《3 + X·(能力型)解题教学指导书系·文科版》

出版说明

没有不考试的学习

没有不解题的考试

3 + X

考试的革命?

逐步取代全国统一高考的最终形式!

3 + X 作为即在全国逐步推行的高考制度,作为中国考试改革经多年探索而确立下来的将逐步取代全国统一高考的最终形式,虽然只是一种考试制度,甚至只是一种高校招生考试制度,但其重视学生综合素质的考察和通过课程课业学习进行学生综合能力培养与训练的精神实质和指导思想,已然成为一种观念,直接和即将影响到学校课堂教学和学生课业学习的方方面面和每一个层次的每一个环节,涉及到教师教学方法和学生的学习方法的各方面。可以说是具有一定的革命性的改革。实践证明 把考试与素质教育教学对立起来、甚至想取消考试,是教育理论和实践中的一个极大的误区。“没有不考试的学习”解决问题的唯一方法,不是要取消考试,而是要使考试更为科学化、规范化,提高和确保考试的效度和信度。

必须承认,考试是检测学生综合素质和教师教学水平的最好形式,应考能力和效果是学生课业学习的综合素质和能力的最有效和最集中的反映和表现。脱离课业学习,进行学生的所谓素质教育是违背教育方针和教育规律的愚蠢的行为。

考试最直接的形式是解题。“没有不解题的考试”。

解题是课业学习的基本形式——解题是课业学习的主要内容——解题是课业学习的存在目的——解题是课业学习的兴奋中心。

课业学习是对人类经过千百年的理论和实践探索所形成的需经过严肃的科学思维整理的知识体系所形成的课程的学习,是一种艰苦的

接受性的智力劳动，而不是纯探索的、再发现的或者试误的学习。千百年的教育实践证明，解题是进行这种学习的不可取代的方式和环节。也是考查学习效果的最好形式。所以，解题教学的科学化、规范化直接影响到学生课业学习的质量，也直接影响到课堂教学的质量和学生的综合素质水平。因此，我们编撰本书：

1. 3 + X 的考试制度，涉及到教学过程的，就是解题教学的环节。本书即按 3 + X 考试改革体系所强调的重视和考察学生综合素质和通过课业学习培养学生解决问题的综合能力的精神，整理解题教学和训练的思想方法，形成完整、科学、规范的解题教学与指导训练体系，使其既适用于高考解题教学与指导、又适用于作为教学环节的各级各类考试训练指导、使其于中小学各级考试 :招生、入校、入学、平时检测、中期、期末、阶段、单元、年级、升学、中考、高考等各级考试的解题教学都具有直接的实用价值。

2. 强化各级各类教学中的解题教学与训练环节，使这一环节不仅是教师课堂教学和学生课业学习过程中的一个有机环节，而且也使这环节完全遵循自身相对独立的存在规律和模式，成为教学过程的集中体现，集中解决教学过程中出现的矛盾和问题。形成‘ 解题教学——作业练习复习——考试解题技巧方法训练 ’的科学范式。

3. 把解题的思想方法和思维训练放在培养解题能力的核心地位。把各学科的常用思想方法、思维方法和解决问题的思维模式纳入解题教学之中。

4. 学生在解题教学与训练中是真正的主体，注意培养和激发学生解题的兴趣、主动的精神。本书不是教辅，更不是题库，它集中介绍的是解决问题的实用思路、策略、方法和技巧。

5. 3 + X 考试常用题型与解题技巧是总结多年来的常见题型及解题方法，着重从题型入手，综合分析运用解题教学与训练的成果进行解题的思路、策略、方法、技巧的训练。是解题教学的直接应用。

本书编委会

20001 年元月

《3＋X·(能力型)解题教学指导书系》

——— 编 委 会 ———

◇目录◇

3 + X · 数学解题中的思想方法及运用⑦

第二十四部分

3 + X · 数学解题中的解析方法及其运用

第二十四部分

3+X·数学解题中的解析方法及其运用

□解析法解代数题的几种常用模型

解析几何重在方法。通过坐标将几何问题转化为代数问题的方法已为大家所熟悉并普遍应用,而逆过来的方法——将代数问题转化为几何问题,再用几何原理求解的方法,近年来已逐渐引起注意,四川省攀枝花市十九治二中方廷刚老师介绍了这类方法的几种常用模型,供参考。

1. 构造三角形,利用边的关系

例1 求 $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$的值域。

解 $f(x)=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$,故 $f(x)$ 表示 x 轴上一点 $P(x,0)$ 到两定点 $A(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 和 $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的距离之差,由△PAB 的两边之差小于第三边,知 $|f(x)|<AB=|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|=1$,即 $-1<f(x)<1$。

2. 构造对称点,利用其性质

例2 设 a、b、c 为正的常数,求证:函数 $f(x)=\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}$的最小值是

$\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$。

证明 在平面直角坐标系中取点 $A(0,\sqrt{a})$ 和 $B(c,\sqrt{b})$,则 $f(x)$ 表示 x 轴上一点 $P(x,0)$ 到 A、B 两点的距离之和,由平面几何知其最小值为 A 关于 x 轴的对称点 $A'(0,-\sqrt{a})$ 到 B 的距离,易知

$A'B=\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$,故结论得证。

3. 构造直线,利用点到直线的距离

例 3 设 a、b 都是实数,且 $a^2+b^2\leqslant1$,求证 $|a^2+2ab-b^2|\quad\sqrt{2}$。

证明 当 $a=b=0$ 时,结论显然成立,故不妨设 a、b 不全为零。在平面直角坐标系中作点 $P(a,b)$ 及直线 l∶$ax-by+2ab=0$,显然点 $Q(-b,a)$ 在直线 l 上,于是点 P 到 l 的距离不大于 P、Q 两点间的距离,即 $\frac{|a\cdot a-b\cdot b+2ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}$,亦即 $|a^2+2ab-b^2|\quad\sqrt{2}\cdot(a^2+b^2)$,再由 $a^2+b^2\leqslant1$ 即知结论成立。

例 4 设 a、b、c、d 为实数,且 a、c 不全为零,求 $y=(ax+b)^2+(cx+d)^2$ 之最小值。

解 在平面直角坐标系中作点 $A(a,c)$ 和 $P(-b,-d)$,则点 $M(ax,cx)$ 在直线 OA(方程 $cX-aY=0$)上,于是点 P 到直线 OA 之距离不大于 P、M 两点间的距离,即

$$\frac{|c\cdot(-b)-a\cdot(-d)|}{\sqrt{a^2+c^2}}\leqslant\sqrt{(ax+b)^2+(cx+d)^2}$$

于是 $y\geqslant\frac{(ad-bc)^2}{a^2+c^2}$,从而 $y_{min}=\frac{(ad-bc)^2}{a^2+c^2}$

4. 构造圆,利用其有界性

例 5 已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2=x+y$,求 x 和 y 的取值范围。

解 所给条件即 $x^2+y^2-x-y=0$,即 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$,于是点 (x,y) 在以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为圆心,$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆上,故 x 的取值应介于该圆的平行于 x 轴的直径两端点的横坐标之间,即 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 同理可得 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$。

例 6 已知 a、x、y、θ 满足

$$\begin{cases} x\cos\theta-y\sin\theta=a & ① \\ (x-a\sin\theta)^2+(y-c\cos\theta)^2=a^2 & ② \end{cases}$$

求证∶$x^2+y^2=2a^2$。

证明 考虑圆心为 $M(a\sin\theta,a\cos\theta)$,半径为 a 的圆②,原点在②上,其过原点的直线为 l: $x\cos\theta-y\sin\theta=0$,注意到直线①平行于 l,故点 M 到①之距离等于这两平行线间的距离 a,于是直线①与圆②相切,而由方程组知 $P(x,y)$ 恰为①与②之切点,故 $PM\perp OM$,$PM=OM=a$,从而 $OP=\sqrt{2}a$,即 $x^2+y^2=2a^2$。

5. **构造直线和圆，利用其位置关系**

例 7 设 $a、b、x、y$ 为实数，$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$ 求证：$|ax+by|\leqslant 1$。

证明 令 $ax+by=t$，由条件知点 (x,y) 为直线 $ax+by=t$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 之交点，故圆心到此直线的距离不大于圆的半径，即 $\frac{|t|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 1$，从而 $|t|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 1$，即 $|ax+by|\leqslant 1$。

例 8 已知 $a、x、y$ 为实数且 $x^2+y^2=1$，求证 $-\sqrt{1+a^2}\leqslant y-ax\leqslant\sqrt{1+a^2}$。

证明 注意到直线 $y=ax$ 过圆 $x^2+y^2=1$ 之圆心，故此圆上任一点 (x,y) 到直线 $y=ax$ 之距离不大于圆半径 1，即 $\frac{|ax-y|}{\sqrt{1+a^2}}\leqslant 1$，，$|ax-y|\leqslant\sqrt{1+a^2}$，故结论成立。

6. **构造圆锥曲线，利用其定义**

例 9 解方程 $\sqrt{x^2+8x+20}+\sqrt{x^2-8x+20}=10$。

解 原方程化为 $\sqrt{(x+4)^2+2^2}+\sqrt{(x-4)^2+2^2}=10$，可知 x 恰为以 $(-4,2)$，$(4,2)$ 为焦点，以 5 为半长轴的椭圆与 x 轴之交点的横坐标。写出此椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$，易得它与 x 轴交点的横坐标为 $\pm\frac{5}{3}\sqrt{5}$，故原方程的根为

$x=\pm\frac{5}{3}\sqrt{5}$。

7. **构造圆锥曲线，利用其性质**

例 10 求函数 $f(x,y)=(\sqrt{2}\sin x-3\operatorname{tg}y)^2+(\sqrt{2}\cos x-3\operatorname{ctg}y)^2$ 之最小值，其中 $0<x,y<\frac{\pi}{2}$。

解 考虑平面直角坐标系 XOY，点 $(\sqrt{2}\sin x,\sqrt{2}\cos x)$ 在圆 $X^2+Y^2=2$ 上，点 $(3\operatorname{tg}y,3\operatorname{ctg}y)$ 在双曲线 $XY=9$ 上，且都位于第一象限，于是问题转化为求圆 $X^2+Y^2=2$ 与双曲线 $XY=9$ 在第一象限内之最小距离的平方，由对称性可知这两曲线在第一象限内的最小距离为它们与直线 $Y=X$ 在第一象限内的交点间的距离。易得这两个交点为 $(1,1)$ 和 $(3,3)$，其距离为 $2\sqrt{2}$，故 $f_{min}=8$。

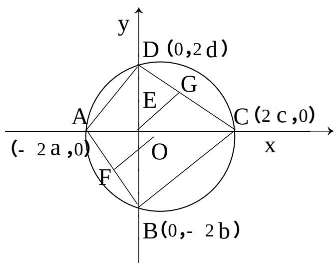
例 11 $\triangle ABC$ 中，$BC=24$，$AB+AC=26$，当中线 AD 最短时，求此三角形的面积。

解 以 BC 中点为原点，BC 为 x 轴建立直角坐标系，取 $B(-12,0)$ 和 $C(12,0)$，则 A 在以 $B、C$ 为焦点，以 13 为半长轴的椭圆上。显然，仅当 A 在椭圆的短轴上时，它到原点之距离（$\triangle ABC$ 之中线长）最短，此时 $AB=AC=13$，$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=5$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=60$。

□解析证法在平几证题中的运用

用解析法证几何题，对初中学生已有一定的要求。

在教学中，有计划地引导学生运用解析几何知识证明几何命题是非常值得重视的，这不但可以使学生巩固和复习所学的解析几何知识，而且有利于培养学生综合解题的能力。解析法的实质就是几何问题代数化，图形性质坐标化，利用解几中的公式代替几何中的逻辑推理，从而减少几何证题中的一些困难。由于直线和圆的方程已移至高中讲授，初中只讲两点之间距公式和线段的定比分点公式，单凭这两个公式，就可以证明平面几何中不少的题目。江苏省东台县城南中学王茂森老师分析了如下各例：

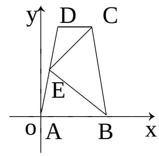


例 1　若圆的内接四边形两对角线互相垂直，则从对角线交点到一边中点的线段等于圆心到这一边对边的距离（即证：$|EG|=|OF|$）（上海 78 年中学生数学竞赛）

证　建立如图所示的坐标系，设诸点的坐标为 $A(-2a,0)$，$B(0,-2b)$，$C(2c,0)$，$D(0,2d)$，$E(0,0)$，则 CD 的中点 G 为 (c,d)，$OF\perp AB$。则 F 为 AB 的中点 F 为 $(-a,-b)$。

$$|AO|=|BO|=|CO|=|DO|,$$

∴ 圆心 O 的坐标为 $(c-a,d-b)$，



，$|OF| = \sqrt{c^2+a^2} = |EG|$。

例 2　已知梯形 ABCD **中，**$AB + CD = BC$**，**E **为** AD **的中点，求证：**$CE \perp BE$。

证　建立如图所示的坐标系，$A(0,0)$，$B(2a,0)$，$C(2b,2c)$，$D(2d,2c)$，AD **的中点** E **的坐标为**(d,c)**，由两点之间距离公式，**

$BC^2 = 4(b-a)^2 + 4c^2$，

$EC^2 = (2b-d)^2 + c^2$，$EB^2 = (2a-d)^2 + c^2$，**又依假设，**

$BC = AB + CD = 2a + 2b - 2d = 2(a+b-d)$。

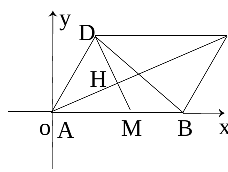
因此，

$BE^2 + CE^2 = 4a^2 + 4b^2 - 4bd - 4ad + 2d^2 + 2c^2$。

以　$2c^2 = \frac{1}{2}BC^2 - 2(a-b)^2$ **代入，**

$$
\begin{aligned}
BE^2 + CE^2 &= 4a^2 + 4b^2 - 4bd - 4ad + 2d^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}BC^2 - 2a^2 + 4ab - 2b^2 \\
&= 2a^2 + 2b^2 - 4bd - 4ad + 2d^2 + 4ab + \frac{1}{2}BC^2 \\
&= 2(a^2 + b^2 + d^2 - 2bd - 2cd + 2ab) + \frac{1}{2}BC^2 \\
&= 2(a+b-d)^2 + \frac{1}{2}BC^2 \\
&= \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}BC^2 = BC^2,
\end{aligned}
$$

故　$CE \perp BE$。

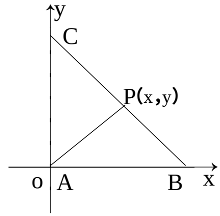


例 3　已知 ABCD **为平行四边形，**M **为** AB **的中点。设** DM **与对角线** AC **交于** H**，求证：**$AH = \frac{1}{3}AC$，$MH = \frac{1}{3}MD$。

建立如图所示的坐标系，▱ABCD **四个顶点坐标为，**

$A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(b,c)$，$D(b-a,c)$。AB **的中点** M **为**$\left(\frac{a}{2},0\right)$。**分别计算线段** DM，CA **的定比** $\lambda = 2$ **的分点坐标。由定比分点公式求得这两个分点同为**$\left(\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$。**可见此分点即为** DM **和** AC **的交点，这就证得了，**$CH = 2HA$，$DH = 2HM$，

即 $AH=\frac{1}{3}AC$,$MH=\frac{1}{3}MD$。



例 4 P 是等腰直角三角形 ABC 的斜边 BC 上任意一点,求证:$PB^2+PC^2=2PA^2$。(几何第一册 P 237)。

证 以直角顶点为原点,两直角边所在直线作为 x 轴和 y 轴。建立如图所示的坐标系,设 A(0,0),B(b,0),C(0,b),P(x,y),则 $x+y=b$。

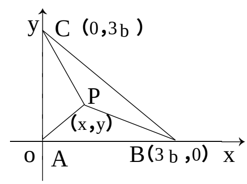
$$PB^2=(x-b)^2+y^2,PC^2=x^2+(y-b)^2,$$

$$PB^2+PC^2=2x^2+2y^2-2b(x+y)+2b^2$$

将 $x+y=b$ 代入得

$$PB^2+PC^2=2(x^2+y^2)=2PA^2。$$

例 5 P 为直角三角形 ABC 内一点,且 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCA}$,求证:$PB^2+PC^2=5PA^2$。



证 建立如图所示的坐标系,设 A(0,0),B(3b,0),C(0,3c),P(x,y)。

$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCA},$$

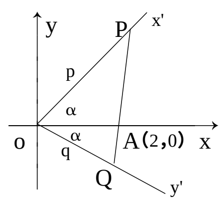
, $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$,

, $y=\frac{1}{3}\cdot 3c=c$,同理 $x=b$,

, P 点坐标为(b,c)。故

$$PB^2+PC^2=4b^2+c^2+b^2+4c^2=5(b^2+c^2)=5PA^2$$

例 6: 经过∠x′oy′的平分线上一点 A 作一直线与 ox 及 oy 分别相交于 P、Q,求证:$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$等于定值。



证 如图建立坐标系,设$|OP|=p$,$|OQ|=q$,$\angle xoP=\alpha$,则有 $P(p\cos\alpha,p\sin\alpha)$,$Q(q\cos\alpha,-q\sin\alpha)$。以 A 的坐标为(a,0),由 P,Q,A 三点共线,得

$$\frac{p\sin\alpha}{p\cos\alpha-\alpha}=\frac{-q\sin\alpha}{q\cos\alpha-\alpha}。$$

约去 $\sin\alpha$,并化简得

$$ap+aq=2pq\cos\alpha,$$

即 $\frac{1}{P}+\frac{1}{q}=\frac{2\cos\alpha}{\alpha}$为定值。

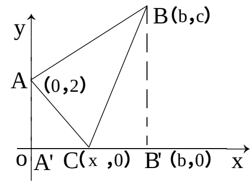
在建立标系时,应着眼于具体图形的特性,因题而异,使图形中有关点的坐标尽量简单。

一些几何极值问题,应用解析法也显得很简洁,请看以下两例:

例7: 直线 l 同侧有 A、B 两点,试在 l 上找一点 C,使得 AC^2+BC^2 为最小。

解 以 l 为 x 轴,垂足 A' 为原点,令 A(0,a),B(b,c),C(x,0),则

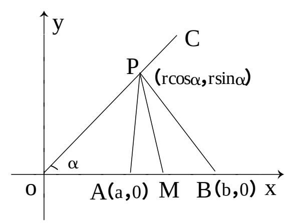
$$
\begin{aligned}
S &= AC^2+BC^2\\
&= x^2+a^2+(b-x)^2+c^2\\
&= 2x^2-2bx+(a^2+b^2+c^2)\\
&= 2\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(a^2+c^2-\frac{b}{2}^2\right)
\end{aligned}
$$



, 当 $x=\frac{b}{2}$ 时,即 C 为 A'B' 的中点时,S 为极小值。

例8 在定角 α 的一边上有两点 A 和 B,在另一边 OC 上求作一点 P,使到 PA^2-PB^2 有最小值。

解 建立如图所示的坐标系,设 A(a,0),B(b,0),OP = r。则有 P(rcosα,rsinα)。故



$$
\begin{aligned}
S &= PA^2-PB^2\\
&= (r\cos\alpha-\alpha)^2-r^2\sin^2\alpha+(r\cos\alpha-b)^2\\
&\quad +r^2\sin^2\alpha = 2r^2-2(a+b)r\cos\alpha+a^2+b^2\\
&= 2\left[r-\frac{1}{2}(a-b)\cos\alpha\right]^2+a^2+b^2\\
&\quad -\frac{1}{2}(a-b)^2\cos^2\alpha
\end{aligned}
$$

故 $r=\frac{1}{2}(a-b)\cos\alpha$ 时,S 有极小值。此时 P 点是 AB 的垂直平分线与 OC 的交点。

□解析法在三角解题中的应用

众所周知,在中学数学教材中,任意角的三角函数是用坐标来定义的。三角函数的基础公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 的证明也是利用解析法实现的。由此可得出一个结论:某些三角问题可以化为解析几何问题来处理。因此,探索三角题的几何意义,凭籍解析几何的有关知识解三角题乃是一种重要的数学解题思想,许多三角题利用解析法可获得新颖、独特、简捷的解法。在教学中渗透这种思想方法,有

利于启迪学生的创造性思维、提高解题能力。

上海市崇明师范学校朱荣兴老师介绍了解析法在三角中的若干应用：

1. **求三角函数值**

例 1　设 $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{1}{2}$，

$\cos\alpha - \cos\beta = -\frac{2}{3}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值。

解　设 $x_1 = \cos\alpha, y_1 = \sin\alpha$，

$x_2 = \cos\beta, y_2 = \sin\beta$

则点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上。

又 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{4}$，故直线 AB 的斜率为 $-\frac{3}{4}$，设直线 AB 的方程为 $y = -\frac{3}{4}x + b$。

将上述方程代入 $x^2 + y^2 = 1$，并整理得

$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{3b}{2}x + (b^2 - 1) = 0$$

，由韦达定理得　$x_1 x_2 = \frac{16(b^2 - 1)}{25}$，

同理得 $y_1 y_2 = \frac{16b^2 - 9}{25}$

$$\begin{aligned} ,\quad \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{aligned}$$

$$= \frac{16(b^2 - 1)}{25} - \frac{16b^2 - 9}{25} = -\frac{7}{25}$$

2. **证明三角条件等式**

例 2　已知 $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$

求证　$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$

证　设 $A\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}, \frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}\right)$、$B(\cos\beta, \sin\beta)$

则　$|AB| = \sqrt{\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta} - \cos\beta\right)^2 + \left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta} - \sin\beta\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}-1}=0$

, A、B **两点重合,于是有** $\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}$

$=\cos\beta$, $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}=\sin\beta$

即 $\cos^2\alpha=\cos^2\beta$, $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$

, $\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

例 3 **证明**:△ABC **是等腰三角形的充要条件是** $\cos^2A(\sin B-\sin C)+\cos^2B(\sin C-\sin A)+\cos^2C(\sin A-\sin B)=0$。

证(必要性)显然

(充分性)将 $\cos^2A(\sin B-\sin C)+\cos^2B(\sin C-\sin A)+\cos^2C(\sin A-\sin B)=0$

写成行列式形式,得 $\begin{vmatrix}\cos^2A & \sin A & 1\\ \cos^2B & \sin B & 1\\ \cos^2C & \sin C & 1\end{vmatrix}=0$

, **点** $P(\cos^2A,\sin A)$、$Q(\cos^2B,\sin B)$、$R(\cos^2C,\sin C)$ **三点共线**

又 P、Q、R **三点在同一段抛物线** $\begin{cases}x=\cos^2\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$ **上**

, P、Q、R **三点中至少有两个点重合**

不妨设 P、Q **重合**, **即** $\begin{cases}\cos^2A=\cos^2B\\ \sin A=\sin B\end{cases}$,

由此得 $A=B$,**故**△ABC **为等腰三角形。**

3. 证明三角恒等式

例 4 **求证**:$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

证 在直角坐标平面内,设点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$B\left(\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right),\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$、$C\left(\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right),\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)\right)$。

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=1$

, A、B、C **三点在圆** $x^2+y^2=1$ **上。**

又 $\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)-\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)-\alpha=\frac{2\pi}{3}$

, A、B、C 是一个等边三角形的顶点

, △ABC 的重心 G 与外心 O（即坐标原点）重合。

而重心 G 的坐标

$$x_G=\frac{1}{3}\left[\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)\right],$$

$$y_G=\frac{1}{3}\left[\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=0$$

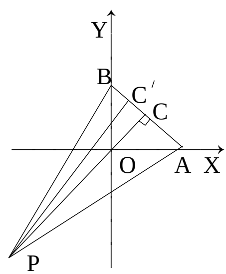
, $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

4. 证明三角不等式

例 5　求证：

$$\frac{25}{2}\leqslant\left(\sin^2\alpha+2\right)^2+\left(\cos^2\alpha+2\right)^2\leqslant 13$$



证　如图所示，点 $C'(\sin^2\alpha,\cos^2\alpha)$ 是直线 $x+y=1$ 被两坐标轴截得线段 $\overline{AB}$ 上的点，易得 $\overline{AB}$ 的中点 C 到定点 P $(-2,-2)$ 的距离 $|PC|=\sqrt{\frac{25}{2}}$，

又 $|PC|$ 是等腰△PAB 底边 AB 上的线

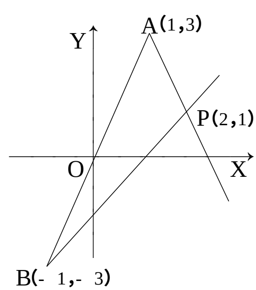
, $|PC'|\geqslant|PC|=\sqrt{\frac{25}{2}}$，$|PC'|\leqslant|PA|=\sqrt{13}$。

而 $|PC'|^2=\left(\sin^2\alpha+2\right)^2+\left(\cos^2\alpha+2\right)^2$

, $\frac{25}{2}\leqslant\left(\sin^2\alpha+2\right)^2+\left(\cos^2\alpha+2\right)^2\leqslant 13$。

5. 求三角函数的极值

例 6　求 $u=\frac{3\sin\theta+1}{\sin\theta+2}$ 的最大值和最小值。

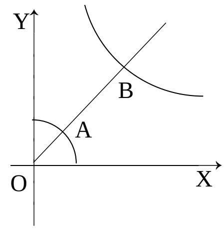


解　因 $u=\frac{1-(-3\sin\theta)}{2-(-\sin\theta)}$，故 u 表示点 P(2,1) 和点 $(-\sin\theta,-3\sin\theta)$ 连线的斜率，设 $\begin{cases}x=-\sin\theta\\y=-3\sin\theta\end{cases}$ $(|x|\leqslant 1)$，消去参数得 $y=3x$，$(|x|\leqslant 1)$

则 u **表示连结点** P(2,1) **与线段** $\overline{AB}=\{(x,y|y=3x,|x|\leqslant 1)\}$ **上任一点的直线斜率。由图形直接看出：**

$$u_{max}=\frac{1-(-3)}{2-(-1)}=\frac{4}{3},$$

$$u_{min}=\frac{1-3}{2-1}=-2。$$



例 7　**求函数** $u=(\sqrt{2}\sin\alpha-3tg\beta)^2+(\sqrt{2}\cos\alpha-3tg\beta)^2$ **的最小值。（其中** $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$**）。**

解　将 u **看成动点** $A(\sqrt{2}\sin\alpha,\sqrt{2}\cos\alpha)$ **和动点** $B(3tg\beta,3ctg\beta)$ **间距离之平方。**

点 A **的轨迹的参数方程为**

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}\sin\alpha\\ y=\sqrt{2}\cos\alpha\end{cases}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

即 $x^2+y^2=2(x>0,y>0)$**，其图象是一圆弧。点** B **的轨迹方程是** $xy=9(x>0,y>0)$**，其图象是等轴双曲线的一支。**

从图象可看出，当 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$**时** $|AB|$ **取最小值，此时有** $|OA|=\sqrt{2}$**，**$|OB|=3\sqrt{2}$**，故** $|AB|=2\sqrt{2}$

，**函数** u **的最小值为** $(2\sqrt{2})^2=8$。

6. 解三角不等式

例 8　**解不等式**

$\sqrt{2}-1<\sec\theta+tg\theta<\sqrt{2}+1$。

解　令 $x=\cos\theta,y=\sin\theta$**，则**

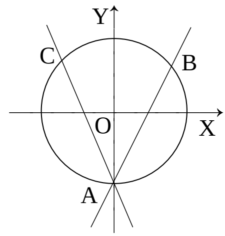
$$\sec\theta+tg\theta=\frac{\sin\theta+1}{\cos}=\frac{y+1}{x-0}$$

这是过点 $A(0,-1)$ **与圆** $x^2+y^2=1$ **上的动点** $P(x,y)$ **的直线的斜率。**

过点 A **作斜率为** $K=\sqrt{2}\pm 1$ **的直线** $y+1=(\sqrt{2}\pm 1)x$**，此两直线与圆的交点为** B

$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

B、C 两点对应的圆心角分别为：



$\theta_1=2k\pi+\frac{\pi}{4}$、$\theta_2=2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in J)$

故原不等式的解为 $2k\pi-\frac{\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{4}$,$(k\in J)$。

以上从六个方面叙述了解析法在三角中的应用,实际应用范围远不止这些,还有待深入挖掘、探究。

□解析法在立体几何解题中的应用

慈溪县掌起中学陈传孟老师选择一些较典型例子来说明了解析法在立体几何问题中各方面的应用。

1. 证明两直线垂直或平行

例 1　(79 年福建省及 80 年上海市数学竞赛题)

在单位正方体 ABCD—A'B'C'D' 中,在一个面的对角线 AB' 上取 M 点,使 $AM=\frac{1}{3}AB'$ 在另一面的对角线 BD 上取 N 点,使 $BN=\frac{1}{3}BD$。

求证　MN 是 AB' 和 BD 公垂线,并求 MN 的长。(图　1)

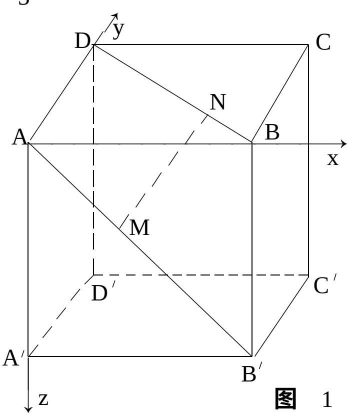


图　1

证明　取 A 为坐标原点,AB、AD、AA' 分别为 X、Y、Z 轴,则 M 坐标为$(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3})$;N 坐标为$(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$。

于是　$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{\kappa}$,

而　$\overrightarrow{AB'}=\vec{i}+\vec{\kappa}$。　$\overrightarrow{DB}=\vec{i}-\vec{j}$。

,　$\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$,　,　$MN\perp AB'$;

同理 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$， ， $MN \perp DB$，

故 MN 是 AB' 和 BD 的公垂线。

而且 $|MN| = \sqrt{(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$。

例 2 **已知四面体** ABCD **中**，$AB \perp CD$，$AC \perp BD$，

求证 $AD \perp BC$。（图 2）

证明 设 A、B、C、D 坐标分别为 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3)，(x_4, y_4, z_4)。

$AB \perp CD$，

， $(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) + (z_2 - z_1)(z_4 - z_3) = 0$。 （1）

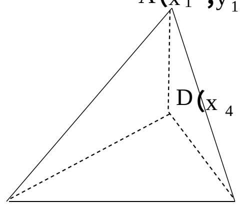


图 2

又 $AC \perp BC$，

， $(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_4 - y_2) + (z_3 - z_1)(z_4 - z_3) = 0$ （2）

（2）-（1），并化简整理后，得

$(x_4 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_4 - y_1)(y_3 - y_2) + (z_4 - z_1)(z_3 - z_2) = 0$， （3）

因此 $AD \perp BC$。**象这样相对的棱互相垂直的四面体，我们称为具有正交棱的四面体。**

2. 证明线段间的等量关系

例 3 **已知具有正交棱的四面体** ABCD，

求证 $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$。

证明 如图 2，据例 2 得

$AB^2 + CD^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2$

$AC^2 + BD^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2$

两式相减，并化简整理后得 $(AB^2 + CD^2) - (AC^2 + BD^2) = (x_4 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_4 - y_1)(y_3 - y_2) + (z_4 - z_1)(z_3 - z_2) = 0$（由例 2 的（3）式）

， $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$，同理 $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$。

3. 线段倍分关系

例 4 **已知** E、F、G **分别为平行六面体** $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ **三棱** AB、AD、AA_1 **上**

一点,且 $AE=\frac{1}{m}AB$,$AF=\frac{1}{n}AD$,$AG=\frac{1}{\kappa}AA_1$,AC_1 与平面 EFG 交于 H。

求证 $AH=\frac{1}{m+n+\kappa}AC_1$。

证明 这一问题以利用斜角坐标较为方便,如图 3 以 A 为斜交轴的原点,AB 为 x 轴,AD 为 y 轴,AA_1 为 z 轴。设 B 点坐标为(a,0,0);D 点坐标为(0,b,0),A_1 坐标为(0,0,c),则 E、F、G 坐标分别为:$(\frac{a}{m},0,0)$,$(0,\frac{b}{n},0)$,$(0,0,\frac{c}{\kappa})$。

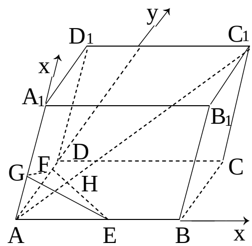


图 3

由截距式平面方程,知 EFG 平面方程为

$$\frac{mx}{a}+\frac{ny}{b}+\frac{\kappa z}{c}=1, \qquad (1)$$

而 C_1 坐标为(a,b,c),直线 AC_1 方程是 $\begin{cases}x=at\\y=bt\\z=ct,\end{cases}$

代入(1)得 $(m+n+\kappa)t=1$,即 $t=\frac{1}{m+n+\kappa}$。

, H 点坐标为

$$\left(\frac{1}{m+n+\kappa}a,\frac{1}{m+n+\kappa}b,\frac{1}{m+n+\kappa}c\right),$$

故 $AH=\frac{1}{m+n+\kappa}AC_1$

4. 证明与球有关问题

例 5 (第五届美国奥林匹克试题)

已知 四面体的内切球切点为四面体各面的重心,

求证 四面体是正四面体(如图 4)。

证明 以内切球心 O 为坐标原点,任意建立一个空间直角坐标系,并令 A、B、C、D 各点坐标为 (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3),(x_4,y_4,z_4)。

又设内切球半径为 r,O_1 为△ABC 上切点,则 O_1 坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)。$$

根据球切面方程,平面 ABC 方程为

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}x+\frac{y_1+y_2+y_3}{3}y+\frac{z_1+z_2+z_3}{3}z=r^2$$

即 $(x_1+x_2+x_3)x+(y_1+y_2+y_3)y+(z_1+z_2+z_3)z=3r^2$,

$A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,$C(x_3,y_3,z_3)$,在这平面上,即满足上式,故有

$$(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3)+(y_1^2+y_1y_2+y_1y_3)+(z_1^2+z_1z_2+z_1z_3)=3r^2 \quad (1)$$

$$(x_1x_2+x_2^2+x_2x_3)+(y_1y_2+y_2^2+y_2y_3)+(z_1z_2+z_2^2+z_2z_3)=3r^2 \quad (2)$$

$$(x_1x_3+x_2x_3+x_3^2)+(y_1y_3+y_2y_3+y_3^2)+(z_1z_3+z_2z_3+z_3^2)=3r^2 \quad (3)$$

(1)+(2)-(3)得 $(x_1+x_2)^2-x_3^2+(y_1+y_2)^2-y_3^2+(z_1+z_2)^2-z_3^2=3r^2$ (4)

同理,由平面 ABD 得 $(x_1+x_2)^2-x_4^2+(y_1+y_2)^2-y_4^2+(z_1+z_2)^2-z_4^2=3r_2$ (5)

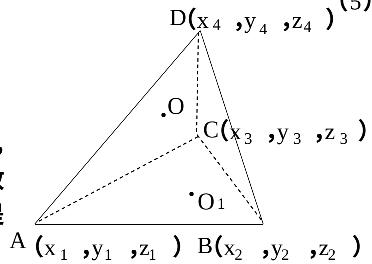


图 4

比较(4),(5)得 $x_3^2+y_3^2+z_3^2=x_4^2+y_4^2+z_4^2$,

即 OC=OD。

同理可得 OA=OB=OC=OD,而 O_1A,O_1B,O_1C 是它们在平面 ABC 上的射影,故 $O_1A=O_1B=O_1C$。今 O_1 是△ABC 外心又是重心,不难证得△ABC 是正三角形,即 AB=AC=BC,同理 AB=BC=AC=AD=BD=CD,因此 ABCD 是正四面体。

5. **轨迹问题**

例 6 (第 3 届国际数学竞赛题)

设有平面 E,给出不在一直线上的三点 A、B、C,这三点在平面 E 的同一侧而且给出的平面不平行于 E。A'、B'、C'是 E 上三个任意点。线段 AA',BB',CC'的中点是 L、M、N,G 是△LMN 的重心(这里不包括使得 LMN 不构成三角形的那些 A'、B'、C')。试求当 A'、B'、C'无关地在平面 E 上运动时 G 的轨迹。

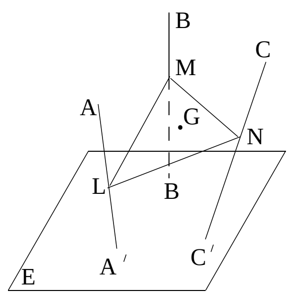


图 5

解 如图 5 使 XOY 平面落在 E 平面上任意建立一个坐标系,设 A、B、C 坐标分别为:

$(\overline{x_1},\overline{y_1},\overline{z_1})$,$(\overline{x_2},\overline{y_2},\overline{z_2})$,$(\overline{x_3},\overline{y_3},\overline{z_3})$;

又设 A'、B'、C'坐标分别为:

$(x_1,y_1,0)$,$(x_2,y_2,0)$,$(x_3,y_3,0)$,

则 L、M、N 坐标分别为:

$$\left(\frac{x_1+\overline{x_1}}{2},\frac{y_1+\overline{y_1}}{2},\frac{\overline{z_1}}{2}\right),\left(\frac{x_2+\overline{x_2}}{2},\frac{y_2+\overline{y_2}}{2},\frac{\overline{z_2}}{2}\right),\left(\frac{x_3+\overline{x_3}}{2},\frac{y_3+\overline{y_3}}{2},\frac{\overline{z_3}}{2}\right)。$$

今计算重心 G 的坐标 (x_G,y_G,z_G):

$$x_G=\frac{x_L+x_M+x_N}{3}=\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_1+x_2+x_3}{6},$$

$y_G = \frac{\overline{y_1} + \overline{y_2} + \overline{y_3} + y_1 + y_2 + y_3}{6}$，　　$z_G = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}}{6}$。

由于$\overline{x_1}$、$\overline{x_2}$、$\overline{x_3}$**为常数，**x_1，x_2，x_3 **可为任意值，故** x_G **可为任意值；同理** y_G **也可为任意值，而**$\overline{z_1}$、$\overline{z_2}$、$\overline{z_3}$**是常数，所以** z_G **是一个常数，因此** G **点轨迹是一个平面，这个平面与平面** E **平行，在与** A、B、C **的同侧，且距平面** E **为**$\frac{1}{6}(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3})$

6. 与角有关问题

例 7　V - ABC **为一个三面角，**VD **是面角** BVC **的角平分线，若**　$\angle AVD Ⅱ \frac{\pi}{2}$，

则　$\frac{\angle AVB + \angle AVC}{2} \leqslant \angle AVD$

这题选自 57 **年上海市数学竞赛题，若不应用解析法，就要扩面** AVD，**并要分三种情形讨论，所以用综合法来解，总感较繁，不若解析法简洁。**

证明　**如图** 6 **以** V **为坐标原点，任意建立一个空间直角坐标系，取**$|VA| = |VB| = |VC| = 1$。**又设** A、B、C **坐标分别为：**(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3)。**连** BC **交** VD **于** D，**则** D **坐标为**

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right), |VD| = \cos\frac{BVC}{2}。$$

而　$\cos AVB = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$；$\cos AVC = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3$，

$$\cos AVD = \frac{(x_2 + x_3)x_1 + (y_2 + y_3)y_1 + (z_2 + z_3)z_1}{2|VD|}。$$

$$= \frac{\cos AVB + \cos AVC}{2\cos\frac{BVC}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{AVB + AVC}{2}\cos\frac{AVB - AVC}{2}}{\cos\frac{BVC}{2}}。$$

由于三面角任意一个面角大于其它两个面角差，

，　$\frac{\pi}{2} > \frac{\angle BVC}{2} > \frac{|\angle AVC - \angle AVB|}{2}$，**故** $0 < \cos\frac{BVC}{2} < \cos\frac{AVB - AVC}{2}$，

因此　$\cos\frac{AVB + AVC}{2} = m\cos AVD$。　(1)

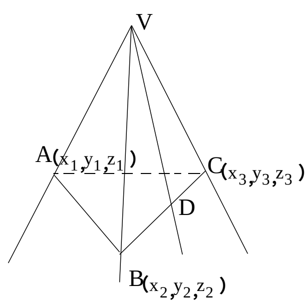


图　6

其中 $0 < m = \dfrac{\cos\dfrac{BVC}{2}}{\cos\dfrac{AVB - AVC}{2}} < 1$， 当 $AVD Ⅱ \dfrac{\pi}{2}$时， $\cos\angle AVD \leqslant 0$，

考虑(1)得 $\cos\dfrac{AVB + AVC}{2} \geqslant \cos AVD$，

且因 $0 < \dfrac{AVB + AVC}{2} < \pi$， $0 < \angle AVD < \pi$，

再注意，余弦在区间〔0，π〕上是减函数，得$\dfrac{\angle AVB + \angle AVC}{2} \leqslant \angle AVD$。

7. **共面共球问题**

例 8 已知具有正交棱的四面体 S - ABC，求证 各面重心和垂心共球。

证明 如图 7 对于具有正交棱的四面体不难证得△ABC 的垂心 D 即为 S 在 ABC 平面上射影，连 AD 交 BC 于 E。 $\triangle BDE \backsim \triangle ACE$，， $DE = \dfrac{BE \cdot EC}{AE}$。今以 EC 为 x 轴，EA 为 y 轴建立空间直角坐标系，又设 S - ABC 各顶点坐标为：A(0，3h，0)，B(- 3n，0，0)，C(3m，0，0)，S(0，$\dfrac{3mn}{h}$，3s)。

则 $\triangle SAB$ 的重心 M_1，坐标为(- n，$h + \dfrac{mn}{h}$，s)；

$\triangle SAC$ 的重心 M_2 坐标为(m，$h + \dfrac{mn}{h}$，s)；

$\triangle SBC$ 的重心 M_3 坐标为(m - n，$\dfrac{mn}{h}$，s)；

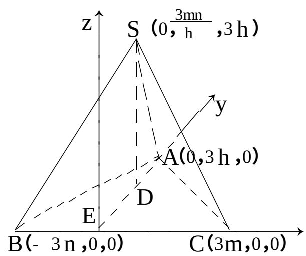


图 7

D 的坐标为(0，$\dfrac{3mn}{h}$，0)。

设过 M_1，M_2，M_3，D 的球面方程为：

$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$，

则有

$$\begin{cases} n^2 + \left(h + \dfrac{mn}{h}\right)^2 + s^2 - nD + \left(h + \dfrac{mn}{h}\right)E + sF + G = 0 & (1) \\ m^2 + \left(h + \dfrac{mn}{h}\right)^2 + s^2 + mD + \left(h + \dfrac{mn}{h}\right)E + sF + G = 0 & (2) \\ (m - n)^2 + \left(\dfrac{mn}{h}\right)^2 + s^2 + (m - n)D + \dfrac{mn}{h}E + sF + G = 0 & (3) \\ \left(\dfrac{3mn}{h}\right)^2 + \dfrac{3mn}{h}E + G = 0。 & (4) \end{cases}$$

解之得　$D=n-m, E=-\dfrac{3mn+h^2}{h}, G=3mn$，

故球面方程为：$x^2+y^2+z^2+(n-m)x-\dfrac{3mn+h^2}{h}y+FZ+3mn=0$，

把△ABC 的重心 $M_4(m-n,h,0)$ 坐标代入上式，

$$\text{左边}=(m-n)^2+h^2+(n-m)(m-n)-\frac{3mn+h^2}{h}\cdot h+3mn=0,$$

这就是说，过四面重心的球面过△ABC 的垂心。依同理，可证此球面也过其它各面垂心，命题证毕。

6. **不等量关系**

例 9　（第 9 届国际数学竞赛题）

一个四面体恰有一条边比 1 大，证明　该四面体体积　$V\leqslant\dfrac{1}{8}$。

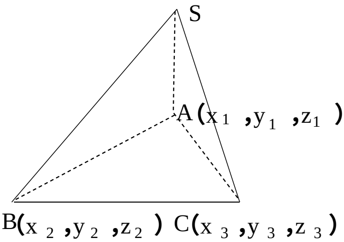


图　8

证明　设四面体 $S-ABC$ 中，$BC>1$，显然恰有一边比 1 大四面体最大者 $SA=SB=SC=AB=AC=1$

则　$\angle BSA=\angle CSA=60°$，设 $\angle BSC=\alpha$，

则　$60°<\alpha<180°$。若令 S 为坐标原点（如图 8），任意建立一个空间直角坐标系，又设 A、B、C 各点坐标为：(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)，则有

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=\cos 60°=\frac{1}{2};$$

$$x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3=\cos\alpha。$$

$$V^2=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3\\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3\\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3 & x_3^2+y_3^2+z_3^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cos\alpha \\ \frac{1}{2} & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{36}\left(-\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left[-\left(\cos\alpha-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{16}\right]\leqslant\frac{1}{36}\times\frac{9}{16}=\frac{1}{64},$$

， $V\leqslant\frac{1}{8}$。

9. 极值问题

例 10 （第 21 届国际数学竞赛题）

已知平面 π，π 上一点 P 及 π 外一点 Q，在 π 上求出点 R，使得 $\frac{QP+PR}{QR}$ 为最大。

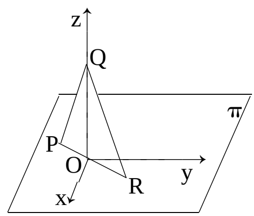


图 9

解 （如图 9）以 Q 在 π 平面上射影为原点，OQ 为 z 轴建立一个坐标系，设 Q、P、R 坐标分别为：$(0,0,c)$，$(a,b,0)$，$(x,y,0)$，

则 $$S=\frac{QP+PR}{QR}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+c^2}}$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+c^2}}$$

（当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ 且 a 与 x，b 与 y 异号时取等号）

利用不等式 $\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}\geqslant x_1x_2+y_1y_2$，（当 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ 且 x_1 与 x_2，y_1 与 y_2 同号时取等号。）

有 $$\sqrt{\left[(\sqrt{x^2+y^2})^2+c^2\right]\left[1+\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}}{c}\right)^2\right]}$$

$$\geqslant\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2},$$

， $$S\leqslant\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}}{c}\right)^2},$$

且　$\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}}$

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}$时取等号。

但　$\sqrt{x^2+y^2}=OR$，$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=PQ$，

$\sqrt{a^2+b^2}=PO$，故当 P、O、R 在一直线上，且 $OR=PQ-PO$ 时 S 最大。因此在 PQ 射影上取一点 R，使 $PR=PQ$，则 R 就是使$\dfrac{QP+DR}{QR}$为最大值。

□解数学题中的迂回法

所谓迂回法。就是不直接从正面进行突破、而是在深刻理解原题的题设和结论的内在联系上，用迂回的办法，超脱出解题本身的直接意义，来巧妙地解决一些难以思索的问题，一旦问题解决时，常使人拍案叫绝。吉林省长春市实验中学张祖安老师以下以下例作了分析：

例如 1994 年全国竞赛一试填空第 2 题，已知 $x,y\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ $a\in R$，且 $x^3+\sin x-2a=0.4y^3+\sin y\cos y+a=0$，

则 $\cos(x+2y)=$____。

这是一道典型的需要使用迂回法解决的数学题，尽管每人都可以得到它的一个答案是 1，但是除此以外是否还有其它的答案，那就不得而知了。现在我们将两个方程变形联立。

得$\begin{cases}(-2y)^3+\sin(-2y)-2a=0\\ x^3+\sin x-2a=0,\end{cases}$

可以清楚地看到，x 和 $-2y$ 均是方程 $m^2+\sin m-2a=0$ 的根。

那么这个方程究竟有多少个根呢？我们用数形结合的观点来解决这个问题，我们分别画图象（见图 1）。$y=-\sin m$ 和 $y=m^3-2a$。（其中 m 是自变量）显然无论 a 为任何实数，y_1 和 y_2 只有一个交点，说明方程 $m^2+\sin m-2a=0$ 的根有且只有一个，因此 $x=-2y$，，$x+2y=0$。则 $\cos(x+2y)=1$。实际上它类似于我们曾有过的切点弦方程的求法。

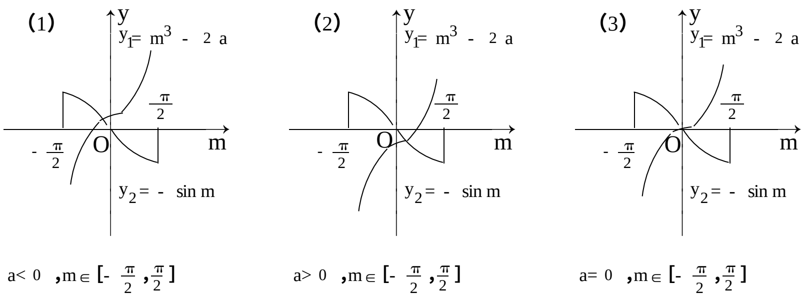


图1

设圆 O_1 **方程为** $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$**,**$P(x_0,y_0)$ **为圆** O_1 **外一点,从** P **引圆** O_1 **的两切线** PA、PB。**求切点弦** AB **所在直线方程。**

略解 :**设切点** $A(x_1,y_1)$、**切点** $B(x_2,y_2)$。

则切线 PA :$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=R^2$**,**

切线 PB :$(x_2-a)(x-a)+(y_2-b)(y-b)=R^2$**,**

又 P **点在** PA **和** PB **上,**

, $(x_1-a)(x_0-a)+(y_1-b)(y_0-b)=R^2$**,**

$(x_2-a)(x_0-a)+(y_2-b)(y_0-b)=R^2$。

即点 $A(x_1,y_1)$ **和** $B(x_2,y_2)$ **都在直线** $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2$ **上,而我们知道过** A、B **两点的直线方程是唯一的,所以直线方程** $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$ **就是我们所要求的切点弦** AB **所在直线方程,从切点弦直线方程的迂回性求法到今年竞赛题的求法,是一种多么了不起的联想。**

又如,已知一平面与一个正方体的 12 **条棱的夹角都是** α**,则** $\sin = \alpha$ ____。

本题的突破口不是在于怎样设置一个平面去截这 12 **条棱,而是先考虑这** 12 **条的三种分类法。即每四条棱的方向是一致的。实际上** 12 **条棱只有三种不同的方向,而在空间,线线成角,面面成角是通过平移来完成的,显然从正方体一个顶点出发的** 3 **条棱足以代表** 12 **条棱与平面成角,这样一想,问题**

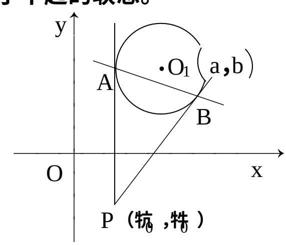


图2

就迎刃而解,实际上最好的模型就是如图 3 :$C_1H = = \frac{1}{3}AC_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}a$。

易证 :$AC_1\perp$ **平面** B_1D_1C**,**$AC_1\perp CH$。

则 $\alpha=\angle C_1CO$。$\sin\alpha=\dfrac{C_1H}{C_1C}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

再如，在正方体八个顶点所有的连线中，有多少对异面直线？

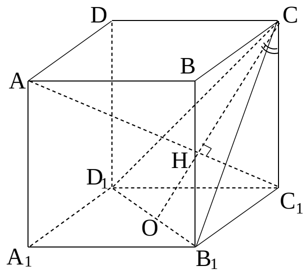


图3

正常解题过程是

(1) 八个点共有连线 $C_8^2=28$ 条。

(2) 这 28 条线共计组成 C_{28}^2 对。

(3) 其中这些成对直线中共面的有：

①每个顶点可引出七条线（三条面对角线、三条棱、一条体对角线），每 2 条成一对共面直线，共计有 $8\times C_7^2$ 对。

②面对角线共面的有 $6+6=12$ 对（不共于一顶点）。

③体对角线共面的有 $C_4^2=6$ 对。

④12 条棱共面的有 $3\times C_4^2$ 对（不共于一顶点），

(4) 这 28 条线中异面直线共有

$C_{28}^2-8\times C_7^2-12-C_4^2-3\times C_4^2=174$ 对。

这种分类法虽然是一种基本方法，但太繁琐。而且重复遗漏难以避免，现在我们用迂回法处理这个问题，不直接求这些点所确定直线的条数，而是首先考虑这八个点共可以组成多少个四面体？

这是九二年全国高考题，这个问题不难解决，$C_8^4-6-6=C_8^4-12$（其中六个是对角面，六个是正方体表面）。而每个四面体都是 3 对异面直线，所以共有 $(C_8^4-12)\times3=174$ 对异面直线。

最后再举一例 和三条异面直线 a、b、c 同时相交的直线条数的求法。

这个问题能否解决的关键是怎样去构造一种能被人接受的模型。

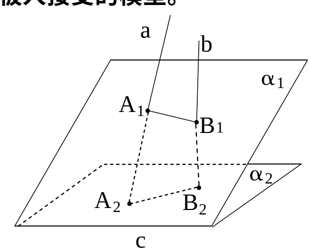


图4

如图 4 过 c 任作一平面 α_1 使其与 a、b 分别交于 A_1、B_1，则直线 A_1B_1 与 c 有两种情况，（因为它们都在平面 α_1 内），若 A_1B_1 与 c 相交，则 A_1B_1 就是所求的第一条直线，若 $A_1B_1\parallel c$，则过 c 再作一平面 α_2，使其与 a、b 交于 A_2、B_2 两点，显然 $A_2B_2\nparallel c$（否则

$$\left.\begin{array}{l}A_1B_1\parallel c\\A_2B_2\parallel c\end{array}\right\}\Rightarrow A_1B_1\parallel A_2B_2$$

这和 a、b 是异面直线矛盾）。这样 A_2B_2 就是所要求的第一条直线，同理过 c 再作平面 α_3、α_4、…、a_n 与 a、b 分别交于 A_3、A_4、…、A_n，B_3、B_4、…、B_n，则直线 A_3B_3，

A_4B_4,…A_nB_n 均符合条件。因此这样的直线有无数条。

□“迂回”思考法解(证)题

解题意味着发现一条摆脱疑难、绕过障碍的途径,以达到一个不能一蹴而就的目的。如果你不能解决所提出的问题,当你陷入“束手无策”的困境时,请你不要忘记人类的文明之处就在于会迂回绕过不能克服的障碍,就在于想出某个辅助问题。“迂回”思考法有时会帮助你解决疑难。

“迂回”思考法在人类历史的发展中起着非同小可的作用,它帮助人们解决了许多世界著名问题。在天文学历史上,海王星的发现就是这种‘迂回战术’成功的典型事例,当时人们根据种种迹象判断,在天王星的外面一定还有一颗行星在远远地围绕太阳运转。但要在“茫茫”星海中寻找一颗小小的行星,比大海捞针更难,尽管世界上许多天文学家在天天寻找着它,仍一无所获。于是科学家们就采取了“迂回”的手段,转而从计算行星的轨道上入手,经过大量复杂的计算,终于获得了这颗未曾露面的行星的轨道参数,天文学家根据数学家提供的这个轨道很快地发现了这颗太阳系的新星。

在数学史上,欧几里得第五公设不可证性的解决是这种‘迂回战术’成功的另一典型事例。由于欧氏第五公设不象其他公设和公理那样简单明了,因此后人屡次尝试加以证明,许多数学家为此花费了毕生的精力,但可惜的是都以失败告终。十九世纪俄国数学家罗巴切夫斯基运用‘迂回’思考法,企图建立否定平行公理而仍保留其他公理的几何体系,获得成功。建立了罗氏几何,从而对欧氏第五公设的不可证性得到了解决。

“迂回”思考法对数学中的解(证)题是非常有用的。我们在解(证)题中常用的‘反证法’、“同一法”、“分析法’等都可归属‘迂回’思考法的范畴。山东曲阜师院李正银老师归纳在数学问题的解决中‘迂回’思考法还有下面几种表现形式。

1.把问题当作已经解决了的

所谓把问题当作是已经解决了的,就是先把所提问题设想为已经得到了结果,然后再分析、综合,从而探求出解(证)题的途径。

例1　给定一条边和两条对角线,作平行四边形。

解:我们把这个问题当作是已经解决了的。即假设平行四边形已经作成,此平行四边形中的一条边和两条对角线(已给定)都已恰当地安排好了,参看图26。有 $AQ=\frac{1}{2}d_2$,$BQ=\frac{1}{2}d_1$。

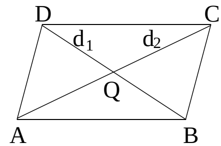


图26

我们可以看出△QAB的边QA,QB是两条已知对角线的二分之一,边AB已给定—因此我们能用三个已知边作出它。这样一来作平行四边形问题就一目了然了。

2. 分解与重新组合

所谓问题必须具备已知,未知,条件三部分,缺一而不能成为问题。有时为解决问题的需要,把它分解,然后考虑其他细节。在分解之后我们尝试用某种新方式把元素重新组合成另一问题。

例3　已知一直线方程及一点的坐标,求一点与已知点对称于已知直线。

解:未知是什么?一点,其坐标设为(p,q);

已知是什么?直线方程设为 $y=mx+n$;一点,其坐标设为(a,b);

条件是什么?点(a,b)与(p,q)关于直线 $y=mx+n$ 对称。

我们把条件分成二部分:第一,连结已知点和未知点的直线垂直于已知直线($\frac{q-b}{p-a}=-\frac{1}{m}$);第二,此连结线的中点在已知直线上($\frac{b+q}{2}=m\frac{a+p}{2}+n$)。然后把上述问题组合为新的问题:方程组

$$\begin{cases}\frac{q-b}{p-a}=-\frac{1}{m}\\ \frac{b+q}{2}=m\frac{a+p}{2}+n\end{cases}$$

的求解问题。从这里容易求出对称点(p,q)的坐标。

3. 类比

当遇到一个问题而又没想到解决办法时,你可以考虑一下,以前是否遇到过已经解决了的和当前的问题有类似的地方,可与前题进行类比,各种类比在发现解证途径方面都可能起到作用。

例4　设E,F分别为四边形ABCD的边AB,CD上的点,且 $\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF}=\frac{AD}{BC}$,求证:直线EF与AD及BC交成相等的角。

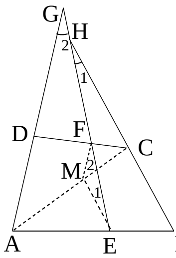


图27

分析：此例中的比值$\frac{AD}{BC}=1$时就是下题："四边形 ABCD 中 AD = BC，E，F 分别为 AB，CD 的中点。EF 交 AD、BC 的延长线于 G、H，求证：$\angle AGE=\angle BHE$"。如果熟悉解这个题的途径（图 27）：取 AC 的中点 M，由 $ME=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=MF$ 即得$\angle 1=\angle 2$。而又看到这个问题和例 3 非常相似，由类比的思想自然可启发我们解例 3 的思路：在线段 AC 上取一点 M，使$\frac{AM}{CM}=\frac{m}{n}$，由$\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF}=\frac{m}{n}$，故 MF∥AD，ME∥BC，且$\frac{ME}{BC}=\frac{MA}{AC}=\frac{m}{m+n}$，$\frac{MF}{AD}=\frac{MC}{AC}=\frac{n}{m+n}$

故 MF = ME，原题的证明显而易见。

□数学解题中的绕圈子策略

路遇险阻，人常绕道而行，力敌不胜，帅将用迂回战术。迂回战术的关键是绕圈子，有时圈子要绕大，才能在正面摆脱敌人，深入敌后。解数学题的策略与此相同，当遇到生疏的问题时，我们可以"绕圈子"，即绕到问题的背后或侧面，从整体抓住问题的本质特点进行分析、联想、猜想，尽可能将生疏问题转化为熟悉的问题，从而导致问题的解决。广东廉江县第三中学钟森老师归纳的做法有：

1. 从数字特点上去绕圈子

抓住题目的数字特点去"绕圈子"，即观察、分析数字之间的内在联系，往往能找到解题突破口。

例 1 计算

$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{19}{20!}$的准确到百分之一的近似值。

分析：不急着用"常规法"来解，而分析"$\frac{19}{20!}$"和"$\frac{1}{2!}$"，因为$\frac{19}{20!}+\frac{1}{20!}=\frac{1}{19!}$，所以$\frac{19}{20!}=\frac{1}{19!}-\frac{1}{20!}$；因为$\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}=1$，所以$\frac{1}{2!}=1-\frac{1}{2!}$；同理可得$\frac{2}{3!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$，$\frac{3}{4!}=\frac{1}{3!}-\frac{1}{4}$；……，于是原式转化为$\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19!}-\frac{1}{20!}\right)$，这样，从表面上看式子变"繁"了，实际上式子已构成规律，我们容易得到：原

式 $=1-\frac{1}{20!}$,又因为$\frac{1}{20!}<\frac{1}{1000000}$,所以所求近似值为 1。

2. **从结构特征上去绕圈子**

精细观察题中式子的结构特征(即从结构特征上去绕圈子),联想与之相关的数学概念、定理、公式、法则和解题基本方法,有时可以找到解题捷径。

例 2　已知 a、b、c 为三个互不相等的实数,且 $c(x-y)+a(y-z)+b(z-x)=0$,求证:

$\frac{x-y}{a-b}=\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}$。

分析:仔细观察分析已知等式的结构,不难发现二次轮换对称式

$c(x-y)+a(y-z)+b(z-x)=\begin{vmatrix} c & z & 1 \\ a & x & 1 \\ b & y & 1 \end{vmatrix}=0$,联想到三点共线定理可知:三点 $A(c,z)$、$B(a,x)$、$C(b,y)$ 在同一直线上。此时,注意观察要证的等式的结构特征便发现:

$\frac{x-y}{a-b}$、$\frac{y-z}{b-c}$和$\frac{z-x}{c-a}$分别是直线 BC、AC 和 AB 的斜率。又因为 BC、AC 和 AB 是同一直线,所以它们的斜率相等。故原等式成立。

此题是《数学题解辞典》(上海辞书出版社出版)第 352 题,该书介绍两种证法都不甚简便。

3. **从特殊与一般的变换方法上去绕圈子**

从特殊到一般是指把问题抽象化或转化为整体性较强的问题,通过对这些更为抽象问题性质或关系的考察,使得问题获得解决。

例 3: 比较 1990^{1991} 和 1991^{1990} 大小。

分析:把问题一般化:比较 n^{n+1} 与 $(n+1)^n$,$(n\in N)$ 的大小,经过试算可见:当 $n=1,2$ 时,有 $n^{n+1}<(n+1)^n$;当 $n=3,4$ 时,有 $n^{n+1}>(n-1)^n$。猜想"当 $n\geqslant 3$ 时,总有 $n^{n+1}>(n+1)^n(n>\in N)$"于是,只要证明此命题成立。令 $n=1990$,就可以确定 $1990^{1991}>1991^{1990}$。

证明: (i) 当 $n=3$ 时,易知 $3^{3+1}>(3+1)^3$,

(ii)　设 $n=K$ 时,"$K^{K+1}>(K+1)^K$"成立。

则$(\frac{K+1}{K})^k<K$。当 $n=K+1$ 时,

$\frac{k+2}{k+1}<\frac{k+1}{k}$,

, $\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+1}{k}\right)k \cdot \frac{k+1}{k}$

$< k \cdot \frac{k+1}{k} = k+1$

即$(k+1)^{K+2} > (k+2)^{K+1}$,所以当 $n = k+1$ 时,命题也成立。

综上所述可知“当 $n > 3$ 时,总有 $n^{n+1} > (n+1)^n (n \in N)$”成立。

从一般到特殊的转换方法上去“绕圈子”,可以发现问题的一般结论。

例 4 求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n(n \in N, 4 \leqslant n)$ 的正整数解的个数有多少?

分析 把问题特殊化 求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ 的正整数解的个数。把 10 看作是 $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$,这里有 9 个“+”号,而 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 有 3 个“+”号,虽然,从 9 个“+”号取 3 个“+”号便符合题意,譬如:$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1+1+1+7$。这样,问题的中心变成了组合问题,因此,不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ 的正整数解的个数是:$C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$。如此类推,所求不定方程的正整数解的个数是 C_{n-1}^3。

由此,我们进一步发现:不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n(k、n \in N)$ 的,$k \leqslant n$ 正整数的解个数是 C_{n-1}^{k-1}。

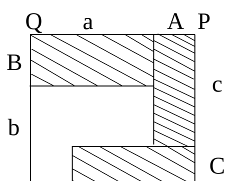
4. 从数形结合上去绕圈子

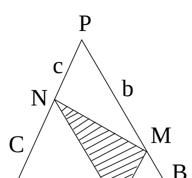
著名数学家华罗庚说过:“数缺形时少直观,形少数时难入微”,数形相结合,直观又入微,不少精巧的解法正是数形结合相辅相成的产物。

例 5 正数 $a、b、c、A、B、C$ 满足条件 $a + A = b + B = c + C = k$,求证:$aB + bC + cA < k^2$(第 21 届全苏数学奥林匹克试题的第 5 题)

分析一 如图,作边长为 k 的正方形 QMNP 和三个阴影矩形,使得 $QP = a + A$,$QM = MN = b + B$,$PN = c + C$,显而易见,三个阴影矩形的面积之和小于正方形 QMNP 的面积。即 $aB + bC + cA < k^2$。

分析二 如图,作边长为 k 的正三角形 PQR,分别在各边上取点 L、M、N 使 $QL = A$,$LR = a$,$RM = B$,$MP = b$,$PN = C$,$NQ = c$,可见 $S_{\triangle LRM} + S_{\triangle MPN} + S_{\triangle NQL} < S_{\triangle PQR}$,$aB + bC + cA < k^2$





□数学解题中的等效法

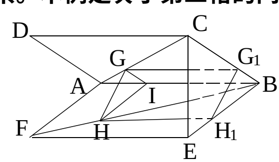
“在数学中,技能比仅仅掌握一些知识重要得多……什么是数学技能?数学技能就是解题能力—不仅能解决一般的问题,而且能解决某种程度的独立思考、判断力、独创性的想象力问题。”(波利亚)这些“想象力问题”是解题教学的重大课题。在这类问题中,有许多可以用等效法对它们进行‘格”的转变,即在效果相同的前提下,依据各种解题思路的科学程序,因题制宜地选择对口的转换策略,对问题进行适当的抽象变换,使之转化为熟悉的等效问题。等效法是一种富于想象、经验与技巧的方法,对于发展学生的求异思维,培养学生的数学技能,有独特的作用。福建邵武市六中林从栋老师总结常见的等效法有:

1.等效降格

解方程(组)的降幂、消元法,几何中空间维数的变更,是常见的等效降格方法的应用。等效降格还适用于其它一些数学领域。

例1 如图,正方形 ABCD 和正方形 ABEF 所在的平面构成一个二面角,G、H 分别是对角线 AC 和 BF 上的点,且 $AG = FH$。求证:$GH /\!/$ 平面 BEC。

分析 把立几中直线与平面的关系分为三格:第一格是直线与直线的关系,第二格是直线与平面的关系,第三格是平面与平面的关系。本例是关于第二格的问题。若降为第一格,则可设法在平面 BEC 内找一条直线,使它与 GH 平行。为此,在面 AC 内,作 $GG_1 /\!/ AB$ 交 BC 于 G_1,在面 AE 内作 $HH_1 /\!/ AB$,交 BE 于 H_1,连结 G_1H_1,则 $GG_1 /\!/ HH_1$,且 $GG_1 = CG \cdot \sin45°$,$HH_1 = BH \cdot \sin45°$。由 $AG = FH$,$AC = BF$,有 $CG = BH$,故 $GG_1 = HH_1$ 则 GHH_1G_1 是平行四边形,$GH /\!/ G_1H_1$。又 $G_1H_1 \subset$ 平面 BEC,故 $GH /\!/$ 平面 BEC。



2.等效升格

如同等效降格一样,采用等效升格的方法解题,在许多场合也显示出优越性。如

以等效升格的方法处理例1,把属于第二格的问题升为第三格,研究平面与平面的关系。在面 AC 内,作 $GI /\!/ BC$ 交 AB 于 I,连结 HI,则 $AI:AB = AG:AC$,且 $GI /\!/$ 平面 BEC。由 $AG = FH$,$AC = FB$,有 $AI:AB = FH:FB$,则 $HI /\!/ AF /\!/ BE$,故 $HI /\!/$ 平面 BEC。又 $GI \cap HI = I$,故平面

GHI∥平面 BEC。而 GH⊂平面 GHI,故 GH∥平面 BEC。

例 2 求证:$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}(n\in N)$。

分析 设 $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$。直接证明 $x<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$是困难的。考虑等效升格,求 x_n^2 与$\frac{1}{2n+1}$的关系。由$\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}(k=1,2,\cdots)$,得 $x^2=(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4})\cdot\cdots\cdot(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n})<(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5})\cdot\cdots\cdot(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1})$

$=\frac{1}{2n+1}$,故 $x<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$。

3. 等效分格

在处理某些较复杂的数学问题时,有时可以把它看作是由若干较简单的、相互独立的数学问题组合而成的,通过各“组合件”的逐个解决,达到整体解决的目的。

例 3 把 6 份相同的礼物送给 3 个同学,每人至少一份,共有多少种送法?

