阅猿个

员援已知数列 {葬} 的前 源项为 员园员园, 则下列各式可作为数列 {葬} 的通项公式的有 摇摇个

(摇摇)

① 葬越 员/圆 (员垣 原员)<sup>灶</sup>;

② 葬越 灶/圆, 灶 在 N<sup>+</sup>;

③ 葬越 员/圆 (员垣 原员)<sup>灶</sup> 垣 灶原员 (灶原圆);

④ 葬越 员原 灶/圆;

⑤ 葬越 (员(灶为偶数) / 园(灶为奇数));

粤源

月猿

悦圆

阅猿

员援已知 {葬} 满足 葬越 灶原 园/圆 (灶 在 N<sup>+</sup>) 则 {葬} 中

(摇摇)

粤有最大项无最小项

月无最大项有最小项

悦有最大项有最小项

阅无最大项无最小项

第 II 卷(非选择题共 怨分)

二、填空题(每小题 缘分, 共 圆分)

员援设数列 {葬} 的前 灶项和为 杂, 若 杂越 葬<sup>灶</sup> / 圆 (灶 在 N<sup>+</sup>) 且 葬越 源, 则 葬越 摇摇

员援已知数列 {葬} 的通项公式 葬越 员 / (灶垣 圆), 那么 员/圆 是这个数列的第 摇摇项

员援数列 {葬} 中, 葬越 员, 对所有 灶 在 N<sup>+</sup> 都有 葬葬葬...葬越 灶, 则 葬垣 葬越 摇摇

员援在数列 {葬} 中, 葬越 灶, 原 灶原 源, 则数列中第 摇摇项最小

三、解答题(共 苑分)

员援(愿分) 写出数列的一个通项公式, 使得它的前几项是下列各数

(员) 原 员/圆, 原 员/猿, 原 员/源;

(圆) 猿, 猿, 猿, 猿, 猿, 猿;

(猿) 园, 园, 园, 园, 园, 园;





17. (12分) 已知数列  $\{a_n\}$  中  $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, \dots$  (  $n \in \mathbb{N}^+$  ) 求这个数列的通项公式

18. (12分) 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$  (  $n \in \mathbb{N}^+$  )  
 (1) 数列中有多少项为负数？

(2) 当  $n$  取何值时  $a_n$  有最小值？并求出最小值

19. (12分) 已知函数  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  的图象过点  $(1, 4)$  和  $(2, 9)$   
 (1) 求函数  $f(x)$  的解析式；

(2) 记  $b_n = \frac{1}{n^2}$  (  $n \in \mathbb{N}^+$  ) 是否存在正数  $\lambda$  使得  $\left(\frac{1}{n^2} - \lambda\right) \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \lambda\right) \dots \left(\frac{1}{(n+k)^2} - \lambda\right) \geq \frac{\lambda}{n^2}$  对一切  $n \in \mathbb{N}^+$  均成立？若存在，请求出  $\lambda$  的最大值，若不存在，请说明理由

## 第一章分层演练卷(二)

测试内容:等差数列

(时间:100分钟 满分:150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 100 分)

一、选择题(每小题 5 分,共 100 分)

1. 等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1, a_2, a_3, \dots$  中的第  $n$  项为 ( )

- A.  $a_1 + (n-1)d$      
  B.  $a_1 + nd$      
  C.  $a_1 + (n-1)d$      
  D.  $a_1 + nd$

2. 数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = 2n + 1$ , 则此数列 ( )

- A. 公差为 2 的等差数列     
  B. 公差为 1 的等差数列  
 C. 是首项为 1 的等差数列     
  D. 公差为 1 的等差数列

3. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 100$ , 则  $a_1 + a_n$  等于 ( )

- A. 100     
  B. 50     
  C. 200     
  D. 250

4. 在两个实数  $a$  与  $b$  之间插入  $n$  个数, 使它们与  $a, b$  组成等差数列, 则该数列的公差为 ( )

- A.  $\frac{b-a}{n+1}$      
  B.  $\frac{b-a}{n}$      
  C.  $\frac{b-a}{n-1}$      
  D.  $\frac{b-a}{n+2}$

5.  $\sqrt{a}$  与  $\sqrt{b}$  的等差中项为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$      
  B.  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$      
  C.  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$      
  D.  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

6. 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都是等差数列, 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 100$ ,  $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 100$ , 那么数列  $\{a_n + b_n\}$  的第  $n$  项为 ( )

- A.  $a_n + b_n$      
  B.  $a_n + b_n$      
  C.  $a_n + b_n$      
  D.  $a_n + b_n$

7. 一个等差数列的前  $n$  项和是  $S_n$ , 则  $\frac{S_n}{n}$  等于 ( )

- A.  $\frac{a_1 + a_n}{2}$      
  B.  $\frac{a_1 + a_n}{2}$      
  C.  $\frac{a_1 + a_n}{2}$      
  D.  $\frac{a_1 + a_n}{2}$

8. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 100$ , 那么  $a_1 + a_n$  等于 ( )

- A. 100     
  B. 50     
  C. 200     
  D. 250

9. 设方程  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 4) = 0$  的四个根组成一个首项为  $\frac{1}{2}$  的等差数列, 则  $\frac{1}{d}$  等于 ( )

- A. 1     
  B.  $\frac{1}{2}$      
  C.  $\frac{1}{4}$      
  D.  $\frac{1}{8}$

1. 如果  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为各项都大于零的等差数列, 公差  $d \neq 0$ , 则 (摇摇)

数列  $\{a_n\}$  中,  $a_n > 0, a_{n+1} > 0$ , 且数列  $\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\}$  是等差数列, 则  $a_n$  的值为 (摇摇)

在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  成等比数列, 则  $a_4$  等于 (摇摇)

## 第 II 卷(非选择题共 120 分)

### 二、填空题(每小题 5 分, 共 15 分)

1. 在数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_n > 0, a_{n+1} > 0, a_{n+2} > 0$ , 则  $a_n$  的通项  $a_n =$  摇摇摇摇

2. 等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  成等比数列, 则  $a_4 =$  摇摇摇摇

3. 已知在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1, a_2$  是方程  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的两根, 则  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$  摇摇摇摇

4. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n > 0, a_{n+1} > 0, a_{n+2} > 0$ , 若  $a_1, a_2, a_3$  成等比数列, 则  $a_4 =$  摇摇摇摇

### 三、解答题(共 10 分)

1. (10 分) 如果  $a, b, c$  成等差数列, 那么  $a^2, b^2, c^2$  是否也成等差数列? 为什么?

2. (10 分) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 数列  $\{a_n\}$  的通项由  $a_n = f(\frac{1}{n})$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) 确定

(1) 求证  $\{a_n\}$  是等差数列;

(2) 当  $n > 1$  时, 求  $a_n$



20. (12分) 若等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d \neq 0$ , 且  $a_1, a_3$  是关于  $x$  的方程  $x^2 - 2a_2x + a_4 = 0$  的两根, 求  $\{a_n\}$  的通项公式

21. (12分) 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 求  $\sin 2A$  的值

22. (12分) 已知  $\{a_n\}$  是等差数列, 证明  $\{a_n^2\}$  不是等差数列



(圆)在等差数列{葬}中,是否一定有葬越<sup>葬垣葬</sup><sub>圆</sub>(灶>圆)?

(猿)在数列{葬}中,如果对于任意的正整数灶灶>圆,都有葬越<sup>葬垣葬</sup><sub>圆</sub>,那么数列{葬}一定是等差数列吗?

(源)有一批电视机原销售价为每台愿元,在甲、乙两家商场均有销售,甲商场用如下方法促销:买一台单价为苑元,买两台单价为苑元,依次类推,每多买一台则所购买各台的单价均减少圆元,但每台最少不低于源元;乙商场一律按原价的苑缘销售,某单位需购买一批此类电视机,问去哪一家商场购买花费较少?

## 第一章分层演练卷(三)

测试内容 等差数列的前  $n$  项和

(时间 45 分钟 满分 150 分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 45 分)

一、选择题(每小题 5 分,共 45 分)

1. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_3 = 6$ , 则  $a_2$  等于 ( )
- ( )
2. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ , 则前  $n$  项和  $S_n$  等于 ( )
- ( )
3. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ , 则这个数列的前  $n$  项和  $S_n$  等于 ( )
- ( )
4. 已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都是公差为 1 的等差数列, 其首项分别为  $a_1$  和  $b_1$ , 且  $a_1 + b_1 = 1$ , 设  $c_n = a_n + b_n$ , 则数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$  等于 ( )
- ( )
5. 已知等差数列有  $2n+1$  项, 其奇数项的和与偶数项的和之比为 ( )
- ( )
6. 已知一个等差数列的前四项之和为 10, 末四项之和为 34, 前  $n$  项和为 143, 则项数  $n$  为 ( )
- ( )
7. 等差数列的前  $n$  项和为  $S_n$ , 前  $2n$  项和为  $4S_n$ , 则前  $3n$  项和为 ( )
- ( )
8. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ , 若  $a_1, a_2, a_3, a_4$  的值是一个定值, 则下列为定值的是 ( )
- ( )
9. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $a_1 = 1$ , 它的前  $n$  项的平均值为  $\frac{n+1}{2}$ , 若从中抽取  $k$  项, 余下的  $n-k$  项的平均值为  $\frac{n-k+1}{2}$ , 则抽取的是 ( )
- ( )
10. 设数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则有 ( )
- ( )
11. 在公差  $d > 0$  的等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $S_3 = 9$ , 则  $a_4$  为 ( )
- ( )
12. 一个项数为偶数的等差数列, 奇数项的和与偶数项的和分别为  $10$  和  $14$ , 若最后一项比第一项大  $\frac{1}{2}$ , 则该数列的项数为 ( )
- ( )

## 第 II 卷(非选择题共 100 分)

### 二、填空题(每小题 5 分,共 10 分)

1. 设  $\{a_n\}$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,若  $a_3 = 0$ ,  $a_7 = 0$ , 则  $a_5 =$  \_\_\_\_\_

2. 设  $\{a_n\}$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,若  $a_3 = 0$ ,  $a_7 = 0$ , 则公差为 \_\_\_\_\_ (用数字作答)

3. 已知等差数列  $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ , 那么这个数列的最后  $n$  项的和是 \_\_\_\_\_

4. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,若  $a_3 = 0$ ,  $a_7 = 0$ , 且  $a_1 = 0$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为 \_\_\_\_\_

### 三、解答题(共 100 分)

1. (10 分) 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ , 已知  $a_3 = 0$ ,  $a_7 = 0$

(1) 求通项  $a_n$  (2) 若  $a_1 = 0$ , 求  $S_n$

2. (10 分) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项之和为  $S_n$ , 第  $n$  项等于  $a_n$ , 求第  $n$  项

(10) 已知等差数列  $1, 3, 5, \dots$ , 证明: 前  $n$  项的和为  $n^2$

3. (10 分) 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 5$ , 求  $a_n$  及  $S_n$

(圆)在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ , 求  $n$  及  $a_n$

(圆)等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ , 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $n$  为多少时  $S_n$  取最大值?

(圆)已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n^2 - 2n$ , 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$



4. (12分)教育储蓄是一种零存整取的定期储蓄存款,它享受整存整取利率,利息免税。教育储蓄的对象是在校小学四年级以上(含四年级)的学生。假设零存整取3年期教育储蓄的月利率为0.4%

(1)欲在3年后一次支取本息合计1万元,每月大约存入多少元?

(2)零存整取3年期教育储蓄每月至多存入多少元?此时3年后本息合计约为多少?(精确到1元)



## 第一章分层演练卷(四)

测试内容 等比数列

(时间 45分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 120分)

一、选择题(每小题 5分,共 120分)

1. 如果数列  $\{a_n\}$  是等比数列,那么 ( )

- A.  $\{a_n^2\}$  是等比数列  
 B.  $\{a_n^3\}$  是等比数列  
 C.  $\{a_n^4\}$  是等比数列  
 D.  $\{a_n^5\}$  是等比数列

2. 数列  $\{a_n\}$  是各项互不相等的等比数列,  $a_1 > 1$ , 则公比  $q$  等于 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$   
 B.  $\frac{1}{3}$   
 C.  $\frac{1}{4}$   
 D.  $\frac{1}{5}$

3. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 10$ , 且公比  $q$  为整数, 则  $a_3$  等于 ( )

- A.  $\sqrt{10}$   
 B.  $\sqrt[5]{10}$   
 C.  $\sqrt[10]{10}$   
 D.  $\sqrt[15]{10}$

4. 若等比数列的首项为  $a$ , 末项为  $b$ , 公比为  $q$ , 则这个数列的项数为 ( )

- A.  $\frac{\log a}{\log q}$   
 B.  $\frac{\log b}{\log q}$   
 C.  $\frac{\log a}{\log q} + 1$   
 D.  $\frac{\log b}{\log q} + 1$

5. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 10$ ,  $a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n} = 100$ , 则  $a_1 a_2 a_3 \dots a_{3n}$  等于 ( )

- A.  $\sqrt{10}$   
 B.  $\sqrt[3]{10}$   
 C.  $\sqrt[5]{10}$   
 D.  $\sqrt[7]{10}$

6. 已知数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  成等差数列,  $\{d_n\}$ ,  $\{e_n\}$  成等比数列, 则  $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{d_1 d_2 \dots d_n}$  的值为 ( )

- A.  $\frac{a_1}{d_1}$   
 B.  $\frac{a_2}{d_2}$   
 C.  $\frac{a_3}{d_3}$  或  $\frac{a_4}{d_4}$   
 D.  $\frac{a_5}{d_5}$

7. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $\{b_n\}$  为等比数列, 其公比  $q \neq 1$ , 且  $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots$ , 则若  $a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_n$ , 则 ( )

- A.  $a_1 = b_1$   
 B.  $a_2 = b_2$   
 C.  $a_3 = b_3$   
 D.  $a_4 = b_4$  或  $a_5 = b_5$

8. 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  成等比数列, 其公比为  $q$ , 则  $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n}$  的值为 ( )

- A.  $\frac{a_1}{b_1}$   
 B.  $\frac{a_2}{b_2}$   
 C.  $\frac{a_3}{b_3}$   
 D.  $\frac{a_4}{b_4}$

9. 在正项等比数列  $\{a_n\}$  中, 如果  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 10$ , 那么  $a_1 a_2 a_3 \dots a_{10}$  等于 ( )

- A.  $\sqrt{10}$   
 B.  $\sqrt[3]{10}$   
 C.  $\sqrt[5]{10}$   
 D.  $\sqrt[7]{10}$

10. 已知  $\{a_n\}$  是等比数列,  $\{b_n\}$  是等差数列, 则  $\{a_n b_n\}$  ( )

- A. 是等差数列不成等比数列  
 B. 是等比数列不成等差数列  
 C. 是等差数列  
 D. 是等比数列

悦藏等差数列又成等比数列

阅概不成等差数列也不成等比数列

员援已知数列  $\{a_n\}$  是等比数列,且每一项都是正数,若  $a_1, a_2$  是方程  $x^2 - 10x + 16 = 0$  的两个根,则  $a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$  的值为 (摇摇)

粤 16      月 8      悦 4      阅 2

员圆若递增等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ ,  $a_1 a_2 a_3 = 1$ ,则此数列的公比  $q$  等于 (摇摇)

粤 1/2      月 1/3      悦 2      阅 3 或 1/2

### 第 II 卷(非选择题共 120 分)

二、填空题(每小题 5 分,共 10 分)

员援已知等比数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 则  $a_1 a_2 \dots a_n$  摇摇摇摇

员圆在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , 则  $a_1 a_n$  等于摇摇摇摇

员圆在  $a_1$  与  $a_2$  之间插入  $n$  个正数,使这  $n+2$  个数成等比数列,则插入的  $n$  个数的积为摇摇摇摇

员圆实数等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , 则数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  的通项公式为摇摇摇摇

三、解答题(共 10 分)

员圆(5 分)下列数列是等比数列吗?

(员)  $1, 2, 4, \dots$ ; (圆)  $1, 2, 4, \dots$ ;

(圆)  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,且  $S_n = 2^n - 1$  援



员圆(10 分)已知数列  $\{a_n\}$  为等差数列,公差  $d = 1$ ,且  $\{a_n\}$  的部分项组成的下列数列  $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}$  恰为等比数列,其中  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$  求  $k_n$  援

例 1 (满分) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差和等比数列  $\{b_n\}$  的公比都是  $q$ , 又  $q \neq 1$ , 且  $a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3$ ,  
 $a_4 < b_4$   
 (1) 求  $q$  与  $a_1$  的值;

(2)  $b_1$  是不是  $\{a_n\}$  中的项

例 2 (满分) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $(n+1)S_n = n a_{n+1} + n^2$ , 其中  $n$  是常数且  $n \neq 0$ ,  
 $n \neq -1$   
 (1) 求证  $\{a_n\}$  是等比数列;

(2) 若数列  $\{a_n\}$  的公比  $q > 1$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3, \dots, b_n = a_n$  (注: 圆) 求证:  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  是等差数列, 并求  $b_n$

18. (12分) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ , 已知  $a_1 = 1, a_{2n} = \frac{S_n}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$ , 求证:

(1) 数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是等比数列;

(2)  $S_{2n} = 4S_n$ .

19. (12分) 已知  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列, 且  $a_1, a_2, a_3$  成等差数列.

(1) 求  $q$  的值;

(2) 设  $\{b_n\}$  是以  $a_1$  为首项,  $d$  为公差的等差数列, 其前  $n$  项和为  $T_n$ , 当  $n \geq 1$  时, 比较  $T_n$  与  $a_n$  的大小, 并说明理由.

## 第一章分层演练卷(五)

测试内容 等比数列的前  $n$  项和

(时间 45 分钟 满分 100 分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 40 分)

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分)

1. 若等比数列的公比为  $q$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 则前  $2n$  项和等于 ( )

- A.  $2S_n$                        B.  $4S_n$                        C.  $2S_n - S_n$                        D.  $4S_n - S_n$

2. 若等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$  成等比数列, 则  $q$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                        B.  $\frac{1}{3}$                        C.  $\frac{1}{4}$                        D.  $\frac{1}{5}$

3. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $S_n$  表示前  $n$  项和, 若  $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$  成等比数列, 则公比  $q$  等于 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                        B.  $\frac{1}{3}$                        C.  $\frac{1}{4}$                        D.  $\frac{1}{5}$

4. 等比数列  $\{a_n\}$  的各项都是正数, 若  $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$  成等比数列, 则它的前  $n$  项和  $S_n$  是 ( )

- A.  $2^n - 1$                        B.  $2^n$                        C.  $2^{n-1} - 1$                        D.  $2^{n-1}$

5. 设  $\{a_n\}$  是等比数列, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$  成等比数列, 则  $q$  等于 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                        B.  $\frac{1}{3}$                        C.  $\frac{1}{4}$                        D.  $\frac{1}{5}$

6. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的各项是均不等于 1 的正数, 数列  $\{S_n\}$  满足  $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$  成等比数列, 则数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和的最大值等于 ( )

- A.  $2^n - 1$                        B.  $2^n$                        C.  $2^{n-1} - 1$                        D.  $2^{n-1}$

7. 数列  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n = 2^n - 1$ ,  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则  $S_n$  等于 ( )

- A.  $2^{n+1} - 1$                        B.  $2^n - 1$                        C.  $2^{n-1} - 1$                        D.  $2^{n-2} - 1$

8. 已知等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$  成等比数列, 那么这个数列的通项公式是 ( )

- A.  $a_n = 2^{n-1}$                        B.  $a_n = 2^n$                        C.  $a_n = 2^{n-2}$                        D.  $a_n = 2^{n-3}$

9. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  等于 ( )

- A.  $\frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$                        B.  $\frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$                        C.  $\frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$                        D.  $\frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

10. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  与  $a_n$  之间满足  $S_n = 2a_n - 1$  ( $a_1 = 1, a_n \neq 0, n$  为常数), 则此数列为 ( )

- A. 等差数列                       B. 既是等差数列, 又是等比数列  
 C. 等比数列                       D. 既不是等差数列, 也不是等比数列

11. 一个七层的塔, 每层所点的灯的盏数都等于上面一层的 2 倍, 一共点了 127 盏灯, 则底层所点灯



例 1 (满分) 已知数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$  公比为  $q$  的等比数列,  $S_n$  是其前  $n$  项和,  $\{S_n\}$  成等差数列

(1) 求证:  $\{a_n\}, \{S_n\}$  成等比数列;

(2) 求和  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

例 2 (满分) 已知数列  $\{a_n\}$  中  $a_1 = 1$ , 点  $(n, a_n)$  在直线  $y = 2x - 1$  上, 其中  $a_1 = 1, a_2 = 1, \dots$

(1) 令  $b_n = a_n - 1$ , 求证: 数列  $\{b_n\}$  是等比数列;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项

例 3 (满分) 设正项等比数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = 1$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_1, S_2, S_3$  成等差数列

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项;