分析 :由每人至少一份这个条件,把问题分解为两个简单的部份 :①每人先送一份 ;②余下的 3 份送给 3 人。由于①的方法数是不变的,故只要研究②的方法数即可。这样,问题转化为一个等效问题 :把 3 份礼物送给 3 人,方法数为 $P_2^1+P_3^2+1=10$。

4. 等效并格

在某些数学问题中,可以根据题目的特征,把若干分散的因素合并成一个等效的整体,通过整体的处理,求得问题的解决。

例 4 已知 x、y、$z\in R$,$x+y+z=0$,$xyz=1$。求证 :x、y、z 中至少有一个大于$\frac{3}{2}$。

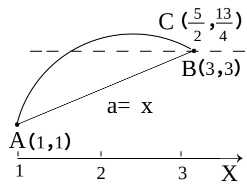
分析 :由已知条件,知 x、y、z 中至少有一个大于零。若设 $z>0$,且用 z 表示 x、y,可得 $x+y=-z$,$xy=\frac{1}{z}$。因此,可将 x、y 看作一元二次方程 $u^2+zu+\frac{1}{z}=0$ 的二实根。这样,就把已知条件通过韦达定理的逆定理组合到一个方程中。再由 $\Delta=z^2-\frac{4}{z}\geqslant0$ 和假设 $z>0$,得 $z^3-4\geqslant0$,$z^3\geqslant4$,故有 $z\geqslant\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\frac{32}{8}}>\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$。

5. 等效移格

解题时,如果能注意到题目中出现的数、式、图在不同的数学分科

中的不同含义与等价形式，把一个分科里的公式、定理、原则或方法巧妙地迁移到另一个分科中，往往会得出令人耳目一新的解法，激发学生的创造性思维。

例 5　已知方程 $\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(a-x)$，其中 $a\in R$，试讨论 a 的数值对方程实根的影响。



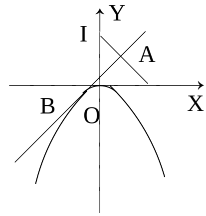
分析　此例讨论对数方程实根个数。为此必须把对数方程降格为一元二次方程 $(x-1)(3-x)=a-x$，即 $x^2-5x+3+a=0$…①，问题转化为讨论在 $x\in(1,3)$ 且 $x<a$ 的情况下①的实根个数。按常规须进行繁琐的讨论。考虑等价移格为用图形直观显示，帮助解答。由①得 $a=-x^2+5x-3$，视 a 为 x 的二次函数，作出 $a=-x^2+5x-3$ 和 $a=x$ 的图象。由图看出，当 $a\in(3,\frac{13}{4})$ 时，$\overset{\frown}{ACB}$与平行于 x 轴的直线有两个交点，即方程有二实根；当 $a\in(1,3)\cup\{\frac{3}{4}\}$ 时，方程有一实根；当 $a\leqslant1$ 时，方程无实根。

6. 等效逆格

对于多数数学问题，通常从正面求解。当正面求解遇到困难时，不妨试行等效逆格，从问题的反面入手，通过求解反面而抵达正面。

例 6　从线段 $y=-x+1(0\leqslant x\leqslant1)$ 上任意一点 A 作抛物线 $y=-x^2$ 的切线，切点横坐标为 a，求 a 的取值范围。

分析　若按条件给出的 A 点在先、切点在后的次序思考，难以寻觅解题方向。但若从这种次序的反面—抛物线的切线与直线的交点 A 落在 $0\leqslant x\leqslant1$ 的线段上



来考虑，则使人茅塞顿开。设切点为 $B(a,-a^2)$，则过 B 的切线方程为 $\frac{y-a^2}{2}=-ax$，即 $y=-2ax+a^2$…①。它与直线 $y=-x+1$…②的交点 A，就是①、②组成的方程组的解。求得 $x=\frac{a^2-1}{2a-1}$，由 $0\leqslant x\leqslant 1$，得 $0\leqslant\frac{a^2-1}{2a-1}\leqslant 1$，从而解得 $-1\leqslant a\leqslant 0$，$1\leqslant a\leqslant 2$。

7. **等效扩格**

在某些化学反应中，催化剂可以加快反应的速度。在某些数学问题中，不改变题设和结论，添设某些元素，有助于把未知转化为已知，促使问题趋于明朗、简洁。这种解题方法，我们称为等效扩格。

例 7　设 a、b、c、$d\in z$，且 $a<2b$，$b<3c$，$c<6d$。若 $d<100$，则 a 的最大可能值是(　)。

(A) 2367；(B) 2375；(C) 2391；

(D) 2399；(E) 2400。

分析：已知的四个不等式均不含等号。为求 a 的最大值，必须使它们都含有等号。根据整数的性质，四个不等式的右边均添加 -1；经此等效扩格，得 $a\leqslant 2b-1$，$b\leqslant 3c-1$，$c\leqslant 6d-1$，$d\leqslant 100-1=99$。由此即可推得 $a\leqslant 24d-9\leqslant 24\times 99-9=2367$。

□等效运算方法

当在福斯特(Foerster)的《代数与三角》一书中看到恒等式 $\sec^2x+\csc^2x=\sec^2x\cdot\csc^2x$ 时，我认为是错误的：两个函数的和与积相等是人们的常识难以接受的。然而如下证明正确无误：

$$\sec^2x+\csc^2x=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}$$

$$=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x\sin^2x}=\sec^2x\cdot\csc^2x。$$

事实上，还可以找到很多类似的恒等式：

$\operatorname{tg}^2x-\sin^2x=\operatorname{tg}^2x\cdot\sin^2x$，

$\operatorname{ctg}^2x-\cos^2x=\operatorname{ctg}^2x\cos^2x$ ……

我们来考虑一般情况，设△和 * 是集合 {+，-，·，÷，↑，↓} 中任两个不同元素，f(x)，g(x) 为两个函数表达式。(其中 ↑，↓ 分别表

示乘方和开方 求算术根）。我们来考虑函数方程

$$f(x)\triangle g(x)=f(x)*g(x) \tag{1}$$

如果(1)有解 $f_0(x)$ 和 $g_0(x)$，则称△和 $*$ 为关于函数 $f_0(x)$ 和 $g_0(x)$ 等效的运算。我们不考虑△和 $*$ 为互逆运算这种平凡的情形。

1. 和差与积的等效性。考虑方程

$$f(x)\mp g(x)=f(x)\cdot g(x) \tag{2}$$

设 $f(x)\neq\pm1$，那么容易求得

$$g(x)=\frac{f(x)}{f(x)\pm1} \tag{3}$$

这说明，存在无数对和或差同积相等的函数对。比如，取 $f(x)=\sec^2x$，则 $g(x)=\csc^2x$；

取 $f(x)=2x+1$，则(3)给出

$g(x)=\frac{2x+1}{2x}$。

令 $f(x)$ 分别为 $\cos2x$ 和 $\ln x$，有

$$\cos2x+\left(1-\frac{1}{2}\csc^2x\right)$$
$$=\cos2x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\csc^2x\right),$$

$\ln x-\frac{\ln x}{\ln ex}=\ln x\cdot\frac{\ln x}{\ln ex}$。

这都是令人意想不到的恒等式。

2. 和差与商的等效性。考虑方程

$$f(x)\pm g(x)=f(x)\div g(x) \tag{4}$$

我们不难导出它的求解公式

$$f(x)=\frac{\pm g^2(x)}{1-g(x)} \tag{5}$$

不同于(3)的是这里给定 $g(x)$ 求 $f(x)$。例如

$\sin^2x\text{tg}^2x+\sin^2x=\sin^2x\text{tg}^2x\div\sin^2x$，

$4\csc^22x-\sec^2x=4\csc^22x\div\sec^2x$，

$(e^x+2+e^{-x})-(e^x+1)$

$=(e^x+2+e^{-x})\div(e^x+1)$。

3. 积与幂的等效性。对方程

$$f(x)\cdot g(x)=f(x)\uparrow g(x) \tag{6}$$

我们设 $f(x)>0$,$g(x)>0$,那么它等价于

$\ln f(x)+\ln g(x)=g(x)\ln f(x)$,

于是类似于方程(2)取' + '的情形,那么

$\ln f(x)=\dfrac{\ln g(x)}{g(x)-1}$,($g(x)=1$ 是平凡情形,故可假定 $g(x)\neq 1$),因此

$$f(x)=g(x)\uparrow\left(\frac{1}{g(x)-1}\right)。\tag{7}$$

例如,我们有

$$[x^{\frac{1}{x-1}}]\cdot x=(x^{\frac{1}{x-1}})^{x}$$

$(\sec^2 x)^{\mathrm{ctg}^2 x}\cdot\sec^2 x=[(\sec^2 x)^{\mathrm{ctg}^2 x}]^{\sec^2 x}$。

类似可知方程

$$f(x)\div g(x)=f(x)\uparrow g(x)\tag{8}$$

的求解公式为

$$f(x)=g(x)\uparrow\left(\frac{1}{1-g(x)}\right),\tag{9}$$

方程 $f(x)\cdot g(x)=f(x)\downarrow g(x)$ (10)

的求解公式为

$$f(x)=g(x)\downarrow\left(\frac{1-g(x)}{g(x)}\right),\tag{11}$$

方程 $f(x)\div g(x)=f(x)\downarrow g(x)$ (12)

的求解公式为

$$f(x)=g(x)\downarrow\left(\frac{g(x)-1}{g(x)}\right)。\tag{13}$$

不难看出公式(7)、(9)、(11)、(13)之间的类似和联系。

关于三级运算,我们有一个表

	一级运算	二级运算	三级运算
运算	+	·	↑
逆运算	-	÷	↓

由前面的研究我们看到,每个运算可以和比它高一级或低一级的两个运算构成(关于两个函数的)等效运算,同一级的两个运算构成的函数方程(1)只是平凡的情况。如果把一级运算和三级运算搭配,构

成函数方程(1),情况又如何呢?例如

$$f(x)\pm g(x)=f(x)\uparrow g(x) \qquad (14)$$

一般的说,这很难把函数分离出来。但若使 $f(x)$ 或 $g(x)$ 为常数,比如命 $g(x)=2$,方程化为一个简单的二次方程

$$f(x)+2=f^2(x),$$

那么 $f(x)=2$ 或 -1。自然,对 $n\in N$,研究 $f(x)+n=f^n(x)$ 也是很有趣的。对方程 $f(x)\pm g(x)=f(x)\downarrow g(x)$,也可作同样的考虑。

在本文写作过程中,我对于存在这么多的由等效运算构成的奇妙恒等式感到吃惊,这类恒等式巧妙的结构本身具有内在的美,由于令人难以置信而促使人们急于去验证它,因此作为思维和运算的材料是非常难能可贵的。

读者不难对每种情况设计出大量美妙的实例。

□“参数法”的八种解题功能

“参数法”作为一种重要的数学转化方法,具有非常显著的功效。在解题中恰当引入参数,对揭示影响变化的各种因素之间的联系,消化问题的难点,促使问题的转化,都能起到意想不到的作用。广东省曲江县一中熊前文老师分析介绍了“参数法”在解决解析几何和代数两方面的常见功能。

1. 解决二次曲线的相交问题

例1 曲线 C_1:$\frac{(x-m)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 曲线 C_2:$x=y^2+\frac{3}{2}$ 有公共点,求 m 的取值范围。

解:曲线 C_1 可设为 $\begin{cases}x=m+2\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$(a 为参数)

代入 C_2,整理得:$m=-3(\cos\alpha+\frac{1}{3})^2+\frac{29}{6}$

于是问题等价于求函数 $f(a)=-3(\cos\alpha+\frac{1}{3})^2+\frac{29}{6}$ 的取值范围。易得 $-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{29}{6}$。

2. 解决有关对称问题

例2 若抛物线 $y=ax^2-1$ 上存在关于直线 l:$x+y=0$ 成轴对称的两点 A、B,

试求 a 的取值范围。

解：依题设 AB 的中点 $M(x_0, -x_0)$，直线 AB 的参数方程是

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}\text{（t 为参数）}$$

代入抛物线方程 $y = ax^2 - 1$ 　整理得：

$$at^2 + (2\sqrt{2}ax_0 - \sqrt{2}) \cdot t + 2(ax_0^2 + x_0 - 1) = 0$$

根据 t 的几何意义知：$t_1 + t_2 = 0$，$t_1 \cdot t_2 < 0$

于是有 $\dfrac{\sqrt{2} - 2\sqrt{2}ax_0}{a} = 0$ 得：$x_0 = \dfrac{1}{2a}$

代入 $\dfrac{2(ax_0^2 + x_0 - 1)}{a} < 0$

解得 $a > \dfrac{3}{4}$。

3. 解决距离与角的计算问题

例 3 （1983 年全国高考题）已知椭圆 E 的长轴 $|A_1A_2| = 6$，焦距 $|F_1F_2| = 4\sqrt{2}$。过 E 的焦点 F_1 作直线交 E 于 M、N。设 $\angle F_2F_1M = \alpha(0\alpha\ \alpha < \pi)$ 当 α 取什么值时，$|MN|$ 等于椭圆短轴的长。

解：由题设可求 E 的方程：$\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$

设 MN：$\begin{cases} x = -2\sqrt{2} + t \cdot \cos\alpha \\ y = t \cdot \sin\alpha \end{cases}$（t 为参数）

代入 E，整理得：

$$(\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha) \cdot t^2 - 4\sqrt{2}\cos\alpha \cdot t - 1 = 0$$

，

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = \dfrac{4\sqrt{2}\cos\alpha}{\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha} \cdots\cdots(1) \\ t_1 \cdot t_2 = \dfrac{-1}{\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha} \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由条件和参数 t 的意义得：

$$|t_1 - t_2| = 2 \cdots\cdots(3)$$

由(1)、(2)、(3)得 $\cos^2\alpha = \dfrac{3}{4}$

又 $0\alpha\ \alpha < \pi$，，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ 或 $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$

4. 解决轨迹探求问题

例 4　(1992 年上海高考题)设动直线 l 垂直 x 轴,且与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$交于 A、B 两点,P 是 l 上满足$|PA|\cdot|PB|=1$的点。求 P 点的轨迹方程,并说明轨迹是什么图形。

解　设 $A(2\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$、$B(2\cos\theta,-\sqrt{2}\sin\theta)$,$P(x,y)$

则 $x=2\cos\theta$。　$|PA|\cdot|PB|=1$

,　$|y-\sqrt{2}\sin\theta|\cdot|y+\sqrt{2}\sin\theta|=1$

即　$y^2=2\sin^2\theta\pm1$

,　　P 点轨迹的参数方程为:$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y^2=2\sin^2\theta\pm1\end{cases}$

消去 θ,$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1(-2<x<2)$及$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

故 P 点轨迹是椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$和椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$夹在直线 $x=2$ 或 $x=-2$ 之间的部分。

5. 解决二元条件最值问题

例 5　(1993 年全国高中数学联赛试题)实数 x、y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$　设 $S=x^2+y^2$　则 $S'=\frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}$的值为____。

解　因 $S>0$　设 $x=\sqrt{S}\cos\alpha$,$y=\sqrt{S}\sin\alpha$。

则　$4S\cos^2\alpha-5S\cdot\sin\alpha\cos\alpha+4S\cdot\sin^2\alpha=5$

,　　$S=\frac{10}{8-5\sin2\alpha}$

,　　$S_{max}=\frac{10}{3}$,$S_{min}=\frac{10}{13}$。于是　$S'=\frac{8}{5}$

6. 解决函数值域问题

例 6　(第七届希望杯高二试题)当$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant3$时,函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$的值域是(　)

(A)　$[2,3\frac{1}{3}]$　　　(B) $[2,+\ \ )$

(C)　$[3\frac{1}{3},+\ \ )$　　(D) $[0,+\ \ )$

解　设　$x=tg\alpha$ $(arctg\frac{1}{3}\alpha \ll arctg3)$

则　$f(x)=\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{2}{\sin2\alpha}$。

因　$2\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}\leqslant2\lll2\mathrm{arctg}3$　所以 $2\leqslant\dfrac{2}{\sin2a}\leqslant3\dfrac{1}{3}$。故选(A)

7. 解决不等式求解问题

例 7　(1985 年全国高考题)解不等式

$\sqrt{2x+5}>x+1$。

解：设 $t=\sqrt{2x+5}\geqslant0$

则 $x=\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{5}{2}$。

原不等式整理化为　$t^2-2t-3<0$。

解得　$-1<t<3$。　又因 $t\geqslant0$,所以 $0\leqslant t<3$。

即　$0\leqslant\sqrt{2x+5}<3$　得　$-\dfrac{5}{2}\leqslant x<2$

故原不等式的解为：$-\dfrac{5}{2}\leqslant x<2$。

8. 解决不等式证明问题

例 8　设 $a>c>0$,$b>c>0$。求证：

$$\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}\leqslant2。$$

证明：因 $0<\dfrac{c}{a}<1$,$0<\dfrac{c}{b}<1$。

设　$\dfrac{c}{a}=\cos\alpha$,$\dfrac{c}{b}=\cos\beta$。$\alpha\cdot\geqslant\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。

则 $\sqrt{\left(1+\dfrac{c}{a}\right)\left(1+\dfrac{c}{b}\right)}+\sqrt{\left(1-\dfrac{c}{a}\right)\left(1-\dfrac{c}{b}\right)}$

$=\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\cos\ \ )}$

$+\sqrt{(1-\cos\alpha)(1-\cos\ \ )}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}=2\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)\leqslant2$。故原不等式成立。

□参数法在解题中的应用(一)

在初中教材里参数观点已有许多渗透,只不过没有明确给出‘参数’的名称而已,因此,在初中数学的解题教学中,我们要重视参数思

想方法的体现和运用。四川省蓬溪县群力中学邓甫修老师举数例说明了其在解题中的两方面的作用：

1. 设而不求，巧得结论

根据题目的需要引入参数，再通过参数的代换、沟通、转移等作用，求得结论。

例 1　在△ABC 中，$2B = A + C$，a、c 分别为 A、C 所对的边，且有 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$。求△ABC 各角的度数。（1991 年四川中考）

解　设 $a = 2t$，则 $c(\sqrt{3}+1)t$。

由 $2B = A + C$，得 $B = 60°$。

在△ABC 中，由余弦定理，得

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$= (2t)^2 + [(\sqrt{3}+1)t]^2 - 2 \cdot 2t \cdot (\sqrt{3}+1)$

$t\cos 60° = 6t^2$

,　$b = \sqrt{6}t$

又由正弦定理，得

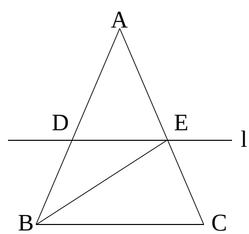
$$\sin A = \frac{a\sin B}{b} = \frac{2t\sin 60°}{\sqrt{6}t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

,　$A = 45°$ 或 $135°$，$A = 135°$ 不合题意，舍去。

,　$C = 180° - (A + B) = 75°$，

故 $A = 45°$，$B = 60°$，$C = 75°$。

例 2　已知△ABC 的面积为 S，作直线 $l /\!/ BC$ 分别交 AB、AC 于 D、E 两点，设△BED 的面积为 R。求证：$R \leqslant \frac{1}{4}S$。（第三届“祖冲之杯”竞赛试题）



证明　如上图，　$DE /\!/ BC$，

,　设 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$，

$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE}{AC} = t$。

,　$S_{\triangle ABE} = tS_{\triangle ABC} = tS$。

又　$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{BD}{AB} = \frac{AB - AD}{AB} = 1 - t$，

,　$S_{\triangle BDE} = (1 - t)S_{\triangle ABE} = (1 - t)tS$。

即 $R = (1 - t)tS$，

整理成关于 t 的方程为

$St^2-St+R=0$,

, $\triangle=S_2-4RS\geqslant 0$,

$S>0$,, $R\leqslant\frac{1}{4}S$。

2. 设参求参,巧得结论

根据题目的需要引入参数,并求出参数的值,从而得到命题的结论。

例 3 解方程组:

$$\begin{cases}x+y=2, & (1)\\ xy-z^2=1 & (2)\end{cases}$$

(1987 年上海市初中数学竞赛试题)

解 令 $x=1+t$, $y=1-t$,

代入(2),得

$(1-t)(1+t)-z^2=1$

, $t^2+z^2=0$,

, $t=0$,$z=0$,

得 $x=1$,$y=1$

, 方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=0\end{cases}$

例 4 已知$\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$,$\angle BAC=60°$,AB: $AC=5$: 2,求此三角形的三边。(1987 年天津市中考)

解 设 $AB=5t$,则 $AC=2t$。

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5t\cdot 2t\sin 60°=10\sqrt{3}$,

, $t^2=4$

, $t=\pm 2$(负值舍去),

即 $AB=5t=10$,$AC=2t=4$。

在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 60°$

$=10^2+4^2-2\times 10\times 4\times\frac{1}{2}=76$,

, $BC=2\sqrt{19}$。

例 5 已知 x,y,z 均为正实数,且满足方程组

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=49 & (1)\\ y^2+yz+z^2=36 & (2)\\ z^2+zx+x^2=25 & (3)\end{cases}$$

求证：$x+y+z=\sqrt{55+36\sqrt{2}}$。

分析 试图从三个方程中直接求出 x、y、z 的值，较困难，考虑到条件与结论均为 x、y、z 的对称式，故引入参数 $t=x+y+z$，再没法构成关于参数 t 的方程，便能简证。

证明 设 $t=x+y+z$，

(1)-(2)，得 $(x-z)(x+y+z)=13$，

(1)-(3)，得 $(y-z)(x+y+z)=24$，

(2)-(3)，得 $(y-z)(x+y+z)=11$；

, $x-z=\frac{13}{t}$，$y-z=\frac{24}{t}$，$y-x=\frac{11}{t}$。

又由(1)+(2)+(3)，得

$$(x+y+z)^2+\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=110,$$

即 $t^2+\frac{1}{2}(\frac{13^2}{t^2}+\frac{24^2}{t^2}+\frac{11^2}{t^2})=110$，

整理，得 $t^4-110t^2+433=0$

, $t^2=55\pm36\sqrt{2}$ 取正号，即得

$x+y+z=t=\sqrt{t^2}=\sqrt{55+36\sqrt{2}}$。

□参数法在解题中的应用(二)

“参数法”在初中数学教材中已有渗透，只不过是没有给出名称而已。如‘等比定理’就是用‘参数法’推导的。因此，在初中数学中要注意渗透‘参数法’的思想方法，并进行适应地练习，四川省泸县奇峰中学李万富老师介绍了如下方法：

1. 不求出参数值，计算中直接消去参数得出答案

例1 已知：△ABC 中，sinA∶sinB∶sinC=8∶3∶7。求∠C 的度数。

解 在△ABC 中，由正弦定理，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

, $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=8:3:7$。

设 $a=8\kappa$,则 $b=3\kappa, c=7\kappa$

, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=$

$\dfrac{(8\kappa)^2+(3\kappa)^2-(7\kappa)^2}{2\cdot 8\kappa\cdot 3\kappa}=\dfrac{24\kappa^2}{48\kappa^2}=\dfrac{1}{2}$。

故 $c=60°$

例 2 如图 1,△ABC 为等腰直角三形,∠ACB = 90°,过 BC 的中点 D 作 DE⊥AB,垂足为 E,连结 CE,求 sin∠ACE 的值。

解 设 $BC=a$,则 $BD=\dfrac{1}{2}a$,$BE=DE=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$。

在△BCE 中,由余弦定理,得

$CE^2=BC^2+BE^2-2BC\cdot BE\cos B$

$=a^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2-2a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\cos 45°=\dfrac{5}{8}a^2$,

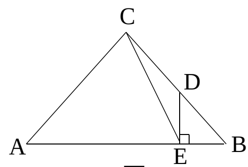


图1

, $CE=\dfrac{\sqrt{10}}{4}a$,$AE=AB-BE$

$=\sqrt{2}a-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$。

例 3 如图 2,已知⊙O_1 和⊙O_2 相交于 A、B 两点,直线 TD 与⊙O_1 相切于 T,和⊙O_2 相交于 M 和 D 两点,且点 M 是线段 TD 的中点,BA 的延长线交于 DT 于 C。求 CM: CT。

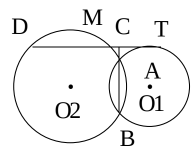


图2

解 设 $CM=x$,$CT=a$,则 $DC=2x+a$。

$CT^2=CA\cdot CB$,$CM\cdot CD=CA\cdot CB$,

, $CT^2=CM\cdot CD$, 即 $a^2=x(2x+a)$,

, $2x^2+ax-a^2=0$,

, $x_1=\dfrac{1}{2}a$,$x_2=-a$(舍去)。

故 $\dfrac{CM}{CT}=\dfrac{x}{a}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{a}=\dfrac{1}{2}$。

例 4 如图 3,AB 是半圆的直径,O 是圆心,C 是 AB 延长线上一点,CD 切圆于 D,DE⊥AB 于 E,已知 AE: EB = 4 : 1,CD = 2。求 BC 的长。

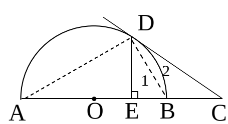


图3

解 由 AE: EB = 4: 1,可设 $EB=a$,则 $AE=4a$。

AB 为⊙O 直径,DE⊥AB,

, $DE^2=AE\cdot EB$,

即 $DE^2 = 4a \cdot a = 4a^2$,

, $DE = 2a$。

连结 AD、DB **可证得** $\angle 1 = \angle 2 = \angle A$,

, $\frac{DE}{DC} = \frac{EB}{BC}$,**故** $BC = \frac{DC \cdot EB}{DE} = \frac{2 \cdot a}{2a} = 1$。

2. 需求出参数值,转换后得出答案

例 5 $\triangle ABC$ **的面积是** $10\sqrt{3}$,$\angle BAC = 60°$,$AB : AC = 5 : 2$,**求此三角形的三边长。**

解 **设** $AB = 5\kappa$,**则** $AC = 2\kappa$。

由已知,得 $\frac{1}{2} \cdot 5\kappa \cdot 2\kappa \sin 60° = 10\sqrt{3}$,

, $\frac{5\sqrt{3}}{2}\kappa^2 = 10\sqrt{3}$,$\kappa = 2$。

即 $AB = 10$,$AC = 4$。

又 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60°$

$= 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 76$,

$BC > 0$,, $BC = 2\sqrt{19}$。

例 6 **如图** 4,**以** $\triangle ABC$ **的** BC **边为直径的半圆交** AB **于** D,**交** AC **于** E,$EF \perp BC$ **于** F,$BF : FC = 5 : 1$,$AB = 8$,$AE = 2$。**求** AD。

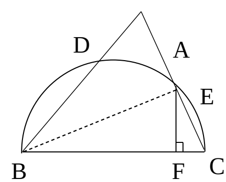


图4

解: **连结** BE,**设** $FC = a$,**则** $BC = 5a$,$BC = 6a$。

又 BC **为半圆直径**,$EF \perp BC$,

, $BE^2 = BF \cdot BC = 5a \cdot 6a = 30a^2$。

在 $Rt\triangle ABE$ **中**,$BE^2 + AE^2 = AB^2$,

即 $30a^2 + 2^2 = 8^2$,

, $a_1 = \sqrt{2}$,$a_2 = -\sqrt{2}$**(舍去)**,

, $FC = \sqrt{2}$,$BC = 6\sqrt{2}$。

又 $BC^2 = CF \cdot BC = \sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12$,

$BC > 0$,, $EC = 2\sqrt{3}$。

由 $AD \cdot AB = AE \cdot AC$,**得**

$$AD = \frac{AE \cdot AC}{AB} = \frac{2(2 + 2\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}。$$

例 7　如图 5，已知正方形 ABCD 的边长为 1，以边 BC 为直径在正方形内作半圆，过 A 作半圆的切线切半圆于 F，交边 CD 于 E，求 DE∶AE 的值。

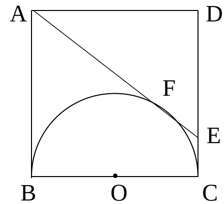


图5

解：设　$CE = x$，则　$EF = CE = x$，$DE = 1 - x$。

$AE = AF + EF = 1 + x$。

在 $Rt\triangle ADE$ 中，$AD^2 + DE^2 = AE^2$，

即　$1^2 + (1 - x)^2 = (1 + x)^2$，解得　$x = \frac{1}{4}$。

，　$DE = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$，$AE = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$，

故　$DE : AE = \frac{3}{4} : \frac{5}{4} = 3 : 5$。

在以上几题的解答过程中，均设了一个（或两个）变数参与运算，从而借助变数帮助求出了我们需要的答案。因此，让学生领会此法无论是对于提高学生的解题能力，还是对以后的学习都是大有帮助的。

□参数法在解题中的运用（三）

“参数”有架起解题金桥的物异功能，更有以简驭繁、化难为易之效，合理、灵活地运用“参数法”能使一些趣题、难题顺利获得解题思路。陕西省新川水泥厂子弟学校乔有平老师总结的做法有：

1. 妙用“参数法”解计算题

例如，计算：

$1993 \times 199219921992 - 1992 \times 199319931993.$

此题若按常规方法硬算，显得枯枯燥、繁琐。

解：不妨用 a 代 1993，b 代 1992，则

原式 $= a \times bbb - b \times aaa$

$= a \times b \times 111 - b \times a \times 111 = 0.$

这种方法简单易行，使繁冗的计算题变得有趣有味，解后使学生美不胜收。

2. 妙用“参数法”解化简题

例如，化简：

$$\frac{1993}{1992^2 - 1991 \times 1993}$$

解：设 $a=1992$，则 $1991=a-1$，$1993=a+1$.

$$\text{原式}=\frac{a+1}{a^2-(a-1)(a+1)}$$

$$=\frac{a+1}{a^2-a^2+1}=a+1=1993.$$

3. 妙用“参数法”巧解约分题。

例如约分 $\frac{191919191919}{939393939393}$。此题分子、分母较大，不易找出它们的最大分约数，既使用“辗转相除法”或“辗转相减法”也十分麻烦。

解：不妨令 $a=19$，$b=93$. 则

$$\text{原式}=\frac{aaaaaa}{bbbbbb}=\frac{a\times111111}{b\times111111}=\frac{a}{b}=\frac{13}{93}.$$

4. 妙用“参数法”解文字题

例如，一个四位数，在它的某位数字前加一个小数点，再和这个四位数相加，和是2000.81. 求这个四位数与 12 的和是多少？

解：设这个四位数前面两位数字为 a 和 b，则该四位数为 $\overline{ab}81$. 由题知，$\overline{ab}81+\overline{ab}.81=2000.81$，化简得，$\overline{abab}+81.81=2000.81$，即 $\overline{abab}=1919$. 故所求的数为 $1981+12=1993$.

5. 妙用“参数法”解应用题

例如，有两组数，第一组的平均数是12.8，第二组的平均数是10.2，而这两组数的平均数是12.02，那么第一组数的个数是第二组数的个数的多少倍？

解：设第一组的个数为 a，第二组数的个数为 b，则第一、二组数的和分别为 $12.8a$、$10.2b$，由题知 $12.8a+10.2b=12.02\times(a+b)$，化简为 $0.78a=1.82b\rightarrow3a=7b\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$.

6. 妙用“参数法”解几何题

例如，如图 1，一个长方形被两条直线段分成四个长方形，其中三个面积分别为 20、25、30 平方厘米。问阴影部分的面积是多少平方厘米？

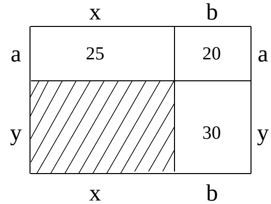


图1

解：设所求长方形的长与宽分别为 x 和 y，另外两个长方形的边长为 a 和 b，则有

$$ax=25,\ ab=20,\ by=30$$

故 $S_{\text{阴影}}=xy=\frac{25}{a}\times\frac{30}{b}$

$=\frac{25\times30}{ab}=37\frac{1}{2}(cm^2)$

7. 妙用“参数法”解数谜题

例如,在右边算式的方框内填入同一个数学,使“趣味数学”所代表的各数之和等于 100,

	□	+	□	=	趣
	□	-	□	=	味
	□	×	□	=	数
+	□	÷	□	=	学
					100

解 设□=a,则 $a+a+a-a+a\times a+a\div a=100\rightarrow 2a+a^2=99\rightarrow a(a+2)=9\times11$,比较等式两边,得 $a=9$

可见,理解参数思想、把握参数运用的技巧成了提高解题技能的一个重要环节,它在解题中有化简、代换;沟通、转移;协调、制约;促成数形结合的作用。同时,可提高学生对知识的理解性认识。

□引参·用参·消参五法

数学里,把主要变数以外可以变化的数叫做参变数。参数是一种辅助变数,它在主要变数之间起到使之相互依存和彼此制约的纽带作用。视“参数”为常数,它就处于相对静止的状态,转化为“定点”、“定值”、“定解”;视“参数”为变数,它就处于相对运动的状态,转化为“范围”、“不定解”、“轨迹”,因此“参数”具有“变数”与“常数”的双重性。

数学教学就是解题教学,所谓优化学生思维,发展学生能力的教学,很重要的一点就是培养、训练学生引参、用参、消参的能力。它存在于整个数学教学活动中。

运用参数解数学问题的方法,习惯称之为“参数法”,参数有“点参数”、“线参数”、“角参数”、“比值参数”、“面积参数”、“时间参数”等,它广泛存在于各种数学问题中,不能局限地理解为参数方程中的参数。

“引参、用参、消参”中“引参”是关键,“用参”是主体,“消参”是目的。云南昆明八中李绍亮老师把这种能力的培养,概括为如下的几个方面:

1. **引入参数,确定参数**

例 1　在面积为 1 的△PMN 中,$\mathrm{tg}\angle PMN=\frac{1}{2}$,$\mathrm{tg}\angle MNP=-2$,建立适当坐标系,求以 M、N 为焦点且过点 P 的椭圆方程。(1993 年高考试题)

分析　题目隐含 P 必为定点。如图 1 建立坐标系,设 $P(x,y)$ 和焦点 $M(-c,0)$,$N(c,0)$(这称之为点参数),从定量条件 $S_{\triangle PMN}=1$ 及定性条件 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}(x+c), \\ y=2(x-c), \end{cases}$ 可确定参数 $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$,从而可求得 $\frac{x^2}{\frac{15}{4}}+\frac{y^2}{3}=1$.

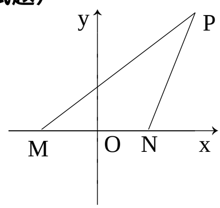


图1

例 2　设椭圆 C 的中心在坐标原点,长轴在 x 轴上,离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,已知点 $P(0,\frac{3}{2})$ 到 C 上的点的最远距离为 $\sqrt{7}$,求 C 的方程。(1990 年高考试题)

分析　设椭圆 C 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a、b 称之为待定参数),由 $e=\sqrt{3}/2\Rightarrow a=2b$,记椭圆上点 $A(x,y)$ 到 P 点距离为 d(引入的线参数),有 $d^2=x^2+(y-\frac{3}{2})^2=-3(y+\frac{1}{2})^2+4b^2+3\quad(-b\leqslant y\leqslant b)$　①

当 $b<\frac{1}{2}$ 时,$\Rightarrow y=-b$,d 有最大值 $\Rightarrow(\sqrt{7})^2=(b+\frac{3}{2})^2\Rightarrow b=\sqrt{7}-\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$,矛盾。

当 $b\geqslant\frac{1}{2}$ 时 $\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$,$d^2$(从而 d)有最大值 $\Rightarrow(\sqrt{7})^2=4b^2+3\Rightarrow b=1$,$a=2$.

引入参数 d,控制曲线系①,从而确定参数 a、b,这也是人们常说的"待定系数法".

例 3　已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$,$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$,求 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ 的值。(1990 年高考试题)

分析　由题设有 $\frac{4}{5}\sin\alpha-\frac{3}{5}\cos\alpha=\frac{3}{5}\cos\beta-\frac{4}{5}\sin\beta$,引入角参数 θ,使 $\cos\theta=\frac{4}{5}$,$\sin\theta=\frac{3}{5}$,则 $\mathrm{tg}\theta=\frac{3}{4}$,且 $\sin(a-\theta)=\sin(\theta-\beta)$　$\alpha+\beta=2\theta+2k\pi(k\in Z)\Rightarrow\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}2\theta=\frac{24}{7}$. 引入"$\theta$",确定 $\mathrm{tg}\theta$,从而获解。

上述方法谓之“引参、定参”.

2. 引入参数,消去参数

例 4 设 $a,b,c\in R^{+}$,求证 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

分析 引入参数 $t(t\in R^{+})$,于是可连续使用$\frac{A+B}{2}\geqslant\sqrt{A\cdot B}$,有 $a^3+b^3+c^3+t\geqslant 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3t}$,为消去 t,令 $t=abc$,得不等式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

此题用 t、消 t,简捷巧妙,恰到好处。

例 5 过抛物线 $y^2=4px(p>0)$的顶点 O 引互相垂直的两弦 OA、OB,求 O 点在 AB 上的射影 M 的轨迹方程。

分析 可设 $A(pt_1{}^2,2pt_1)$,$B(pt_2{}^2,2pt_2)$ $(t_1,t_2\neq 0)$(此即为点参数)。由题设得

$(t_1+t_2)y=2x+2pt_1t_2$ (AB 的方程) ①

$(t_1+t_2)x=-2y$ (OM 的方程) ②

$t_1t_2=-4$ $(OA\perp OB)$ ③

四“元”三等式,可消去二元 t_1,t_2,得 $x^2+y^2-4px=0(x\neq 0)$(分 $t_1+t_2=0$ 及 $t_1+t_2\neq 0$ 讨论)。

“引入”是为了“消去”,即“过河拆桥”. 此题解法又称之为“多参数法”. 能否熟练自如地运用(特别是消参过程中简化计算)是对动点轨迹方程实质的理解是否深刻的很好检验。从①中令 $y=0$ 可发现直线 AB 过定点 $N(4p,0)$,因此 M 在以 ON 为直径的圆上(如图 2)。

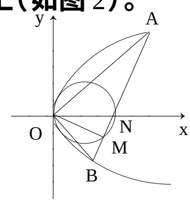


图2

例 6 三棱锥 S—ABC 的侧棱 SA、SB、SC 两两互相垂直,设 S 到底面 ABC 及 AB、BC、CA 的距离分别为 $d、d_1、d_2、d_3$,求 $d^2\leqslant\frac{2\sqrt{6}}{9}d_1d_2d_3$.

分析 如图 3,O 为垂心,记分别以 AB、BC、CA 为棱的二面角的平面角为 $\angle SFO=\alpha$,$\angle SDO=\beta$,$\angle SEO=\gamma$(称之为角参数),则

$d=d_1\sin\alpha=d_2\sin\beta=d_3\sin\gamma$,于是原不等式转换为不等式

$\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\ |\leqslant\frac{8}{27}$①

由熟知的面积射影定理有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{S_{\triangle SAB}}{S_{\triangle ABC}}\cdot\frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle SAB}}+\frac{S_{\triangle SBC}}{S_{\triangle ABC}}\cdot$$

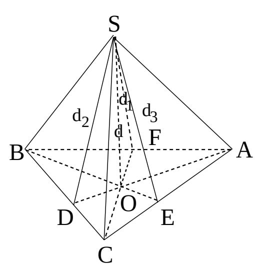


图3

$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle SBC}}+\frac{S_{\triangle SCA}}{S_{\triangle ABC}}\cdot\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle SAC}}=1$，

，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2.$

从而 $\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\ |\leqslant(\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{3})^3=\frac{8}{27}.$

引入参数 α、β、γ 过渡，证明①而使原不等式得证，这是引参消参的另一种形式。

3. 引入参数，讨论参数

例 7　若函数 f(x) 的值域是 $[\frac{1}{4},4]$，则函数 $F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$ 的值域是____.(《中学数学教学参考》1993 年 1～2 期‘高中数学试题精选’P. 27 第 37 题)

分析　引入参数 $t=f(x)\in[\frac{1}{4},4]$，转换为讨论函数 $F(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $[\frac{1}{4},4]$ 上的最值问题，由 F(t) 在 [0,1] 上递减，而在 [1,+) 上递增知 $E(t)_{max}=4\frac{1}{4}$，$F(t)_{min}=2$，所以值域为 $[2,4\frac{1}{4}]$.

例 8　设 a、b、c、x、y 都是正数，且 $ax+by=c$，$ax^2+by^2=c$，那么下面命题正确的是(　　).

A. $x+y=1$　　B. $x+y<1$

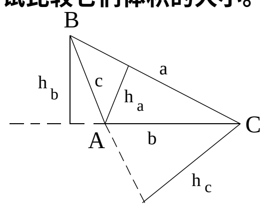
C. $x+y>1$　　D. $x+y$ 与 1 的大小关系不确定

分析　从 $\frac{x^2}{\frac{c}{a}}+\frac{y^2}{\frac{c}{b}}=1$，联想引入角参数 ◇∈ $(0,\frac{\pi}{2})$，作代换 $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{c}{a}}\cos\theta,\\ y=\sqrt{\frac{c}{b}}\sin\theta.\end{cases}$ 有 $x+y=(\sqrt{a}\cos\theta+\sqrt{b}\sin\theta)(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{b}}\sin\theta)=1+\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\sin2\theta$，讨论 θ，易知 $x+y>1$，选‘C”

4. 引入参数，统一分散参数

例 9　已知△ABC 的边长 a、b、c 满足 $a>b>c$，分别以 a、b、c 所在直线为轴，将△ABC 旋转一周所得的几何体的体积分别为 V_1、V_2、V_3，试比较它们体积的大小。

分析　引入面积参数 $t=S_{\triangle ABC}$，如图 4，h_a、h_b、h_c 为三条高线，则



$V_1=\frac{2}{3}\pi th_a$，$V_2=\frac{2}{3}\pi\cdot th_b$，$V_3=\frac{2}{3}\pi th_c$，

再将分散变量‘统’起来，显然从 $a>b>c\Rightarrow h_a<h_b$

$< h_c \Rightarrow V_1 < V_2 < V_3$.

例 10　已知 $a, b \in R^+$,求证:$\frac{a^n + b^n}{2} \geqslant (\frac{a+b}{2})^n (n \in N)$.

分析　不妨设 $a \leqslant b$,则 $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$,引入增量参数 t,$a = \frac{a+b}{2} - t$,$b = \frac{a+b}{2} + t$,使之‘统’起来处理,利用二项式定理,可证

$$\frac{a^n + b^n}{2} = \frac{(\frac{a+b}{2} - t)^n + (\frac{a+b}{2} + t)^n}{2} \geqslant (\frac{a+b}{2})^n.$$

引入参数,统一分散参数是处理含不等关系的条件下不等式论证或求解变数的取值范围的一种行之有效的方法。

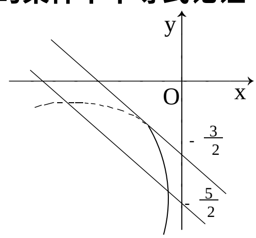


图5

5. 多元引参,图形控制

例 11　若关于 x 的方程 $\cos^2 x + 2a\sin x - 3a - 1 = 0$ 有实数解,求实数 a 的范围。

分析　原方程变形为 $\sin^2 x - 2a\sin x + 3a = 0$,即 $\frac{1}{2}$

$$(\sin x - \frac{3}{2}) + \frac{\frac{9}{8}}{\sin x - \frac{3}{2}} = a - \frac{3}{2}$$

,代入参数,$u = \frac{1}{2}(\sin x - \frac{3}{2})$,$v = \frac{\frac{9}{8}}{\sin x - \frac{3}{2}}$,$t = a - \frac{3}{2}$,

(下略)

□确定参变量的五种方法

参变量的确定是中学教学中应用十分广泛的问题,又是一个很重要的问题。它要求学生具有明确的数学概念,以及能灵活运用基础知识,沟通各分科(部分)数学知识、方法间的内在联系。如何确定参变量呢?湖南省湘阴县教师进修学校邓国安老师根据教学实践归纳出以下常见的几种方法。

1. 用概念确定参变量

由概念讨论参数的方法,只要掌握了命题中有关概念的本质含义,

又具有一定的恒等变形能力,一般是不难得出正确结论的。

例1　已知 $a>0,a\neq1$ 试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_4{}^2(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围。(一九八九年高考理科试题)

此题是以 x 为主要变量,a,k 是参变量的多参数问题,处理这类问题的基本思路,要用到"减元策略",减少讨论层次,以便化繁为简,捉住要点,勾起认知记忆。

解　根据对数的定义及性质列出不等式组

$$\begin{cases}x-ak>0 & (1)\\ x^2-a^2>0 & (2)\\ (x-ak)^2=x^2-a^2 & (3)\end{cases}$$

并化简为 $\begin{cases}x-ak>0 & (1)\\ (x-ak)^2=x^2-a^2 & (3)\end{cases}$

由(3)得　$x=a(1+k^2)/2k\quad(k\neq0)$

代入(1)消去主变量 x 而得　$a(1+k^2)/2k>ak$,在这个不等式中,参变量"升格"为主变量,a 仍是参变量,消去 a 得　$(1+k^2)/2k>k$,解这个不等式就可以得到 k 的取值范围:$(-\quad,-1)\cup(0,1)$.

例2　设 a、b 是两个实数

$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in Z\}$

$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in Z\}$,

$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant144\}$.

是平面 xoy 内的点集.讨论是否存在 a 和 b 使得:(1) $A\cap B\neq\varnothing$;(2) $(a,b)\in C$ 同时成立。(1985 年高考理科试题).

分析　题中的 a、b 就是参变量,问题的实质是讨论具有某种性质的数学对象是否存在,如果明确参变数的几何意义,则有简明的解法。

解　问题等价于方程组

$$\begin{cases}na+b=3(n^2+5) & <1>\\ a^2+b^2\leqslant144 & <2>\end{cases}$$

是否有解,在直角坐标系 $\overline{aob}$ 中,<1>式表示直线,<2>表示圆及圆内域,方程组有解的充要条件是直线上的点在圆上或在圆的内部,因此 $d=|3(n^2+5)|/\sqrt{n^2+1}\leqslant12$,即 $(n^2+5)^2\leqslant16(n^2+1)$,亦即 $(n^2-3)^2\leqslant0$ 故有 $n^2=3$,但这与 $n\in Z$ 矛盾。

故不存在实数 a、b 使条件<1>、<2>同时成立。

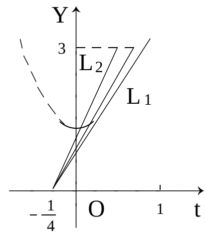
2. 利用图象确定参变量

例3　设在 $0\leqslant x\alpha\ \pi$ 范围内方程 $\cos2x+4a\sin x+a-2=0$ 具有两个不同解,试求 a 的取值范围。(1988 年日本高考题)

解　由原方程有 $2\sin^2x-4a\sin x+1-a=0$,令 $\sin x=t(0\leqslant t\leqslant1)$,则有:$2t^2-$

$4at+1-a=0.$

现在只须求上述关于 t 的一元二次方程在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 范围内只有一个实根即可、分别作 $y=2t^2+1$ 及 $y=4at+a=4a\left(t+\frac{1}{4}\right)$ 的图象，当直线 $y=4a\left(t+\frac{1}{4}\right)$ 与半抛物线 $y=2t^2+1$ 相切时，由 $\Delta=2a^2+a-1=0$ 有 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=-1$（舍）。当直线位于 L_1 时，易求 $a=\frac{3}{5}$，当直线位于 L_2 时，易求 $a=1$

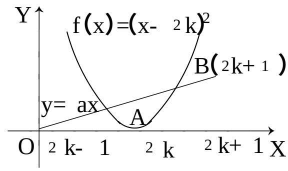


故 a 的取值范围是 $a=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{5}<a\leqslant 1.$

例 4　设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\quad,+\quad)$ 上以 2 为周期的函数，对 $k\in Z$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$

$<i>$ 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析表达式。

$<ii>$ 对自然数 k，求集合 $M_k=\{a\mid$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$。



（一九八九年高考理科第二十四题）

解　$<i>$ 当 $x\in I_k(k\in Z)$ 时，$(x-2k)\in I_0$ 而 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，故当 $x\in I_k(k\in Z)$ 时，

$$f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$$

$<ii>$ 由(i)知，$x\in I_k(k\in Z)$ 时，$f(x)=(x-2k)^2$，所以函数 $f(x)$ 的图象是以点 $A(2k,0)$ 为顶点，开口向上的抛物线 C，且 $f(2k+1)=(2k+1-2k)^2=1$，即点 $B(2k+1,1)$，在此抛物线 C 上，而函数 $y=ax$ 是以 a 为斜率且过原点的直线，如图所示。

由图可知，方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不等实根的充要条件是直线 $y=ax$ 与抛物线 C 的交点必须有一个落在抛物线 C 上的 A、B 两点之间，包括点 B，但不包括点 A，而 $k_{OB}=1/2k+1$，故直线 $y=ax$ 的斜率 a 应满足条件 $0<a\leqslant 1/2k+1$ 从而 $M_k=\{a\mid 0<a\leqslant 1/2k+1\}$.

3. 待定系数法确定参变量

用待定系数法确定参变量是较常用的而且是重要的方法。

例 5　已知函数 $f(x)=ax^2-c$　满足：$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，则 $f(3)$ 应满足

(A)　$-7\leqslant f(3)\leqslant 26$；

(B)　$-4\leqslant f(3)\leqslant 15$；

(C)　$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$；

(D)　$-\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant\frac{25}{3}$.

(1983 年全国数学联赛题)

解　依题意

$$-4\leqslant f(1)=a-c\leqslant -1 \quad (1)$$

$$-1\leqslant f(2)=4a-c\leqslant 5 \quad (2)$$

令　$m(a-c)+n(4a-c)=9a-c$

比较系数得$\begin{cases}m+4n=9\\ m+n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-5/3\\ n=8/3\end{cases}$

(1)×(-5/3)得$\frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}(a-c)\leqslant 20/3$ (3)

(2)×8/3 得 $-8/3\leqslant\frac{8}{3}(4a-c)\leqslant 40/3$ (4)

(3)+(4)　得 $-1\leqslant f(3)=9a-c\leqslant 20$ 为所求。

4. 用“判别式”确定参变量

有的题目可直接用“判别式”确定参变量,而有的题目是多次用“判别式”不断减少变量个数,最后达到确定参变量的目的。

例 6　设直线 L 的参数方程是:

$\begin{cases}x=t\\ y=b+mt\end{cases}$(t 为参数);

椭圆 E 的参数方程是:$\begin{cases}x=1+a\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$

($a\neq 0$,θ 为参数),系数 a、b 应满足什么条件,才能使对于任意 m 值,直线 L 与椭圆 E 总有公共点。(1980 年高考理科附加题)

分析 本题有两个未知数,两个参数和两个待确定的参变量。即共有 6 个参变量,依题意 L 与 E 总有公共点,用代入法减少一个未知数,然后连续用“判别式”减少参变量个数最后用混合组确定参变量。

解　化参数方程为普通方程

$$y=mx+b \qquad \frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1$$

两式消去 y,整理得

$$(1+a^2m^2)x^2+2(a^2mb-1)x+a^2b^2-a^2+1=0$$

当判别式　$\Delta=(a^2mb-1)^2-(1+a^2m^2).(a^2b^2-a^2+1)\geqslant 0$ 时,有交点(又减少了一个未知数 x)化简得

$$(a^2-1)m^2-2bm+(1-b^2)\geqslant 0$$

这个不等式要对任何 m 值都成立的条件。

①凡让含 m 的系数等于零(常常用此法确定参变量)得 A$\begin{cases}a^2-1=0\\b=0\end{cases}$(椭圆变成圆)

②根据二次不等式的性质(又一次用到判别式)得 B $\begin{cases}a^2-1>0\\b^2-(a^2-1)(1-b^2)<0\end{cases}$

即当 a、b 满足:

$\begin{cases}|a|>1\\|b|\leqslant\sqrt{a^2-1}/|a|\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|a|=1\\b=0\end{cases}$ 时直线 L 与椭圆 E 总有交点。

5. 用‘排中律’确定参变量

例 7　已知 $f(x)=(m-2)x^2-4mx+2m-6$ 的图象与 x 轴的两个交点中至少有一个在 x 轴左半轴上,求实数 m 的范围。

分析 :分别讨论各种情况比较麻烦,巧用排中律求解(用三个不等式组确定一个参变量)就达到了删繁就简的目的。一旦求得两个交点全不在负半轴时 m 的范围,那么问题不就解决了吗?

解　设交点全不在负半轴上,则两根非负,且不同时为零,当 $m\neq2$ 时

$\begin{cases}x_1+x_2=4m/m-2\geqslant0\\x_1\cdot x_2=(2m-6)/m-2\geqslant0\end{cases}\Rightarrow m\geqslant3$ 或 $m<0$

而抛物线与 x 轴有两个交点时 m 的范围满足　$\Delta>0$ 且 $m\neq2$　即 $m>1$ 且 $m\neq2$ 或 $m<-6$.,满足题意的 m 的范围是 $1<m<3,m\neq2$.

□数学解题中的消点法

几何题千变万化,全无定法,这似乎已成为两千年来人们的共识。五十年代,塔斯基证明一切初等几何及代数命题均可判定,即有一统一方法加以解决。这使人们吃了一惊。但塔斯基方法极繁,即使在高速计算机上也难于用它证明几个稍难的几何定理。到了七十年代,吴文俊院士提出的新方法,使几何定理证明的机械化由梦想变为现实。应用吴法编写的计算机程序,可以在 PC 机上用几秒钟的时间证明颇不简单的几何定理,如西姆松定理,帕斯卡定理,蝴蝶定理。继吴法之后,在国外出现了 GB 法,国内又提出了数值并行法。这些方法本质上均属于代数方法,都能成功地在微机上实现非平凡几何定理的证明。

但是,用这些代数方法证明几何命题时,计算机只是简单地告诉你

"命题为真",或'命题不真"。如果你要问个为什么,所得到的回答是一大堆令人眼花缭乱的计算过程。你很难用笔来检验它是否正确,更谈不到从机器给出的证明中得到多少启发。这当然不能令人满意。

能不能让机器产生出简短而易于理解的证明呢?这对数学家、计算机科学家,特别是对人工智能的专家来说,是一个挑战性的课题。西方科学家对这个问题的研究,已有三十多年的历史,但至今尚未找到有效的途径。

一九九二年五月,笔者应邀访美,对这一问题着手研究。我们①在面积方法的基础上,提出消点算法,使这一难题得到突破。基于我们的方法所编写的程序,已在微机上证明了 600 多条较难的平面几何与立体几何的定理,所产生的证明,大多数是简捷而易于理解的,有时甚至比数学家给出的证法还要简短漂亮。

更重要的是,这种方法也可以不用计算机而由人用笔在纸上执行。它本质上几乎是'万能'的几何证题法。

本文将用几个例题,浅近地介绍这种方法的基本思想。先看个最简单的例子:

例 1　求证:平行四边形对角线相互平分。

做几何题必先画图,画图的过程,就体现了题目中的假设条件。这个例题的图如图 1,它可以这样画出来:

(1)任取不共线三点 A、B、C;

(2)取点 D 使 DA∥BC,DC∥AB;

(3)取 AC、BD 的交点 O.

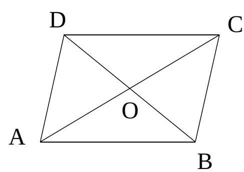


图1

这样一来,图中五个点的关系就很清楚:先得有 A、B、C,然后才有 D. 有了 A、B、C、D,才能有 O. 这种点之间的制约关系,对解题至关重要。

要证明的结论是 $AO = OC$,即$\frac{AO}{CO} = 1$. 我们的思路是:要证明的等式左端有几个几何点 A、C、O 出现,右端却只有数字 1. 如果想办法把字母 A、C、O 统统消掉,不就水落石出了吗?在这种指导思想下,我们首先着手从式子$\frac{AO}{CO}$中消去最晚出现的

① 美国维奇塔大学周咸青,北京中科院系统所高小山和笔者.

点 O。

用什么办法消去一个点,这要看此点的来历,和它出现在什么样的几何量之中。点 O 是由 AC、BD 相交而产生的,用共边定理便得:

$$\frac{AO}{CO}=\frac{\triangle ABD}{\triangle CBD},$$

这成功地消去了点 O.

下一步,轮到消去点 D。根据点 D 的来历:DA∥BC,故△CBD=△ABC;DC∥AB,故△ABD=△ABC. 于是,一个简捷的证明产生了:

$$\frac{AO}{CO}=\frac{\triangle ABD}{\triangle CBD}\text{(共边定理)}$$

$$=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}\quad(\quad DA\parallel BC,DC\parallel AB)$$

$$=1.$$

例 2 设△ABC 的两中线 AM、BN 交于 G,求证:AG=2GM.

仍要先弄清作图过程:

(1)任取不共线三点 A、B、C;

(2)取 AC 中点 N;

(3)取 BC 中点 M;

(4)取 AM、BN 交点 G.

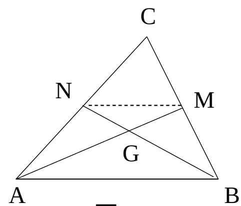


图2

要证明 AG=2GM,即$\frac{AG}{GM}=2$,我们应当顺次消去待证结论左端的点 G,M 和 N. 其过程为:

$$\frac{AG}{GM}=\frac{\triangle ABN}{\triangle BMN}$$

(用共边定理消去点 G)

$$=\frac{\triangle ABN}{\frac{1}{2}\triangle BCN}$$

(由 M 是 BC 中点消去点 M)

$$=2\cdot\frac{\frac{1}{2}\triangle ABC}{\frac{1}{2}\triangle ABC}$$

(由 N 是 AC 中点消去点 N)

$$=2.$$

例 3 已知△ABC 的高 BD、CE 交于 H，求证：$\frac{AC}{AB}=\frac{\cos\angle BAH}{\cos\angle CAH}$.

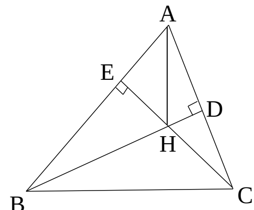


图3

此题结论可写成

ACcos∠CAH = ABcos∠BAH，即 AB、AC 在直线 AH 上的投影相等，即 AH⊥BC. 这和证明三角形三高交于一点是等价的。

作图顺序是：(1) A，B，C；(2) D、E；(3) H. 具体作法从略。要证明

$$\frac{AC\cos\angle CAH}{AB\cos\angle BAH}=1.$$

于是，关键是从上式左端消去 H. 显然有

$$\cos\angle CAH=\frac{AD}{AH},$$

$$\cos\angle BAH=\frac{AE}{AH},$$

可得

$$\frac{AC\cos\angle CAH}{AB\cos\angle BAH}$$
$$=\frac{AC\cdot AD\cdot AH}{AB\cdot AE\cdot AH}=\frac{AC\cdot AD}{AB\cdot AE}.$$

为了再消去 D、E，用等式 AD = ABcos∠BAC 及 AE = ACcos∠BAC 代入，就证明了所要结论。

例 3 表明，消点不一定用面积方法。但面积法确是最常用的消点工具。

下面一例是著名的帕斯卡定理，这里写出的证法是计算机产生的。

例 4 设 A、B、C、D、E、F 六点共圆。AB 与 DF 交于 P，BC 与 EF 交于 Q，AE 与 DC 交于 S。(图 4)

求证：P、Q、S 在一直线上。

此题作图过程是清楚的：

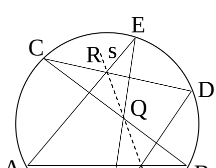
(1) 在一圆上任取 A、B、C、D、E、F 六点；

(2) 取三个交点 P、Q、S；

(3) 设 PQ 与 CD 交于另一点 R；

要证 P、Q、S 共线，只要证 R 与 S 重合，即证明

$$\frac{CS}{DS}=\frac{CR}{DR}，或即\frac{CS}{DS}\cdot\frac{DR}{CR}=1 \text{ 即可。}$$



消点过程如下：

$$\frac{CS}{DS}\cdot\frac{DR}{CR}=\frac{CS}{DS}\cdot\frac{\triangle DPQ}{\triangle CPQ}$$

（用共边定理消去 R）

$$=\frac{\triangle ACE}{\triangle ADE}\cdot\frac{\triangle DPQ}{\triangle CPQ}\text{（用共边定理消去 S）}$$

$$=\frac{\triangle ACE}{\triangle ADE}\cdot\frac{\triangle DEP\cdot\triangle BCF\cdot S_{BFCE}}{\triangle CEF\cdot\triangle BCP\cdot S_{BFCE}}$$

（S_{BFCE}表四边形 BFCE 之面积）

（消去点 Q 利用了等式：

$$\frac{\triangle DPQ}{\triangle DEP}=\frac{FQ}{FE}=\frac{\triangle BCF}{S_{BFCE}},$$

$$\frac{\triangle CPQ}{\triangle BCP}=\frac{CQ}{BC}=\frac{\triangle CEF}{S_{BFCE}}\text{)}$$

$$=\frac{\triangle ACE}{\triangle ADE}\cdot\frac{\triangle BCF}{\triangle CEF}\cdot\frac{\triangle DFE\cdot\triangle ABD\cdot S_{ADBF}}{\triangle BDF\cdot\triangle ABC\cdot S_{ADBF}}$$

（消点 P，由：$\frac{\triangle DEP}{\triangle DFE}=\frac{DP}{DF}=\frac{\triangle ABD}{S_{ADBF}}$，

$\frac{\triangle BCP}{\triangle ABC}=\frac{BP}{AB}=\frac{\triangle BDF}{S_{ADBF}}$.）

$$=\frac{AC\cdot AE\cdot CE}{AD\cdot AE\cdot DE}\cdot\frac{BC\cdot BF\cdot CF}{CE\cdot CF\cdot EF}\cdot\frac{DE\cdot DF\cdot EF}{BD\cdot BF\cdot DF}\cdot\frac{AB\cdot AD\cdot BD}{AB\cdot AC\cdot BC}$$

$$=1.$$

这里用到了圆内接三角形面积公式

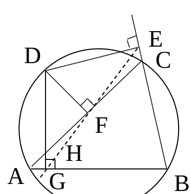
$$\triangle ABC=\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{2d},$$

其中 d 是△ABC 外接圆直径。

我们再看看西姆松定理的机器证明：

例 5　在△ABC 的外接圆上任取一点 D，自 D 向 BC、CA、AB 引垂线，垂足为 E、F、G.

求证：E、F、G 三点共线。



我们可设直线 EF 与 AB 交于 H，然后只要证明 H 与 G 重合，即证明等式

$$\frac{AG}{BG}=\frac{AH}{BH}.$$

作图过程是清楚的：

(1) 任取共圆四点 A、B、C、D；

(2) 作垂足 E、F、G；

(3) 取 EF 与 AB 交点 H.

消点顺序是先消 H，再消三垂足：

$$\frac{AG}{BG}\cdot\frac{BH}{AH}=\frac{AG}{BG}\cdot\frac{\triangle BEF}{\triangle AEF}$$

（用共边定理消点 H）

$$=\frac{AD\cos\angle DAB}{BD\cos\angle DBA}\cdot\frac{\triangle BEF}{\triangle AEF}$$

（用余弦性质消点 G）

$$=\frac{AD\cdot\cos\angle DAB}{BD\cdot\cos\angle DBA}\cdot\frac{\triangle BEA\cdot CD\cos\angle ACD}{\triangle AEC\cdot AD\cdot\cos\angle DAC}$$

（消点 F，用等式

$$\frac{\triangle BEF}{\triangle BEA}=\frac{CF}{AC}=\frac{CD\cos\angle ACD}{AC},$$

$$\frac{\triangle AEF}{\triangle AEC}=\frac{AF}{AC}=\frac{AD\cos\angle DAC}{AC}.)$$

$$=\frac{CD\cos\angle DAB\cdot\triangle BEA}{BD\cos\angle DAC\cdot\triangle AEC}$$

（化简，由 $\angle DBA=\angle ACD$）

$$=\frac{CD\cdot\cos\angle DAB}{BD\cdot\cos\angle DAC}\cdot\frac{BD\cos\angle DBC}{CD\cos\angle DAB}$$

（消点 E，用等式

$$\frac{\triangle BEA}{\triangle ABC}=\frac{BE}{BC}=\frac{BD\cos\angle DBC}{BC},$$

$$\frac{\triangle AEC}{\triangle ABC}=\frac{CE}{BC}=\frac{CD\cos\angle DCE}{BC}$$

$$=\frac{CD\cos\angle DAB}{BC})$$

$=1$（因 $\angle DBC=\angle DAC$）.

应当说明，在我们的推导中，严格说来应当用有向线段比和带号面积。在我们的程序中，确实是如此。但对于具体的图，用通常的面积和线段比也能说明问题时，添上正负号反而使一部份读者看起来困难，因而就从简了。

下面的例题,是 1990 年浙江省中考试题。用消点法可以机械地解出。

例 6　如图 6,E 是正方形 ABCD 对角线 AC 上一点。$AF \perp BE$,交 BD 于 G,F 是垂足。

求证:$\triangle EAB \cong \triangle GDA$.

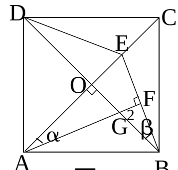


图6

在$\triangle EAB$和$\triangle GDA$中,显然已知 $DA = AB$,并且$\angle EAB = \angle GDA = 45°$,故只要证明 $DG = AE$,即$\frac{OG}{OE} = 1$.

作图过程为:

(1)作正方形 ABCD,对角线交于点 O;

(2)在 AC 上任取一点 E;

(3)自 A 向 BE 引垂线,垂足为 F;

(4)取 AF 与 BD 交点 G.

消点过程很简单,如图,注意到 $\alpha = \beta$ 便得:

$$\frac{OG}{OE} = \frac{AO\mathrm{tg}\alpha}{OE} = \frac{AO\mathrm{tg}\angle FAE}{OE}\text{(消去 G)}$$

$$= \frac{AO\mathrm{tg}\angle EBO}{OE}\text{(消去 F)}$$

$$= \frac{AO}{OE} \cdot \frac{OE}{OB} = \frac{AO}{BO} = 1.$$

用了消点法,有时能解出十分困难的问题。1993 年我国参加国际数学奥林匹克选手选拔赛中,出了一道相当难的平面几何题。入选的 6 名选手中只有三名做出了此题。如果知道消点法,不但这 6 名解题能手不可能在这个题上失分,许多具有一般功力的中学生也可能在规定的 90 分钟内解决它。(选拔赛仿国际数学奥林匹克,每次三题,共四个半小时。)这就是下面的例题:

例 7　如图 7,设$\triangle ABC$的内心为 I,BC 边中点为 M,Q 在 IM 的延长线上并且 $IM = MQ$. AI 的延长线与$\triangle ABC$的外接圆交于 D,DQ 与$\triangle ABC$的外接圆交于 N.

求证:$AN + CN = BN$.

作图过程:

(1)任取不共线三点 A、B、C;

(2)取$\triangle ABC$内心 I;

(3)取 BC 中点 M;

(4)延长 IM 至 Q,使 $MQ = IM$;

(5)延长 AI,与$\triangle ABC$外接圆交于 D;

(6)直线 DQ 与△ABC 外接圆交于 N.

消点顺序是:N,Q,M,D,I….

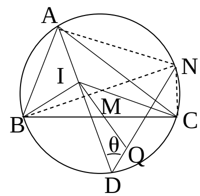


图7

由于 AN、CN、BN 都是△ABC 外接圆的弦,故如记△ABC 外接圆直径为 d,则有

$AN=d\sin\angle D$,$BN=d\sin\angle BDN$,

$CN=d\sin\angle CBN$.

记$\angle D=\theta$,$\angle BAC=A$,$\angle ABC=B$,$\angle ACB=C$. 则有

$\angle BDN=\angle BDA+\angle D=C+\theta$,

$\angle CBN=B-\angle ABN=B-\theta$.

于是,要证的等式化为

$$d\sin\theta+d\sin(B-\theta)=d\sin(C+\theta).$$

利用和角公式展开,约去 d 得

$$\sin\theta+\sin B\cdot\cos\theta-\cos B\cdot\sin\theta$$
$$=\sin C\cdot\cos\theta+\cos C\cdot\sin\theta,$$

整理之,即知要证的结论等价于:

$$(7\cdot1)\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin C-\sin B}{1-\cos B-\cos C}.$$ (这时点 N 已消去!)

多数选手能做到这一步,但再向前就无从下手了。如果他知道消点法,便会毫不犹豫地继续去消 Q 和 M.

由于$\triangle IDQ=\frac{1}{2}ID\cdot QD\sin\theta$,故

$$\sin\theta=\frac{2\triangle IDQ}{ID\cdot QD},$$

于是得

$$(7\cdot2)\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2\triangle IDQ}{ID\cdot QD\cos\theta},$$

而当前任务是消去 Q. 由 M 是 IQ 中点得

$$\triangle IDQ=2\triangle IDM,$$

及

$$QD\cos\theta=ID-IQ\cos\angle QID$$
$$=ID-2IM\cos\angle MID;$$

代入(7·2)得

$$(7\cdot3)\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4\triangle IDM}{(ID-2IM\cos\angle MID)\cdot ID},$$

(Q 点已消去!)

由于 M 是 BC 中点,有

$$\triangle IDM=\frac{1}{2}(\triangle IDC-\triangle IDB)$$

(因为 $\triangle IDB+\triangle IDM=\triangle IDC-\triangle IDM$) 并且

$$IM\cos\angle MID=\frac{1}{2}(IB\cos\angle BID+IC\cos\angle CID)$$

(只要分别自 B、C、M 向 ID 作投影,便可看出.)

$$=\frac{1}{2}\left(IB\cos\frac{A+B}{2}+IC\cos\frac{A+C}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(IB\sin\frac{C}{2}+IC\sin\frac{B}{2}\right).$$

代入(7·3)得

$$(7\cdot 4)\quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2(\triangle IDC-\triangle IDB)}{\left(ID-IB\sin\frac{C}{2}-IC\sin\frac{B}{2}\right)\cdot ID}$$

(消去 M!)