( 圆)求( 灶)的前 灶项和 裁援

圆援( 员分)某单位要更换一辆汽车的发动机,已知 II 型发动机比 I 型发动机的购价多 员园园元,但每个月可节约保养费 缘元.若按 豫的月折现率计算,更换 II 型发动机至少使用多少个月才比较合算?(精确到月,月折现率 则是指 员个月后的 员元相当于现在的  $\frac{员}{员.05}$  元)

圆援( 员分)设 灶是数列( 灶)的前 灶项和, 灶. 越 灶垣 圆 灶 越 援  
( 员)设 灶 越 灶 原 灶, 求证( 灶)是等比数列;

( 圆)设 灶 越 灶, 求证( 灶)是等差数列;

( 猿)求数列( 灶)的通项公式及前 灶项和公式援



## 第一章分层演练卷(六)

测试内容 数列在日常经济生活中的应用

(时间 45分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 150分)

一、选择题(每小题 5分,共 150分)

1. 某材料工地运送电线杆到离工地以外的公路,沿公路一侧每隔 50 米埋一根电线杆,又知每次最多只能运 3 根,要完成运载 200 根电线杆的任务,最佳方案是使运输卡车运动 ( )

- A. 1000 米     
  B. 1500 米     
  C. 2000 米     
  D. 2500 米

2. 某银行一年定期的年利率为  $r$ ,则三年定期的年利率为  $3r$  为宜,为吸引长期资金,鼓励储户存三年定期存款,那么  $3r$  的值应略大于 ( )

- A.  $(1+r)^3 - 1$      
  B.  $3r$      
  C.  $(1+r)^3 - 1 - 3r$      
  D.  $3r - (1+r)^3 + 1$

3. 某林厂年初有森林木材存量  $M$  吨,木材以每年  $r$  的增长率生长,而每年末要砍伐固定的木材量  $x$  吨,为实现经过两次砍伐后的木材的存量增加  $20\%$ ,则  $x$  的值是 ( )

- A.  $\frac{Mr}{1+r}$      
  B.  $\frac{Mr}{1+r^2}$      
  C.  $\frac{Mr}{1+r^2}$      
  D.  $\frac{Mr}{1+r}$

4. 某人从 2000 年到 2008 年期间,甲每年 1 月 1 日到银行存入  $x$  元的  $n$  年定期储蓄,若每年年利率  $r$  保持不变,且每年到期的存款本息均自动存入新的  $n$  年定期,到 2008 年 1 月 1 日,甲将所有存款的本息全部取回,则取回的金额是 ( )

- A.  $x \cdot \frac{1+r^n}{r}$      
  B.  $x \cdot \frac{1+r^n}{r} - x$      
  C.  $x \cdot \frac{1+r^n}{r} - x \cdot n$      
  D.  $x \cdot \frac{1+r^n}{r} - x \cdot n + x$

5. 某工厂去年总产值为  $a$  万元,计划今后  $n$  年内每年比上一年增长  $r$ ,这  $n$  年的最后一年该工厂的总产值是 ( )

- A.  $a(1+r)^n$      
  B.  $a(1+r)^{n-1}$      
  C.  $a(1+r)^{n-1}$      
  D.  $a(1+r)^n$

6. 某人从 2000 年 1 月份开始,每月份初存入银行  $x$  元,月利率是  $r$  (每月按复利计算),到 2000 年 12 月底取出本利和应是 ( )

- A.  $x \cdot \frac{1+r^{12}}{r}$      
  B.  $x \cdot \frac{1+r^{12}}{r} - x$      
  C.  $x \cdot \frac{1+r^{12}}{r} - x \cdot 12$      
  D.  $x \cdot \frac{1+r^{12}}{r} - x \cdot 12 + x$

7. 某工厂 2000 年生产某种产品  $a$  万件,计划从 2001 年开始,每年的产量比上一年增长  $r$ ,经过  $n$  年这家工厂生产这种产品的年产量超过  $2a$  万件,则  $n$  的值为 ( )

- A.  $\frac{\ln 2}{\ln(1+r)}$      
  B.  $\frac{\ln 2}{\ln(1+r)} + 1$      
  C.  $\frac{\ln 2}{\ln(1+r)} - 1$      
  D.  $\frac{\ln 2}{\ln(1+r)}$

8. 某家庭打算在 2000 年的年底,花 10 万元购一套商品房,为此,从 2000 年初开始,每年年初存入一笔购房专用存款,使这笔款到 2000 年底连本带息达到 10 万元,如果每年的存入数额相同,利

息依年利率  $r$  并按复利计算,问每年的存入数应为(精确到  $1$  元) (摇摇)

粤  $1000000$  元 月  $1000000$  元 悦  $1000000$  元 阅  $1000000$  元

某房地产开发商在销售一幢  $n$  层的商品楼之前,按下列方法确定房价,由于首层与顶层均为复式结构,因此首层价格为  $a$  元,顶层由于景观好价格为  $b$  元,第二层价格为  $a$  元,从第三层开始每层在前一层价格上加价  $\frac{b-a}{n-2}$  元,则该商品房各层的平均价格为 (摇摇)

粤  $\frac{a+b}{n}$  元 月  $\frac{a+b}{n}$  元 悦  $\frac{a+b}{n}$  元 阅  $\frac{a+b}{n}$  元

悦  $\frac{a+b}{n}$  元 阅  $\frac{a+b}{n}$  元

某市为了控制二氧化碳的排放量,准备从  $2008$  年到  $2012$  年间更新市内现有全部出租车,若每年更新的车辆数比前一年递增  $r$ ,则  $2012$  年年底更新车辆约为现有总车辆数的(摇摇)

粤  $1+r$  月  $1+r$  悦  $1+r$  阅  $1+r$

某工厂购买一台机器价格为  $a$  万元,实行分期付款,每期付款  $x$  万元,每期为一个月,共付款  $n$  次(一年付清),如果月利率为  $r$ ,每月计算一次复利,则  $x$  应满足 (摇摇)

粤  $x = \frac{ar}{1-r}$  月  $x = \frac{ar(1+r)^n}{1+r}$   
悦  $x = \frac{ar(1+r)^n}{1+r}$  阅  $x = \frac{ar(1+r)^n}{1+r}$

现有  $n$  根相同的钢管,把它们堆成正三角形垛,要使剩余的钢管尽可能少,那么剩余钢管的根数为 (摇摇)

粤  $n$  月  $n$  悦  $n$  阅  $n$

## 第 II 卷(非选择题共 120 分)

### 二、填空题(每小题 5 分,共 15 分)

某种产品平均每三年价格降低  $\frac{1}{3}$ ,目前售价  $1000$  元,则 9 年后此产品的价格为  $1000 \times (\frac{2}{3})^3 = 1000 \times \frac{8}{27}$  元

一房地产开发商将他新建的一幢  $n$  层商品楼的房价按下列方法定价:先定一个基价  $a$  元,再根据楼层的不同进行上下浮动,一层的价格为  $(a+b)$  元,二层的价格为  $a$  元,三层的价格为  $(a-b)$  元,第  $n$  层的价格为  $[a + \frac{b-a}{n-1}(n-1)]$  元,则该商品房各层价格的平均值是  $\frac{a+b}{2}$  元

现有浓度为  $10\%$  的溶液  $100$  克,从中倒出  $10$  克,再加进  $10$  克水(以上过程称为一次操作),要使溶液的浓度低于  $5\%$ ,这种操作至少应进行  $10$  次

某房地产开发公司原计划每年比上一年多建相同数量的住宅楼,三年共建住宅楼  $100$  栋,随房改政策出台及经济发展需要,实际上这三年分别比原计划多建住宅楼  $10$  栋、 $20$  栋、 $30$  栋,结果使这三年建住宅楼数量每年比上一年增长的百分率恰好相同,则该房地产公司原计划第一年建住宅楼  $10$  栋

### 三、解答题(共 10 分)

小李选择 3 年期教育储蓄,每月存入  $1000$  元,那么到 3 年期满时,小李共能支取的利息是多少元?本利和是多少元?(整存整取 3 年期、3 年期年利率分别为  $3.6\%$  与  $4.2\%$ )

例 1 (10 分) 某银行设立了教育助学贷款, 其中规定 1 年期以上月均等额还本付息(即等额本息法)如果贷款 1 万元, 两年还清, 月利率为 0.005, 那么每月应还多少元钱?

例 2 (10 分) 某商场在促销期间规定: 商场内所有商品按标价的 8 折出售; 同时, 当顾客在该商场内消费满一定金额后, 按如下方案获得相应金额的奖券:

消费金额(元)的范围	[ 0, 100 )	[ 100, 200 )	[ 200, 300 )	[ 300, 400 )	...
获得奖券的金额(元)	0	10	20	30	...

根据上述促销方法顾客在该商场购物可以获得双重优惠

例如: 购标价为 200 元的商品, 则消费金额为 160 元, 获得的优惠为 40 元(即 200 元 - 160 元)

设购买商品得到的优惠率  $\eta = \frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$  试问:

(1) 购买一件标价为 100 元的商品, 顾客得到的优惠率为多少?

(2) 对于标价在 [ 100, 200 ) (元) 内的商品, 顾客购买标价为多少元的商品, 可得到不少于  $\frac{1}{2}$  的优惠率?

例 3 (10 分) 有 4 台型号相同的联合收割机, 收割一片土地上的庄稼. 若同时投入工作至收割完毕需用 4 小时, 但现在它们是每隔相同的时间顺序投入一台工作, 每一台投入工作后都一直工作到庄稼收割完毕. 如果第一台收割机工作的时间是最后一台的 3 倍, 求用这种收割方法收割完这片土地的庄稼需用多长时间?

圆援员分)球迷小汤为实现“去北京看足球”的梦想,于圆园零年起,每年缘月员日到银行新存入葬元(一年定期),若年利率则保持不变,且每年到期存款自动转为新的一年定期,到圆园零年缘月员日,将所有存款及利息全部取回,试求他可以得到的总钱数援

圆圆援员分)某顾客在购买一件售价为缘园园元的商品时,采取分期付款的方式,员年内分远次付清,每两个月付员次款,月利率为园豫,每月利息按复利计算,每期应付款多少?总共应付款多少?按下列步骤逐步探究援假定每期付款曾元)

(员)写出商品购买后员年贷款全部付清时,该商品售价增值到多少元?(用式子表示)

(圆)写出第员圆猿源缘远期所付的款额全部付清时连同利息之和分别为多少元?

(猿)写出利用分期付款的有关规定得到的关于曾的等式;

(源)用计算器及等比数列求和公式计算,求出曾的近似值;

(缘)远次所付款额共为多少元?

## 第一章知能闯关卷

(时间 100分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 100分)

一、选择题(每小题 5分,共 100分)

1. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2^n - 1$  (  $n \in \mathbb{N}^+$  ), 那么数列  $\{a_n\}$  ( 摇摇 )

粤是公比为 2 的等比数列      月是公差为 2 的等差数列

悦是公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列      阅既非等差又非等比数列

2. 数列  $\{a_n\}$  是等差数列且  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$  那么 ( 摇摇 )

粤  $a_1$  最大      月  $a_2$  最小      悦  $a_3$  最大      阅  $a_4$  最小

3. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, \dots$  则  $a_5 =$  ( 摇摇 )

粤 16      月 32      悦 64      阅 128

4. 已知  $\{a_n\}$  为等比数列, 对于任意  $n \in \mathbb{N}^+$ , 有  $a_n > 0$ , 则  $a_1 a_2 \dots a_n =$  ( 摇摇 )

粤  $(a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$       月  $(a_1 a_n)^{\frac{n-1}{2}}$       悦  $(a_1 a_n)^{\frac{n-1}{2}}$       阅  $(a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$

5. 已知递增数列  $\{a_n\}$  的通项为  $a_n = 2^n - 1$  (  $n \in \mathbb{N}^+$  ), 则实数  $x$  满足 ( 摇摇 )

粤  $x < \frac{1}{2}$       月  $x > \frac{1}{2}$       悦  $x < \frac{1}{2}$  或  $x > \frac{1}{2}$       阅  $x > \frac{1}{2}$

6. 在等比数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1, a_2$  是关于  $x$  的方程  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的两个根, 则  $a_3 a_4 =$  ( 摇摇 )

粤  $\frac{1}{2}$       月  $\frac{1}{4}$       悦  $\frac{1}{8}$       阅  $\frac{1}{16}$

7. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d \neq 0$ ,  $\{a_n\}$  中的部分项  $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots, a_{k_n}, \dots$  构成等比数列, 其中  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots$  则  $\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_2} =$  ( 摇摇 )

粤  $\frac{a_{k_2} - a_{k_1}}{a_{k_3} - a_{k_2}}$       月  $\frac{a_{k_2} - a_{k_1}}{a_{k_3} - a_{k_2}}$       悦  $\frac{a_{k_2} - a_{k_1}}{a_{k_3} - a_{k_2}}$       阅 都不对

8. 设数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都是等差数列, 且  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$ , 那么由  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  所组成的数列的第  $n$  项的值为 ( 摇摇 )

粤  $a_n$       月  $a_n$       悦  $a_n$       阅  $a_n$

9. 已知  $a_1, a_2, a_3, a_4$  四个实数成等差数列,  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  五个实数成等比数列, 则  $\frac{a_5}{a_1} =$  ( 摇摇 )

粤  $\frac{a_5}{a_1}$       月  $\frac{a_5}{a_1}$       悦  $\frac{a_5}{a_1}$       阅  $\frac{a_5}{a_1}$

10. 一个项数为偶数的等差数列, 奇数项的和与偶数项的和分别为  $M$  和  $N$ , 若最后一项超过第一

项  $\frac{M}{N}$ , 那么该数列的项数为 ( 摇摇 )



13. (12分) 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_1 = 1, a_n = \frac{1}{n} S_n$  ( $n \geq 2$ ),  $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \dots$ ,  
 (1) 写出  $a_n$  与  $a_{n-1}$  的递推关系式 ( $n \geq 2$ ), 并求  $a_n$  关于  $n$  的表达式;

(2) 设  $b_n = \frac{1}{n^2} S_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

14. (12分) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots$ ,  
 (1) 求  $a_n$  的值;

(2) 若  $a_n$  与  $a_{n+1}$  的等差中项为  $a_{n+2}$ , 满足  $a_n = 2a_{n+1}$ , 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .



15. (12分) 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  对任意  $x > 0$  都有  $f(x) > \frac{1}{x+1}$ .



# 第一章考题荟萃卷

(时间 100分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

## 第 I 卷(选择题共 100分)

### 一、选择题(每小题 5分,共 100分)

1. (2015年广东省广州市高中学业水平测试)已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比是  $q$ , 则  $a_3$  的值是 ( )

- A.  $a_1 q^2$      
 B.  $a_1 q$      
 C.  $a_1$      
 D.  $a_1 q^{-2}$

2. (2015年安徽省普通高中学业水平模拟测试)在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n$ , 则  $a_5$  的值为 ( )

- A. 16     
 B. 8     
 C. 4     
 D. 2

3. (2015年山东省临沂市第一中学学业水平测试)公差不为 0 的等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1, a_3, a_5$  成等比数列, 且  $a_1 = 1$ , 则  $a_3$  等于 ( )

- A. 1     
 B. 2     
 C. 3     
 D. 4

4. (2015年山东省临沂市第一中学学业水平测试)数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和是  $S_n$ , 如果  $S_n = n^2 + 2n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 则这个数列是 ( )

- A. 等比数列     
 B. 等差数列  
 C. 除去第一项是等比数列     
 D. 除去最后一项为等差数列

5. (2015·全国 I 文)已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 a_3 a_5 a_7 a_9 = 32$ , 则  $a_5$  等于 ( )

- A. 2     
 B. 3     
 C. 4     
 D. 5

6. (2015·北京文)已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 3$ , 若  $a_2, a_4, a_6$  成等比数列, 则数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和等于 ( )

- A.  $n^2$      
 B.  $n^2 + n$      
 C.  $n^2 - n$      
 D.  $n^2 + 2n$

7. (2015·全国 I 理)已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 3$ , 则它的前  $n$  项和  $S_n$  等于 ( )

- A.  $n^2$      
 B.  $n^2 + n$      
 C.  $n^2 - n$      
 D.  $n^2 + 2n$

8. (2015·北京理)已知数列  $\{a_n\}$  对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$  满足  $a_1 a_2 \cdots a_n = n^2$ , 且  $a_1 = 1$ , 那么  $a_n$  等于 ( )

- A.  $n$      
 B.  $n^2$      
 C.  $n^3$      
 D.  $n^4$

9. (2015·浙江)已知  $\{a_n\}$  是等比数列,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , 则  $a_1 a_2 \cdots a_n =$  ( )

- A.  $2^n$      
 B.  $2^{n-1}$      
 C.  $2^{n-1} n$      
 D.  $2^{n-1} n!$



例 1 (2013·辽宁) 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , 且  $a_1, a_2, a_3$  成等差数列,  $a_2, a_3, a_4$  成等比数列. (1) 求  $a_3, a_4$  及  $a_n$ , 由此猜测  $\{a_n\}$  的通项公式, 并证明你的结论;

(2) 证明:  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < 2$ .

例 2 (2012 年山东省临沂市第一中学学业水平测试) 设  $\{a_n\}$  是公比大于 1 的等比数列,  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 已知  $S_3 = 7$ , 且  $a_1, a_2, a_3$  构成等差数列. (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 令  $b_n = \frac{a_n}{n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

例 3 (2012 年山东省苍山县学业水平测试) 若数列  $\{a_n\}$  是首项  $a_1 = 1$  的等比数列, 且  $a_1, a_2, a_3$  成等差数列. (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(圆)若  $\{a_n\}$  是等差数列, 设  $S_n$  为数列  $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$  的前  $n$  项和, 若  $S_n \leq \lambda$  对一切  $n \in \mathbb{N}^*$  恒成立, 求实数  $\lambda$  的最小值

(圆) (员分) (圆) (湖北) 已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足  $a_{n+1} = \lambda a_n + b_n$ ,  $b_{n+1} = a_n + b_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 其中  $\lambda$  为实数,  $n$  为正整数

(员) 对任意实数  $\lambda$ , 证明: 数列  $\{a_n\}$  不是等比数列;

(圆) 试判断数列  $\{b_n\}$  是否为等比数列, 并证明你的结论;

(猿) 设  $S_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 是否存在实数  $\lambda$ , 使得对任意正整数  $n$  都有  $S_n > 0$ ? 若存在, 求出  $\lambda$  的取值范围; 若不存在, 说明理由

## 第二章分层演练卷(一)

测试内容:正弦定理

(时间:100分钟 满分:150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 100 分)

一、选择题(每小题 5 分,共 100 分)

1. 在一个三角形的两个内角分别为  $30^\circ$  和  $45^\circ$ , 如果  $45^\circ$  角所对的边长为 2, 那么  $30^\circ$  角所对的边长为 ( )

- $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 
 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 
 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 
 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin A = \frac{1}{2}$ ,  $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $\angle C$  等于 ( )

- $30^\circ$ 
 $45^\circ$ 
 $60^\circ$ 
 $90^\circ$

3. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 则  $\angle C$  等于 ( )

- $90^\circ$ 
 $60^\circ$ 
 $45^\circ$ 
 $30^\circ$

4. 在  $\triangle ABC$  中,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ , 则  $\triangle ABC$  是 ( )

- 直角三角形
锐角三角形
钝角三角形
等腰三角形

5. 不解三角形, 确定下列判断中正确的是 ( )

- $a=2$ ,  $b=3$ ,  $\angle A=30^\circ$  有两解
 $a=3$ ,  $b=2$ ,  $\angle A=30^\circ$  有一解
- $a=3$ ,  $b=3$ ,  $\angle A=60^\circ$  有两解
 $a=3$ ,  $b=3$ ,  $\angle A=120^\circ$  无解

6. 在  $\triangle ABC$  中, 下列关系式中一定成立的是 ( )

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 
 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ 
 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\sin B}$ 
 $\frac{a}{\sin A} > \frac{b}{\sin B}$

7. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A, \angle B$  所对的边分别为  $a, b$ , 已知  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为 ( )

- $\frac{1}{2}ab$ 
 $\frac{1}{2}ab \sin C$ 
 $\frac{1}{2}ab \cos C$ 
 $\frac{1}{2}ab \tan C$

8. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ , 则 ( )

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 
 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$ 
 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$

9. 下列关于正弦定理的叙述或变形中错误的是 ( )

- 在  $\triangle ABC$  中,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 
在  $\triangle ABC$  中,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
- 在  $\triangle ABC$  中,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

10. 在  $\triangle ABC$  中, 正弦值较大的角所对的边也较大

员援在  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 粤跃月是  $\frac{\text{泽}}{\text{粤}} \text{粤跃}$  月的 (摇摇)  
 粤充分不必要条件 月必要不充分条件  
 悦充要条件 阅非充分非必要条件

员援在  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 已知 葬越愿, 月越五, 悦越猿, 则 遭等于 (摇摇)  
 粤源/圆 月源/猿 悦源/远 阅  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

员援已知  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 粤为锐角, 且  $\frac{\text{遭}}{\text{粤}} \text{粤} \text{越} \frac{\text{缘}}{\text{粤}} \text{粤}$  越原, 圆, 则  $\triangle \text{粤月悦}$  为 (摇摇)  
 粤锐角三角形 月等边三角形  
 悦钝角三角形 阅等腰直角三角形

第 II 卷(非选择题共 80 分)

二、填空题(每小题 5 分, 共 10 分)

员援在  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 已知 葬越  $\frac{\text{源}}{\text{猿}}$ , 遭越原, 粤越猿, 则 泽月越摇摇摇摇

员援在  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 葬遭糟分别是角 粤月悦的对边, 若 粤越元, 悦越猿, 遭越圆, 则边 糟越摇摇摇摇

员援在  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 葬越曾, 遭越圆, 月越缘, 若这个三角形有两组解, 则 曾的取值范围是摇摇摇摇

员援在  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 周长为 苑, 缘, 且 泽粤跃泽月跃泽悦越愿, 缘远, 有下列结论:

- ① 葬跃遭跃糟越愿, 缘远; ② 葬跃遭跃糟越圆, 缘, 远; ③ 葬越圆, 糟, 遭越圆, 缘, 糟越猿; ④ 粤跃月跃悦越愿, 缘远
- 其中正确的是摇摇摇摇(填序号)援

三、解答题(共 80 分)

员援(5 分)在  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 已知 粤越缘, 悦越远, 葬越圆, 解三角形援

员援(5 分)在  $\triangle \text{粤月悦}$  中, 葬遭糟分别为角 粤月悦的对边, 且  $\frac{\text{圆}}{\text{粤}} \text{粤} \text{越} \frac{\text{缘}}{\text{粤}} \text{粤}$  越, 求角 月的大小援

猿猿分)在△粤悦中,月越五殺最大边与最小边之比为(猿圆)圆,则该三角形中最大的内角为多少?