现在,问题已大大简化了. 只要用面积公式与正弦定理,便可得:

$$\triangle IDC=\frac{1}{2}ID\cdot DC\sin\angle IDC$$

$$=\frac{1}{2}ID\cdot DC\sin B,$$

$$\triangle IDB=\frac{1}{2}ID\cdot BD\sin\angle IDB$$

$$=\frac{1}{2}ID\cdot DB\sin C,$$

$$\frac{IB}{ID}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle IBD}=\frac{\sin\angle C}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{\sin C}{\cos\frac{C}{2}}=2\sin\frac{C}{2},$$

$$\frac{IC}{ID}=\frac{\sin\angle ADC}{\sin\frac{A+C}{2}}=\frac{\sin B}{\cos\frac{B}{2}}=2\sin\frac{B}{2},$$

$$\frac{DC}{ID}=\frac{BD}{ID}=\frac{\sin\angle BID}{\sin\angle IBD}$$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=1.$$

代入(7·3)后得：

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{ID\cdot DC\sin B-ID\cdot DB\sin C}{ID\cdot ID\left(1-\frac{IB}{ID}\sin\frac{C}{2}-\frac{IC}{IB}\sin\frac{B}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{DC}{ID}\sin B-\frac{DB}{ID}\sin C}{1-2\sin^2\frac{C}{2}-2\sin^2\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{-1+\cos C+\cos B}$$

$$=\frac{\sin C-\sin B}{1-\cos B-\cos C}.$$

这就是所要证的。这里最后一步用了半角公式：

$$\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos C).$$

整个证明过程,心中有数,步步为营,繁而不乱。这是消点法的特点。

例 8 (1994 年国际数学奥林匹克备用题)直线 AB 过半圆圆心 O,分别过 A、B 作⊙O 的切线,切⊙O 于 D、C. AC 与 BD 交于 E. 自 E 作 AB 之垂线,垂足为 F.(图 8)

求证 EF 平分∠CFD.

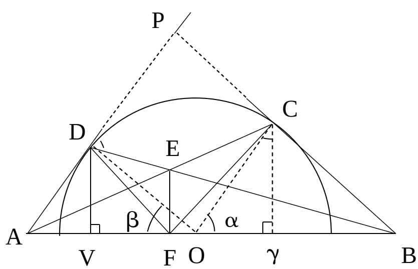


图8

如图,要证∠DFE = ∠CFE,即证明∠DFA = ∠CFB. 自 D、C 向 AB 引垂足 U、V,则要证的结论即为

$$\frac{DU}{UF}=\frac{CV}{VF},\text{即}\frac{DU}{CV}\cdot\frac{VF}{UF}=1.$$

作图过程为：

（1）在⊙O 上任取两点 D、C；

（2）过 O 作直线，与⊙O 在 D、C 处的切线交于 A、B；

（3）取 AC 与 BD 交点 E；

（4）分别自 D、E、C 向 AB 作垂线，得垂足 U、F、V.

要证的是

$$\frac{DU}{CV}\cdot\frac{VF}{UF}=1.$$

设⊙O 的半径为 r，圆上两点 C、D 的位置分别用 $\angle COB=\alpha$，$\angle DOA=\beta$ 来描写，则

$$DU=r\sin\beta, DV=r\sin\alpha.$$

$$\frac{VF}{AV}=\frac{CE}{AC}=\frac{\triangle BCD}{S_{ABCD}},$$

$$\frac{UF}{BU}=\frac{DE}{DB}=\frac{\triangle ACD}{S_{ABCD}},$$

于是得到：

$$(8\cdot1)\ \frac{DU}{CV}\cdot\frac{VF}{UF}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\triangle BCD\cdot AV}{\triangle ACD\cdot BU}.$$

（消去了 E、F！）

为了消去 U、V，可用等式

$$AV=AO+OV=\frac{r}{\cos\beta}+r\cos\alpha$$

$$=\frac{r(1+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\beta},$$

$$BU=BO+OU=\frac{r}{\cos\alpha}+r\cos\beta$$

$$=\frac{r(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta)}{\cos\alpha},$$

代入（8·1）式得

$$(8\cdot2)\ \frac{DU}{DV}\cdot\frac{VF}{UF}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\triangle BCD}{\triangle ACD}.$$

（消去了 U、V）

下面问题变得简单了。设 AD、BC 交于 P，则

$$\frac{\triangle BCD}{\triangle BPD}=\frac{BC}{BP},\frac{\triangle ACD}{\triangle ACP}=\frac{AD}{AP},$$

，

$$\frac{\triangle BCD}{\triangle ACD}=\frac{BC\cdot AP\cdot\triangle BPD}{AD\cdot BP\cdot\triangle ACP}$$

$$=\frac{BC\cdot AP\cdot BP\cdot PD}{AD\cdot BP\cdot AP\cdot PC}$$

$$=\frac{BC\cdot PD}{AD\cdot PC}（注意：PD=PC）$$

$$=\frac{r\text{tg}\alpha}{r\text{tg}\beta}$$

$$=\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}.$$

代入（8·2）式即得

$$\frac{DU}{DV}\cdot\frac{VF}{UF}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}=1.$$

一般说来，只要题目中的条件可以用规尺作图表出，并且结论可以表成常用几何量的多项式等式（常用几何量包括面积、线段、及角的三角函数），总可以用消点法一步一步地写出解答。

□数学消点法的应用

张景中先生在文〔1〕中，以代数中的消元思想为背景提出了平几证题的新路——消点法。这一方法的提出，无论对一些较困难的平几名题，还是各级各类竞赛平几难题都能给出程序化的证明，这就使得初等几何解题方法的研究进入到一个更高的层次——代数方法的层次。

消点法的基本思路是依据几何作图过程中点的来历，通过有序化的消点过程达到证明目的。笔者拜读张先生原著后，感受颇深，为了扩大消点法的应用范围，陕西永寿县中学安振平、苟春鹏老师介绍了平几教材中一些重要定理、例、习题及一些竞赛题的消点证法：

例1　三角形内角平分线定理.

已知：AD为△ABC的∠BAC的平分线。求证：$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$。

证明　参看图1，欲证 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$。

只需证 $\frac{AB}{AC}\cdot\frac{DC}{BD}=1$。

作图程序（如图1）：

（1）任取不共线三点A、B、C。

（2）作∠BAC的平分线AD交BC于D点。

消点过程如下：

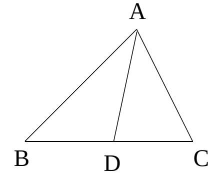


图1

$$\frac{AB}{AC}\cdot\frac{DC}{BD}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\triangle ACD}{\triangle ABD}$$

$$=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{(1/2)AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD}{(1/2)AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}$$

$$=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}\text{(消去了点 D)}$$

$$=1.$$

（$\triangle ACD$ 同时表示该三角形的面积）

例 2　平行线分线段成比例定理。

设 $l_1/\!/l_2/\!/l_3$，直线 AC、DF 分别交于 l_1、l_2、l_3 于 A、B、C 和 D、E、F 点。求证：$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

分析　参看图 2，欲证 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，只需证 $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{EF}{DF}=1$.

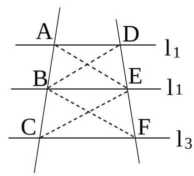


图2

作图程序（如图 2）：

（1）作直线 AC，分别交三条平行线于 A、B、C 三点。

（2）作直线 DF，分别交三条平行线于 D、E、F 三点。

（3）连 AE、DB、BF、CE.

消点过程如下：

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{EF}{DE}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\triangle FEB}{\triangle DEB}$$

$$=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\triangle BCE}{\triangle ABE}\text{(消去点 D、F)}$$

$$=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}\text{(消去点 E)}$$

$$=1.$$

例 3　设点 O 为 $\triangle ABC$ 的中线 AM 上一点，延长 BO、CO 分别交 AC、AB 于 D、E，连 DE，则有 $DE/\!/BC$.

分析　参看图 3，欲证 $DE/\!/BC$，只需证 $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}$，亦就是证 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{DC}{AD}=1$.

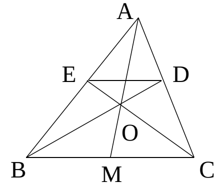


图3

作图程序为：

（1）取不共线三点 A、B、C.

（2）取 BC 中点 M.

（3）连 AM，在其上任取一点 O.

(4)延长 BO 交 AC 于 D,延长 CO 交 AB 于 E.

(5)连 ED.

消点过程为:

$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{DC}{AD}=\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}\cdot\frac{\triangle BOC}{\triangle AOB}$

(消去了点 E、D)

$=\frac{\triangle AOC}{\triangle AOB}=\frac{CM}{MB}$(消去了点 O)

$=1$.(消去 M 点)

例 4　设凸四边形 ABCD 的对角线 AC、BD 的交点为 M,过 M 作 AD 的平行线分别交 AB、CD 于 E、F,交 BC 的延长线于点 O,P 是以 O 为圆心,OM 为半径的圆上一点(位置如图所示)。求证$\angle OPF=\angle OEP$.

作图程序为:

(1)作凸四边形 ABCD.

(2)取 AC 与 BD 的交点 M.

(3)过 M 作 AD 的平行线交 AB、CD 于点 E、F,交 BC 延长线于点 O.

(4)在以 O 为圆心,OM 为半径的圆上取一点 P.

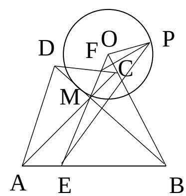


图4

分析　如图 4,要证$\angle OPF=\angle OEP$,需证$\triangle POF\backsim\triangle EOP$.由于$\angle POF$与$\angle EOP$是同一个角,因此只需证$\frac{OP}{OF}=\frac{OE}{OP}$,注意到$OP=OM$,只要证$\frac{OM}{OF}=\frac{OE}{OM}$,即$\frac{OF}{OM}\cdot\frac{OE}{OM}=1$就行了。

消点过程如下:

$\frac{OF}{OM}\cdot\frac{OE}{OM}=\frac{\triangle OCD}{S_{OCMD}}\cdot\frac{S_{OBED}}{\triangle OBD}$

$=\frac{CF\cdot\triangle OCD}{CD\cdot\triangle OCM}\cdot\frac{BD\cdot\triangle OBE}{BM\cdot\triangle OBD}$

(利用了$\frac{\triangle OCM}{S_{OCMD}}=\frac{CF}{CD},\frac{S_{OBED}}{\triangle OBE}=\frac{BD}{BM}$)

$=\frac{CM\cdot\triangle OCD}{AC\cdot\triangle OCM}\cdot\frac{BD\cdot BE\cdot\triangle OAB}{BM\cdot AB\cdot\triangle OBD}$

(消去点 F,利用了$\frac{\triangle OBE}{\triangle OAB}=\frac{BE}{AB}$)

$=\frac{CM\cdot\triangle OCD}{AC\cdot\triangle OCM}\cdot\frac{BD\cdot BM\cdot\triangle OAB}{BM\cdot BD\cdot\triangle OBD}$

(消去点 E,利用了$\frac{BM}{BD}=\frac{BE}{AB}$)

$=\dfrac{\triangle OCD\cdot\triangle OAB}{\triangle OAC\cdot\triangle OBD}$

(消去点 M,利用了$\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{\triangle OCM}{\triangle OAC}$)

$=\dfrac{OC}{OB}\cdot\dfrac{OB}{OC}$

(消去点 D、A,利用了

$\dfrac{\triangle OCD}{\triangle OBD}=\dfrac{OC}{OB},\dfrac{\triangle OAB}{\triangle OAC}=\dfrac{OB}{OC}$)

$=1$

例 5 如图 5,已知$\angle ACE=\angle CDE=90°$,点 B 在 CE 上,CA = CB = CD. 过 A、C、D 三点的圆交 AB 于点 F。求证:F 为$\triangle CDE$的内心。

作图程序为:

(1)取不共线三点 A、C、D,使得 AC = CD.

(2)作垂线 BC,使 BC = CA.

(3)延长 CB 交 CD 的垂线 CE 于点 E.

(4)AB 与⊙O 交于点 F.

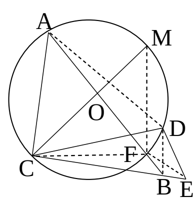


图5

消点过程很简单,要证明 F 是$\triangle CDE$的内心,只要证 DF 平分$\angle CDE$,CF 平分$\angle DCE$,即证$\dfrac{\angle CDF}{\angle EDF}=1,\dfrac{\angle DCF}{\angle ECF}=1$.

消点过程为:

$\dfrac{\angle CDF}{\angle EDF}=\dfrac{\angle CDF}{\angle EDC-\angle CDF}$

$=\dfrac{\angle CAB}{90°-\angle CAB}$(消去点 F、E)

$=\dfrac{45°}{90°-45°}=1$;

$\dfrac{\angle DCF}{\angle ECF}=\dfrac{\angle DAF}{\angle ECD-\angle DAF}$

$=\dfrac{\angle DAB}{\angle BCD-\angle DAB}$(消去了 F、E)

$=\dfrac{\angle DAB}{2\angle DAB-\angle DAB}=1$.

(注意到$\angle BCD=2\angle DAB$,A、D、B 在以 C 为圆心的圆周上)。

例 6 已知 O 为$\triangle ABC$的外心,AO 或 AO 的延长线交 BC 于 M,求证:BM:MC = sin2C:sin2B.

（《首届全国数学奥林匹克题比赛精选》题）。

作图程序为：

（1）任取不共线的三点 A、B、C.

（2）作出 $\triangle ABC$ 的外心 O.

（3）延长 AO 交 BC 于点 M.

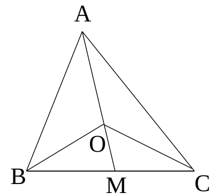


图6

分析　如图 6，欲证 $\frac{BM}{MC}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}$，只要证 $\frac{BM}{MC}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2C}=1$.

消点过程为：

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2C}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2C}$$

（共边定理消去点 M）

$$=\frac{(1/2)\cdot AO\cdot OB\cdot\sin\angle AOB}{(1/2)\cdot AO\cdot OC\cdot\sin\angle AOC}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2C}$$

$$=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2C}$$

（消去点 O，利用了同弧上的圆心角与圆周角的关系）

$=1$.

例 7[B]　若凸四边形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 互相垂直且相交于 E，过 E 点分别作边 AB，BC，CD，DA 的垂线，垂足依次为 P，Q，R，S，并分别交 CD，DA，AB，BC 边于 P'，Q'，R'，S'，再顺次连接 P'Q'，Q'R'，R'S'S'P'，则 R'S' // P'Q' // AC；R'Q' // P'S' // BD。

此题作图程序非常清楚：

（1）作互相垂直的两条线段 AC，BD 且垂足为 E；

（2）作 $EQ\perp BC$，$EP\perp AB$，$ER\perp CD$，$ES\perp AD$，垂足分别为 Q、P、R、S.

（3）EQ 交 AD，EP 交 CD，ER 交 AB，ES 交 BC 依次得四个交点 Q'、P'、R'、S'。

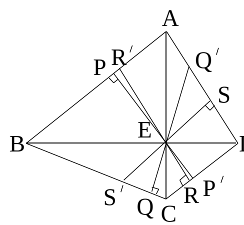


图7

分析　如图 7，要证 P'Q' // AC，只要证 $\frac{AQ'}{DQ'}=\frac{CP'}{DP'}$，即证明 $\frac{AQ'}{DQ'}\cdot\frac{DP'}{CP'}=1$ 即可。

消点过程如下：

$$\frac{AQ'}{DQ'}\cdot\frac{DP'}{CP'}=\frac{\triangle AQE}{\triangle DQE}\cdot\frac{\triangle DPE}{\triangle CPE}$$

（共边定理消点 P'，Q'）

$$=\frac{AE\cdot BE\cdot\triangle CQE}{CE\cdot DE\cdot\triangle BQE}\cdot\frac{DE\cdot AE\cdot\triangle BPE}{BE\cdot CE\cdot\triangle APE}$$

(共边定理 $\frac{\triangle AQE}{\triangle CQE}=\frac{AE}{CE},\frac{\triangle DQE}{\triangle BQE}=\frac{DE}{BE},\frac{\triangle DPE}{\triangle BPE}=\frac{DE}{BE},\frac{\triangle CPE}{\triangle APE}=\frac{CE}{AE}$)

$$=\frac{AE\cdot BE\cdot CE^2}{CE\cdot DE\cdot BE^2}\cdot\frac{DE\cdot AE\cdot BE^2}{BE\cdot CE\cdot AE^2}$$

(消去了点 P,Q,用相似三角形的面积比等于相似比的平方,即

$\frac{\triangle CQE}{\triangle BQE}=\frac{CE^2}{BE^2},\frac{\triangle BPE}{\triangle APE}=\frac{BE^2}{AE^2}$)

$=1.$

同样可用消点法得 $\frac{AR'}{BR'}\cdot\frac{BS'}{CS'}=1$,

即 $R'S'/\!/Q'P'/\!/AC$.

同理亦可证得 $R'Q'/\!/P'S'/\!/BD$.

□曲线系方法

曲线系是指具有某种共同性质的曲线的集合。曲线系方法与基本量方法同属整体思想的直接应用。曲线系方法是整体思想在解析几何中的具体运用。马明、马复老师在阐述直线系与圆锥曲线系的基础上,又引入“二重点”的概念,便为曲线系在切线中的应用打开思路。为了充分发挥曲线系方法的作用,还在曲线系的构造以及曲线系在代数和平几中的应用做了进一步研讨。

曲线系方程一般表现为含有一个(或几个)独立参数的二元方程。例如

(1)$y=\lambda x$ 是通过原点的一族直线的参数方程,其中 λ 为参数。给 λ 以一切实数值,可得到过原点的所有直线,但不包含 y 轴。而方程 $\lambda_1 y=\lambda_2 x$(λ_1、λ_2 为参数)就包含过原点的一切直线。

(2)$(x-\lambda)^2+y^2=\lambda^2$(参数 $\triangle\in R$)是圆心为(λ,0),半径等于$|\lambda|$的一族圆,这一系列圆的圆心位于 x 轴上,并且彼此相切于原点。(当 $\lambda=0$ 时,为点圆)

在解析几何中,有大量的求满足某些特定条件的曲线的方程问题,其实质就是决定某曲线系方程中参数 λ 的值。

1. 直线系

常用的直线系方程有

(1)和直线 $l:Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程是 $Ax+By+\lambda=0$ $(\lambda\neq C)$,和直线 l 垂直的直线系方程是 $Bx-Ay+\lambda=0$。(λ 为参数,下同)

(2)过两直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 及 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程是

$$l:A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

简记为 $l:l_1+\lambda l_2=0$.(下同)

应该指出两点:

(i)直线系 l 包括除直线 l_2 外经过交点的所有直线。如果取两个参数 λ_1 与 λ_2,则直线系

$$\lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2=0$$

为经过交点 P_0 的一切直线。

(ii)如果 l_1 与 l_2 不相交,则直线系 $l_1+\lambda l_2=0$ 中的所有直线都与 l_1(或 l_2)平行,或者与 l_1 重合,或者为虚直线

于是得

定理一 设 l_1 和 l_2 是两条相交的直线,则 $l:\lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2=0$ 是通过它们的交点的所有直线,如果 $l_1/\!/l_2$,则 l 是一组平行直线,或者是虚直线。

例1 求通过二直线 $l_1:2x+y-5=0$ 与 $l_2:3x-2y+7=0$ 的交点,且与 $l_3:2x+3y-11=0$ 垂直的直线方程。

解法一 过 l_1 与 l_2 的交点的所有直线方程是 $\lambda_1(2x+y-5)+\lambda_2(3x-2y+7)=0$ 即 $(2\lambda_1+3\lambda_2)x+(\lambda_1-2\lambda_2)y-(5\lambda_1-7\lambda_2)=0$

此直线与 l_3 垂直的充要条件为

$$2(2\lambda_1+3\lambda_2)+3(\lambda_1-2\lambda_2)=0,$$

即 $\lambda_1=0$,$(\lambda_2\neq0)$,故所求直线方程为 $3x-2y+7=0$ 取 $(\lambda_2=1)$

解法二 过 l_1 与 l_2 的交点的所有直线(除 l_2 以外)的方程是

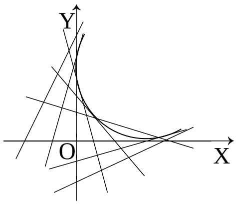
$$l:(2x+y-5)+\lambda(3x-2y+7)=0,$$

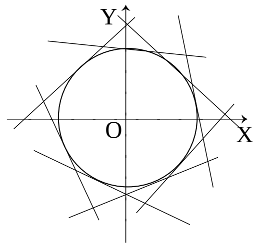
即 $(2+3\lambda)x+(1-2\lambda)y-5+7\lambda=0$,

根据两直线垂直的充要条件,有

$$2(2+3\lambda)+3(1-2\lambda)=0,$$

化简得 $7=0$(!)。这说明直线系 l 中没有所要的直线,经检查,l_2 是所求的直线。





解法三 过 l_1 和 l_2 的交点的所有直线方程是 $\lambda_1(2x+y-5)+\lambda_2(3x-2y+7)=0$

即 $(2\lambda_1+3\lambda_2)x+(\lambda_1-2\lambda_2)y-(5\lambda_1-7\lambda_2)=0$ ①

与 l_1 垂直线系方程是

$3x-2y+\lambda=0$ ②

令①、②为同一条直线,得

$$\frac{2\lambda_1+3\lambda_2}{3}=\frac{\lambda_1-2\lambda_2}{-2}=\frac{-5\lambda_1+7\lambda_2}{\lambda}$$

解得 $\lambda=7$,故所求直线方程为 $3x-2y+7=0$.

说明 ①是过 l_1 与 l_2 的交点的一切直线的集合,②是与 l_3 垂直的一切直线的集合,而'解法三'的思想方法则是求这两个集合的交集。

直线系的种类很多,例如

在 X 轴和 y 轴上截距的和为 4 的直线系方程是

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{4-\lambda}=1$$(上左图)

与原点的距离等于 5 的直线系方程是

$x\cos\theta+y\sin\theta-5=0$

其中 0 为参数。(上右图)

2. 共轴圆系

对于不同心的两个圆 C_1 与 C_2,它们的方程设为

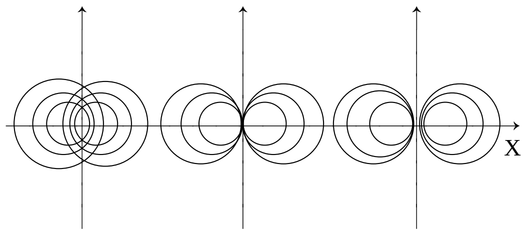
$C_1\equiv x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$C_2\equiv x^2+y^2+D_2X+E_2y+F_2=0$

那么方程

$C_1+\lambda C_2\equiv(1+\lambda)(x^2+y^2)+(D_1+\lambda D_2)x+(E_1+\lambda E_2)y+F_1+\lambda F_2=0$ 在 $\lambda=-1$ 时表示一条直线,这条直线称为两圆 C_1 与 C_2 的根

轴;在 $\lambda \neq -1$ 时仍表示圆,所有这些圆组成的圆系称为共轴圆系,因为在这圆系内任意两个圆有相同的根轴 $l: C_1 - C_2 = 0$,



如上图所示,当两圆 C_1 与 C_2 相交或相切时,共轴圆系内任意一圆及根轴都通过这两圆的交点或切点;当两圆 C_1 与 C_2 相离时,圆系内的任何两圆以及根轴都互不相交或相切。

下面用‘圆幂’这个概念来进一步说明根轴的性质。

所谓一点 $M_0(x_0, y_0)$ 对于圆的幂就是这点到圆的距离平方与半径平方之差。

如果已知圆心的方程为

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

那么点 $M_0(x_0, y_0)$ 对于此圆的幂就是

$P = f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F$(证明略)。

当点 M_0 在圆内时 $P < 0$;当点 M_0 在圆上时,$P = 0$;当点 M_0 在圆外时,$P > 0$,这时 P 等于点 M_0 到圆所引切线长(t)的平方,即

$f(x_0, y_0) = t^2$。

因此,两圆的根轴是对于这两个圆有相等幂的点的轨迹,故根轴又名等幂轴。

例 2　已知圆的方程为

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0,$$

试判断下列各点在圆内或圆外,如果在圆外,再求此点到已知圆的切线长:(1) $M_1(3,1)$;(2) $M_2(7,1)$。

解　(1) $f(3,1) = 3^2 + 1^2 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 8 < 0$,

所以点 M_1 在圆内;

(2) $f(7,1) = 7^2 + 1^2 - 4 \cdot 7 - 4 \cdot 1 - 8 = 10 > 0$,

所以点 M_2 在圆外,且 M_2 到圆的切线长等于 $\sqrt{10}$。

例 3 设有三个圆 C_1、C_2、C_3：

C_1：$f_1(x,y)=x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，

C_2：$f_2(x,y)=x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$，

C_3：$f_3(x,y)=x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0$，

每两个圆有一条根轴，试证这些根轴交于一点(这一点称为三圆的根心或等幂心)

证明 C_1 与 C_2 的根轴方程是 $f_1(x,y)-f_2(x,y)=0$，

C_2 与 C_3 的根轴方程是 $f_2(x,y)-f_3(x,y)=0$，

C_3 与 C_1 的根轴方程是 $f_3(x,y)-f_1(x,y)=0$。

由于$[f_1(x,y)-f_2(x,y)]+[f_2(x,y)-f_3(x,y)]=f_1(x,y)-f_3(x,y)$，这说明第三条根轴通过第一与第二根轴的交点，即三条根轴交于一点。

下面用求两圆根轴的思想方法去解题：

两个抛物线有平行的轴，试证：它们的公共弦平分公共的切线。

证明令直角坐标系中 x 轴平行于抛物线的轴，$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$分别是切于两个抛物线的公切线的切点，P_3 是 P_1P_2 的中点。那么，抛物线的方程是

$$y^2+2Bx+2C_1y+D_1=0 \quad ①$$

$$y^2+2B_2x+2C_2y+D_2=0 \quad ②$$

过 P_1 点的①的切线是(P_1 为切点)

$$y_1y+B_1(x+x_1)+C_1(y+y_1)+D_1=0,$$

它通过 P_2，因此有

$$y_1y_2+B_1(x_1+x_2)+C_1(y_1+y_2)+D_1=0, \quad ③$$

同理，由于过 P_2 点的②的切线经过 P_1，所以又有

$$y_1y_2+B_2(x_1+x_2)+C_2(y_1+y_2)+D_2=0, \quad ④$$

由③-④，得 $2(B_1-B_2)\cdot\frac{1}{2}(x_1+x_2)+2(C_1-C_2)\cdot\frac{1}{2}(y_1+y_2)+(D_1-D_2)=0$ ⑤

但两抛物线的公共弦的方程是由①-②而得，即 $2(B_1-B_2)x+2(C_1-C_2)y+(D_1-D_2)=0$ ⑥

而⑤式正说明 P_3 的坐标

$\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2),\frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$满足⑥，即公共弦平分公共切线。

(注：其它二次曲线有类似性质)

3. 二次曲线系

二次曲线的一般方程：

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad ①$$

中，二次项的系数不全为零，不妨设 $A\neq0$，以 A 除方程两边，所得到的

方程

$$x^2+\lambda_1xy+\lambda_2y^2+\lambda_3x+\lambda_4y+\lambda_5=0$$

仍然表示同一条曲线,此方程含有5个独立参数$\lambda i(i=1,2,3,4,5)$,形成一族二次曲线,称它为二次曲线族。随着独立参数个数的不同,可以把二次曲线族按其参数的个数分为单参数二次曲线族,双参数二次曲线族等等(有些教本把单参数二次曲线族专称为二次曲线系,本文则不加区别地一律称为曲线系或曲线族)。

如果二次方程①的系数满足$A=C\neq0,B=0$,那么①所含的独立参数的个数就由5个减少到3个而成为三参数二次曲线系,即圆系。因此,三个独立条件始能确定圆。

如果二次方程①的系数满足$(2B)^2=4AC$,即$B^2=AC$,那么①所含的独立参数的个数就由5个减少到4个而成为四参数二次曲线,即抛物线系。因此,四个独立条件始能确定抛物线。

如果二次方程①的系数满足$B^2\neq AC$,那么①所含的独立参数的个数并未减少,是五参数二次曲线系,即中心二次曲线系。因此,五个独立条件始能确定中心二次曲线。

以上只是一般的说法,并不像'过不在一直线上的三个点确定一个圆'那么干脆。这里用'始能'这个词的含义是'确定一个圆至少需要三个独立条件'例如,"求过两个已知点并且和一条已知直线相切的圆",这里虽有三个独立条件,但符合条件的圆有时有两个、一个或竟然没有。

又如,"求过$A(4,0),B(0,2),C(-1,0)$,和$D(0,-2)$四个点的抛物线方程",这里虽有四个独立条件,但是符合条件的抛物线却有两条:

$$x^2-2xy+y^2-3x-4=0$$

与$x^2+2xy+y^2-3x-4=0$。

(可以证明,通过已知4点的抛物线不会超过两条)

同样,满足五个独立条件的二次曲线的解往往也不定。

明确以上各情况,对分析问题是有益的。

下面,先从另一个角度来研究曲线系。

例1　讨论方程$tx^2+(25+t)y^2=t(25+t)$所表示的二次曲线系,并画出图形。

解　这是含一个参数的曲线系,给t以不同的值,就得到各个确定的二次曲线:

当$t=0$或$t=-25$时,分别表示重合二直线$y^2=0$与$x^2=0$;

当 $t(t+25)\neq 0$ 时,原方程可化为

$$\frac{x^2}{25+t}+\frac{y^2}{t}=1。$$

当 $t>0$ 时,为椭圆系,由于 $a^2=25+t,b^2=t$,所以 $c^2=25$,这说明这些椭圆的焦点重合,焦点坐标为$(\pm 5,0)$;

当 $-25<t<0$ 时,为双曲线系,这些双曲线的焦点坐标仍为$(\pm 5,0)$;

当 $t<-25$ 时,为虚椭圆。

我们把这种具有共同焦点的圆锥曲线系叫做共焦圆锥曲线系,它有如下性质 共焦圆锥曲线系 $\frac{x^2}{c^2+t}+\frac{y^2}{t}=1$ 中,任一椭圆 $\frac{x^2}{c^2+t}+\frac{y^2}{t_1}=1(t_1>0)$ 与双曲线

$\frac{x^2}{c^2+t_2}+\frac{y^2}{t_2}=1(-c<t_2<0)$ 正交)证略。

定理二 如果两条二次曲线 $f(x,y)=0$ 与 $g(x,y)=0$,相交,那么含有参数 λ_1 与 λ_2 的方程

$\lambda_1 f(x,y)+\lambda_2 g(x,y)=0$ ①的轨迹经过这两条二次曲线的所有交点 如果 $f(x,y)=0$ 与 $g(x,y)=0$ 相交于 A、B、C、D 四点,那么方程①包含过 A、B、C、D 四点的一切二次曲线(包括退缩的二次曲线)。

证明 设 $M(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)=0$ 与 $g(x,y)=0$ 的交点,即有 $f(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)=0$,因而有

$\lambda_1 f(x_0,y_0)+\lambda_2 g(x_0,y_0)=0$

(λ_1、λ_2 为任意实数)

这说明方程①的图象经过交点 $M(x_0,y_0)$。

设 Γ 是经过 A、B、C、D 四点的任意一条二次曲线,且 $M(X_0,Y_0)$ 是 Γ 上异于 A、B、C、D 四点的任意一点,如果

(i)点 M 不是 $g(x,y)=0$ 上的点,即 $g(x_0,y_0)\neq 0$,那么令 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=-\frac{f(x_0,y_0)}{g(x_0,y_0)}$,则此时的①通过点 M;

(ii)点 $M(x_0,y_0)$ 是 $g(x,y)=0$ 上的点,则 M 便不是 $f(x,y)=0$ 上的点(否则 $f(x,y)=0$ 与 $g(x,y)=0$ 为同一条曲线),即 $g(x_0,y_0)=0$,而 $f(x_0,y_0)\neq 0$,则令 $\lambda_1=0,\lambda_2=1$,可得证①通过点 M。

因此,①的图象经过 A、B、C、D、M 五个点,而过五点的二次曲线是唯一的(否则两条二次曲线将有五个交点!),故①包含二次曲线 Γ。

例 2 求过两曲线 $x^2+y^2-2x+2y=0$ 与 $xy=1$ 的 4 个交点的抛物线方程。

解 过两已知曲线的交点的二次曲线系的方程是

$\lambda_1(x^2+y^2-2x-2y)+\lambda_2(xy-1)=0$ 即 $\lambda_1x^2+\lambda_2xy+\lambda_1y^2-2\lambda_1x+2\lambda_1y-\lambda_2=0$,

要它是抛物线,必须有

$\lambda_2^{\ 2}=4\lambda_1^{\ 2}$,

令 $\lambda_1=1$,得两组解

$\begin{cases}\lambda_1=1,\\ \lambda_2=2,\end{cases}$

$\begin{cases}\lambda_1=1,\\ \lambda_2=-2。\end{cases}$

当 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 时,得抛物线

$x^2+2xy+y^2-2x+2y-2=0$;

当 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$ 时,得

$x^2-2xy+y^2-2x+2y+2=0$,

即 $(x-y-2)(x-y+1)=0$,

这是两条平行直线——退缩的抛物线。

两条直线 l_1 与 l_2 可以理解为一条退缩的二次曲线(用 $l_1\cdot l_2$ 表示),于是,由定理二立得下面两条推论。

推论 1　如果两直线

$l_i\equiv a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2)$ 与一条二次曲线 $f(x,y)=0$ 有交点,那么含有参数 λ_1、λ_2 的方程

$\lambda_1f(x,y)+\lambda_1l_1\cdot l_2=0$ 的图象经过这些交点,如果它们有 4 个交点,那么此参数方程是通过这 4 个交点的一切二次曲线方程。

例 3　已知椭圆 $x^2+2y^2-4=0$ 与两直线 $x+y-1=0$,$2x+y+1=0$ 有四个交点,求过此四个交点且过点 $(-1,0)$ 的二次曲线方程。

解　设所求二次曲线方程为

$\lambda_1(x^2+2y^2-4)+\lambda_2(x+y-1)(2x+y+1)=0$,

因它过点 $(-1,0)$,以之代入上式可得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$,故所求曲线方程为

$2(x^2+2y^2-4)+3(x+y-1)(2x+y+1)=0$,

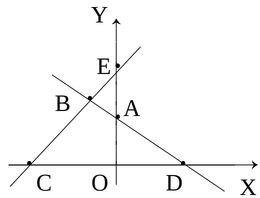
即 $8x^2+9xy+7y^2-3x-11=0$(椭圆)。

推论 2　已知四点 P_1、P_2、P_3、P_4,经过点 P_i、P_{i+1} 的直线方程为 $l_{i,i+1}=0$(这里 $i=1,2,3,4$,$i+1=2,3,4,1$),那么含有参数 λ_1、λ_2 的方程

$\lambda_1l_{12}l_{34}+\lambda_2l_{23}l_{41}=0$

是表示经过这四点的二次曲线系。

例4 四条直线 $x=0$,$y=0$,$x-y+2=0$ 及 $x+y-1=0$ 两相交于 O、A、B、C、D、E 六点(如图)



(1)求过 O、A、B、C 四点的所有二次曲线中心的轨迹;

(2)求过 C、D、A、E 四点的所有二次曲线中心的轨迹。

解 (1)过 O、A、B、C、四点的二次曲线系的方程为

$$\lambda_1 x(x-y+2)+\lambda_2 y(x+y-1)=0$$

即 $\lambda_1 x^2+(\lambda_2-\lambda_1)xy+\lambda_2 y^2+2\lambda_1 x-\lambda_2 y=0$。

当 $(\lambda_2-\lambda_1)^2-4\lambda_1\lambda_2\neq 0$ (*)

时为中心二次曲线系,其中心 M(x,y)满足方程组(所谓中心方程组)

$$\begin{cases}2\lambda_1 X+(\lambda_2-\lambda_1)y+2\lambda_1=0\\(\lambda_2-\lambda_1)x+2\lambda_2 y-\lambda_2=0\end{cases}$$ 在条件(*)下消去 λ_1、λ_2,得中心轨迹方程

$$2x^2+4xy-2y^2+5y-2=0,$$

它的图象为双曲线。

(2)过 C、D、A、E 四点的二次曲线系方程为

$$\lambda_1(x-y+2)(x+y-1)+\lambda_2 xy=0,$$

或 $(x-y+2)(x+y-1)+\lambda xy=0$,

即 $x^2+\lambda xy-y^2+x+3y-2=0.$

而 $\triangle=l^2+4\neq 0$,所以必为中心二次曲线系,其中心 M(x,y)满足中心方程组

$$\begin{cases}2x+\lambda y+1=0,\\\lambda x-2y+3=0。\end{cases}$$

消去 λ,得中心轨迹方程

$$2x^2+2y^2+x-3y=0。\text{(圆)}$$

例5 四条直线

$l_1\equiv 3y+x-15=0$,

$l_2\equiv y-kx+6=0$,

$l_3\equiv 5y+x=0$,

$l_4\equiv y=0$,

围成一个四边形,问 k 为何值时该四边形有外接圆,并求此外接圆的方程。

解 设过该四边形的四个顶点的二次曲线系方程为

$$\lambda_1 l_1 l_3+\lambda_2 l_2 l_4=0,$$

即 $\lambda_1 x^2+(8\lambda_1-k\lambda_2)xy+(15\lambda_1+\lambda_2)y^2$

$-15\lambda_1 x+(-75\lambda_1+6\lambda_2)y=0$

由$\begin{cases}\lambda_1=15\lambda_1+\lambda_2\\8\lambda_1-k\lambda_2=0\end{cases}$　$\begin{cases}\lambda_1=1,\lambda_2=-15,\\k=-8/15。\end{cases}$

得所求圆的方程为

$$x^2+y^2-15x-\frac{391}{5}y=0。$$

例 6　证明 椭圆的内接矩形的两邻边分别与椭圆的长、短轴半行。

证　设 PQRS 为椭圆 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0(a\neq b)$ 的内接矩形，直线

$l_{PQ}\equiv Ax+By+C_1=0$，

$l_{RS}\equiv Ax+By+C_2=0$，

则 $l_{ps}\equiv Bx-Ay+C_3=0$，

$l_{QR}\equiv Bx-Ay+C_4=0$。

由推论 2，当有 $\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\quad\lambda_1\cdot l_{pQ}\cdot l_{RS}$

$\lambda_2\cdot l_{PS}\cdot l_{RQ}$，

即 $\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\quad\lambda_1(Ax+By+C_1)(Ax+By+C_2)+\lambda_2(Bx-Ay+C_3)(Bx-Ay+C_4)$，

比较两端 x^2、y^2、xy 的系数，有

$$\begin{cases}\lambda b^2=\lambda_1A^2+\lambda_2B^2 & ①\\ \lambda a^2=\lambda_1B^2+\lambda_2A^2 & ②\\ 0=2AB\lambda_1-2AB\lambda_2 & ③\end{cases}$$

由①、②知 $\lambda_1\quad\lambda_2$（否则 $a=b$），因此，③式说明 A、B 中至少有一个数为零，不妨设 $A=0$，于是有

$l_{PQ}=By+C_1=0$，

$l_{RS}=By+C_2=0$，

$l_{PS}=Bx+C_3=0$，

$l_{QR}=Bx+C_4=0$，

这说明椭圆的内接矩形的相邻两边分别与椭圆的长、短轴平行。

4. 切线与二次曲线系

切线是被定义为割线的极限位置的，于是，切点可理解为二重点，切线可理解为二重点的联线。

我们先看一下如何利用这种观点，通过曲线系方程，解已知切线求二次曲线的问题。

例 1　求过点 $A(1,-2)$、$B(9,-6)$ 并且切直线 $x-2y+4=0$ 于点 $C(4,4)$ 的

抛物线。

解 将切点 C 理解为二重点,于是问题归结为求过 A、B、C、C 四点的抛物线方程,由于

$l_{AB}: x+2y+3=0$,

$l_{BC}: 2x+y-12=0$,

$l_{CC}: x-2y+4=0$,(切线)

$l_{CA}: 2x-y-4=0$。

由上文 2 推论 2,得过 A、B、C、C 四点的二次曲线系方程为

$$(x+2y+3)(x-2y+4)+\lambda(2x+y-12)(2x-y-4)=0,$$

即 $(1+4\lambda)x^2-(4+\lambda)y^2+(7-32\lambda)x+(2+8\lambda)y+12+48\lambda=0$。

由于 $\triangle=0^2+4(1+4\lambda)(4+\lambda)=0$,得

$\lambda=\frac{1}{4}$或 -4,把它代入前式,得所求抛物线有两条:

$y^2=4x$ 与 $x^2-9x+2y+12=0$。

例 2 求经过 A(0,1)、B(1,2)两点并与 x 轴相切的圆的方程。

解 设切点为 C(a,0),则直线方程为

$l_{AB}: x-y+1=0$,

$l_{CC}: y=0$,

$l_{AC}: x+ay-a=0$,

$l_{BC}: 2x+(a-1)y-2a=0$.

过 A、B、C、C 四点的二次曲线系方程为

$$(x+ay-a)[2x+(a-1)y-2a]+\lambda\cdot y(x-y+1)=0,$$

即 $2x^2+(\lambda+3a-1)xy+(a^2-a-\lambda)y^2-4ax+(\lambda-3a^2+a)y+2a^2=0$,

令 $\begin{cases}\lambda+3a-1=0,\\ 2=a^2-a-\lambda,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ \lambda=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}a=-3,\\ \lambda=10.\end{cases}$

于是,符合题设条件的圆有两个:

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

与 $x^2+y^2+6x-10y+9=0$。

例 3 求分别切坐标轴于 A(0,1)与 B(1,0)两点的抛物线方程。

解 这里有两条切线,问题归结为求过四个点 A、A、B、B 的抛物线方程。由于

$l_{AA}: x=0$，

$l_{AB}: x+y-1=0$，

$l_{BB}: y=0$，

$l_{BA}: x+y-1=0$.

得过 A、A、B、B 四点的二次曲线系方程

$(x+y-1)^2+\lambda xy=0$，

即 $x^2+(2+\lambda)xy+y^2-2x-2y+1=0$。

由 $\triangle=(2+\lambda)^2-4=0$，

得 $\lambda=-4$（$\lambda=0$ 舍去）

所求抛物线方程为

$x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$.

例 4 某二次曲线与抛物线 $y^2=8x$ 相切于点 $A(\frac{1}{2},2)$ 并经过这抛物线的通径的两个端点 B、C 及另一点 D(6,2) 求此二次曲线的方程。

解 所求二次曲线与抛物线 $y^2=8x$ 在点 A 处有公切线 $2x-y+1=0$，

抛物线 $y^2=8x$ 的通径方程为 $x-2=0$，

于是得满足条件的二次曲线系方程为

$(y^2-8x)+\lambda(x-2)(2x-y+1)=0$.

将点 D(6,2) 代入，得 $\lambda=1$. 代入曲线系方程，整理后得所求二次曲线方程为

$2x^2-xy+y^2-11x+2y-2=0$

下面我们再研究‘已知二次曲线求切线’的课题。

设 $M(x_0,y_0)$ 是二次曲线

$\Gamma: F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

上的一点，那么以 M 为切点的切线方程为

$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$.

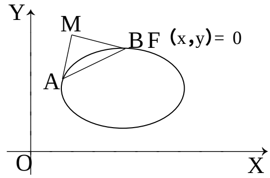
如果将上等式左端记为 $F'_{(x_0,y_0)}(x,y)$，

则该切线方程可简记为

$F'_{(x_0,y_0)}(x,y)=0$.

这是熟知的结论，但如果点 $M(x_0,y_0)$ 在曲线 Γ 的外部，那么自点 $M(x_0,y_0)$ 所作曲线 Γ 的两条切线方程的获得，往往需要较大的运算量，如改用曲线系方法，就简便得多。

定理 3 设 $M(x_0,y_0)$ 是二次曲线 $\Gamma: F(x,y)=0$ 外部的一个点，那么自 M 所作 Γ 的两条切线方程为 $F(x_0,y_0)\cdot F(x,y)-[F'_{(x_0,y_0)}(x,y)]^2=0$.



证明 点 $M(x_0,y_0)$ 的极线(切点弦)AB 的方程为 $F'_{x_0,y_0}(x,y)=0$

自 M 所作 Γ 的两条切线由 5 个点 M、A、A、B、B 决定。据定理 2 的推论 1,

$\lambda_1 F(x,y)+\lambda_2[E'_{(}x_0,y_0)(x,y)]^2=0$ 是通过 4 点 A、A、B、B 的二次曲线系,再以点 M 的坐标 (x_0,y_0) 代入上式,由于 $F'_{(x_0,y_0)}(x_0,y_0)=F(x_0,y_0)\neq 0$,

得一组解 $\lambda_1=F(x_0,y_0)$,$\lambda_2=-1$。

即所作的两条切线 MA 与与 MB 的方程为

$$F(x_0,y_0)\cdot F(x,y)-[F'_{(x_0,y_0)}(x,y)]^2=0 \quad ①$$

有两点需要说明:

(i)由于方程①满足 5 个点 M、A、A、B、B,而 M、A、A 三点共线,M、B、B 三点共线,故①必是退化的二次曲线——两条切线;

(ii)当点 M 为双曲线的一条渐近线上的点(或两渐近线的交点)时,则有一个切点(或两个切点)趋向无限远。

例 5 求自点 M(0,2)所作双曲线

$$F(x,y)=xy-1=0.$$

的两条切线的方程。

解 $F(x,y)=xy-1$,$x_0=0$,$y_0=2$,

则 $F(x_0,y_0)=-1$,

$$F'_{(x_0,y_0)}(x,y)=x-1。$$

故所求两切线方程为

$$-(xy-1)-(x-1)^2=0,$$

即 $x=0$ 与 $x+y-2=0$,其中 $x=0$ 为双曲线的一条渐近线,$x+y-2=0$ 为切线。

例 6 自椭圆 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ 外一点 P 作它的两条互相垂直的切线,求动点 P 的轨迹。

解 设自 $P(x',y')$ 所作题设椭圆的两条互相垂直的切线方程为

$$t(x,y)\equiv(Ax+By+C_1)(Bx-Ay+C_2)=0 \quad ①$$

由定理 3,有

$$t(x,y)\equiv(b^2x'^2+a^2y'^2-a^2b^2)(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)-(b^2x'x+a^2y'y-a^2b^2)^2=0 \quad ②$$

比较①、②中 x^2、y^2 的系数，有

$$\begin{cases} AB = b^2(a^2y'^2 - a^2b^2), \\ -AB = a^2(b^2x'^2 - a^2b^2)。\end{cases}$$

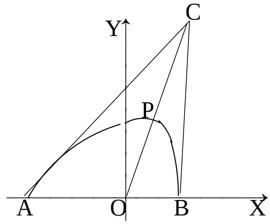
消去 AB，得 $x'^2 + y'^2 = a^2 + b^2$。

即所求的轨迹的方程为

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \quad （圆）。$$

下面我们介绍一种法则，用它可以判断一段圆锥曲线弧的类型。

问题　求二次曲线，使它与给定的 $\triangle ABC$ 的两边切于 A、B 两点，并且过 AB 边上的中线 OC 上一点 P，已知 $OP : OC = f(o < f < 1)$。



解　取 O 为原点，边 AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系（如图）。

设 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(x_0, y_0)$ $(y_0 \neq 0)$ 则直线 AC、BC 的方程为

$$\frac{x+1}{x_0+1} = \frac{y}{y_0}, \frac{x-1}{x_0-1} = \frac{y}{y_0},$$

即　$y_0x - x_0y - y + y_0 = 0$，

$y_0x - x_0y + y - y_0 = 0$。

又直线 AB 的方程为 $y = 0$，所以与 $\triangle ABC$ 的两边切于 A、B 两点的曲线系（即过 A、A、B、B 四点的曲线系）方程为

$$(y_0x - x_0y - y + y_0)(y_0x - x_0y + y - y_0) + \lambda y^2 = 0。$$

点 $P(fx_0, fy_0)$ 的坐标满足上式，即有

$$-y_0^2(f-1) + \lambda f^2y_0^2 = 0(y_0 \neq 0)。$$

得 $\lambda = (1-f)^2/f^2$。

故所求二次曲线的方程为

$$f^2[(y_0x - x_0y)^2 - (y - y_0)^2] + (1-f)^2y^2 = 0,$$

即　$f^2y_0^2x^2 - 2f^2x_0y_0xy + (f^2x_0^2 + 1 - 2f)y^2 + 2f^2y_0y - f^2y_0^2 = 0$。

因为 $\triangle = (-2f^2x_0y_0)^2 - 4f^2y_0^2(f^2x_0^2 + 1 - 2f) = -4f^2y_0^2(1-2f)(y_0 \neq 0, 0 < f < 1)$，

，当 $f = \frac{1}{2}$ 时，所求二次曲线为抛物线；

当 $0<f<\frac{1}{2}$ 时,所求二次曲线为椭圆;

当 $\frac{1}{2}<f<1$ 时,所求二次曲线为双曲线。

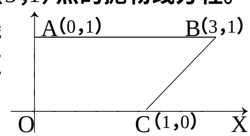
于是,我们得到一个法则:如果给定一段圆锥曲线弧,要区别它是椭圆弧、抛物线弧、或是双曲线弧,可以过弧的两端点 A、B 作切线 AC、BC,设曲线弧交中线 OC 于 P,视比值 $OP/OC=f$ 是小于、等于或是大于 $\frac{1}{2}$ 而定。

5. 曲线系方程的构造

要感谢'曲线系'的创始人,因为曲线系这一概念和方法的运用使人们在许多场合下大大减轻计算量,使一些在理论上能解决,而在实际上一时无法解决的问题迎刃而解。这里的关键当然是曲线系方程的构造,随着问题的条件与要求的不同,曲线系方程的种类很多,技巧性也大。下面将用若干例题,进一步熟悉曲线系方程的构造,着力提高构造性能力。

例 1　已知三角形边所在直线方程为:

$x+y-1=0, x=0, y=0$,试求过这三角形的三顶点且过(3,1)点的抛物线方程。



解　如图,所求抛物线通过 A、O、C、B 四点,直线 BC 方程为 $x-2y-1=0$,直线 AB 方程为 $y-1=0$,由直线 AB 与 OC 构成的二次曲线方程为

$y(y-1)=0$,

由直线 BC 与 OA 构成的二次曲线方程为　$x(x-2y-1)=0$,

因此,可以构造一个过这两个二次曲线的交点,亦即过 A、B、C、O 四点的二次曲线系方程为

$\lambda_1 y(y-1)+\lambda_2 x(x-2y-1)=0$,

即 $\lambda_2 x^2-2\lambda_2 xy+\lambda_1 y^2-\lambda_2 x-\lambda_1 y=0$。

为了寻找所求抛物线方程,可令

$\triangle=(-2\lambda_2)^2-4\lambda_2\lambda_1=0$,

由此得 $\lambda_2=0$,或 $\lambda_2=\lambda_1\neq 0$,

当 $\lambda_2=0$ 时,取 $\lambda_1=1$,得 $y^2-y=0$(退缩的抛物线);

当 $\lambda_2=\lambda_1\neq 0$ 时,得所求抛物线方程为

$x^2-2xy+y_2-x-y=0$。

例 2　自椭圆 $x^2+2y^2-2=0$ 外一点 A(2,2)作椭圆的两条切线,切点为 B、C,求过 A、B、C 三点的圆的方程。

分析　切点弦 BC 所在直线方程为

$x+2y-1=0$,

二次曲线系

$$\lambda_1(x^2+2y^2-2)+\lambda_2(x+2y-1)=0 \quad ①$$

通过 B、C 两点,但曲线系①并不包含过 B、C 两点的所有二次曲线,例如,过 B、C 两点的圆就不包含(为什么?)。

为了寻找所要的圆,可构造二次曲线系

$$\lambda_1(x^2+2y^2-2)+\lambda_2(x+2y-1)(x-2y+m)=0, \quad ②$$

②式含两个独立参数 λ_1(或 λ_2)与 m。

将②式展开,整理得

$$(\lambda_1+\lambda_2)x^2+(2\lambda_1-4\lambda_2)y^2+(m\lambda_2-\lambda_2)x+(2m\lambda_2+2\lambda_2)y-m\lambda_2-2\lambda_1=0。 \quad ③$$

以 A(2,2)代入③,并令③中 x^2 项和 y^2 项的系数相等,得

$$\begin{cases}10\lambda_1+5\lambda_2(-2+m)=0\\ \lambda_1+\lambda_2=2\lambda_2-4\lambda_2。\end{cases}$$

解得一组解:$\lambda_1=5,\lambda_2=1,m=-8$,代入②得所求圆的方程为

$$6x^2+6y^2-9x-14y-2=0。$$

* 曲线系②是根据什么原则构造的?

——为了弥补曲线系①不包含过 B、C 两点的所有二次曲线这一缺陷,①中应含三个独立参数(连同 B、C 两点,共有五个独立条件),我们想到再引入一条直线 $x+ny+m=0$(两个独立参数 n 与 m),于是构造二次曲线系

$$\lambda_1(x^2+2y-2)+\lambda_2(x+2y-1)(x+ny+m)=0,$$

(此曲线系恰含三个独立参数)要从此曲线系中找到所要的圆,当然要令此式中不含 xy 项,于是可得 $n=-2$。

例 3　一圆与直线 $x+3y-26=0$ 切于 A(8,6),且经过点 B(-2,-4),求此圆的方程。

解　可以用‘点圆’的概念构造与直线切于某点的圆系。

点圆 A 的方程为 $(x-8)^2+(y-6)^2=0$,则方程

$$[(x-8)^2+(y-6)^2]+\lambda(x+3y-26)=0 \quad ①$$

表示和直线

$$l:x+3y-26=0 \quad ②$$

切于点 A 的圆系。

这是因为 :①是圆的方程,且过点 A(8,6),又由①、②组成的方程组只有一组解 $x=8$,$y=6$,这就又说明圆①与直线 l 相切。

把 B 点坐标代入①,得 $\lambda=5$,故所求方程为

$$(x-8)^2+(y-6)^2+5(x+3y-26)=0,$$

即 $x^2+y^2-11x+3y-30=0$。

例 4　一椭圆的长短轴与坐标轴平行,与直线 $x+3y-26=0$ 切于 A(8,6),且经过 B(-2,-4)、C(-2,6)两轴,求此椭圆方程。

解　由于所求的椭圆长短轴与从坐标轴平行,所以点椭圆 A(8,6)的方程为 $(x-8)^2+n(y-6)^2=0$,则方程

$$[(x-8)^2+n(y-6)^2] + \lambda(x+3y-26)=0 \quad ①$$

表示和直线 $x+3y-26=0$ 切于点 A 的椭圆系,其中有两个参数 n 和 λ 待定。

分别以 B(-2,-4),C(-2,6)代入①

解得 $\lambda=10$,$n=3$,代入①,得所求椭圆方程为

$$(x-8)^2+3(y-6)^2+10(x+3y-26)=0,$$

即 $x^2+3y^2-6x-6y-88=0$。

6. 其它

曲线系的种类繁多,应用面也很广,下面就其在代数和平几方面再杂举数例以见一斑。

例 1　解方程组

$$\begin{cases}3x^2-y^2-4x-1=0, \\ x^2-2x-y=0。\end{cases} \quad ①$$

解　用消去法需要解一个一元四次方程

$$3x^2-(x^2-2x)^2-4x-1=0,$$

即　$x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$。

用分解因式的方法求它的根经常是困难的。

用曲线系的思想方法,我们立即想到方程组①同解于方程组

$$\begin{cases}(3x^2-y^2-4x-1)+\lambda(x^2-2x-y)=0 & ② \\ y=x^2-2x & ③\end{cases}$$

确定参数 λ,使②可以分解为两个一次因式之积——使②退化为两条直线。由

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0,$$

即 $\begin{vmatrix} 3+\lambda & 0 & -(2+\lambda) \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\lambda \\ -(2+\lambda) & -\frac{1}{2}\lambda & -1 \end{vmatrix}=0$，

亦即 $3+\lambda+(2+\lambda)^2-\frac{1}{4}\lambda^2(3+\lambda)=0$，

$\lambda^3-\lambda^2-20\lambda-28=0$，

$(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-14)=0$。

取 $\lambda=-2$，代入②式得

$x^2-y^2+2y-1=0$，

即 $(x+y-1)(x-y+1)=0$。

与③联立，解方程组

（i）$\begin{cases} x+y-1=0, \\ y=x^2-2x; \end{cases}$（ii）$\begin{cases} x-y+1=0, \\ y=x^2-2x。\end{cases}$

得四组解：

$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ y=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=(3\pm\sqrt{13})/2 \\ y=(5\pm\sqrt{13})/2 \end{cases}$

例 2 如果方程组

$\begin{cases} x^2+y^2-y=0, \\ ax^2+bxy+x=0。\end{cases}$

（1）有且只有二组不同的实数解，

（2）有且只有三组不同的实数解，

（3）有且只有四组不同的实数解，求实数系数 a、b 所满足的条件。

解 原方程组

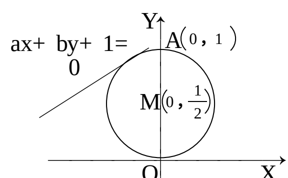
$\begin{cases} X^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \\ x(ax+by+1)=0 \end{cases}$

同解于下面两个方程组

（i）$\begin{cases} x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}, \\ x=0; \end{cases}$

（ii）$\begin{cases} x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}, & ① \\ ax+by+1=0。 & ② \end{cases}$

其中（i）有两组解 O(0,0) 与 A(0,1)，下面再对（ii）进行研讨（图）：



直线②不通过原的 O；

当$\begin{cases}a\in R\\ b=-1\end{cases}$时，

直线②不通过点 A(0,1)；

圆心 M(0,$\frac{1}{2}$)与直线②的距离

$$d\left|\frac{(\frac{1}{2}b+1)}{-\sqrt{a^2+b^2}}\right.,$$

因此：

(1)当直线②与圆①相离，即当 $d>\frac{1}{2}$或 $b>\frac{1}{4}a^2-1$ 时，(ii)无解；

又当直线②与圆①切于 A 点，即当$\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}$时，(ii)有唯一组解 A(0,1)，由于此解已包含在(i)的解之中，故当

$\begin{cases}a\in R,\\ b>\frac{1}{4}a^2-1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=0,\\ b=-1,\end{cases}$

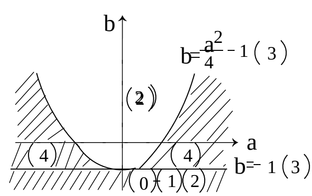
时原方程组有且只有二组不同的实数解(见图)。

(2)当直线②与圆①相切(切点不是 A)时，即当 $a\neq0$ 且 $d=\frac{1}{4}a^2-1$ 时，(ii)有且只有一组不与 A(0,1)或 O(0,0)重合的解。又当直线①通过 A(0,1)而与圆②不相切时，即当 $a\neq0$ 而 $b=-1$ 时，(ii)有唯一组不与 A(0,1)或 O(0,0)重合的解，故当

$\begin{cases}a\neq0,\\ b=\frac{1}{4}a^2-1,\end{cases}$或$\begin{cases}a\neq0,\\ b=-1,\end{cases}$

时原方程组有且只有三组不同的实数解。

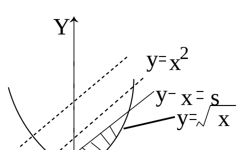
(3)当直线②与圆②相交而不过 A 点时，即当 $a\in R, b<\frac{1}{4}a^2-1(b\neq-1)$时原方
程组有且只有四组不同的实数解(如图，括号内数字表示解的个数)



例 3　求 $y-x$ 的最大值和最小值，其中、y 在由 $x^2=y$ 与 $y=\sqrt{x}$所决定的封闭区域内及其边界上取值。

解　设 $y-x=s$，则它是一族平行直线，而且 s 是其在 y 轴上的截距。欲求 s 的最大值，则由

$\begin{cases}y-x=s,\\ y=\sqrt{x}\end{cases}$有唯一解，得 $s=\frac{1}{4}$，即 $y-x$ 的最



大值等于$\frac{1}{4}$。

同法,由

$\begin{cases} y-x=s \\ x^2=y \end{cases}$有唯一解,可得 $y-x$ 的最小值等于 $-\frac{1}{4}$。

□“设而不求”在解题中的作用

根据具体问题,引进参数,对解题具有事半功倍的效果,它可简化计算及推理过程,使问题易于明朗化而得以解决。江西高安市杉林中学喻木荣老师介绍做法是

1. 设而不求在代数式的化简求值中可大大减少运算量

例 1　已知 $b-d=3$,$(a+b-c-d)^2+(a-b-c+d)^2=13$,求代数式$(a+b-c-d)(a-b-c+d)$的值。

解　注意到

$$b-d=\frac{1}{2}(a+b-c-d)-\frac{1}{2}(a-b-c+d),$$

设 $x=a+b-c-d$,$y=a-b-c+d$,

则 $x-y=2(b-d)=6$,

于是　$xy=\frac{1}{2}[(x^2+y^2)-(x-y)^2]$

$=\frac{1}{2}[13-6^2]=-\frac{23}{2}$。

2. 设而不求在数式分析方面使问题更直观

例 2　若 $A=\frac{5678901234}{6789012345}$,$B=\frac{5678901235}{6789012347}$。试比较 A、B 的大小。

解　设 $A=\frac{x}{y}$,则 $B=\frac{x+1}{y+2}$

于是　$A-B=\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}=\frac{2x-y}{y(y+2)}$,

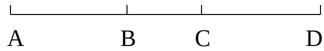
$2x>y$,, $2x-y>0$,又 $y>0$,

, $\frac{2x-y}{y(y+2)}>0$　即 $A-B>0$,

故 $A>B$.

3. 设而不求在几何问题代数化方面使问题清晰明朗

例 3　如果在一直线上顺次有四个点 A、B、C、D,则下列等式成立的是(　)。



(A) AD·BC + AB·CD = AC·BD,

(B) AD·BC - AB·CD = AC·BD,

(C) AB·BC + AC·CD = AC·BD,

(D) AB·BC - AC·CD = AC·BD。

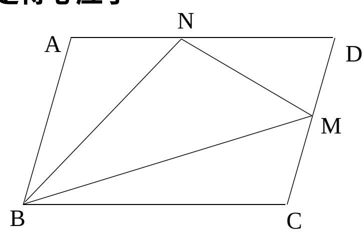
解 设 AB = a,BC = b,CD = c

则 AD·BC + AB·CD = (a + b + c) b + ac

$= ab + b^2 + bc + ac = b(a + b) + c(a + b)$

$= (a + b)(b + c)$ = AC·BD。**故选**(A)。

4. 设而不求在计算几何问题时更是得心应手



例 4 **如图** 1,M、N **分别是**▱ABCD **的边** CD、DA **上的中点,则** $S_{\triangle BMN} : S_{\triangle ABCD}$ = ( ).

(A) $\frac{1}{4}$,(B) $\frac{1}{3}$,(C) $\frac{3}{8}$,(D) $\frac{7}{16}$。

解 设 AB = b,BC = a,∠D = θ,**则**∠A = ∠C = 180° - θ.

易知 $S_{\triangle MND} = \frac{1}{8} ab\sin\theta$,

$S_{\triangle ABS} = S_{\triangle BCM} = \frac{1}{4} ab\sin\theta$,

$S_{▱ABCD} = ab\sin\theta$.

, $\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{▱ABCD}}$

$= \frac{S_{▱ABCD} - (S_{\triangle MND} + S_{\triangle ABS} + S_{\triangle BCM})}{S_{▱ABCD}}$

$= \frac{3}{8}$。

故选(C)。

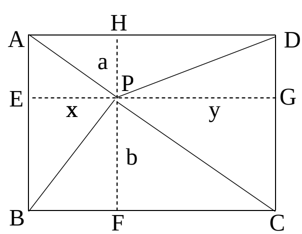


图 2

例 5 **点** P **为矩形** ABCD **内一点,且** PA = 3,PD = 4,PC = 5,**求** PB。

解 **如图** 2,**过点** P **作** EG∥AD,FH∥AB。**易知** PE⊥AB,PF⊥BC,PG⊥CD,PH⊥DA。**设** PE = x,PG = y,PH = a,PF = b,**根据勾股定理及题设,知**

$$\begin{cases} x^2+a^2=9, & (1)\\ a^2+y^2=16, & (2)\\ b^2+y^2=25, & (3)\end{cases}$$

由(3)-(2)得 $b^2-a^2=9$　　(4)

由(1)+(4)得 $x^2+b^2=18$，

即 $PB^2=18$，，$PB=3\sqrt{2}$。

以上几例表明，设而不求在计算和推理方面，大大简化了解决问题的繁杂过程，有助于提高解题速度和准确度。

□“设而不求”的作用(一)

平面解析几何研究的主要问题是：

(1)根据已知条件，求出表示平面曲线的方程；

(2)通过方程，研究平面曲线的性质。

我们学习了平面解析几何之后不难发现，在研究这两个主要问题时，经常会遇到有关两条曲线的交点问题，如果按传统的思维方法，通过解两曲线的方程组成的方程组求出交点坐标，再继续求解。这样会带来繁杂的运算，而且极容易出现错误。河南省南阳市第二十中学杨富生老师总结的方法是生先设出两条曲线的交点坐标，但不必求出，而是巧妙应用其它方法再将其消去，从而使曲线相交问题简单获解：

1. 应用曲线和方程的关系

在平面直角坐标系中，曲线的方程和方程的曲线有如下关系：

①曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

②以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点。

我们巧妙地应用曲线和方程的这种关系，常常可以使问题简化。

例 1 如图 1，已知直线 l 交椭圆 $16x^2+20y^2=320$ 于 M、N 两点，若点 B(0,4)是椭圆的一个顶点，且△BMN 的重心恰好位于椭圆的右焦点 F，求直线 l 的方程。

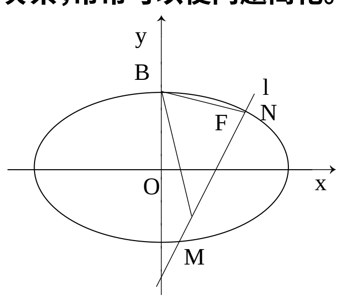


图 1

解 椭圆方程可化为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$，

，有焦点为 F(2,0)。

设 M、N 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，

由重心坐标公式，得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{3}=2,\\ \dfrac{y_1+y_2+4}{3}=0.\end{cases}$$ 即 $$\begin{cases}x_1+x_2=6,\\ y_1+y_2=-4,\end{cases}$$

又直线 l 交椭圆于 M、N 两点，故有

$16x_1^{\ 2}+20y_1^{\ 2}=320$， ①

$16x_2^{\ 2}+20y_2^{\ 2}=320$， ②

把 $x_1=6-x_2$，$y_1=-(y_2+4)$ 代入①，整理，得

$6x_2-5y_2-28=0$。 ③

把 $x_2=6-x_1$，$y_2=-(y_1+4)$ 代入②，经整理，得

$6x_1-5y_1-28=0$。 ④

由③和④可知，过 M、N 两点的直线 l 的方程为 $6x-5y-28=0$.

例 2　求证：两椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$ 的交点在以原点为圆心的圆周上。

证明　设 $P(x_0,y_0)$ 是两椭圆的交点，则

$b^2x_0^{\ 2}+a^2y_0^{\ 2}=a^2b^2$， ①

$a^2x_0^{\ 2}+b^2y_0^{\ 2}=a^2b^2$。 ②

① + ②，得 $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$，③

③式说明两椭圆的交点坐标必满足方程 $x^2+y^2=\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$。

因此，两椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$ 的交点在以原点为圆心，$\sqrt{\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$ 为半径的圆周上。

2. 应用斜率公式

我们知道，经过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的直线的斜率公式为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，这个公式在求弦的中点轨迹及与弦的中点或弦的斜率有关的二次曲线相交问题中，可以先设出交点坐标，然后巧妙应用斜率公式及中点坐标公式，便可获得简捷的解答。

例 3　在椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 中，求过点 $(2,1)$ 且被这点平分的弦所在的直线方程。

解　设弦的两端点为 P_1,P_2,他们的坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2)。

P_1,P_2 两点都在椭圆上,

$$\therefore \frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1, \quad ①$$

$$\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{4}=1。\quad ②$$

②-①,得$\frac{x_2^2-x_1^2}{16}+\frac{y_2^2-y_1^2}{4}=0$,即

$$\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{16}+\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{4}=0。\quad ③$$

把中点坐标 $x_1+x_2=4$,$y_1+y_2=2$ 及

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ 代入③式,得

$$\therefore k=-\frac{1}{2}。$$

由点斜式得所求直线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),$$

即 $x+2y-4=0$。

例 4　已知椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 和定点 $A(0,\frac{1}{2})$,求过 A 点的直线被椭圆截得的线段的中点的轨迹。

解　设过点 A 的直线方程为 $y-\frac{1}{2}=kx$,被椭圆截得的线段的两端点分别为 P_1、P_2,他们的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2),线段 P_1P_2 的中点 M 的坐标为(x,y)。

因为点 P_1、P_2 都在椭圆上,所以

$$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1, \quad ①$$

$$\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1。\quad ②$$

②-①,得$\frac{x_2^2-x_1^2}{2}+y_2^2-y_1^2=0$,

即　$(x_2+x_1)(x_2-x_1)+2(y_2+y_1)(y_2-y_1)=0$。　③

把中点坐标 $x_1+x_2=2x$,$y_1+y_2=2y$ 及$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ 代入③式,得 $2x+4ky=0$,

$$\therefore k=-\frac{x}{2y}。$$

把 $k=-\frac{x}{2y}$ 代入 $y-\frac{1}{2}=kx$ 中,得所求轨迹方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{x}{2y}\cdot x$,即 $x^2+2y^2-y=0$,化为标准方程是 $\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+\frac{(y-\frac{1}{4})^2}{\frac{1}{16}}=1$。

故所求轨迹是中心在 $(0,\frac{1}{4})$,焦点在直线 $y=\frac{1}{4}x$ 上,且长轴长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,短轴长为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆。

3. 应用韦达定理

对于直线与二次曲线相交所得弦的中点弦长等问题,都可巧妙应用韦达定理简捷求解。

例 5　给定双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$,过点 $B(1,1)$ 能否作直线 m,使点 B 为 m 与所给双曲线两交点间线段的中点,这样的直线是否存在,说明理由。

解 直线 m 显然不会与 y 轴平行,故可设直线 m 的方程为 $y-1=k(x-1)$,代入已知双曲线方程,整理,得

$$(2-k^2)x^2+2k(k-1)x-(k-1)^2-2=0。\quad ①$$

设直线 m 与双曲线的两交点为 Q_1、Q_2,它们的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2),那么 x_1、x_2 是方程①的两实根,由韦达定理,得

$$x_1+x_2=\frac{2k(k-1)}{k^2-2}。$$

依题意知 $B(1,1)$ 是 Q_1Q_2 的中点,故 $\frac{2k(k-1)}{k^2-2}=2$,

解得　　　　$k=2.$

又方程①有实根的充要条件是

判别式 $\triangle=4k^2(k-1)^2+4(2-k^2)[(k-1)^2+2]\geqslant 0$,解得 $k\leqslant\frac{3}{2}$,这与②矛盾。

故满足题设条件的直线 m 不存在。

例 6　已知椭圆 $Ax^2+By^2=1(A,B\in R^+)$ 的斜率为 -1 的诸平行弦的中点轨迹为线段 CD,又 CD 所在直线斜率为 $\frac{1}{2}$,$|CD|=\frac{\sqrt{10}}{3}$,求此椭圆的方程。

解 设斜率为 -1 的弦交椭圆于 P、Q,他们的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2),且 PQ 中点的坐标为 (x_0,y_0)。

因为平行弦的中点轨迹过椭圆中心，即线段 CD 过原点，所以 $\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}$。

又 P、Q 两点都在椭圆上，所以

$$Ax_1^2+By_1^2=1, \quad ①$$

$$Ax_2^2+By_2^2=1. \quad ②$$

②-①，得 $A(x_2^2-x_1^2)+B(y_2^2-y_1^2)=0$，整理，得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=-\frac{A}{B}$. ③

而 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$，$\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}$，代入③，得 $-\frac{1}{2}=-\frac{A}{B}$，即 $B=2A$，此时椭圆方程为

$$Ax^2+2Ay^2=1.$$

设直线 CD 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，代入④，得 $x^2-\frac{2A}{3}=0$，由韦达定理得

$$x_1+x_2=0,x_1x_2=-\frac{2A}{3}。$$

又 $|CD|=\frac{\sqrt{10}}{3}$，故 $|CD|=\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$

$\cdot|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{\frac{8A}{3}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$，

解得 $A=\frac{1}{3}$，从而 $B=\frac{2}{3}$。

因此，所求椭圆方程为 $x^2+2y^2=3$.

例 7　如图 2，已知抛物线 $y^2=4x$ 过焦点的弦 AB 被焦点分成长为 m、n 的两段，求证：$m+n=mn$。

证明　设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，代入已知抛物线的方程中，整理，得

$$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0。 \quad ①$$

设 A、B 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，则 x_1、x_2 是方程①的两根，由韦达定理得

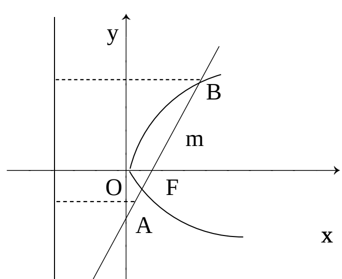
$$x_1x_2=1。$$

又由抛物线的定义知 $m=x_2+1$，$n=x_1+1$，所以 $m+n=(x_2+1)+(x_1+1)=x_1+x_2+2$. ②

$mn=(x_2+1)\cdot(x_1+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1$

$=x_1+x_2+2$。③

比较②、③两式，有 $mn=m+n$.



□“设而不求”的作用(二)

“设而不求”,顾名思义就是设出它而并不求出它。这种方法在解析几何中发挥了不小的作用。比如说,要求曲线与直线相交时所截得弦的长度,我们并不死板地解出这两交点的坐标,而是设出这两点的坐标,然后在方程中应用韦达定理而解出的。江苏省扬州中学学生吴明华老师介绍的不是这方面的用处,而是通过它来求直线的方程,请看下面的例子:

例1 由点 $P(x_0,y_0)$ 向一圆 $x^2+y^2=r^2$ 引切线,求两切点连线的方程。

解:设过点 P 的两条切线与圆相切于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 两点,则过 A 点的切线成为:$x_1x+y_1y=r^2$.

而这切线过 P 点,则有 $x_0x_1+y_0y_1=r^2$. ①

同样,过 B 点的切线方程为 $x_2x+y_2y=r^2$,因而有

$x_0x_2+y_0y_2=r^2$. ②

由①、②我们可以看到 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 满足方程 $x_0x+y_0y=r^2$,由平面几何知道,两点确定一条直线,故所求的直线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

例2 过椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 内一点 $P(-2,1)$ 所作的椭圆的弦被 P 点平分,求这弦所在的直线的方程。

解:设直线与椭圆交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由于 AB 中点为 $P(-2,1)$,则

$$\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=-2,\\ \frac{y_1+y_2}{2}=1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_2=-4-x,\\ y_2=2-y。\end{cases}$$

由 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 在椭圆上,得

$$\begin{cases}x_1^2+4y_1^2=16\\ x_2^2+4y_2^2=16\\ x_2=-4-x_1y_2=2-y_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^2+4y_1^2=16①\\ x_1^2+4y_1^2+8x_1-16y_1+16=0\lambda\end{cases}$$

②-①得 $8x_1-16y_1+32=0$,即 $x_1-2y_1+4=0$③

由于 x_1 与 x_2,y_1 与 y_2 可以轮换,如果消去 x_1,则同样可以得到关于 (x_2,y_2) 的方程为 $x_2-2y_2+4=0$, ④

由③、④知道,(x_1,y_1),(x_2,y_2) 满足方程 $x-2y+4=0$,故所求直线方程为 $x-2y+4=0$。

从上面两个例子可以看出：掌握了“设而不求”的方法，在解题中是有不少好处的。

□“设而不求”策略在解题中的运用（一）

在解析几何中，涉及曲线与直线相交时所截得弦的长度的问题，常需设出两交点的坐标，借助由直线方程和曲线方程形式的一元二次方程，利用韦达定理解之。这是一种在高考中常用的解题策略，河南省实验中学屠新民老师举例介绍了此类题目的解法。

例 1　由圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 向圆引切线，求两切点连线的方程。

解：设过点 P 的两条切线与圆相切于两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$。则过这两点的切线为

$x_1x+y_1y=r^2$， ①

$x_2x+y_2y=r^2$。 ②

又 P 点在上述两切线上，从而有

$x_0x_1+y_0y_1=r^2$， ③

$x_0x_2+y_0y_2=r^2$。 ④

由③、④可见，A、B 两点在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上。即由 A、B 两点确定的直线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$。

例 2　求以直线 $6x-3y-4=0$ 被抛物线 $y^2=6x$ 所截得的弦为直径的圆的方程。

解：设弦两端为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，以 AB 为直径的圆的方程为

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$。

即：$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$。

另一方面，由直线方程和抛物线方程可得

$y^2-3y-4=0$

得：$y_1+y_2=3$，$y_1y_2=-4$。

而 $x=y/2+2/3$

，$x_1+x_2=(y_1+y_2)/2+4/3=17/6$，

$x_1\cdot x_2=y_1y_2/4+(y_1+y_2)/3+4/9=4/9$。

故所求圆的方程为：

$x^2+y^2-17x/6-3y+4/9-4=0$，

即$(x-17/12)^2+(y-3/2)^2=125/16$。

例3　若直线 l 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$,交于 A、B 两点,且 $OA\perp OB$,点 O 在 l 上的射影为 D(2,1)。求抛物线方程。

解：$k_{OD}=1/2$,，$k_{AB}=-1$.

，l_{AB}:$y-1=-2(x-2)$

即 $y=-2x+5$,代入 $y^2=2px$ 得

$4x^2-2(10+p)x+25=0$

，$x_1+x_2=(10+p)/2$,$x_1x_2=25/4$。　　①

另一方面,$OA\perp OB$,可得

$x_1x_2+y_1y_2=0$,　　②

而:$y_1y_2=(-2x_1+5)(-2x_2+5)$

$=4x_1x_2-10(x_1+x_2)+25$,　　③

由①、②、③可得:$P=5/4$。

，抛物线方程为 $y^2=5x/2$。

例4　过椭圆 $x^2/16+y^2/4=1$ 内一点 P(-2,1)所作的椭圆的弦被 P 点平分。求这弦所在的直线方程。

解:设直线与椭圆交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由于 AB 的中点为 P(-2,1),则

$\begin{cases}(x_1+x_2)/2=-2\\(y_1+y_2)/2=1\end{cases}$,即$\begin{cases}x_2=-4-x_1\\y_2=2-y_1\end{cases}$。

由 A、B 在椭圆上,得

$x_1^2+4y_1^2=16$,$x_2^2+4y_2^2=16$。

即$\begin{cases}x_1^2+4y_1^2=16 & ①\\(-4-x_1)^2+4(2-y_1)^2=16 & \lambda\end{cases}$

② - ①得:$8x_1-16y_1+32=0$,

即:$x_1-2y_1+4=0$。　　③

由于 x_1 与 x_2,y_1 与 y_2 可以轮换,由对称性得:$x_2-2y_2+4=0$。　　④

故由③、④可知 A、B 两点的坐标满足方程 $x-2y+4=0$. 即所求直线方程为 $x-2y+4=0$.

例5　已知双曲线 C:$x^2-y^2/2=1$,过点 $A(\sqrt{3},0)$作直线 l 与双曲线 C 相交于 P、Q 两点,若 PQ 长等于 C 的实轴长的 3 倍。求 l 的倾角。

解:设 l_{PQ}:$y=k(x-\sqrt{3})$,P、Q 两点的坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2)。

将直线 PQ 的方程代入双曲线方程可得

$(2-k^2)x^2+2\sqrt{3}k^2x-3k^2-2=0$

，$x_1+x_2=-2\sqrt{3}k^2/(2-k^2)$,

$x_1 \cdot x_2 = -(3k^2+2)/(2-k^2)$。

将之代入弦长公式,得

$|PQ| = \sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}$

$=4(k^2+1)/|k^2-2| = 6$

解之,得:$k_1 = \pm 2\sqrt{2}$,$k_2 = \pm 2\sqrt{5}/5$。

故倾角为 $\theta = \text{arctg}2\sqrt{2}$。

或 $\theta = \pi - \text{arctg}2\sqrt{2}$或 $\theta = \text{arctg}(2\sqrt{5}/5)$

或 $\theta = \pi - \text{arctg}(2\sqrt{5}/5)$。

□“设而不求”策略在解题中的运用(二)

解数学题时,若能从大处着眼,设而不求,则可少走弯路或不走弯路,并能迅速地达到求解的目标,这种解题的策略思维,往往使常规思维很难解决的问题得到巧妙的解答。江苏王祥林老师作了如下分析:

例 1　已知直角三角形的周长为 $2+\sqrt{5}$,斜边上的中线为 1,求三角形的面积。

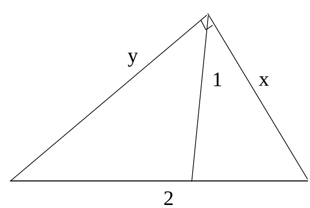
解:设两直角边分别为 x、y

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y+2=2\sqrt{5} \end{cases}$$

$x+y=\sqrt{5}$,$x^2+2xy+y^2=5$

$2xy=1$,$xy=\frac{1}{2}$,, $S_\triangle = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

评注:不求直角边 x、y 的数值,而求整体(xy)的值,从而使面积问题迅速得解。



例二:方程 $x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$的实根的积是多少?

解:令 $x^2+18x+45=t^2$

则 $t^2-15=2\sqrt{t^2}=2t(t\geqslant 0)$

$t^2-2t-15=0$

$(t-5)(t+3)=0$

$t\geqslant 0$,, $t=5(t=-3)$

, $5^2=x^2+18x+45$,即 $x^2+18x+20=0$

, $x_1\cdot x_2=20$

评注:用常规思维,则要求解无理方程,求出方程的所有实根,再求

其积。但若把$(x^2+18x+45)$看作一个整体，求得整体的值为25，得关于x的一元二次方程，从而用韦达定理使问题得解。

例三： 在▱ABCD中，AB=2，BC=4，对角线AC和BD所夹的角为45°，求此平行四边形的面积。

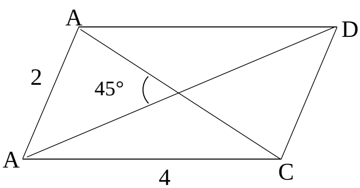
解：设AO=OC=x，BO=OD=y

由余弦定理得：

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos45°=4\cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-2xy\cos135°=16\cdots\cdots\lambda \end{cases}$$

②-①，得$xy=3\sqrt{2}$

，$S_{▱ABCD}=\frac{1}{2}(2x\cdot 2y)\sin45°=2xy\sin45°=6$



评注：本题若先求出x、y的值，再计算面积，则过程很繁，注意到(xy)的整体，则使计算简洁，迅速。

例四：某市有甲、乙、丙三个工厂，甲厂的产值是乙、丙厂产值的$\frac{4}{5}$；乙厂的产值是甲、丙两厂产值的$\frac{1}{2}$，求丙厂的产值是甲、乙两厂产值的几分之几？

解：设甲、乙、丙三厂的产值分别为：x、y、z。据题意，则有

$$\begin{cases} \frac{x}{y+z}=\frac{4}{5}\cdots\cdots ① \\ \frac{y}{x+z}=\frac{1}{2}\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①，②消去y，得$x=2_z$。再通过代入消去x，得$y=\frac{3}{2}Z$.

于是：$\frac{z}{x+y}=\frac{z}{2z+\frac{3}{2}z}=\frac{2}{7}$。

答：丙厂的产值是甲、乙两厂产值的$\frac{2}{7}$。

评注：本题难于求出x、y、z的具体数值，但注意到x、y均可用含z的代数式来表示，则问题就迎刃而解。

例五：队伍长2千米，通讯员从队尾赶到队首，到达后立即返回队尾，此时队伍已走了2千米，求通讯员走了多少千米？

解：把整个过程分为两部分：

(1)通讯员从队尾追到队首。

(2)通讯员从队首返回队尾。

设通讯员的速度为 u,队伍的速度为 v,

并设(1)中队伍前进了 x 千米。

则(1)中通讯员走了(2+x)千米。

由于双方所用的时间相等,则有

$$\begin{cases}\frac{2+x}{u}=\frac{x}{v}\cdots\cdots①\\ \frac{x}{u}=\frac{2-x}{v}\cdots\cdots②\end{cases}$$

由①,②得:$\frac{2+x}{x}=\frac{x}{2-x}$

$x=\pm\sqrt{2}$(舍去负值)。

∴ 通讯员走了$(2+2\sqrt{2})$千米。

评注 本题无需求出通讯员和队伍的速度 u、v。从①、②中消去含 u、v 的代数式,即得含 x 的分式方程,从而巧妙得解。

□设而不求的解题方法

设而不求就是在解题过程中,设出有助于解题的未知数,不求出其值,使问题获得解决的一种方法。四川省仁寿县教研室余立峰老师举几例说明了这种方法在解题中的巧妙应用。

例 1 有甲、乙、丙三种货物,若购甲 3 件,乙 7 件,丙 1 件共需 3.15 元。若购甲 4 件,乙 10 件,丙 1 件,共需 4.20 元。现购甲、乙、丙各 1 件,需多少元。(85 年全国初中数学竞赛题)

解:设购甲、乙、丙各 1 件需 x、y、z 元,由题设得方程组:

$$\begin{cases}3x+7y+z=3.15, & (1)\\ 4x+10y+z=4.20, & (2)\end{cases}$$

(1)×3-(2)×2 得 $x+y+z=1.05$。

答略。

例 2 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发,相向而行,二人在途中相遇后各以原速度前进,甲又经 2 小时 15 分钟到达 B 地,乙又经 4 小时到达 A 地。求二人行全程各需多少时间。

解 设甲、乙两人从出发到相遇需 x 小时,则甲行全程需$(x+\frac{9}{4})$小时,乙行全

程需(x+4)小时,又设甲、乙的速度分别为每小时 y、z 公里,由题意得方程组:

$$\begin{cases} y\left(x+\dfrac{9}{4}\right)=z(x+4), & (1) \\ \dfrac{\frac{9}{4}y}{z}=\dfrac{4z}{y}。 & (2) \end{cases}$$

由(1)得 $\dfrac{y}{z}=\dfrac{x+4}{x+\frac{9}{4}}$由(2)得$\dfrac{y}{z}=\dfrac{4}{3}$,

, $\dfrac{x+4}{x+\frac{9}{4}}=\dfrac{4}{3}$,解得 $x=3$。

, 甲行全程需 $x+\dfrac{9}{4}=5\dfrac{1}{4}$小时,乙行全程需 $x+4=7$ 小时。

例 3 解方程 $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$

解 设 $\sqrt[3]{x+1}=y$, $\sqrt[3]{x-1}=z$

则 $\sqrt[6]{x^2-1}=\sqrt{yz}$,$x+1=y^3$,$x-1=z^3$,

原方程变为 $y-z=\sqrt{yz}$, (1)

两边平方得 $y^2-2yz+z^2=yz$,

, $y^2+yz+z^2=4yz$, (2)

(1)×(2)得 $y^3-z^3=4yz\sqrt{yz}$

, $(x+1)-(x-1)=4\sqrt{x^2-1}$

即 $2\sqrt{x^2-1}=1$,解得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

检验知 $x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$是原方程的解。

例 4 一个直角三角形的用长是 $2+\sqrt{6}$。斜边上的中线长是 1,求这个三角形的面积。

解 设两直角边的长为 a、b,斜边为 C,面积为 S。

斜边上的中线长是 1

, C=2。由题意可得

$$\begin{cases} a+b+2=2+\sqrt{6}, & (1) \\ a^2+b^2=4, & (2) \\ S=\dfrac{1}{2}ab. & (3) \end{cases}$$

由(1)得　$a+b=\sqrt{6}$，

由(2)得$(a+b)^2-2ab=4$。

, $ab=\dfrac{(a+b)^2-4}{2}=1$,代入(3)得

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}。$$

例 5　求不超过$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$的最大整数。

解 :设$\sqrt{3}+\sqrt{2}=x$,$\sqrt{3}-\sqrt{2}=y$。

则$\begin{cases}x+y=2\sqrt{3},\\ xy=1.\end{cases}$, $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\ xy=1.\end{cases}$

, $x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3$

$=(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]$

$=10(10^2-3)=970$。

即　$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6=970$

$0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$

, $0<(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6<1$

, 不超过$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$的最大整数为 969。

□“不设而解”避繁就简的方法

解决复数问题时,应善于将题中有关复数整体处理,有时不设复数的代数形式或三角形式,反而能起到避繁就简、出奇制胜。

江苏海安县曲塘中学蒋建华老师从 91 年全国部分省市高考、预选与检测试题有关复数问题中摘取数例

3. 具体说明

例 1　设 i 是虚数单位,复数 z_1 和 z_2 满足 $z_1z_2+2iz_2-2iz_1+1=0$ 及 $\overline{z_1}-z_2=2i$。求 z_1 和 z_2 的值(91 年贵州省高考预选试题第 23 题)。

分析 :本题一般解法是将 $z_2=\overline{z_1}-2i$ 代入 $z_1z_2+2iz_1+1=0$ 得到 $z_1\overline{z_2}+2iz_1-4iz_1+5=0$ 后,设出 z_1 的代数形式 $z_1=x+yi(x、y\in R)$,化归为解关于 x、y 的方程组,进而相继求出 z_1、z_2。

现给出一种“不设而解”的独特解法。

解　将 $z_1z_2+2iz_2-2iz_1+1=0$“配积”,得

$(z_1+2i)(z_2-2i)=3$。　①

对 $\overline{z_1}-z_2=2i$ 两边取共轭得 $z_1+2i=\overline{z_2}$，代入①，得 $\overline{z_2}(z_2-2i)=3$，即 $|z_2|^2-3=2i\overline{z_2}$。②

对②两边取摸，得①$||z_2|^2-3|=2|z_2|$，进而求得 $|z_2|=1$ 或 $|z_2|=3$。分别代入②得：$z_2=-i$ 或 $z_2=3i$

再利用 $z_1-z_2=2i$ 便得

$\begin{cases}z_2=-i\\z_2=-i\end{cases}$ 或 $\begin{cases}z_1=-5i\\x_2=3i\end{cases}$。

例 2　已知 $z_1+z_2=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$，$|z_1|=|z_2|=1$，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 等于（ ）

（A）$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$；（B）$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$；

（C）$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$；（D）不确定。

（91 年海淀区试题）

分析 若据题设特点设出 z_1、z_2 的三角形式：$z_1=\cos a+i\sin a$，$z_2=\cos\beta+i\sin\beta$ 本题可以获解。以下另辟捷径，“不设而求”。

由题设有 $|z_1+z_2|=1$，又 $|z_1|=|z_2|=1$，

，$|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

$-|z_1+z_2|^2=3$，

，$\cos<Z_1OZ_2$

$$=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1-z_2|^2}{2|z_1|\cdot|z_2|}=-\frac{1}{2}$$

（其中 O 为原点，点 z_1、z_2 分别表示复数 z_1、z_2）。

，$\frac{z_1}{z_2}$ 的一个辐角为 $\frac{2\pi}{3}$ 或 $-\frac{2\pi}{3}$。

又 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1$，

，$\frac{z_1}{z_2}\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$

$=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选（B）。

例 3　已知 z_1、z_2 为非零复数，z_1+z_2 与 z_1-z_2 在复平面上对应的点为 A、B。若 $|OA|=|OB|$，求证：$\frac{z_1^2}{z_2^2}$ 为一个负数（上海市 91 年部分学校联合测试题）。

证　由 $|OA|=|OB|$ 得 $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$，即 $|z_1-z_2|^2=|z_1+z_2|^2$，亦即（z_1 -

$z_2)(\bar{z_1}-\bar{z_2})=(z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2})$

故得 $z_1\bar{z_2}=-z_2\bar{z_1}$，即

$\frac{z_1}{z_2}=-\overline{\left(\frac{z_2}{z_2}\right)}$。而$\frac{z_1}{z_2}\neq 0$，，$\frac{z_1}{z_2}$为纯虚数，从而$\frac{z_1^{\ 2}}{z_2^{\ 2}}$是一个负数。

此法"不设而证"，简捷明快，比利用 z_1、z_2 的代数或三角形式进行论证要优美得多。

例 4　已知 z_1、z_2 是两个给定的复数，且 $z_1\neq z_2$，它们在复平面上分别对应于点 Z_1 和 Z_2，如果 Z 满足方程 $|z-z_1|-|z-z_2|=0$，那么 z 对应的的点 Z 的集合是（ ）

(A) 双曲线；

(B) 线段 Z_1Z_2 的垂直平分线；

(C) 椭圆；

(D) 分别过 Z_1、Z_2 的两条相交直线。

（91 年湖南、海南、云南三省高考题）

分析 据复数的几何意义，$|z-z_1|=|z-z_2|$可直译为"点 Z（动点）到点 Z_1 和 Z_2（定点）距离相等"，故点 Z 的集合是线段 Z_1Z_2 的垂直平分线，故应选(B)。倘若设出 z、z_1、z_2 的代数形式，虽可获解，但将导致繁锁。

例 5　设复数 Z 满足等式 $|z-i|=1$，且 $z\neq 0$，$z\neq 2i$，又复数 a 使得$\frac{w}{w-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}$为实数。问复数①在复平面上所对应的点的集合是什么图形。并说明理由（91 年上海市高考试题第 25(2) 题）。

分析 本题难度较大，不易迅速作出判断。在寻求思路时，人们一般都着眼于同时设出 25w 的代数形式或同时设出 z 与 ω 的三角形式，设法分离实部与虚部，最终利用$\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}$虚部为 0 而得解。但不少同学将因字母繁多、运算繁杂而归于失败。这里笔者提供一种新颖别致、避免假设的解法。

解　欲使$\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}\in R$，必有。

$$\overline{\left(\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}\right)}=\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}(*)$$

1°若 $\omega=0$，则(＊)式显然成立，符合题意；

2°若 $\downarrow\neq 0$，则(＊)即为

$$\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{\omega+2i}{\omega}=\frac{z+2i}{z}\cdot\frac{z}{z-2x}=\frac{|z|^2+2ix}{|z|^2-2ix}$$

$|z-i|=1$，，$|z-i|^2=1$，即

$(z-i)(z+i)=1$，$zz=\bar{z}i-zi$ 由此得$|z|^2+2iz=i(z+\bar{z})$，此必为纯虚数（　$z\neq 0$）。

$\because \frac{|z|^2+2iz}{|z|^2-2iz}=\frac{|z|^2+2iz}{(|z|^2+2iz)}=-1$。9 从而

$\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{\overline{\omega}+2i}{\overline{\omega}}-1$。故得 $=\omega\overline{\omega}+2\omega i$

$=-\omega\overline{\omega}+2\overline{\omega}i$,即 $\omega\overline{\omega}+\omega i-\overline{\omega}i=0$

"配积",得 $(\omega-i)(\overline{\omega}+i)=1$,即 $|\omega-i|^2=1$,

$\because |\omega-i|=1$.

又由 $z\neq0, z\neq2i$ 知 $\frac{\omega}{\omega-2i}\cdot\frac{\omega+2i}{\overline{\omega}}=\frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}}\cdot\frac{z}{z-2i}\neq0$,

$\because \downarrow\neq0, \overline{\downarrow}\neq-2i$。即 $\downarrow\neq0, \downarrow\neq2i$.

故综合 1°、2°知,复数 ω 满足 $|\omega-i|=(\downarrow\neq2i)$.

$\because$ 复数 ω 对应的点 Z 构成的图形是以点(0,1)为圆心、1 为半径的圆(除法点(0,2))。

从以上列举的各道试题来看,在探求有关复数问题的解题思路时,有关复数和代数或三角形式,应仔细考察题设条件的结构特征,能否不设有关复数的代数式或三角形式而充分运用复数的有关概念,共轭复数与模的性质、复数的几何意义及'配积'技巧等进行灵活的变形与转化,使问题得到解决、当别无它路时,可再考虑设而求解之法。

□不等式方法在解题中的应用

方程思想是中学数学中一种重要的解题思想,其实质是把一个数学问题化归为方程问题处理。方程和不等式有着密切的联系,那么类似地,对某些数学问题能否也化归为不等式问题处理呢?答案是肯定的。我们把其个数学问题化归为不等式问题处理的解题思想称之为"不等式思想"。数学中数量关系的不等相对于相等更为广泛,数学问题中明显或隐含存在着大量的不等关系,这就为我们用不等式思想处理问题提供了契机。事实上,很多数学问题用这一思想处理是行之有效的。依据常见题型分类举例,对这一解题思想江苏省海门市教研室杜平老师作了探讨。

1. 求值问题

处理有些求值问题,可先构造不等式(组),寻求所求值的范围,从中确定具体值。

例 1 设有一列数:$8\times0+1, 8\times1+1, 8\times2+1, 8\times3+1\cdots, 8\times2000+1$。试问

在这一列数中,有多少个平方数?

解 :由平方数的性质知,在形如 $8n+1$ 的整数中,含有所有奇数的平方数。设这一列数中有 m 个平方数,则第 m 个平方数一定是 $(2m-1)^2$,由题意确定 m 可转化为讨论不等式组:

$$\begin{cases}(2m-1)^2\leqslant 8\times 2000+1,\\(2m+1)^2>8\times 2000+1.\end{cases}$$

, $\begin{cases}m(m-1)\leqslant 4000,\\m(m+1)>4000.\end{cases}$ 解之得 $m=63$.

所以这一列数中有 63 个平方数,它们是 $1^2,3^2,5^2\cdots,125^2$。

例 2　将奇数 1、3、5、7…由小到大按第 m 组有 $(2m-1)$ 个奇数进行分组,第 1 组为 1 个数{1},第 2 组为 3 个数 {3,5,7},第 3 组为 5 个数 {9,11,13,15,17},…,第 m 组有 $(2m-1)$ 个奇数,试问 1993 是第几组中的数?(1991 年全国高中数学竞赛题)

解 :设 1993 是第 m 组中的数,易知 $1+3+5+\cdots+(2m-1)=m^2$,所以第 m 组的最后一个数是第 m^2 个奇数,它为 $2m^2-1$,而第 $m-1$ 组的最后一个数是 $2(m-1)^2-1$,由题意得

$$\begin{cases}2m2-1\geqslant 1993,\\2(m-1)^2-1<1993.\end{cases}$$

, $\begin{cases}m2\geqslant 997,\\(m-1)^2<996.\end{cases}$

由于 m 为自然数,, $m=32$,即 1993 是第 32 组中的数。

2. 最值问题

例 3　若 $x=5$,问 $(5+x)^n$ 展开式中第几项有最大值?

解 :设展开式中第 $r+1$ 项有最大值,则 $T_{r+1}\geqslant T_{r+2}$,$T_{r+1}\geqslant T$,

, $\begin{cases}C_{15}\cdot 5\geqslant C_{15}^{r+1}\cdot 5^{r+1}\\C_{15}\cdot 5\geqslant C_{15}^{r-1}\cdot 5\ r-1\end{cases}$

即 $\begin{cases}\dfrac{1}{15-r}\geqslant\dfrac{5}{r+1},\\\dfrac{5}{r}\geqslant\dfrac{1}{16-r}。\end{cases}$

, $\dfrac{37}{3}\leqslant r\leqslant\dfrac{40}{3}$。

$r=13$,则展开式中第 14 天项取得最大值。

例 4　定长为 3 的线段 AB 的两端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动。设线段 AB 的中

点为 M**,求点** M **到** y **轴的最短距离,并求此时点** M **的坐标。**(1987 **年全国理科高考题**)

解 设 A、B **的坐标分别是**(x_1,y_1)、(x_2,y_2),AB **中点** M **的坐标为**(x,y).

AB=3,

, $3^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(y_1{}^2-y_2{}^2)^2$

$+(y_1-y_2)^2=(y_1-y_2)^2[(y_1+y_2)^2+1]$。

, $4x=2(x_1+x_2)=2(y_1{}^2+y_2{}^2)=(y_1-y_2)^2+[(y_1+y_2)^2+1]-1\geqslant2$ $\sqrt{(y_1-y_2)^2[(y_1+y_2)^2+1]}-1=5$**,等号成立的条件是**$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2+1$ $=3$**,进而易得出点** M **的坐标为**$(\frac{5}{4},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$。

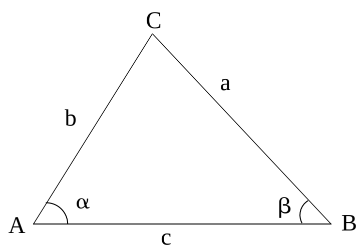
3. 证明等式问题

若证明等式 A=B **成立,可转化为如下两类问题:**

(Ⅰ)证明由不等式 A>B **与** A<B **都将导致矛盾;**

(Ⅱ)证明不等式 A≥B **与** A≤B **同时成立。**

例 5 **设** $\alpha,\geqslant\in(0,\frac{\pi}{2})$,$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$**,求证** $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。(**第** 17 **届全苏中学生奥林匹克赛题**)



证明: 一方面。 $\sin^2 a+\sin^2\beta=\sin(a+\beta)\leqslant1$,

, $\sin^2 a\leqslant1-\sin^2\beta$**,即** $\sin a\leqslant\cos\beta=\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)$,

而 $a,\frac{\pi}{2}-\geqslant\in(0,\frac{\pi}{2})$,, $\leqslant\alpha\ \frac{\pi}{2}-\beta$,

, $\alpha+\geqslant\alpha\ \frac{\pi}{2}$。

另一方面。 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\geqslant\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2(\pi-\alpha-\beta)$**,而** α、β、$\pi-\alpha-\beta$ **可构成某**△ABC **的三个内角。由正、余弦定理得** $\cos(\pi-\alpha-\beta)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geqslant0$,, $\pi-\alpha-\geqslant\alpha\ \frac{\pi}{2}$**,即** $\alpha+\not\geqslant\beta\ \frac{\pi}{2}$.

综上两方面结果,必有 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。

4. 范围问题

数学中表示范围通常借助不等式,因此范围问题与不等式有着密切的联系。

例 6　**求函数** $y=\frac{\sin x-1}{\sin x+1}(0\leqslant x\alpha\ \frac{\pi}{2})$**的值域。**

解 把 $y=\frac{\sin x-1}{\sin x+1}$**变形,得** $\sin x=\frac{1+y}{1-y}$.

$0\leqslant x\alpha\ \frac{\pi}{2}$,

, $0\leqslant \sin x\leqslant 1$,, $0\leqslant\frac{1+y}{1-y}\leqslant 1$。

解之得 $-1\leqslant y\leqslant 0$,, **所求的值域为**$[-1,0]$.

例 7　**已知** $\sin^2x-(2a+1)\sin x+a^2=0$ **有实数解,求** a **的取值范围。**

解 设 $y=\sin x$,**则** $y^2-(2a+1)y+a^2=0(y\in[-1,1])$.

令 $f(y)=y^2-(2a+1)y+a^2$,**由根的分布知识得,原问题可转化为:**

$$f(-1)f(1)\leqslant 0,\text{或}\begin{cases}f(-1)\geqslant 0,\\ f(1)\geqslant 0,\\ \triangle\geqslant 0,\\ -1\leqslant\frac{2a+1}{2}\leqslant 1.\end{cases}$$

进而有$(1+2a+1+a^2)(1-2a-1+a^2)\leqslant 0$,

$$\text{或}\begin{cases}1+2a+1+a^2\geqslant 0,\\ 1-2a-1+a^2\geqslant 0,\\ (2a+1)^2-4a^2\geqslant 0,\text{解得} -\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 2.\\ -1\leqslant\frac{2a+1}{2}\leqslant 1.\end{cases}$$

从而当 $-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 2$ **时,原方程有解。**

5. **不定方程问题**

解不定方程时,可引进关于未知数的不等式,先把未知数紧缩在较小的范围内,在此基础上再求解。

例 8 **某人** 1995 **年的岁数正好等于他出生年份的数字之和,这个人在** 1995 **年是几岁?**

解 这个人出生年份数字之和不会超过 $1+9+9+9=28$,**则可设此人出生于** $19\overline{ab}$,**据题意得**$(1+9+a+b)+(1900+10a+b)=1995$,**整理得** $11a+2b=85$,**用不等式思想解此不定方程如下:**

$0\leqslant b\leqslant 9$,, $11a\leqslant 85\leqslant 11a+18$,

, $6\frac{1}{11}\leqslant a\leqslant 7\frac{8}{11}$。

a、b 均为非负整数，

，只能取 $a=7$，$b=4$，故此人出生于 1974 年，1995 年他 21 岁。

例 9　设 a、b 都是自然数，当 a^2+b^2 除以 $a+b$ 时商为 q，余数为 r，寻找所有自然数对 (a,b)，使得 $q^2+r=1977$。（第 19 界国际数学奥林匹克试题）

解　$q^2+r=1977$，，$q^2\leqslant 1977$，$q\leqslant 44$；

下面证明只能有 $q=44$.

若 $q<44$，则 $r\geqslant 128$，且 $\frac{1}{2}(a+b)^2\leqslant a^2+b^2$

$\leqslant q(a+b)+r\leqslant 44(a+b)$，

，$a+b\leqslant 88$，与 $r\geqslant 128$ 矛盾。

当 $q=44$ 时，$r=41$.

且 $a^2+b^2=44(a+b)+41$，

即 $(a-22)^2+(b-22)^2=1009$。

若 $a\geqslant b$，则 $(a-22)^2\geqslant 500$，从而

$45\leqslant a\leqslant 53$。

再经验算得 $a=50$，$b=37$ 及 $a=50$，$b=7$ 两组解，由对称性知，还有另两组解 $a=37$，$b=50$ 及 $a=7$，$b=50$。

□解不等式的数学思想方法

1. 解不等式的数学思想方法系统

解不等式通常是根据不等式的同解原理或函数单调性进行同解变形，例如，把超越不等式同解变形为代数不式（组），把代数不等式中的无理不等式同解变形为有理不等式，对有理不等式中的分式不等式同解变形为整式不等式，对整式不等式中的高次不等式化成一元一次（二次）不等式（组），对于绝对值不等式变成不含绝对值符号的不等式，等等。这些同解变形体现发转化变换的数学思想，并且通过分类讨论、换元、利用单调性等基本数学方法来实现；另外，解不等式也常通过图形背景，利用数形线合实现等价变形。我们可以这样建立解不等式的思想方法系统：解不等式体现了转化变换的数学思想，分类讨论、换元、数形结合，利用单调性等基本数学方法受到这一思想的支配，并且渗透在各种类型不等式的解题之中，从而形成一个由数学思想、数学方法和教材知识组成的数学思想方法系统。

2. 几种重要思想方法的运用

(1)分类讨论解不等式。　**分类讨论法的实质是根据不等式自身的意义和隐含条件进行划分讨论,分各类情况求解不等式,如一元二次不等式、分式不等式、无理不等式、高次不等式、绝对值不等式、含参变量不等式中都包含丰富的分类讨论的思想方法。**

例1　**解不等式** $x^2-5x+6<0$.

分析:$x^2-5x+6<0 \iff (x-3)(x-2)<0$,可见$(x-3)$和$(x-2)$是一正一负,以此划分讨论,将不等式变为$\begin{cases}x-3>0,\\x-2<0\end{cases}$或$\begin{cases}x-3<0,\\x-2>0,\end{cases}$然后求解。

例2　**解不等式** $x>\frac{1}{x}$。

分析:解此不等式的关键是要将分式符合去掉,变为整式不等式,途径之一:$x>\frac{1}{x} \iff \frac{x^2-1}{x}>0$,可见分子 x^2-1 和分母 x 是同正或同负,以此划分讨论,将不等式变形为$\begin{cases}x^2-1>0,\\x<0,\end{cases}$或$\begin{cases}x^2-1<0,\\x>0,\end{cases}$然后求解;途径之二:将此不等式两边同时乘以 x 可以去掉分式符号,但要以 x 的正负性划分讨论,$x>\frac{1}{x} \iff \begin{cases}x>0,\\x^2>\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\x^2<1.\end{cases}$然后求解。

例3　**解不等式** $\sqrt{4-x}>x-2$.

分析:不等式的右边 $x-2\geqslant 0$ 和 $x-2<0$ 都可能,解此不等式须两边同时平方去根号,但当 $x-2\geqslant 0$ 时,两边平方后不等式方向不变,当 $x<0$ 时不等式恒成立,以此可划分讨论,将不等式变为

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\4-x>(x-2)^2,\\4-x\geqslant 0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-2<0,\\4-x\geqslant 0,\end{cases}\text{然后求解。}$$

例4　**解不等式** $|x^2-x-2|>x$.

分析:解此不等式关键是去绝对值符号。途径之一:不等式右边 $x\geqslant 0$ 和 $x<0$ 均可能,以此划分讨论:将不等式化为$\begin{cases}x\geqslant 0,\\-x<x^2-x-2<x\end{cases}$或 $x<0$,然后求解;途径之二:根据$|x^2-x-2|=\begin{cases}x^2-x-2(\text{当 } x^2-x-2\geqslant 0),\\-x^2+x+2(\text{当 } x^2-x-2<0)\end{cases}$划分讨论,将不等式变为$\begin{cases}x^2-x-2\geqslant 0,\\x^2-x-2>x\end{cases}$或$\begin{cases}x^2-x-2<0,\\-x2+x+2>x,\end{cases}$然后求解。

例5　**解关于** x **的不等式** $(m+1)x^2-4x+1\leqslant 0$.

分析:m 是参变量,二次项系数 $m+1=0$,$m+1>0$,$m+1<0$ 均有可能,后两种情况下,$\triangle=12-4m$ 也可能大于 0、小于 0 或等于 0,于是关于 m 有零点 -1 和 3,它们将实数集划分成五个区间①$m<-1$;②$m=-1$;③$-1<m<3$;④$m=3$;⑤$m>3$,以此划分,可解不等式。

以上各例都是由分类讨论实现解不等式的同解变形的。

(2)换元法解除不等式。 换元法就是把字母或关于字母的解析式用另外的字母或解析式来表示的方法。

例 6 解关于 x 的不等式 $\log x^2 a>\log_a{}^2 x$.

分析:$\log x^2 a>\log_a{}^2 x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_x a>\frac{1}{2}\log_a x\Leftrightarrow\frac{1}{\log_a x}>\log_a{}^2 x$。换元:令 $t=\log_a x$,则 $\frac{1}{t}>t$,解得 $0<t<1$ 或 $t<-1$,所以原不等式变形为 $0<\log_a x<1$ 或 $\log_a x<-1$,然后求解。

例 7 解不等式 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x^2}{1+x^2}>0$。

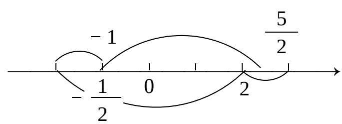
分析:本题若转化成无理不等式去根号,则须进行复杂的讨论。若用换元法则简单得多。令 $x=\operatorname{tg}a\left(-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$,则原不等式变为 $2\sin^2 a-\sin a-1<0$,解得 $-\frac{1}{2}<\sin a<1$,则 $-\frac{\pi}{6}<a<\frac{\pi}{2}$,, $x=\operatorname{tg}a>-\frac{\sqrt{3}}{3}$。

(3)数形结合解不等式。 数形结合就是借助于图形或图象来解决代数问题的方法。

用此法求解不等式,不仅能获得一些精巧的简捷的解题思路,且有益于沟通不等式、函数、解析几何之间的纵横联系,提高运用知识的灵活性,开拓发散性思维。

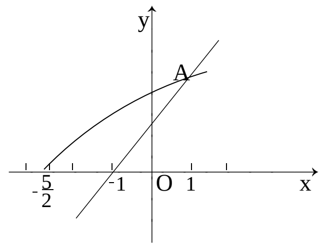
例 8 解不等式 $|x-2|+|x+1|<4$.

分析:方程 $|x-2|+|x+1|=4$ 的解在数轴上是到点 2 和 -1 的距离之和等于 4 的点 $\frac{5}{2}$ 或点 $-\frac{3}{2}$(如右图)。



由图形可知,数轴上$\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$内所有的点到点 2 和 -1 的距离之和均小于 4,在$\left(-\ \ ,-\frac{3}{2}\right)\mathrm{U}\left(\frac{5}{2},+\ \ \right)$内的点到点 2 和 -1 的距离之和大于 4,所以不等式的解为 $-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$。

例 9　**解不等式** $\sqrt{2x+5}>x+1$.　　**分析：在同一坐标系中作出函数** $y=\sqrt{2x+5}$ **和** $y=x+1$ **的图象(如右图),它们交于点** $A(2,3)$ **由图象可知当** $-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 2$ **时,** $y=\sqrt{2x+5}$ **的图象在** $y=x+1$ **的图象上方,即** $\sqrt{2x+5}>x+1$ **;当** $x>2$ **时,反之,故原不等式的解为** $-\frac{5}{2}\leqslant x<2$。



□运用不等导等法解题

所谓不等导等法是利用已知的不等式(如平均值不等式、三角不等式、复数模不等式及柯西不等式等)中等号成立的条件或两边夹定理(若 $B\leqslant A\leqslant B$ **,则** $A=B$ **),通过由不等导出相等,从而充分揭示问题中的隐含条件,使问题获解,这种解题方法称为不等导等法。它既是中学数学中常用的数学方法,又是解决某些数学问题的简捷方法。四川开江普安中学邓光发老师作了如下例析：**

【例 1**】　解方程：**

$|3x-2|+|3x+1|=3.$

解　原方程变形为

$|x-\frac{2}{3}|+|x+\frac{1}{3}|=1$。

设 $A(\frac{2}{3},0)$ 、$B(-\frac{1}{3},0)$ 、$P(x,0)$ **,则** $|PA|+|PB|\geqslant|AB|=1$。

当且仅当点 P **在点** A **与点** B **之间时等号成立。**

, **原方程的解为** $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$。

在不等式 $F\geqslant G$ **中,根据等号成立之条件,可确定不等式中所含变元的值。这是解决某些数学问题的简捷方法。**

【例 2**】　解方程：**

$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y-z}{2}$。

解　逆用平均值不等式,有

$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}$

$$\leqslant \frac{x+1}{2}+\frac{(y-1)+1}{2}+\frac{(z-2)+1}{2}=\frac{x+y+z}{2}。$$

当且仅当 $x=1, y-1=1, z-2=1$ 时等号成立。, 原方程的解为 $x=1, y=2, z=3$。

有些问题虽是相等问题,但由题设及平均值不等式推得一个新的不等式,其两边恰是题中等号的两边,这时只要根据平均值不等式取等号成立的条件便能使问题获解。

【例3】 解方程

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+25x^6}=\sqrt{9+x^2+10x^4+25x^6}\,(x\in R)。$$

解 根据复数模的性质,有

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+25x^6}\\&=|1+ix|+|2+5ix^3|\\&\geqslant|3+i(x+5x^3)|\\&=\sqrt{9+(x+5x^3)^2}\\&=\sqrt{9+x^2+10x^4+25x^6}。\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{5x^3}{2}$,

即 $x=0, x=\pm\frac{1}{5}\sqrt{10}$ 时等号成立。

, 原方程的解为 $x=0, x=\pm\frac{1}{5}\sqrt{10}$。

【例4】解方程 $\sqrt{11-2\sin x-\cos^2 x}+\sqrt{5-2\sin^3 x+\sin^6 x}=6-2\cos^2 x-\sin^4 x$。

解 设 $f(x)=\sqrt{11-2\sin x-\cos^2 x}+\sqrt{5-2\sin^3 x+\sin^6 x}$,

$g(x)=6-2\cos^2 x-\sin^4 x$。

$$f(x)=\sqrt{(\sin x-1)^2+9}+\sqrt{(\sin^3 x-1)^2+4}\geqslant 5,$$

$$g(x)=5-(\sin^2-1)^2\leqslant 5。$$

，**当且仅当** $\sin x-1=\sin^3x-1=\sin^2x-1=0$**，即** $x=2kx+\frac{\pi}{2}(k\in z)$ **时等号成立，这时** $f(x)=g(x)$。

，**原方程的解为** $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in z)$。

【例5】 已知 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 4$**，解方程：**$(x-1)^2+(\frac{y}{x}-1)^2+(\frac{z}{y}-1)^2+(\frac{4}{z}-1)^2=4(\sqrt{2}-1)^2$。

解 根据柯西不等式和平均值不等式，有

$$(x-1)^2+(\frac{y}{x}-1)^2+(\frac{z}{y}-1)^2+(\frac{4}{z}-1)^2$$

$$=\frac{1}{4}(1^2+1^2+1^2+1^2)[(x-1)^2+(\frac{y}{x}-1)^2+(\frac{z}{y}-1)^2+(\frac{4}{z}-1)^2]$$

$$\geqslant\frac{1}{4}[(x-1)+(\frac{y}{x}-1)+(\frac{z}{y}-1)+(\frac{4}{z}-1)]^2$$

$$=\frac{1}{4}(x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{4}{z}-4)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{4}4(\sqrt[4]{x\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{4}{z}}-4)^2$$

$$=4(\sqrt{2}-1)^2。$$

当且仅当 $x=\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{4}{z}$**，并注意到** $a\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 4$**，即** $x=\sqrt{2}$**，**$y=2$**，**$z=2\sqrt{2}$ **时等号成立。**

，**原方程的解为**

$x=\sqrt{2}$，$y=2$，$z=2\sqrt{2}$。

【例6】求三个实数 x,y,z**，使得它们同时满足下列方程：**

$xy+yz+zx=-1$，

$x^2+5y^2+8z^2=4$。。

解 ，$(y-z_2)^2+(x+2y+z_2)^2\geqslant 0$，

，$x^2+5y^2+8z^2\geqslant -4(xy+yz+zx)=4$。**当且仅当** $y-2z=0$，$x+2y+2z=0$ **并**

注意到 $xy+yz+zx=-1$,即 $x=\frac{3}{2}$,$y=-\frac{1}{2}$,$z=-\frac{1}{4}$时等号成立,这时 $x^2+5y^2+8z^2=4$。

, 所求三个实数为

$x=\frac{3}{2}$,$y=-\frac{1}{2}$,$z=-\frac{1}{4}$。

【例 7】 已知 a、b、$c\in R^+$,且 $a^3+b^3+c^3=24$,求证:$a+b+c\leqslant 6$。

分析 易知 $a^3=b^3=c^3=8$,即 $a=b=c=2$ 时,所证不等式等号成立。在应用不等式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc(a,b,c\in R^+)$时,顾及到等号成立的条件,则有如下的证明,

$a^3+2^3+2^3\geqslant 3\cdot a\cdot 2\cdot 2=12a$,

, $a\leqslant\frac{a^3+16}{12}$

同理 $b\leqslant\frac{b^3+16}{12}$,$c\leqslant\frac{c^3+16}{12}$。三式相加,得 $a+b+c\leqslant\frac{a^3\cdot b^3\cdot c^3+48}{12}$

$=\frac{24+48}{12}=6$。

当且仅当 $a=b=c=2$ 时等号成立,

等号成立的条件对证明不等式能起导向作用。基本不等式等号成立的条件具有潜在的运用功能,它能在不等式与等式的互化中架设桥梁,能为解题提供信息,开辟捷径。

【例 8】 实数 x,y,z 满足下列方程

$x^2-yz-8x+7=0$ (1)

$y^2+z^2+yz-6x+6=0$ (2)

求 x 的取值范围。

分析:由题设和待求问题,为我们提供了把已知等式转化为不等式的信息。又因为方程(2)中存在有 y^2,z^2 和 yz 三项,所以隐含了等与不等的关系:$y^2+z^2\geqslant 2yz$。这就为把等式转化为不等式提供了条件。于是就有如下的解法:

解 由(2)和利用 $y^2+z^2\geqslant 2yz$,有

$6x=y^2+z^2+yz+6\geqslant 2yz+yz+6$,

, $6x\geqslant 3yz+6$ (3)

又由(1),得 $yz=x^2-8x+7$ (4)

(4)代入(3),并整理得

$x^2-10x+9\leqslant 0$。

解得 $1\leqslant x\leqslant 9$。又 $y^2+z^2\geqslant 2yz$ 中等号成立的条件为 $y=z$,

, 现只须考察答案是否相等。将 $y=z$ 代入原方程,当 $x=1$ 时,则 $y=z=0$;当

$x=9$ 时,则 $y=z=4$。

, 所求 x 的取值范围为 $1\leqslant x\leqslant 9$。

实践表明,把握等式与不等式之间的互化,作为一种数学方法,若能处置适宜,则既能找到解题捷径,又能提高思维素质。

【例 9】设 n 次多项式 $f(x)=ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+C_{n-2}x^2-n^2bx+b$ 有 n 个正根,求这些根。

解　设 $f(x)$ 的 n 个正根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,根据韦达定理,有

$x_1+x_2+\cdots x_n=1$,

$\cdots\ \cdots\ \cdots$,

$x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_3\cdots x_n+x_2x_3\cdots x_n$

$=(-1)^{n-1}\left(\frac{-n^2b}{a}\right)$,

$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\ \frac{a}{b}$。

从而 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{Xn}=n^2$。

根据柯西不等式,有 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_n}\right)\geqslant(1+1+\cdots 1)^2=n^2$。

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ 时等号成立。

, 所求的这些根为 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$。

人为地构造出符合某个已知不等式形式的等式,再利用已知不等式中等号成立的条件,导出相等,这种手法技巧性强,值得学习。

【例 10】　在数列 $\{a_1,a_2,\cdots\}=\{1,3,3,3,5,5,5,5,5,\cdots\}$ 中,每个奇数 k 出现 k 次,设有整数 p,q,r 存在,对所有正整数 n,满足 $a_n=P[\sqrt{n+q}]+r$,其中符号 $[x]$ 表示为超过实数 x 的最大整数,求 $p+q+r$ 的值。

解　由数列 $\{a_n\}$ 的定义知,对 $m\in N$,当 $1+3+5+\cdots+[2(m-1)-1]+n\leqslant n\leqslant 1+3+5+\cdots+(2m-1)$,即 $(m-1)^2+1\leqslant n\leqslant m^2$ 时,则有 $a_n=2m-1$。

由 $(m-1)^2+1\leqslant n\leqslant m^2$,得

$m\leqslant\sqrt{n-1}+1\leqslant\sqrt{m^2-1}+1<m+1$。

, $m=[\sqrt{n-1}+1]$

$=[\sqrt{n-1}]+1$

于是 $a_n=2([\sqrt{n-1}]+1)-1$

$=2[\sqrt{n-1}]+1$。

, $p+q+r=2+(-1)+\ =2$ 为所求。

【例 11】 已知 $a_1=5$,$a_i(i=1,2,\cdots)$ 都是自然数,满足条件 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 及 $a_i+a_i=2a_i(i=1,2,\cdots)$,求 a_n 及 a_{1998}。

解 先计算 n 个特殊值:$a_1=1+4$;$a_6=a_{1+ai}=2a_1=10=6+4$;$a_{16}=a_6+a_6=2a_6=20=16+4$,…,由此猜想 $a_n=n+4(n\in N)$。

下面用数学归纳法证明之:

当 $n=1$ 时显然成立,假设 $a_n=n+4$,则 $a_{2n+4}=2a_{=}n2(n+4)=(2n+4)+4$。

由于 $n+4=a_n<a_{n+1}<a_{n+2}<\cdots<a_{2n+4}=(2n+4)+4$,, $a_{n+1}=(n+1)+4$.

从而 $a_n=n+4$ 对所有自然数 n 都成立。

, $a_{1998}=1998+4=2002$ 为所求。

这里运用不等关系及自然数的性质,导出相等,思路巧妙,耐人寻味。

□元素的过渡与集中的思想方法

在一些立几计算题中,显然反映各元素关系的图形比较清楚明确,但由于元素相对分散,难以把关系体现在同一个基本图形内,所以往往无法直接下手。此类题型需要对相关元素牵线搭桥,在进行过一番由分散到集中的过渡后,问题才比较容易解决。上海市宝山中学何放予老师作了如下例举。

例 1 如图 1,在三棱锥 P-ABC 中,PA=PB=PC,∠PAB=∠ABC=a,AC⊥BC,求 a 的大小。

分析 由 PA=PB⇒∠PBA=∠PAB=a,角 a 分别散见在△PAB 和△ABC 中,从任一个三角形中都无法直接求出 a。注意到两个三角形的公共元素 AB,设 AC=a,可以先在 Rt△ABC 中用 a、a 关系式表示 AB,再从△PAB 中求得 a.

略解 在 Rt△ABC 中有 $AB=\dfrac{a}{\sin a}$,在等腰△PAB 中有 $\dfrac{a}{\sin a}=\dfrac{AB}{\sin(\pi-2a)}$,从中消去得 $\sin 2a=1$,即 $a=45°$。

找两图形的公共元素是一种有效的方法,公共元素起过渡作用,就必须能够体现出某个相关图形中那些分散着的元素关系,再把这种关系通过自身作用向基本图形过渡和集中。

例 2 如图 2,在三棱锥 V-ABC 中,∠BVC=90°,AB=AC,顶点 V 在底面 ABC 上射影 H 为△ABC 的垂心,二面角 V-AB-C 为 60°,求二面角 V-BC-A

的大小。

分析 在体现两个二面角数值关系的图形△VAE 和△VCD 中,公共元素为两三角形所在平面的交线 VH,由于 VH 在 Rt△VCD 中“集中”了 60°和 VC 的关系,而 VC 的关系可以在△VBC 中过渡到 VE 上,所以最后在基本图形 RT△VHE 中由 VH、VE 可求得∠VEH。

略解 H 为垂心,

， AE⊥BC,即知∠VEA 为所求角,由 AE⊥BC,AB=AC⇒E 为 BC 中点,由 VE⊥BC,∠BVC=90°⇒等腰 Rt△ABC。易证 VC⊥面 VAB,

， 在 Rt△VCD 中,设 VC=a,则 $VH=VD\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,在等腰 Rt△VBC 中,

$VE=\frac{\sqrt{2}}{2}VC=\frac{\sqrt{2}}{2}a\Rightarrow\angle VEA=45°$。

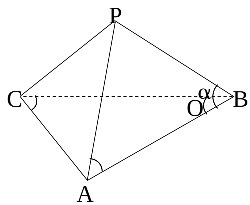


图 1

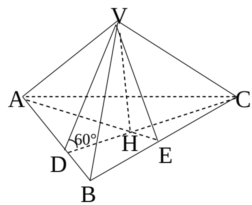


图 2

仅从上两例容易得到一种错觉,认为找公共元素就是找元素关系过渡的唯一途径,试看:

例 3 如图 3,在正四棱锥 P-ABCD 中,相邻侧面所成角的大小为 a,求侧面与底面所成角的大小。

分析 相邻侧面所成角与侧、底面所成角如图 3 所示在△BDE 和△POF 中,由于这两个平面的交线远离着各元素关系,所以这个公共元素再也无法承担△PBC 中的元素关系相对集中,有可能找到过渡关系。事实上,投底边 AB=a,则∠PFO 可被元素 OF(含 a)、PF 表出,BE 在△BDE 中可被 BD(含 a)、a 用余弦定理表出,而侧面△PBC 上又有△PFC∽△BEC 的条件,易沟通 PF、BE 等诸多关系,所以最终在两者中起过度作用的是两三角形的相似。

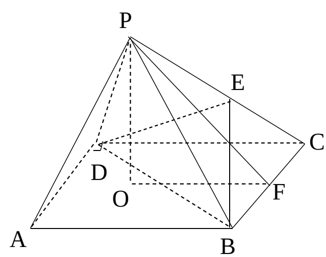


图 3

略解 作 BE⊥PC,连结 DE,则△BEC≌△DEC⇒∠BED=a,取 BC 中点 F。连 OF,则∠PFO 为所求角,

在△POF 中,$PF=\frac{a}{2\cos\angle PFO}$;

在△BDE 中,$BE=\frac{a}{\sqrt{1-\cos a}}$;

由△PFC∽△BEC,$\Rightarrow\frac{BE}{PF}=\frac{EC}{FC}$,

由 $EC=\sqrt{a^2-BE^2}=a\cdot\frac{\sqrt{-\cos a}}{\sqrt{1-\cos a}}\Rightarrow\frac{a\sqrt{1-\cos a}}{}\cdot\frac{2\cos\angle PFO}{a}=\frac{a\cdot\sqrt{-\cos a}}{\sqrt{1-\cos a}}$

$\cdot\frac{2}{a}\Rightarrow\cos\angle PFO=\sqrt{-\cos a}$,

, $\angle PFO=\arccos\sqrt{-\cos a}$。

由上述几例可以看出,元素比较分散时一般应考虑通过过渡达到相对集中,起过渡作用的可以是某个公共元素,也可是某种能沟通元素关系的图形(例如相似形等),集中后的元素关系最终在某个基本图形中发挥作用。

□探索性演绎及其在解题中的作用

1. 从分析法谈起

分析法是探索活动的利器,很多颇费周折的问题,利用执果索因的分析法,即可迎刃而解。

例 1 试证明定义在 R 上的任一函数 f(x)都可以表示为一个偶函数 g(x)和一个奇函数 q(x)的和。

这是一个存在性命题,关键在于构造出合乎要求的偶函数 g(x)与奇函数 q(x),我们使用分析法。

从结论出发,假设偶函数 g(x)与奇函数 q(x)与奇数 q(x)满足

$f(x)=g(x)+q(x)$ ①

则有 $f(-x)=g(-x)+q(-x)$

$f(-x)=g(x)-q(x)$ ②

从①、②中解出 g(x)、q(x)

$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$

$q(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$。

这样我们就找到了合乎要求的 g(x)、q(x);从而完成了构造的任务。这个

任务正是通过分析法所指示出的信息完成的。

稍加分析可以看出,执果索因的分析法之所以成为探索的有力工具,就在于这种探索能卓有成效地发挥问题的结论对解题过程的指向作用,从而使探索有了明确的方向,为逻辑推理提供了一个支点,可以说,分析法的优越性全来自题目中的‘果’。但是,如果题目中没有给出‘果’,分析法仍然有用武之地吗?为此,江苏省扬州中学张乃达老师介绍了一种新的探索方法____探索性演绎法。

在问题没有给出结论时,我们可以先猜出一个结论,进而再利用分析法来探索解题途径。

例 2 试问曲线系 L

$3x+(\lambda-2)y+(2\lambda-1)=0$

$(\lambda\in R)$具有什么性质?

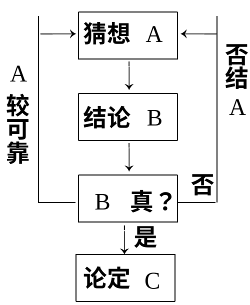
我们可以先猜出它可能具有的性质,比如可以从特殊化开始。

分别令 $\lambda=0,1,2,-1,-2$ 等值,在同一坐标系中出作出它们的图像,进而通过观察,得到曲线系过定点的猜想,剩下的是再验证再猜想。在这里,直觉思维以明显的形式介入了探索活动,这样的探索方法可称为探索性演绎法。

探索性演绎法又能被称为合情推理,这是建立在猜想基础上的推理,和逻辑推理相比,它具有如下特点。

第一,在探索性演绎法中,推理的前提不仅仅是已知的事实或已确定的命题,而且可以是直觉的猜想。因此,在逻辑推理以前探索性演绎法还有一个通过直觉猜出结果的时序。

第二,反馈性,可以根据推理结果修正、发展、否定或者肯定推理前提(即猜想),从而使推理的过程富有弹性,能辩证地推进。



右图是探索性演绎法推理的示意图,由猜想 A 出发,推得 B,若 B 假,则否定猜想 A 若 B 真,则可以说 A 较为可靠,进而通过推理发掘发隐含的信息 C。

探索性演绎法是非常有用的方法,它广泛地应用于数学发现活动之中,比如,非欧几何的发现就是从怀疑第五公设开始的,而对第五公设的怀疑,正是人们的一种猜想。

例 4 求和 $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$

$+\cdots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{N^2+N+1}$

我们先设法猜出结果,注意到

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}1)=1$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3})=\dfrac{1+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=2$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7})$

$=\operatorname{tg}(\operatorname{arcta}2+\operatorname{grctg}\dfrac{1}{7})=3$。

……

可以猜想,原式等于 $\operatorname{arctg}(N+1)$。

有了结果,分析法立刻就有了用武之地,比如可以用数学归纳法证或“拆项相消法”证明上述结论。

应该指出,作为探索性演绎法推理基础的猜想,不一定是正确的,由错误的猜想展开的演绎推理,照样可以提供有益的信息,以便探索者从错误中发现正确的道路,这可能正是探索性演绎法的力量之所在。

3. 中途点

在解决复杂问题时,由于解决问题的路程漫长而曲折,结论对问题的定向作用就相对地减弱了。这时,为了解决探索活动中的定向任务,就须正确确定解题过程中的中途点。

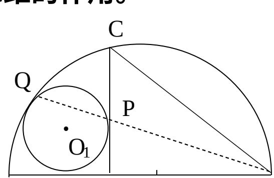
例如,为了证明命题若 A 则 B,如果找到中途点 M,则原命题就被分解为“若 A 则 M”与“若 M 则 B”,中途点 M 起着重要的定向作用,可以说,中途点是探索过程中的路标与灯塔。当然,中途点有时不只是一个。

$\boxed{A}\longrightarrow\boxed{M}\longrightarrow\boxed{B}$

条件　　　中途点　　　结论

中途点不一定是逻辑推断的结果。它也可能来自直觉的猜想,这时的中途点是对解题进程的一种估计,我们把它称为“合情中途点”。利有探索性演绎法,合情中途点可以起到分解问题,进行定向思维的作用。

例 4　已知 AB 为半圆 O 的直径,C 为半圆上一点,$CD\perp AB$,QO_1切半圆于 Q,切 CD 于 P,切 AB 于 R。　求证:BC = BR。



分析:作图观察,发现 Q、P、B 可能共线。于

是提出 Q、P、B 共线为中途点的猜想。

$\boxed{\text{题设}} \to \boxed{\text{Q、P、B 共线}} \to \boxed{BC = BR}$

这样问题分解为两个子问题。

①由已知⇒Q、P、B 共线；

②由 Q、P、B 共线⇒BC⇒BR。

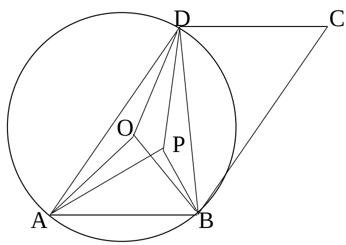
由于 Q、P、B 共线只是一种猜想，因此，探索过程中的推理都是探索性演绎法的应用。

例 5　在平行四边形 ABCD 中，△ABD 是锐角三角形，AB = a，AD = 1，∠BAD = a 以顶点 A、B、C、D 为圆心，作半径为 1 的四个圆 K_A、K_B、K_C、K_D，证明当且仅当 $a \leqslant \cos a + \sqrt{3}\sin a$①时，四个圆能覆盖平面四边形。

这里仅对充分性的证明进行探索。即当 $a \leqslant \cos a + \sqrt{3}\sin a$ 时，四个圆把四边形 ABCD 覆复盖。

(命题 I)

利用覆盖的定义，命题 I 可转换为等价命题 II；当 $a \leqslant \cos a + \sqrt{3}\sin a$ 时，平行四边形 ABCD 任一点(包括边上的点，下同)P 到四个顶点的距离不能大于 1。



(图 2)

考虑到平行四边形的对称性，命题 II 又可转换为等价的命题 III：

当 $a \leqslant \cos a + \sqrt{3}\sin a$ 时，△ABD 内的点 P 到三个顶点的距离 PA、PB、PD 不可能都大于 1。

由于 P 点具有任急性，我们先考虑特殊点，例如△ABD 的内心、垂心、重心等等，直觉告诉我们，由于外心 O 到三个顶点的距离相等(图 2)命题 III 可能转化为命题Ⅳ和 V。

命题Ⅳ，当 $a \leqslant \cos a + \sqrt{3}\sin a$ 时，△ABD 的外心 O 到三顶点以距离不大于 1，即证明△ABD 的外接圆半径 $R \leqslant 1$.

命题 V，证明任意三角形的任一点到三顶点的距离不可能全大于外接圆半径 R。

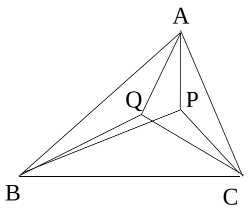
这实际上，是找到了一个合情中途点。

$\underset{A}{\boxed{\text{题设}}} \to \underset{M}{\boxed{R \leqslant 1}} \to \underset{B}{\boxed{\text{结论}}}$

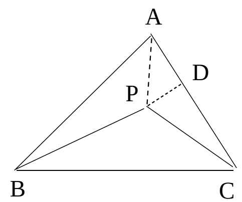
命题Ⅳ是容易证明的。而命题 V 是否正确尚无定论，因此，下面的分析都属于探索性演绎法的应用。

为了证Ⅴ,我们把它一般化,证明命题Ⅳ:若Q是△ABC内的一点,则在三角形ABC内,不可能存在点P,使$PA>QA$,$PB>QB$,$PC>QC$同时成立(图3)

显然,命题Ⅴ只是Ⅵ的特例,这时可能联想到一个过去解决过的问题(辅助问题A)。



(图 3)



(图 4)

问题 A,若 P 是△ABC 内一点,则有 PB + PC < AB + AC,(见图 4)

对照命题Ⅵ,进行逆向思考,对辅助问题 A 进行交换,提出命题Ⅶ :若 PA < AB,PC < AC,则 P 必在△ABC 的内部。

如果Ⅶ正确,则Ⅵ的正确性是容易证明的。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}PA > QA\\PB > QB\end{array}\right\}\Rightarrow Q\text{ 在}\triangle BPA\text{ 内部}\\\left.\begin{array}{l}PB > QB\\PC > QC\end{array}\right\}Q\text{ 在}\triangle BPC\text{ 内部}\end{array}\right\}$$

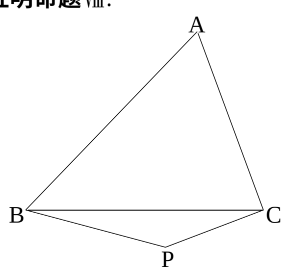
⇒矛盾⇒命题Ⅵ成立。

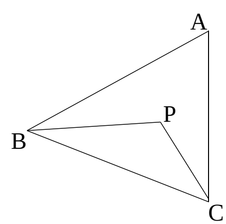
可是在证明Ⅶ时发生了困难,进一步观察发现Ⅶ不成立,如图 5,PB < AB,PC < AC,而 P 并不在△ABC 的内部。

思考 :由Ⅶ的错误,是否可以说明Ⅵ错误?