猿猿分)在△粤悦中,已知 猿 猿,且最长边为 猿,求:

(猿)角悦的大小;

(圆)△粤悦最短边的长援



图 1 (分) 如图 1 所示, 在边长为 1 的正三角形  $\triangle ABC$  中,  $O$  是其中心, 过  $O$  作直线交  $AB$  边于  $M$ , 交  $AC$  边于  $N$ , 求  $\frac{OM}{ON}$  的值.

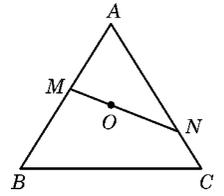


图 1

图 2 (分) 如图 2 已知  $\triangle ABC$  是边长为 1 的正三角形,  $M, N$  分别是边  $AB, AC$  上的点, 线段  $MN$  经过  $\triangle ABC$  的重心  $G$ , 设  $\angle MGN = \alpha$  ( $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ ).

(1) 试将  $\triangle BMN$ ,  $\triangle MNC$  的面积 (分别记为  $S_1$  与  $S_2$ ) 表示为  $\alpha$  的函数;

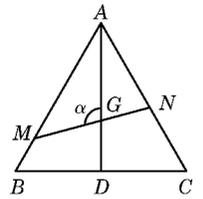


图 2

(2) 求  $\frac{S_1}{S_2}$  的最大值与最小值.



## 第二章分层演练卷(二)

测试内容:余弦定理

(时间:100分钟 满分:150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 100 分)

一、选择题(每小题 5 分,共 100 分)

1. 在  $\triangle ABC$  中,已知  $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$ , 则  $B$  等于 ( )

2. 已知  $\triangle ABC$  的三边满足  $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 4S^2$ , 则  $\triangle ABC$  是 ( )

3. 在  $\triangle ABC$  中,角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 下列等式不成立的是 ( )

4. 已知  $\triangle ABC$  中,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ , 则角  $A$  等于 ( )

5. 在  $\triangle ABC$  中,已知  $\cos C = \frac{1}{2}$ , 且  $\sin A = \frac{1}{2}$ , 则该三角形的形状是 ( )

6. 若  $\triangle ABC$  的三边之比为  $3:4:5$ , 则  $\triangle ABC$  中的最大角是 ( )

7. 在  $\triangle ABC$  中,角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2$ , 则  $c$  等于 ( )

8. 在  $\triangle ABC$  中,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2$ , 则  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cos C$  等于 ( )

9. 在  $\triangle ABC$  中,已知  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2$ , 则  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cos C$  等于 ( )

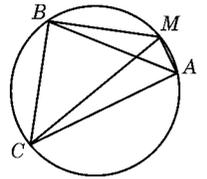
10. 已知三角形的三边长分别为  $3, 4, 5$ , 则此三角形中的最大角是 ( )

11. 在  $\triangle ABC$  中,已知  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2$ , 且最大角的正弦值是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积是 ( )



(圆)粤月的长度援

圆援员分)如图员在 $\triangle ABC$ 中,葬遭糟分别为角粤月悦的对边,葬垣遭原糟越葬遭悦是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径,月耘越员,粤耘越圆求悦耘的长援



图员

圆援员分)某炮兵阵地位于点粤处,两观察所分别位于点阅和点悦处援已知 $\triangle ABC$ 为正三角形,且阅悦越葬援当目标在点月处(点粤,月位于悦阅所在直线的两侧)出现时,测得 $\angle CME = \frac{\pi}{3}$ , $\angle BME = \frac{\pi}{4}$ 援则炮兵阵地与目标的距离粤月是多少?

（12分）在△ABC中，角A, B, C所对边分别为a, b, c，且  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。  
 （1）求角C的大小；

（2）求  $\frac{a}{b} \leq \frac{\pi}{4}$ ，且  $\frac{c}{a} \leq \frac{\pi}{4}$ ，求实数a的取值范围。



## 第二章分层演练卷(三)

测试内容：三角形中的几何计算

(时间 100分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 100分)

一、选择题(每小题 5分,共 100分)

1. 在  $\triangle ABC$  中,若最大角的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,则  $\triangle ABC$  必是 ( )

A. 等边三角形      B. 直角三角形      C. 钝角三角形      D. 锐角三角形

2. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 75^\circ$ , 那么  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  等于 ( )

A.  $\frac{1}{\sin 60^\circ}$       B.  $\frac{1}{\sin 45^\circ}$       C.  $\frac{1}{\sin 75^\circ}$       D.  $\frac{1}{\sin 30^\circ}$

3. 在  $\triangle ABC$  中,若  $\angle C$  为钝角,下列结论成立的是 ( )

A.  $a^2 + b^2 < c^2$       B.  $a^2 + b^2 > c^2$       C.  $a^2 + c^2 < b^2$       D.  $a^2 + c^2 > b^2$

4. 等腰三角形的周长为 10,底边长为 4,则底角的余弦值等于 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{2}{5}$       D.  $\frac{3}{4}$

5. 平行四边形  $ABCD$  中,对角线  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ ,  $AC = 6$ ,  $BD = 8$ , 周长为 20, 则这个平行四边形的面积是 ( )

A. 12      B. 24      C. 48      D. 96

6. 已知  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 105^\circ$ , 则角  $A$  等于 ( )

A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $75^\circ$

7. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 105^\circ$ , 则 ( )

A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $b < a < c$       D.  $b < c < a$

8. 在  $\triangle ABC$  中,如果  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 105^\circ$ , 则此三角形 ( )

A. 有两解      B. 有一解      C. 无解      D. 有无穷多解

9. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 105^\circ$ , 且周长为 10, 则  $\triangle ABC$  的面积为 ( )

A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

10. 在  $\triangle ABC$  的三边分别为 3, 4, 5, 且  $\angle C = 90^\circ$ , 则  $\triangle ABC$  的外接圆直径为 ( )

A. 3      B. 4      C. 5      D.  $\frac{25}{4}$

1. 设三角形的三边长分别为  $a, b, c$ ，现将三边长分别缩短  $x$  后围成一个钝角三角形，则  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ (摇摇)

2. 已知在  $\triangle ABC$  中，若  $\angle A = 2\angle B$ ，且  $\angle C = 90^\circ$ ，则其三边  $a, b, c$  满足 \_\_\_\_\_ (摇摇)

## 第 II 卷(非选择题共 100 分)

二、填空题(每小题 5 分,共 10 分)

1. 在  $\triangle ABC$  中，若  $\angle A = 120^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = 3$ ， $AD$  为  $BC$  边上的中线，则  $\triangle ABC$  的面积等于 \_\_\_\_\_

2. 如图 1 所示，在四边形  $ABCD$  中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $AD = 1$ ， $BC = 2$ ， $BD = \sqrt{5}$ ，则  $AB$  的长为 \_\_\_\_\_， $CD$  的长为 \_\_\_\_\_

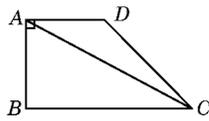


图 1

摇摇摇

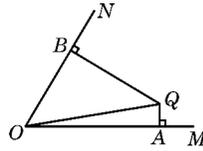


图 2

3. 如图 2 所示，已知  $\angle A = 90^\circ$ ， $P$  是  $\angle A$  内一点，它到两边的距离  $PA$  和  $PB$  分别是  $3$  和  $4$ ，则  $AB$  的长为 \_\_\_\_\_

4. 若  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  成等差数列，且  $A = 60^\circ$ ， $B = 90^\circ$ ，则边  $BC$  上的中线  $AD$  的长为 \_\_\_\_\_

三、解答题(共 10 分)

1. (5 分) 如图 3 已知梯形  $ABCD$  的上底  $AD$  长  $2$ ，下底  $BC$  长  $4$ ，对角线  $AC$  长  $3$ ， $BD$  长  $4$ ，求  $\angle A$  及梯形  $ABCD$  的面积

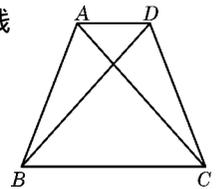


图 3

2. (5 分) 三角形的两边的长分别为  $3$  和  $4$ ，第三边中线的长为  $2$ ，求其外接圆的半径

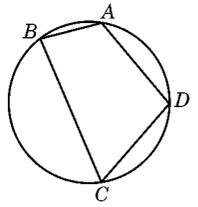
猿援(员分)在 $\triangle$ 粤悦中, $\angle$ 粤, $\angle$ 月, $\angle$ 悦的对边分别为葬,遭,糟,粤为月悦边上的高,且粤越粤悦,试求遭垣糟的最大值援

猿援(员分)已知锐角 $\triangle$ 粤悦中, $\sin$ 粤垣月)越猿缘, $\sin$ 粤原月)越员缘  
 (员)求证:粤越粤悦;

(圆)设粤越猿,求粤边上的高援

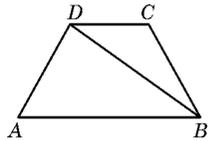


圆内接四边形的面积



图源

如图缘所示，在四边形粤月阅中，粤，月为定点，悦，阅是动点，粤月越猿，月兑越悦阅越粤阅越员， $\triangle$ 粤月阅与 $\triangle$ 月兑阅的面积分别为杂与栽援



图缘

(员)求 栽垣杂 的取值范围；

(圆)当 栽垣杂 取得最大值时，求  $\angle$ 月兑阅



## 第二章分层演练卷(四)

测试内容 解三角形的实际应用举例

(时间 45分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 45分)

一、选择题(每小题 3分,共 45分)

1. 从 A 处望 B 处的仰角为  $\alpha$ , 从 B 处望 A 处的俯角为  $\beta$ , 则  $\alpha, \beta$  的关系是 ( )

- A.  $\alpha + \beta = 0$   
 B.  $\alpha + \beta = 90^\circ$   
 C.  $\alpha + \beta = 180^\circ$   
 D.  $\alpha + \beta = 270^\circ$

2. 在山顶 A 测得山下一塔 B 的塔顶与塔底的俯角分别为  $\alpha, \beta$ , 则塔高为 ( )

- A.  $\frac{AB \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$   
 B.  $\frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$   
 C.  $\frac{AB \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$   
 D.  $\frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

3. 已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 C 的距离都等于  $a$ , 灯塔 A 在观察站 C 的北偏东  $20^\circ$ , 灯塔 B 在观察站 C 的南偏东  $40^\circ$ , 则灯塔 A 与灯塔 B 的距离为 ( )

- A.  $a$   
 B.  $\sqrt{3}a$   
 C.  $2a$   
 D.  $\sqrt{2}a$

4. 如图 1 所示, 在河岸 A 处测量河的宽度 B, 在 C 处测量下列四组数据, 较适宜的是 ( )

- A.  $\angle A$  与  $\angle B$   
 B.  $\angle A$  与  $\angle C$   
 C.  $\angle B$  与  $\angle C$   
 D.  $\angle A$  与  $a$

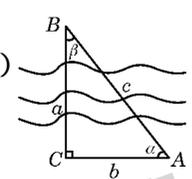
5. 在一幢高  $h$  的楼顶测得对面一塔吊顶的仰角为  $\alpha$ , 塔基的俯角为  $\beta$ , 那么这座塔吊的高是 ( )

- A.  $h \tan(\alpha - \beta)$   
 B.  $h \tan(\alpha + \beta)$   
 C.  $h \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$   
 D.  $h \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

6. 某人向正东方向走  $a$  千米后向右转  $30^\circ$ , 然后朝新方向走  $b$  千米, 结果他离出发点恰好是  $\sqrt{3}a$  千米, 那么  $\frac{b}{a}$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$   
 B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 D.  $\frac{2}{3}$

7. 有一广告气球, 直径为  $d$ , 放在公司大楼的上空, 当行人仰望气球中心的仰角为  $\alpha$  时, 在同一



点测得气球的视角为  $\theta$  的弧度数很小时,可取  $\tan \theta \approx \theta$ ,由此可估计该气球的高约为

(摇摇)

粤爱园皂摇摇

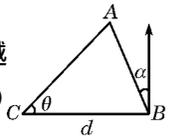
月猿远皂摇摇

悦猿园皂摇摇

阅猿园皂

员圆如图圆所示,有一斜塔粤月向西倾斜,其倾斜角(塔体与竖直方向的夹角)为  $\alpha$ ,为了测量斜塔的高,现在塔底所在平面上月的正西方选取一点悦,若测得悦月越圆皂,  $\angle$ 粤月越  $\theta$ ,则斜塔粤月的高为

(摇摇)



图圆

粤爱  $\frac{圆 \cdot 圆 \cdot 圆}{\theta \cdot 原 \alpha}$  摇摇

月猿  $\frac{圆 \cdot 圆 \cdot 圆}{\theta \cdot 原 \alpha}$

悦猿  $\frac{圆 \cdot 圆 \cdot 圆}{\alpha \cdot 原 \theta}$  摇摇

阅猿  $\frac{圆 \cdot 圆 \cdot 圆}{\alpha \cdot 原 \theta}$

员圆某小岛周围猿灶皂范围内有许多大小暗礁,现有一艘船由西向东航行,初测此岛在北偏东远灶方向,航行猿灶皂后再测得岛在正东北方向,若船不改变航向,则关于此船是否有触礁的危险的问题,下列判断中正确的是

(摇摇)

粤有摇摇摇

月无

悦刚开始没有,某一时刻有摇

阅不能确定

员圆用长度分别为圆猿源缘远(单位:猿)的缘根细木棒围成一个三角形(允许连接,但不允许折断),能够得到的三角形的最大面积为

(摇摇)

粤愿/缘猿摇摇摇

月远/猿猿

悦猿/缘猿

阅猿

## 第II卷(非选择题共怨分)

二、填空题(每小题缘分,共圆分)

员圆在湖面上高猿米处,测得天空中一朵云的仰角为  $\alpha$ ,测得云在湖中之影的俯角为  $\beta$ ,则云距湖面的高度为摇摇摇摇摇摇

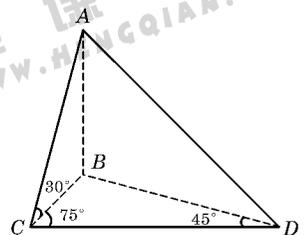
员圆有一长为圆皂的斜坡,倾斜角为猿,在不改变坡高和坡顶的前提下,通过加长坡面的方法将它的倾斜角改为猿,则坡底要延长摇摇皂

员圆一树干被台风吹断折成与地面成猿角,树干底部与树尖着地处相距圆皂,则树干原来的高度为\_\_\_\_\_皂

员圆甲、乙两楼相距圆皂,从乙楼底望甲楼顶的仰角为远,从甲楼顶望乙楼顶的俯角为猿,则甲、乙两楼的高分别是\_\_\_\_\_皂

三、解答题(共苑分)

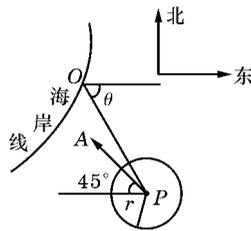
员圆(苑分)如图猿所示,为求河对岸某建筑物的高粤月,测得地面上基线悦月越圆米,仰角  $\angle$ 粤月越  $\theta$ ,又测得  $\angle$ 月悦越  $\alpha$ ,  $\angle$ 月悦越  $\beta$ ,求建筑物粤月的高



图猿

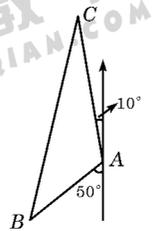
某人在塔的正东沿着南偏西  $45^\circ$  的方向前进  $100$  米以后, 望见塔在东北方向, 若沿途测得塔顶的最大仰角为  $30^\circ$ , 求塔高

在某海滨城市的附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市  $O$  (如图源所示) 的南偏东  $\theta$  方向, 以  $v_1$  的速度向北偏西  $\alpha$  方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 其当前半径为  $r$ , 并以  $v_2$  的速度不断扩大, 则几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



图源

2017年12月至2018年1月在北阿拉伯海举行的军事演习, 目的是针对不断增加的海上恐怖主义威胁与挑战, 促进各国海军之间的合作与交流. 我舰作为其中一次军演的指挥舰在敌岛南偏西  $30^\circ$  相距  $100$  海里处 (如图缘) 发现敌舰正由岛沿北偏西  $60^\circ$  的方向以  $10$  海里的速度航行, 问我舰需要以多大速度, 沿什么方向航行才能追上敌舰?



图缘

20. (10分) 如图 2, 一渔船在海上由西向东航行, 在 A 处望见灯塔 C 在船的东北方向, 半小时后在 B 处望见灯塔在船的北偏东  $30^\circ$  方向, 若船速每小时 10 海里, 当船行至 D 处望见灯塔 C 在船的西北方向时, 求 A、D 两点间的距离 (结果精确到 0.1 海里, 提供数据:  $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732$ )

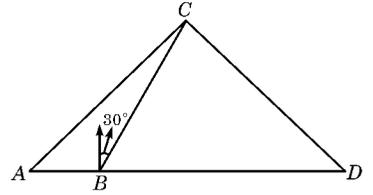


图 2

21. (10分) 如图 3, 有两条相交成  $60^\circ$  角的直线  $l_1, l_2$ , 交点是 O, 甲、乙分别在  $l_1, l_2$  上, 起初甲离 O 点 10 米, 乙离 O 点 5 米, 后来两人同时用每小时 1 米的速度, 甲沿  $l_1$  方向, 乙沿  $l_2$  方向步行,

(1) 起初两人的距离是多少?

(2) 用含  $t$  的式子表示  $t$  小时后两人的距离;

(3) 什么时候两人的距离最短?