重新检查由∠　Ⅵ的过程,我们能否从 P 点既不在△BQA 的内部,也不在△BQC 的内部,更不在△AQC 的内部而推出矛盾呢?

为此只须证明命题Ⅷ.





(图 5)　　(图 6)

命题Ⅷ,若 PB < AB,PC < AC,则 A 点必在△PBC 的外部(图 6)

命题Ⅷ显然比命题Ⅶ弱,但是由它仍然可以推出Ⅵ。

命题Ⅷ是不难证明的,只须由辅助问题 A,利用反证法即可解决,这们我们找到了证明充分性的具体思路。

辅助问题 A $\xrightarrow{\text{反证法}}$ 命题∈ $\xrightarrow{\text{反证法}}$ 命题Ⅵ

$\to \left.\begin{array}{l}\text{命题Ⅴ}\\ \text{命题Ⅳ}\end{array}\right\} \to$ 命题 Ⅲ $\to$ 命题Ⅱ $\to$ 命题Ⅰ

在本例中,使用了多种探索方法,关键是使用了探索性演绎法。

探索性演绎法是一种逻辑和直觉相结合的探索方法,直觉为演绎提供动力,指示方向,而演绎推理不仅起着验证直觉的作用,而且逐步揭示出隐藏的信息,为新直觉的产生提供条件,由于直觉的注入,使探索性演绎法增加了活了,产生了更大的威力,成为探索活动中的利器。

□中途点理论与方法在解题中的应用

在论述如何解题、如何导向数学发现时,世界数学大师波利亚(G·Polya)强调‘ 不断地变换你的问题 ”、“ 我们必须一再地变化它,重新叙述它,变换它,直到最后成功地找到某些有用的东西为止 ”,他认为,解题过程也就是问题变换的过程。

我们在解题时,往往需要把一个难度较大的大型综合命题进行纵向分解,分解成一串系列题,使这串系列题中的每一个“ 前一题 ”成为其后面一题的条件,满足这一规定的这一串系列题也就是解题理论中所谓的‘ 中途点 ”。这是一个具有生动形象有生活含义背景的解题方法用语,其原型为,由点 A 可通点 P_1,由点 P_1 可通 P_2,…,由 P_{n-1} 可通 P_n,由 P_n 可通点 B,则 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 即为由 A 到 B 的一系列‘ 中途点 ”,把它们依次串起来 :$A\to P_1\to P_2\to\cdots\to P_{n-1}\to P_n\to B$ 即得到从点 A 到点 B 的一条通道,引伸到解题研究之中,从题设条件到解出结果往往也需要寻求途径的中间站(中途点)作为跳板。而每前进一步,实质上就是解决由此大题纵向分解所得系列题中的一个,整个解题过程就表现为设计出这样的一串中途点,然后循此完成从条件到结论的步步推进。由于从条件 A 到结论 B 的通道可能不止一条,由于构成通道的必要条件是步步皆通,所以寻求中途点必须从猜测可能的中途点 P_1、P_2…开始,选择便于顺利完成‘ 从 A 到 P_1 ”或从 P_1 到 B ”这两条半通道中至少一条的那些‘ 准中途点 ”P_i 先行尝试,看其能否最终构成从 A 到

B 的通道,能够同时完成‘从 A 到 P_1”与从 P_1 到 B”的 P_1 即为所求的中途点。在解题前有意识地做好设计寻找中途点。在解题中交代清楚相邻中途点间的变换递进关系,在解题后复查这一串中途点间联系的科学性、可行性,一定会增强求解由多科或多种知识组成的综合题的目的性和策略性,取得较好的效果;命题设计者则可通过中途点理论的研究和应用更为明确化、有的放矢地构造出符合考查意图的理想命题。

江苏省宜兴市中学　吴乃曦、蒋定群老师就中途点理论应用于解题实践略举数例,作了说明:

先看两个简单的例子。

例 1　设方程 $x^2+2kx+4=0$ 的两实根为 x_1x_2,若 $(\frac{x_1}{x_2})^2+(\frac{x^2}{x^1})^2\geqslant 3$ 成立,求 k 的取值范围。

分析根据题设所给信息,易于发现下列中途点 $P_i(i=1,2)$:

p_1:已知方程有实根,k 应满足什么条件?

显然,由 $\triangle=4k^2-16\geqslant 0$ 可得 $k^2\geqslant 4$　①

p_2:方程两根 x_1、x_2 与 k 有何种关系?

由韦达定理可得 $x_1+x_2=-2k,x_1x_2=4P_3$:题设不等式须如何转化为关于 k 的不等式?

显然必须依靠 $x_1+x_2=-2k,x_1x_2=4$ 转化,但原不等式左边并非 x_1+x_2、x_1x_2 的形式,于是又有

P_4:如何将 $(\frac{x_1}{x_2})^2+(\frac{x_2}{x_1})^2$ 表为 $f(x_1+x_2,x_1x_2)$

根据配方法连续变换可得

$$(\frac{x_1}{x_2})^2+(\frac{x_2}{x_1})^2=\frac{x_1{}^4+x_2{}^4}{(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1{}^2+x_2{}^2)^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}$$

$$=\frac{[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x^2)^2}$$

p_5 将 $x_1+x^2=-2k,x_1x_2=4$ 代入上式即得一关于 k 的不等式,解此所得与①之交即为所求 k 的范围。

由 $\frac{(4k^2-8)^2-32}{16}\geqslant 3$

得 $k^2\geqslant 2+\sqrt{5}$ 或 $k\leqslant 2-\sqrt{5}$　②

由①、②得　$k^2\geqslant 2+\sqrt{5}$,所以

$k\in[\sqrt{2+\sqrt{5}},+\quad)\cup(-\;-\quad,\sqrt{2+\sqrt{5}}]$

例 2 设 A、B 是复平面上的两个点集,$A=\{Z \mid z\bar{z}+3i(\bar{z}-z)+5=0, x\in c\}$,$B=\{\omega \mid \omega=2iz, z\in A\}$ 若 $z_1\in A$,$z_2\in B$,求 $|z_1-z_2|$ 的最大值和最小值。

分析 将此代数问题映射成几何问题,即为求曲线 A 上的点与曲线 B 上的点之间距离最大值与最小值,由此可设置中途点如下:

P_1 求出点集 A 的轨迹图形

设 $z=x+yi(x、yR)$,则由 $zi+3i(i-z)+5=0$ 得 $x^2+y^2+3i(-2yi)+5=0$,即 $x^2+(y+3)^2=4$ 所以 A 的图形是以 $(0,-3)$ 为圆心,2 为半径的圆。

P_2 求出点集 B 的轨迹图形。

由 $\omega=2iz$、$z\in A$ 可知 ω 的对应点是受制于 z 的对应点的运动的,由"转移法"可得:

设 $\omega=x'+y'i(x'、y'\in R)$,则有 $x'+y'x2i(x+yi)=-2y+2xi$

$$, \begin{cases} x'=-2y \\ y=2x \end{cases} \text{即} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}y' \\ y=-\dfrac{1}{2}x' \end{cases}$$

代入 $x^2+(y+3)^2=4$ 即得 $(x'-6)^2+y'^2=16$

, B 的图形是以 $(6,0)$ 为圆心,4 为半径的圆。

P_3 当两个动点 Z_1、Z_2 分别在圆 $x^2+(y+3)^2=4$ 和 $(x-6)^2+y^2=16$ 上运动时,求此两点间距离的最大、最小值。

解此问题,以借用平几结论为好!

因为两圆的圆心距 $\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}>2+4$,所以两圆外离,由此得

$|z_1-z_2|_{最大}=\sqrt{45}+6=3\sqrt{5}+6$,

$|z_1-z_2|_{最小}=3\sqrt{5}-6$。

从上述两题的分析求解可以看出,合理分解和设置中途点可以使解题思路清晰明快、解题程序富有节奏和层次感,有利于纠正部分学生解题时不作整体构思,而是想一步走一步,思路偏杂偏乱的不良倾向,坚持作这样的长期训练,易于培养学生周密思考、慎重下笔的良好习惯。再讨论几例:

例 3 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点在直线 $y=x-1$ 上滑动,对称轴作平行移动,试问:能否滑到使抛物线截直线 $y=\dfrac{1}{2}x+4$ 所得的弦长与截 y 轴所得的弦长相等?若能,求出此时的抛物线方程;若不能,试说明理由。

解 (P_1:据题设条件表出抛物线方程为以下讨论所必须)设抛物线滑动时,其焦点坐标为 $(a,a-1)$,则其顶点坐标为 $(a-1,a-1)$。所以抛物线方程为

$$(y+1-a)^2=4(x+1-a) \quad ①$$

(P_2:当抛物线与 y 轴相交时,其弦长多大?试用 a 表示之)。在①中令 $x=0$,整理得

$$y^2+2(1-a)y+(1-a)^2-4(1-a)=0 \quad ②$$

设抛物线与 y 轴交于点 $A(0,y_1)$、$B(0,y_2)$

则当 $\Delta=4(1-a)^2-4(1-a)^2+16(1-a)>0$，即 $a<1$ 时，得

$|AB|=|y_1-y_2|=4\sqrt{1-a}$

(P_3：当抛物线与直线 $y=\frac{1}{2}x+4$ 相交时，所得弦长多大，试用 a 表示之)。将 $y=\frac{1}{2}x+4$ 代入①式并整理得

$$x^2+4(1-a)x+4(a^2-6a+21)=0$$

设直线 $y=\frac{1}{2}x+4$ 与抛物线交于两点 $C(x_1',x_2')$、$D(x_2',y_2')$. 则当 $\Delta'=16(1-a)^2-16(a^2-6a+21)>0$，即 $a>5$ 时，得

$|CD|=\sqrt{[1+(\frac{1}{2})^2][(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=4\sqrt{5(a-5)}$

(P_4：能否找到适当的 a 值，使 $|AB|=|CD|$？)

由 $|AB|=|CD|$ 得 $\sqrt{1-a}=\sqrt{5(a-5)}$，解之得 $a=\frac{13}{3}$ 但此时，$\sqrt{1-a}$ 与 $\sqrt{5(a-5)}$ 均无意义，故满足条件的抛物线不存在。

注 就本题而言，由于抛物线与 y 轴相交时，须有 $a\in(-\infty,1)$，抛物线与直线 $y=\frac{1}{2}x+4$ 相交时，须有 $a\in(5,+\infty)$，而 $(-\infty,1)\cap(5,+\infty)=\varnothing$，故不存在 a 值能使抛物线同时与 y 轴、直线 $y=\frac{1}{2}x+4$ 相交，似可不必按上解中设置的四个中途点串联递进，但就一般规律而言却必须如此。

通过上述讨论，我们不难看出，设计中途点的过程实质上就是为了更好地突出关键步骤，增强解题的目的性和规范性。在具体解题时，虽然并不需要象求解文中例题那样把每一个中途点都明确地书写出来，但在每一个解题者的心目中是应该有着这样一个总体的解题框架的，做不到这一点也就难以达到思路清晰、解证有据、层次分明的解题效果，对于一部分尚未时入解题的“自由王国”的人来说，有意识地“迫使”他们按照设计好中途点后再循序渐进的模式进行一定时间、一定数量的强化训练，是有积极的长远意义的。

□选点法及其在解题中的应用

高中《解析几何》课本第 33 页介绍了“选点法”，它是选择两点求

直线型经验公式的一种方法。“选点法”是中学数学中常用的一种方法,扬州市鲁讯中学　张世俊老师说明了选点法在解题中的应用。

例1　若 $a\in R$,试证方程 $3x^2-2ax+a-1=0$ 必有一实根在区间$(0,1)$内

分析　为证明本题,只需要区间$[0,1]$上找出两点,使 $f(x)=3x^2-2ax+a-1$ 的函数值为异号。

计算:$f(0)=a-1$,$f(1)=2-a$。

由于当 $a\neq1$ 时,$a-1$ 与 $1-a$ 异号;

当 $a\neq2$ 时,$2-a$ 与 $a-2$ 异号,

可见,解决这一问题有下述两种方法:

方法一,在$[0,1]$内选一点,使该点处的函数值为 $1-a$ 的正数倍$(a\neq1)$。

方示二,在$[0,1]$内选一点,使该点处的函数值为 $a-2$ 的正数倍$(a\neq2)$。

以方法一为例,$f(x)=3x^2-2ax+a-1$

$=x(3x-2a)+a-1$,$f(0)=a-1$,

$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{a-1}{3}$,当 $a\neq1$ 时它们的值异号,

, 原方程在区间$\left(0,\frac{2}{3}\right)$内必有实数根,从而在区间$(0,1)$内有实根。

而当 $a=1$ 时,原方程为 $3x^2-2x=0$,两实根为 0 和$\frac{2}{3}$,而$\frac{2}{3}\in(0,1)$,结论也成立。

(方法二证法雷同,留给读者练习)

例2　若 a、b、p、$q\in R$,试求关于 x 的恒等式:$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x2+px+q)^{10}$中 p、q 的值。

分析　比较 x^{20}项的系数,可得:

$2^{20}-a^{20}=1$。　(1)

再通过适当‘选点”,找出 a,b,p,q,的另三个可解的关系式,联列解得。

显然,当 $x=0$ 时,可得:

$1-b^{20}=q^{10}$　(2)

又当 $x=\frac{1}{2}$时,可得:

$$-\left(\frac{a}{2}+b\right)^{20}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p+q\right)^{10}$$

利用实数性质,即得:

$\frac{a}{2}+b=0$　(3)

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p+q=0$　(4)

解由(1)-(4)组成的方程组,得

$$\begin{cases} p=-1 \\ q=\frac{1}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} p=0 \\ q=-\frac{1}{4}。 \end{cases}$$

□试验法在解题中在解题中的运用

试验法朴素、直观,其关键是通过科学分析,缩小试验范围。它在解答各种数学题中应用是十分广泛的。据笔者所知,此法在教与学两方面并未受到应有的重视。芜湖市安徽师大附中袁金老师结合例题探讨了试验法在解题教学中的有关功能。

1.用于猜测,培养学生观察能力和直觉思维能力

例1 如果自然数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 满足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$,那么 x_5 的最大值是______________.(1988 年全国初中数学联赛题)

许多学生的答案是通过直观试验猜测得出的(当 $x_1=x_2=x_3=1$,$x_4=2$ 时 x_5 取最大值 5),但并非都能给出严格的解答。

例2 设有 n 个数 x_1、x_2,$\cdots x_n$,它们每个数的值只能取 0,1,-2 三个数中的一个,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=-5$,$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=19$,则 $x_1^5+x_2^5+\cdots+x_n^5$ 的值是________。(1993 年上海市初中数学竞赛题)

分析 通过试验猜得满足条件的数组是 0,0,…,0,1,1,1-1,-2,-2,-2。满足要求。即 $x_1^5+x_2^5+\cdots x_n^5=-125$.

应该看到,这种猜测分析并非想当然的主观臆断,而是在对题目进行认真细致的观察 后,结合相关知识作出合乎逻辑的推断,并有试验手段做保证,虽欠精确,但也合情合理,体现了学生具有较强的观察直觉。其实,猜测在任何考试或研究中都不可避免,各种题型与考试,都有猜测因素。鼓励猜测,这是创造教育的重要内容,对培养学生的观察能力和直觉能力将大有好处。

2.用于例举反例,培养学生思维的批判性和深刻性

我们知道,要想肯定一个结论正确,必须要经过严格的推证,而要否定一个结论,只需举一个反例就可以了,特取试验排除错误答案,往往事半功倍,它对培养学生不迷信权威,敢于坚持真理,勇于修正错误,也起着良好的作用。

例3 如果 $a=xy$,$b=yz$,$c=zx$ 且它们都不为 0,那么 $x^2+y^2+z^2$ 等于 ( )

(A) $\frac{ab+bc+ca}{abc}$ (B) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

(C) $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$

(D) $\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{abc}$

分析　正面计算颇费时间,用特取试验来排除错误答案则省时省力,取 $x=1$, $y=2$, $z=3$。算得　$a=2$, $b=6$, $c=3$。

此时 $x^2+y^2+z^2=14$。

而(A)式 $=1$,(B)式 $=\frac{49}{36}$,(C)式 $=1$

均不等于 14,故可排除之。应选(D)。

需要说明的是,举反例中所列举的数据必须受到条件的限制,若忽略这一点,将有可能得到错解。

例 4　四个互不相等的正数 a、b、c、d 中,a 最大,d 最小,且 $a:b=c:d$,则 $(a+d)$ 与 $(b+c)$ 的大小关系是(　　)

(A) $b+c>a+d$。 (B) $a+d>b+c$。

(C) $a+d=b+c$。 (D) 不能确定。

解　取 $a=6$, $b=3$, $c=2$, $d=1$,则有 $a+d>b+c$,故可排除(A)、(C)。

又取 $a=5$, $b=4$, $c=3$, $d=1$,则在 $a+d<b+c$,故(B)也可排除。因此,应选(D)。

问题是当 $a=5$, $b=4$, $c=3$ 时,d 不可能等于 1,否则与 $a:b=c:d$ 不符。事实上这题不适宜用上述方法求解。用严格的推证将得到(B)是正确的。

举反例能力历来是中学数学教学中的一个薄弱环节。重视试验法的教学,将会使学生举反例能力大大加强。

3. 用于迅速解题,培养学生思维的灵活性和敏捷性

由于近年来的数学考卷出现题小量多的局面,从而对学生在解答中的反应是否敏捷,思路是否灵活要求较高。我们正可以利用试验法解选择题、填空题快速简捷这一特点,既培养学生思维的灵活性与敏捷性,又能有效地争取时间。

例 5　四位数 $\overline{aabb}$ 使得它是一个完全平方数,则 $\overline{aabb}=$(　)。

(A) 7744 (B) 6655

(C) 8833 (D) 4477

分析　逐个试验知 $7744=88^2$,故选(A)

例 6　若关于 x 的方程 $||x-1|-1|=a$ 有三个整数解,则 a 的值是( )

(A)0。 (B)1。

(C)2。 (D)3。

分析： 用试验观察将很快得出结论(B)。若正面求解将十分困难。

4. 熟练此法,学生将受益无穷。

试验法除对解选择题、填空题有特殊的优越性外,它还适用于解不定方程、多变元最值问题、不等式整数解决问题、逻辑推理问题、含[x]问题、填数和数列问题、余数问题以及与整数有关的几何问题,总之,它对涉及与整数有关的多参变数问题,几乎无处不用到此法。这些题目都是通过自身给定的条件,先得出尽可能明确的结果,从而对试验的数据加以筛选,减少试算的次数,最后得出结论。

“解题成功在尝试”。在解决数学问题时,我们也常常通过试验归纳联想,寻找并发现问题的解决途径。

□用方差分析法在解题中的运用

对于一个数学问题,我们往往可以把它分解成几个相对独立的部分加以看待。考虑到各部分之间变化不均衡,因而对整个数学问题的影响也不一样,我们可以根据各部分与其平均值之差的平方和来分析某些因素对问题的影响。这种处理问题的方法,山东省聊城市六中扈保洪老师称之为方差分析法。

方差的定义(计算公式)为

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \qquad (\text{Ⅰ})$$

(见人教版初中《代数》第三册)

它又可化为

$$s^2=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right] \qquad (\text{Ⅱ})$$

方差 s^2 用来衡量数据组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的波动大小,方差越大,该数组的波动越大。

方差具有下列简单性质：

(1)非负性,即 $s^2\geqslant 0$；

(2)$s^2=0$ 等价于 $x_1=x_2=\cdots=x_n$；

（3）s^2 最大，等价于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 波动到最大状态；

（4）若两数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足 $x_i=ay_i+b(i=1,2,\cdots,n$；$a,b$ 为常数），则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差是 $y_1,y_2,\cdots y_n$ 方差的 a^2 倍，即方差的线性平方关系。

性质（1）、（2）、（3）根据方差定义是显然的，现给出（4）的证明：

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ay_i+b)=$$

$$a\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i+b=a\overline{y}+b,$$

$$s_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(xi-\overline{x})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ay_i+b-a\overline{y}-b)^2=$$

$$a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=a^2s_y^2。$$

方差分析法的实质是利用了方差的性质。以下说明方差分析法的应用。

对于某些数学问题，若能根据其自身的结构特征，灵活地选取某些部分加以分析、研究，找到其方差为零的特征，就往往成为解决整个数学问题的突破口。

例 1 解下例方程：

（1）$\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{2a-2b}$；

（2）$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$；

（3）$\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+y-5}+\sqrt{2-y}-\sqrt{12x-3}=0$”

分析 这三个方程差别较大，但是（1）可考虑 $\sqrt{a-x}$，$\sqrt{x-b}$的方差；（2）可考虑$\frac{1}{x-1}$，$-\frac{1}{x+1}$的方差；（3）可考虑 $\sqrt{x+2}$，$\sqrt{3x+y-5}$，$\sqrt{2-y}$的方差。结合原方程，易知三个方差全部等于零。现仅给出（3）的解答。

解：（3） 原方程化为 $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+y-5}+\sqrt{2-y}=\sqrt{12x-3}$，

由方差公式（Ⅱ），知左边三项的方差为

$$s^2=\frac{1}{3}[(\sqrt{x+2})^2+(\sqrt{3x+y-5})^2$$

$+(\sqrt{2-y})^2-\frac{1}{3}(\sqrt{12x-3})^2]=0$，

，$x+2=3x+y-5=2-y$。

求解，并检验，知原方程的解是$\begin{cases}x=7,\\ y=-7.\end{cases}$

例 2　解方程组：

(1) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=6,\\ x+y=18;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x+3y+z=13, & ①\\ 4x^2+9y^2+z^2-2x+15y+3z=82. & ②\end{cases}$

分析：(1) 根据方程组和方差公式(Ⅱ)，知 $\sqrt{x+1}$，$\sqrt{y-1}$的方差为零，从而$\sqrt{x+1}=\sqrt{y-1}=3$，解此方程，并检验，得 $x=8$，$y=10$。

(2) 由①+②，得

$(2x)^2+(3y+3)^2+(z+2)^2=108$，

，$2x$，$3y+3$，$z+2$ 的方差为

$S^2=\frac{1}{3}[108-\frac{1}{3}(2x+3y+z+3+2)^2]$

$=\frac{1}{3}[108-\frac{1}{3}(13+5)^2]=0$。

，$2x=3y+3=z+2$，再结合①，解出

$x=3$，$y=1$，$z=4$。

例 3　已知实数 x、y、z 满足 $x+y+z=6$。$xy+yz+zx=12$，求 $x^4+y^4+z^4$ 的值。

分析：若由条件先求 x、y、z 的值是困难的。但易知 x、y、z 的方差 $s^2=\frac{1}{3}[(x+y+z)^2$

$-2(xy+yz+zx)-\frac{1}{3}(x+y+z)^2]=0$，故 $x=y=z=2x^4+y^4+z^4=48.$

有不少数学问题都可以转化为不等式问题来解决，而要实现这一转变，方差的非负性的一个重要依据。

例 4　求函数 $y=\sqrt{1-\cos\theta+\sin\ \ +\cos-2}+\sqrt{3-\sin\theta}$的最大值。$(0\Delta\geqslant\Delta\pi)$

分析：本题用其他方法求解难度较大，但注意到函数解析式中三项的平方和为常数 6，又可用方差分析法构造为等式求解。

解：考虑解析式中三项的方差，得 $s^2=\frac{1}{3}\cdot\{((1-\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta+2)+(3-\sin\theta)$

$-\frac{1}{3}y^2]=\frac{1}{3}(6-\frac{1}{3}y^2)\geqslant 0$,得 $y^2\leqslant 18$,

故 $y\leqslant 3\sqrt{2}$。

此时,$1-\cos\theta+\sin\theta=\cos\theta+2=3-\sin\theta$,

解得 $\theta=\frac{\pi}{2}$。

例 5 (1)已知 $a-b+c=1$,求证 $(a+1)^2-b(b+2)^2+(c+3)^2\geqslant 3$;

(2)设 $xi>0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $x_1+x_2+\cdots-x_n=1$,求证 $\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}+\cdots+\sqrt{x+1}\leqslant\sqrt{n^2+n}$。

分析:(1)由方差公式(Ⅱ),例出 $a+1,-b-2,c+3$ 的方差表达式,根据条件可以立刻得出结论。

(2)与(1)方法类似,只需考察不等式左边 m 项的方差,并注意开平方即可。

例 6 设实数 a、b、c、d、e 适合 $a+b+c+d+e=8$,$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$,试求 e 的取值范围。

分析:可利用方差的非负性构造出关于 e 的不等式。

解: $a+b+c+d=8-e$,

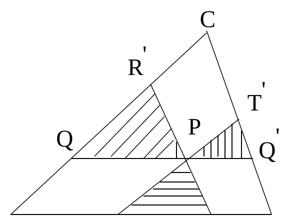
$a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$,

, 由 $s^2=\frac{1}{4}[a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2]=\frac{1}{4}[16-e^2-\frac{1}{4}(8-e)^2]=-\frac{5}{16}e(e-\frac{16}{5})\geqslant 0$,得 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$。

例 7 设动点 $P(x,y)$ 在椭圆 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ 上移动,求 $w=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$ 的值域。

分析:本题可用其他方法求解,但由 $w=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$ 的结构特征,可知用方差分析法更简捷。注意到 $s^2=\frac{1}{2}[\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-1}{2}+\frac{y+1}{3})^2]=\frac{1}{2}[1-\frac{1}{2}(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{1}{6})^2]\geqslant 0$,可得 $\frac{1}{6}-\sqrt{2}\leqslant\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\leqslant\frac{1}{6}+\sqrt{2}$。

例 8 如图,设面积为 M 的△ABC·P 是三角形内一点,过 P 分别作三边的平行线 QQ'、RR'、TT',设 S 为△TRP、△QPR'、△PQ'T' 的面积和。求 S 的最小值,并说明 S 取最小值时 P 点的位置。



分析:易知 △TRP ∽ △QPR' ∽ △PQ'T' ∽

$\triangle ABC$,所以$\frac{S}{M}=$

$\frac{S_{\triangle TRP}+S_{\triangle QPR'}+S_{\triangle PQ'T}}{M}$

$=\frac{TR^2+QP^2+PQ'^2}{AB^2}$

$=\frac{TR^2+AT^2+RB^2}{AB^2}$;又由 $AT+TR+RB=AB$ 及方差公式(Ⅱ),知当 $AT=TR=RB=\frac{AB}{3}$时,$TR^2+AT^2+RB^2$ 最小,从而 $S=\frac{M}{AB^2}(AT^2+TR^2+RB^2)\geqslant\frac{M}{AB^2}\cdot3\cdot(\frac{AB}{3})^2=\frac{M}{3}$。可见 S 的最小值是$\frac{M}{3}$,此时 P 点为$\triangle ABC$ 的重心。

方差是反映数据波动大小的特征数,方差最大,等价于数据的波动最大。利用这一极端情况所具有的特性,常常可以解决用其他方法难以奏效的问题。

例 9　设 $x_2,x_2,\cdots,x_n$,是正整数,且满足$\sum_{i=1}^{n}x_i=m$,求$\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 的最大值。

分析:由于$\sum_{i=1}^{n}x_i=m$,显然当正整数 $x_i(i=1,2\cdots,n)$ 中有 $n-1$ 个取最小值 1 时,不妨令 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$,则 x_n 必取到最大值 $m-n+1$,这是数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一种最大波动状态,其方差 s^2 也必然最大。于是再由 $s^2=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2]$,知此时$\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 的值最大,且最大值为 $n-1+(m-n+1)^2$。

方差的性质(4)反映了两个数组的方差之间的关系,借助这种关系的桥梁作用,可凸出某些问题的本质,找到解决问题的崭新途径。

例 10　求方程组$\begin{cases}1-x^2=y\\1-y^2=z\\1-z^2=x\end{cases}$的正实数解。

分析:由于方差的性质(4),知方程组中 x、y、z 和 x^2、y^2、z^2 的方差相等,即$\frac{1}{3}[x^2+y^2+z^2-\frac{1}{3}(x^2+y^2+z)^2]=\frac{1}{3}[x^4+y^4+z^4-\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2]$。整理,得 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2$。再经移项、分解、代入,得 $xz^2(x-y)^2(x+y+1)+yx^2(y-z)^2(y+z+1)+zy^2(z-x)^2(z+x+1)=0$,故由 x、y、z 为正实数,知 $x=y=z$,并代入原方程组,解得 $x=y=z=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

研究方差分析法的应用,还需把它和其他方法有机结合起来,做到互相配合,优势互补,限于篇幅,不再举例说明。

□熟悉化原则在解初中竞赛题中的运用

河南　付其明　任梅兰老师以初中数学竞赛中的解方程问题为例,介绍利用"熟悉化原则"将一些特殊方程,化为初中生所熟知的方程(组)解题的技巧。

1. 利用非负性

对某些可化为完全平方式的和为零的形式的方程,可利用"完全平方式的非负性"将之转化为方程组加以解决。

例 1　解关于实数 x,y,z 的方程

$$(8zx^2-27y^2+9yz)^2+(3y^2-yz+2z^2-8x)^2+9=6x-x^2。$$

解　原方程可化为

$$(8zx^2-27y^2+9yz)^2+(3y^2-yz+2z^2-8x)^2+(x-3)^2=0,$$

熟知完全平方的非负性,可得

$$\begin{cases}8zx^2-27y^2+9yz=0,\\ 3y^2-yz+2z^2-8x=0,\\ x-3=0.\end{cases}$$

解得

$$(x,y,z)=(3,-2,2)\text{或}\left(3,\frac{8}{3},2\right)。$$

2. 利用换元法

对某些高次方程或分式方程等,可将其中一部分代数式进行换元,将之转化为熟悉的一元二次方程等来解决问题。

例 2　方程 $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$ 的解 $x=$____.

解　显然 $x\neq0$. 方程两边同除以 x^2 得

$$\left(\frac{1}{x}+x\right)^2=4\left(\frac{1}{x}-x\right) \qquad ①$$

令　$t=\frac{1}{x}-x$,则①化为

$$t^2-4t+4=0,$$

这是一元二次方程,解得 $t=2$.

那么$\frac{1}{x}-x=2$，

即 $x^2+2x-1=0$，

，$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$。

3. 利用乘法公式

对某些多元方程求解问题，可利用乘法公式将之分解因式，消元化简为熟知的较简单的方程解之。

例3　若 $a-b=x\neq0$，且 $a^3-b^3=19x^3$，则　（　）

(A) $a=2x$ 或 $a=3x$.

(B) $a=2x$ 或 $a=-3x$.

(C) $a=-2x$ 或 $a=-3x$.

(D) $a=-2x$ 或 $a=3x$.

解　由 $a^3-b^3=19x^3$，将左端因式分解，并用入 $a-b=x\neq0$，得

$a^2+ab+b^2=19x^2$。

又将 $b=a-x$ 代入之，得

$a^2+a(a-x)+(a-x)^2-19x^2=0$，

即 $3a^2-3ax-18x^2=0$，

或 $6x^2+ax-a^2=0$.

解得　$a=-2x$ 或 $a=3x$，

故应选(D).

4. 利用特殊解

在解某些高次方程时，有时可凭观察法找出其特殊解，利用特殊解将方程降阶，进而求出方程的全部解。

例4　方程 $x=(x^2-2)^2-2$ 的解是____。

解　原方程可化为 $x^4-4x^2-x+2=0$.

令 $f(x)=x^4-4x^2-x+2$，易观察得知

$f(-1)=0$，$f(2)=0$，

故 $f(x)$ 有因子 $(x+1)(x-2)$，因而原方程可化为

$(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0$，

解得 $x_1=-1$，$x_2=2$，

$x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$.

5. 利用对应相等

对某些无理方程问题，在解题过程中，可根据代数式和数的特征，

将之变形后利用对应项的相等关系解决问题。

例5　解方程：

$$\frac{x-7}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1}=\sqrt{10}.$$

解　原方程可变形为

$$\frac{x-3-4}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{x-4-1}{\sqrt{x-4}+1}=\sqrt{10},$$

, $\sqrt{x-3}-2+\sqrt{x-4}-1=\sqrt{10}$,

即 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=3+\sqrt{10}$,

或 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}$

$=\sqrt{13-3}+\sqrt{13-4}$,

又 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=3+\sqrt{10}>6$,

, $\sqrt{x-3}>3$,即 $x>12$,

, $x=13$.

6. 逐步有理化

对某些含有多层根式的无理方程,可考虑采用通过构造完全平方逐步有理化的方法来求解。

例6　方程 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$ 的解是____________

解　由关系

$x\pm2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}\pm1)^2$,

知原方程可化为

$$\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=x-1, \qquad ①$$

当 $\sqrt{x-1}>1$ 时,有

$2\sqrt{x-1}=x-1$,解得 $x=5$。

当 $0<\sqrt{x-1}<1$ 或 $\sqrt{x-1}=1$ 或 $\sqrt{x-1}=0$ 时,可验证①式无实数解。

故原方程的解为 $x=5$。

7. 已知方程的根解方程

对于已知方程的根的性质,可从根与系数的关系入手,构造关于系数的方程,求出系数,继而解决问题。

例7　已知当 n 为自然数时,关于 x 的一元二次方程 $2x^2-8nx+10x-n^2+35n-76=0$ 的两根为素数,试解此方程。

解　设方程的两根为 x_1、x_2,则

$x_1+x_2=4n-5$,

x_1、x_2 为素数,又 $4n-5$ 为奇数,

, x_1,x_2 中必有一个是偶素数 2,不妨设 $x_1=2$,则 $x_2=4n-7$,

又 $x_1x_2=\frac{1}{2}(-n^2+35n-76)$

$=2(4n-7)$,

即 $n^2-19n+48=0$,

解得 $n=3$ 或 $n=16$。对应于 $x_2=5$ 或 $x_2=57$。

故方程的两根为 $\{x_1=2,x_2=5\}$ 或 $\{x_1=2,x_2=57\}$。

8. 分类讨论

对某些求不定方程的整数解问题,需从其中一个未知数入手,对之进行分类讨论解决问题,从而确定方程的整数解。

例 8　方程 $x^2-6xy+13y^2=100$ 的正整数解有

(A)三组.　　(B)四组.

(C)五组.　　(D)六组.

解　原方程可变形为

$(x-3y)^2=100-4y^2$,

由 $100-4y^2\geqslant 0$,y 为正整数得

$1\leqslant y\leqslant 5$。

(1)当 $y=1$ 时,原方程为 $x^2-6x-87=0$,可知 x 无正整数解;

(2)当 $y=2$ 时,原方程为 $x^2-12x-48=0$,x 也无正整数解;

(3)当 $y=3$ 时,$x^2-18x+17=0$,解得 $x_1=1$,$x_2=17$。

(4)当 $y=4$ 时,$x^2-24x+108=0$,得 $x_3=18$,$x_4=6$。

(5)当 $y=5$ 时,$x^2-30x+225=0$,得 $x_5=15$。

综上方程有五组正整数解,故应选(C)。

9. 利用代数式的巧妙变形

对于某些复杂的高次方程,可将其中的代数式巧妙变形,利用熟知的公式将之化为简单方程,从而解决问题。

例 9　解方程:$(11-x)^3+(13-x)^3=(24-2x)^3$。

解　考虑到方程有特点:

$(11-x)+(13-x)=24-2x$

应用关系

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

原方程可化为

$3(11-x)(13-x)(24-2x)=0$,

, $x_1=11$,$x_2=12$,$x_3=13$。

□限定搜索法及其在解题中的运用

限定搜索法是一种重要的数学思维方法。人们总是把事物整体按某种标准分成局部来认识,即在一些特定范围认识它,并且总是把较大范围内存在的现象限制在特定环境研究它。限定搜索法就是这种规律在解决数学问题中的具体体现。郑州市第四中学 刘继勋、郑州市第四十五中学江霞老师从以下方面作了分析:

1. 方法讲析

限定,就是在数量、范围等方面加以规定;搜索就是仔细寻找。限定搜索就是首先根据问题的条件或所要解决的问题的特点,把它限定在特定范围之内,然后在这个较小范围内找到结果或论证问题。

(1)限定搜索是一种迫不得已的行为,是不限定不足以解决问题时的一种需要。 当我们找不到解题思路时,可以考虑用这种方法。

(2)限定搜索法的作用: ①可以充分有效地利用条件;②开拓思维,发现解题新思路;③把问题化难为易。

(3)限定搜索通常有三种思维类型: ①有的问题一开始就需要给元素以限定;②有的问题需要在解决问题的过程中给元素以限定;③有的问题需经多次限定和搜索。

(4)限定与搜索密不可分,搜索的前提在于限定的范围,搜索的结果与限定的范围应相容。

(5)根据所解决的问题的不同,可分为自然限定和特殊限定。按照问题里元素的自然属性(例如,对于实数 a,总有 $a=0$,$a>0$,或 $a<0$)而作的限定,称为自然限定;根据解决问题的特殊要求而进行的限定,称为特殊限定。两种模式不是绝对的,往往相互渗透、转化。

(6)分类讨论是限定搜索法的一种情况。

2. 方法例评

例 1 已知

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5,(*)$$

且 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 都是自然数,求 x_5 的可能最大值。

分析:x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 在(*)式中处于同等地位,考虑 x_5 的最大可能值,不妨限定 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$(注意:题目中并没有这个条件),在此限定条件下,作如下搜索:

由信息式(*)及限定条件,得

$5x_5 \geqslant x_1x_2x_3x_4x_5$,即 $x_1x_2x_3x_4 \leqslant 5$。

从而 $x_1^4 \leqslant 5$,故 $x_1=1$。

又得 $x_2x_3x_4 \leqslant 5$。

从而 $x_2^3 \leqslant 5$,故 $\leqslant x_2=1$。

得 $x_3^2 \leqslant 5$,故 $x_3=1$ 或 $x_3=2$,

限定 $x_3=1$,(*)式变为

$3+x_4+x_5=x_4x_5$,

即 $(x_4-1)(x_5-1)=4$,

得 $\begin{cases} x_4-1=1, \\ x_5-1=4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_4-1=,2 \\ x_5-1=2, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_4=2, \\ x_5=5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_4=3, \\ x_5=3. \end{cases}$

限定 $x_3=2$,则(*)式变为

$4+x_4+x_5=2x_4x_5$,

$2+x_4+x_5<x_4x_5$,

故 $(x_4-1)(x_5-1)<3$,此时 x_5 最大为 3。

综上所述,x_5 的可能最大值是 5。

评注: 如果不在开始就限定 $x_i(i=1,2,3,4,5)$ 的大小,条件式就不能有效利用。在限定时,考虑到 $x_1 \sim x_5$ 都是自然数,定有大小顺序,又考虑到"求 x_5 的可能最大值"的特殊要求,既作了自然限定,又作了特殊限定,使所要解决的问题在限定搜索中"原形毕露"。

例 2　求系数为 +1 或 -1,且只有实数根的所有多项式。

分析 系数为 +1 或 -1 的多项式情况繁多,其根的情况错综复杂。因而我们不得不对多项式的最高次数作出限定,从而找到满足条件的多项式。

令满足条件的多项式是

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,并且不妨限定 $a_0=1$(显然 $-P_n(x)$ 也满足条件)。设 $p_n(x)$ 的 n 个实根是 x_1、x_2、…、x_n,由根与系数的关系,得

$x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1$,

$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=a_2$,

……

$x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n=(-1)^na_n$"

于是,$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$

$-2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)=a_1^2-2a_2 \geqslant 0$,

由条件知 $a_1^2=1$,故 $a_2=-1$,从而有

$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=3$。

由算术-几何平均不等式,得

$$\frac{3}{n}=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geqslant\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^2}$$

$$=\sqrt[n]{|a_n|^2}=1.$$

因此 $n\leqslant3$。

这样,我们把多项式最高次数限定在 3 以内。限定 $n=3$,上面不等式成为等式,根据其成立的条件知 $|x_1|=|x_2|=|x_3|=1$,故只考虑多项式 $(x-1)^3$、$(x+1)^3$、$(x-1)^2(x+1)$ 及 $(x+1)^2(x-1)$,易验证只有后两个多项式满足题设要求。

限定 $n=2$,四个可能的多项式是 $x^2\pm x\pm1$,其中符合条件的是 x^2+x-1,x^2-x-1。限定 $n=1$,显然只有 $x+1$,$x-1$。

综上所述,满足条件的多项式共有 12 个:

$\pm(x^3-x^2-x+1)$;$\pm(x^3+x^2-x+1)$;$\pm(x^2+x-1)$;$\pm(x^2-x-1)$;$\pm(x+1)$;$\pm x-1()$。

评注 如果不对多项式最高次数作出限定,找这样的多项式犹如大海捞针。

例 3. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数,用数学归纳法证明:$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$

分析 当 $n=1$ 时,$\frac{x_1^2}{x_2}=x_1$,原命题成立。

令 $n=k$ 时,命题成立,即

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_k^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_k。$$

$n=k+1$ 时,不等式的左边

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_k^2}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}^2}{x_1}$$

$$=\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_k^2}{x_1}\right)-\frac{x_k^2}{x_1}+\frac{x_k^2}{x_{k+1}}+\frac{x_{k+1}^2}{x_1}$$

$$\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_k+\frac{x_{k+1}^2}{x_1}+\frac{x_k^2}{x_{k+1}},$$

做到这一步,我们发现要达到证明的目标,还必须证明

$$\frac{x_{k+1}^2-x_k^2}{x_1}+\frac{x_k^2}{x_{k+1}}\geqslant x_{k+1} \qquad ①$$

我们绞尽脑汁都难以直接完成①式的证明,真是"山重水复疑无路"。

原不等式中 xi($i=1,\cdots,n$)处于同等地位,考虑要证的①式,限定 $x_{k+1}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\}$。在此限定下就有 $x_{k+1}^2-x_2^k\geqslant 0$,从而

$$\frac{x_{k+1}^2-x_k^2}{x_1}\geqslant\frac{x_{k+1}^2-x_k^2}{x_{k+1}},$$

接着导出 $\frac{x_{k+1}^2-x_k^2}{x_1}+\frac{x_k^2}{x_{k+1}}\geqslant\frac{x_{k+1}^2-x_k^2}{x_{k+1}}+\frac{x_k^2}{x_{k+1}}=x_{k+1}$,

这就完成了证明。

评注:问题一开始进行得比较顺利,但在证明①式时不限定就做不下去,这时我们不得不根据问题的特殊要求作了特殊限定,从而才能"柳暗花明又一村"。

例 4　设 m 是两个不相等的自然数 x 和 y 的最小公倍数,且满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{m-1}{m}$,求可能的 x、y。

分析:条件式可变为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{m}=1$。　　(*)

因为 x、y 是不相等的自然数,而 m 是它们的最小公倍数,故可作自然限定 $x<y\leqslant m$,这样,(*)式可转化为 $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{m}<\frac{3}{x}$,即 $x<3$ 又显然。$x>1$,故 $x=2$;于是(*)式变为

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{m}\leqslant\frac{2}{y},$$故 $y\leqslant 4$。

限定 $y=3$,则 $m=2\times 3=6$,满足题意。

限定 $y=4$,则 $m=4$,满足题意。

因而 $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=4。\end{cases}$

同理限定 $y<x\leqslant m$,则可得

$\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=2。\end{cases}$

评注:只有作了限定后,条件式才被充分有效利用。在分析的过程中,我们作了多次限定搜索,其思维过程如下图:

限定($x<y\leqslant m$) $\xrightarrow{\text{搜索}}$ $\begin{cases}x=2\\ \text{限定}(y\leqslant 4)\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{搜索}}$ $\begin{cases}\text{限定}(y=3)\xrightarrow{\text{搜索}}m=6,\\ \text{限定}(y=4)\xrightarrow{\text{搜索}}m=4。\end{cases}$

例 5　解关于 x 的不等式：

$x^{\log_a x} > \dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）。

有的人是这样解的：

对不等式两端取以 a 为底的对数，得

$\log_a{}^2 x > \dfrac{9}{2}\log_a x - 2$，

整理并解得

$\log_a x - 4$ 或 $\log_a x < \dfrac{1}{2}$。

限定 $a>1$，则 $x<a^4$ 或 $0<x<\sqrt{a}$；

限定 $0<a<1$，则 $x>\sqrt{a}$或 $0<x<a^4$。

事实上，这种解法是错误的，其实质是先搜索而后限定，没有限定的搜索必是盲目的，因而结果也是错误的，正确的方法是：

限定 $a>1$，对不等式两端取以 a 为底的对数，

$2\log_a{}^2 x - 9\log_a x + 4 > 0$，

$\log_a x > 4$ 或 $\log_a x < \dfrac{1}{2}$，

$x > a^4$ 或 $0<x<\sqrt{a}$。

限定 $0<a<1$，对不等式两端取以 a 为底的对数，

$2\log_a{}^2 x - 9\log_a x + 4 < 0$，

$\dfrac{1}{2} < \log_a x < 4$，

$a^4 < x < \sqrt{a}$。

评注 限定搜索中，搜索必是在限定前提下的搜索。

例 6　解不等式 $\sqrt{x^2+3x-10} > x$。

限定 $x\geqslant 0$，原不等式等价于

$\begin{cases} x^2+3x-10\geqslant 0, \\ x^2+3x-10\geqslant x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leqslant -5 \text{ 或 } x\geqslant 2, \\ x>\dfrac{10}{3}, \end{cases}$ 得 $x>\dfrac{10}{3}$。

限定 $x<0$，原不等式等价于

$x^2+3x-10\geqslant 0 \Rightarrow x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 2$。由于此结论是在 $x<0$ 的限制条件下搜索到的，因而 $x\geqslant 2$ 不满足条件。故原不等式解集为

$\{x \mid x\leqslant -5\} \cup \{x \mid x>\dfrac{10}{3}\}$。

评注　搜索既然是在限定条件下的搜索，它的结果应与限定的条件相容。

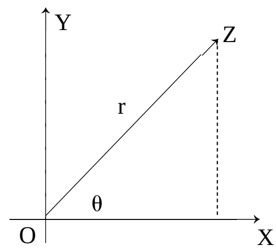
从以上例子中我们可以看出，限定搜索是解决数论问题和结构对称（或轮换对称）问题的有效方法。在我们不能很好利用题目条件时，在我们不能发现解题思路时，限定搜索法往往能帮你闯过难关。

□复数法及其在解题中的作用

复数集的建立有各种不同的理论，在中学数学里，一种是把复数看成有序实数对；一种是把复数看成是平面直角坐标系的平面上的点；一种是把复数看成平面直角坐标系上从原点出发到平面上的点的向量，这就出现了复数可以用代数式、三角式、向量式等不同的形式来表示，

即 $z=x+yi \Longleftrightarrow z(x,y) \Longleftrightarrow \overrightarrow{oz}$；

$z=x+yi=(r\cos\theta+i\sin\theta)$。



复数法就是用复数证明一些代数问题、三角问题、几何问题的方法，在解题或论证过程中有时可以走特殊的作用。

例1　已知 a、b、c 为正数，且 $\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b+\operatorname{arctg}c=\pi$，求证：$a+b+c=abc$。

思路　从所证的三个正数的和等于这三个正数的积来看，联想到在复数集中，有三个复数的辐角的和等于这三个复数的积的辐角，由已知便可知这三个复数的积的辐角为 π，则其积的虚部必为零。

证明　设等式左边三个角分别是复数 $1+ai$，$1+bi$，$1+ci$ 的辐角的主值，因为

$(1+ai)(1+bi)(1+ci)$

$=(1-ab-bc-ca)+[(a+b+c)-abc]i$

又其辐角 $\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b+\operatorname{arctg}c=\pi$，得 $(a+b+c)-abc=0$，则 $a+b+c=abc$。

想一想

（1）若把条件改为 $\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b+\operatorname{arctg}c=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$，那么又可能得出怎样的结论？

（2）为什么 arctga 所对应的复数可设为 $1+ai$？还可以设成怎么样的复数？

（3）若两边取正切，能否得到同样的结论？并作比较。

例 4 **化简**:(1) $1+C_n^1\cos x+C_n^2\cos 2x+\cdots+C_n^n\cos nx$;(2) $C_n^1\sin x+C_n^2\sin 2x+\cdots+C_n^n\sin nx$

思路 化简之前要观察这两个数例和的特点,发现也是属特殊组合数列和的问题,与二项式定理有关,然而又有三角问题夹在一起,联想到复数的三角式来化简。

解设 $A=1+C_n^1\cos x+C_n^2\cos 2x+\cdots+C_n^n\cos nx$,

$B=C_n^1\sin x+C_n^2\sin 2x+\cdots+C_n^n\sin nx$

则 $A+Bi=1+C_n^1(\cos x+i\sin x)+C_n^2(\cos 2x+i\sin 2x)+\cdots+C_n^n(\cos nx+i\sin nx)$

$=1+C_n^1(\cos x+i\sin x)+C_n^2(\cos x+i\sin 2x)^2+\cdots+C_n^n(\cos x+i\sin x)^n$

$=[1+(\cos x+i\sin x)]^n=[(1+\cos x)+i\sin x]^n$

$=(2\cos^2\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2})^n$

$=2^n\cos^n\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2})^n$

$=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}+i2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}$。

根据复数相等的定义,得

$A=1+C_n^1\cos x+C_n^2\cos 2x+\cdots+C_n^n\cos nx$

$=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}$,

$B=C_n^1\sin x+C_n^2\sin 2x+\cdots+C_n^n\sin nx$

$=2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}$。

注意(1)本例化简(1),(2)成对地出现,一般可通过复数的三角形式来解。

(2)棣美弗定理的作用能把一个复数的三角式的正整数次幂化简,尤其是模等于 1 的复数,三角式更为适用。

例 5 设 A、B、C 是以原点为圆心,半径为 r 的圆周上三点,求证:△ABC 是正

三角形的充要条件是这三点在复平面内对应的复数 z_1、z_2、z_3 满足等式 $z_1+z_2+z_3=0$。

思路 欲证充分性,由 $z_1+z_2+z_3=0$,得 $z_1+z_2=-z_3$,根据复数和的几何意义,可知 $0,z_1,-z_3$、z_2 所对应的四点构成平行四边形,由平面几何定理:平行四边形两对角线平方和等于四边的平方和,可证 $\triangle ABC$ 的三边长相等。欲证必要性,由 $\triangle ABC$ 是正三角形,知三半径 OA、OB、OC 间隔成等角 $\frac{2\pi}{3}$,利用复数的三角式及 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的性质 $1+\omega+\omega^2=0$ 来证明 $z_1+z_2+z_3=0$。

证明 充分性:因为 $z_1+z_2+z_3=0$,所以 $z_1+z_2=-z_3$,由复数加法的几何意义,可知四个复数 0、z_1,$-z_3$,z_2 所对应的点构成一平行四边形。有

$|-z_3|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,即 $r^2+|z_1-z_2|^2=2(r^2+r^2)$,所以 $|z_1-z_2|^2=3r^2$,$|z_1-z_2|=\sqrt{3}r$。

同理可证,$|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}r$

则 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$,所以 $\triangle ABC$ 是正三角形。

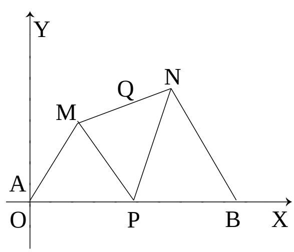
必要性:设三点 A、B、C 所对应的复数为 $z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,则有 $z_2=z_1\omega$,$z_3=z_1\omega^2$(其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$)

于是 $z_1+z_2+z_3=z_1+z_1\omega+z_1\omega^2=z_1(1+\omega+\omega^2)=0$

注意(1)要根据题意分清充分条件与必要条件是什么?

(2)在证明过程中要灵活运用有关知识。使问题证得简明、扼要。

例 6 点 P 是线段 AB 上的一个动点,分别以 AP,PB 为边作等边 $\triangle APM$ 与等边 $\triangle BPN$,求线段 MN 的中点 Q 的轨迹。



思路 如图建立直角坐标系,欲求中点 Q 的轨迹,只要求 $\overrightarrow{AQ}$ 对应的复数,而 $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})$,又 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}(\cos60°+i\sin60°)$,$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}$,而 $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PB}(\cos60°+\sin60°)$,$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}$,那么只要确定 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AP}$ 所对应的复数即可。

解 如图建立直角坐标系,设 P 点坐标为 $(b,0)$,那么 $\overrightarrow{AB}$ 所对应的复数 $z_P=b$,B 点坐标为 $(a,0)$,那么 $\overrightarrow{AB}$ 所对应的复数 $z_B=a$.

因为 $\overrightarrow{AM}$ 是 $\overrightarrow{AP}$ 按逆时针旋转 60°而得,

所以$\overrightarrow{AM}$所对应的复数 $z_M=z_p(\cos60°+i\sin60°)=\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{2}i$。

又$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}$，所以 $z_{PB}=z_B-z_P=a-b(a>b>0)$ 所以 $z_{PN}=z_{PB}(\cos60°+i\sin60°)$

$=\frac{a-b}{2}+\frac{\sqrt{3}(a-b)}{2}i$。

而$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}$，所以 $z_n=z_p+z_{PN}=6+\frac{a-b}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{2}i=\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{2}i$

而$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$，所以 $z_0=\frac{1}{2}(z_M+z_N)=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{2}i+\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{3}(a-b)}{2}i\right]=\frac{a+2b}{4}+\frac{\sqrt{3}a}{4}i(a>b>0)$

则 Q 点的轨迹是一条线段，它平行于 x 轴，端点为$(\frac{a}{4},\frac{\sqrt{3}a}{4})$、$(\frac{3a}{4},\frac{\sqrt{3}a}{4})$，但是端点不在内。

想一想 （1）如果等边△APM 与等边△BPN 在 AB 的两旁。点 Q 的轨迹又如何求？

（2）如果在 AB 的同侧或异侧的条件都不注用，点 Q 的轨迹又如何求？

注意 （1）如果直角坐标系建立在以 P 为原点，那么$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PB}(\cos60°+i\sin60°)$，但是$\overrightarrow{PM}\overrightarrow{PA}[\cos(-60°)+i\sin(-60°)]$。

（2）如果求出$\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AN}$所对应的复数后，写出它们的对应坐标，然后用中点坐标公式求出点的轨迹也可。

（3）由于等边三角形的三边长相等（即模长不变）夹角为 60°，所以用复数解题较为方便。

例 8 一质点 M，自原点 0 向 x 轴正方向前进 a 单位到点 A_1，再逆时针转 θ 角，$(0<\theta<\frac{\pi}{2}$继续按新方向前进 a 单位点 A_2，再逆时针转 θ 角，进行 a 单位到点 A_3，如此继续下去，依次到达 A_4，A_5，$\cdots A_n$。

（1）求点 A_n 到原点 0 的距离。

（2）点 A_n 能否与原点重合？若有可能，n 可取什么值 若无可能，给出证明。

思路 由于质点在运动时其模长不变，旋转角相同，所以可以用复数的三角形式来解。当点 A_n 所对应的复数 z_n 求出后，第（1）小题的问题是求$|z_n|$，第（2）小

题的问题是回答满足$|z_n|=0$的条件。

解 (1)向量$\overrightarrow{OA_1}$,$\overrightarrow{A_1A_2}$,$\overrightarrow{A_2A_3}$,…,$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$,分别对应的复数为 a,a(cosθ+isinθ)a(cos2θ+isin2θ),…,a[cos(n-1)θ+isin(n-1)θ]。设向量$\overrightarrow{OA_n}$对应的复数为z_n,则$z_n=a+a(\cos\theta+i\sin\theta)+a(\cos2\theta+i\sin2\theta)+\cdots+a[\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta]$

$$=a[1+(\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\cdots+(\cos\theta+i\sin\theta)^{n-1}]$$

$$=a\cdot\frac{[1-(\cos\theta+i\sin\theta)^n]}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=a\cdot\frac{1-\mathrm{conn}\theta+i\sin n\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$=a\cdot\frac{2\sin^2\frac{n\theta}{2}-2i\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=a\cdot\frac{\sin^2\frac{n\theta}{2}(\sin\frac{n\theta}{2}-i\cos\frac{n\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2})}$$

$$=a\cdot\frac{\sin\frac{n\theta}{2}(-i)(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}(-i)(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})}$$

$$=\frac{a\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot[\cos\frac{(n-1)\theta}{2}+i\sin\frac{(n-1)\theta}{2}]$$

当$\sin\frac{n\theta}{2}\geqslant0$时,$z_n$等于上式;

当$\sin\frac{n\theta}{2}<0$时,$z_x=\frac{a\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}[-\cos\frac{(n-1)\theta}{2}-i\sin\frac{(n-1)\theta}{2}]=\frac{-a\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}[\cos(\pi+\frac{(n-1)\theta}{2})$

$+ i\sin(\pi + \frac{(n-1)\theta}{2})]$

则点 A_n 到原点的距离是 $z_n = \dfrac{a|\sin\frac{n\theta}{2}|}{\sin\frac{\theta}{2}}$

(2)点 A_n 与原点重合的条件是 $|z_n| = 0$,即 $\dfrac{a|\sin\frac{n\theta}{2}|}{\sin\frac{\theta}{2}} = 0$,所以 $\sin\frac{n\theta}{2} = 0$。

$\frac{n\theta}{2} = K\pi(K \in z)$。所以 $n = \frac{2K\pi}{\theta}$

因为 n 是自然数,所以 K 是自然数而且 $\frac{2K\pi}{\theta}$ 也是自然数,设 $\frac{2K\pi}{\theta} = m$(m 为自然数),这样 $\theta = \frac{2K\pi}{m}$,又由已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,得 $0 < \frac{2K}{m} < \frac{1}{2}$,即 $0 < 4k < m$,

则当 $n = \frac{2K\pi}{\theta}$,且 $\theta = \frac{2K\pi}{m}$(K,m 是自然数,且 $4K < m$)时,点 A_n 与原点重合;当 $0 \neq \frac{2K\pi}{m}$ 时,点 A_n 不能与原点重合。

注意

(1)掌握向量加法的推广 $\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$

(2)选择复数中那一种形式解题,要看题意决定,本例出现的有关旋转角问题宜用复数的三角式较好。

□体积法在解题中的运用

平面几何里学习过面积以后,经常可以用面积法来巧解几何题。同样地,在立体几何中学习过体积以后,体积法也是解决立体几何问题的重要方法,扬州市广播电视大学余国英老师从运用体积法解题的总体思路上分几方面举例说明。

1. 等积异算

借助于体积公式,运用不同方法对同一个几何体的体积进行计算,其体积仍应相等,从而得到该几何体某些元素的量数或元素之间具有某种关系,这种方法就是等积异算的方法。

例 1 在棱长为 a 的立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为 CD 中点,求点 D_1 到平

面 $AM-C_1$ 的距离。

分析 如图 1，作 $D_1H\perp$ 平面 AMC_1 于 H。则 D_1H 为 D_1 到平面 AMC_1 的距离。若直接求 D_1H，必须要归结到某一个三角形中，这里确定射影 H 的位置是解题的关键，但这是一个繁复的过程。如果用体积法，则可以绕过这个过程。

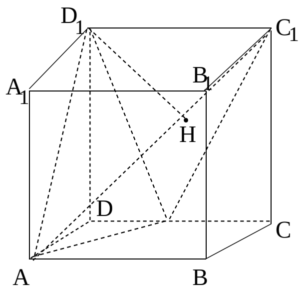


图 1

解　连接 D_1A、D_1M。由分析知

D_1H 是四面体 D_1-AMC_1 的底面 AMC_1 上的高。

$$,\ V_{D_1-AMC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AMC_1}\cdot D_1H \qquad (1)$$

四面体 D_1-AMC_1，可以看成以 A 为顶点，以 $\triangle MC_1D_1$ 为底面的三棱锥。

$$,\ V_{A-MC_1D_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AMC_1D_1}\cdot AD$$

$$S_{\triangle AMC_1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}a^2,$$

$$AD=a,\ S_{MC_1D_1}=\frac{1}{2}a^2。$$

分别代入(1)、(2)，并由 $V_{D1}-AMC_1=V_A-MC_1D_1$ 得

$$\frac{\sqrt{6}}{4}a^2\cdot DH=\frac{1}{2}a^2\cdot a$$

$$,\ D_1H=\frac{\sqrt{6}}{3}a。$$

即　D_1 到平面 AMC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$。

体积的不同算法，其结果仍然相等，这是隐含在几何体中的等量关系。一般地利用等积异算，可以巧妙地求出点到平面的距离，异面直线间的距离，几何体中元素具有某种关系等问题。

2. 体积比性质

体积比有如下的性质，它们是应用体积法解题的重要依据。

性质 1.　等底面积(或高)的两个锥(或柱)体的体积之比，等于它们的高(或底面积)之比。

性质 2.　一个锥体被平行于底面的平面所截，截得的锥体与原锥

体的体积之比，等于截得锥体的高与原锥体高的立方之比。

例 2 **在四面体** OABC **的棱** OA、OB **上分别取点** A_1、B_1，**使** $\frac{OA_1}{OA}=\frac{1}{3}$，$\frac{OB_1}{OB}=\frac{3}{5}$，**又在** OC **的延长线上取一点** C_1，**使四面体** $OA_1B_1C_1$、**与四面体** OABC **的体积相等，求** OC_1、∶OC **之值。**

解　如图 2，

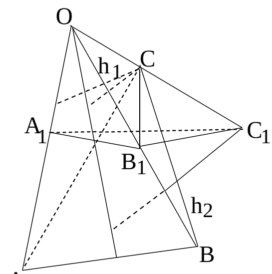


图 2

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{OB_1}{OB}=\frac{3}{5},\quad \frac{S_{\triangle OA_1B_1}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}。$$

三棱锥 $C-OA_1B_1$ **与三棱锥** $C-OAB$ **等高，**

$$,\ \frac{V_{c-OA_1B_1}}{V_{c-OAB}}=\frac{S_{\triangle OA_1B_1}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{1}{5}.$$

设三棱锥 $c-OA_1B_1$ **和三棱锥** $c-OA_1B_1$ **的高分别为** h_1，h_2，**由于底面均为** $\triangle OA_1B_1$（**同底**）。

$$,\ \frac{V_{c-OA_1B_1}}{V_{c_1-OA_1B_1}}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{OC}{OC_1}。$$

$$V_{0-ABC}=V_{0-A_1B_1c_1}$$

$$,\ \frac{OC}{OC_1}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{V_{c-OA_1B_1}}{V_{c-ABC}}=\frac{1}{5}。$$

即 OC_1 ∶$OC=5$。

例 3 **设一个棱台的上、下底面面积分别是** a^2、b^2（$a<b$），**棱台的体积是** V，**求将棱台补成棱锥后的小棱锥的体积。**

解如图 3，　**棱台** $ABC-A_1B_1C_1$ **的体积是** V，$S_\triangle ABC=b2$，$S_\triangle A_1B_1C_1=a^2$。

将棱台补成棱锥 $P-ABC$，**作** $PO\perp$ **底面** ABC **于** O_2 **和平面** $A_1B_1C_1$ **交于** O_1。**设** $PO_1=h_1$，$PO_2=h_2$.