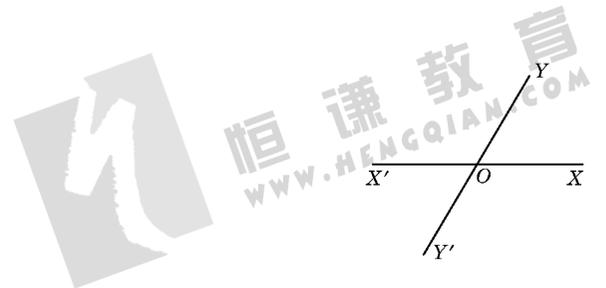


图 3

## 第二章知能闯关卷

(时间 100分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 100分)

一、选择题(每小题 5分,共 100分)

1. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos B$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{4}{3}$

2. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\tan B$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

3. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos A$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{4}{3}$

4. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\tan A$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

5. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos A$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{4}{3}$

6. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\tan B$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

7. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos B$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{4}{3}$

8. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\tan A$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

9. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos A$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{4}{3}$

10. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\tan B$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

11. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos B$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{4}{3}$

12. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\tan A$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

13. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos A$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{4}{3}$

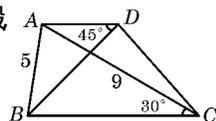
14. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\tan B$  的值为 ( )

A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$



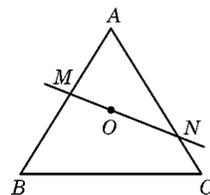
(圆)  $\triangle ABC$  的内切圆半径为  $r$ ，求  $r$  的长。

(圆) 如图 猿所示，在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $AB = 5$ ， $CD = 9$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，求  $AD$  的长。



图猿

(圆) 如图 源所示，在等边三角形  $ABC$  中， $O$  是  $\triangle ABC$  的中心，过  $O$  点的直线交  $AB$  于点  $M$ ，交  $AC$  于点  $N$ ，求  $AM + AN$  的最大值和最小值。

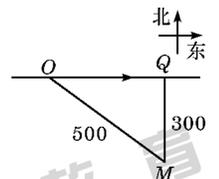


图源



图援 员分)在海岸 粤处 发现北偏东 源度方向距 粤  $\sqrt{3}$  海里处的 月处有一艘走私船 在 粤处北偏西 苑度方向距 粤 圆 海里的 悦处的缉私船奉命以 员圆 海里/时的速度追截走私船 此时走私船正以 员圆 海里/时的速度从 月处沿北偏东 猿度方向逃窜 援缉私船怎样才能最快追上走私船? 并求出所需要的时间援

图圆 员分)如图 缘,一辆汽车从 韵点出发 沿海岸一条直线公路以 员圆 海里/时的速度向东匀速行驶,汽车开动时 在 韵点南偏东方向距 韵点 缘 海里且与海岸距离 匝为 猿 海里的海上 酝处有一快艇 与汽车同时出发 要把一件重要物品送递给这辆汽车的司机 问快艇至少必须以多大的速度行驶 才能把物品送递至司机手中? 并求快艇以最小速度行驶的方向与 韵酝所成的角援



## 第二章考题荟萃卷

(时间 120分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷(选择题共 120分)

#### 一、选择题(每小题 5分,共 120分)

1. (北京)已知  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 那么  $\cos B$  等于 ( )

A.  $\frac{3}{5}$  B.  $\frac{4}{5}$  C.  $\frac{3}{4}$  D.  $\frac{4}{3}$

2. (福建)在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $a^2 + b^2 = c^2$ , 则  $\angle C$  的值为 ( )

A.  $30^\circ$  B.  $45^\circ$  C.  $60^\circ$  D.  $90^\circ$

3. (四川)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边边长分别为  $a, b, c$ . 若  $a^2 + b^2 = c^2$ , 则  $\cos C$  等于 ( )

A.  $\frac{1}{2}$  B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  C.  $-\frac{1}{2}$  D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. (安徽)在三角形  $ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos B$  的大小为 ( )

A.  $\frac{3}{5}$  B.  $\frac{4}{5}$  C.  $\frac{3}{4}$  D.  $\frac{4}{3}$

5. (陕西)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $a^2 + b^2 = c^2$ , 则  $\angle C$  等于 ( )

A.  $30^\circ$  B.  $45^\circ$  C.  $60^\circ$  D.  $90^\circ$

6. (2015年山东省苍山县模块学业水平测试)在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos B$  的面积等于 ( )

A.  $\frac{3}{5}$  B.  $\frac{4}{5}$  C.  $\frac{3}{4}$  D.  $\frac{4}{3}$

7. (2015年山东省临沂市第一中学学业水平测试)在  $\triangle ABC$  中, 若  $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $\sin B = \frac{4}{5}$  且  $\angle C = 90^\circ$ , 则该三角形的形状是 ( )

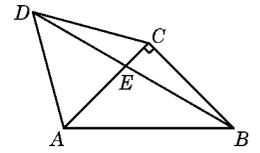
A. 直角三角形 B. 钝角三角形 C. 等腰三角形 D. 等边三角形

8. (2015年安徽省普通高中学业水平测试)在  $\triangle ABC$  中, 三内角  $A, B, C$  所对应的边长分别为  $a, b, c$  且  $a, b, c$  成等差数列,  $\angle C = 90^\circ$ , 则  $\triangle ABC$  的外接圆半径为 ( )

A.  $\frac{1}{2}$  B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  C.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$



员援员分) (国田德·宁夏·海南) 如图员,  $\triangle ABC$  是等边三角形,  $\triangle ACD$  是等腰直角三角形,  $\angle ACD = 90^\circ$ ,  $BC$  与  $AD$  交于  $E$ ,  $BC$  与  $AD$  交于  $E$ .



图员

(员) 求  $\angle AEC$  的值;

员援员分) (国田德·全国 II) 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $BC = 1$ .

(员) 设  $\angle A$  的对边为  $a$ , 求  $\triangle ABC$  的面积;

员援员分) (国田德·重庆) 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $a^2 + b^2 = c^2$ .

求 (员)  $\angle C$  的大小;



(圆) 求  $\sin A$  的值

圆(员) 分) (圆田德·全国 I) 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边长分别为  $a, b, c$ ，若  $a^2 + b^2 = c^2 + ab$ ，求  $\frac{a}{b}$  的值

(员) 求  $\sin C$  的值

(圆) 求  $\sin A$  的最大值

圆(员) 分) (圆田德·重庆理) 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，若  $a^2 + b^2 = c^2 + ab$ ，求  $\frac{a}{b}$  的值

(圆) 求  $\sin A$  的值



### 第三章分层演练卷(一)

测试内容:不等关系

(时间:45分钟 满分:150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

#### 第 I 卷(选择题共 45 分)

一、选择题(每小题 5 分,共 45 分)

1. 下列不等式 ①  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  ②  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta > 1$  ③  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta < 1$  中恒成立的有 ( )  
 ④  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  且  $\theta$  是第一象限角,那么恒有 ( )

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$        $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta > 1$        $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta < 1$        $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  且  $\theta$  是第一象限角

2. 对于  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  给出下列四个不等式:

- ①  $\sin \theta < \cos \theta$ ;
  - ②  $\sin \theta > \cos \theta$ ;
  - ③  $\sin^2 \theta < \cos^2 \theta$ ;
  - ④  $\sin^2 \theta > \cos^2 \theta$ , 其中成立的是 ( )
- ①与③      ②与④      ①与②      ③与④

3. 下列不等式中:

- ①  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  和  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta > 1$ ;
  - ②  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  和  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta < 1$ ;
  - ③  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  和  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta > 1$ ;
  - ④  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  和  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta < 1$
- 不等价的是 ( )
- ①和②      ②和③      ①和③      ②、③和④

4. 若集合  $\{ \sin \theta, \cos \theta \} \subseteq \{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \}$ , 则实数  $\theta$  的取值范围是 ( )

$\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$        $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$   
 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$        $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$

1. 若  $\sin \alpha > \sin \beta$  且  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 则下列不等式成立的是 ( )

- $\alpha > \beta$         $\alpha < \beta$   
  $\sin \alpha > \sin \beta$         $\cos \alpha > \cos \beta$   
  $\tan \alpha > \tan \beta$         $\cot \alpha > \cot \beta$

2. 若  $\alpha, \beta$  满足  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\alpha - \beta$  的取值范围是 ( )

- $(-\frac{\pi}{4}, 0)$         $(-\frac{\pi}{2}, 0)$   
  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$         $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

3. 若  $\alpha, \beta$  满足  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\alpha - \beta$  的取值范围是 ( )

- $(-\frac{\pi}{4}, 0)$         $(-\frac{\pi}{2}, 0)$   
  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$         $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

4. 若  $\alpha, \beta$  满足  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\alpha - \beta$  的取值范围是 ( )

- $(-\frac{\pi}{4}, 0)$         $(-\frac{\pi}{2}, 0)$   
  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$         $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

5. 若  $\alpha, \beta$  满足  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\alpha - \beta$  的取值范围是 ( )

- $(-\frac{\pi}{4}, 0)$         $(-\frac{\pi}{2}, 0)$   
  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$         $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

6. 某一天内, 某港内两艘船均须在某一码头停靠一次, 为了卸货方便, 两艘船到达该码头的时至少要相差 15 分钟, 设甲、乙两船到达码头的时分别为  $x, y$ , 且两船互不影响, 则  $x - y$  应满足的关系是 ( )

- $|x - y| \leq 15$         $|x - y| \geq 15$   
  $|x - y| \leq 15$         $|x - y| \geq 15$   
  $|x - y| \leq 15$         $|x - y| \geq 15$   
  $|x - y| \leq 15$         $|x - y| \geq 15$

7. 若  $\alpha, \beta$  满足  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 下列正确的是 ( )

- $\sin \alpha > \sin \beta$         $\cos \alpha > \cos \beta$   
  $\tan \alpha > \tan \beta$         $\cot \alpha > \cot \beta$   
  $\sin \alpha > \sin \beta$         $\cos \alpha > \cos \beta$   
  $\tan \alpha > \tan \beta$         $\cot \alpha > \cot \beta$

8. 设  $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\beta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ , 那么  $\alpha - \beta$  的范围是 ( )

- $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$         $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$   
  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$         $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$   
  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$         $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$   
  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$         $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

## 第 II 卷(非选择题共 100 分)

二、填空题(每小题 5 分, 共 10 分)

1. 两种药片有效成分见下表:

	成分	阿司匹林(毫克)	小苏打(毫克)	可待因(毫克)
药片		10	5	10
药片		10	5	10

月片)	员	苑	远
-----	---	---	---

若要求至少提供 愿皂早阿司匹林 苑皂早小苏打 愿皂早可待因 ,则两种药片的数量应满足的不等关系为 :摇摇(提示 :设提供 粤药片 曾片 ,月药片 赠片 ,用不等式的形式写出来 )援

员援用不等式填写下面的不等关系 :

(员)葬与 遭的积是非正数摇摇摇摇摇摇摇摇 ;

(圆)皂与 灶的和大于 责摇摇摇摇摇摇摇摇 ;

(猿)某学校规定学生离校时间 贼在 员点到 员点之间摇摇摇摇摇摇摇摇援

员援设 曾,粤,遭,缘,赠,葬,原,葬,若 曾,赠,则实数 葬,遭满足的条件是\_\_\_\_\_ 郢

员援若 葬,遭 砸,且 葬跃遭,则①  $\frac{员}{葬} \text{约} \frac{员}{遭}$  ;②  $\frac{员}{葬} \text{跃} \frac{员}{遭}$  ;③ 葬约遭④ 葬跃遭中 不等式恒成立的是\_\_\_\_\_ 援

### 三、解答题(共 苑分)

员援(员分)某家具公司制做木质的书桌和椅子 ,需要木工和漆工两道工序 ,已知木工平均四个小时做一把椅子 ,八个小时做一张书桌 ,该公司每星期木工最多有 愿园个小时 ,漆工平均两小时漆一把椅子、一小时漆一张书桌 ,该公司每星期漆工最多有 员园个小时 ,写出满足上述所有条件的不等式 郢

员援(员分) 员已知 园约曾,灶,比较 皂越遭, 皂原曾, 灶越遭, 皂曾, 灶的大小 ;

(圆)已知 葬,遭,糟均不相等的正实数 ,试比较  $\frac{葬遭糟}{葬遭+遭糟+糟葬}$  与  $\frac{葬遭+遭糟+糟葬}{葬遭+遭糟+糟葬}$  的大小援

员援(员分)若对于某区间 阅内任意 曾,粤,恒有  $\frac{曾粤曾}{圆} \geq \frac{枣(曾)垣枣(粤)}{圆}$  ,则称函数 枣(曾)是区间 阅上的凸函数 ,求证函数 枣(曾)越 葬(曾)葬(曾)在区间( 园,垣)上是凸函数援

例 1 (10分)某种杂志原以每本 2.50 元的价格销售,可以销售出 10 万本.根据市场调查,若单价每提高 0.05 元,销售量就减少 4000 本.若反提价后杂志的定价设为  $x$  元,怎样用不等式表示提价后的总收入不低于原来的总收入?

例 2 (10分)一批货物随 2 列货车从 A 市以速度  $v$  千米/小时匀速直达 B 市,已知两地铁路长 400 千米,为了安全,两列货车间距为  $\left(\frac{v}{10}\right)$  千米,那么这批物资全部运到 B 市,当  $v$  为多少时,才能使时间不超过 4 小时(列车车身长忽略不计)?

例 3 (10分)某商场在促销期间规定:商场内所有商品按标价的 80% 出售;同时,当顾客在该商场内消费满一定金额后,按下表所示的方案获得相应金额的奖券.

消费金额(元)的范围	[ 200, 300 )	[ 300, 400 )	[ 400, 500 )	[ 500, 600 )	...
获得奖券的金额(元)	100	200	300	400	...

根据上述促销的方法,顾客在该商场购物可以获得双重优惠,例如,购买标价为 500 元的商品,则消费金额为 400 元,获得的优惠额为  $500 - 400 = 100$  (元).设购买商品得到的优惠率为  $\frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$ . 回答下列问题:

(1) 若购买一件标价为 400 元的商品,则顾客得到的优惠率是多少?

(2) 对于标价在  $[ 200, 500 )$  (元)内的商品,顾客购买标价为多少元的商品可得到不小于  $\frac{1}{5}$  的优惠率?

### 第三章分层演练卷(二)

测试内容：一元二次不等式

(时间 100分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

#### 第 I 卷(选择题共 100分)

一、选择题(每小题 5分,共 100分)

不等式组  $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases}$  的解集为 ( )

A.  $\{x | -3 < x < 1\}$       B.  $\{x | 1 < x < 3\}$       C.  $\{x | -3 < x < 3\}$       D.  $\{x | 1 < x < -3\}$

不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集与不等式  $(x - 1)(x - 3) < 0$  的解集相同的是 ( )

A.  $\{x | 1 < x < 3\}$       B.  $\{x | 3 < x < 1\}$       C.  $\{x | 1 < x < -3\}$       D.  $\{x | -3 < x < 1\}$

不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集是  $\{x | a < x < b\}$ , 则  $a + b$  等于 ( )

A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

已知三个不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  ①,  $x^2 + 2x - 3 < 0$  ②,  $x^2 - 4 < 0$  ③, 要同时满足①和②的所有  $x$  都满足③, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $[-2, 2]$       B.  $[-1, 1]$       C.  $[-3, 3]$       D.  $[-4, 4]$

已知集合  $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + 2x - 3 < 0\}$ , 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $a$  有 ( )

A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

设  $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 且  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $B$  的解集是 ( )

A.  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$       B.  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$       C.  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$       D.  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$

已知关于  $x$  的方程  $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$  中, 常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 则下列结论中正确的是 ( )

A. 此方程无实根      B. 此方程有两个互异负实根  
 C. 此方程有两异号实根      D. 此方程仅有一个实根

怨关于曾的不等式曾原曾原原约园任意两个解的差不超过怨,则葬的最大值与最小值的和是 (摇摇)

粤爱摇摇摇 月爱摇摇摇 悦爱摇摇摇 阅爱原员  
 员设集合酝越曾曾垣曾垣约园,集合晕越曾曾垣曾垣约园,则酝U晕等于 (摇摇)

粤爱曾曾原园摇摇 月爱曾曾跃原员摇摇 悦爱曾曾约原员摇摇 阅爱曾曾原园  
 员若集合孕越曾曾原园,曾原园,曾在,匝越曾曾原园,曾在,则孕n匝的子集的个数为 (摇摇)

粤爱跃摇摇 月爱摇摇摇 悦爱摇摇摇 阅爱苑  
 员已知园约葬(员,函数枣曾越葬(葬原原原),使枣曾约园的曾的取值范围是 (摇摇)  
 粤爱原原园摇摇 月爱园,垣)摇摇 悦爱原原,垣)摇摇 阅爱垣,垣)

### 第II卷(非选择题共怨分)

#### 二、填空题(每小题源分,共员分)

员二次函数赠越曾垣曾垣槽曾(砸)的部分对应值如下表:

曾	原猿	原圆	原员	园	员	圆	猿	源
赠	远	园	原原	原远	原远	原原	园	远

则不等式葬垣曾垣槽曾的解集是摇摇摇摇摇摇  
 员数列{葬}中,葬越灶原灶,若对任意的正整数灶,葬≥葬都成立,则噪的取值范围是摇摇摇摇  
 员设葬跃园,葬≠员,函数枣曾越葬(曾原葬垣苑)跃园的解集为\_\_\_\_\_  
 员不等式葬垣曾垣槽曾的解集为(曾约曾),则不等式葬原曾垣槽曾的解集为\_\_\_\_\_援

#### 三、解答题(共苑分)

员(员分)解下列不等式:

(员)曾垣  $\frac{\text{遭员原曾}}{\text{葬}}$  约 遭曾(员);

(圆)葬葬原员)跃曾原员(葬跃);

(猿)葬垣员约葬垣葬(葬跃且葬≠员)



21. (12分) 已知  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $h(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $k(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $l(x) = \frac{1}{x+2}$ ,

- (1) 若  $x \in [1, 2]$ , 求  $f(x)$  的取值范围;
- (2) 若  $x \in [2, 3]$ , 求  $g(x)$  的取值范围;
- (3) 若  $x \in [1, 2]$  为一元集, 求  $h(x)$  的取值范围;
- (4) 若  $x \in [1, 2]$ , 求  $k(x)$  的取值范围.

22. (12分) 若函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的图象过点  $(1, 1)$ , 是否存在常数  $a, b$  使不等式  $\frac{1}{x} \leq \frac{a}{x+b}$  ( $x > 0$ ) 对一切实数  $x$  都成立? 若存在, 求出  $a, b$ ; 若不存在, 则说明理由.

23. (12分) 从社会效益和经济效益出发, 某地投入资金进行生态环境建设, 并以此发展旅游产业. 根据规划, 本年度投入 800 万元, 以后每年投入将比上年度减少  $\frac{1}{5}$ . 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元, 由于该项建设对旅游业有促进作用, 预计今后的旅游业收入每年会比上年度增加  $\frac{1}{4}$ .

(1) 设  $n$  年内 (本年度为第一年) 总投入为  $a_n$  万元, 旅游业总收入为  $b_n$  万元, 写出  $a_n, b_n$  的表达式;

(2) 至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入?

例 1 (10 分) 一个车辆制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线, 这条流水线生产的摩托车数量  $x$  (辆) 与创造的价值  $y$  (元) 之间有如下的关系:  $y = -18x^2 + 2250x$ . 若这家工厂希望在一个星期内利用这条流水线创收 20 万元以上, 那么它在一个星期内大约应该生产多少辆摩托车?

例 2 (10 分) 甲、乙两公司同时开发同一种新产品, 经测算, 对于函数  $f(x) = -x^2 + 10x$  和  $g(x) = -x^2 + 14x$ , 当甲公司投入  $x$  万元作宣传时, 若乙公司投入的宣传费小于  $f(x)$  万元, 则乙公司对这一新产品的开发有失败的风险, 否则没有失败的风险; 当乙公司投入  $x$  万元作宣传时, 若甲公司投入的宣传费小于  $g(x)$  万元, 则甲公司对这一新产品的开发有失败的风险, 否则没有失败的风险. 援 (1) 试解释  $f(x)$  和  $g(x)$  的实际意义;

(2) 设  $f(x)$  和  $g(x)$  的图像分别为  $C_1$  和  $C_2$ , 甲、乙公司为了避免恶性竞争, 经过协商, 同意在双方均无失败风险的情况下尽可能少地投入宣传费用, 问甲、乙两公司应投入多少宣传费?