又设 $V_{P-ABC}=V_2$，$V_{P-A_1B_1C_1}=V_1$，

则 $V=V_2-V_1$。

平面 $A_1B_1C_1$ // **平面** ABC。

$$,\ \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\text{即}\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{b}。$$

由体积比性质 2 **知**

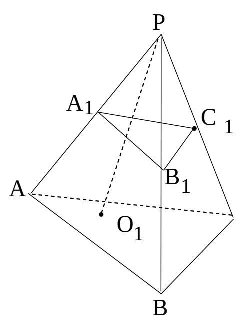


图 3

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3=\frac{a^3}{b^3},$$

$$\therefore\ \frac{V_1}{V_2-V_1}=\frac{a^3}{b^3-a^3}。$$

即$\frac{V_1}{V}=\frac{a^3}{b^3-a^3}$，$\therefore$ $V_1=\frac{a^3V}{b^3-a^3}$。

故所求小棱锥的体积是$\frac{a^3V}{b^3-a^3}$。

3. 体积割与补

一个多面体，可以分割成许多易于求积的子多面体，或补成棱柱、棱锥、棱台化归为易于求积的多面体。由等量公理，通过计算体积的代数和，从而可以达到解题目的。

例4　四面体中，有两个面是边长为1的正三角形，另外两个面是具有公共斜边的等腰直角三角形，求它的内切球的半径。

分析：四面体共有六条棱，由于有两个面是边长为1的正三角形，它们必有一条公共边，这样四面体中必有五条棱长为1，第六条棱一定是直角三角形的斜边，这样就可以画出四面体ABCD，再利用体积割补法解题。

解 如图 4,在四面体 ABCD 中,设 $AB=AC=AD=BD=CD=1$,$\angle BAC=\angle BDC=90°$,则 $BC=\sqrt{2}$。取 BC 中点 M,则 $AM\perp BC$,$DM\perp BC$。

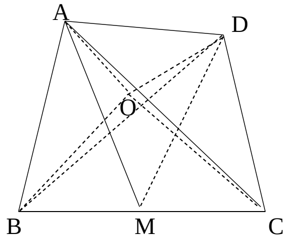


图 4

, $BC\perp$ 平面 AMD。

则 $V_{ABCD}=\frac{1}{3}BC\cdot S_{\triangle AMD}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}$。

$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$。

设四面体 ABCD 的内切球心为 O,由于球 O 和四面体的四个面相切,所以,球心 O 到四个面的距离均等于球半径 r。

, $V_{ABCD}=V_{OABC}+V_{OABD}+V_{ABCD}+V_{OACD}+V_{OBCD}=\frac{1}{3}r\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{(2+\sqrt{3})}{6}r$,

, $\frac{1}{6}(2+\sqrt{3})r=\frac{\sqrt{2}}{12}$,

解之得 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\sqrt{3})$。即为所求的半径。

□排除法及在解题中的应用

大家知道,反证法在初等数学,特别是在高等数学中有着广泛的应用,它是‘数学家最精良的武装之一”,排除法是反证法的一种形式,在离散情形,排除法即通常所说的穷举法,它在解选择题中的作用是众所周知的。

例 1 不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的解集是

(A) $(-3,2)$ (B) $(-1,2)$

(C) $(-2,1)$ (D) $\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$

(E) $\varnothing$

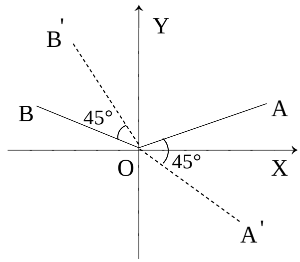
解: 因对连续函数来说,不等式解集的端点,必满足相应的方程,而当 $x=-1$,1 和 $-\frac{3}{2}$ 代入时 $|x-1|+|x+2|\neq5$,因此(B)(C)(D)不成立,而当 $x=0$ 时 $|x-1|+|x+2|<5$,因此(E)也不成立,, (A)成立

注： **此题利用数形结合的方法，可更快得出结论。**

例 2　**若** $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$ **且** $0\leqq x\quad\pi$，**那么** tgx **是**（A）$-\frac{4}{3}$　（B）$-\frac{3}{4}$

（C）$\frac{3}{4}$　（D）$\frac{4}{3}$

（E）**不能唯一确定**



解： **方程可变形为** $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{5\sqrt{2}}$

，$x+\frac{\pi}{4}$ **的终边可能如图** OA **或** OB⇒x **的终边可能如图** OA' **或** OB' **但** $0\leqq x$　◆⇒x **的终边为** OB' ⇒（C）（D）（E）**不成立**，　$x<135°\Rightarrow|tgx|\ >1\Rightarrow$（B）**不成立**⇒（A）**成立。**

例 3　**若** $\log_8{}^3=P$，$\log_3{}^5=q$ **则** $\log_{10}{}^5$ **等于**

（A）pq　（B）$\frac{3p+q}{5}$　（C）$\frac{1+3pq}{p+q}$

（D）$\frac{3pq}{1+3pq}$　（E）p^2+q^2

解： $\log_{10}5$ **用** pq **来表示应消去** p、q **两式中的** 3，**而利用换底公式易知** 3p+q、p+q **和** p^2+q^2 **都不能消去** 3，**所以**（B）（C）（E）**都不成立**，**而**（A）**显然不成立**，**因此**（D）**成立**

例 4　**极坐标方程**　$\rho=\frac{1}{1-\cos\theta+\sin\theta}$ **所确定的曲线是**（A）**圆**　（B）**椭圆**

（C）**双曲线**　（D）**抛物线**　（E）**直线**

解 若直角坐标化得　$2xy-2x+2y-1=0\Rightarrow$（E）**不对**　**考虑** $1-\cos\theta+\sin\theta=0$　$\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=1$　$\theta_1=\frac{\pi}{2}$，$0_2=\pi$ **即曲线有两条渐近线**，，（A）（B）（D）**都不对**，**即**（C）**成立。**

例 5　**在** 3 **和** 9 **之间插入二个数**，**使前三个数成等比**，**后三个数成等差**，**此两数之和是**

（A）$13\frac{1}{2}$　（B）$11\frac{1}{4}$　（C）$10\frac{1}{2}$　（D）10　（E）$9\frac{1}{2}$

解 设两数为 a、b（a<b）**则** $a^2=3b$，

$2b=a+9$　$a^2=3b<27\Rightarrow a<3\sqrt{3}$

$2b=a+9>12\Rightarrow b>6\Rightarrow a,b$ **都不能是整数**

若 a **的分母是** 2，**则** b **的分母是** 4⇒a+b **的分母是** 4⇒（A）（C）（D）（E）**都不对**⇒（B）**正确**

例 6 已知 $(a+1)(b+1)=2$,则 $\mathrm{arctg}a+\mathrm{arctg}b$ 等于 (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ 或 $-\frac{3}{4}\pi$ (D) $\frac{\pi}{5}$ (E) $\frac{\pi}{6}$

解:令 $a=0,b=1$ 则 (C) 成立,而结论与 a,b 无关 $\Rightarrow$ (C) 正确。

例 7 若 $\mathrm{tg}x=\frac{2ab}{a^2-b^2}$ 其中 $a>b>0,0°<x<90°$

则 $\sin x$ 等于 (A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2a}$ (D) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2ab}$ (E) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$

解:令 $a>b=0\Rightarrow \sin x=\mathrm{tg}x=0\Rightarrow$ (A)、(C)、(D) 不成立,若 (B) 成立 $\Rightarrow \sin x=\frac{b}{a}\Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\Rightarrow \mathrm{tg}x=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ 矛盾,故 (E) 成立。

例 8 $P(a,b)$、$Q(c,d)$ 是直线 $y=mx+k$ 上两点,则 $|PQ|$ 等于:

(A) $|a-c|\sqrt{1+m^2}$ (B) $\sqrt{1+m^2}/|a+c|$

(C) $|b-d|/\sqrt{1+m^2}$ (D) $|a-c|(1+m^2)$

(E) $|a-c||m|$

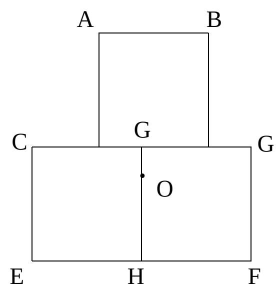
解:当 $a=c$ 时 $|PQ|=0\Rightarrow$ (B) 不成立

当 $m=c$ 时 $|PQ|=|a-c|\Rightarrow$ (C)(E) 不成立

当 $m=0$ 时 $|PQ|=\sqrt{2}|a-c|\Rightarrow$ (D) 不成立 $\Rightarrow$ (A) 成立

注 若先试 $m=1$,立即可得 (A) 成立。

例 9 如图,它是由三个单位正方形组成,则包含这个图形的最小圆半径是



(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{1.25}$

(C) 1.25 (D) $\frac{5}{8}\sqrt{17}$ (E) $\sqrt{1.5}$

解:由图形知最小圆的半径应在 O 点,且满足 $OA=OE$ $\sqrt{1.25}<R<\sqrt{2}\Rightarrow$ (A)(B) 都不成立。

设 $OE=1.25\Rightarrow OH^2=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}\Rightarrow OH=\frac{3}{4}\Rightarrow$

$OG=\frac{1}{4}\Rightarrow OA^2=\frac{1}{4}+\frac{25}{16}\neq\frac{25}{16}\Rightarrow$ (C) 不成立

设 $OE=\sqrt{1.5}\Rightarrow OH^2=1.5-1=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$OH=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow OG=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow AO^2=\frac{1}{4}+$

$(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-\sqrt{2}\quad\sqrt{1.5}\Rightarrow$(E)不成立$\Rightarrow$(D)成立

例 10 把根式 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 中根号外的字母移入根号内,则原式等于(A) $\sqrt{-a}$

(B) $\sqrt{a}$　(C) $-\sqrt{-a}$　(D) $-\sqrt{a}$

解 :显然 $a<0$,令 $a=-1\Rightarrow$ 原式 $=-1\Rightarrow$(A)(B)(D)都不对$\Rightarrow$(C)成立。

从以上各例中可以看出,用排除法(即穷举法)解选择题的优点亦即它的本质是把肯定命题转化为否定命题,而它的缺点是解一个肯定命题要转化为解若干个否定命题,所以,从静止的角度来看,排除法只适用于离散情况,而不适用连续情况,但是如果我们有运动的观点,那么,它也能适用于连续情况,特别适用于解多元函数的极值问题,(常表现为条件不等式的形式)

例 11 若 $x+y+z=1$,求证 $x^2+y^2+z^2\geqq\frac{1}{3}$

解法(一) $x+y+z=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=$

$1-2(xy+yx+zx)$

又 $x^2+y^2+z^2\geqq xy+yx+zx$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geqq 1-2(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow$

$x^2+y^2+z^2\geqq\frac{1}{3}$

解法(二) 利用不等式 $\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{3}\geqq$

$\frac{x+y+z}{3}$ 即得 $x^2+y^2+z^2\geqq\frac{1}{3}(x+y+z)^2=\frac{1}{3}$

解法(三) 显然当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时 $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}$ 若“$x_1=y_1=z_1$”不成立,不防设 $x_1<y_1$

令 $x_2=x_1-\varepsilon, y_2=y_1+\varepsilon, z_2=z_1$

$\varepsilon<x_1-y_1$ 则 $x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2-x_2{}^2-y_2{}^2$

$-z_2{}^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)$

$=(2x_1-\varepsilon)\cdot\varepsilon-(2y_1+\varepsilon)\varepsilon$

$2\varepsilon(x_1-y_1-\varepsilon)>0$

这就是说,函 数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在 (x,y,z) 不达到极小值,因此如果函

数 $f(x,y,z)$ 的极小值存在，那么，$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$是函数的极小值，即 $x^2 + y^2 + z^2 \geqq \frac{1}{3}$

解法(3)就是连续情形时的排除法，显然，它不及解法(一)的自然，也不象解法(2)的精巧，但是它却是解各种多元函数极值问题的模式化的方法，具有极大的通用性：

例 12　在$\triangle ABC$中，求证 $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$

解：设 $f(A,B,C) = \sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$则当 $A_0 = B_0 = c_0 = 60°$时 $f(A_0,B_0,C_0) = 1/8$ 若 A_1、B_1、C_1 中到少有两个不等，不妨设 $A_1 > B_1$ 令 $A_2 = A_1 - \varepsilon, B_2 = B_1 + \varepsilon, C_2 = C_1, 0 < 2\varepsilon < A_1 - B_1$

则 $f(A_1,B_1,C_1) - f(A_2,B_2,C_2) < 0$ 等价于（ $\sin\frac{C_1}{2} > 0$）$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2} - \sin\frac{A_2}{2}\sin\frac{B_2}{2} < 0$ 等价于$\frac{1}{2}[\cos\frac{A_1+B_1}{2} - \cos\frac{A_1-B_1}{2}] >$

$\frac{1}{2}[\cos\frac{A_2+B_2}{2} - \cos\frac{A_2-B_2}{2}]$等价于

$\cos\frac{A_1-B_1}{2} < \cos\frac{A_2-B_2}{2}$等价于 $A_1 - B_1 > A_2 - B_2$

而 $A_2 - B_2 = A_1 - B_1 - 2 \Longleftrightarrow f(A_1,B_1,C_1) - f(A_2,B_2,C_2) < 0$ 成立即 $f(A_2,B_2,C_2)$不是极大值，若 $f(A,B,C)$ 的极大值存在，那么 $f(A_0,B_0,C_0) = \frac{1}{8}$是极大值，即 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$。

从以上几例中可以看出，用排除法解多元函数的极值问题时的一般程序是：

①、先直觉看出：当 $P = P_0$ 时 $f(P_0)$是极值。

②、设 $P_1 \neq P_0$，适当选取 P_2 使 $f(p_1) - f(p_2) > 0$ 或（< 0）

③、若 $f(p)$的极值存在，则 $f(p_0)$就是极值，

即 $f(p) \geqq f(p_0)$（或 $f(p_1) \leqq f(p_0)$）

如果把 P_0 称为 $f(p)$的极值点，P_1 称为排除点，P_2 称为比较点或中途点（即 P_2 原则上应在 P_0 和 P_1 的中途），$f(p_1) - f(p_2) > 0$（或 $f(p_1) - f(p_2) < 0$）称为判别式，则上述一般程序可简单地叙述为

①看出极值点。

②对任何排除点,选择比较点,验证判别式。

③在极值存在的条件下,即得 $f(p_0)$ 是极值。

当然,有些问题并不是上述典型的极值问题,那就需要进行适当的变形,下面再来看一些例题。

例 13. 已知 a、b、c 都是正数,$a+b+c=1$ 且三数中任何一个不超过另一数的二倍,求 $f(a,b,c)=a\cdot b\cdot c$ 的极小值。

证①设 $a\geqq b\geqq c$,则三数中任何一个数不超过另一数的二倍的条件可表示为 $a\leqq 2c$,当 $a=2c,b=a$ 时,$a\cdot b\cdot c=\frac{4}{125}$当 $a=2cb=c$ 时 $a\cdot b\cdot c=\frac{1}{32}$,但$\frac{1}{32}<\frac{4}{125}$,所以可以猜测 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{4}$时 $f(a,b,c)$取极小值。

②若 $a_1<2c_1$ 令 $a_2=a_1+\varepsilon,c_2=c_1-\varepsilon,0<3\varepsilon<2c_1-a_1,b_2=b_1\Rightarrow a_2-2c_2=a_1-2c_1+3\varepsilon<0$,且判别式 $a_1b_1c_1>a_2b_2c_2$ 成立。

③若 $f(a,b,c)$的极小值存在,则 $f(a,b,c)\geqq f(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$即 $abc\geqq\frac{1}{32}$

例 14. 若 $x_k(k=1,2\cdots n)$是正数。

求证:$\frac{x_2^{\ 2}}{x_1}+\frac{x_3^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_n^{\ 2}}{x_{n-1}}+\frac{x_1^{\ 2}}{x_n}\geqq x_1+x_2+\cdots+x_n$

证:不妨设 $x_1>x_2>\cdots>x_n$ 并把原题改为一个更强的命题,对$(x_1x_2\cdots x_n)$的任何一个排列$(x_1'x_2'\cdots x_n')$

求证:$\frac{x_1^{2'}}{x_1}+\frac{x_2^{2'}}{x_2}+\cdots+\frac{x^{2'}}{x_n}\geqq x_1+x_2+\cdots+x_n$

①显然当 $x_1'=x_1$、$x_2'=x_2$、$\cdots x_n'=x_n$ 时“=”成立

②不妨设 $x_2'=x_1$ 则$\frac{x_1^{2'}}{x_1}+\frac{x_2^{2'}}{x_2}-\frac{x_2^{2'}}{x_1}-\frac{x_1^{2'}}{x_2}=(x_1^{2'}-x_2^{2'})\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$

③若 $f(x_1'\cdots x_n')=\frac{x_1^{2'}}{x_1}+\frac{x_2^{2'}}{x_2}+\cdots-\frac{x_n^{2'}}{x_n}$存在最小值,则最小值必定是 $f(x_1x_2\cdots x_n)$即 $f(x_1'x_2'\cdots x_n')\geqq x_1+x_2+\cdots+x_n$

下面我们对解多元函数极值问题的排除法,作一简单的小结

①多元函数的极值问题,内容上属于高等数学的范畴,多元函数的微分学和一般的不等式理论是解多元函数值问题的基本方法,所以在初等数学的范围内,简单的多元函数的极值问题也往往成为同学们的难题,用初等数学的知识解决这些难题,需要有相当的解题技巧,所以,尽管排除法并不是初等数学中解多元函数极值问题的唯一的和最好的

方法,(在以上大多数例题中,我们可以给出比排除法要简单得多的初等方法的证明),但它仍不失为一种中学生可以接受的、解题思路程序化的,可与换元法、解析法、待定系数法、数学归纳法…等方法相媲美的解题方法。

②排除法是反证法的一种表现形式,它的逻辑基础是逻辑中的排中律,所以,极值的存在是运用排除法的前提,这是在初等数学中讲排除法时一个不可忽略的问题,而在高等数学中,它可以用连续函数在闭区间上存在最值来解决。

③运用排除法解极值问题的首要步骤是要猜出函数的极值点 P_0,这为以下给出排除点 P_1 有了根据,也为进一步找出比较点(即中途中)P_2 指明方向,因为 P_2 原则上就在 P_0 与 P_1 的途径上。

④排除法的关键步骤是,对于任意给定的排除点 P_1,找出满足判别式条件的比较点 P_2,简单问题的比较点可用综合法定量地给出,而一般问题的比较点,则常用分析法定性地给出。

⑤排除法能化难为易的实质是:(1)化肯定命题为否定命题,(2)化多维问题为二维或一维问题。

⑥为了简化或扩大排除法的范围适用,必须掌握题式变形的方法,把形式上不适用于排除法的问题,转化为形式上适用排除法的典型问题,如例 13 把实际上用排除法较难的问题转化为实际上较易用排除法的问题,这是检验一个人运用排除法能力的标志,例如,在△ABC 中,求证 $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geqq 6$ 此题用排除法较难,但若用几何平均≧调和平均不等式,得 $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geqq\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}}$,因此只须证明 $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$ 即转为例 12 的证明,就容易得多了。

□“正难则反”原则在解题中的应用

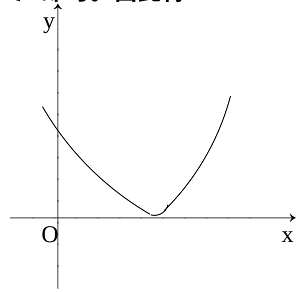
在解决数学问题时,一般是由所给条件从正面直接向结论逼近的。但这种正面进攻的方式,对有些数学问题的解决却不适合,这时若改从

反面进行思考,则往往会使问题迎刃而解。这是中学数学中一种常见的思考方法。这种方法没有一种统一的称呼,这里为了叙述方便起见,暂且称之为‘正难则反’原则。山西太原幼儿师范老师作了举例说明如下：

例1　m 为哪些实数值时,x 的任何实数值都不满足不等式 $(m+1)x2-2(m-1)x-3(m-1)<0$？

解:因原问题等价于,m 为何实数值时不等式 $(m+1)x^2-2(m-1)x-3(m-1)\geqslant 0$ 恒成立。当 $m\neq-1$ 时,函数 $y=f(x)=(m+1)x^2-2(m-1)x-3(m-1)$ 的图象是一条抛物线,由 $f(x)\geqslant 0$ 知,这条抛物线的顶点在 x 轴上,且开口向上,所以,m 只要满足 f(x) 的二次项系数大于 0,判别式 $\uparrow\leqslant 0$ 即可。由此得

$$\begin{cases} m+1>0 & ① \\ 4(m-1)^2+12(m+1)(m-1)\leqslant 0 & ② \end{cases}$$



由①得 $m>-1$,

由②得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant 1$。

综合得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant 1$。

例2　求在 xoy 平面上所有不在不等式 $|x^2-4|+|y^2-1|>0$ 的图象上的点的坐标。

解：点 (x,y) 不在不等式 $|x^2-4|+|y^2-1|<0$ 的图象上,那么,点 (x,y) 必在不等式 $|x^2-4|+|y^2-1|\leqslant 0$ 的图象上。

$|x^2-4|+|y^2-1|<0$ 不可能,故必得

$|x^2-4|+|y^2-1|=0$,

解得 $x=\pm 2, y\pm 1$。

, 所求点的坐标是 (2,1),(-2,1)(2,-1),(-2,-1)。

以上两例由于从反面寻求解决问题的等价命题,使一些复杂的问题化简变易。

另外,还有一种方法就是先考察结果的对立面,把不符合条件的求出来,然后再从总体中淘汰那些不符合条件的,最后使问题得解。

例3　如果二次函数 $y=mx^2+(m-3)x+1$ 的图象与 x 轴的交点到少有一个在原点的右侧,试求 m 的取值范围。

解:当函数图象与 x 轴的交点均在原点的左侧时,由一元二次方程有两非正实数根的条件得

$$\begin{cases}\Delta=(m-3)^2-4m\geqslant 0,\\ \dfrac{3-m}{m}<0,\\ 1/m>0。\end{cases}$$

解得$\begin{cases}m\geqslant 9\text{ 或 }m\leqslant 1,\\ m<0\text{ 或 }m>3,\\ m>0。\end{cases}$

综合得 $m\geqslant 9$,其反面为 $m<9$。

再考虑二次函数图角与 x 轴有交点的必要条件 $\uparrow\geqslant 0$ 且 $m\neq 0$,只要解

$$\begin{cases}m<9,\\ m\geqslant 9\text{ 或 }m\leqslant 1,\\ m\neq 0。\end{cases}$$

得 $m\leqslant 1$ 且 $m\neq 0$。

因此,当 $0<m\leqslant 1$ 或 $m<0$ 时,函数图象与 x 轴的交点至少有一个在原点右侧。

例 4　已知关于 x 的二次方程 $ax^2+2bx+c=0$,$bx^2+2cx+a=0$,$cx^2+2ax+b=0$ 中至少有一个有不同的实数根,试求 a、b、c 应满足的条件。

解:此题正面思考因情况复杂,不易得到结果,注意到"三个二次方程至少有一个有不同的实数根"的对立面是"三个二次方程都没有不同的实数根",于是先求出三个二次方程都没有不同的实数根时应满足的条件。

$\begin{cases}4b^2-4ac\leqslant 0,\\ 4C^2-4ac\leqslant 0,\\ 4b^2-4ac\leqslant 0。\end{cases}$三式相加得

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\leqslant 0$。

整理得

$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+(c-a)^2\leqslant 0。$$

而 $(a-b)^2\geqslant 0$,$(b-c)^2\geqslant 0$,$(c-a)^2\geqslant 0$,, $a=b$,$b=c$,$c=a$,即 $a=b=c$。然后根据"正难则反"原则,得 a、b、c 为不都相等的实数。又三个方程都是关于 x 的二次方程,故 $a\neq 0$,$b\neq 0$,$c\neq 0$。

因此 a、b、c 应为不都相等的非零实数。

此外,还有一类我们已经习惯了的反面思考,即证命题结论的反面不成立,而间接证原命题成立的反证法。

例 5　试证 0 与 1 间有无穷个有理数。

证:假设 0 与 1 之间仅有 n 个有理数:a_1、a_2、$\cdots a_n$。设 $P=a_1,a_2,\cdots,a_n$。则 P

是有理数,$P \neq a_i (i=1,2,\cdots,n)$,且 $0 < P < 1$。这说明在 0 与 1 之间至少有 $n+1$ 个有理数,与假设矛盾。

因此在 0 与 1 之间有无穷个有理数。

例 6　若 a、b、c 都是奇数,则方程 $ax^2+bx+c=0$ 必无有理根。

证 :假设方程有有理根,则这有理根必可表成既约分数 $\frac{q}{p}$,其中 $p \neq 0$。故有 $a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\left(\frac{q}{p}\right)^2+c=0$,

即 $aq^2+bpq+cp^2=0$。　　　　(*)

这里整数 p 和 q,只可能有三种情况:

p、q 都是奇数 ;p 奇数 q_n^2 偶数 ;p 偶数 q 奇数。由于 a、b、c 都是奇数,所以三种情况下,(*)式左边都为奇数,而(*)式右边是偶数,故(*)式都不可能成立。可知假设错误。

因此方程不可能有有理根。

例 5 和例 6 告诉我们,用反证法证题时,若结论的反面只有一种情况,一般采用归谬法 如果待证命题的结论的反面有多种情况,那么就得采用穷举法。如例 6,有的学生采用归谬法,假设方程有有理根,继而进行一连串推理,但总不易达到目的,或论证不严密。究其原因,这是因为原命题结论的否定面,实际上有三个,但比较隐蔽。

综上所述,不难看出,对于题目中含有“ 不存在 ”、“ 至少 ”、“ 不都 ”等词语,以及要 证的结论是无限的,其反面是有限的命题,如巧妙地利用“ 正难则反 ”原则,可以使这些问题化难为易,顺利地找到解题捷径。

□“ 显错正本 ”法在数学解题中的应用

所谓“ 显错正本 ”法,就是先针对学生掌握知识的薄弱环节,精心质疑,巧设“ 陷阱 ”,充分暴露学生在运用过程中易犯的错误,然后再针对学生所显露出的错误,引导学生展开讨论,深入剖析,揭露假象,正本清源,促使学生形成正确的知识,培养学生运用知识的能力。四川省阆中中学　程惠才老师介绍了“ 显错正本 ”法在培养学生运用知识的能力方面的作用。

1. 有益于排除干扰,深化概念

针对学生容易混淆的概念,设置“ 误区 ”,让学生碰壁,会在其脑海中留下深刻的影响,有利于概念的形成和深化。

例 1　解方程 $|x| = x + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

由于学生对复数的模与实数的绝对值的意义混淆不清,往往用处理实数绝对值的方法去解决复数模式的问题,因而对上题的解答很容易暴露出如下错误:

$|x| = x + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$,,　$x = \pm(x + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i)$

当 $x = x + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ 时,无解。

当 $x = -(x + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i)$ 时,$x = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

对此,我先不给予否定,而是提问学生:“什么是实数的绝对值?什么是复数的模?两者是一样吗?”学生马上陷入了沉思,后经师生的辩异对比,深深地认识到复数的模是实数绝对值概念的发展,而后者是前者的特殊情况,当 $b = 0$ 时,$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a|$. 至此,澄清了以往对复数的模与实数的绝对值的模糊认识,找到了上述推理的逻辑毛病,深化了对两个不同概念的理解。

2. 有益于正确理解解题过程中的等价变形

针对学生由于在解题中极易忽视转化变形的等价性而常常出错这一现象,提出相应的问题,让学生讨论,可使学生以错悟理,深化印象,较深刻地认识到等价变形的重要性。

例 2　某人的父亲 32 岁,儿子的岁数与 16 的差乘以儿子岁数与 4 差的算术平方根,等于儿子岁数的 4 倍减去父亲岁数的一半,那么儿子是几岁?

问题一提出,有学生马上解道:设儿子岁数为 x 岁,那么可列方程:$(x - 16)\sqrt{x-4} = 4x - \frac{32}{2}$两边同除以 $\sqrt{x-4}$得:$x - 16 = 4\sqrt{x-4}$,两边平方得:$x^2 - 32x + 256 = 16(x - 4)$,整理得:$x^2 - 48x + 320 = 0$。

解之得:$x = 40$ 或 $x = 8$

经代入原方程检验,只有 $x = 40$ 是原方程的根。这就奇怪了,儿子是 40 岁,反而比父亲大 8 岁。问题出在哪里?

学生感到非常奇怪,反复观察,一时难找原因。这时教师趋势提出:“原因就是两边同除以$\sqrt{x-4}$,方程失去 $x = 4$ 的根,两边平方,方程又产生 $x = 8$ 的增根,最后得出来的根 40,又不合题意,导致错误是由于方程变形中破坏了同解性。”

这样,索源觅错,从而恍然醒悟,印象尤为深刻。

3. 有益于消除‘思维定势’的消极影响

按照学生习惯性思维特征,精心设置陷阱以暴露思维的缺陷,这样做,可以培养学生全面、深入、严密思考问题的习惯。

例 3　直线 l 经过点 P(1,2),它在 y 轴上的截距等于它在 x 轴上截距的 2 倍,求 l 的方程。

由于学生受思维定势的不良影响,易设直线的截距式方程,作出了如下解答。

设 l 的方程为:$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

, $P(1,2)\in l$,且 $b=2a$

, $\frac{1}{a}+\frac{2}{2a}=1$,即 $a=2$,从而 $b=4$

, l 的方程为:$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$,即 $2x+y-4=0$

针对上述解法中的错误,笔者并没有急于指出,而提出了如下问题:此题还有其它解法吗?稍加思考,有学生给出了如下解法。

设 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$

令 $x=0$,得:$y=2-k$;令 $y=0$,得:$x=1-\frac{2}{k}$

由题意得:$2-k=2(1-\frac{2}{k})$

解之得:$k=2$ 或 $k=-2$

, l 的方程为 $y-2=2(x-1)$ 或

$y-2=-2(x-1)$

即 $2x-y=0$ 或 $2x+y-4=0$

这种答案的出现就象一颗石子投入平静的湖面,一石激起千层浪,顿时学生之间不由自主地展开了热烈的讨论。

究竟谁对谁错?

学生甲:第一种解法一定是错误的,因方程 $2x-x=0$ 符合题设条件,应是所求的方程,而在第一种解法中却没有求出。

产生错误的原因是什么?

学生乙:因直线的截距式方程不能表示截距为零的直线,而方程 $2x-y=0$ 表示的直线在两轴上截距为零,故利用截距式无法求出。

如果用第一种方法求解,那么需要采取哪些补救措施?

学生丙:分截距等于零和不等于零两种情况分别讨论,……

通过满怀激情地反思,学生不仅明确了直线的截距式方程适用条件,而且还看到了直线方程各种形式的内在联系,这对他们以后正确灵活地利用直线方程的各种形式解题无疑起到了良好的作用。

4. 有益于培养学生严格审题的良好习惯

针对学生审题不慎,常常忽视题设的隐含条件,有意设置思维障碍,诱使学生误入"岐途",这样做,可使学生吸取深刻地教训,养成严格审题的好习惯。

例 4 已知 $3x^2+2y^2=6x$,求 x^2+y^2 的最大值。

经验告诉我们,在求有关二次函数的最值时,学生通常不审视自变量的取值范围,结果在练习中,出现了如下解答:

由 $3x^2+2y^2=6x$ 得:$y^2=\frac{6x-3x^2}{2}$

于是,$x^2+y^2=x^2+\frac{6x-3x^2}{2}=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}(x-3)^2$

当 $x=3$ 时,$(x^2+y^2)_{max}=\frac{9}{2}$

对此,多数学生面有喜色,表示赞同,但不少数学生产生了疑虑,并提出,如果 $x=3$,则由 $3x^2+2y^2=6x$ 得 $y^2=-\frac{9}{2}$,这是不可以的。

此时课堂活跃起来,大家议论纷纷,忽有一个学生抢先答道:"由 $2y^2=6x-3x^2\geqslant 0$ 得 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant 2$",顿时全班学生恍然大悟,补充道:因二次函数 $f(x)=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}(x-3)^2$ 在 $x\in[0,2]$ 上为增函数,故当 $x=2$ 时,x^2+y^2 取得最大值 $\frac{9}{2}-\frac{1}{2}(2-3)^2=4$。

这样,以错悟理,深化印象,使学生在挫折中受到深深地启发,养成善于审题的好习惯,为解题顺利铺平道路。

总之,教学实践证明,让学生经过"上当——出错——剖析——纠错"这一曲线过程来掌握知识,使学生"吃一堑,长一智",常常比起给学生直接灌输知识,效果尤为明显,对于培养学生正确运用知识的能力大有裨益。要采用这种方法,要求教师在教学中,随时注意收集学生常出现的差错,精心自编习题置疑,巧妙地寓乐于教与学之中。

□结果分析法及其在解题中的运用

在证明不等式和求函数最值的时候,我们一定要注意结果中等号

成立的条件,对这个条件的正确分析,常常可导致出一条简明而又正确的解题思路。

例 1. 已知 $a,b\in R^+$ 且 $a+b=1$,求证:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$$

先看对例 1 的一种不正确的处理方法:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$$

$$\geqslant ab+\frac{1}{ab}+2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\geqslant 2+2=4。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但 $4<\frac{25}{4}$,失败!

原因分析:原不等式显然是对称的,a、b 的地位一致,"="应该在" $a=b=\frac{1}{2}$ 时达到。而上述解法中(1)式的等号虽然是在 $a=b$ 时达到,但(2)中的等号却是在 $ab=1$ 时达到。部分结果中,"="成立的条件不相一致,是以思路失败的根本原因。因此,可以考虑对 ab 或$\frac{1}{ab}$进行分拆。假设把 ab 拆成 $ab=rab+(1-r)ab$,由 $rab+\frac{1}{ab}\geqslant 2\sqrt{r}$可知:此式等号要点在 $a=b=\frac{1}{2}$时,即 $ab=\frac{1}{4}$时成立,只有取 $r=16$,据此,我们有如下解法:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$$

$$\geqslant ab+\frac{1}{ab}+2$$

$$=16ab+\frac{1}{ab}-15ab+2$$

$$\geqslant 2\sqrt{16}-15\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+2=8-\frac{15}{4}+2=\frac{25}{4}。$$

用类似于上面的方法可以求解如下的问题:

已知 $a、b\in R^+$ 且 $a+b=1$,求证:

1) $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2\geqslant\frac{25}{4}$;

2) $\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)^2+\left(b^2+\frac{1}{a^2}\right)^2\geqslant\frac{289}{16}$;

3) $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)\geqslant\frac{289}{16}$。

例 2. **已知** $f(\alpha)=\sin\alpha\sin2\alpha$,$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,**求** $f(\alpha)$ **的最大值。**

错误解法：

$f(\alpha)=2\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\leqslant2\left(\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{3}\right)^3$……………………(3)

$=2\left(\frac{\sqrt{5}\cos(\alpha-\operatorname{arctg}2)}{3}\right)^3$

$\leqslant\frac{10}{27}\sqrt{5}$,………………………………(4)

因此 $f(a)$ **的最大值是**$\frac{10}{27}\sqrt{5}$。

我们给出错误解法的分析。

易知(3)**中"=”成立的条件是** $\sin a=\cos a$,**即** $a=\frac{\pi}{4}$

(4)**中"=”成立的条件是**:$\cos(a-\operatorname{arctg}2)=1$,**即** $a=\operatorname{arctg}2$。

部分不等式对"=”成立的条件不一致！因而 $f(a)$ **取不到值**$\frac{10}{27}\sqrt{5}$。

基于上述解法的思路,为使(3)、(4)**两式"=”成立的条件一致,我们引进一个常数** r,**再作如下的处理：**

$f(a)=2\sin a\cdot\sin a\cdot\cos a$

$=\frac{2}{r}\sin a\cdot\sin a\cdot r\cos a$

$\leqslant\frac{2}{r}\left(\frac{2\sin a+r\cos a}{3}\right)^x$……………………(5)

$=\frac{2}{r}\left[\frac{\sqrt{4+r^2}\cos(a-\operatorname{arctg}\frac{2}{r})}{3}\right]^3$

$\leqslant\frac{2(4+r^2)^{\frac{3}{2}}}{27r}$。 ……………………(6)

(5)**中"=”成立的条件为**:$\sin a=r\cos a$,**即**:$\operatorname{tg}a=r$.

(6)**中"=”成立的条件为**:$\cos(a-\operatorname{arctg}\frac{2}{r})=1$,

即:$a=\operatorname{arctg}\frac{2}{r}$,**即**:$\operatorname{tg}a=\frac{2}{r}$。

(5)、(6)**两式必须一致,因此**:$r=\frac{2}{r}\Rightarrow r=\sqrt{2}$。

这样便有如下的正确解法；

$f(a)=2\sin a\cdot\sin a\cdot\cos a$

$=\sqrt{2}2\sin a\cdot\sin a\cdot\sqrt{2}\cos a$

$\sqrt{2}\left(\frac{\sin a+\sqrt{2}\cos a}{3}\right)^{3}$

$=\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{6}\cos(a-\operatorname{arctg}2)}{3}\right]^{3}$

$\sqrt{2}\cdot\frac{6\sqrt{6}}{27}=\frac{4}{9}\sqrt{3}$

, $f(a)$的最大值为$\frac{4}{9}\sqrt{3}$（此时 $a=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$）。

从以上的分析可知：在证明不等式或求最值时，最好能减小部分不等式出现的次数。

□均衡法及其在解题中的运用

数学问题奥妙无穷，有时一题多解，令人兴奋不已；有时一道难题却使人不知所措，无从下手。可见，重要性并不在于解法本身，而是在于解题的思想方法。

同一法、反证法、归纳法等都是我们非常熟悉的数学方法。究其实质，无一不是辩证唯物主义的逻辑形式和思想方法，均衡与不均衡是事物发展变化中的一对矛盾，抓住这对矛盾来思考数学问题，处理变量关系，就能得到一种新的方法——均衡法。这也可以说是一种从均衡出发，分析处理不均衡与均衡的关系，从中寻找问题答案的解题思想方法。江苏省无锡市一中乔春源老师通过几则例题作了说明。

例 1　（极值问题）

试证明周长一定的矩形中以正方形的面积为最大。

这是中学数学中屡见不解的二次函数极值问题，常规解法已广为人知，无须列举。这里用均衡法再做解答。我们可以这样考虑问题：

矩形周长为定值 l，若四边均等，则各边长$\frac{l}{4}$。若长宽不一，则必与均值$\frac{l}{4}$之间存在差异。设长为$\frac{l}{4}+a$，宽为$\frac{l}{4}=\beta$，于是面积 $S=\left(\frac{l}{4}+a\right)\left(\frac{l}{4}+\beta\right)$. 分析 α、β 的关系，就能得出一种新的解法。

解：设矩形的周长为定值 l，长为$\frac{l}{4}+a$，宽为$\frac{l}{4}+\beta$，则面积 $S=$

$\left(\frac{l}{4}+a\right)\left(\frac{l}{4}+\beta\right)=\frac{l^2}{16}+\frac{l}{4}(\alpha+\beta)+\alpha\beta$。

周长 $2\left[\left(\frac{l}{4}+a\right)+\left(\frac{l}{4}+\beta\right)\right]=l+2(\alpha+\beta)=l$,

, $\alpha+\beta=0$。由此 $\alpha\beta\leqslant0$,且(1)式为 $S=\frac{l^2}{16}+\alpha\beta\leqslant\frac{l^2}{16}$,而且仅当 $\alpha\beta=0$ 时等号成立。

由 $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha\beta=0\end{cases}$ 可得 $\alpha=\beta=0$。这时

$\frac{l}{4}+a=\frac{l}{4}+\beta=\frac{l}{4}$ 即为正方形。

, 正方形时面积为最大 $\left(\frac{l^2}{16}\right)$,原命题得证。

以上解法有点别致,但很简洁。它从变量变化中的均衡状态出发,找出不均衡与均衡的差异,角从已知条件分析关系,得出差异为零的结果,即又回到了均衡,故称均衡法。用这种方法来处理某些函数极值问题或不等式问题效果尤其明显。试看:

例 2 (不等式问题)

设 x、y、z 是正数,$x+y+z=\frac{3}{2}$ 或 6,试证不等式

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)\geqslant\frac{125}{8}$

当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立。

本题是湖北《数学通讯》88 年第 6 期的有奖征解题,有一定难度,常规方法不易证明,改用均衡法却不难证得。

证明 :不失问题的一般性,可设 $0<x\leqslant y\leqslant z$。

又设 $x+y+z=t$($t=\frac{3}{2}$ 或 6),且 $x=\frac{t}{3}+a$,$y=\frac{t}{3}+\beta$,$z=\frac{t}{3}+\gamma$($\leqslant\alpha\ \geqslant\alpha\ \gamma$)。

显见 $\alpha+\beta+\gamma=0$, , $\alpha\gamma\leqslant0$(否则 $\alpha>0$,$\gamma>0$)或 $a<0$,$r<0$,由(1)式可得 $\beta>0$ 或 $\beta<0$。于是 $\alpha+\beta+\ |\neq0$,$x+y+z\neq t$,与题设矛盾),

又 $0<x\leqslant y\leqslant z$,, 只能 $a\leqslant0$,$|\geqslant0$(β 正、负、零均可取,但 $a\alpha\ \geqslant\alpha\ \gamma$)。

(I)当 $t=\frac{3}{2}$ 时,有 $x=\frac{1+2a}{2}>0$,

$y=\frac{1+2\beta}{2}>0$,$z=\frac{1+2\gamma}{2}>0$。由(1),则 $0<1+2a\leqslant1+2\gtrless1+2\gamma$。

, $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(+y\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$$=\left(\frac{1+2a}{2}+\frac{2}{1+2a}\right)\left(\frac{1+2\beta}{2}+\frac{2}{1+2B}\right)\left(\frac{1+2\gamma}{2}+\frac{2}{1+2\gamma}\right)$$

$$=\frac{(1+2a)^2+2^2}{2(1+2a)}\cdot\frac{(1+2\beta)^2+2^2}{2(1+2\beta)}\cdot\frac{(1+2\gamma)^2+2^2}{2(1+2\gamma)}$$

上式等号右端为 3 个正分数之积,分母中 $2(1+2\gamma)$ 最大,分子中 $(1+2a)^2+2^2$ 最小。

, $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)\geqslant$

$\left[\frac{(1+2a)^2+2^2}{2(1+2\gamma)}\right]^8$。 (1)

左端三式相等时取等号,不相等时取不等号。

只须取 $a=\gamma=0$(**此时必有** $\beta=0$), (2)

式右端为 $\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$。

, $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)\geqslant\frac{125}{8}$**成立。**

$0<x=\frac{t}{3}+a\leqslant y=\frac{t}{3}+\lesseqgtr z=\frac{t}{3}+\gamma\left(t=\frac{3}{2}\right)$,**且** $a+\beta+\gamma=0$,

即 $0<x=\frac{1}{2}+a\leqslant y+\frac{1}{2}+\lesseqgtr z=\frac{1}{2}+\gamma$,**且** $a+\beta+\gamma=0$。

, $x+y+z=\frac{3}{2}$ **当** $x=y=z$ **时** $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{1}{2}+2\right)^3=\left(\frac{125}{8}\right)$,

(3)**式等号成立。**

当 x、y、z **不全等时,从**(2)**式的推导可知**,(3)**式等号不成立。**

, **当且仅当** $x=y=z=\frac{1}{2}$**时**,$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)\geqslant\frac{125}{8}$**取等号。**

(Ⅱ)**当** $t=6$ **时,同理可证,当且仅当** $x=y=z=2$ **时**,(3)**式取等号。综合**(Ⅰ)、(Ⅱ)**原命题得证。**

例 2 **的解题思想也是从均衡**($x=y=z=\frac{t}{3}$)**出发,找出不均衡**($x=\frac{t}{3}+a$,$y=\frac{t}{3}+\beta$,$z=\frac{t}{3}+\gamma$)**与均衡的差异,再从已知条件分析** a、β、γ **等的关系,推出** $a=\beta=\gamma=0$ **时,不等式中等号成立,差异为零,即回到了均衡**($x=y=z$)。

其实,均衡法并不限于"均衡→不均衡→均衡"的模式,作为一种解题的思想方法,其实质是从均衡性入手考虑问题,寻找具体的解答方法。某些逻辑型的数学问题,甚至同物理有关的问题,也往往可以用均

衡法思想来找到解法。如例3(智力竞赛题):

有大小一样,外表一致的13颗钢珠,其中一颗是次品,重量有所不同,但不知轻重。试用一架没有法码的天平,最多3次就把次品找出。

为了利用天平,须将钢珠分成若干份。怎样分法才好呢?用均衡法考虑,应尽可能分得平均一些。又规定至多使用天平3次,故不妨把13颗钢珠分成3份;显见4、4、5、的分法比较均衡。这样,结合逻辑分析,不难找到问题的解法。

解 把13颗钢珠分成4、4、5三份,分别记作甲、乙、丙三堆,先用天平比较甲、乙两堆的轻重。1.若重量相等(天平平衡),则次品必在丙堆。再取甲,乙两堆的合格钢珠3颗,同丙堆中任取3颗比较:

(1)若相等,则次品必在丙堆剩余的2颗中(其余11颗均合格)。再取合格的一颗同丙堆剩余2颗之一比较:

①若相等,则丙堆余下的那颗为次品。

②若不等,则从丙堆所取的那颗为次品。

(2)若不等,次品必在从丙堆取的3颗之中,且可知其轻重。不妨假设次品较轻(或较重,方法相同),再从这3颗中取出2颗比较:

①若相等,则轻者(或重者)为次品。

②若不等,则余下的那颗为次品。

2.若重量不等(天平不平衡),则丙堆5颗均合格,次品必在甲、乙两堆中。再取甲堆的2颗及乙堆的3颗(记住各自的取处),同丙堆的5颗比较:

(1)若相等,次品必在甲堆剩余的2颗或乙堆剩余的1颗中,再取甲堆的2颗比较:

若相等,则次品为乙堆的那颗。

②若不等,则轻重与第一次放甲堆的那端一致的那颗为次品。

(2)若不等,则可知次品的轻重及取自甲堆还是乙堆(必与第一次天平某端相一致):

①若知次品在甲堆所取的2颗中,再用天平比较之,根据次品轻重即可确定。

②若知次品在乙堆所取的3颗中,再取其中2颗比较:若相等,则次品为剩下的那颗;若不等,则根据次品轻重就能确定是哪颗。

例4 (检验问题)

现有5050只电阻元件,其中阻值为1欧姆的有1只,2欧姆的2只,……,100欧姆的100只。已知有一只元件标称值可能与实际不符,试用直流电源,电流表、电压表各一只迅速查验,若有次品,加以剔除。试问:应当怎样检验?

本题用均衡法来解答的大体思想是:

将不同阻值的电阻元件进行串、并联组合,再串接电流表,通上电源,如果电路各段阻值均衡分布,那么其端电压也应该相等。若某处电阻有了问题,则该段

电压一定与众有别,反之亦然。这样用电压表就能迅速排查。为此,这样来设计电路 把标称值相同的电阻都并联起来作为电路中的每一段,然后把各段串联接通,则各段电阻都为 1 欧姆,端电压应当相等。设电源电压为 E 伏特,算出电路总电阻为 100 欧姆,所以元件无次品时电流表读数应为$\frac{E}{100}$安培。若检验后结果电流表读数与此吻合,则说明元件全部合格。若读数与此不相同,则元件中存在次品,可用电压表在各段分别排查。发现端电压与众不同的,就是次品所在的那一段,再把这段上的电阻元件(标称值相同)分成两组,尽量分得均衡些,分别并联后再进行串接,然后用电压表作第二次排查。如此反复进行,很快就能找到哪个元件是次品,如果在第一次排查中采用优先法(第二次若把相同标称值的元件全部串联,也能采用),则检验时间可以更省。

以上四例说明对某些变量问题、设置问题、分布问题等都可以用均衡法思想来寻找解答的方法。显而易见,这样做比起盲目解题要来得科学,更有效一点。

□数字化方法及其在解题中的运用

我们先来看这样一个问题。

n 个点 m_1、m_2、……,m_n 顺次排在同一条直线上,每个点涂上红色或蓝色,如果相邻点间线段 mi、m_{i+1} 的两端颜色不同,则称 m_im_{i+1} 为标准线段,已知 m_1 和 m_n 的颜色不同,试说明标准线段的条数一定是奇数。

这是一个非常规数学问题,无通法可循,这里介绍一种有趣而巧妙的解法:

设标准线段的条数为 k_1,将点 m_i 和数 a_i 作如下的对应:

$$a_i=\begin{cases}1,\text{点 } m_i \text{ 为红色;}\\ -1,\text{点 } m_i \text{ 为蓝色。}\end{cases}$$

其中,$i=1,2,\cdots\cdots,n$。那么,由题设知:

$a_1a_n=-1$

由于 $a_1a_n=a_1a_n\cdot a_2^{\ 2}\cdot a_3^{\ 2}\cdots a_{m-1}^{\ \ 2}$

$=(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}a_n)$

$=(-1)^k$。

因此,$(-1)^k=-1$,即 k 为奇数。

以上的解题过程，首先将原问题考察的对象数字化，然后根据数的奇偶性讨论得出结论。我们姑且称此法为数字化方法。数字化方法的应用将会给我们处理问题带来便利，湖南新化县教师进修学校第十六中学 肖乐农 曹俊兴老师举中小学数学竞赛中的若干例子，说明了这种方法的妙处。

例 1 把 13 枚硬币按'国徽'朝下的放法放在桌上，如果每次翻动 12 枚，能使这 13 枚硬币都翻成'国徽'朝上吗？为什么？(哈尔滨市第八届(1998)小学生数学竞赛题)

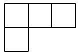
解 规定'国徽'朝下时为 1，"国徽'朝上时为 -1，并定义 ak 为径 k 次翻动后上述数字之积。

初始状态：$\underbrace{1、1\cdots\cdots、1}_{13个1}$，$a_0=1^{13}=1$；

第 1 次翻动 12 枚硬币，改变 12 个数的符号，即 $a_1=a_0(-1)^{12}=1$；第 2 次翻动 12 枚硬币，改变 12 个数的符号，即 $a^2=a_1(-1)^{12}=1$；……如此翻下去，不管翻动多少次，总是每次改变 12 个数的符号，即有 $a_n=a_{n-1}(-1)^{12}=1$。

但如果 13 枚硬币都翻成'国徽'朝上，应存在自然数 i，使得 $a_i=(-1)^{13}=-1$。而上面已说明这是不可能的。

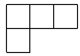
故不能使 13 枚硬币都翻成'国徽'朝上。

例 2　将 8×8 方格纸板的一角剪去一个 2×2 的正方形，问余下的 60 个方格能否剪成 15 块形如标‘’的小纸片？〔第四届（1989）东北三省中学数学邀请赛试题〕

解：我们先把题给图形的 60 个方格中分别标上数字 1 和 -1（如图 1）则要剪成的四连格中的数字之和为 2 或 -2。若能剪成 15 块四连格，其中 x 块数字和为 2，y 块数字和为 -2，则有

$$\begin{cases} x+y=15, \\ 2x-2y=0. \end{cases}$$

这个二元一次方程组显然没有整数解，矛盾。

所以，题中所给的 60 个方格不可能剪成形如‘’的纸片。

例 3　将正方形 ABCD 分割为 n^2 个相等的小方格（n 为自然数），把相对的顶点 A、C 染成红色，把 B、D 染成蓝色，其它交点任意染成红、蓝两色中的一种颜色。

证明：恰有三个顶点同色的小方格的数目必是偶数。（1991 年全国初中数学联赛试题）

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1		
1	-1	1	-1	1	-1		

图 1

证法 1：用数代表颜色，将红色记为 O，蓝色记为 1，再将小方格分别编号为 $1,2,3\cdots n^2$。又记第 i 个小方格四个顶点的数字之和为 M_i，若恰有三个顶点同色，则 $M_i=1$ 或 3，为奇数；否则 M_i 为偶数。

在 $M_i+M_i+\cdots\cdots+M_{n2}$ 中，有如下事实：

①正方形内部的交点，各加了 4 次；

②正方形边上非端点的交点，各加了 2 次；

③正方形的四个顶点，各加了 1 次（含两个 0，两个 1）。

于是有 $M_1+M_2+\cdots+M_n{}^2=4\times$（内部交点相应的数之和）$+2\times$（边上非端点的交点相应的数之和）$+2$，即为偶数。

因此，在 $M_1,M_2,\cdots\cdots M_n{}^2$ 中，必有偶数个奇数，这就是说，恰有三个顶点同色的小方格必有偶数个。

证法 2：记红色为 1，蓝色为 -1，将小方格编号为 $1,2,3,\cdots,n^2$，记第 1 个小方格四个顶点的数字之积 N_i。若恰有三个顶点同色，则 $N_i=-1$，否则 $N1=1$。在 $N1,N2,\cdots\cdots,Nn^2$ 中，由于正方形内部交点重复 4 次，边上不是端点的交点出现 2 次，A、B、C、D 四个顶点相应数的乘积为 $1\times1\times(-1)\times(-1)=1$，于是

$$N_1\times N_2\times\cdots\cdots\times N_n{}^2=1.$$

因此，$N_1,N_2,\cdots\cdots,N_n{}^2$ 中 -1 的个数必为偶数，即恰有三个顶点同色的小方格必是偶数个。

□利用矛盾的同一性解题

同一性是指的矛盾双方互相联系、互相依赖、互相贯通的性质，是一性的表现形式之一是矛盾的双方各向自己的对方转化，矛盾双方的这种属性，在数学解题中有化繁为简，化难为易的作用。四川省宜宾县一中郭青初老师举数例作了分析：

1. 正与反的‘同一”

所谓‘正与反的同一’指的是对一些问题的结论，若其正面情况复杂，而反面情况简单，不妨从结论的反面去思考和探索，得出反面的结论后，使问题获解。

例 1　求二项式 $(\sqrt[15]{3x}-y)^{15}$ 展开式中所有无理系数之和。

分析　本题若正面求解，必须用二项式定理展开，先找出所有无理系数，再求其和，这显然十分麻烦，则试一试从反面思考。

解　该二项展开式中所有理数系数只有两项

$(\sqrt[15]{3x})^{15}=3x^{15}$ 及 $(-y)^{15}=-y^{15}$

其系数之和为 $3+(-1)=2$

又，在二项式 $(\sqrt[15]{3x}-y)^{15}$ 中，令 $x=y=1$，可得展开式中所有各项的系数和为 $(\sqrt[15]{3}-1)^{15}$。

故所有理数系数之和为 $(\sqrt[15]{3}-1)^{15}-2$。

2. 主与客的‘同一”

所谓‘主与客的同一’指的是通常我们在解题时，总是把注意力集中到那些主要变元上，当思维受阻时，若能注意在某种特定的条件下，从结论与条件的内在联系出发，变换思维角度，反客为主，使解题得以突破。

例 2　解方程 $\sqrt{6+\sqrt{6-x}}=x$

分析　显然这是一个无理方程，转化为有理方程是一个关于 x 的四次方程，不易求解，但方程中仅有 x 与常数 6 两数，我们不妨来个颠倒，将变元视为常数，将常数视为变元一试。

解　原方程变形为

$6^2-(2x^2+1)6+(x^4+x)=0$

这是一个关于 6 的二次方程，解得

$6=x^2+x$ 或 $6=x^2-x+1$

再解这两个 x 的二次方程得 $x_1=2$,$x_2=-3$,

$x^3=\frac{1}{2}(1+\sqrt{21})$,$x^4=\frac{1}{2}(1-\sqrt{21})$。

经检验知 x_1、x_3、x_4 是原方程的根。

例 3　**已知曲线系 C_k 的方程为** $\frac{x^2}{a-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$。**试证明对坐标平面内任一点 $(a,b)(a,b\neq0)$,总存在 C_K 中的一椭圆和一双曲通过该点。**

分析若从曲线系的角度去思考,即以 x,y 为主元,思维受阻。若从 k 来考虑,不难看出,当 $k<4$ 或 $4<k<9$ 时 C_k 表示的曲线分别为椭圆和双曲线,问题归结为证明在区间$(-\ \ ,4)$和$(4,9)$内分别存在 k 值,使曲线 C_k,过点(a,b)。

证明　**设点$(a,b)(a,b\neq0)$在曲线 C_k 上,则**

$$\frac{a^2}{9-k}+\frac{b^2}{4-k}=1 \qquad (*)$$

整理得

$$k^2+(a^2+b^2-13)k+(36-4a^2-9b^2)=0$$

令 $f(k)=k^2+(a^2+b^2-13)k+(36-4a^2-9b^2)$

则 $f(k)$ 为开口向上的一条抛物线。

, $f(4)=-5b^2<0$

$f(9)=5a^2>0$

可知 $f(k)=0$,即方程$(*)$在$(-\ \ ,4)$和$(4,9)$内分别有一根。

即对平面内任一点(a,b),总存在曲线系 C_k 中的一椭圆和一双曲线通过该点。

□唯一性解题中的运用

利用唯一性解题的好处是不需要顾忌各种数学运算的等价性,大大减少常规解法的过程。即使是在很特殊情况下得出的结果,也可以由唯一性断定其就是一般性的结果,陕西省耀县水泥厂子弟学校罗增儒老师举例说明如下:

1. 因数分解的唯一性

例 1、$6^{2x+4}=2^{x+8}3^{3x}$

(高中数学第一册第 57 页第 17(1)题)

解原方程即

$$2^{2x+4}\cdot3^{2x+4}=2^{x+8}\cdot3^{3x}$$

而 2、3 均为质数,由因数分解的唯一性,应有

$$\begin{cases}2x+4=x+8\\2x+4=3x\end{cases}$$

得 $x=4$

2. 因式分解的唯一性

例2　在有理数范围内分解 x^4+x^2+1

(初中代数第二册第113页第5(2)题)

解： 设　$2\cos\theta=x+\dfrac{1}{x}$，

则 $x^2+\dfrac{1}{x_2}=4\cos^2\theta-2$

$$x^4+x^2+1=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)$$

$$=x^2(4\cos^2\theta-1)$$

$$=x^2(2\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)$$

$$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$$

$$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

虽然这是由单位圆得出的分解式，但由多项式分解的唯一性知，这就是所求的分解式。

3. 部分分式展开式的唯一性

例3　已知

$$\frac{7x+11}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

求 A、B 的值。

(初中代数第四册第196页第12(1)题)

解一：由

$$\frac{7x+11}{(x+1)(x+3)}=\frac{2(x+3)+5(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x+3}$$

及部分分式分解的唯一性得 $A=2$，$B=5$。

解二： 原式变为

$$7x+11=A(x+3)+B(x+1)$$

分别令 $x=-1$，-3 得 $A=2$，$B=5$。

4. 过圆周上一点的切线的唯一性

例4　解方程

$(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=2\sqrt{2}$

解:原方程即

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos x+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin x=1$$

或 $\cos 15°\cos x+\sin 15°\sin x=1$

这表明,单位圆上的 $A(\cos x,\sin x)$ 在过单位圆上一点 $B(\cos 15°,\sin 15°)$ 的切线

$X\cos 15°+Y\sin 15°=1$

上。由切线的唯一性知 A、B 重合

$$\begin{cases}\cos x=\cos 15°\\ \sin x=\sin 15°\end{cases}$$

得　$x=k\cdot 360°+15°\quad k\in Z$

5. 两点决定唯一的一条直线

例 5　从圆外一点 $M(x_0,y_0)$ 向圆 $x^2+y^2=R^2$ 作切线 MA、MB,切点为 A、B,求过 A、B 的切点弦方程。

解:设 $A(x_1、y_1)$,$B(x_2、y_2)$,则过 A、B 的切线方程为

$x_1x+y_1y=R^2$

$x_2x+y_2y=R^2$

两切线均过 M,有

$x_1x_0+y_1y_0=R^2$

$x_2x_0+y_2y_0=R^2$

这表明,A、B 均在直线

$x_0x+y_0y=R^2$

上。由于过两点的直线是唯一的。故这是过 A、B 的切点弦方程

6. 数制表示的唯一性

例 6　求方程的整数解

(a) $10^x+10^y+10^z=11.1$

(b) $2^x+2^y+2^z=0.8125$

解:(a) 由 $11.1=10^1+10^0+10^{-1}$ 及十进数制表示的唯一性得方程的整数解为

$$\begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1\\ y=1\\ z=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=0\\ y=-1\\ z=1\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1\\ y=0\\ z=1\end{cases}$$

(b)由高中数学第三册第 188 页知

$0.8125 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4}$

又由十进数制与二进数制变换的唯一性得方程的整数解为

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \\ z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \\ z=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{cases}$$

□辗转相除法及其在解题中的运用

1. 辗转相除法原理

设有两个正整数 a,b,且 $a>b$,用 b 去除 a,得:

$a = bq_1 + r^{i}$,其中 $r_1 < b$,

如果 $r_1 \neq 0$,再用 r_1 去除 b,得:$b = r_1 q_2 + r_2$,其中 $r_2 < r_1$,

如果 $r_2 \neq 0$,再用 r_2 去除 r_1,得:

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$,其中 $r_3 < r_2$,

如果 $r_3 \neq 0$,再用 r_3 去除 r_2,

…………

这样辗转相除下去,由于 $b, r_i, r_2, r_3 \cdots\cdots$ 是递降的非负整数数列,并且数列的项数 $\leqslant b$,所以最后定能得到 $r_{n+1}=0$,即 $r_{n-i} = r_n q_{n+1}$。

此即辗转相除法,据此,可以得到

$(a,b) = (b,r_1) = (r_1,r_2) = \cdots = (r_{n-1},r_n) = r_n$。

这就提供了求两个正整数 a,b 的最大公约数的方法。

例　把 $\dfrac{15555}{33677}$ 化成既约分数。

解　先求(33677,15555)

$33677 = 15555 \times 2 + 2567$

$15555 = 2567 \times 6 + 153$

$2567 = 153 \times 16 + 119$

$153 = 119 \times 1 + 34$

$119 = 34 \times 3 + 17$

$34 = 17 \times 2.$

，（33677，15555）=17

上面一系列等式，可以写成除法算式如下：

$$\begin{array}{r|r|r|l}
 & 3\ 3\ 6\ 7\ 7 & 1\ 5\ 5\ 5\ 5 & \\
2 & 3\ 1\ 1\ 1\ 0 & 1\ 5\ 4\ 0\ 2 & 6\\ \hline
16 & 2\ 5\ 6\ 7 & 1\ 5\ 3 & 1\\
 & 2\ 4\ 4\ 8 & 1\ 1\ 9 & \\ \hline
3 & 1\ 1\ 9 & 3\ 4 & 2\\
 & 1\ 0\ 2 & 3\ 4 & \\ \hline
 & 1\ 7 & 0 &
\end{array}$$

而 $33679 \div 17 = 1981$，$15555 \div 17 = 915$

，$\dfrac{15555}{33677} = \dfrac{915}{1981}$

2. 用辗转相除法解答的题目

（1）证明：对任意自然数 n，分数 $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ 不可约。（1959 年第一届国际中学生数学竞赛题）

证　用辗转相除法写成除法算式如下：

$$\begin{array}{r r|r|r|l}
 & & 21n+4 & 14n+3 & 2\\
 & 1 & 14n+3 & 14n+2 & \\ \hline
7n+1 & 1 & 7n+1 & & \\
 & & 7n+1 & & \\ \hline
 & & 0 & &
\end{array}$$

，$(21n+4,14n+3) = 1$，

即 $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ 不可约。

（2）. 求证无论 x 等于什么整数，多项式 $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$ 同 $g(x) = x^4 + 3x^2 + 1$ 的值互素。

证　用辗转相除法写成除法算式如下：

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x & x^5 + 4x^3 + 3x & x^4 + 3x^2 + 3x & \\
 & x^5 + 3x^3 + x & x^4 + 2x^2 & x\\ \hline
x & 3x^3 + 2x & x^2 + 1 & \\
 & x^3 + x & x^3 & x\\ \hline
x & x & 1 & \\
 & x & & \\ \hline
 & 0 & &
\end{array}$$

∴ $(f(x),g(x))=1$.

(3). 设 n 是自然数,试证 $2^2+1,2^{2^2}+1,\cdots\cdots,2^{2^n}+1$ 任意两数都是互素的。

(1940 年匈牙利奥林匹克数学竞赛题)

证　设 $a_k=2^{2^k}$,$k=1,2,\cdots,n$. 由于 $a_k+1-1=(2^{2k})^2-1=a^2k-1=(a_k-1)(a_k+1)$所以数列 $\{a_k-1\}$ 中除第一项外,其它各项能被它前面的任意项整除。

既然$(a_k+1)\mid(a_{k+1}-1)$,故当

$k<m(1\leqslant s<m\leqslant n)$时,$(a_s+1)\mid(a_m+1)$

所以,

$2^{2^m}+1=a_m+1=a_m-1+2=q(as-1)$

$+2=q(2^{2^s}+1)+2$

设$(2^{2^m}+1,2^{2^s}+1)=d$,则 d 是奇数。又$(2^{2m}+1,2^{2^s}+1)=(2^{2^s}+1,2)=d$。

∴ $d\mid 2$,d 又是奇数,∴ $d=1$。即命题得证。

(4). 设 a,b,c,d 都是整数,且与 $m=ad-bc$ 互素,证明对任意整数 x、y、m 整除 $ax+by$ 时,$cx+dy$ 也能被 m 所整除。(1927 年匈牙利奥林匹克数学竞赛题)

证　$d(ax+by)-b(cx+dy)$

$=adx+bdy-bcx-bdy$

$=x(ad-bc)=mx$

可见 $ax+by$ 与 $cx+dy$ 同时是 m 的倍数,或者同时不为 m 的倍数。

5	$5n+6$	$n-13$	1
	$5n-65$	71	
	71	$n-84$	

(5). 求使得$\frac{n-13}{5n+6}$是一个非零的可约分数的最小正整数 n,(1985 年第三十六届美国中学数学竞赛试题)

解　$\frac{n-13}{5n+6}$非零,即 $n-13$ 非零。

用辗转相除法列除式如下:

∵ 71 是素数,∴ 71 是 $n-13$ 与 $5n+6$ 的最大公约数,且 $n-13\neq 0$,又 n 是符合题设条件的最小正整数,∴ $n-13$ 是 71 的 1 倍,即 $n-13=71$,∴ $n=84$。

(6)数列 101,104,116,……的通项公式为 $a_n=100+n^2$,其中 $n=1,2,3,\cdots$。对每个 n,以 d_n 记 a_n 与 a_{n+1}的最大公因子,试求:当 n 取遍正整数时,d_n 的最大值。

(1985 年第三届美国数学邀请赛试题)

解　对 a_{n+1}与 a_n 施行辗转相除法如下:

1	$n^2+2n+101$	n^2+100	
	n^2+100	$2n^2+200$	n
	$2n+1$	$2n^2+n$	
		$-n+200$	
		$-2n+400$	1
		$-2n-1$	
		401	

∴ d_n 的最大值是 401。

□“裂项法”在解题中的应用

在下列恒等式中：

$$X=\frac{1}{2}[X(X+1)-(X-1)X]$$

$$X(X+1)=\frac{1}{3}[X(X+1)(X+2)-(X-1)X(X+1)]$$

………………

将一个整式表示为两个整式的代数和。

我们把这种将一个整式“分裂”为两个或多个整式的代数和的过程叫做“裂项”。山东蒙阴三中刘训中老师举例说明了“裂项法”在数学解题中的应用。

1. **用“裂项法”求数列通项公式**

例 1. **求数列** a、-b,a、-b,a、-b,…**的通项公式。**

解 **对原数列“裂项”为：**

$a+0,0-b,a+0,0-b$…,**从而得数列：**

$\{a_n'\}$：$a,0,a,0$…。**和数列** $\{b_n'\}$：

$0,-b,0,-b$,……。

∴ $a_n'=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}a\cdot b_n'=\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot(-b)$

∴ **原数列的通项公式为：**

$$a_n=an'+bn'=\frac{1}{2}(a-b)+\frac{(-1)^{n+1}}{2}(a+b)$$

例 2. **求数列** $1,\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{6},\frac{1}{7}$,…**的通项。**

解 **原数列“裂项”为：**

$\frac{1}{1}+0,\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{3}+0,\frac{1}{4}+\frac{1}{4},\frac{1}{5}+0,\frac{1}{6}+\frac{1}{6},\frac{1}{7}+0$,……**从而得数列**

$\{a_n'\}$：$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$,……**和** $\{b_n'\}$：$0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}$,……

$$a_n'=\frac{1}{n},b_n'=\frac{1+(-1)^n}{2n}$$

∴ **原数列的通项公式为：**

$an = a_n' + b_n' = \frac{3+(-1)^n}{2n}$

2. 用‘裂项法’求 n 项和

例 1. 用‘裂项法’求等比数列 $\{aq^{n1}\}$ 的前 n 项和 $(q\neq1)$.

解：$s_x = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$

$= a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$

$q^k = \frac{1}{q-1}(q^{k+1} - q^k)$，令 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 代入上式

，$s_n = \frac{a}{q-1}(q - 1 + q^2 - q + q^3 - q^2 + \cdots q^n - q^{n-1})$

$= \frac{(q^n - 1)a}{q-1}$

显然，所得结果与教材中的公式是一致的，且比课本中公式的推导要简便，事实上，只要我们注意观察数列通项的结构，把通项进行合理的‘裂项’。许多数列的求和问题都可以利用‘裂项法’得到解决。

例 2. 求和 $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

解：$k^2 = k(k+1) - kk = 1, 2, 3, \cdots, n$ 代入和式

，$s_n = 1\cdot2 - 1 + 2\cdot3 - 2 + 3\cdot4$

$- 3 + \cdots + n(n+1) - n$

$= 1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \cdots + n(n+1)$

$-(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$k\cdot(k+1) = \frac{1}{3}[k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)]\ k = 1, 2, \cdots n,$

，$s_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3. 用‘裂项法’证明恒等式

例 1. 求证 $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

（见高中数学课本代数节二册 $P_{77}15.(1)$）

本题中等式左端是一个 n 项和，我们可考虑能否用‘裂项法’求得左端和式的结果，使之与右端相等。

证明：$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}[k(k+1)$

$(k+2)(k+3)-(k-1)(k+1)$

$k(k+2)]\ k=1\cdot 2,\cdots,n$

，左 $=\frac{1}{4}[1\cdot 2\cdot 3\cdot 4-0+2\cdot 3\cdot 4$

$\cdot 5-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$

$-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)(k+1)k(k+2)]$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)=$ 右

本例虽然可用数学归纳法证明。但是进一步如何得到左端的式子呢？这个证法对教材作了补充，加深了学生对知识的理解。

例2. 求证 $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\mathrm{tg}\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^n}-\mathrm{ctg}x\,(x\neq k\pi)$（见高中数学课本代数第二册 $P_{79}28$）

分析：本题原要求用数学归纳法证明，我们现在探求‘裂项’的方法，给出‘裂项法’证明。设 $\frac{1}{2^n}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^n}-\mathrm{ctg}x=b_{n+1}-b_1$，令 $b_{k+1}=\frac{1}{2^k}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^k}$

$$b_{k+1}-b_k=\frac{1}{2^k}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{2^k}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2^k}}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2^k}}$$

$$=\frac{1}{2^k}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^k}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2^k}$$

$$=\frac{1}{2^k}\mathrm{tg}\frac{x}{2^k}$$

$k=1,2,\cdots,n$

故本题可用‘裂项法’证明。

证明：（略）

一些与求和有关的数学问题都可能过‘裂项法’获得解决，用‘裂项法’解和式问题的关键是‘裂项’，而‘裂项法’作为代数式的基本变形，是学生应加强训练的。

例3. 设函数 $f(x)=\frac{1}{x(1-x)}+\frac{1}{(x-1)(2-x)}+\frac{1}{(x-2)(3-x)}$ 定义在 $(1,2)$ 上，求此函数的最小值。

解：$f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)+\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2-x}\right)+\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3-x}\right)$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3-x}=\frac{3}{-x^2+3x}$

因为当 $1<x<2$ 时，$-x^2+3x>0$，且当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$-x^2+3x$ 取最大值 $\frac{9}{4}$，所以 $f(x)$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，取最小值 $\frac{4}{3}$。

本例中，我们注意了题目中各项的结构，进行了合理的“裂项”，使问题较简单地得到解决。

□“消项法”在解题中的运用

1. 二道代数题的启发

例 1　求和：$1\times1!+2\times2!+\cdots+n\times n!$。

解：$k\times k!=[(k+1)-1]\times k!=(k+1)!-k!$。

∴ 原式 $=(2!-1!)+(3!-2!)+\cdots\cdots+[(n+1)!-n!]=(n+1)!-1$。

例 2　求积：$(1+2)\times(1+2^2)\times(1+2^4)\times\cdots(1+2^{2n})$。

解：　$1+2^{2k}=\frac{1-2^{2k+1}}{1-2^{2k}}$，

∴ 原式 $=\frac{1-2^2}{1-2}\times\frac{1-2^4}{1-2^2}\times\cdots\times\frac{1-2^{2n+1}}{1-2^{2n}}$

$=\frac{1-2^{2n+1}}{1-2}=2^{2n+1}-1$。

在例 1 中，我们把和式中的每一项拆成二项而又前后正负相消从而求得结果，可称为加减消项法。

在例 2 中，我们把积式中的每一项拆成分子、分母二部份，而前后的分子、分母相消从而得解，不妨称为乘除消项法。

在一些三角求和或求积的化简题中，如能应用这样的消项法，将能收到很好的效果。

2. 用加减消项法求三角函数的和

(1)在求角度成等差数列的正(余)弦函数的和时,常可乘以(并除以)这公差的一半的适当三角函数(正或余弦),使之能前后加减相消。

例 1 **求和**:$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$。

解:

$$\text{原式}=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)$$

$$=\frac{1}{-2\sin\frac{x}{2}}\left[\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+\left(\cos\frac{5x}{2}\right)-\left(\cos\frac{3x}{2}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{2n+1}{2}x-\cos\frac{2n-1}{2}x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{-2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{2n+1}{2}x-\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}。$$

(2).在其他三角函数求和时也有应用

例 2 **化简**:$\csc x+\csc\frac{x}{2}+\cdots+\csc\frac{x}{2^n}$。

解:$\csc x=\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin\left(x-\frac{x}{2}\right)}{\sin x\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2}-\cos x\sin\frac{x}{2}}{\sin x\sin\frac{x}{2}}$

,$\csc x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x.$

同理:$\csc\frac{x}{2}=\operatorname{ctg}\frac{x}{2^2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

………………………

$\csc\frac{x}{2^n}=\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n+1}}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}$。

各式相加得:**原式**$=\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n+1}}-\operatorname{ctg}x$。

3.用乘除相消项法求三角函数的积

(1)求角度成等比的余弦函数的积,主要是利用倍角公式的变形:

$\cos a = \dfrac{\sin 2a}{2\sin a}$。

例 1　**化简**：$\cos\dfrac{\pi}{2^m-1}\times\cos\dfrac{2\pi}{2^m-1}\times\cdots\times\cos\dfrac{2^{m-1}\pi}{2^m-1}$。

解：**原式** $=\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{2^m-1}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^m-1}}\times\dfrac{\sin\dfrac{2^2\pi}{2^m-1}}{2\sin\dfrac{2\pi}{2^m-1}}$

$$\times\cdots\times\frac{\sin\dfrac{2^m\pi}{2^m-1}}{2\sin\dfrac{2^{m-1}\pi}{2^m-1}}$$

$$=\frac{\sin\dfrac{2^m\pi}{2^m-1}}{2^m\sin\dfrac{\pi}{2^m-1}}=\frac{-\sin\dfrac{\pi}{2^m-1}}{2^m\sin\dfrac{\pi}{2^m-1}}=-\frac{1}{2^m}。$$

（2）利用诱导公式化成上述类型

例 2　**求值**：$\cos\dfrac{\pi}{11}\times\cos\dfrac{2\pi}{11}\times\cos\dfrac{3\pi}{11}$

$\times\cos\dfrac{4\pi}{11}\times\cos\dfrac{5\pi}{11}$。

解：**原式** $=\cos\dfrac{\pi}{11}\times\cos\dfrac{2\pi}{11}\times\cos\dfrac{4\pi}{11}$

$\times\left(-\cos\dfrac{8\pi}{11}\right)\times\left(-\cos\dfrac{16\pi}{11}\right)$，

则易得所求之值为：$\dfrac{\sin\dfrac{32}{11}\pi}{2^5\sin\dfrac{\pi}{11}}=\dfrac{1}{32}$。

（3）. 利用其他三角公式进行乘除消项

例 3　**化简**：$(1+\mathrm{tg}1^\circ)(1+\mathrm{tg}2^\circ)$

$\times\cdots\times(1+\mathrm{tg}44^\circ)$。

解：　$1+\mathrm{tg}k^\circ=\mathrm{tg}45^\circ+\mathrm{tg}k^\circ=$

$\dfrac{\sin(45^\circ+k^\circ)}{\cos45^\circ\cos k^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+k。)}{\cos k^\circ}$，

，**原式** $=\dfrac{\sqrt{2}\sin46^\circ}{\cos1^\circ}\times\ =\dfrac{\sqrt{2}\sin47^\circ}{\cos2^\circ}\times\cdots\times x\,\dfrac{\sqrt{2}\sin89^\circ}{\cos44^\circ}$

$=\dfrac{2^{22}(\cos44^\circ\times\cos43^\circ\times\cdots\times\cos1^\circ)}{\cos1^\circ\times\cos2^\circ\times\cdots\times\cos44^\circ}$

$=2^{22}$。

4. **在反三角函数化简中消项法也有应用**

例 1　**求和**：$\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$。

解：$\frac{1}{k^2+k+1}=\frac{(k+1)-k}{1+(k+1)k}$，

∴ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1})=$

$\frac{\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(k+1)]-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}k)}{1+\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(k+1)]\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}k)}$

$=\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg}k]$。

又：$\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}$**和**$[\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg}k]$**均为锐角**。

∴ **有** $\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+b+1}=\operatorname{arctg}[k+1]-\operatorname{arctg}k$。

∴ **原式**$=(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)+(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1)+\cdots+[\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n]$
$=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}0=\operatorname{arctg}(n+1)$。

□模糊处理法在解题中的五种应用

素以严密著称的数学王国里，居然还有"模糊处理"的一席之地，似乎有点不可思议。然而，这却是事实。

下面是上海市松江二中肖百慈老师从日常教学中摘录下来的一些实例：

1. **粗略估算**

【例 1**】**$\alpha rccos(\cos\pi^2)$**的值是**(　)。

(A)π^2；(B)$\pi^2-4\pi$；(C)$4\pi-\pi^2$；(D)$3\pi-\pi^2$。

分析　π^2 **是第三象限角**，∴ $\cos\pi^2<0$，$\alpha rccos(\cos\pi^2)$**是钝角。故选**(C)。

这里只是粗略地估算了一下角度的范围，就得到了正确的答案。这种方法在解选择题时是常见的。

2. **假想变换**

【例 2**】设**△ABC **的三边** a、b、c **成等差数列，则** $\operatorname{tg}(A/2)\cdot\operatorname{tg}(C/2)=$________。

分析　**由** a、b、c **成等差数列，易得** $2\sin B=\sin A+\sin C$，**继续进行恒等变换，可以证明** $\operatorname{tg}(A/2)\cdot\operatorname{tg}(C/2)=\frac{1}{3}$。**但我们也可以这样想：如果经过证明得到的结**

果是 K,则对任何符合条件的 a、b、c,原式的值总为 K。令 $a=b=c$,此时,$A=B=C=60°$,故 $\mathrm{tg}(A/2)\cdot\mathrm{tg}(C/2)=\frac{1}{3}$。

后一种解法中的证明,只是假想而已。然而正是这一番彻底‘模糊’的证明,使我们的站位发生了变化。随之而来的是观察角度的变化。于是,我们的思路就有了新的发展。

【例3】 求 $(1+x)^5(1-3x)^7$ 展开式中各项系数的和。

分析 展开 $(1+x)^5(1-3x)^7$,可得

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$ (A)

所求系数和为 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{12}$ (B)比较(A)、(B),知只要令(A)中的 $x=1$ 即可。

本题中的展开并未真正付诸实施,但却帮助我们得到了一个简洁的解法。

3. 整体代入

【例4】 已知 $x+x^{-1}=2\sin\theta$ ①

求证:$x^3+x^{-3}=-2\sin3\theta$ ②

证 ①式两边平方可得

$x^2+x^{-2}=4\sin^2\theta-2$ ③

而 $x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})(x^2-1+x^{-2})$,将①③代入上式即得②式。

显然,这种整体代换的方法较之直接求 x、x^{-1} 要方便得多。

当然,这不是必走之路。但在另一类问题中,运用整体代换是势在必行的。

【例5】在等差数列 $\{\alpha_n\}$ 中,

已知 $\alpha_3+\alpha_6=8$,求 $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_8$ 之值。

解 由已知得 $2\alpha_1+7d=8$ (其中 d 是公差),, $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_8=4\alpha_1+14d=2(2\alpha_1+7d)=16$。

4. 设而不求

【例6】 试证:有公共焦点的椭圆和双线在交点处的切线互相垂直。

证 不妨设椭圆方程为 $(x/a_1)^2+(y/b_1)=1$,与它有公共焦点的双曲方程为 $(x/a_2)-(y/b_2)^2=1$。因上两曲线有公共焦点,故

$a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$ (1)

又设 $P(x_0,y_0)$ 是两曲线的一个交点,则 $(x_0/a_1)^2+(y_0/b_1)^2=1$,$(x_0/a_2)^2-(y_0/b_2)^2=1$。两式相减并由(1)式整理得

$\frac{x_0^2}{y_0^2}=\frac{a_1^2a_2^2(b_1^2+b_2^2)}{b_1^2b_2^2(a_1^2-a_2^2)}=\frac{a_1^2a_2^2}{b_1^2b_2^2}$ (2)

过交点(x_0,y_0)处椭圆切线斜率$k_1=-b_1^2x_0/a_1^2y_0$；

过交点(x_0,y_0)处双曲线切线斜率$k_2=b_2^2x_0/a_2^2y_0$。结合(2)式得$k_1\cdot k_2=-1$。

【例7】从火车上下来两位旅客,他们沿着同一方向走到同一目的地。第一个旅客先用一半时间以速度a行走,另一半时间以速度b行走;第二个旅客一半路程以速度a行走,另一半路程以速度b行走。问哪一个旅客先到达目的地?

解 设总的路程为S,第一个旅客走完全程所需的时间为t_1,第二个旅客走完全程所需时间为t_2,则

$\frac{1}{2}t_1(a+b)=S$,$t_2=(\frac{1}{2}S/a)+(\frac{1}{2}S/b)$。故$t_1/t_2=4ab/(a+b)^2\leqslant1$,, $t_2\geqslant t_1$。即当$a\neq b$时,第一位旅客先到;当$a=b$时,两位旅客同时到达。

5. 抽象表示

【例8】已知对称轴分别平行于坐标轴的有心二次曲线经过$P(11/3,9)$、$Q(7/3,5-\sqrt{7})$两点,其中心坐标为$(-3,5)$,求此曲线方程。

解 设此二次曲线方程为$(x+3)^2/A+(y-5)^2/B=1$。 点P、Q在此曲线上,所以

$$\begin{cases}400/9A+16/B=1\\256/9A+7/B=1。\end{cases}$$

解之得$A=16$,$B=-9$。所求方程为$(x+3)^2/16-(y-5)^2/9=1$。

由于题设中没有指明二次曲线是双曲线还是椭圆,也没有指明焦点的位置,于是,我们就采取了以"模糊"对"模糊"的战术,用A、B表示标准方程中的数字因子,避免了不必要的讨论,从而简化了解题过程。

【例9】 今天是星期一,问10^{90}天后是星期几?

解 $10^{90}=(98+2)^{45}=98M+2^{45}$。而$2^{45}=8^{15}=(7+1)^{15}=7N+1$。所以,$10^{90}$天后是星期二。

题解中的M、N是自然数。至于它们的具体数值,没有关心的必要。这种方法在数论中是经常采用的。

上述各例说明,在数学解题过程中,适当进行一些模糊处理,不但可以避免不必要的运算,而且还能给人以思想方法上的启迪。当然,相对于某些方法来讲,它只是数学百花园中的一棵小草,是否值得重视,还有待于同行们赐教。

□"迭加法"在解题中的应用

在高中数学课本第三册 P_{62} 页证明公式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc(a>0,b>0,c>0)$ 时,采用了如下证法:

由基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2abb^2+c^2\geqslant 2bcc^2+a^2\geqslant 2ca$

三式相加得

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$$

即 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqslant 0$

$a+b+c>0$

, $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geqslant 0$

即 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$

这里通过几个同向不等式相加得到一个新的不等式再推得结论。象这种由几个等式或同向不等式相加得到新的等式或不等式,从而使问题获得解决的方法这就是所谓的"迭加法"。"迭加法"是常用的重要方法,由于"迭加"后获得"和式",因此不少结论中含有"和式"或者求解过程中需通过"和式"推得结论的,可以考虑采用"迭加法"加以解决。

"迭加法"在中学数学各科中均有应用,上海黄浦区教师进修学院愈颂萱、上海市崂山中学林青老师举例作了说明:

1. 在代数方面的应用

例 1　已知 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0$

求证: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\quad\sqrt{2}(a+b+c)$

证明: $a\geqslant 0\quad b\geqslant 0\quad,\quad a^2+b^2\geqslant 2ab$

$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab=b^2$

$=(a+b)^2,$

$a^2+b^2\geqslant 0,a+b\geqslant 0$

, $\sqrt{a^2+b^2}\quad\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

同理 $\sqrt{b^2+c^2}\quad\dfrac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$

$\sqrt{c^2+a^2}\quad\dfrac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$

三式相加即得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\quad\sqrt{2}(a+b+c)$

例 2　设 $b_1,b_2,b_3\cdots b_n$ 都是自然数或 0 且 $(1+b_1)(1+b_2)(1+b_3)\cdots(1+b_n)>2^n$

求证：$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n>a$

证明：由二项式定理

$2^{bi}=(1+1)^{bi}=1+bi+\cdots+1\geqslant 1+bi(i=1,2,\cdots n)$

两边取以 2 为底的对数得

$bi\geqslant\log_2(1+bi)$

当 $i=1,b_1\geqslant\log_2(1+b_1)$；

当 $i=2,b_2\geqslant\log_2(1+b_2)$；

当 $i=3,b_3\geqslant\log_2(1+b_3)$；

………………………；

当 $i=n,b_n\geqslant\log_2(1+bn)$。

n 个式相加得 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n\geqslant\log_2[(1+b_1)(1+b_2)(1+b_3)\cdots(1+b_n)]>(\log_2 2^a=a$，

,　$b_1+b_2+\cdots+b_n>a$。

例 3　求证 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$介于 $2\sqrt{n}-2$ 与 $2\sqrt{n}-1$ 之间

证明：　$(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2>0$，

$n-2\sqrt{n}\sqrt{n-1}+n-1>0$

$2(\sqrt{n})^2-2\sqrt{n}\sqrt{n-1}>1$，

,　$2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})>\frac{1}{\sqrt{n}}$。

同理　$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}$

,　$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$

当 $n=2,3,4\cdots\cdots n$ 时分别代入上式得

$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2\sqrt{1}$

$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

……………

$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$

n - 1 **个式相加得**

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{1}$$

, $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

$\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$,

$3=\sqrt{9}>\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

, $2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

例 4 **解方程组**

$x^2+xy+xz-x=2$ （1）

$y^2+xy+yz-y=4$ （2）

$z^2+xz+yz-z=6$ （3）

解：**三个方程相加得**

$(x+y+z)^2-(x+y+z)-12=0$（4）

设 $x+y+z=t$，**那么由方程**（4）**求得**

$t_1=-3$ $t_2=4$

将 $y+z=t-x$ **代入**（1）：

$x^2+x(t-x)-x=2$，

于是 $x=\frac{2}{t-1}$ （5）

同理，把 $x+z=t-y$ **代入**（2），

把 $x+y=t-z$ **代入**（3）

得 $y=\frac{4}{t-1}$（6），$z=\frac{6}{t-1}$（7），

把 t **的两个值分别代入**（5），（6），（7）。

得到原方程组的两组值。

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=-1\\ z=-\frac{3}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{4}{3}\\ z=2\end{cases}$$

2. 在三角中的应用

例 5 α、β、γ **三个角成等差数列其公差为** $\frac{\pi}{3}$

求证：$tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma tg\gamma tg\alpha=-3$

证明：由$\sqrt{3}=\text{tg}\dfrac{\pi}{3}=\text{tg}(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\text{tg}\beta-\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}\beta\text{tg}\alpha}$$

得$\sqrt{3}+\sqrt{3}\text{tg}\alpha\text{tg}\beta=\text{tg}\beta-\text{tg}\alpha$

同理$\sqrt{3}+\sqrt{3}\text{tg}\beta\text{tg}\gamma=\text{tg}\gamma-\text{tg}\beta$

$\sqrt{3}+\sqrt{3}\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha=\text{tg}\alpha-\text{tg}\gamma$

三式相加得

$3\sqrt{3}+\sqrt{3}(\text{tg}\alpha\text{tg}\beta+\text{tg}\beta+\text{tg}\gamma+\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha)=0$

, $\text{tg}\alpha\text{tg}\beta+\text{tg}\beta\text{tg}\gamma+\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha=-3$

例6 已知 A、B、C 是三角形的三个内角，

求证：$\sin A+\sin B+\sin C\geqslant\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

（上海市七九年数学竞赛题）

证明： $\sin 2B+\sin 2C$

$=2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos(B-C)\leqslant 2\sin A$

同理 $\sin 2C+\sin 2A\leqslant 2\sin B$

$\sin 2A+\sin 2B\leqslant 2\sin C$

三式相加得 $2(\sin A+\sin B+\sin C)$

$\geq 2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

即 $\sin A+\sin B+\sin C$

$\geq\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

3 在几何方面的应用

例7 设 a、b、c 为锐角△ABC 的三边长，h_a、h_b、h_c 为对应的三条高，

求证：$\dfrac{1}{2}<\dfrac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$

证明： 斜边大于直角边，

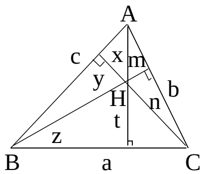
, $c>h_a$ $a>h_b$ $b>h$。

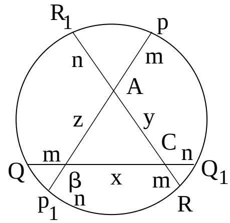
三式相加 $a+b+c>h_a+h_b+h_c$，

, $\dfrac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$

设垂心 H 把高分成 $h_a=x+t$，$h_b=z+m$，$h_c=y+n$。

则有 $(x+m)+(m+n)>b$，





$$(x+y)+(y+z)>c,$$
$$(z+t)+(t+n)>a。$$

三式相加 $2(h_a+h_b+h_c)>a+b+c$，

, $\dfrac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}>\dfrac{1}{2}$。

即 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1$。

例 8　如图，圆的三条弦 PP_1，QQ_1，RR_1 两两相交，交点分别为 A、B、C，已知 $AP=BQ=CR$，$AR_1=BP_1=CQ_1$。

求证　$\triangle ABC$ 是正三角形。

证明 设 $AP=BQ=CR=n$

$AR_1=BP_1=CQ_1$

$BC=x$、$CA=y$、

由相交弦定理得

$$\begin{cases}n(m+x)=m(n+x)\\n(m+y)=m(n+y)\\n(m+z)=m(n+z)\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}nx=my\\ny=mz\\nz=mx。\end{cases}$$

三式相加得 $n(x+y+z)=m$

$x+y+z\neq0$。

, $m=n$, $x=y=z$

即 $\triangle ABC$ 为正三角形。

例 9　三个圆 O_1、O_2、O_3 两两相切，证这三个圆交成的三条公共弦相交于一点。

证明 设三个圆 O_1，O_2，O_3 的切线为

$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

$x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0$

(1)+(-1)×(2)得

$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$

(2)+(-1)×(3)得

$(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+F_2-F_3=0$

(3)+(-1)×(1)得

$(D_3-D_1)x+(E_3-E_1)y+F_3-F_1=0$ (6)

即(4),(5),(6)分别为圆 O_1 和圆 O_2,圆 O_2 和圆 O_3 及圆 O_3 和圆 O_1 的公共弦方程。

设 $P(x_0,y_0)$ 为公共弦(4),(5)的交点

故 $(D_1-D_2)x_0+(E_1-E_2)y_0+(F_1-F_2)=0$ (7)

$(D_2-D_3)x_0+(E_2-E_3)y_0+(F_2-F_3)=0$ (8)

(7)+(8)得

$(D_1-D_3)x_0+(E_1-E_3)y_0+(F_1-F_3)=0$

即 $(D_3-D_1)x_0+(E_3-E_1)y_0+(F_3-F_1)=0$

, $P(x_0,y_0)$ 也在公共弦(6)上即三条公共弦共点

□解题中的先后原则及其运用

有一些数学问题,必须严格遵循这样一条解题原则,即谁“先”谁“后”原则。倘若不注意,不是解错就是难以获解。河北省乐亭二中赵春祥老师介绍分析了下面几例。

1. 解指数不等式时,“先固定底,后取对数”

例 1 解关于 x 的不等式

$$x^{\log_a x}>\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}(a>0,a\neq1)。$$

错解 对已知不等式两边同取以 a 为底的对数,得

$$\log_a^2 x>\frac{9}{2}\log_a x-2,$$

整理,得 $2\log_a^2 x-9\log_a x+4>0$,

解得 $\log_a x>4$ 或 $\log_a x<\frac{1}{2}$。

(1)当 $a>1$ 时,$x>a^4$ 或 $0<x<\sqrt{a}$;

(2)当 $0<a<1$ 时,$0<x<a^4$ 或 $x>\sqrt{a}$。

分析:由于对数函数是单调函数,当底大于 1 与底大于零小于 1 时,对数函数的单调性不同。因此,对数函数的底固定时,不等号方向才固定,“底不定,不等号方向不定”。应该是先固定底,后取对数。

正解:(1)当 $a>1$ 时,对已知不等式两边取以 a 为底的对数,得

$2\log_a^2 x-9\log_a x+4>0$,

$\log_a x>4$ 或 $\log_a x<\frac{1}{2}$,

$x>a^4$ 或 $0<x<\sqrt{a}$

(2)当 $0<a<1$ 时,对已知不等式两边取以 a 为底的对数,得

$2\log_a^2 x-9\log_a x+4<0$。

$\frac{1}{2}<\log_a x<4$,

$a^4<x<\sqrt{a}$。

2. 求无穷数列和(积)的极限时,“先取数列和(积),后取极限”

例 2 求 $\lim\limits_{n\to}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2+1}\right)$。

错解:由于 $\lim\limits_{n\to}\frac{1}{n^2+1}=0$,$\lim\limits_{n\to m}\frac{3}{n^2+1}=0$,…,

$\lim\limits_{n\to}\frac{2n-1}{n^2+1}=0$,

, $\lim\limits_{n\to}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+1}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2+1}\right)$。

$=\lim\limits_{n\to}\frac{1}{n^2+1}+\lim\limits_{n\to}\frac{3}{n^2+1}+\cdots+\lim\limits_{n\to}\frac{2n-1}{n^2+1}$

$=0+0+\cdots+0$

$=0$。

分析 按数列极限运算法则,当 $\lim\limits_{n\to}a_n=A$,$\lim\limits_{n\to}b_n=B$ 时,有 $\lim\limits_{n\to}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to}a_n+\lim\limits_{n\to}b_n=A+B$,并且此法则可比推广到有限项。但是,无穷项数列和式极限不满足上述法则。此时,只有‘先取数列和、后取极限’才不会出错。

正解: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$,

, $\lim\limits_{n\to}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+1}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$

$=1$。

例 3 **求** $\lim\limits_{n\to}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$。

解：同例 2 **分析一样，此类问题只有先求数列积，后取极限才不会出错。**

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{n+1}{2n},$$

, $\lim\limits_{n\to}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim\limits_{n\to}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}。$$

3. 解排列组合混合问题时，“先取元素（组合），后排顺序（排列）”

例 4 **要从** 5 **名男生、**4 **名女生共** 9 **位候选人中选出** 5 **人组成班委会，其中正副班长各** 1 **人，一般班委（三个班委没有区别）**3 **人，现规定班委中一半以上为男生，问有多少种选法？**

解：1. **先从** 9 **位候选人中选出满足条件的** 5 **人。**

（1）**从** 5 **名男生中选** 3 **人，**4 **名女生中选** 2 **人，有** $C_5^3C_4^2$ **种方法；**

（2）**从** 5 **名男生中选** 4 **人，**4 **名女生中选** 1 **人，有** $C_5^3C_4^1$ **种方法；**

（3）5 **名男生全部入选，有** C_5^5 **种方法。**

2. **然后从选出** 5 **名候选人中选出两名学生担任正副班长，有** $C_5^2P_2^2$ **种方法。所以，班委中一半以上的男生的不同选法有**

$(C_5^3C_4^2+C_5^4C_4^1+C_5^5)C_5^2P_2^2=1620$（**种**）。

4. 在化复数三角形式时，“先固定模长，后由诱导公式化标准式”

例 5 **设** $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<2\pi)$，$p=\frac{1-z^3}{1-z}$，**求** argp.

解：$p=z^2+z+1$

$=(\cos2\theta+\cos\theta+1)+i(\sin2\theta+\sin\theta)$

$=(2\cos^2\theta+\cos\theta)+i(2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)$

$=(2\cos\theta+1)(\cos\theta+i\sin\theta)$。

先就 $2\cos\theta+1$ **决定模长，后化标准式。**

（1）**当** $0<\theta<\frac{2\pi}{3}$**或**$\frac{4\pi}{3}<\theta<2\pi$ **时，**$2\cos\theta+1>0$，**复数** p **的三角形式为**

$p=(2\cos\theta+1)(\cos\theta+i\sin\theta)$，

，　$\arg p=\theta$。

(2)当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$或 $\theta=\frac{4\pi}{3}$时，$p=0$，

，$\arg p\in[0,2\pi)$中的任意角。

(3)当$\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{4\pi}{3}$时，$2\cos\theta+1<0$，

此时 p 的三角形式为

$p=-(2\cos\theta+1)[-\cos\theta-i\sin\theta]$

$=-(2\cos\theta+1)[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$。

由于$\frac{5\pi}{3}<\theta+\pi<\frac{7\pi}{3}$，

①当$\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi$ 时，$\arg p=\pi+\theta$；

②当 ◆α $\theta<\frac{4\pi}{3}$时，$\arg p=\theta-\pi$。

□强化法及其在解题中的运用

我们从解题实践中知道，解答一个较强的命题通常要比解答一个较弱的命题困难些。例如：哥德巴赫猜想是十八世纪四十年代提出来的，然而直到 1930 年，人们才解决了一个较弱的命题。而猜想本身至今仍未能攻克。所以对于较难的数学问题，采用"弱化"法是常用的方法，但它同其他数学方法一样，"弱化"法也并不是"万应灵丹"，不可能在任何情况下都十分灵验。在有些场合，采用"强化"的方法来考虑，解决起来反而会方便些。贵州平塘县民族中学谭登林老师作了举例说明：

例 1　求证：$995^{1989}>1989!$

分析：证明这类不等式的常用方法似乎是"比差法"或"比商法"，但无论哪种方法解决本题都是难以奏效的。但我们观察到 $995=\frac{1989+1}{2}$，于是原不等式即为 $\left(\frac{1989+1}{2}\right)^{1989}>1989!$。故我们把此命题强化为"$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}>n!,n\in N$"。它的正确性是不难获证的。事实上，$\frac{n+1}{2}=\frac{1+2+3\cdots+n}{n}>\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdots n}=\sqrt[n]{n!}$，

，$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}>n!$。令 $n=1989$ 即得所证的不等式。

把特殊的结论,通过强化的手段上升为一般情形,这无疑是一件有意义的工作。非但如此,一般结论揭示了普遍规律,把握了事物的本质。而在特殊的问题中,却往往被只视“树木”,而不见“森林”的局限性掩盖了本质。这就是有时推出一个一般结论(强命题)并不比推出一个特殊的结论(弱命题)更难,甚至反倒简单得多的道理。下面再看几个以另一种格式进行强化解题的例子。

例 2. 设 $P_1P_2=2(q_1+q_2)$,求证:方程 $x^2+P_1x+q_1=0$,$x^2+P_2x+q_2=0$ 至少有一个方程有实根。

分析:本题即要证明两方程的判别式 $\triangle_1$,$\triangle_2$ 至少有一个不少于零,因为对实数 a,b,若 $a+b\geqslant 0$,则 a、b 中至少有一个不小于零。因此本题可跳跃证明更强的命题:“$\triangle_1+\triangle_2\geqslant 0$”。证略。

例 3 若 $n\geqslant 2$ 且 $n\in N$,用数学归纳法证明

$$S_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2 \qquad ①$$

分析:考虑用数学归纳法证明的第二步,即由 $S_K<2$ 推证 $S_{K+1}<2$ 时,$S_{K+1}=S_K+\frac{1}{(K+1)^2}<2+\frac{1}{(K+1)^2}$ 但 $2+\frac{1}{(K+1)^2}>2$,由此无法判断 $n=k+1$ 时,$S_{K+1}<2$ 成立。为了克服这个困难,我们来考虑命题:“若 $n\geqslant 2$ 且 $n\in N$,则

$$S_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \text{”} \qquad ②$$

这当然是一个比原命题①要强的命题,但证起原却要容易得多。

证:当 $n=2$ 时,不等式②成立是显然的。

假设当 $n=k$ 时,不等式②成立。即有

$S_K=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$。则当 $n=k+0$ 时有 $S_{K+1}=S_K+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)}^2<2-\frac{1}{K}+\frac{1}{k(k+1)}=2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=2-\frac{1}{k+1}$

故 $n=k+1$ 时,不等式②成立。

, $n\in N$ 且 $n\geqslant 2$ 时,不等式②恒成立,而 $2-\frac{1}{n}<2$ 故欲证的原不等式①也成立。

□“强化命题法”在解题中的运用

某些特殊问题,直接难于寻求解答的方法;于是,变更命题,提出关

于这类特殊问题的一般性命题,使原命题强化,反而易于找出解答的关键。这种通过对一般命题的研究而解决特殊问题的方法,我们称为强化命题法。对于某些特殊问题或用常法比较繁难的数学题,倘若我们用强化命题法来解,则往往可打破常规,巧辟捷径,从而使问题变繁为简、化难为易、迎刃而解。用强化命题法来处理问题,四川宣汉县教研室赵绪昌老师将其思维模式简单图示为:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{原命题 A}} \arrow[r, "\text{撤开部分条件}"] \arrow[d] & \boxed{\text{问题 B}} \arrow[d] \\ \boxed{\text{解答 A}} & \boxed{\text{解答 B}} \arrow[l, "\text{限　　定}"'] \end{tikzcd}$$

例 1　证明$\underbrace{11\cdots1}_{1993个}\underbrace{22\cdots2}_{1993个}$是两个连续自然数的积。

分析　先考虑一般情况:

$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\underbrace{22\cdots2}_{n个2}=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times(1\underbrace{00\cdots0}_{(n-1)个0}2)=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times(\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+3)=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times3\times(\underbrace{33\cdots3}_{n个3}+1)=\underbrace{33\cdots3}_{n个3}\times\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)个3}4$。

∴　当 $n=1993$ 时,$\underbrace{11\cdots1}_{1993个1}\underbrace{22\cdots2}_{1993个1}=\underbrace{33\cdots3}_{1993个1}\times\underbrace{33\cdots3}_{1992个1}4$。

例 2　求证$\dfrac{(1+\sqrt{1991})^{1992}-(1-\sqrt{1991})^{1992}}{\sqrt{1991}}$必为整数。

分析　我们一般地考虑$\dfrac{(1+x)^{1992}-(1-x)^{1992}}{x}$的情形。

设 $f(x)=(1+x)^{1992}-(1-x)^{1992}$,则显然有 $f(-x)=-f(x)$,∴ $f(x)$是奇函数。

故 $f(x)$必是只含有奇次项的整系数多项式,从而$\dfrac{f(x)}{x}$是只含有偶次项的整系数多项式。

特取 $x=\sqrt{1991}$,则得$\dfrac{f(\sqrt{1991})}{\sqrt{1991}}$是整数。

例 3　求证 $37^{73}>73$。

分析　这是一道具体数值的不等式。证明这类不等式的常用方法是"比差法"或"比商法",但对于解决本题均难见效。仔细分析所给数值的特征:不等式左边的幂指数是 73,右边的阶乘也是 73,而左边的底数又可表示为 $37=\dfrac{73+1}{2}$,于是可将原不等式变形为$\left(\dfrac{73+1}{2}\right)^{73}>73!$,　　①

从而,由①式使我们立即联想到‘73’这一特殊的数值能否概括出不等式。

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}>n!\ (n\in N)。\qquad ②$$

显然,②式较①式易证得多。事实上

$$\frac{n+1}{2}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}$$

$$>\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}=\sqrt[n]{n!},,\quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}>n!。$$

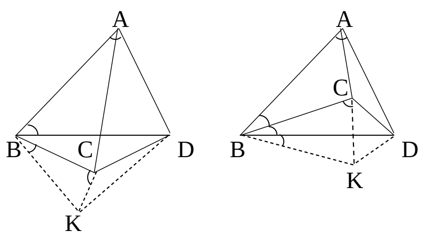
特取 $n=73$,则 $37^{73}>73!$

例 4　已知四边形 ABCD 中有

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC。\qquad ①$$

求证:四边形 ABCD 有外接圆。

分析:直接利用条件①来证明四边形 ABCD 有外接圆,颇难入手。我们不妨先考察更一般的问题:在任意四边形 ABCD 中,$AC\cdot BD$、$AB\cdot CD$、$AD\cdot BC$ 三者之间存在怎样的关系?设 ABCD 是任意四边形,它可以是凸的,也可以是凹的,如下图表示:



作 $\triangle CBK\backsim\triangle ABD$,使 K 与 A 在 BD 两侧,连结 KD,于是有 $BK:BD=BC:BA$,且 $\angle ABC=\angle DBK$,从而 $\triangle BAC\backsim\triangle BDK$,所以

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DK},DK=\frac{AC\cdot BD}{AB}。同理,CK=\frac{AD\cdot BC}{AB}。$$

又　$DK\leqslant CK+CD$,　②

$$,\quad \frac{AC\cdot BD}{AB}\leqslant\frac{AD\cdot BC}{AB}+CD,$$

即　$AC\cdot BD\leqslant AC\cdot CD+AD\cdot BC$。　③

这就是任意四边形 ABCD 中,$AC\cdot BD$、$AC\cdot CD$、$AD\cdot BC$ 三者之间的关系。

显然,条件①是不等式条件③取等号时的特殊情形,而不等式③取等号的充要条件是②式取等号,即 D、C、K 三点共线。这时 $\angle BCK$ 是四边形 ABCD 的外角,而依作图有 $\angle BCK=\angle BAD$,故知四边形 ABCD 有外接圆。由此可知,满足条件①的四边形 ABCD 必有外接圆。命题得证。

由以上几例可以看到，一般性命题的推出，是从题目的结构特征入手，通过观察、分析、联想等方法，并逐步进行探索而归纳出来的。我们在教学中应指导学生掌握和运用强化命题法，这对于培养较强的综合、概括能力和丰富、敏捷的联想、构造能力都很有益处。

□平面化方法及其在解题中的运用

空间问题平面化，是处理立体几何问题的一种重要的思想方法。所谓空间问题平面化，就是将空间的点、线间的关系放到同一平面上进行研究。常用的平面化方法有“截”、“展”、“移”、“转”、“射”等。

1.“截”

所谓“截”，就是在空间图形能够反映各元素的关系的适当位置做一个截面，在这个截面内集中研究各元素间的关系，使得空间问题转化为平面问题。

例 1 一个圆台的体积等于它的内切球的体积的 m 倍，求该圆台的母线和它的下底面所成的角 a 以及 m 的取值范围。

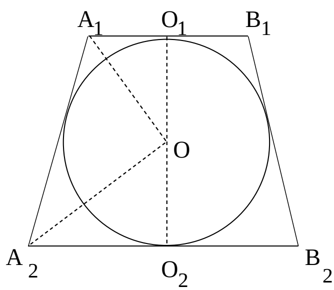


图 1

分析 旋转体一般可以通过轴截面进行研究。如图 1，O 为内切球球心，A_1B_1 和 A_2B_2 分别为上、下底面的直径，则 $\angle A_1A_2B_2 = a$，只要根据题意并利用等腰梯形 $A_1A_2B_2B_1$ 即可求出 a。

解 连接 OA_1、OA_2，设内切球半径为 r。在 $Rt\triangle OA_2O_2$ 中，$A_2O_2 = r\text{ctg}\frac{a}{2}$。在 $Rt\triangle OA_1O_1$ 中，$A_1O_1 = r\text{ctg}\frac{180° - a}{2} = r\text{tg}\frac{a}{2}$。

$$V_{圆台} = m \cdot V_{球}，, \quad \frac{\pi}{3} \cdot 2r\left(r^2\text{tg}^2\frac{a}{2} + r^2\text{tg}\frac{a}{2}\text{ctg}\frac{a}{2} + r^2\text{ctg}^2\frac{a}{2}\right) = m\frac{4\pi r^3}{3}，$$

$$, \quad \text{tg}^2\frac{a}{2} + \text{ctg}^2\frac{a}{2} + 1 = 2m，$$

即 $\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} + \frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} + 1 = 2m$。， $\cos^2 a = \frac{2m - 3}{2m + 1}$。

$$0° < a < 90°，, \quad 0 < \frac{2m - 3}{2m + 1} < 1，, \quad m > \frac{3}{2}。$$

故圆台母线与下底面所成的角为 $\arccos\sqrt{\frac{2m-3}{2m+1}}$，m 的取值范围是 $(\frac{3}{2},+\infty)$。

例 2 正四棱锥 S-ABCD 的侧棱与底面所成角为 a，相邻两侧面所成二面角为 β。求证 $\cos\beta=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-2}$。

分析 根据侧棱与底面所成角的定义，必然要作棱锥的高 SO。关键是选择好一个特殊的截面，既便于建立 α 和 β 的关系，又使圆形清楚、醒目（这点不可忽视）。注意到 O 为正方形 ABCD 的中心及正四棱锥的性质，我们选用过 BD 且与 SC 垂直的截面 DBE（如图 2）。

证明：作 $\triangle SBC$ 的高 BE，连 DE，由 $\triangle SDC\cong\triangle SBC$，得 $DE\perp SC$，$DE=BE$，$\angle BED=\beta$。

又在等腰 $\triangle BDE$ 中，OE 为 $\angle BED$ 的平分线。

设 $OB=OC=a$，则在 Rt$\triangle OCE$ 中，$OE=a\sin a$。

在 Rt$\triangle OBE$ 中，得 $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{OB}{OE}=\csc a$。

$$\cos\beta=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1-\csc^2a}{1+\csc^2a}=\frac{\cos^2a}{\cos^2a-2}。$$

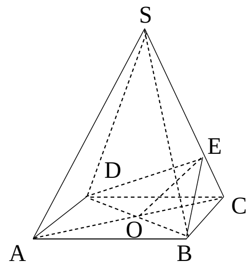


图 2

2.“展”

所谓‘展’就是在适当的位置，将立体图形展画成平面图形，然后在新平面图形上，研究元素间的关系，这样‘化折为直’、“化曲为直”，可使问题变得简单、明显、易于解决。

例 3 一圆台上底半径为 5cm，下底半径为 10cm，母线 AB=20cm，从 AB 中点 M 拉一条绳子围绕圆台侧面转到 B 点，问这条绳子最短需多长？

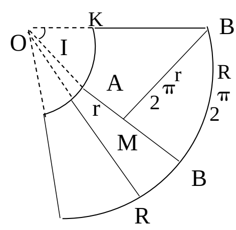


图 3

分析 本题直接求解有困难，这里只需将圆台沿母线 AB 剪开，展成一平面图形，如图 3，则线段 MB' 即为绳子最短状态时的长度。

解 设 OA=x，圆台上、下底面半径分别为 r 和 R，于是 $\frac{r}{R}=\frac{x}{x+20}\Rightarrow x=20$。

由 $20\theta=2\pi r=10\pi$（$\theta=\angle AOA'$），得 $\theta=\frac{\pi}{2}$。

又因 $BO=40$，$OM=30$。

, $MB' = \sqrt{OB'^2 + OM^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$。

即这条绳子最短需 50cm。

3."移"

所谓'移'就是将某些图形平移到适当位置,使原来不在同一平面的元素经平移后,集中到一个平面或几个平面内,用平面几何知识进行研究。

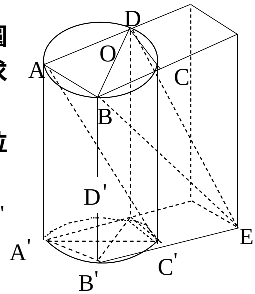


图 4

例 4　已知圆柱的侧面积为 $2\sqrt{2}\pi$,体积为 $\sqrt{2}\pi$,圆柱的内接长方体的底面对角线的交角 $\angle BOC = 60°$,求 AC' 与 BD 之间的夹角。

分析:AC' 与 BD 为异面直线,将 AC' 平移到 DE 的位置,$\angle BDE$ 就是 AC' 与 BD 所成的角(如图 4)。

解:在底面 $A'B'C'D'$ 上延长 $B'C'$ 至 E 使 $C'E = B'C'$,连 DE,则 $AC'ED$ 为平行四边形。

由已知得

$$\begin{cases} 2\pi OD \cdot DD' = 2\sqrt{2}\pi \\ \pi OD^2 \cdot DD' = \sqrt{2}\square \end{cases} \Rightarrow OD = 1,DD' = \sqrt{2}$$

于是 $BD = 2$,$BC = 1$,, $AC'^2 = 6$,$BE^2 = 6$。

由余弦定理得 $\angle BDE = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$。

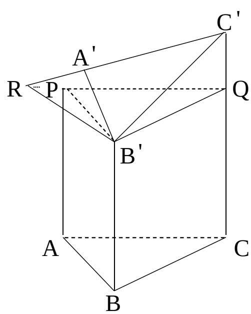


图 5

例 5　设 $\triangle ABC$ 是边长为 10 的正三角形,一平面斜截以 $\triangle ABC$ 为底面的正三棱柱得截面 $\triangle A'B'C'$ 且 $AA' = 15$,$BB' = 10$,$CC' = 20$,求截面与底面 $\triangle ABC$ 所成的二面角。

分析 过点 B' 将底面 ABC 平移到 $B'PQ$,如图 5。设 $C'A'$ 与 QP 的延长线交于 R 点,连 RB',则 $B'R$ 就是面 $A'B'C'$ 与面 $B'PQ$ 的交线,面 $A'B'C'$ 与面 ABC 所成的二面角即为二面角 $C'-B'R-Q$,这样问题便简化了。

解: $Rt\triangle A'PR \backsim Rt\triangle C'QR$,且 $A'P = 5$,$C'Q = 10$,$PQ = 10$,

, $PR = 10$,$A'C' = A'R = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$。

在 $\triangle RB'Q$ 中,$PQ = RP = PB'$,

, $\angle C'B'R = 90°$,, $C'B' \perp B'R$。

, $\angle C'B'Q$ 即为二面角 $C'-B'R-Q$ 的平面角。

易知$\angle C'B'Q=\frac{\pi}{4}$,故底面 ABC 与截面 A'B'C' 所成的二面角为$\frac{\pi}{4}$。

4.“转”

所谓‘转”,就是使某些图形旋转适当的角度,使立体图形转化成平面图形。当我们要研究的图形在两个平面上时,则可根据情况,将其中的一个平面,以某直线为轴旋转适当的角度,使两个平面重合,然后在同一平面上研究图形的性质。

例 6　在二面角 α-l-β 的两个面 α 和 β 上分别有 A、B 两点,在二面角的棱 l 上求一点 P,使 AP 与 BP 之和最小。

分析 如图 6,点 A 在平面 α 内,点 B 在平面 β 内,若在 l 上求一点 P,使 PA+PB 最小,则在空间作图是比较困难的。为此我们设法将 A、B 两点放在同一平面内。若将半平面 α 绕 l 旋转一定角度,使半平面 α 落在 α' 的位置,与平面 β 重合,这时在 l 上求一点 P 使其与 A、B 两点距离之和最小,就转化为平面几何的问题。

由上面分析可得如下作法:自点 A 向棱 l 作垂线 AG,G 为垂足,过 G 点在平面 β 内于 B 点的异侧作 $A'G\perp l$,并取 $A'G=AG$,连接 A'B 交 l 于 P,则 P 点即为所求的点。

证明略。

5.“射影”

所谓‘射影”,就是将空间图形中的若干元素,利用射影的方法,集中到某一个平面内,再在这个平面内利用平面图形的性质,使问题得解。

例 7　梯形 ABCD 的一底 AB 在平面 α 上,另一底 DC 在平面 α 外,它的高为 15cm,又已知梯形对角线的交点 O 到平面 α 的距离是 7cm,AB∶CD=7∶3,求平面 ABCD 和平面 α 所成的二面角。

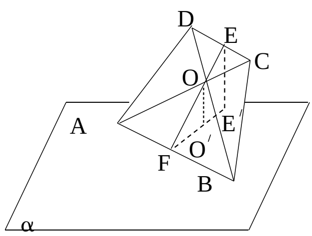


图7

分析:过 O 作 OO' κ α 于 O',在平面 α 内作 $OF\perp AB$ 于 F,延长 FO 交 CD 于 E,所以 $EF\perp CD$,在 α 内连结 FO',又在平面 OFO' 内作 $EE'\parallel OO'$,且与 FO' 的延长线交于 E',这样,已知和求证的数量关系都集中到平面 EFE' 中。

解:如图 7,$Rt\triangle OFO'\backsim Rt\triangle EFE'$,

, 　$OF:EF=OO':EE'$。

又　$\triangle OAB\backsim\triangle OCD$,且 OF、OE 分别为其高,

, $\frac{OF}{OE}=\frac{AB}{CD}=\frac{7}{3}$,, $\frac{EF}{OF}=\frac{10}{7}$。

从而$\frac{EE'}{OO'}=\frac{10}{7}$，即 $EE'=\frac{10}{7}\cdot OO'=10$。

又由三垂线定理知 $E'F\perp AB$，，$\angle E'FE$ 为平面 ABCD 与平面 a 所成二面角的平面角。

而 $\sin\angle EFE'=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$，

故所求的二面角为 $\arcsin\frac{2}{3}$。

□逐差法在解题中的应用

在中学数学中，逐差法（逐项相消法）常常用来求某些数列的前 n 项和以及求某些递推数列的通项公式。

在数列求和时，如果可将数列的一般项

$$a_k=\lambda[f(k+1)-f(k)], \quad ①$$

其中 λ 为待定常数，而 $f(k)$ 为 k 的函数，则可在①中令 $k=1、2、\cdots、n$，然后将这 n 个等式相加，于是数列 $\{a_k\}$ 的前 n 项和即为

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\lambda[f(n+1)-f(1)] \quad ②$$

这里要说明的是，将数列的一般项 a_k 写成两项之差的目的是为了求和时等式右端的前后项相消，故有时 a_k 也可作其他形式，例如

$$a_k=\lambda[f(k+2)-f(k)] \quad ③$$

等，只要能达到求和的目的即可。由此可知，列出恒等式①是利用逐差法求数列前 n 项和的关键。

逐差法还可以用来求满足下列关系（或转化为这种关系）的递推数列的通项公式（近年来的高考题多属这种类型，限于篇幅，其他类型的递推数列问题这里就不介绍了）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a$，且

$$a_{n+1}-pa_n=qr^n(n=1,2,\cdots) \quad ④$$

其中 p、q、r 均为常数。

由④知 $a_k-pa_{k-1}=qr^{k-1}$上式两边同乘以 p^{n-k}得

$$p^{n-k}a_k-p^{n-k+1}a_{k-1}=qr^{k-1}p^{n-k}$$

令 $k=2、3、\cdots、n$，将得到的 $n-1$ 个式子相加得

$$a_n-p_{n-1}a_1$$

$$=q\left(rp^{n-2}+r^{2}p^{n-3}+\cdots+r^{n-1}\right)$$

$$=\frac{qr\left(p^{n-1}-r^{n-1}\right)}{p-r}$$

所以 $$a_n=ap^{n-1}+\frac{qr\left(p^{n-1}-r^{n-1}\right)}{p-r} \quad ⑤$$

合肥工业大学数学力学系苏化明老师以高考题为例说明了逐差法在这两个方面的应用。

例 1 **求** a**,使等式**

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n^{2}+an}{4(n+1)(n+2)}$$

对所有的正整数 n **都成立。**

(1985 **年全国理科高考副题)**

解 因为

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right),$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right),$$

………………

$$\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right),\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right),$$

将此 n **个等式相加,得**

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)。$$

$$=\frac{n^{2}+3n}{4(n+1)(n+2)}。$$

所以 $a=3$。

例 2 **是否存在常数** a、b、c**,使得等式**

$$1\cdot 2^{2}+2\cdot 3^{2}+\cdots+n(n+1)^{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{12}\left(an^{2}+bn+c\right)$$

对一切自然数 n **都成立?并证明你的结论,**

(1989 **年全国理科高考题)**

解 因为 $n(n+1)^{2}$

$=n(n+1)(n+2)-n(n+1)$,

所以 $1\cdot2^2+2\cdot3^2+\cdots+n(n+1)^2$

$=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)-[1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)]$

由 $1\cdot2\cdot3\cdot4-0\cdot1\cdot2\cdot3=4\cdot1\cdot2\cdot3$,

$2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4=4\cdot2\cdot3\cdot4$,

$3\cdot4\cdot5\cdot6-2\cdot3\cdot4\cdot5=4\cdot3\cdot4\cdot5$,

……………

$n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+2)(n+2)=4n(n+1)(n+2)$,

得 $4[1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)]=n(n+1)(n+2)(n+3)$,

所以 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$,

类似的方法可得

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

所以 $1\cdot2^2+2\cdot3^2+\cdots+n(n+1)^2$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

$-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$=n(n+1)(3n^2+11^n+10)/12$

故当 $a=3,b=11,c=10$ 时,题设等式对一切自然数 n 成立。

例 3 已知数列 $\{a_n\}$,其中 $a_n=\cos na(0<a<\pi)$

(1) 试用 a_{n-1},a_{n-2} 表示 a_n;

(2) 用数学归纳法证明

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}};$$

(3) 求和:$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{k+1}a_k+\cdots-a_{2n}+a_{2n+1}$,

(1986 年广东省理科高考题)

解 (1)、(2) 略。

(3) 设 $S=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{k+1}a_k+\cdots-a_{2k}+a_{2k+1}$,

则 $2S\cos\frac{a}{2}=2\cos\frac{a}{2}[\cos a-\cos2a+\cdots+(-1)^{k+1}\cos ka+\cdots-\cos2na+\cos(2^n+1)a]=2\cos\frac{a}{2}\cos a-2\cos\frac{a}{2}\cos2a+\cdots+(-1)^{k+1}2\cos\frac{a}{2}\cos ka+\cdots-2\cos\frac{a}{2}$

$\cos 2^{n}a+2\cos\frac{a}{2}\cos(2^{n}+1)a$

$=\cos\frac{3a}{2}+\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{5a}{2}-\cos\frac{3a}{2}+\cdots+(-1)^{k+1}\cos\frac{2k+1}{2}a+(-1)^{k+1}\cos\frac{2k-1}{2}a+\cdots-\cos\frac{4n+1}{2}a-\cos\frac{4n-1}{2}a+\cos\frac{4n+1}{2}a+\cos\frac{4n+3}{2}a=\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{4n+3}{2}a=2\cos(n+1)a\cos\frac{2n+1}{2}a$,

所以 $S=\dfrac{\cos(n+1)a\cos\frac{2n+1}{2}a}{\cos\frac{a}{2}}$

注 第(2)小题也可以用这种方法来求和。

例4 已知数列 $\{a_n\}$ 的第一项 $a_1=\frac{3}{5}$,第二项 $a_2=\frac{31}{100}$,并且数列 $a_2-\frac{1}{10}a_1, a_3-\frac{1}{10}a_2,\cdots,a_{n+1}-\frac{1}{10}a_n,\cdots$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,而数列 $\lg(a_2-\frac{1}{2}a_1),\lg(a_3-\frac{1}{2}a_2),\cdots,\lg(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n),\cdots$ 是公差为 -1 的等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n\geqslant 1)$,求 $\lim\limits_{n\to}S_n$。

(1983 年全国理科高考副题)

解 (1) 因为数列

$a_2-\frac{1}{10}a_1, a_3-\frac{1}{10}a_2,\cdots,a_{n+1}-\frac{1}{10}a_n,\cdots$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

所以

$a_{n+1}-\frac{1}{10}a_n=(a_2-\frac{1}{10}a_1)(\frac{1}{2})^{n-1}$,

而 $a_2-\frac{1}{10}a_1=\frac{31}{100}-\frac{1}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{4}$,

所以 $a_{n+1}-\frac{1}{10}a_n=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}$

① 又因为数列 $\lg(a_2-\frac{1}{2}a_1),\lg(a_3-\frac{1}{2}a_2),\cdots$,

$\lg(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n),\cdots$

是公差为 -1 的等差数列,

所以 $\lg(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n)$

$=\lg\left(a_2-\frac{1}{2}a_1\right)+(n-1)(-1)$

$=-\lg100-n+1=-n-1$,

所以

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=10^{-(n+1)} \qquad ②$$

① - ②,得

$$\frac{4}{10}a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1},$$

所以　$a_n=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{10^{n+1}}\right)$。

(2)　解略

这里要指出的是,由题设条件得到的递推公式①、②是等价的,即原题给出的第二个条件(或第一个条件)是多余的。

例5　设数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$的前 n 项和 S_n 和 a_n 的关系是

$$S_n=-ba_n+1-\frac{1}{(1+b)^n},$$

其中 b 是与 n 无关的常数,且 $b\neq-1$。

(1)　求 a_n 和 a_{n-1} 的关系式;

(2)　写出用 n 和 b 表示 a_n 的表达式 k;

(3)　当 $0<b<1$ 时,求极限 $\lim\limits_{n\to}S_n$。

(1987 年全国理科高考题)

解　(1)　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-b(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{(1+b)^n}+\frac{1}{(1+b)^{n-1}}$

$=-b(a_n-a_{n-1})+\frac{b}{(1+b)^n}(n\geqslant2)$

由此解得

$$a_n=\frac{b}{1+b}{}^{a_{n-1}}+\frac{b}{(1+b)^{n+1}}\quad(n\geqslant2) \qquad ①$$

(2)　由①得 $a_k-\frac{b}{1+b}{}^{a_{k-1}}=\frac{b}{(1+b)^{k+1}}\quad(k\geqslant2)$

上式两边同乘以　$\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-k}$,得

$\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-k}a_n-\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-k+1}a_{k-1}$

$=\frac{b^{n-k+1}}{(1+b)^{n+1}}$,令 $k=2、3、\cdots、n$,

将所得的 $n-1$ 个等式相加得

$a_n-\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-1}a_1$

$=\frac{1}{(1+b)}(1+b)^{n+1}(b+b^2+\cdots+b^{n-1})$

由关系式

$S_n=-ba_n+1-\frac{1}{(1+b)^n}$,知

$a_1=-ba_1+1-\frac{1}{1+b}$,

所以 $a_1=\frac{b}{(1+b)^2}$,

故 $a_n=\frac{1}{(1+b)^{n+1}}(b+b^2+\cdots+b^n)$

因此

$$a_n=\begin{cases}\frac{b-(1-b^n)}{(1-b)(1+b)^{n+1}}, & b\neq 1,\\ \frac{n}{2^{n+1}}, & b=1。\end{cases}$$

□初中数学中常用的演绎推理格式

九年义务教育全日制初级中学的数学教学大纲规定,“初中数学教学中发展学生的逻辑思维能力主要是逐步培养学生:会观察、比较、分析、综合、抽象和概括;会用归纳、演绎和类比进行推理;会准确地阐明自己的思想和观点;形成良好的思维品质”。要实现大纲所规定的上述教育目的,必须根据学生和教师双方的具体条件,采用生动的有效的教学方法。

有人提出,归纳推理,演绎推理,类比推理是平面几何教学的核心,教师应当十分重视,在教学中精心渗透,核心之说是否恰当?可另行讨论。但要求教师十分重视,在教学工作中精心渗透,却是完全正确的。本文作者还认为,不但在平面几何的教学中,在整个初中数学教学中都要十分重视,精心渗透。

根据一些已知判断（一个或几个）得出一个判断的思维过程叫做推理*。从数学科学的眼光来看，从一些命题得到另一个命题的思维过程，就叫做数学推理。

在一个推理中，作为根据的命题叫做该推理的前提，所得到的命题，叫做该推理的结论。在日常语言中，常常用复合句或句组来表示推理，并且含有‘因为…所以…’，‘由于…，因此…’等关联词语。为了醒目，在表示推理时，常常把前提放在横线上面，结论放在横线下面。

当前提为真时，结论一定为真，具有这种必然联系的推理，叫做演绎推理。

在数学里，为了证明一个命题（判断）为真，要使用一系列首尾相连的演绎推理。在初中数学里，所使用的演绎推理有哪些格式？有人说，就是三段论。实际上，在初中数学中已经渗入了许多推理格式，并不只有三段论这一种推理格式。北京小川弘璋老师整理归纳了这些推理格式。

格式 1（分离原则）　　例 1

格式 1	例 1
$P\to Q$	若三角形两边相等，则该两边所对的内角相等。
P	在△ABC 中，AB = AC.
∴ Q	∴ 在△ABC 中，∠B = ∠C.

格式 2　　例 2

格式 2	例 2
$P\to Q$	若 x 是 16 的倍数，则 x 是 8 的倍数。
$Q\to R$	若 x 是 8 的倍数，则 x 是 4 的倍数。
∴ $P\to R$	∴ 若 x 是 16 的倍数，则 x 是 4 的倍数。

* 参见金岳霖主编《形式逻辑》，人民出版社，1983 年。

格式 3

$P \to Q$
$\overline{Q}$

, $\overline{P}$

例 3

$\triangle ABC$ 中,若 $AB > AC$,则 $\angle B > \angle C$
$\triangle ABC$ 中,并非 $\angle B > \angle C$

, $\triangle ABC$ 中,并非 $AB > AC$.

格式 4

$P \vee Q$
$\overline{P}$

, Q

例 4

$\sqrt{2}$是有理数或无理数。
$\sqrt{2}$不是有理数。

, $\sqrt{2}$是无理数。

格式 5

P
Q

, $P \wedge Q$

例 5

$\triangle ABC$ 是等腰三角形
$\triangle ABC$ 是直角三角形

, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形

格式 6

$P \wedge Q$

, P

例 6

2 是偶数,并且 2 是素数

, 2 是素数。

格式 7

$P \to Q$
$R \to Q$

, $(P \vee R) \to Q$

例 7

若甲是医生,则丙的病治好了。
若乙是医生,则丙的病治好了。

, 若甲、乙两人中有一人是医生,则丙的病治好了。

格式 8　　**例** 8

$P\to Q$　　△ABC中,若AB=AC,则∠B=∠C.

$Q\to P$　　△ABC中,若AB=AC,则∠A的平分线垂直BC.

∴ $P\to(Q\wedge R)$　　∴ △ABC中,若AB=AC,则∠B=∠C,并且∠A的平分线垂直BC.

格式 9　　**例** 9

$P\to Q$　　若 $a>b$,则 $a-b>0$

$P\leftrightarrow R$　　$a>b$,当且仅当 $a^3-b^3>0$

∴ $R\to Q$　　∴ 若 $a^3>b^3$,则 $a-b>0$

格式 10　　**例** 10

$P\to Q$　　若△ABC中,∠A的平分线平分BC,则AB=AC.

$Q\leftrightarrow R$　　在△ABC中,AB=AC,当且仅当∠B=∠C.

∴ $P\to R$　　∴ 若△ABC中,∠A的平分线平分BC,则∠B=∠C.

还有一些推理格式,因为不常用,或者在初中阶段未用到(如数学归纳法),就不在此介绍了。

这些推理格式为什么是正确的?我们可以用数理逻辑的方法,来证明上述格式都是恒真命题,既然是恒真命题,当前提为真时,结论一定为真。但从根本上说,推理格式是客观事物之间必然联系的一种反映,是人类实践历史的总结。这里要强调两点:第一,只要前提确定了,按照推理格式,结论也被确定。第二,只要前提为真,根据推理格式,结论就一定为真,不必再从另外的角度去证明结论为真。

有的教学论文中说,“由于学生缺乏有关证明的逻辑知识(比如常用的推论形式和规律),因此,在证明中常犯错误(如推不出,循环论证等”。按照这种说法,如能在学习数学证明之前,能了解有关证明的逻辑知识,就不易在证明中犯错误了。实际上,我们只能在学生学习证明的过程中,教给学生有关证明的逻辑知识,而不能在事先。二十年前,

本文作者教过一段时间的中学数学课，曾把前面提到的分离规则和三段论等推理格式，用渗透的方式教给初中生，举了较多的例子，让学生从这些例子中去领悟那抽象的推理格式，并且让学生自己尽可能举出他所熟悉的例子。当时，并没有用字母表示抽象的推理格式，但我发现有许多学生已经领悟到推理格式了，能识别推理格式是否正确。这一经验使我认识到，渗透对初中学生是有用的。

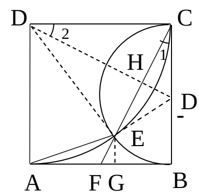
已故的世界著名的数学家和数学教育家波利亚在他的名著《数学的发现》中说了一段很有意思的话："数学思维不是纯形式的；它所涉及的不仅有公理、定理、定义及严格的证明，而且还有许许多多其它方面：推广、归纳、类推以及从一个具体情况中辨认出或者说抽取出某个数学概念等等。数学教师有极好的机会使他的学生了解这些十分重要的非形式的思维过程。"这段话对我们进行推理论证的教学是很有启发的。

□基本量思想在解题中的运用

通过给出基本量来编制数学习题是编题的一种基本方法。反过来，在解决问题的过程中充分利用基本量的思想就为在解题过程中的各个环节提供了各种信息，使解题"有章可循，有法可依"。浙江省上虞市东关中学王建荣老师总结的方法有：

1. 引线

有的点，线是一些线和面（基本量）相交而成，为充分利用这些基本量的性质，就需要添线。



例 1. 如图：正方形 ABCD 中，AB = 2，以 D 为圆心，以 AD 为半径画弧，又以 BC 为直径画半圆，它们相交于 E，CE 的延长线交 AB 于 F，(1) 求证：AF = FB，(2) 求 AE 的长。

分析：(1) 此图中关键是 E 点，而 E 点是由 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BEC}$ 交轨而成。我们可以把 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BEC}$ 看成是确定点 E 的两个基本量，为利用这两个基本量的性质，就需要 E 和圆心连，即连 ED、OE（O 是 BC 的中点）再连 OD，则 DE = DC，OE = OC，， DO 是 CE 的垂直平分线。 ∠DCO = R + L， ∠1 = ∠2。显然△ODC≌△BCF，， BF = OC $\frac{1}{2}$BC = $\frac{1}{2}$AB。， AF = BF。

(2)过 E 作 $EG\perp AB$ 于 G 进一步可求得 $AE=\frac{2}{5}\sqrt{10}$。

$CE=2CH=\frac{4}{5}\sqrt{5}$。

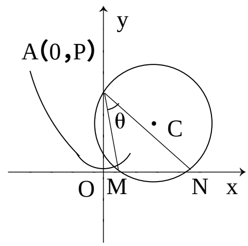
2. 引参

当选定的基本量中某个量还未确定时,可选这个量为参变量。

例 2. 已知⊙C 过定点 $A(0,P)$($P\in R^{+}$),圆心 C 在抛物线 $x^2=2py$ 上运动,若 MN 为⊙C 在 x 轴上截得的弦。设 $|AM|=L_1$ $|AN|=L_2$。$\angle MAN=\theta$。

(Ⅰ)、当 C 点运动时 $|MN|$ 是否变化?写出并证明你的结论。

(Ⅱ)、求式于 $\frac{L_2}{L_1}+\frac{L_1}{L_2}$ 的最大值,并求取这个最大值时 θ 的值和此时⊙C 的方程。



分析:因为 P 是定值,所以本题只有一个基本量。

(Ⅰ)、设圆心 C 的横坐标作为基本量并作为参数 x_0,则⊙C 的方程:$(x-x_0)^2+(y-\frac{x_0^2}{2P})^2=x_0^2+(\frac{x_0^2}{2P}-P)^2$,令 $y=0$,得 $x_1=x_0-P$,$x_2=x_0+P$,, $|MN|=|x_2-x_1|=2P$ 为定值。

(Ⅱ)、因为本题只有一个基本量,选 $\angle MAN=\theta$ 为基本量并作为参数。

则:$L_1^2+L_2^2=4P^2+2L_1L_2\cos\theta$,

$S_{\triangle MAN}=\frac{1}{2}L_1L_2\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}|OA|\cdot|MN|$

$=P_2\Rightarrow L_1\cdot L_2=\frac{2P^2}{\sin\theta}$,

, $\frac{L_2}{L_1}+\frac{L_1}{L_2}=2(\sin\theta+\cos\theta)=2\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$。

, 当 $\theta=45°$ 时,$(\frac{L_2}{L_1}+\frac{L_1}{L_2})_{max}=2\sqrt{2}$.