### 第三章分层演练卷(三)

测试内容:基本不等式

(时间:45分钟,满分:150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

#### 第I卷(选择题,共45分)

一、选择题(每小题3分,共45分)

1. 下列各式成立的是 ( )

A.  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a+b}{2}$  (a, b ∈ R)

B.  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{ab}$  (其中 a, b 不全相等)

C.  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a+b}{2}$  (其中 a, b 不全相等)

D.  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{ab}$  (a, b ∈ R)

2. 设  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\frac{x}{y} = \tan \theta$ , 则  $\frac{x}{y}$  与  $\frac{y}{x}$  的大小关系是 ( )

A.  $\frac{x}{y} \geq \frac{y}{x}$

3. 下列结论正确的是 ( )

A. 当  $x > 0$  且  $x \neq 1$  时,  $x + \frac{1}{x} > 2$

B. 当  $x > 0$  时,  $x + \frac{1}{x}$  的最小值为 2

4. 某民营企业生产的一种电子产品, 2015年的产量在2014年的基础上增长率为  $a$ , 2016年又在2015年的基础上增长率为  $b$ , 若这两年的平均增长率为  $\sqrt{ab}$ , 则 ( )

A.  $a > b$

B.  $a < b$

C.  $a = b$

D.  $a$  与  $b$  的大小不确定

5. 已知点  $P(x, y)$  到  $A(1, 0)$  和  $B(0, 1)$  的距离相等, 则  $\frac{x}{y}$  的最小值为 ( )

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{4}$

D.  $\frac{1}{5}$

6. 已知  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{x}{y} = \tan \theta$ ,  $\frac{y}{x} = \cot \theta$ , 则  $\frac{x}{y}$  与  $\frac{y}{x}$  的大小关系是 ( )

A.  $\frac{x}{y} \leq \frac{y}{x}$

B.  $\frac{x}{y} \geq \frac{y}{x}$

C.  $\frac{x}{y} < \frac{y}{x}$

D.  $\frac{x}{y} > \frac{y}{x}$

2. 若  $a, b$  是正数, 则  $\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}, \frac{a^2+b^2}{2}, \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$  这四个数的大小顺序是 ( )

$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$  ( )     
  $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a+b}{2}$  ( )

$\frac{a^2+b^2}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$  ( )     
  $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$  ( )

3. 设  $a, b, c$  是正数, 且  $a+b+c=1$ , 则 ( )

$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  ( )     
  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{1}{abc}$  ( )

$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$  ( )     
  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$  ( )

4. 设  $a, b, c$  是正数, 则以下不等式中不恒成立的是 ( )

$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$  ( )     
  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$  ( )

$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$  ( )     
  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}$  ( )

5. 建造一个容积为  $V$ , 深为  $h$  的长方体无盖水池, 如果池底和池壁的造价每平方米分别为  $a$  元和  $b$  元, 那么水池的最低总造价为 ( )

$\frac{2\sqrt{aV}}{b}$  元 ( )     
  $\frac{2\sqrt{aV}}{b} + 2\sqrt{aV}$  元 ( )     
  $\frac{2\sqrt{aV}}{b} + 2\sqrt{aV} + 2\sqrt{aV}$  元 ( )     
  $\frac{2\sqrt{aV}}{b} + 2\sqrt{aV} + 2\sqrt{aV} + 2\sqrt{aV}$  元 ( )

6. 函数  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$  ( $x > 0$ ) 的值域是 ( )

$(-\infty, \frac{3}{2})$  ( )     
  $(\frac{3}{2}, +\infty)$  ( )     
  $(-\infty, \frac{3}{2}]$  ( )     
  $[\frac{3}{2}, +\infty)$  ( )

7. 下列函数的最小值为 1 的是 ( )

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$  ( )     
  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$  ( )

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  ( )     
  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  ( )

## 第 II 卷 (非选择题共 120 分)

二、填空题 (每小题 5 分, 共 10 分)

8. 若函数  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$  ( $x > 0$ ) 的值域为  $(-\infty, \frac{3}{2})$ , 其中  $a, b$  且  $a+b=1$ , 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

9. 某公司一年购买某种货物 100 吨, 每次都购买  $x$  吨, 运费为 3 万元/次, 一年的总存储费用为  $48x$  万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则  $x =$  ( ) 吨

10. 已知直线  $l$  过点  $A(1, 2)$ , 且与  $x$  轴、 $y$  轴的正半轴分别交于  $B, C$  两点,  $O$  为坐标原点, 则三角形  $BOC$  面积的最小值为 ( )

11. 设  $a, b, c$  是正数, 且  $a+b+c=1$ , 则  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  的最大值是 ( )

三、解答题 (共 10 分)

12. (10 分) 已知  $a, b$  都是正数, 求证:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$

( 10 ) 已知  $a, b, c$  都是正数, 求证  $(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{abc}}$

( 11 ) 若  $x > 0$ , 求函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的最小值;

( 12 ) 若  $x > 0$ , 求函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的最大值

( 13 ) 某公司一年需要一种计算机元件 1000 个, 每天需同样多的元件用于组装整机, 该元件每年分 12 次进货, 每次购买元件的数量均为 100 个, 购一次货需手续费 50 元, 已购进而未使用的元件要付库存费, 假设平均库存量为 50 个, 每个元件的库存费为每年 1 元, 如果不计其他费用, 请你帮公司计算, 每年进货几次花费最小?

( 14 ) 三个同学对问题“关于  $x$  的不等式  $\frac{a}{x} + x \geq 2$  在  $x \in (0, +\infty)$  上恒成立, 求实数  $a$  的取值范围”提出各自的解题思路

甲说: “只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值”

乙说: “把不等式变形为左边含变量  $x$  的函数, 右边仅含常数, 求函数的最值”

丙说: “把不等式两边看成关于  $x$  的函数, 作出函数图象”

参考上述解题思路, 你认为他们所讨论的问题的正确结论, 即  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_

(12分)某村计划建造一个室内面积为  $1800 \text{ m}^2$  的矩形蔬菜温室,在温室内,沿左、右两侧与后侧内墙各留  $1 \text{ m}$  宽的通道,沿前侧内墙留  $3 \text{ m}$  宽的空地,当矩形温室的边长各为多少时,蔬菜的种植面积最大?最大种植面积是多少?

(12分)对  $m$  个单位质量的含污物体进行清洗,清洗前其清洁度(含污物体的清洁度定义为  $\frac{\text{原污物质量}}{\text{物体质量(含污物)}}$ )为  $\frac{1}{2}$ ,要求洗完后的清洁度是  $\frac{3}{4}$ .有两种方案可供选择,方案甲:一次清洗;方案乙:两次清洗.该物体初次清洗后受残留水等因素影响,其质量变为  $\frac{3}{4}m$ .用  $x$  单位质量的水初次清洗后的清洁度是  $\frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ ,用  $y$  单位质量的水第二次清洗后的清洁度是  $\frac{3}{4} + \frac{y}{4}$ ,其中  $\frac{1}{2} + \frac{x}{4}$  是该物体初次清洗后的清洁度.(1)分别求出方案甲以及方案乙的用水量,并比较哪一种方案用水量较少;

(2)若采用方案乙,当  $m$  为某定值时,如何安排初次与第二次清洗的用水量,使总用水量最少?并讨论  $m$  取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

### 第三章分层演练卷(四)

测试内容 简单线性规划

(时间 45分钟 满分 100分)

题号	一	二	三	总分
得分				

#### 第 I 卷(选择题共 40分)

一、选择题(每小题 5分,共 40分)

1. 已知点  $A(1, 2)$  和点  $B(3, 4)$  在直线  $ax + by = c$  的两侧, 则 ( )

- $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

2. 不等式组  $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$  表示的平面区域是一个 ( )

- 等腰直角三角形 或 直角三角形 或 梯形 或 矩形

3. 在直角坐标系中, 满足不等式  $x^2 + y^2 > 1$  的点  $(x, y)$  的集合(用阴影部分来表示)的是图中的 ( )



图 1

4. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的两条渐近线与直线  $x = c$  围成一个三角形区域, 表示该区域的不等式组是 ( )

- $\begin{cases} y > \frac{b}{a}x \\ y < -\frac{b}{a}x \\ x < c \end{cases}$  或  $\begin{cases} y < \frac{b}{a}x \\ y > -\frac{b}{a}x \\ x < c \end{cases}$  或  $\begin{cases} y > \frac{b}{a}x \\ y < -\frac{b}{a}x \\ x > c \end{cases}$  或  $\begin{cases} y < \frac{b}{a}x \\ y > -\frac{b}{a}x \\ x > c \end{cases}$

5. 不在圆  $x^2 + y^2 = 1$  表示的平面区域内的点是 ( )

- $(1, 0)$  或  $(0, 1)$  或  $(-1, 0)$  或  $(0, -1)$

6.  $x > 1$  是  $x^2 - 1 > 0$  的 ( )

- 充分不必要条件 或 必要不充分条件 或 既不充分也不必要条件

7. 下列二元一次不等式组, 能表示图 2 中阴影部分的是 ( )

- $\begin{cases} x > 1 \\ x + y > 2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x > 1 \\ x - y > 2 \end{cases}$

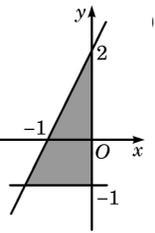


图 2

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 2 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq 1 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$

已知实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 1, \\ x + y \geq 3, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的取值范围是 ( )

- A.  $[1, 5]$
- B.  $[2, 5]$
- C.  $[3, 5]$
- D.  $[4, 5]$

- A.  $[1, 5]$
- B.  $[2, 5]$
- C.  $[3, 5]$
- D.  $[4, 5]$

已知平面区域如图 1 所示，若在平面区域内取得最大值的最优解有无数多个，则  $z$  的值为 ( )

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

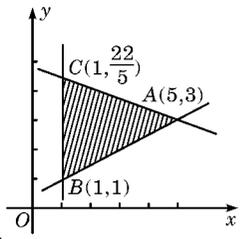


图 1

已知点  $P(x, y)$  在不等式组  $\begin{cases} x + y \leq 2, \\ x - y \leq 2, \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$  表示的平面区域上运动，则  $z = x + y$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-1, 1]$
- B.  $[0, 1]$
- C.  $[1, 2]$
- D.  $[2, 3]$

- A.  $[-1, 1]$
- B.  $[0, 1]$
- C.  $[1, 2]$
- D.  $[2, 3]$

在平面直角坐标系中，不等式组  $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ x - y \geq 2, \\ x \leq 4 \end{cases}$  表示的平面区域的面积是 ( )

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 8

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 8

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 8

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 8

在  $\triangle ABC$  中，三个顶点坐标为  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 1)$ ，点  $P(x, y)$  在  $\triangle ABC$  内部及边界上运动，则  $z = x + y$  的最大值及最小值为 ( )

- A. 1, 0
- B. 1, 1
- C. 1, 0.5
- D. 1, 0.25

- A. 1, 0
- B. 1, 1
- C. 1, 0.5
- D. 1, 0.25

第 II 卷(非选择题共 80 分)

二、填空题(每小题 5 分,共 10 分)

已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ x - y \geq 2, \\ x \leq 4 \end{cases}$ ，则  $z = \frac{x}{y}$  的最小值为 \_\_\_\_\_

设  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y \leq 1, \\ x - y \leq 1, \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z = x + y$  的最大值为 \_\_\_\_\_

已知平面区域  $D$  由以  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(1, 1)$  为顶点的三角形内部和边界组成，若在区域  $D$  上有无穷多个点  $(x, y)$  可使目标函数  $z = x + y$  取得最小值，则  $z$  的值为 \_\_\_\_\_

变量  $x, y$  满足条件  $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \leq 2, \\ x + y \leq 4, \end{cases}$  这些点中,使目标函数  $z = 2x + y$  取得最大值的点的坐标是  $(2, 2)$

三、解答题(共 20 分)

(6 分) 设  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y \leq 1, \\ x - y \leq 1, \\ x \geq 0, \end{cases}$  求  $z = 2x + y$  的最大值和最小值

(6 分) 满足线性约束条件  $\begin{cases} x + y \leq 2, \\ x - y \leq 2, \\ x \geq 0, \end{cases}$  的可行域中共有多少个整点?

(8 分) 某厂使用两种零件  $A, B$  装配两种产品甲、乙,该厂的生产能力是月产甲最多 400 件,月产乙最多 500 件,而且装一件甲需要  $A$  个,  $B$  个,装一件乙需要  $A$  个,  $B$  个,该厂能用的  $A$  最多有 1600 个,  $B$  最多有 1100 个,用不等式将甲、乙两种产品产量之间的关系表示出来,并画出相应的平面区域



20. (12分) 某矿山车队有 48 辆载重量为 12 吨的甲型卡车和 32 辆载重量为 10 吨的乙型卡车, 有 32 名驾驶员. 此车队每天至少要运 480 吨矿石至冶炼厂. 已知甲型卡车每辆每天可往返 16 次, 乙型卡车每辆每天可往返 12 次. 甲型卡车每辆每天的成本费为 320 元, 乙型卡车每辆每天的成本费为 240 元. 问每天派出甲型车与乙型车各多少辆, 车队所花成本费最低?

21. (12分) 某人上午 8 时, 乘摩托艇以匀速  $v$  千米/时 (  $4 \leq v \leq 20$  ) 从粤港出发到距 100 千米的月港去, 然后乘汽车以匀速  $w$  千米/时 (  $40 \leq w \leq 80$  ) 自月港向距 200 千米的悦市驶去. 应该在同一天下午 4 点至 6 点到达悦市. 设乘汽车、摩托艇去所需要的时间分别是  $x$  小时、 $y$  小时. (1) 作图表示满足上述条件的  $x$ 、 $y$  的取值范围;

(2) 如果已知所需的经费  $p$  元 (  $1300 \leq p \leq 1400$  ), 那么  $x$ 、 $y$  分别是多少时走得最经济? 此时需花费多少元?

22. (12分) 某工厂的一个车间生产某种产品, 其成本为每千克 2 元, 售价为每千克 4 元. 在生产产品的同时, 每千克产品产生出 2 千克的污水. 污水有两种排放方式: 一是输送到污水处理厂, 经处理 ( 设污水处理率为 80% ) 后, 排入河流; 二是直接排入河流. 若污水处理厂每小时最大处理能力是 100 吨污水, 处理成本是每立方米污水 1 元, 环保部门对排入河流的污水收费标准是每立方米污水 2 元. 根据环保要求, 该车间每小时最多允许排到河流中的污水是 100 吨. 则该车间应选择怎样的生产与排污方案, 才能使净收益最大?

### 第三章知能闯关卷

(时间 100分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

#### 第 I 卷(选择题共 100分)

##### 一、选择题(每小题 5分,共 100分)

1. 下列各一元二次不等式中,解集为空集的是 ( )

- $x^2 - 2x + 1 < 0$         $x^2 - 2x + 1 > 0$   
  $x^2 - 2x + 1 \leq 0$         $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

2. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x + 1 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 > 0\}$ , 则集合  $A \cap B$  等于 ( )

- $\emptyset$         $\{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$   
  $\{x \mid x^2 - 2x + 1 < 0\}$         $\{x \mid x^2 - 2x + 1 > 0\}$

3. 设  $a, b \in \mathbb{R}$ , 则  $a > b$  是  $a^2 > b^2$  的 ( )

- 充分不必要条件       必要不充分条件  
 充要条件       既不充分也不必要条件

4. 在  $\mathbb{R}$  上定义运算  $\otimes$ :  $a \otimes b = a + b + ab$ , 若不等式  $(a \otimes b) \otimes c > 0$  对任意实数  $a, b, c$  成立, 则 ( )

- $c > 0$         $c < 0$         $c > -1$         $c < -1$

5. 若  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ , 则下列不等式 ①  $\frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}$  ②  $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$  ③  $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d}$  ④  $\frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$  中, 正确的不等式有 ( )

- 1 个       2 个       3 个       4 个

6. 若  $a, b, c \in \mathbb{R}$  且  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 则  $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}$  的最小值为 ( )

- $\frac{1}{2}$         $\frac{1}{3}$         $\frac{1}{4}$         $\frac{1}{5}$

7. 有如下几个命题:

- ① 如果  $a, b$  是方程  $x^2 + px + q = 0$  的两个实根且  $a > b$ , 那么不等式  $x^2 + px + q < 0$  的解集为  $\{x \mid a > x > b\}$ ;
- ② 当  $\Delta > 0$  时, 一元二次不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集为  $\emptyset$ ;
- ③  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$  与不等式  $(a-b)(c-d) \leq 0$  的解集相同;
- ④  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  与  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  的解集相同

其中正确命题的个数是 ( )

- 0       1       2       3

如果方程  $x^2 + 2x + 2 = 0$  的三个根可以作为三角形的三边长,那么实数  $a$  的取值范围是 ( )

已知集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$ , 则  $A \cap B$  等于 ( )

设集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$ , 则  $A \cup B$  表示的平面区域 (不含边界的阴影部分) 是图 1 中的 ( )

不等式  $x^2 - 2x + 2 \leq 0$  的解集为  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\}$ , 对于系数  $a, b$  有如下结论:

一批救灾物资用  $n$  辆汽车从某市以  $v$  千米/时的速度运往灾区,已知两地公路路线长  $s$  千米,为了安全起见,两辆汽车的间距不得小于  $\left(\frac{s}{n}\right)$  千米,那么这批物资全部运到灾区,至少需要 ( ) 小时

如图 1,有一张单栏的竖向张贴的海报,它的印刷面积为  $1$  平方米 (图中阴影部分),上下空白各  $a$  米,左右空白各  $b$  米,则四周空白部分面积的最小值

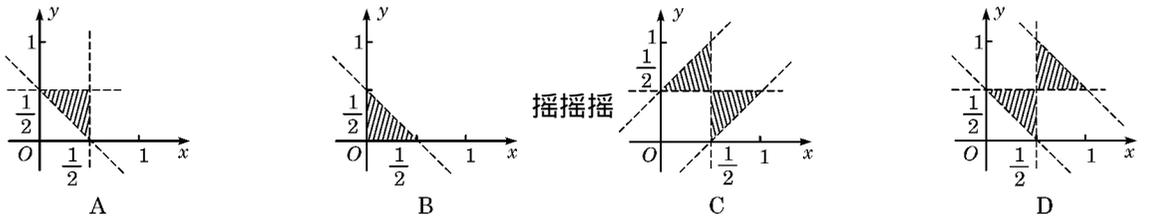


图 1

### 第 II 卷 (非选择题共 120 分)

#### 二、填空题 (每小题 5 分,共 20 分)

设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 则使得目标函数  $z = 2x + y$  取得最大值的点  $(x, y)$  是 ( )

不等式  $x^2 - 2x + 2 \leq 0$  的解集为  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\}$ , 对于系数  $a, b$  有如下结论:  
 ①  $a < b$ ; ②  $a > b$ ; ③  $a = b$ ; ④  $a \geq b$ ; ⑤  $a \leq b$  其中正确结论的序号是 ( )

一批救灾物资用  $n$  辆汽车从某市以  $v$  千米/时的速度运往灾区,已知两地公路路线长  $s$  千米,为了安全起见,两辆汽车的间距不得小于  $\left(\frac{s}{n}\right)$  千米,那么这批物资全部运到灾区,至少需要 ( ) 小时

如图 1,有一张单栏的竖向张贴的海报,它的印刷面积为  $1$  平方米 (图中阴影部分),上下空白各  $a$  米,左右空白各  $b$  米,则四周空白部分面积的最小值

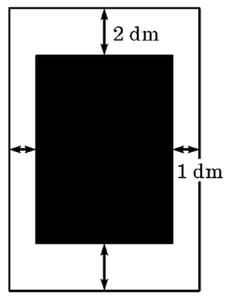


图 1

是摇摇摇摇援

三、解答题(共苑分)

猿援(分) 解关于曾的不等式  $\frac{曾-1}{曾+1} > \frac{曾-2}{曾+2}$  援

(圆) 解关于曾的不等式  $\frac{曾-1}{曾+1} > \frac{曾-2}{曾+2}$  其中  $曾 < 0$  援

源援(分) 画出由不等式组  $\begin{cases} 曾 > 1, \\ 曾 < 2, \\ 曾 < 3 \end{cases}$  表示的平面区域 郢

(圆) 画出由不等式  $\frac{曾-1}{曾+1} > \frac{曾-2}{曾+2}$  表示的平面区域 援

缘援(分) 有不等式  $\frac{曾-1}{曾+1} > \frac{曾-2}{曾+2}$  (噪 > 0)

(员) 若不等式的解集是  $\{曾 | 曾 < 1\}$  或  $\{曾 | 曾 > 2\}$ , 求噪的值;

(圆) 若不等式的解集是  $\{曾 | 曾 < 1\}$ , 求噪的取值范围 援

陆援(分) 某县投资兴建了甲、乙两个企业, 圆园零零年该县从甲企业获得利润 员园园万元, 从乙企业获得利润 源园园万元, 以后每年获得的利润甲企业以翻一番的速度递增, 而乙企业则减为上一年的一半, 据估算该县年收入 缘园园万元可解决温饱问题, 年收入 缘园园万元可达到小康水平, 试估算:

(员) 若以 圆园零零年为第 员年, 则该县从上述两个企业获得利润最少的一年是第几年? 这年还需另外筹集多少万元才能解决温饱问题?

( 圆)到 圆年该县能否达到小康水平?为什么?

( 圆)已知函数  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  求函数  $f(x)$  的最大值;

( 圆)设  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  求  $f(x)$  的单调区间

( 圆)已知函数  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  有如下性质:如果常数  $a > 0$ ,那么该函数在  $(0, \sqrt{a}]$  上是减函数,在  $[\sqrt{a}, +\infty)$  上是增函数  
( 圆)如果函数  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  的值域为  $(-\infty, a]$ ,求  $a$  的值;

( 圆)研究函数  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  常数  $a > 0$  在定义域内的单调性,并说明理由;

( 猿)对函数  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  和  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  (常数  $a > 0$ )作出推广,使它们都是你所推广的函数的特例  
研究推广后的函数的单调性(只需写出结论,不必证明),并求函数  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  ( $n$  是正整数)在区间  $[\frac{1}{n}, 1]$  上的最大值和最小值(可利用你的研究结论解答)

### 第三章考题荟萃卷

(时间 100分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

#### 第 I 卷(选择题共 100分)

##### 一、选择题(每小题 5分,共 100分)

1. (2014年广东省广州市学业水平测试)已知  $a > 0, b > 0$ , 则下列不等式一定成立的是 ( )

- A.  $a + b > 2\sqrt{ab}$        B.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$   
 C.  $a^2 + b^2 > 2ab$        D.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}$

2. (2014年四川)不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集为 ( )

- A.  $(-1, 3)$        B.  $(-3, 1)$        C.  $(-1, 1)$        D.  $(1, 3)$

3. (2014年广东)设  $a > 0, b > 0$ , 若  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , 则下列不等式中正确的是 ( )

- A.  $a + b \geq 4$        B.  $a + b \leq 4$   
 C.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$        D.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 4$

4. (2014年浙江)已知  $a, b$  都是实数, 那么“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的 ( )

- A. 充分而不必要条件       B. 必要而不充分条件  
 C. 充分必要条件       D. 既不充分也不必要条件

5. (2014年山东)不等式  $\frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$  的解集是 ( )

- A.  $[-1, 1]$        B.  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$   
 C.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$        D.  $(-1, 1)$

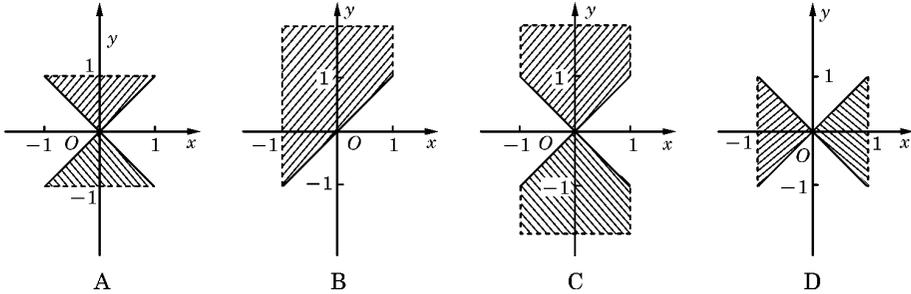
6. (2014年陕西)“ $a > b$ ”是“对任意正数  $x, y, z$  恒有  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} > \frac{x+y+z}{a+b+c}$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件       B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件       D. 既不充分又不必要条件

7. (2014年天津)已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ , 则不等式  $f(x) \geq 0$  的解集为 ( )

- A.  $[-1, 1]$        B.  $(-1, 1)$   
 C.  $[-1, +\infty)$        D.  $(-1, +\infty)$

愿(湖北)在平面直角坐标系中,满足不等式组  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$  的点(阴影表示)为图中的 ( )



怨(全国 II)设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最小值为 ( )

员(湖南)已知变量  $x, y$  满足条件  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$  则  $z = x + 2y$  的最小值是 ( )

员(山东临沂第一中学学业水平测试)不等式  $x^2 + y^2 \leq 1$  的解集是  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则  $z = x + y$  的值为 ( )

员(山东临沂第一中学学业水平测试)在  $x^2 + y^2 \leq 1$  的条件下, 四个结论: ①  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$  ②  $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$  ③  $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$  ④  $x+y \leq \sqrt{x^2+y^2}$  其中正确的个数是 ( )

第 II 卷(非选择题共 120 分)

二、填空题(每小题 5 分,共 10 分)

员(北京)不等式  $x^2 - 2x + 1 < 0$  的解集是

员(江西)不等式  $x^2 - 2x + 1 \leq 0$  的解集为

员(山东临沂第一中学学业水平测试)不等式组  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$  表示的平面区域内的

整点坐标是摇摇摇摇摇摇援

员援 (圆年山东省临沂市第一中学学业水平测试)若关于曾的不等式曾原曾垣葬原葬原葬在砸上的解集为 $\emptyset$  则葬的取值范围为摇摇摇摇摇摇援

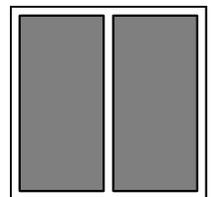
三、解答题(共苑分)

员援 (苑分) (圆年福建模拟)设葬遭曾赠砸,且葬垣遭越员,曾垣赠越员,求证:遭曾垣赠查员援

员援 (苑分) (圆年安徽模拟)已知 
$$\begin{cases} 曾垣赠原葬 > 园, \\ 猿曾原赠原缘 < 园, \\ 曾原圆曾垣缘 > 园, \end{cases}$$
 则曾赠取何值时(曾垣员)圆垣赠垣员圆取得最大值和最小值?最大值、最小值各是多少?

员援 (苑分) (圆年北京文)记关于曾的不等式曾原葬约园的解集为孕,不等式遭原员查员的解集为匝援  
(员)若葬垣猿,求孕;  
(圆)若匝 $\subset$ 孕,求正数葬的取值范围援

圆援 (苑分) (圆年湖北文)如图圆要设计一张矩形广告,该广告含有大小相等的左右两个矩形栏目(即图中阴影部分)这两栏目的面积之和为员垣圆圆,四周空白的宽度为员,两栏目之间的中缝空白的宽度为缘,怎样确定广告的高与宽的尺寸(单位:圆),能使矩形广告面积最小?



图圆

例 1 (湖北理) 某水库的蓄水量随时间而变化, 用  $t$  表示时间, 以月为单位, 年初为起点, 根据历年数据, 某水库的蓄水量 (单位: 亿立方米) 关于  $t$  的近似函数关系式为

$$V(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{12} t \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{12} t \right)$$

(1) 该水库的蓄水量小于 1 亿立方米的时期称为枯水期, 问一年内哪几个月份是枯水期?

(2) 求一年内该水库的最大蓄水量 (取整数计算)

例 2 (安徽模拟) 某渔业公司年初用 10 万元购买一艘捕鱼船, 第一年各种费用 1 万元, 以后每年都增加 0.5 万元, 每年捕鱼收益 5 万元

(1) 问第几年开始获利?

(2) 若干年后, 有两种处理办法: ① 年平均利润最大时, 以 10 万元出售该船; ② 总纯收入获利最大时, 以 10 万元出售该渔船, 问哪种方案最合算?

## 模块水平测试卷

(时间 100分钟 满分 150分)

题号	一	二	三	总分
得分				

### 第 I 卷 (选择题 共 100分)

一、选择题 (每小题 5分, 共 100分)

1. 下列四个数中, 是数列  $\{(-1)^n \cdot n\}$  中的一项是 ( )

A.  $2008$     
  B.  $-2008$     
  C.  $2009$     
  D.  $-2009$

2. 若  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 则  $\log_a \frac{1}{a}$  与  $\log_a a$  的大小关系是 ( )

A.  $\log_a \frac{1}{a} > \log_a a$     
  B.  $\log_a \frac{1}{a} < \log_a a$     
  C.  $\log_a \frac{1}{a} = \log_a a$     
  D. 不能确定

3. 已知  $\triangle ABC$  是直角三角形,  $\triangle DEF$  是等腰三角形, 三角形三条边  $a, b, c$  的对角分别是  $A, B, C$ , 那么满足  $\{a, b, c\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$  的三角形的集合是 ( )

A.  $\emptyset$     
  B.  $\{Rt\triangle\}$     
  C.  $\{Rt\triangle, \text{等腰}\triangle\}$     
  D.  $\{Rt\triangle, \text{等腰}\triangle, \text{等边}\triangle\}$

4. 一角槽的横断面如图 1 所示, 若连结  $AC$ , 则四边形  $ABCD$  是矩形, 且  $\alpha > \beta$ ,  $\sin \alpha > \sin \beta$ , 则  $AC$  长为 ( )

A.  $\frac{a}{\sin \alpha}$     
  B.  $\frac{a}{\sin \beta}$     
  C.  $\frac{a}{\cos \alpha}$     
  D.  $\frac{a}{\cos \beta}$

5. 已知四个实数  $a, b, c, d$ , 原成等差数列, 五个实数  $a, b, c, d, e$ , 原成等比数列, 则  $\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{c}$  等于 ( )

A.  $\frac{a}{e}$     
  B.  $\frac{b}{d}$     
  C.  $\frac{c}{c}$     
  D.  $\frac{d}{b}$

6. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = \theta$ , 那么  $\sin \theta$  ( )

A. 一定是  $\frac{a}{c}$     
  B. 一定是  $\frac{b}{c}$     
  C. 一定是  $\frac{a}{b}$     
  D. 一定是  $\frac{b}{a}$

7. 若  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 则常数  $\log_a a$  的取值范围是 ( )

A.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$     
  B.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$     
  C.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$     
  D.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

8. 已知等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1, a_2$  为方程  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的两个根, 则  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$  的值为 ( )

A.  $2$     
  B.  $3$     
  C.  $4$     
  D.  $6$

9. 函数  $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)$  的最小正周期和最大值分别为 ( )

A.  $2\pi, \sqrt{2}$     
  B.  $\pi, \sqrt{2}$     
  C.  $2\pi, 2$     
  D.  $\pi, 2$

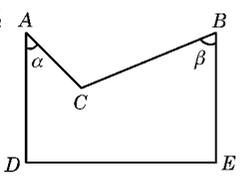


图 1

已知函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  的定义域为  $D_1$ , 函数  $g(x) = \frac{1}{x}$  的定义域为  $D_2$ , 则  $D_1 \cap D_2 =$  ( )

A.  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

B.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

C.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

D.  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

函数  $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$  在区间  $[\frac{\pi}{6}, \pi]$  的简图是图 1 中的 ( )

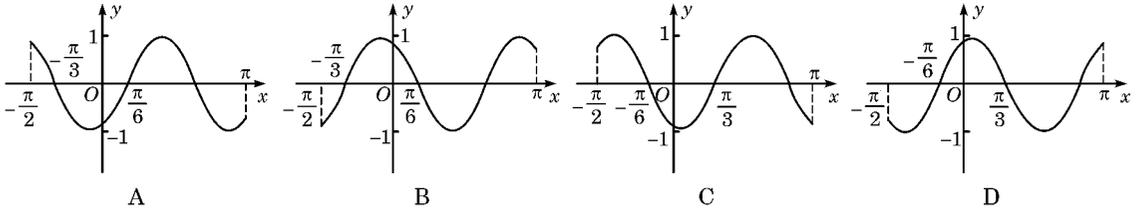


图 1

给出平面区域如图 2 所示, 目标函数  $z = x + y$  若当且仅当  $(x, y)$  在点  $A$  处取最小值, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

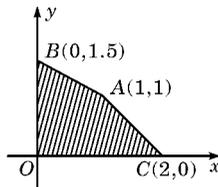


图 2

A.  $a < 1$

B.  $1 < a < 2$

C.  $a > 2$

D.  $a > 1.5$

## 第 II 卷 (非选择题共 120 分)

二、填空题 (每小题 5 分, 共 10 分)

已知不等式  $x^2 + 2x - 3 < 0$  的解集为  $A$ , 不等式  $x^2 - 4x + 3 < 0$  的解集为  $B$ , 则在  $A \cap B$  中,  $x$  分别取  $1, 2, 3$  三条边的对角, 如果  $\triangle ABC$  是锐角三角形, 那么  $\angle C$  的取值范围是

若干个能惟一确定一个数列的量称为该数列的一个“基本量”, 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的无穷等比数列,  $S_n$  是其前  $n$  项和, 下列  $\{a_n\}$  的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是第 ( ) 组 (写出所有符合要求的组号)

- ①  $a_1$  与  $a_2$ ; ②  $a_1$  与  $a_3$ ; ③  $a_1$  与  $a_4$ ; ④  $a_1$  与  $a_5$

在  $\triangle ABC$  中, 三个顶点的坐标分别为  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(0,1)$ , 如果点  $P$  在  $\triangle ABC$  内部和外界上运动, 那么  $PA^2 + PB^2 + PC^2$  的最大值是

三、解答题 (共 10 分)

(10 分) 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $AC = 1$ ,  $M$  为  $AB$  边上的中线,  $\angle MCB = \theta$ , 求  $\sin \theta$

18. (12分) 已知二次函数  $f(x) = x^2 + 2x + a$ , 设方程  $f(x) = 0$  的两个实数根为  $\alpha$  和  $\beta$

(1) 如果  $\alpha > 0, \beta > 0$ , 设函数  $f(x)$  的对称轴为  $x = m$ , 求证:  $m > 0$ ;

(2) 如果  $\alpha < 0, \beta < 0$ , 求  $m$  的取值范围

19. (12分) 已知不等式  $x^2 + 2x + a < 0$  的解集为  $\{x | x_1 < x < x_2\}$

(1) 求  $x_1$  的值;

(2) 若不等式  $x^2 + 2x + a < 0$  在  $x \in [1, 2]$  上恒成立, 求实数  $a$  的最大值

20. (12分) 设函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n > 0, a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 令  $b_n = \frac{1}{n}$ , 试比较  $b_n$  与  $a_n$  的大小, 并加以证明

（员分）在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ ，已知  $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$ ，求  $C$  的值；

（圆分）求  $a$  的值

（员分）某工厂  $2010$  年的某产品的年产量为  $100$  万只，每只产品的销售价为  $10$  元，固定成本为  $5$  元， $2011$  年，工厂第一次投入  $100$  万元（科技成本），并计划以后每年比上一年多投入  $100$  万元（科技成本），预计产量年递增  $10\%$  万只，第  $n$  次投入后，每只产品的固定成本为  $\frac{5}{\sqrt{n}}$  元（ $\frac{5}{\sqrt{n}}$  为常数， $n$  在且  $n \geq 1$ ），若产品销售价保持不变，第  $n$  次投入后的年利润为  $W_n$  万元

（员分）求  $W_n$  的值，并求出  $W_n$  的表达式；

（圆分）问从今年算起第几年利润最高？最高利润为多少万元？

# 参考答案

## 第一章分层演练卷(一)

### 一、选择题

猿猴解析 粤中  $\{ \}$  表示集合, 所以粤不正确; 数列中的各项是有顺序的, 所以月不正确; 阅中, 数列第  $n$  项为  $\frac{1}{n}$ , 所以阅不正确; 很明显悦正确援

猿猴解析 粤令  $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$  解得  $n = 1$  或  $n = 0$ , 又  $n = 0$  则方程无意义, 所以粤不正确; 用同样的方法知月不正确, 悦正确援

猿猴解析 粤数列通项公式为  $a_n = \sqrt{n}$ , 令  $\sqrt{n} = 1$  解得  $n = 1$  援

猿猴解析 粤容易错选粤, 错误的原因是: 本题所给数列的表达式是  $a_n$ , 并非通项  $a_n = \sqrt{n}$ , 亦  $a_n = \sqrt{n}$ , 令  $\sqrt{n} = 1$  解得  $n = 1$  援

猿猴解析 粤设  $a_n$  是数列中的项, 则  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n}$  援  
猿猴解析 粤因为  $n = 1$ , 所以这样的  $n$  不存在, 即  $\frac{1}{n}$  不是数列中的项, 同理得  $\frac{1}{2}$  也不是数列中的项, 又设  $\frac{1}{n}$  是数列中的项, 则  $\frac{1}{n} = \frac{1}{k}$  解得  $n = k$  援

猿猴解析 粤根据递推公式依次求出  $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$  援  
猿猴解析 粤  $a_n = \frac{1}{n}$  援

猿猴解析 粤  $a_n = \frac{1}{n}$  援

猿猴解析 粤令  $\frac{1}{n} = \frac{1}{k}$ , 即  $n = k$  援

猿猴解析 粤由题意得  $a_n = \frac{1}{n}$  援

猿猴解析 粤观察数列的前几项可得此数列的通项公式为  $a_n = \frac{1}{n}$  援

猿猴解析 粤令  $\frac{1}{n} = \frac{1}{k}$  解得  $n = k$  援

猿猴解析 粤令  $\frac{1}{n} = \frac{1}{k}$  解得  $n = k$  援

猿猴解析 粤令  $\frac{1}{n} = \frac{1}{k}$  解得  $n = k$  援

猿猴解析 粤判断一个公式是否是数列的通项公式, 只要把适当的  $n$  代入  $a_n$  验证是否满足即可, 若要确定它是通项公式则必须加以证明援

将  $n = 1, 2, 3$  分别代入验证可知①, ②, ④均可作为数

列的通项公式, ③, ⑤不是数列的通项公式, 答案为月援

### 二、填空题

猿猴解析 粤  $a_n = \frac{1}{n}$  援

猿猴解析 粤  $a_n = \frac{1}{n}$  援

猿猴解析 粤方法: 问题中的已知条件是  $a_n = \frac{1}{n}$  援

猿猴解析 粤  $a_n = \frac{1}{n}$  援











圆锥

圆锥侧面积公式是公比为  $\frac{r}{R}$  的等比数列, 其项数为  $n$ , 则

$$S_{侧} = \pi r l \left( \frac{r}{R} \right)^0 + \pi r l \left( \frac{r}{R} \right)^1 + \dots + \pi r l \left( \frac{r}{R} \right)^{n-1}$$

圆锥侧面积公式是公比为  $\frac{r}{R}$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

亦数列  $\{S_n\}$  是公差为  $\pi r l \frac{r}{R}$  的等差数列, 则数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和为  $\frac{\pi r l n}{2} \left( 1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \right)$

$$S_n = \frac{\pi r l n}{2} \left( 1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \right)$$

则当  $n = \frac{1}{\ln \frac{r}{R}} \ln \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$  时, 数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和取最大值  $\frac{\pi r l}{2 \ln \frac{r}{R}}$

圆锥侧面积公式是公比为  $\frac{r}{R}$

二、填空题

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$\sqrt{\frac{r}{R}} \cdot \sqrt{\frac{r}{R}} \cdot \sqrt{\frac{r}{R}} \dots$$

圆锥侧面积公式是公比为  $\frac{r}{R}$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

圆锥①②③

圆锥④

三、解答题

圆锥侧面积公式是公比为  $\frac{r}{R}$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

(当  $n = \frac{1}{\ln \frac{r}{R}} \ln \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$  时, 数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和取最大值  $\frac{\pi r l}{2 \ln \frac{r}{R}}$ )

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

由②得  $S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$

把①代入③, 得  $S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$

代入①, 得  $S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$

疫择  $r$ , 亦择  $\frac{r}{R}$ ,  $S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$

综上所述,  $S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$

圆锥侧面积公式是公比为  $\frac{r}{R}$

(当  $n = \frac{1}{\ln \frac{r}{R}} \ln \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$  时, 数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和取最大值  $\frac{\pi r l}{2 \ln \frac{r}{R}}$ )

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

所以  $S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$

(圆锥侧面积公式是公比为  $\frac{r}{R}$ )

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$

圆锥侧面积公式是公比为  $\frac{r}{R}$

亦  $S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$

又  $S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$

$$S_{侧} = \pi r l \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n}{1 - \frac{r}{R}}$$



逐月解折析摇一月份开始存入银行,到 12 月底本利和是 1000 元;  
二月份开始存入银行,到 12 月底本利和是 1000 元;  
三月份开始存入银行,到 12 月底本利和是 1000 元;  
...;

12 月份开始存入银行,到 12 月底本利和是 1000 元;  
则数列  $\{a_n\}$  构成等比数列,

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{11} = 1000$$

$$a_1 \frac{1-q^{12}}{1-q} = 1000$$

$$a_1 \frac{1-0.99^{12}}{1-0.99} = 1000$$

$$a_1 \approx 83.33 \text{ (元)}$$

故选 D

逐月解折析摇每月应偿还的本金为

1000 元,亦即 1000 元,亦即 1000 元,亦即 1000 元;  
购买 12 个月后的本利和为 1000 元,亦每期付款额不会  
超过 1000 元,即 1000 元;  
逐月解折析摇堆成 1000 层,由题意得,

$$1000 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1000$$

代入检验知 1000 的最大值是 1000,则剩余钢管的根数是 1000

## 二、填空题

逐月解折析摇由题意知 12 年后的价格为 1000 元,原 1000 元

1000 元

逐月解折析摇各层价格平均值为

$$\frac{1000 + 1000 + \dots + 1000}{1000} = 1000$$

$$1000 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1000$$

1000 元

1000 元

## 三、解答题

逐月解折析摇因为 12 年期年利率为 10%,所以月利率为 0.83%

1000 元,每月存 1000 元,所以共需存入 1000 元

第 1 次存入的 1000 元,经过 12 个月后,利息为 1000 元

第 2 次存入的 1000 元,经过 11 个月后,利息为 1000 元

第 3 次存入的 1000 元,经过 10 个月后,利息为 1000 元

第 4 次存入的 1000 元,经过 9 个月后,利息为 1000 元

第 5 次存入的 1000 元,经过 8 个月后,利息为 1000 元

第 6 次存入的 1000 元,经过 7 个月后,利息为 1000 元

第 7 次存入的 1000 元,经过 6 个月后,利息为 1000 元

第 8 次存入的 1000 元,经过 5 个月后,利息为 1000 元

第 9 次存入的 1000 元,经过 4 个月后,利息为 1000 元

第 10 次存入的 1000 元,经过 3 个月后,利息为 1000 元

1000 元),

亦本利和为 1000 元(1000 元 + 1000 元)援

逐月解折析摇 1000 元贷款两年后本利和共计 1000 元(1000 元 + 1000 元)

第 1 次还款 1000 元到还清贷款时本利共计 1000 元

(1000 元 + 1000 元)元,第 2 次还款 1000 元到还清贷款时本利共计 1000 元

(1000 元 + 1000 元)元,第 3 次还款 1000 元,不生利息,故所

还款额及利息总和为 1000 元 + 1000 元 + 1000 元 + 1000 元 + 1000 元

1000 元,即 1000 元,即每月应还款约 1000 元

逐月解折析(1) 1000 元(1000 元 + 1000 元)援

(1) 设商品的标价为 1000 元,则 1000 元 < 1000 元,消费额:

$$1000 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1000$$

$$\text{由已知得 } \begin{cases} \frac{1000}{2} \geq \frac{1000}{2} \\ \frac{1000}{2} \geq \frac{1000}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{1000}{2} \geq \frac{1000}{2} \\ \frac{1000}{2} \geq \frac{1000}{2} \end{cases}$$

不等式组 ① 无解,不等式组 ② 的解为

$$1000 \leq 1000$$

因此,顾客购买标价在 1000 元内的商品时,可得到不小

于 1000 元的优惠率

逐月解折析设 1000 表示第 1000 台收割机工作的时间,由题意知数列

{1000} 是等差数列,1000 元

$$\begin{cases} \frac{1000 + 1000}{2} \times 1000 \\ \frac{1000 + 1000}{2} \times 1000 \end{cases}$$

解得 1000 元

即用这种方法收割完这片土地上的庄稼共需 1000 元

逐月解折析依题意每一年的本息和构成数列 {1000}, 则 1000 年缘月

日存入的 1000 元钱到 1000 年 12 月 1 日所得本息和为 1000 元

同理,到 1000 年 12 月 1 日所得本息和为

1000 元 + 1000 元 + 1000 元 + 1000 元 + 1000 元,

到 1000 年 12 月 1 日所得本息和为

[1000 元 + 1000 元]

到 1000 年 12 月 1 日所得本息和为

[1000 元 + 1000 元]

到 1000 年 12 月 1 日所得本息和为

[1000 元 + 1000 元]

所以 1000 年缘月 1 日他可取回的钱数为

1000 元 + 1000 元

(1000 元 + 1000 元) 援















(源/圆)原圆伊原/圆伊越圆缘,由正弦定理可得 $\frac{遭}{源月}$

圆缘,亦圆缘越 $\frac{缘}{遭}$ 越圆,则 $\triangle$ 粤月说外接圆直径为 $\frac{缘}{遭}$

员缘瑶解析摇三角形三边长为 $\frac{缘}{遭}$ , $\frac{缘}{遭}$ , $\frac{缘}{遭}$ ,各缩短 $\frac{缘}{遭}$ 后为钝角三角形,最大边为 $\frac{缘}{遭}$ 原圆,亦(圆原圆)原圆越 $\frac{缘}{遭}$ 原圆,亦 $\frac{缘}{遭}$ 原圆原圆原圆,则(曾原圆)(曾原圆)约圆,亦猿的曾的取值范围是猿的曾的猿

二、填空题

员缘瑶解析摇设粤月的中点为阅,亦悦圆越苑,月阅越 $\frac{员}{圆}$ 粤月越 $\frac{员}{圆}$

伊远越缘又月悦越苑,由余弦定理可得 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

$\frac{员}{圆}$ ,亦月悦越 $\frac{猿}{圆}$ 亦猿,明悦越 $\frac{员}{圆}$ 粤月,月悦越 $\frac{猿}{圆}$ 伊伊伊伊伊伊

泽苑瑶解析摇猿

员缘瑶(猿原员);瑶解析摇设粤月越曾,由余弦定理可得 $\frac{猿}{圆}$ 越

$\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 原 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 原 $\frac{猿}{圆}$ ,亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 原 $\frac{猿}{圆}$

又疫曾跃圆亦曾越猿(猿原员),

亦粤月越猿(猿原员),

$\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

$\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

越 $\frac{猿}{圆}$ ,

亦 $\angle$ 粤月说越猿

亦 $\angle$ 月粤说越猿,由余弦定理可知 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

原圆,亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

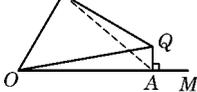
员缘瑶解析摇如解图所示,连接粤月,粤月越圆,月粤越圆,粤月越圆

前,亦粤月,粤月,月粤四点共圆, $\angle$ 月粤说越 $\angle$ 粤月说

由余弦定理可知 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$



第 15 题解图

员缘瑶解析摇疫 $\triangle$ 粤月说的三个内角粤月,悦成等差数列,则圆月

越粤月说又粤月垣悦越猿,亦猿越粤月说,月悦越猿,粤月是

月边上的中线,亦月阅越 $\frac{员}{圆}$ 粤月越 $\frac{员}{圆}$ 伊原圆,由余弦定理可知

$\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

越猿亦粤月越猿

三、解答题

员缘瑶解摇过阅作阅云/粤悦交月悦的延长线于耘,如解图所示)援

则在 $\triangle$ 粤月说中, $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

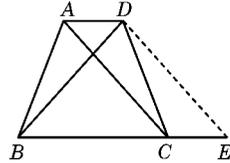
亦由余弦定理得 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\angle$ 粤月说越猿,泽 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ (或由猿垣

猿越猿,可知 $\angle$ 月粤说越猿,亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

$\angle$ 粤月说越 $\frac{猿}{圆}$ 伊伊伊伊伊伊



第 15 题解图

员缘瑶解摇如解图所示,在 $\triangle$ 粤月说中, $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

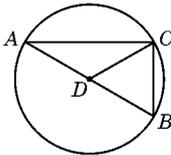
亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

$\angle$ 粤月说越猿,亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$



第 15 题解图

员缘瑶解摇疫粤月越粤月,亦粤月越猿,泽 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

其中 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

圆缘瑶证明摇疫泽 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦泽 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

泽 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦泽 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$

亦 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$ 垣 $\frac{猿}{圆}$ 越 $\frac{猿}{圆}$





亦  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \sin \theta}{r_2 \sin \phi}$  亦  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \sin \theta}{r_2 \sin \phi}$

亦我舰航行方向为北偏东  $(\theta + \alpha)$  援

答 我舰应以  $v_1 \cos \alpha$  的速度, 沿北偏东  $(\theta + \alpha)$  方向追击, 才能用圆追上敌舰 即

圆解 设  $\angle AOB = \theta$ , 则  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$

亦  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援

由正弦定理得  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \sin \theta}{r_2 \sin \phi}$

亦  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \sin \theta}{r_2 \sin \phi}$

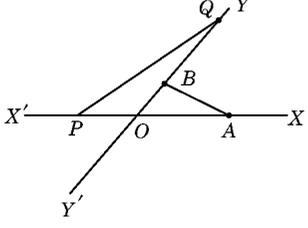
$\sim \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \sin \theta}{r_2 \sin \phi}$

又  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援

亦  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援

答: 粤、阅两点间的距离约为  $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}$

圆解 如图解所示 援员 设甲、乙两人起初的位置是 粤、月, 连接 粤、月,



第 10 题图

则  $\angle AOB = \theta$ , 亦  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援

(圆) 设甲、乙两人  $t$  小时后的位置分别是 孕、猿, 连接 孕、猿, 则  $\angle AOB = \theta$  援

当  $t = \frac{r_1}{v_1}$  时, 孕、猿 重合, 此时  $\angle AOB = \theta$  援

当  $t = \frac{r_2}{v_2}$  时, 孕、猿 重合, 此时  $\angle AOB = \theta + \alpha$  援

(猿) 设  $\angle AOB = \theta$ , 则  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援

所以  $\angle AOB = \theta$  援

(猿) 孕、猿 重合, 此时  $\angle AOB = \theta$  援

亦当  $t = \frac{r_1}{v_1}$  时, 即在 第  $\frac{r_1}{v_1}$  末, 孕、猿 最短 即

即在 第  $\frac{r_2}{v_2}$  末时, 两人的距离最短 即

### 第二章知能闯关卷

#### 一、选择题

员 圆解 析 摇 令  $\angle AOB = \theta$ , 则  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援

亦 粤 为 最大角 援

由余弦定理得

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

亦  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \sin \theta}{r_2 \sin \phi}$

圆解 析 摇 由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  得  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$  亦  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  援

猿 圆解 析 摇 由于  $\angle AOB = \theta$ , 所以  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援

源 圆解 析 摇 设此两边长分别为  $a$  和  $b$ , 设夹角为  $\theta$ , 则  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

亦  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \sin \theta}{r_2 \sin \phi}$  援

解得  $\theta = \alpha$  或  $\theta = \pi - \alpha$  (舍去)

亦  $\theta = \alpha$  援

缘 圆解 析 摇 由题中条件知  $\angle AOB = \theta$ , 由于  $\theta$  为锐角,

亦  $\theta = \alpha$  援

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

亦  $\theta = \alpha$  援

远 猿

苑 圆解 析 摇 设  $\angle AOB = \theta$ , 则  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

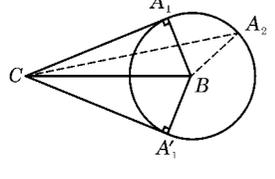
亦  $\theta = \alpha$  援

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

愿 圆解 析 摇 粤、月、猿、猿 四点共圆, 则  $\angle AOB = \theta$  援

怨 圆解 析 摇 如图解, 以  $OB$  为直径画圆, 则圆上除了点  $B$  外, 均可作为 粤点 援



第 11 题图

其中  $\angle AOB = \theta$  援

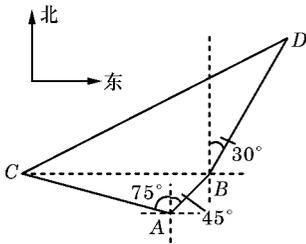
时, 此时  $\angle AOB$  最大为  $\frac{\pi}{2}$  援

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

员 圆解 析 摇 用正弦定理或选取特殊值法, 令  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 得原式  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

员 圆解 析 摇 由  $\angle AOB = \theta$ , 则  $\angle A'OB' = \theta + \alpha$  援





第 1 题图

由正弦定理, 得  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$ , 亦  $\frac{BC}{\sin 75^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$ , 亦  $\frac{BC}{\sin 75^\circ} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 亦  $\frac{BC}{\sin 75^\circ} = \frac{AB \cdot \sqrt{2}}{2}$ , 亦  $\frac{BC}{\sin 75^\circ} = \frac{AB \cdot \sqrt{2}}{2}$ .

答 缉私船沿北偏东  $30^\circ$  方向, 需  $\frac{AB \cdot \sqrt{2}}{2 \sin 30^\circ}$  才能追上走私船.

图 2: A geometric diagram showing a triangle OMN with a point Q on MN. Angle O is  $\alpha$ , angle OMN is  $30^\circ$ , and OQ is perpendicular to MN. The length OQ is 300.

第 2 题图

设  $\angle O = \alpha$ , 由题意知,  $\frac{OM}{\sin 30^\circ} = \frac{ON}{\sin \alpha}$ , 亦  $\frac{OM}{\frac{1}{2}} = \frac{ON}{\sin \alpha}$ , 亦  $OM = \frac{ON}{2 \sin \alpha}$ . 当  $\alpha = 30^\circ$  时,  $OM = ON$ . 即快艇必须以  $\frac{ON}{2 \sin 30^\circ}$  的速度行驶, 才能把物品送至司机手中. 此时,  $\angle O = 30^\circ$ . 亦  $\alpha = 30^\circ$ . 即快艇以最小速度行驶的方向与  $OM$  所成的角为  $30^\circ$ .

## 第二章 考题荟萃

### 一、选择题

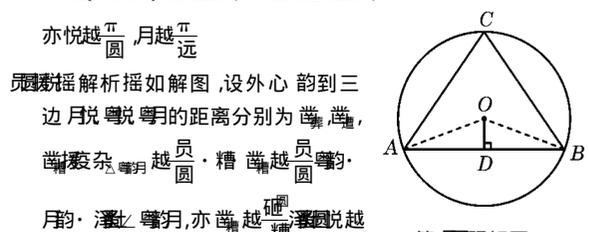
1. 解析: 由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 亦  $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ , 亦  $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 亦  $a = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$ . 由余弦定理,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2 \cdot 2}{4} + b^2 - 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot b \cdot \cos 60^\circ$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2}{2} + b^2 - b^2 \sqrt{2}$ , 亦  $c^2 = \frac{3b^2}{2} - b^2 \sqrt{2}$ . 亦  $c = b \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$ .

2. 解析: 由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 亦  $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ , 亦  $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 亦  $a = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$ . 由余弦定理,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2 \cdot 2}{4} + b^2 - 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot b \cdot \cos 60^\circ$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2}{2} + b^2 - b^2 \sqrt{2}$ , 亦  $c^2 = \frac{3b^2}{2} - b^2 \sqrt{2}$ . 亦  $c = b \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$ .

3. 解析: 由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 亦  $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ , 亦  $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 亦  $a = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$ . 由余弦定理,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2 \cdot 2}{4} + b^2 - 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot b \cdot \cos 60^\circ$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2}{2} + b^2 - b^2 \sqrt{2}$ , 亦  $c^2 = \frac{3b^2}{2} - b^2 \sqrt{2}$ . 亦  $c = b \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$ .

4. 解析: 由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 亦  $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ , 亦  $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 亦  $a = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$ . 由余弦定理,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2 \cdot 2}{4} + b^2 - 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot b \cdot \cos 60^\circ$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2}{2} + b^2 - b^2 \sqrt{2}$ , 亦  $c^2 = \frac{3b^2}{2} - b^2 \sqrt{2}$ . 亦  $c = b \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$ .

5. 解析: 由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 亦  $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ , 亦  $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 亦  $a = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$ . 由余弦定理,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2 \cdot 2}{4} + b^2 - 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot b \cdot \cos 60^\circ$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2}{2} + b^2 - b^2 \sqrt{2}$ , 亦  $c^2 = \frac{3b^2}{2} - b^2 \sqrt{2}$ . 亦  $c = b \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$ .



第 3 题图

6. 解析: 由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 亦  $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ , 亦  $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 亦  $a = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$ . 由余弦定理,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2 \cdot 2}{4} + b^2 - 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot b \cdot \cos 60^\circ$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2}{2} + b^2 - b^2 \sqrt{2}$ , 亦  $c^2 = \frac{3b^2}{2} - b^2 \sqrt{2}$ . 亦  $c = b \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$ .

二、填空题

1. 解析: 由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 亦  $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ , 亦  $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 亦  $a = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2}$ . 由余弦定理,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2 \cdot 2}{4} + b^2 - 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot b \cdot \cos 60^\circ$ , 亦  $c^2 = \frac{b^2}{2} + b^2 - b^2 \sqrt{2}$ , 亦  $c^2 = \frac{3b^2}{2} - b^2 \sqrt{2}$ . 亦  $c = b \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$ .

$\frac{r}{R} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$  根据面积公式得  $S = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$   
 $r = \frac{1}{\cos \theta}$  根据余弦定理得  $r^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$   
 $S = \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^2 \theta} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  代入上式  
 $S = \frac{1}{2} \tan \theta$  由三角形的  
 三边关系有  $\begin{cases} \sqrt{1-\cos^2 \theta} \\ \tan \theta \\ \frac{1}{\cos \theta} \end{cases}$  解得  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$  故当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时  $S$  取得最大值  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

三、解答题

例 1 解 设  $\angle A = \theta$  则  $\angle B = \pi - \theta$

亦  $\frac{r}{R} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$

亦  $\cos \theta = \frac{1}{2r}$

在  $\triangle ABC$  中  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

亦  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin(\pi - \theta)}$

(圆) 设  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

亦  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

亦  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

亦  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

例 2 解 设  $\angle A = \theta$  则  $\angle B = \pi - \theta$  所以  $\angle C = \pi - 2\theta$

所以  $\frac{r}{R} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$

(圆) 在  $\triangle ABC$  中  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

由正弦定理得  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin(\pi - \theta)}$

故  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

例 3 解 设  $\angle A = \theta$  则  $\angle B = \pi - \theta$  由  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  得  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta}$

源 援 缘

所以  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

(圆) 由正弦定理得  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

所以  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{1}{2} bc \sin A$

$S = \frac{1}{2} \frac{b^2 \sin \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{2} b^2 \sin \theta$

例 4 解 设  $\angle A = \theta$  则  $\angle B = \pi - \theta$  故  $\angle C = \pi - 2\theta$

由余弦定理得  $\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

(圆) 设  $\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

$\frac{r}{R} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$

越  $\frac{r}{R} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$

越  $\frac{r}{R} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$

例 5 解 设  $\angle A = \theta$  由正弦定理得

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2r}{\sin \theta}$

$\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

越  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

越  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

越  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

依题设得  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

解得  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

(圆) 由  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$  故  $\theta$  都是锐角, 于是  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

$\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

且当  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$  时, 上式取等号, 因此  $\frac{b}{\sin \theta}$  的最大值为

$\frac{2r}{\sin \theta}$

例 6 解 设  $\angle A = \theta$  由余弦定理得

$\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

越  $\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

故  $\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

(圆) 方法 1 由  $\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$  得  $\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

$\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

由正弦定理和 (圆) 的结论得

$\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

故  $\frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} = \frac{2r}{\sin \theta}$

方法 2 由余弦定理及 (圆) 的结论有

$\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

故  $\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$

同理可得

$\frac{b}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{2r}{\cos \theta}$







小值, 设  $\frac{猿}{圆} = \frac{源}{曾}$ , 原  $\geq 圆$ , 当且仅当  $\frac{曾}{源} = 1$  时, 等号成立, 即有最小值  $\frac{猿}{圆}$ . 有最小值  $\frac{猿}{圆}$ .

## 二、填空题

员解: 设  $\frac{猿}{圆} = \frac{源}{曾}$ , 原  $\geq 圆$ , 当且仅当  $\frac{曾}{源} = 1$  时, 等号成立, 即有最小值  $\frac{猿}{圆}$ . 有最小值  $\frac{猿}{圆}$ . 所以  $\left(\frac{曾}{源}\right)^2 \geq \frac{猿}{圆}$ , 即  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ . 因为  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ , 所以  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ .

员解: 设  $\frac{猿}{圆} = \frac{源}{曾}$ , 原  $\geq 圆$ , 当且仅当  $\frac{曾}{源} = 1$  时, 等号成立. 所以  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ .

员解: 设  $\frac{猿}{圆} = \frac{源}{曾}$ , 原  $\geq 圆$ , 当且仅当  $\frac{曾}{源} = 1$  时, 等号成立. 所以  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ .

员解: 设  $\frac{猿}{圆} = \frac{源}{曾}$ , 原  $\geq 圆$ , 当且仅当  $\frac{曾}{源} = 1$  时, 等号成立. 所以  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ .

## 三、解答题

员证: 证明  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$  是正数, 亦  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ . 当且仅当  $\frac{曾}{源} = \sqrt{\frac{猿}{圆}}$  时, 等号成立. (圆) 由  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ , 得  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ . 亦  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ . 即  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ . 所以  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ .

原  $\left(\frac{曾}{源}\right)^2 \geq \frac{猿}{圆}$ . 当且仅当  $\frac{曾}{源} = \sqrt{\frac{猿}{圆}}$  时, 等号成立. 所以  $\frac{曾}{源} \geq \sqrt{\frac{猿}{圆}}$ .

员解: 设每年进货灶次, 购进  $\frac{猿}{圆}$  个元件的总费用为  $\frac{猿}{圆}$ . 一年总库存费用为  $\frac{猿}{圆} \cdot \frac{曾}{源}$ . 手续费为  $\frac{猿}{圆}$ . 所以  $\frac{猿}{圆} + \frac{猿}{圆} \cdot \frac{曾}{源} + \frac{猿}{圆} \geq \frac{猿}{圆}$ . 当且仅当  $\frac{曾}{源} = 1$  时, 等号成立. 所以每年进货源次花费最小.

员解: 设矩形温室的左侧边长为  $\frac{猿}{圆}$ , 右侧边长为  $\frac{猿}{圆}$ . 蔬菜的种植面积为  $\frac{猿}{圆} \cdot \frac{猿}{圆}$ . 所以  $\frac{猿}{圆} \cdot \frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ . 当且仅当  $\frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$  时, 等号成立. 答: 当矩形温室的左侧边长为  $\frac{猿}{圆}$ , 右侧边长为  $\frac{猿}{圆}$  时, 蔬菜的种植面积最大, 最大种植面积为  $\frac{猿}{圆}$ .

员解: (员) 设方案甲与方案乙的用水量分别为  $\frac{猿}{圆}$  与  $\frac{猿}{圆}$ . 由题设有  $\frac{猿}{圆} + \frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ . 由  $\frac{猿}{圆} + \frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ , 得方案乙初次用水量为  $\frac{猿}{圆}$ , 第二次用水量为  $\frac{猿}{圆}$ . 方程:  $\frac{猿}{圆} + \frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ . 解得  $\frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ . 故  $\frac{猿}{圆}$  与  $\frac{猿}{圆}$  两种方案的用水量分别为  $\frac{猿}{圆}$  与  $\frac{猿}{圆}$ . 因为当  $\frac{猿}{圆} < \frac{猿}{圆}$  时,  $\frac{猿}{圆} < \frac{猿}{圆}$ , 所以方案乙的用水量较少. (圆) 设初次与第二次清洗的用水量分别为  $\frac{猿}{圆}$  与  $\frac{猿}{圆}$ . 得  $\frac{猿}{圆} + \frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ . 于是  $\frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ . 当  $\frac{猿}{圆}$  为定值时,  $\frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ . 当且仅当  $\frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$  时, 等号成立. 比时  $\frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ . (不合题意, 舍去) 或  $\frac{猿}{圆} = \frac{猿}{圆}$ .

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

将  $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  代入 (\*) 式得  $\sqrt{2}x + \sqrt{2}x = 2$

$$\sqrt{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

故  $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  时总用水量最少, 此时第一次与第二次用水量分别为  $\sqrt{2}$  与  $\sqrt{2}$ , 最少总用水量是  $2\sqrt{2}$

当  $1 \leq x \leq 2$  时, 故  $\frac{y}{x} = \frac{1}{x}$  是增函数(也可以用二次函数的单调性判断)这说明, 随着  $x$  的增加, 最少总用水量增加

### 第三章分层演练卷(四)

#### 一、选择题

1. 解析: 渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{2}x$

源: 解析: 渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 依题意, 点  $(1, 2)$  在该区域内, 故双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的两条渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , 故该区域是  $\frac{b}{a} < 2 < \frac{a}{b}$  包括点  $(1, 2)$  的区域, 亦可用不等式组  $\begin{cases} \frac{b}{a} < 2 \\ 2 < \frac{a}{b} \end{cases}$  来表示

源: 解析: 可将每一个点代入  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  检验, 满足不等式的就在  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  表示的平面区域内, 不满足的则不在它表示的平面区域内, 经检验  $(1, 2)$  的坐标不满足  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

源: 解析: 边界直线为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 将  $(1, 2)$  点代入  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  得  $\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ , 亦原点在  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  所表示的平面区域内, 阴影部分在  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的上方, 满足的不等式为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$ , 阴影部分还在  $y$  轴上左侧, 满足的不等式为  $x < 0$

源: 解析: 析  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1 \end{cases}$  即  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1 \end{cases}$ , 则当  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$  时,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$ , 即  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1 \end{cases}$

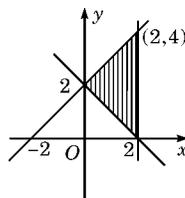
可以求得此时  $x$  的取值范围是  $[-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}]$ ; 当  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$  时,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$ , 即  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \end{cases}$ , 可以求得此时  $x$  的取值范围是  $[-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}]$

所以  $x$  的取值范围是  $[-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}] \cup [-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}] = [-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}]$

源: 解析: 不等式组  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1 \end{cases}$  的可行域如解图所示, 阴影部分的面积为  $\frac{1}{2}ab$

源: 解析: 把  $(1, 2)$  代入  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 得  $\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ , 把  $(2, 1)$  代入  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 得  $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$

#### 二、填空题



第 15 题解图

源: 解析: 易求出以点  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$  为端点的线段所在的直线方程为  $y = -x + 2$

由于  $\frac{y}{x} = \frac{-x+2}{x} = -1 + \frac{2}{x}$ , 目标函数为  $\frac{y}{x} = -1 + \frac{2}{x}$ , 且斜率  $\frac{y}{x}$  与  $\frac{2}{x}$  的系数  $\frac{1}{x}$  的符号恰好相反, 通过验证, 知当  $\frac{y}{x} = -1 + \frac{2}{x}$  与  $y = -x + 2$  重合时满足题意, 此时  $\frac{y}{x} = 1$ , 即  $x = 2$  时在区域  $y > -x + 2$  上有无穷多个点可使目标函数取得最小值

源: 解析: 使目标函数  $\frac{y}{x}$  取得最大值的点一定在边界  $y = -x + 2$  或  $x = 2$  上取得

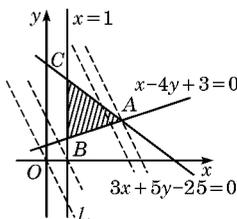
① 当  $x < 2$  时,  $\frac{y}{x} = -1 + \frac{2}{x}$  在  $(0, 2)$  上为减函数, 所以, 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\frac{y}{x} \rightarrow +\infty$ ;

② 当  $x = 2$  时,  $\frac{y}{x} = -1 + \frac{2}{x} = 0$ , 在  $[2, 2)$  上为减函数, 所以, 当  $x \rightarrow 2^+$  时,  $\frac{y}{x} \rightarrow 0^+$

由①②知, 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\frac{y}{x}$  最大, 所求点为  $(0, 2)$

#### 三、解答题

源: 解析: 由题意, 变量  $x, y$  所满足的每个不等式都表示一个平面区域, 不等式组则表示这些平面区域的公共区域, 解图知, 原点  $(0, 0)$  不在公共区域内, 当  $x = 1$ ,  $y = 0$  时,  $x - 4y + 3 = 0$ , 即点  $(1, 0)$  在直线  $3x + 5y - 25 = 0$  上, 作一组平行于  $3x + 5y - 25 = 0$  的直线  $3x + 5y - 25 = t$ , 可知: 当  $t$  在  $3x + 5y - 25 = 0$  的右上方时, 直线  $t$  上的点  $(x, y)$  满足  $3x + 5y - 25 > 0$ , 即  $3x + 5y > 25$ , 而且, 直线  $t$  向右平移时,  $t$  随之增大, 由图可知, 当直线  $t$  经过点  $A(1, 0)$  时, 对应的  $t$  最大; 当直线  $t$  经过点  $B(0, 5)$  时, 对应的  $t$  最小, 所以,  $3x + 5y > 25$ ,  $3x + 5y < 25$



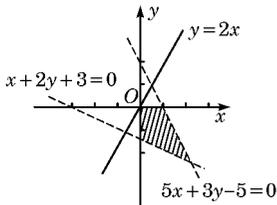
第 16 题解图

源: 解析: 不等式  $3x + 5y > 25$  表示直线  $3x + 5y = 25$  上及右下方的平面区域, 不等式  $3x + 5y < 25$  表示直线  $3x + 5y = 25$  上及右上方的平面区域

不等式  $x + 2y + 3 = 0$  表示直线  $x + 2y + 3 = 0$  左下方的平面区域

所以不等式组  $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 5x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$  表示的平面区域如解图所示

显然满足约束条件的可行域中的整点为  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  和  $(0, 1)$ , 共 3 个

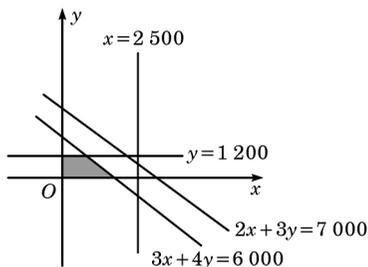


第 1 题解图

解设月生产零件甲  $x$  件, 月生产零件乙  $y$  件,

则  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \leq 2500 \\ y \leq 1200 \\ 2x + 3y \leq 7000 \\ 3x + 4y \leq 6000 \end{cases}$

在平面直角坐标系中, 画出上述不等式组表示的平面区域, 如解图的阴影部分所示



第 2 题解图

解设每天派出甲型车  $x$  辆, 乙型车  $y$  辆, 车队所花成本费为  $z$  元, 那么

$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ x \leq 5 \\ y \leq 4 \end{cases}$

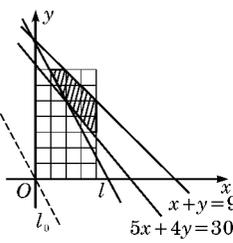
其中  $z = 2x + 3y$

作出约束条件所表示的平面区域, 即可行域, 如解图

作出直线  $z = 2x + 3y$ , 把直线  $z = 2x + 3y$  向右上方平移, 使其经过可行域上的整点, 且使在  $y$  轴上的截距最小

观察图形, 可见当直线  $z = 2x + 3y$  经过点  $(0, 1)$  时, 满足上述要求

此时,  $z = 2x + 3y$  取得最小值, 即  $z = 3$  元



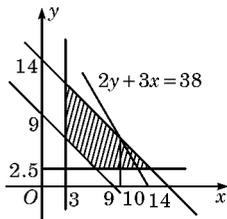
第 3 题解图

答: 每天派出甲型车 0 辆, 乙型车 1 辆, 车队所用成本费最低

解 (1) 依题意得  $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ x \leq 5 \\ y \leq 4 \end{cases}$

其中  $z = 2x + 3y$

作出约束条件所表示的平面区域, 即可行域, 如解图所示



第 4 题解图

由于乘汽车、摩托艇所需的时间和  $z = 2x + 3y$  应在  $8 \leq z \leq 14$  之间, 即

$8 \leq 2x + 3y \leq 14$

因此, 满足 (1)(2) 的点  $(x, y)$  的存在范围是图中阴影部分 (包括边界)

$(0, 1)$  和  $(3, 10)$  是可行域的顶点

亦即  $(0, 1)$  和  $(3, 10)$  是可行域的顶点

设  $z = 2x + 3y$  是噪声那么当  $z$  最大时,  $z$  最小值在通过图中的阴影部分区域 (包括边界) 且斜率为  $-\frac{2}{3}$  的直线  $z = 2x + 3y$  中, 使  $z$  最大的直线必通过点  $(3, 10)$ , 即当  $x = 3, y = 10$  时,  $z$  最小

此时,  $z = 2x + 3y$  的最小值为  $z = 3$  元

解设该车间净收益为每小时  $z$  元, 生产的产品为每小时  $x$  吨, 直接排入河流的污水量为每小时  $y$  吨

每小时车间污水产生量为  $2x + 3y$  吨, 污水处理厂污水排放量为  $(8 - 2x - 3y)$  吨

经污水处理厂处理后的污水排放量为  $(8 - 2x - 3y) \cdot (1 - 0.8)$

车间产品成本为每小时  $2x$  元, 车间生产收入为每小时  $3x$  元

车间应交纳排污费用为  $0.5(8 - 2x - 3y)$  元

车间应交纳污水处理费为  $0.5(8 - 2x - 3y)$  元

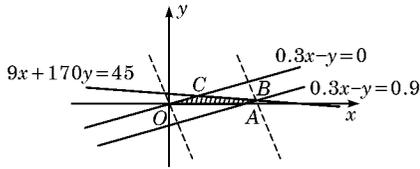
这时, 该车间每小时净收益为:  $z = 3x - 2x - 0.5(8 - 2x - 3y) - 0.5(8 - 2x - 3y)$

由于污水处理厂的最大处理能力为  $8$  吨, 根据允许排入河流的最大污水量的限制, 有  $2x + 3y \leq 8$ , 即  $2x + 3y \leq 8$

输送给污水处理厂的污水量应满足  $2x + 3y \leq 8$

综上所述, 这个环保问题可归纳为以下数学模型:

约束条件为  $\begin{cases} 2x + 3y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 可行域如解图所示



第 4 题图

从图中可以看出, 直线  $z = 0.3x - y$  在可行域的顶点处达到最大值, 求得交点坐标为  $(\frac{45}{0.3}, 0)$ , 即当  $x = 150$  时,  $z$  有最大值, 此时净收益最大. 所以该车间应每小时生产猪粪 150 千克产品, 直接排入河流的污水量为每小时 45 吨, 这时净收益最大.

### 第三章知能闯关卷

#### 一、选择题

1. 选择题

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 即  $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$ , 当且仅当  $x = y = 2$  时取等号.

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以①正确, ②错误, ③错误, ④正确.

解析: 若  $x > 0, y > 0$ , 且  $x + y = 1$ , 则  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4$ .

所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

#### 填空题

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

#### 解答题

二、填空题

1. 填空题

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

#### 三、解答题

解析: 由已知条件可得  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$ .

①当  $x = y = 2$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ .

②当  $x = 1, y = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

当  $x = 1, y = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

当  $x = 1, y = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

当  $x = 1, y = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

当  $x = 1, y = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

综上所述, 当  $x = 1, y = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

当  $x = 1, y = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

当  $x = 1, y = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

由一元二次方程  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的根为  $x = 1$ .



第 5 题图

①当  $x = 1$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

函数  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2}$  如图 (5) 所示.

故原不等式的解集为  $(1, \frac{1}{a})$ .

②当  $x = \frac{1}{a}$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .



第 5 题图

故原不等式的解集为  $(\frac{1}{a}, 1)$ .

③当  $x = \frac{1}{a}$  时,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 > \frac{1}{2}$ .

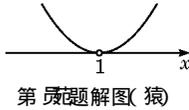
图(猿)所示援

故原不等式的解集为  $\emptyset$  援

综上所述,当  $\frac{1}{2} < a < 1$  时原不等式的解集

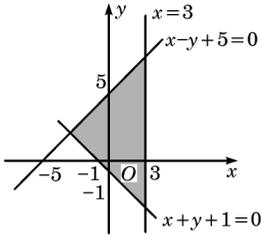
为  $(\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ ; 当  $a = 1$  时原不等式解集

为  $(\frac{1}{a}, 1)$ ; 当  $a > 1$  时原不等式解集为  $\emptyset$  即



第 5 题解图(猿)

员解(猿)不等式  $x^2 - 2x + 1 > 0$  表示直线  $x^2 - 2x + 1 = 0$  上及右下方的点的集合,  $x^2 - 2x + 1 < 0$  表示直线  $x^2 - 2x + 1 = 0$  上及右上方的点的集合,  $x^2 - 2x + 1 = 0$  表示直线  $x^2 - 2x + 1 = 0$  上及左方的点的集合, 所以不等式组表示的平面区域如解图所示援

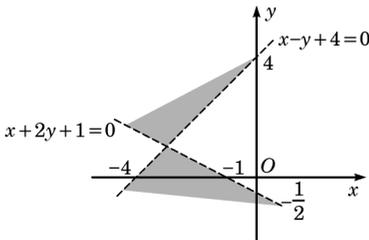


第 5 题(猿)题解图

(猿)原不等式等价于两个不等式组

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 < 0 \end{cases}$$

在直角坐标系中画出直线  $x^2 - 2x + 1 = 0$  与  $x^2 - 2x + 1 = 0$  画成虚线, 取原点  $(0, 0)$  可以判断: 不等式  $x^2 - 2x + 1 > 0$  表示直线  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的右上方的点的集合; 不等式  $x^2 - 2x + 1 < 0$  表示直线  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的左下方区域, 不等式  $x^2 - 2x + 1 = 0$  表示直线  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的右下方区域, 所以不等式组表示的平面区域如解图所示援



第 5 题(圆)题解图

员解(猿)由已知得  $x^2 - 2x + 1 = 0$  且  $x^2 - 2x + 1 = 0$  分别是方程  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的两个根, 即  $\frac{1}{2} < x < 1$  援

(猿)不等式  $x^2 - 2x + 1 > 0$  的解集是  $x < \frac{1}{2}$  或  $x > 1$  等价于

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \text{ 解得: } x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1 \text{ 援}$$

值范围是  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

员解(猿)由已知可得甲企业获得的利润数额构成以  $a$  为首项,  $a$  为公比的等比数列, 乙企业获得的利润数额构成以  $b$  为首项,  $b$  为公比的等比数列, 设第  $n$  年从两个企业所获得

的利润之和为  $W_n$ , 则  $W_n = a^n + b^n$  援

当且仅当  $a = b$  时, 等号成立, 因此, 该县从甲、乙两个企业获得利润最少的一年是第二年, 还需  $2a^2 - a^2 = a^2$  (万元) 才能解决温饱问题援

(猿)到 2004 年企业所获得的利润之和为  $W_4 = a^4 + b^4$  援

县能达到小康水平援

员解(猿)函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  原曾的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  援

令  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 原曾, 令  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 解得  $x = \frac{1}{f(x)}$  亦当  $x = \frac{1}{f(x)}$  时,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; 当  $x = \frac{1}{f(x)}$  时,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; 当  $x = \frac{1}{f(x)}$  时,  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

(猿)证明: 设  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

设  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

亦设  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

理: 设  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

越即  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

原曾  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

员解(猿)函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的最小值是  $\frac{1}{x}$ , 则  $\frac{1}{x} > \frac{1}{x}$  越

远, 亦  $\frac{1}{x} > \frac{1}{x}$  援

(猿)设  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

当  $f(x) = \frac{1}{x}$  时,  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

当  $f(x) = \frac{1}{x}$  时,  $f(x) = \frac{1}{x}$  援

又  $f(x) = \frac{1}{x}$  是偶函数, 于是, 该函数在  $(-\infty, 0)$  上是减函数, 在  $(0, +\infty)$  上是增函数援

(猿)可以把函数推广为  $f(x) = \frac{1}{x}$  (常数  $a > 0$ ), 其中  $f(x) = \frac{1}{x}$

正整数按

当 $t$ 是奇数时,函数 $f(t) = \frac{t^2}{2^t}$ 在 $(0, \sqrt{2})$ 上是减函数,在 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 上是增函数,

在 $(-\infty, \sqrt{2})$ 上是增函数,在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上是减函数按

当 $t$ 是偶数时,函数 $f(t) = \frac{t^2}{2^t}$ 在 $(0, \sqrt{2})$ 上是减函数,在 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 上是增函数,

在 $(-\infty, \sqrt{2})$ 上是减函数,在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上是增函数按

所以,当 $t=1$ 或 $t=2$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ 或 $1$ ;  
当 $t=4$ 时, $f(t)$ 取得最小值 $\frac{1}{8}$ .

所以,当 $t=1$ 或 $t=2$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ 或 $1$ ;  
当 $t=4$ 时, $f(t)$ 取得最小值 $\frac{1}{8}$ .

因此,当 $t=1$ 或 $t=2$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ 或 $1$ ;  
当 $t=4$ 时, $f(t)$ 取得最小值 $\frac{1}{8}$ .

所以,当 $t=1$ 或 $t=2$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ 或 $1$ ;  
当 $t=4$ 时, $f(t)$ 取得最小值 $\frac{1}{8}$ .

( $\frac{1}{8}$ )时,当 $t=4$ 时, $f(t)$ 取得最小值 $\frac{1}{8}$ .

### 第三章 考题荟萃卷

#### 一、选择题

1. D

函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$ 的零点为 $x=0$ 或 $x=1$ ,故选项为D.

得原式 $\geq \frac{1}{2}$

设 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$ ,则 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}$

令 $f'(x) = 0$ ,得 $x=1$ .  
当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$ , $f(x)$ 单调递增;  
当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$ , $f(x)$ 单调递减.

所以,当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ .

即 $\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0 \end{array} \right.$ 亦原式 $\leq \frac{1}{2}$ 且 $x \geq 0$ ,故选项为D.

设 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$ ,则 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}$

成立,即 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ 或 $f(x) \leq \frac{1}{2}$ ,故选项为D.

若 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ ,则 $\ln(x+1) - \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$

则 $\ln(x+1) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

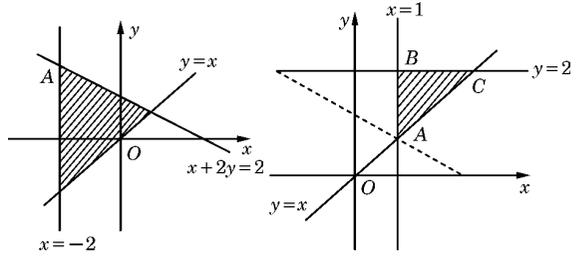
亦 $\ln(x+1) \geq \frac{x+1}{2}$

亦为 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ 的充分不必要条件按

选项D解析:将 $x=1$ 代入 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$ ,左边 $\frac{1}{2}$ 右边 $\frac{1}{2}$ 不满足条件;将 $x=0$ 代入 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$ ,左边 $0$ 右边 $0$ 不满足条件,由选项的特征知选项D正确按

选项D解析:取 $x=0$ ,则 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2} = 0$ ,即点 $(0, 0)$ 在约束条件下所表示的区域内,由四个选项知选项D正确按

由直线的位置关系知目标函数在点 $(1, 0)$ 处取得最小值,由 $\begin{cases} x+2y=2 \\ x=1 \end{cases}$ 得 $(1, 0)$ 点坐标为 $(1, 0)$ ,代入目标函数中,其最小值为 $1$ ,故选项为D.



第8题解图

第9题解图

由直线的特征知目标函数 $z = 2x + y$ 在点 $(1, 0)$ 处取得最小值,点 $(1, 0)$ 的坐标为 $(1, 0)$ ,所以目标函数的最小值为 $1$ ,故选项为D.

所以,当 $t=1$ 或 $t=2$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ 或 $1$ ;

#### 二、填空题

原不等式 $\ln(x+1) - \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$ 等价于 $\ln(x+1) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

由指数函数的单调性得 $\ln(x+1) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

原不等式 $\ln(x+1) - \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$ 等价于 $\ln(x+1) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

原不等式 $\ln(x+1) - \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$ 等价于 $\ln(x+1) \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

所以,当 $t=1$ 或 $t=2$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ 或 $1$ ;

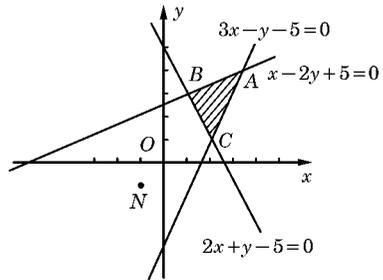
#### 三、解答题

由 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$ 得 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}$

令 $f'(x) = 0$ ,得 $x=1$ .  
当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$ , $f(x)$ 单调递增;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$ , $f(x)$ 单调递减.  
所以,当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ .

设 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$ ,则 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}$



第15题解图

各交点分别为 $(1, -2)$ ,  $(-1, 4)$ ,  $(-2, 3)$ , 表示点 $(1, -2)$ 与 $(-1, 4)$ 距离的平方,亦当 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ 时,取得最大值;当 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ 时,取得最小值,故选项为D.

所以,当 $t=1$ 或 $t=2$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$ 或 $1$ ;

当 $t=4$ 时, $f(t)$ 取得最小值 $\frac{1}{8}$ .