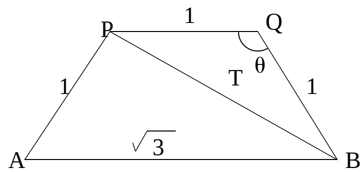
此时圆方程为:$(x-\sqrt{2}P)^2+(y-P)^2=2P^2$。

或·$(x+\sqrt{2}P)^2+(y-P)^2=2P^2$。

3. 引路

基本量确定以后,非基本量就可表示为基本量的函数,当某些量还是独立的量时,就应找出它们与基本量的函数关系式,这就提供了解题思路。

例 3. **在平面上有四点，** A，B，P，Q，**其中** A，B **为定点，** $AB=\sqrt{3}$，P，Q **是动点，满足** $AP=PQ=QB=1$，**又** $\triangle APB$ **与** $\triangle PQB$ **面积分别是** S，T，**试求** S^2+T^2 **的取值范围。**



分析：一般四边形有五个基本量，现四个量已知，再选 $\angle PQB=\theta$ **为基本量。则** S，T **必是** θ **的函数。**

$T=\frac{1}{2}PQ\cdot QB\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$ **由余弦定理得**

$PB^2=1^2+1^2-2\times1\times1\cos\theta=1^2+3-2\times1\times\sqrt{3}\cdot\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{1+\cos}{\sqrt{3}}$

，$S^2+T^2=\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{1}{4}\times3\left[1-\left(\frac{1+\cos}{\sqrt{3}}\right)^2\right]=-\frac{1}{2}\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{8}$。

随着基本量 θ **的确定，** $\angle A$ **随之确定，，** θ **与** A **存在着制约的条件。**

$|PB|\leqslant|PQ|+|QB|=2$，， $\angle A\Delta\ \frac{\pi}{2}$。

， $-1\leqslant\cos\geqslant\sqrt{3}-1$。， $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}\leqslant S^2+T^2\leqslant\frac{7}{8}$。

4. 引法

非基本量是基本量的函数，有时为减少变量的个数，就可用基本量法，消元法等解题。

例 4. **设：** $a\sec\theta+c\cdot tg\theta=d$，$b\sec\theta-dtg\theta=c$。

求证： $a^2+b^2=c^2+d^2$。

分析：共 5 **个量** a，b，c，d，θ，**两个方程，故基本量的个数为** 3 **个，所以用基本量法解。选** c，d，θ **为基本量。**

$a=(d-c\cdot tg\theta)\cos\theta=d\cos\theta-c\sin\theta$ ……①

$b=(c+d\cdot tg\theta)\cos\theta=c\cos\theta-d\sin\theta$ ……②

$①^2+②^2$ **左** $=a^2+b^2$ **右** $=d^2+c^2$，

，$a^2+b^2=c^2+d^2$。

□基本量观点在解题中的运用

任何一个数学问题总会牵涉若干个量，但其中只有少数的几个量

可以独立取值,由于各个量之间受到某些条件的约制,其它的量可以由这些量的值确定。因此,我们可以称这些量作为基本量,确定了基本量及其间的关系,问题便迎刃而解,这就是基本量观点。关于选取那些量为基本量,可据题目条件和解题需要而定。华南师大附中黄启林老师作了如下分析:

例如,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中,系数 a,b,c 和两根,x_2,这五个量受到两个独立条件 $x_1+x_2=-\frac{a}{b}$,$x_1\cdot x_2=c/a$ 的限制,其中只有三个量是独立的,即基本量,所以只要已知三个量,其他两个量也随之确定。

又如,与一个三角形有关的量很多(边,角,角平分线,中线,高,面积等),但每个三角形只有三个基本量(如它的三条边),其它的量都可以用这三个量来表达。

例 1 已知方程 $x^2+3x+m=0$ 的两根之差为 5,求 m 的值________。

分析 这里 $a=1$,$b=3$ 是两个已知的基本量,再由条件两根之差为 5 就能确定第三个基本量 m。

设方程两根为 x_1,x_2,且 $x_2>x_1$,则 $x_1+x_2=-3$,$x_2-x_1=5$,解得:$x_1=-4$,$x_2=1$,从而由 $x_1\cdot x_2=m$,得 $m=-4$。

例 2 若方程 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的二根之比为 $m:n$,求证:$b^2mn=ac(m+n)^2$ ________。

分析 将已知条件用等式明确地表示出来:设两根 $x_1=mk$,$x_2=nk$,由韦达定理,有

$$\begin{cases} mk+nk=\dfrac{-b}{a}, & (1) \\[2ex] (mk)\cdot(nk)=\dfrac{c}{a}。 & (2) \end{cases}$$

仔细观察(1),(2)式,应取 a,$x_1=mk$,$x_2=nk$ 为基本量,因为 b,c 容易用上述的量来表示。

由(1),(2)式有:$b=-ak(m+n)$,$c=amnk^2$,则 $b^2mn=a^2k^2mn(m+n)^2$,

$ac(m+n)^2=a\cdot(amnk^2)\cdot(m+n)=a^2k^2mn(m+n)^2$。所以,$b^2mn=ac(m+n)^2$。

例 3 已知 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=60°$,周长为 20,面积为 $10\sqrt{3}$,求 b。

分析 将已知条件用以下等式表示出来:

$$\begin{cases} B=60°, \\ a+b+c=20, \\ \dfrac{1}{2}ac\sin B=10\sqrt{3} \end{cases}$$

观察上述式,应取 a,c,B 为基本量,而 B = 60°为已知,故只需求出 a、c,问题就解决了。

由余弦定理及已知条件有:

$$\begin{cases}(20-a-c)^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos60°\\ \frac{1}{2}ac\sin60°=10\sqrt{3}。\end{cases}$$

解得:a = 8,c = 5。(或 c = 8,a = 5。)

故 $b=20-a-c=7$。

例 4. 在△ABC 中,AB = AC,∠A = 100°,∠B 的平分线交 AC 于 D,求证:AD + BD = BC

分析 等腰三角形有两个基本量,由于题设条件具有∠A = 100°,所以本题的基本量只有一个。

取 BD 为基本量,如图 1,由正弦定理有:

$$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin A},$$

$$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$$

, $AD=\frac{\sin\angle ABD}{\sin A}\cdot BD$,

$BC=\frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}\cdot BD$。

$\angle A=100°$,AB = AC,BD 为∠B 平分线,

, $\angle ABD=20°$,$\angle BCD=40°$,$\angle BDC=120°$。

, $AD=\frac{\sin20°}{\sin100°}\cdot BD=\frac{\sin20°}{\sin80°}\cdot BD$。

$BC=\frac{\sin120°}{\sin40°}\cdot BD=\frac{\sqrt{3}}{2\sin40°}\cdot BD$。

又

$$\begin{aligned}AD+BD&=\frac{\sin20°}{\sin80°}\cdot BD+BD\\&=\frac{\sin20°+\sin80°}{\sin80°}\cdot BD\\&=\frac{2\sin50°\cos30°}{2\sin40°\cos40°}\cdot BD\\&=\frac{\sqrt{3}\sin50°}{2\sin40°\cos40°}\cdot BD\\&=\frac{\sqrt{3}}{2\sin40°}\cdot BD。\end{aligned}$$

，　$AD+BD=BC$。

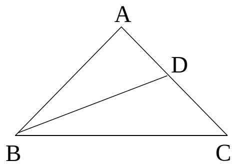


图1

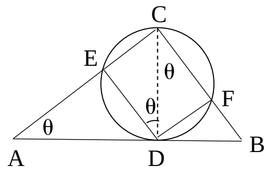


图2

例 7.（第 26 届 IMO 试题）一个圆的圆心 P 在顶点共圆的四边形 ABCD 的 AB 边上，其它三边都与该圆相切。证明：$AD+BC=AB$。

分析：先来研究本题基本量的个数，为了解决这个问题，暂时可以退一步去设想——让 $CD\parallel AB$，那么由于该四边形的顶点共圆，即该四边形的对角互补，此时的四边形一定是一个等腰梯形、它的下底通过 P 点，显然，该图的基本量只有一个。再回到原题，原题的基本量就是 2 个，取图 4 中的角 α 与角 β 为两个基本量，那么解本题的关键就掌握住了。

设圆 P 的半径为 r，则 $\angle PDF=\angle PDG=(\pi-\beta)/2$，$\angle PCF=\angle PCE=(\pi-\alpha)/2$，

$$PA=\frac{r}{\sin\alpha},PB=\frac{r}{\sin\beta},AG=r\cdot\mathrm{ctg}\alpha,BE=r\cdot\mathrm{ctg}\beta,$$

$$GD=r\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi-\beta}{2}=r\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}\cdot r。$$

$$CE=r\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi-\alpha}{2}=r\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot r。$$

于是，

$$\begin{aligned}AD+BC&=(AG+GD)+(BE+EC)\\&=\left(r\mathrm{ctg}\alpha+\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}\cdot r\right)+\left(r\cdot\mathrm{ctg}\beta+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot r\right)\\&=r\cdot\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\frac{r}{\sin\beta}+\frac{r}{\sin\alpha}\\&=PB+PA\\&=AB\end{aligned}$$

掌握一些常见图形的基本量个数，对我们的解题也是很有帮助的。如，等腰三角形有 2 个基本量，正三角形有一个基本量；一个任意四边形有 5 个基本量，而已知圆的内接四边形有 3 个基本量，梯形的基本量个数为 4，而等腰梯形的基本量个数为 3。

□向量思想在初中数学解题中的渗透

向量思想在初中数学中的渗透，不但易被学生接受，而且很有用处。下面的例子及说明是湖北松滋县西斋镇中余爱国老师在初二上学期一次课外活动的内容：

运算口诀 前次终点（边）此次始，值定大小号定向，初始最终即结果。

口诀解释 每次运算都把前次运算（第一次运算的前次运算的终点在例中记“初始”）的终点（或终边）作为始点（或边），把每一项（代数和中的加项）的绝对值看成向量的模，“+”、“-”符号看成向量的方向符号，初始点（边）到最终点（边）构成的图形的方向和大小就构成运算的结果。

例1 在数轴上计算 $5-7.5+4$。

解 如图1，$5-7.5+4=1.5$。

$\begin{bmatrix}终2\\始3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}(初始)\\始1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}终3\\(最终)\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}终1\\始2\end{bmatrix}$

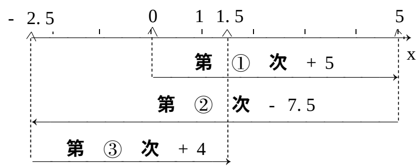


图1

例2 已知线段 a、b、c，画 $2a-b+c$。

画法 1. 画射线 A_1M（规定 A_1M 为正向）。

2. 依次画 $A_1B=2a$，$BC=-b$，$CA_6=c$。如图2，线段 A_1A_6 即为所画。

例3 已知 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$，画 $2\angle 1-\angle 2+\angle 3$。

画法 1. 画射线 OA。

2. 依次画 $\angle AOB=\angle BOC=\angle 1$，$\angle COD=-2$，$\angle DOE=\angle 3$。如图3，$\angle AOE$ 即为所画。

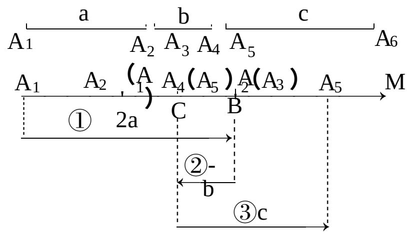


图2

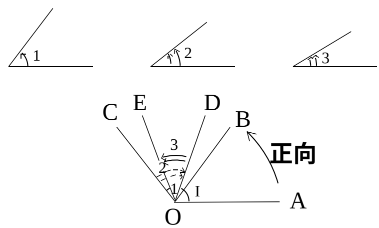


图3

向量思想在初中数学中的渗透，可认为是有理数有关概念（正、负数等）及代数和运算的一种推广。它会使学生初具向量思想，更习惯于数形结合，为开发智力和学生进一步深造起到积极作用；对中学阶段的其它学科如初中物理中力的图示法、高中物理中力的三角形与平行四边形法则的掌握运用有很大程度的影响；更能使学生感到新鲜有味，起到使学生对寻求新方法解决新问题产生兴趣和初具方法的作用。课后，有的同学兴奋地说：这些知识易学易懂，而且使我发现不光会背“1+2=3”才能做计算的“新大陆”。从后两例的近期目标看，既可以免去如例2中 $a>\frac{b}{2}$ 的条件，也能避免一些繁难的画法语言叙述。

□还原思想及其在解题中的应用

解答数学题的思维过程，实质上是将命题的信息情景经过加工、调节，使之符合于最基本的数学模型，从而使问题还原到已知的知识领域，现出其本来面目。数学教育家波利亚说：“如果你解不出某道题，那肯定是有一个更容易的问题你尚未解决——找到它！”是的，找到了

它，解决问题就成为举手之劳了。湖北武穴师范洪凰翔、何琴老师总结的做法是：

1. **还原到基本概念**

概念是组成数学知识的基石，其功能与作用首先是体现在应用的广泛性上。因此只要正确地把握数学问题的构成原理，逆向地追根溯源，把问题还原到基本概念，不仅可以简化运算，更重要的是能清楚地看到题情发展的趋向，并在较高的层次上形成解题能力。

例 1 求和：$C_n^0+C_n^1\cos\theta+C_n^2\cos2\theta+\cdots+C_n^n\cos n\theta$。

乍看起来，问题不知从何入手。但只要我们突破思维定势，从问题的构成原理方面奋力思索，让它回复到起点位置。

由题中出现的 C_n^k，我们可追溯到二项式 $(1+\cos\theta)^n$ 的展开式；由 $\cos n\theta$ 的参与又可联想到棣美佛定理 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$。但二者各在一方，仍有一定跨度。要想尽快找到联结问题的纽带，就得揭开一层层面纱，展示问题构造背景，把发现过程中的规律返朴归真地显露出来，才能拨开迷雾。

令 $A=C_n^0+C_n^1\cos\theta+C_n^2\cos2\theta+\cdots+C_n^n\cos n\theta$，

$B=C_n^1\sin\theta+C_n^2\sin2\theta+\cdots+C_n^n\sin n\theta$，于是

$$A+Bi=C_n^0+C_n^1(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$+C_n^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)+\cdots+C_n^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$
$$=C_n^0+C_n^1(\cos\theta+i\sin\theta)+C_n^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\cdots+C_n^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$=[C_n^0+(\cos\theta+i\sin\theta)]^n,$$

但 $(C_n^0+\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$$=[(1+\cos\theta)+i\sin\theta]^n$$
$$=\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^n$$
$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n$$
$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)。$$

可见要求 A，只要把问题还原到复数及其相等的定义，即可顺理成章地得到解决。

2. **还原到方程**

许多问题的结论与条件的关系含而不露，甚至隐匿至深，造成思路阻闭。这时如精心研究问题所显示的数学机理结构，发现其本质上是与方程相关的问题、可设法使其还原到方程模型中去，运用方程的观点

来解。

例 2　已知

$$\frac{a^2}{2^2-1^2}+\frac{b^2}{2^2-3^2}+\frac{c^2}{2^2-5^2}+\frac{d^2}{2^2-7^2}=1$$

$$\frac{a^2}{4^2-1^2}+\frac{b^2}{4^2-3^2}+\frac{c^2}{4^2-5^2}+\frac{d^2}{4^2-7^2}=1$$

$$\frac{a^2}{6^2-1^2}+\frac{b^2}{6^2-3^2}+\frac{c^2}{6^2-5^2}+\frac{d^2}{6^2-7^2}=1$$

$$\frac{a^2}{8^2-1^2}+\frac{b^2}{8^2-3^2}+\frac{c^2}{8^2-5^2}+\frac{d^2}{8^2-7^2}=1$$

试求 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 之值。（第二届美国邀请赛题）

这道赛题的条件多而繁，如何运用这些条件实现问题的求解目标，的确令人迷惘。但如从整体上仔细琢磨条件所呈现的机理特征，可以发现 $2^2, 4^2, 6^2, 8^2$ 是下列分式方程的根：

$$\frac{a^2}{x-1^2}+\frac{b^2}{x-3^2}+\frac{c^2}{x-5^2}+\frac{d^2}{x-7^2}=1。$$

于是问题可还原到研究分式方程的性质上来，把它通分变形得：

$$x^4-(a^2+b^2+c^2+d^2+1^2+3^2+5^2+7^2)x^3+mx^2+px+q=0。$$

依韦达定理得

$$2^2+4^2+6^2+8^2=a^2+b^2+c^2+d^2+84,$$

$$, \quad a^2+b^2+c^2+d^2=36。$$

3. 还原到函数

对于某些问题，经洞明其信息返回的理路，发现它实质上与函数息息相关，就设法把问题还原到函数的领域中去，再通过研究函数的性质来实现解题目标。

例 3　已知 x、y、z 是非负实数，且 $x+y+z=1$。

求证：$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$。（第 25 届 IMO 试题）

由条件与结论式 $xy+yz+zx-2xyz$ 所展示的信息，追溯其渊源，发现它们与式 $(u-x)(u-y)(u-z)$ 有关，于是寻得函数

$$f(u)=(u-x)(u-y)(u-z)$$

$$=u^3-(x+y+z)u^2+(xy+yz+zx)u-xyz。$$

这样就可以把问题还原到研究函数 $f(u)$ 的性质上来。事实上

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}(x+y+z)$$

$+\frac{1}{2}(xy+yz+zx)-xyz$。

由条件得，

$xy+yz+zx-2xyz=\frac{1}{4}+2f\left(\frac{1}{2}\right)$。

由于 x、y、z **为非负实数，且** $x+y+z=1$**，于是有**

$\left|\frac{1}{2}-x\right|\leqslant\frac{1}{2}$，$\left|\frac{1}{2}-y\right|\leqslant\frac{1}{2}$，$\left|\frac{1}{2}-z\right|\leqslant\frac{1}{2}$，

，$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{8}$。

，$xy+yz+zx-2xyz\geqslant\frac{1}{4}+2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=0$。

当 $0<x、y、z\leqslant\frac{1}{2}$**时，**

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\leqslant\left[\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)+\left(\frac{1}{2}-y\right)+\left(\frac{1}{2}-z\right)}{3}\right]^3=\frac{1}{6^3},$$

，$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{1}{4}+\frac{2}{6^3}=\frac{7}{27}$。

当 x、y、z **中有一个大于**$\frac{1}{2}$**时（至多只有一个），这时** $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$，

$xy+yz+zx-2xyz<\frac{1}{4}<\frac{7}{27}$。

从上知 $0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$。

4. 还原到基本定理

命题的信息情景特征往往反映着事物矛盾的主要方面，它们既暗含着某种解题策略的存在，又显示着问题返回的构思原理。因此解题的意义就在于把构造问题所运用的定理、性质等的过程再现出来，使我们尽快地找到解题的突破口。

例 4　设 a、b、c **均为正实数，**p、q、r **均为非负整数，且** $p+q+r=n$，$n\in N$。

求证：

$a^n+b^n+c^n\geqslant a^pb^qc^r+a^qb^rc^p+a^rb^pc^q$。

从问题所展示的信息源出发，我们作如下的探索：

$a^pb^qc^r=\sqrt[n]{(a^n)^p\cdot(b^n)^q\cdot(c^n)^r}$

$$\leqslant \frac{pa^n+qb^n+rc^n}{n}。$$

以上说明问题可还原到均值不等式这个基本定理上来。于是解题思路启开，问题化解：

同样有

$$a^qb^rc^p=\sqrt[n]{(a^n)^q\cdot(b^n)^r\cdot(c^n)^p}\leqslant\frac{qa^n+rb^n+pc^n}{n}。$$

$$a^rb^pc^q=\sqrt[n]{(a^n)^r\cdot(b^n)^p\cdot(c^n)^q}\leqslant\frac{ra^n+pb^n+qc^n}{n}$$

加之得

$$a^pb^qc^r+a^qb^rc^p+a^rb^pc^q\leqslant\frac{1}{n}(pa^n+qb^n+rc^n+qa^n+rb^n+pc^n+ra^n+pb^n+qc^n)$$

$$=\frac{1}{n}[(p+q+r)a^n+(p+q+r)b^n+(p+q+r)c^n]=a^n+b^n+c^n。$$

5. **还原到基本图形**

许多数(式)的问题,如果依据‘数’所存在的背景,按照某种对应规律,把‘数’迁移到‘形’、还原到基本图形,再运用基本图形的性质来解,更显得解法直观而形象。

例 5 设 x、y、$z\in(0,1)$。求证：

$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$。

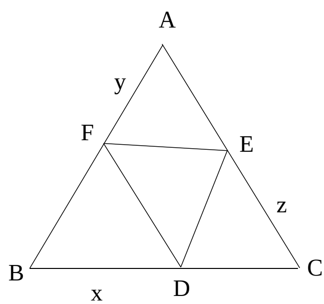
本题实属代数不等式的证明,而直接由条件向结论迁移,则难于实现解题目标。但如思考到六个正数

$$x、1-y、y、1-z、z、1-x$$

依次划分为两数之积之和的形式,给我们以线段之积之和的形象,因而可构造一边长为 1 的正△ABC,并分别在边 BC,CA,AB 上截取

$BD=x, CE=z, AF=Y$（如图），

于是问题可还原到研究特殊三角形的性质上来：



$$S_{\triangle ABC} > S_{\triangle BDF}+S_{\triangle DCE}+S_{\triangle AEF},$$

即 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ>\frac{1}{2}x(1-y)\sin60^\circ+\frac{1}{2}z(1-x)\sin60^\circ+\frac{1}{2}y(1-z)\sin60^\circ.$

整理即得结论不等式。

总之，解题中的还原思想，是解题策略的最佳选择。由于还原思想着眼于始终不渝地坚持对问题数学机理结构的有序处理，透视问题的构想概貌，把握问题的发展趋向，使问题还原到一个理想的境界，因而有利于加大思维的跨度和灵活性，也使解题收到立竿见影之效。

□“范围先行”的数学思维规律及其运用

纵观现行高中数学教材，一个突出的特点是：“研究的问题常被某个特定的区间紧紧约束着。从方程、函数、不等式，到解析几何中曲线与轨迹；从实数集到复数集；从三角到反三角；都或明或暗地受到范围的制约。因此，一条重要的数学思维规律——“范围先行”，便在宏观上客观地存在着。忽视或违背这一规律，都会使问题的解决走向歧路。

实际上，《高中代数》一开始，便给出了“集合”（全集、子集、交集、并集、补集等）系列概念；它正为今后整个高中阶段的数学问题将在特定的‘子集’区间上研究，奠定了理论基础。一个遗憾的事实是，我们的不少学生受教材表面知识点罗列稠密的束缚，没有经过思索（这时教师的点拨应是极其重要的）去领会它的更深层的含意，只是随着知识面的逐渐铺开，才思有所悟。不管怎样，“范围要先行”这条宏观上的认识规律，人们迟早要接受它，并以此来支配思维；否则，是走不出实际解题能力低谷的。江苏丰县宋楼中学肖东老师从三个方面举例作了论述。

1. 对定义在实数集上的一系列初等函数性质的研究，总须意识强烈地审视和挖掘变量的范围，先确定研究空间（区间），才有可能正确

求解

例 1 已知函数 $f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(p-x)+\log_2(x-1)$,试求 $f(x)$ 的最值及此时的 p 的范围。

分析 函数的一切特性(单调性、奇偶性、周期性、值域、最值、图象等)无一不受其定义域的约束。因此,当首先挖掘出 $f(x)$ 定义域 D,而后才能确定继续求解的方向。为此,令

$$\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}>0 & (1)\\ x-1>0 & (2)\\ p-x>0 & (3)\end{cases}\Rightarrow D=\{x\mid 1<x<p\}$$ 。再,

$f(x)=\log_2(x+1)(p-x)=\log_2[-x^2+(p-1)x+p]=\log_2[-(x-\frac{p-1}{2})^2+\frac{(p+1)^2}{4}]$;令 $N=-(x-\frac{p-1}{2})^2+\frac{(p+1)^2}{4}$,$(1<x<p)\cdots *$

i). 如果 $\frac{p-1}{2}\leqslant 1$,即 $1<p\leqslant 3$ 时,N 无最值,$f(x)$ 亦无最值;

ii). 如果 $1<\frac{p-1}{2}<p$,

即 $p>3$ 时,$x=\frac{p-1}{2}$ 为 $N_{大}=\frac{(p+1)^2}{4}$,

故 $f(x)_{max}=2\log_2(p+1)-2$;

iii). 如果 $\frac{p-1}{2}\geqslant p$ 即 $p\leqslant -1$ 时,此与 $p>1$ 矛盾,无研究必要。

这里须特别指出的是,对于上解中的二次函数 $N=-x^2+(p-1)x+p$,其最值的产生过程可提炼概括为"配方一用(挖)范围一论最值"的"三步曲"。这正是高中阶段研究函数问题时不同于初中阶段的关键所在。"三步曲"中的核心环节"挖范围"切中要害,遵循了范围先行的规律。

例 2 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$,且 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$,求 $tg\theta$。

分析 区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内 $tg\theta$ 值的符号有正有负有零等种种可能,故还须进一步地挖掘更优之范围。事实上,由 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=$

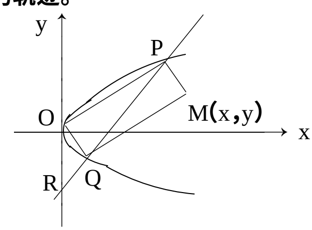
$-\frac{24}{25}<0$，在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上，$\cos\theta>0$，故 $\sin\theta<0$，继易知 $\sin\theta-\cos\theta<0$；据$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{49}{25}\Rightarrow\sin\theta-\cos\theta=-\frac{7}{5}$，结合 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，不难得

$\operatorname{tg}\theta=-\frac{3}{4}$。

此例的解决说明：三角问题（求值、化简、证明等）顺利求解的一般思维规律是什么？（1）要有清醒的"公式＋范围"的解题意识；（2）要有敢于变形，善于化归的技能和信心；两者缺一不可。

2. 解析几何中，曲线的形态、位置、性质等均受既定范围的约束；注意到了"范围背景"，也往往找到了正确解决问题的钥匙

例3 如图（1），设抛物线 C：$y^2=4x$ 过点 R（0，-2）的直线 l 交 C 于 P、Q；求以 OP、OQ 为邻边的平行四边形 OPMQ 的顶点 M 的轨迹。



分析："求轨迹"是解析几何中最重要的问题之一。此例中点 M（x，y）显然受 P、Q 两点的制约；当设出 PQ 方程：$y=kx-2$，代入 $y^2=4x$，$\Rightarrow k^2x-4(k+1)x+4=0\cdots\cdots *$

$$,\quad\begin{cases}x_M=x_P+x_Q=\dfrac{4(k+1)}{k^2}\\ y_M=y_P+y_Q\\ \quad=(kx_P-2)+(kx_Q-2)=\dfrac{4}{k}\end{cases}。$$

消去 k 得：$(y+2)^2=4(x+1)$。至此，如果断言 M 点的轨迹是抛物线，则大为草率，事实上，还应进一步从范围的考察角度，去推敲轨迹图形的纯粹性。事实上，由方程 * 的 $\Delta=32k+16>0$，得 $k>-\frac{1}{2}$。故知：i）当 $k>0$，$x>0$，$y>0$；ii）当 $-\frac{1}{2}<k<0$ 时，$x>8$，$y<-8$，故 M 点的轨迹为抛物线 $(y+2)^2=4(x+1)$ 上 $y>0$ 及 $y<-8$ 的两部分。

有人说"方法＋两性（完备性、纯粹性）"是求轨迹的关键，笔者赞同这种说法；因为对"两性"的推敲，恰是对"范围先行"意识的认定。

例4 一系列椭圆的长轴长均为 8，以轴 y 为左准线；且随圆的左顶点都在抛物线 $y^2=x-2$ 上，求这些椭圆中离心率的变化范围。

分析：设随圆中心为(x_0,y_0)，则椭圆方程为$\frac{(x-x_0)^2}{16}+\frac{(y-y_0)}{b^2}=1\cdots\cdots(1)$；

， 离心率 $e=\frac{\sqrt{16-b^2}}{4}$；左准线 $x=0$，可知 $x_0=\frac{a^2}{c}=\frac{16}{\sqrt{16-b^2}}$。设其左顶点为 (x,y)，则 $x=x_0-4=\frac{16}{\sqrt{16-b^2}}-4$； 左顶点在抛物线 $y^2=x-2$ 上，， $x-2\geqslant 0$，

即 $\frac{16}{\sqrt{16-b^2}}\geqslant 6\Rightarrow 0<e\leqslant\frac{2}{3}$。

这里，须提醒读者注意的是：题中椭圆的范围是建立不等式的关键。凡具有这一背景的问题（包括抛物线、双曲线等）均可由曲线自身的范围得到相应的不等式，从而求出参数的取值范围；这种思路有普遍的推广价值。

3.“复数”的出现，实质是数集扩充后，对实数集内“范围先行”规律的升华和挑战

一个不容忽视的事实是，实数集成为复数集之子集；而许多复数问题（如模及幅角）最终将化归到实数集内解决。这样，“规律”就不能盲目搬用，但一旦落实到实数范畴，它仍起巨大的指导作用；显然，这是对思维层次的较高要求，是对学生数学解题能力进行检验的深化点。

例5 在复数集 C 中解方程：

$x^4+\frac{1}{x^4}+x^2+\frac{1}{x^2}=4$。

分析 如果将原方程化为 $(x^2-\frac{1}{x^2})^2+(x-\frac{1}{x})^2=0$，继而得出 $x^2-\frac{1}{x^2}=0$ 或 $x-\frac{1}{x}=0$，那就大错了。因为在实数集 R 内，$a^2\geqslant 0$ 无懈可击；但在复数集 C 中，认为 $a^2\geqslant 0$ 则是谬误的。此例正确的解法应将原方程化为 $(x^2+\frac{1}{x^2})^2+(x^2+\frac{1}{x^2})-6=0$，换元为 $y^2+y-6=0$ 再解下去，当易如翻掌。

例6 设复数 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r>0$；$\theta\in(0,\pi)$，$z_3=z_1z_2$ 若 $|z_1-z_3|=r+1$ 求 r 和 θ 的取值范围。

分析 从题断“求 θ 和 r 范围”考虑，问题势必能化归到实数范畴。事实上，据 $|z_1-z_3|=|z_1|\cdot|1-z_2|=2|1-r(\cos\theta+i\sin\theta)|=r+1$；可得：$4(1-2r\cos\theta+r^2)=r^2+2r+1$，即 $3r^2-2r(4\cos\theta+1)+3=0$，…… ＊ $r\in R^+$，， 据 $\Delta=4(4\cos\theta+1)^2-36\geqslant 0\Rightarrow\cos\theta\geqslant\frac{1}{2}$ $\theta\in(0,\frac{\pi}{3}]$。而后，化为

$\cos\theta=\frac{3(r^2+1)-2r}{8r}$,据$\frac{1}{2}\leqslant\frac{3(r^2+1)-2r}{8r}<1$,可得$\frac{1}{3}<r<3$。

此例在用条件建立 r 及 θ 的关系式 * 后,问题已实质性的实数化;这就能运用函数与方程的思想,准确地求出 r 及 θ 范围。

总之,宏观上数学意识、数学思想的确立,微观上缜密而积极的探索,是学好数学的保证。而宏观上的规律,支配和左右着微观研究的成败;认识及此,无疑是极其重要的。

□无关思想及其在解题中的应用

无关思想是重要的数学思想,掌握它可以解决定值、定点、定向等问题。变量彼此之间的相关或无关,是数学研究中的重要概念与课题,利用变量无关条件解题,是行之有效的一种重要的数学思想。马明、马复老师价绍了这一种思想的含义和各种应用。

1. 无关思想的含义

现代数学思想的特征之一是在变化中把握数学现象,然而,在某些变化过程中,尽管某个量(包括点的位置)在变化,但它的变化并未引起其它某些量的变化,那么,我们就说那些量与该变量无关。

例 1　$f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与变量 x 无关,其中 x 在实数集内取值。

例 2　$f(\theta)=\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\frac{2}{3}\pi)+\cos^2(\theta-\frac{2}{3}\pi)$,$\geqslant\in R$,则 $f(\theta)$ 与变量 θ 无关,因为,下面的恒等式成立:

$$\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\frac{2}{3}\pi)+\cos^2(\theta-\frac{2}{3}\pi)=3/2。$$

例 3　P 是正三角形内一点,S 是 P 点到三角形三边距离之和,那么,S 的值与点 P 的位置无关。因为正三角形内任意一点到三边距离之和等于正三角形的高。

例 4　圆幂定理的另一种表述:P 是定圆 O 所在平面上的一个定点,过 P 引圆的任意一条直线 l,l 交圆 O 于 A、B 两点,那么 PA 与 PB 的乘积与直线 l 的位置无关。

(注意:PA 与 PB 的乘积却与 P 点的位置有关,因此常称常量 PA·PB 为点 P 对于圆 O 的幂。若 P 点在圆外,则 P 点的幂等于从这点所作圆 O 的切线自该点到切点一段长度的二次幂;若 P 点在圆内,则 P 的幂等于过 P 点而与 PO 垂直的弦的一半的二次幂)。

现在,我们可以发现:如果 $f(\alpha)$ 与变量 α 无关,那么 $f(\alpha)$ 的值相对 α 来说就

是常量。为了确定这个常量,只要把 α 在它的取值集合内任取一个特殊的值代入即可。在“例 1”中,令 $x=0$,得 $f(x)=1$;在“例 2”中,令 $\theta=0$,得 $f(\theta)=3/2$;在“例 3”中,将 P 点放在正三角形的一个顶点处,得常量即正三角形的高。

某些数学概念的定义,常常要用“无关”思想去解释。

例 5　为了说明三角函数定义的合理性,应该证明三角函数的值与角的终边上的 P 点位置无关(与角的大小有关),而这个证明是以相似形原理为依据的。

例 6　在二面角的平面角的定义中,也应证明二面角的大小与棱上所选的 P 点位置无关,这种无关是由空间等角定理决定的。

例 7　在异面直线所成的角的定义中,也应证明与空间所选的 P 点位置无关,这种无关也是由空间等角定理决定的。

2. 无关的充要条件

研究无关的充要条件,对解决定值、定点、定线、定向等问题有极大方便。

例 1　求证:$a=0$ 是 $f(x)=ax+b$ 与 x 无关的充要条件。　(证略)

例 2　求证: $a=b=0$ 是 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与 x 无关的充要条件。

证明　充分性是显然的。下证必要性:$f(x)$ 与 x 无关 $\Rightarrow f(-1)=f(0)=f(1)$ $\Rightarrow a-b+c=c=a+b+c \Rightarrow a=b=0$。

注:上两例实际上是一元 n 次多项式恒等定理的特殊情况。其证法对以下几例具有一般性。

例 3　求证: $a=b=0$ 是 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 与 x 无关的充要条件。

证明　充分性是显然的。下证必要性:

$f(x)$ 与 x 无关 $\Rightarrow f(-\frac{1}{2}\pi)=f(0)$

$=f(\frac{1}{2}\pi) \Rightarrow -a=b=a \Rightarrow a=b=0$。

例 4　求证:$a=b=c=d=0$ 是 $f(x)=a\sin x+b\cos x+c\sin 2x+d\cos 2x$ 与 x 无关的充要条件。

证明　$f(x)$ 与 x 无关 $\Rightarrow f(\pi)$

$=f(\frac{1}{2}\pi)=f(\frac{1}{4}\pi)=f(0)=f(-\frac{1}{2}\pi)$

$\Rightarrow -b+d=a-d=(\sqrt{2}/2)(a+b)+c$

$=b+d=-a-b \Rightarrow a=b=c=d=0$。

(充分性是显然的)

例 5　已知

$f(\theta)=\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)$,其中 0Δ ~α ≯α π,试问 α、β 取何值时,f

(θ)与θ无关。

解 $2f(\theta)=(1-\cos2\theta)+[1-\cos(2\theta+2\alpha)]+[1-\cos(2\theta+2\beta)]=3-[\cos2\theta+\cos(2\theta+2\alpha)+\cos(2\theta+2\beta)]$。

设 $g(\theta)=\cos2\theta+\cos(2\theta+2\alpha)+\cos(2\theta+2\beta)$,问题变为在条件$0\Delta\ \alpha<$≍下,求$\alpha$、$\beta$的值,使得$g(\theta)$与$\theta$无关。

$g(\theta)$与θ无关$\Rightarrow g(0)=g\left(\frac{1}{4}\pi\right)=g\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

$\Rightarrow 1+\cos2\alpha+\cos2\beta=-\sin2\alpha-\sin2\beta$

$=-1-\cos2\alpha-\cos2$≥

$$\Rightarrow\begin{cases}1+\cos2\alpha+\cos2\beta=0\\ \sin2\alpha+\sin2\beta=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\pi,\\ \beta=\frac{2}{3}\pi。\end{cases}$$

可导函数$f(x)$为常数函数的充要条件是$f'(x)\equiv0$。这是数学分析中的一条定理,用无关思想来表达,可改述为:可导函数$f(x)$与x无关的充要条件是$f'(x)\equiv0$。

以此来解答上述各例,常可收得速效,以“例5”为例:$f(\theta)$与θ无关$\Leftrightarrow f'(\theta)\equiv0$ $f'(\theta)=\sin2\theta+\sin(2\theta+2\alpha)+\sin(2\theta+2\beta)$

$=\sin2\theta+\sin2\theta\cos2\alpha+\cos2\theta\sin2\alpha+\sin2\theta\cos2\beta+\cos2\theta\sin2\beta$

$=(1+\cos2\alpha+\cos2\beta)\sin2\theta+(\sin2\alpha+\sin2\beta)\cos2$≥$\equiv0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+\cos2\alpha+\cos2\beta=0,\\ \sin2\alpha+\sin2\beta=0。\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\pi,\\ \beta=\frac{2}{3}\pi。\end{cases}$$

3. 定值问题

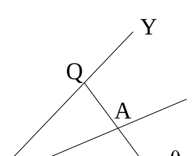
数学中的定值问题,实质上常是无关问题。

例1 经过$\angle XOY$的平分线上的定点A作任意直线与OX及OY分别交于P、Q两点,求证:

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$$

等于定值。

分析 图中a和OA都是常量,为了刻划过A点的直线PQ的任意性,角θ应是变量。问题变为证明



$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$的值与变量θ无关。

证明 在△OPA和△OAQ中分别用正弦定理,有$\frac{OP}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{OA}{\sin(\pi-\theta)}$ ①

或$\frac{OQ}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{OA}{\sin(\theta-2\alpha)}$ ②

由①、②得

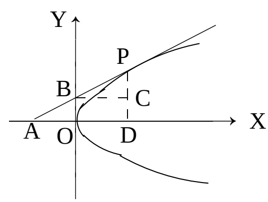
$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$$

$$=\frac{\sin\theta}{OA\cdot\sin(\theta-\alpha)}+\frac{\sin(\theta-2\alpha)}{OA\cdot\sin(\theta-\alpha)}$$

$$=\frac{1}{OA}\cdot\frac{\sin\theta+\sin(\theta-2\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}$$

$$=\frac{1}{OA}\cdot\frac{2\sin(\theta-\alpha)\cos\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$$

$$=2\frac{\cos\alpha}{OA}$$ (常量)。



例2 P是抛物线$y^2=2px$非顶点处的任一点,过P点的切线交坐标轴于A、B两点,求证:$|PA|$与$|PB|$的比值与P点的位置无关。

分析 问题要证P为流动点时,$|PA|:|PB|$为定值。

证明 设$P(x_0,y_0)$,$(y_0\neq0)$,则过P点的切线方程为

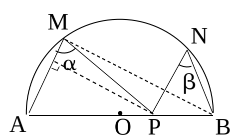
$$y_0y=p(x+x_0),$$

由此得$B(0,\frac{px_0}{y_0})$。作$PC\perp x$轴,$BD\perp PC$交于D,则

$$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|PC|}{|PD|}=\frac{|y_0|}{|y_0-(px_0/y_0)|}$$

$$=\frac{|y_0{}^2|}{|y_0{}^2-px_0|}=\frac{|2px_0|}{|px_0|}=2。$$

$(y_0{}^2=2px_0)$



例3 如图,MN是半圆上两个定点,P是直径AB上的任意一点,$\angle PMA=a$,$\angle PNB=\beta$。

求证:$tg\alpha tg\beta$的值与点P的位置无关。

证明 设半径为1,$OP=d$,$PC\perp AM$,则

$AC : CM = AP : PB = \frac{1+d}{1-d}$,

, $\frac{tga}{tgA} = \frac{PC/CM}{PC/AC} = \frac{AC}{CM} = \frac{1+d}{1-d}$ ①

同法可得

$\frac{tg\beta}{tgB} = \frac{1-d}{1+d}$ ②

①×②得 $tg\alpha tg\beta = tgAtgB$。

4. 定点问题

将(二)中的结论用于定点问题。

例1 有两条抛物线

$y = x^2 - 2x + 2$ ①

$y = -x^2 + ax + b$ ②

在它们交点处的切线互相垂直,证明抛物线②通过与 a、b 无关的一个定点,求出此定点的坐标。

解 设 $P(x_0 y_0)$ 为①、②的交点,则有

$y_0 = x_0^2 - 2x_0 + 2$ ③

$y_0 = -x_0^2 + ax_0 + b$ ④

在 P 点的两切线方程为

$\frac{1}{2}(y_0 + y) = x_0 x - (x_0 + x) + 2$,

$\frac{1}{2}(y_0 + y) = -x_0 x + \frac{1}{2}a(x_0 + x) + b$。

由"垂直"条件,有

$k_1 k_2 = 2(x_0 - 1)\cdot(a - 2x_0) = -1$,

即 $-2x_0^2 + (2+a)x_0 + \frac{1}{2} - a = 0$ ⑤

③-④得 $2x_0^2 - (2+a)x_0 + 2 - b = 0$ ⑥

⑤+⑥得 $b = (5/2) - a$,代入②,有

$y = -x^2 + ax + (5/2) - a$,

即有 $(x-1)a + [(5/2) - x^2 - y] = 0$,

由题意令

$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ (5/2) - x^2 - y = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3/2。 \end{cases}$

这说明抛物线②通过与 a、b 无关的定点 $M(1, 3/2)$。

例2 求证:无论 m 取何值,曲线

$$f(x,y)=mx^2+2x-(m-1)y-m-2=0$$

均通过两个定点,并求此两定点坐标。

证明　将参变量 m 分离,

$$f(x,y)=g(m)=(x^2-y-1)m+(2x+y-2)=0,$$

令 $\begin{cases}x^2-y-1=0,\\2x+y-2=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3,\\y=8。\end{cases}$

所以曲线 $f(x,y)=0$ 过两定点 $A(1,0)$ 与 $B(-3,8)$。

例 3　当 m 取不同的值时,方程

$$f(x,y)=mx^2+2x+(1-m)y+4m-2=0$$

表示不同的曲线,求证诸曲线没有公共点。

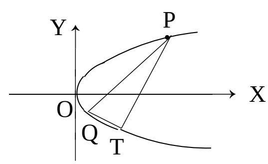
证明　分离参变量 m;

$$f(x,y)=g(m)=(x^2-y+4)m+(2x+y-2)=0。$$

诸曲线 $f(x,y)=0$ 通过与 m 无关的定点的充要条件为 $\begin{cases}x^2-y+4=0,\\2x+y-2=0。\end{cases}$

然而,此方程组无实数解。因此问题得证。

例 4　过抛物线上任意一点 T 作互相垂直的弦 TP、TQ,证明所有这样的 PQ 一定通过某一定点。



证明　设抛物线方程为 $y^2=2px$,$T(2pt^2,2pt)$(p、t 为常量),$P(2pa^2,2pa)$,$Q(2pb^2,2pb)$(a、b 为参变量)。

由 $TP\perp TQ$ 有

$$\frac{2pa-2pt}{2pa^2-2pt^2}\cdot\frac{2pb-2pt}{2pb^2-2pt^2}=-1,$$

由此得　$(a+t)(b+t)=-1$,

所以　$b=-\dfrac{t^2+at+1}{t+a}$　①

直线系 PQ 的方程为

$$\frac{y-2pa}{x-2pa^2}=\frac{2pa-2pb}{2pa^2-2pb^2},$$

即 $\dfrac{y-2pa}{x-2pa^2}=\dfrac{1}{a+b}$ ②

由①、②消去 b,得直线系 PQ 的方程为 $(2pt+y)a^2+(2p-x+2pt^2)a-y-tx-t^2y=0$,

(其中 a 为参变量)。

由于 x、y 的方程组

$$\begin{cases}2pt+y=0,\\2p-x+2pt^2=0,\\-y-tx-t^2y=0,\end{cases}$$

有解 $\begin{cases}x=2p+2pt^2,\\y=-2pt,\end{cases}$

所以参变量变化时,点 $K(2p+2pt^2,-2pt)$ 的坐标均满足直线系 PQ 的方程,这说明直线系 PQ 通过与 a、b 无关的定点 K。

(注) (1)如果不利用“无关的充要条件”,改用常规证法,则运算量很大。

(2)如果将题中的抛物线改为圆、椭圆等其它二次曲线,有同样的结论。

5. 定切线问题

例 1 求证 直线

$x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-2\sin\theta-1=0$ 恒与某定圆相切,并求此圆方程。

证明 直线系

$x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-2\sin\theta-1=0$ 与定点 $P(x_0,y_0)$ 的距离为 $d(d>0)$,则有

$|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-\cos\theta-2\sin\theta-1|=d$, 或

$x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-\cos\theta-2\sin\theta-1=\pm d$,

分离参变量 $\sin\theta$、$\cos\theta$,得

$(y_0-2)\sin\theta+(x_0-1)\cos\theta-1\pm d=0(d>0)$。

令 $y_0-2=x_0-1=-1\mp d=0$,得定点 $P(1,2)$,且 $d=1$。

所以题设直线系恒与圆

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

相切。

例 2 试证 $(x-2tg\alpha-1)^2+(y-tg\alpha)^2=tg^2\alpha$ (α 为参变数,且 $tg\alpha\neq0$)所表示的每一条曲线恒与定直线相切,并求所有这样的直线方程。

解 方程

$(x-2tg\alpha-1)^2+(y-tg\alpha)^2=tg^2\alpha$ ①是以 C $((2tg\alpha+1),tg\alpha)$ 为圆心,$|tg\alpha|$ 为半径的圆系。

设 $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0\quad(p\geqslant 0)$

为圆系①的公切线,则有

$$|(2\operatorname{tg}\alpha+1)\cos\theta+\operatorname{tg}\alpha\sin\theta-p|=|\operatorname{tg}\alpha|,$$

$$(2\operatorname{tg}\alpha+1)\cos\theta+\operatorname{tg}\alpha\sin\theta-p=\pm\operatorname{tg}\alpha,$$

即 $(2\cos\theta+\sin\theta\pm 1)\operatorname{tg}\alpha+(\cos\theta-p)=0$ ②

由等式②的成立与参数 α 无关的充要条件,

得$\begin{cases}2\cos\theta+\sin\theta\pm 1=0,\\ \cos\theta-p=0\quad(p\geqslant 0),\end{cases}$

$\cos\theta=p>0$；， $2\cos\theta+1>1$,

即 $2\cos\theta+\sin\theta+1\neq 0$,于是有

$$\begin{cases}2\cos\theta+\sin\theta-1=0,\\ \cos\theta-p=0\quad(p\geqslant 0),\end{cases}$$

解得$\begin{cases}p=0,\\ \cos\theta=0,\\ \sin\theta=1,\end{cases}$或$\begin{cases}p=\dfrac{4}{5},\\ \cos\theta=\dfrac{4}{5},\\ \sin\theta=-\dfrac{3}{5}。\end{cases}$

因此,圆系①恒与以下两条定直线

$y=0$ 与 $4x-3x-4=0$ 相切。

6. 定向与定弦长问题

例1 A、B 为定二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+g=0$$

上的两个定点,过 A、B 任作一圆,设该圆与定二次曲线交于另外两点 C、D,求证直线 CD 有定向。

证明 设直线 AB 和 CD 的方程分别为

$mx+ny+l=0$,与

$px+qy+r=0$,

则过 A、B、C、D 四点的二次曲线系方程为

$$(mx+ny+l)(px+qy+r)+\lambda(ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+g)=0,$$

即
$$\begin{aligned}&(pm+\lambda a)x^2+(mq+np+\lambda b)xy\\&+(nq+\lambda c)y^2+(mr+lp+\lambda e)x\\&+(nr+lq+\lambda f)y+lr+\lambda g=0\end{aligned}$$

因为 A、B、C、D 四点共圆,所以上列方程为圆时应有

$$\begin{cases} pm+\lambda a=nq+\lambda c\neq 0, \\ mq+np+\lambda b=0, \\ \triangle\neq 0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} pm-nq=\lambda(c-a), \\ pn+qm=-\lambda b \quad (\triangle\neq 0)。 \end{cases}$

解得 $p=\dfrac{\lambda[m(c-a)-nb]}{m^2+n^2}$,

$q=\dfrac{-\lambda[n(c-a)+mb]}{m^2+n^2}$,

所以 $-\dfrac{p}{q}=\dfrac{m(c-a)-nb}{n(c-a)+mb}=$ 常量,这说明直线 CD 方向一定。

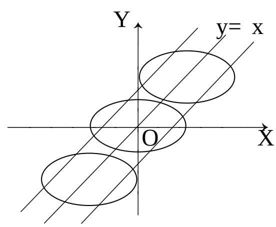
(如果 $n(c-a)+mb=0$,则直线 CD 与 Y 轴恒平行,亦定向。)

例 2　当 m 取不同的值时,方程

$x^2+2y^2-2mx-4my+3m^2-1=0$ 表示不同的曲线。直线 l 截这些曲线所得到的弦长都等于 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,求直线 l 的方程。

分析　原方程为

$(x-m)^2+2(y-m)^2=1$,这是一簇椭圆,椭圆中心在直线 $y=x$ 上移动。观察图形,得猜想:当且仅当 l 平行于直线 $x=y$ 时,在各个不同的椭圆中截得的弦长都相等,于是可通过 $y=x+b$ 截 $x^2+2y^2=1$ 的弦长为 $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ 这个条件来确定 b 的值(可得 $b=\pm 1$,即所求 l 的方程为 $y=x\pm 1$。



但这只是猜想,既要检验答案的充分性,又要检验答案的必要性,工作量较大。

下面用无关思想来解决本题。

解　先证直线 l 截该椭圆的弦长相等的充要条件为 l 与直线 $y=x$ 平行。

由 $\begin{cases} x^2+2y^2-2mx-4my+3m^2-1=0, \\ y=kx+b(\text{l 不可能与 Y 轴平行}), \end{cases}$

消去 y,得

$(1+2k^2)x^2+(4kb-2m-4mk)x+(2b^2-4mb+3m^2-1)=0$。

$x_1+x_2=-\dfrac{4kb-2m-4mk}{1+2k^2}$,

$x_1x_2=\dfrac{2b^2-4mb+3m^2-1}{1+2k^2}$,

，$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$$=\left(\frac{4kb-2m-4mk}{1+2k^2}\right)^2-\frac{4(2b^2-4mb+3m^2-1)}{1+2k^2},$$

$$(y_1-y_2)^2=[(kx_1+b)-(kx_2+b)]^2$$

$$=k^2(x_1-x_2)^2,$$

因此，截得的弦长

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2}。$$

设 $f(m)=(x_1-x_2)^2$**，则弦长** d **为常数的充要条件为** $f(m)$ **的值与** m **无关。而**

$f(m)=Am^2+Bm+C$，

其中 $A=-2(k-1)^2,B=-4b(k-1)$。

由 $A=B=0$，**得** $k=1$。

这时 d **与** m **无关，不妨取** $m=0$**，于是由上述** d **及** $(x_1-x_2)^2$ **的表达式立得**

$$d=\sqrt{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3-2b^2}=\frac{2}{3}\sqrt{2},$$

因此 $b=\pm1$。

所求直线 l **的方程为** $y=x\pm1$。

7. 其它

例 1 **求中心二次曲线**

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \qquad ①$$

的中心坐标 (x_0,y_0)。

解 设过中心 (x_0,y_0) **的直线方程为**

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\y=y_0+t\sin\theta\end{cases}(t\text{ 为参数})$$

代入①，分离参数 t，**得**

$$At^2+Bt+C=0 \qquad ②$$

其中 $A=a\cos^2\theta+b\sin2\theta+c\sin^2\theta$，

$B=2(ax_0+by_0+d)\cos\theta+2(bx_0+cy_0+e)\sin\theta$，

$C=f(x_0,y_0)$。

(x_0,y_0) **为中心坐标，，方程②的两根之和为零，且与** θ **无关，即**

$(ax_0+by_0+d)\cos\theta+(bx_0+cy_0+e)\sin\theta=0$ **（与** θ **无关），**

由此得 $\begin{cases}ax_0+by_0+d=0 & ③\\bx_0+cy_0+e=0\end{cases}$

由于①为中心二次曲线,所以

$\Delta=(2b)^2-4ac\neq 0$,

因此方程组③有唯一解
$$\begin{cases} x_0=\dfrac{\begin{vmatrix} b & d \\ c & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}, \\ y_0=\dfrac{\begin{vmatrix} d & a \\ e & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}。\end{cases}$$

例 2 当 m 取不同的值时,方程

$f(x,y)=3x^2+(m-9)xy+3y^2-12x-(m-3)y=0$

表示不同的曲线,求证所有这些曲线通过四个定点 A、B、C、D,且 A、B、C、D 共圆,并求此圆的方程。

证明 分离参数 m,原方程为

$(xy-y)m+(3x^2-9xy+3y^2-12x+3y)\equiv 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} xy-y=0, \\ 3x^2-9xy+3y^2-12x+3y=0。\end{cases}$$

得 $A(0,0)$, $B(1,-1)$,

$C(4,0)$, $D(1,3)$。

所以,不论 m 取何值,原方程所表示的曲线线都通过 A、B、C、D 四个定点。

令 $m=9$,得所求圆方程为

$3x^2+3y^2-12x-6y=0$,

即 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$,

该圆通过 A、B、C、D 四点。

例 3 自抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 外一个点 $M(x',y')$ 作它的两条切线 MA 与 MB。$\triangle MAB$ 的面积为常量,求动点 M 的轨迹方程。

解 切点弦 AB 的方程为

$y'y=p(x+x')$。

$$\begin{cases} y'y=p(x+x') \\ y^2=2px \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (y_1-y_2)^2=4y'^2-8px' \\ (x_1-x_2)^2=y'^2(4y'^2-8px')/p^2 \end{cases}$$

, $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$= \sqrt{(4y'^2-8px')(y'^2+p^2)}/p$。

$|\triangle MAB| = \frac{1}{2}|AB|\cdot h$

$= |y'^2-2px'|\cdot\sqrt{y'^2-2px'}/p =$ 常量,

故所求轨迹方程为　$y^2-2px=k(k>0)$。

□奇偶性原理及其在解题中的运用

设 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为整数,且

$A=a_1,a_2,\cdots,a_n$

那么:

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有奇数个奇数$\Leftrightarrow A$为奇数;

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有偶数个奇数$\Rightarrow A$为偶数。

我们把上述事实称为奇偶性原理。其中的道理简单明了,但却有着非常深刻的应用。具体问题中如何运用这一原理,相当大地依赖于一定的经验和熟练的技巧。有些问题表面上似乎与奇偶性无甚联系,需要人们去发掘它所蕴含的某些奇偶因素。这往往需要借助于一定的模式使之"奇偶化"。这种转化是不易实现的,但一旦悟出了其中的道理,问题的解就变得显而易见。因此,这种独特的分析问题方法常常令人拍案叫绝。

奇偶性原理的应用非常广泛,特别是在数学竞赛中更为常见。湖南汨罗一中冯跃峰老师通过一些具体的例子,介绍了种"奇偶化"过程中常用的一些方法。所列举的例子只分析转化过程,详细的解答从略。

例1　平面上有任意5个整点,则必有两个整点,它们的连线的中点亦为整点。

分析:本题是较易转化的例子。转化的关键是注意到显然的事实:$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$的连线的中点为整点$\Leftrightarrow x_1$与x_2,y_1与y_2的奇偶性分别相同。另外。点的坐标的奇偶性只有四种可能:(奇,奇)、

(奇,偶)、(偶,奇)、(偶,偶)

由抽屉原则可知结论成立。

例2　7只茶杯,杯口都朝上。将其中的4只同时都翻转过来,(即杯口朝上的变为朝下,朝下的变为朝上)称为一次"运动",问是否能经过有限次运动,使得茶杯的杯口全部朝下?

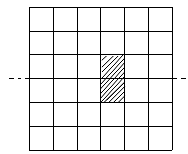
分析 转化的方法是将一只茶杯翻转过来称为改变一次方向,从而每次运动总改变偶数次方向。另一方面,每只茶杯从开口朝上变为开口朝下,总需改变奇数次方向,7 只茶杯杯口全朝下,必定改变奇数次方向,由此可知答案是否定的。

例 3 置于暗室的一只抽屉内装有 100 只红袜子,80 只绿袜子,60 只蓝袜子,40 只黑袜子。一个人从抽屉中选取袜子,但他无法看清所取袜子的颜色。为确保取出的袜子至少有 10 双(一双袜子是指两只相同颜色的袜子,但每只袜子只能一次用在一双中),问至少需取多少只袜子?

(第 37 届(1986)美国中学数学竞赛题)

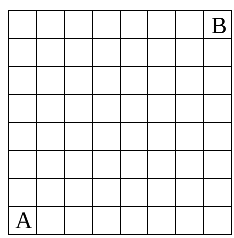
分析 注意到一只袜子至多一只无配偶。而且,某一种颜色的袜子有一只无配偶⇔该颜色的袜子取了奇数只。当取出袜子总数是奇数时,最坏的可能是有三种颜色为奇数只,由此可知至少要取 23 只袜子。

例 4 设有一个 6×6 棋盘被 18 块 1×2 的骨牌覆盖。证明:总可以沿棋盘的某条非边缘的格线,(指长度为 6 的直线段)将棋盘划分为两块,但划分线不穿过任何骨牌。



分析 用反证法,假若不能按要求划分,就意味着每条格线上都压了骨牌,很自然的想法是设法由此推出骨牌总数超过 18 块形成矛盾。注意到横、纵向的非边缘格线共有 10 条,这只须每条上都压两只骨牌。实际上,容易证明,一条格线不能只被一块骨牌压住。若否,如图,将该骨牌所盖住的两格挖去,并沿该线将棋盘划分为两块。依题意这两个去掉了一个格的残缺棋盘均被完全覆盖,但它们都只有奇数个格,矛盾。

例 5 设下图表示 64 间陈列室,凡邻室皆有门相通,一人从 A 进,从 B 出,但要求每室都到且只到一次,问这种路线是否存在?



分析 我们把第 i 行第 j 列的室记为 a_{ij}。转化的方法是利用相邻的室 $i+j$ 的奇偶性不同。

注意到 A 为 a_{81},B 为 a_{18},$1+8$ 与 $8+1$ 都为奇数。从 A 出发要穿过 63 道门才到达 B,每穿过一个门,$i+j$ 的奇偶性变化一次,变化 63 次不可能从奇数变到奇数。

例 6 试证:不存在三阶幻体。即将数 1,2,…27 填入 $3\times3\times3$ 的立方体中,不可能使所有"共线"的三数之和均相等。

分析 用反证法。如果幻体存在,则相等的和为 42。首先,幻体的每个面为三阶幻方。如下左图,将幻方标为 9 个位置,不难证明 5 号位只能排偶数。事实上,若 5 号为奇,则 1、9 必须一奇一偶。设 1 号为奇,则 9 号为偶,从而 2、3 必一奇一偶,设 2 号为奇、3 号为偶,依次推得 4 号为偶,6 号为奇,7 号为偶,这样,3、5、7 号位三数之和为奇数。

偶	奇	奇
奇	偶	奇
奇	奇	偶

1	2	3
6	5	4
7	8	9

奇	偶	奇
偶	偶	偶
奇	偶	奇

其次,3×3 幻方奇偶性分布只有两种可能:一种是六奇三偶,另一种是四奇五偶。注意到 1,2,3,…,27 中共 14 个奇数,从而幻体的上、中、下三层幻方中有且只有一个是第一类的。最后考虑每层幻方的 4 号位,三数中两偶一奇,其和不可能为 42。

例 7　能否把 1,1,2,2,3,3,…,1986,1986 这些数排成一行,使得两个 1 之间夹着一个数,两个 2 之间夹着两个数,…,两个 1986 之间夹着一千九百八十六个数?请证明你的结论。(首届全国中学生数学冬令营竞赛试题第五题)

分析 转化的方法两将各数排列的位置依次称为 1 号位,2 号位,…,3972 号位。然后考察奇号位上所排的数。若奇数 m 排在奇号位,则另一 m 必排在奇号位(因两个 m 中夹着 m 个数),这表明奇号位上的奇数是偶数个。同理可知,偶数 n 排在奇(偶)号位,则另一 n 必排在偶(奇)号位。这表明奇号位上的偶数是所有偶数的一半共 993 个。但所有奇号位 1986 个,1986 不可能等于 993 加一个偶数,从而问题的答案是否定的。

□集合思想在解题中的应用及其哲学基础

集合,是现代数学中一个最基本的概念,集合元素的任意性使得集合概念具有广阔的统摄功能,进而带来了集合应用的广泛性,集合思想所以能渗透到数学的各个分支中去,其根本原因正在于此。中学数学教学大纲早已把集合作为高中阶段的必修内容,并且明确要求学生“理解集合、子集、交集、并集、补集等概念”。这表明,集合应当在高中数学中发挥重要作用,然而,集合在高中数学中的应用只是散见于一些书刊,并且局限于形式的居多,因而探讨真正用集合思想去解决看似与集合无关的数学问题,便显得尤为重要,尚能在此基础上进一步挖掘隐藏在集合背后的集合思想的哲学基础,并因此为在数学教学中对学生进行辩证唯物主义教育提供一些素材,则属锦上添花。湖北省京山一中李德雄老师作了如下分析介绍:

1. 交集思想及其哲学基础

设 $A=\{x|x$ 具有性质 $P_1\}$,$B=\{x|x$ 具有性质 $P_2\}$,因 $A\cap B$ 的元素同时具有性质 P_1 和 P_2,所以探讨同时具有性质 P_1 和 P_2 的对象可考虑用交集思想,从哲学意义上讲,$A\cap B$ 反映的是 A 和 B 的共性,因 P_1 和 P_2 分别是 A 和 B 的个性,所以 $A\cap B\subseteq A$ 和 $A\cap B\subseteq B$ 表明共性存在于个性之中,$A\cap\overline{B}$ 和 $\overline{A}\cap B$ 分别反映的是 A 和 B 的特有本质属性,$(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\varphi$,$(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B)=\varphi$,$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$,$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=B$ 表明共性与个性是对立统一的。

例 1　设方程 $x^3-3x^2+ax-1=0$ 的三根均为正根,求 a 的值。

解　设方程的三根为 $x_k(k=1,2,3)$,则 $x^3-3x^2+ax-1\equiv(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ 展开后比较系数可得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=a\\x_1x_2x_3=1\end{cases}$$

一方面,有 $a=x_1x_2+x_1x_3+x_3x_1\geqslant3\cdot\sqrt[3]{x_1^2x_2^2x_3^2}=3$;

另一方面,有 $a=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

$\leqslant\frac{1}{2}[(x_1^2+x_2^2)+(x_2^2-x_3^2)+(x_3^2+x_1^2)]$

$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$

$=9-2a$,即 $a\leqslant3$。, $a=3$。

评注　解本题的关键在于:设 $a=3$ 为 $a\geqslant3$ 和 $a\leqslant3$ 的公共部分,即运用了集合等式 $\{a|a\geqslant3\}\cap\{a|a\leqslant3\}=\{3\}$,这是典型的交集思想。

例 2　已知 n 是同时满足下列条件的最小自然数:(1)是 15 的倍数;(2)各个数位上的数字是 0 或 8,求 n 的值。

解　设 $A=\{n|n$ 是 15 的倍数$\}$,$B=\{$各个数位上是 0 或 8 的自然数$\}$,则所求的 n 是 $A\cap B$ 中的最小元素。　$A=\{3$ 的倍数$\}\cap\{5$ 的倍数$\}=\{$数字和是 3 的倍数的自然数$\}\cap\{$末位数是 0 或 5 的自然数$\}$,, $A\cap B=\{$末位数是 0,其余各位是 0 或 8,但 8 的个数是 3 的倍数的自然数$\}$,而 n 是 $A\cap B$ 的最小元素,, $n=8880$。

2. 并集思想及其哲学基础

例 3　过点 $M(0,1)$ 作直线 l,使被已知直线 l_1:$x-3y+10=0$,l_2:$2x+y-8=0$ 所截得的线段被点 M 所平分,求直线 l 的方程。

解　设 l:$y=kx+1$　……①

$(x-3y+10)(2x+y-8)=0$　……②

将①代入②所整理可得,

$(2+k)(1-3k)x^2+(28k+7)x-49=0$。该方程两实根 x_1、x_2 即直线 l 与 l_1 和 l_2 的交点 A、B 的横坐标,据根与系数关系可得,

$$x_1+x_2=-\frac{28k+7}{(2+k)(1-3k)}。$$

M(0,1)是线段 AB 的中点,

∴ $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=0$,由此可得 $k=-\frac{1}{4}$,

∴ l 的方程为 $x+4y-4=0$。

一般地,设直线 l_1 的方程为 $A_1x+B_1y+C_1=0$,直线 l_2 的方程为 $A_2x+B_2y+C_2=0$,将它们相乘后所得的二次方程 $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$,叫做直线 l_1 和 l_2 的并集方程。引进并集方程可以免去求交点坐标的繁杂计算,从而提高解题效率,将常规解法(直接解方程组求交点坐标的解法)与上述解法进行对比不难发现,两者的本质区别在于:前者是用孤立的、静止的观点看待两直线,因而不可避免地要通过解方程组求交点坐标;后者则是用联系的、变化的观点将两直线合成为一条退化二次曲线进行处理,由于这种合成(实质上是取并集)使处于无序、不合理状态的两直线成了在结构上处于有序、合理的整体,因而可提高整体功效,从整体与局部的辩证关系来看,整体和局部在质上是有区别的,与局部相比,整体有自己新的特征,这些新的特征,正是整体功效得以提高的源泉。

例 4 求过 O(0,0)、A(1,1)、B(-1,1)、C(2,0)、D(3,-2)五点的圆锥曲线方程。

解 直线 OC: $y=0$ 和直线 AB: $y=1$ 的并集方程为 $y(y-1)=0$,直线 OB: $x+y=0$ 和直线 AC: $x+y-2=0$ 的并集方程为 $(x+y)(x+y-2)=0$。过 O、A、B、C 四点的二次曲线系为 $y(y-1)+\lambda(x+y)(x+y-2)=0$。将 D(3,-2)的坐标代入此方程可求得 $\lambda=6$,故所求的圆锥曲线方程为

$$6x^2+12xy+7y^2-12x-13y=0。$$

例 5 若 $abc\neq0$,试证:方程 $ax^2+bx+\frac{c}{4}=0$,$bx^2+cx+\frac{a}{4}=0$ 及 $cx^2+ax+\frac{b}{4}=0$ 中至少有一个方程有实根。

证 设三方程的判别式依次为 $\triangle_1$,$\triangle_2$ 和 $\triangle_3$,若孤立地看待三个判别式,则很难说明它们中至少有一个是非负数,运用并集思想,考察三者的和,由 $\triangle_1+\triangle_2+\triangle_3=b^2-ac+c^2-ba+a^2-cb=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant0$ 可知 $\triangle_1$,$\triangle_2$,$\triangle_3$ 中至少有一个是非负的,故命题成立。

3. **补集思想及其哲学基础**

已知全集 I,求子集 A。若直接求 A 困难或麻烦,则可考虑先求 A 的补集 $\overline{A}$,再求 $A=\overline{(\overline{A})}$。这种在顺向思维受阻后改用逆向思维的思想,就是数学中的补集思想。补集思想具有转移求解对象的功能,其实质是通过两次否定实现一次肯定。这便是哲学意义上的否定之否定规律在数学中的具体体现。

例 6 **解不等式** $\sqrt{13-3x}>3-x$。

析解 :常规解法是将题设不等式转化为两个等价的不等式组求解。运用补集思想,只需解一个不等式组,设全集 $I=x|13-3x\geqslant 0\}$,解 $\sqrt{13-3x}\leqslant 3-x$

即解不等式组 $\begin{cases}13-3x\geqslant 0\\3-x\geqslant 0\\(13-3x)^2\leqslant(3-x)^2\end{cases}$

得解集 $A=\{x|x\leqslant x-1\}$。

, 原不等式的解集为

$\overline{A}=\left\{x|-1<x\leqslant\frac{13}{3}\right\}$。

例 7 **已知三条抛物线** $y=x^2+2x-4a+3$,$y=x^2-(a-1)x+x$,$y=x^2+2ax-2a$ **中至少有一条与 x 轴相交,试求实数 a 的取值范围。**

析解 :合题意的情况包括 :(1) 三条抛物线中某一条与 x 轴相交 ;(2) 三抛物线中某两条与 x 轴相交 ;(3) 三抛物线均与 x 轴相交三大类共七种情形。分别求之相当繁冗。而题设反面 :三条抛物线均不与 x 轴相交的只有一种情形,故用补集思想求解尤为简便,由 $(4a)^2-4(-4a+3)<0$。

$(a-1)^2-4a^2<0$,$(2a)^2-4(-2a)<0$

解得 $-\frac{3}{2}<a<-1$

, 所求的范围为 $a\geqslant 1$,或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$。

4. **容斥原理及其哲学基础**

容斥原理,是组合数学中的一个计数原理,其思想综合反映了交集、并集、补集的思想,因而,其应用实质上是前三种思想的综合应用,容斥原理又称包含排斥原理、包含意味着包含者对被包含对象的统一:排斥,表明排斥与被排斥双方是对立的,仅是这种意义上看。既包含又排斥的容斥原理、更是对立统一规律在集合论中的具体化。

我们综合运用上述思想和容斥原理可以解答下列问题：

题1　正三角形 ABC 的边长为1,以各边为弦向形内作一条120°的弦,求所成的三个曲边三角形的总面积。

(答案：$\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$)

题2　求从1到20的自然数中。既不是2的倍数,又不是3的倍数的所有整数之和。(答案：6733)。

□数学‘降维思想’的渗透与运用

数学中,维是指一个问题中元素的自由度,即该元素的坐标数,如数轴上点的维数是1,平面内点和直线的维数是2,在空间点和平面的维数是3等等。降维则是通过一些数学方法,将高维的数学问题降为低维的数学问题,从而使问题简化,达到解决问题的目的。

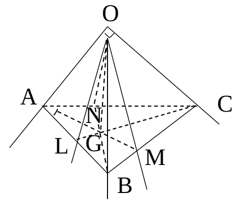
降维,作为一种数学方法,意指如：一般问题的特殊值解法,多元减为少元,立几问题转化为平几问题等等。降维方法是处理数学问题的一种行之有效的方法,但在教学中还不仅要介绍降维方法,更要进一步对知识与知识结构之间的关系进行更深的提炼、概括和总结,使学生获得更深入的认识,从而上升到意识领域,形成一种解题思想——降维思想,即将一个维度较高的数学问题转化为较低的数学问题,通过简化问题结果,缩小问题视角,减少变化因素,探求解决问题的方法的思想。这对培养学生的分析问题、解决问题的能力,提高学生的思维品质都能起积极的作用。

江苏省海门中学石国强、江苏省如东县中学于建华、陈勇老师举例就各种‘降维’的情形分述如下：

1. 高维降为低维

立体几何的第一章所有判定定理从条件到结论体现了升维思想,而所有的性质定理从条件到结论体现为降维思想。降维思想是立体几何的主体思想,通常通过射影法、平移法、旋转法、对称变换展升等方法将空间三维问题降为平面的二维问题。

例1　从同一点出发的三条射线中每两条所成角的平分线与第三条射线所确定的平面,如此所得三个平面必相交于同一直线。



分析:假如我们能作一个适当的平面分别交三条射线和三条角平分线于 A、B、C、L、M、N、(如图),三平面 OLC、OBN、OAM 都过 O,要证它们相交于一直线,只需找另一公共点,为此我们想到平几中三角形三中线交于一点,这样只要在三射线上各取 OA = OB = OC,则过 A、B、C 作平面 ABC,L、M、N 分别是 AB、BC、AC 的中点,便可证得所欲证的结论。(证略)

降维思想还是解析几何的立论思想,直角坐标系中,定比分点坐标公式的推导及应用,把平面图形投影到坐标轴上,参数方程的应用等把平面的二维问题转化为一维代数问题。

例 2 已知直线 $l: y = kx + m$,双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m$,若 l 与 C_1 交于 A_1、B_1,与 C_2 交于 A_2、B_2、求证不论实数 m 取何值时总有 $|A_1A_2| = |B_1B_2|$。

线段 A_1A_2、B_1B_2 的两个端点分别在两曲线上,因此直接求线段的长度较为复杂,但如能证出 A_1B_1 与 A_2B_2 有共同的中点,则问题迎刃而解,从而将证明二维平面中线段长 $|A_1A_2| = |B_1B_2|$ 相等的问题降为一维的 $x_{A1} + x_{B1} = x_{A2} + x_{B2}$,利用韦达定理就可证得。

降维思想出常渗透于代数教学之中,如:

例 3 设 z_1、z_2、z_3 为非零且互不相等的三个复数,它们满足 $z_1z_2 = z_3^2$……(1)

$z_2z_3 = z_1^2$……(2)

求 $z_1 + z_2 + z_3$ 的值。

这是一个三维求值问题,如果先求 z_1、z_2、z_3 的值再求和,这就非常困难,如运用降维方法消去 z_2 则问题就简单得多了。

解 (1)÷(2)消去 z_2 得:$\left(\frac{z_3}{z_1}\right)^3 = 1$,

$z_3 \neq z_1$

, $\frac{z_3}{z_1} = \omega$ 或 ω^2,不妨设 $\frac{z_3}{z_1} = \omega$,则 $z_3 = \omega z_1$,代入(1)得 $z_2 = \omega^2 z_1$,

, $z_1 + z_2 + z_3 = (1 + \omega + \omega^2) z_1 = 0$。

可见恰当地运用降维思想,可以简化解题过程,常有出奇制胜之效。

2. **一般降为特殊**

不少数学问题,就其本身的数量关系直接求解较为困难,这往往是

由于一般性的数和量防碍了我们从特殊性去考虑问题,造成只见'森林'而不见'树木'的局限性,但如把一般降为特殊,则会有柳暗花明又一村之感。

例4　设 $f(x)$ 是定义在自然数集上且取自然数值的严格递增函数,如果 $f(2)=2$,$f(mn)=f(m)\cdot f(n)$,求 $f(x)$。

此题如根据条件直接求 $f(x)$,显然比较复杂,而由 $f(2)=2$,$f(2\cdot 2)=f(2)\cdot f(2)=2^2$,$f(2^2\cdot 2)=f(2^2)\cdot f(2)=2^3$,可以猜想 $f(2^n)=2^n(n\in N)$,然后用数学归纳法证明这一特殊性命题,再结合 $f(x)$ 在 N 上严格递增就不难证明 $f(x)=x(x\in N)$。

如此问题得以解决,可见把一般性问题化为特殊性问题,便使复杂问题得以简化,起到了分散难点、逐层突破的效果。这种推理方法也就是数学中一种严格的证明工具——演绎推理,只要前提真,推理合乎逻辑,就一定能得到正确的结论,即一般成立特殊也成立,有时也可证它的逆否命题,即特殊不成立,则一般不成立。

例5　设 A、B 是坐标平面上的点集,$C_r=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$,若对于任意的 $r\geqslant 0$ 总有 $C_1\cup A\subseteq C_r\cup B$,则必有 $A\subseteq B$,试判断命题的真伪,并说明理由。

解　取特例:$A=\{(0,0)\}$,

$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2$　且　$\left.\begin{matrix} x\neq 0 \\ y\neq 0\end{matrix}\right\}$

则 A 与 B 没有任何包含关系。故命题不真。

3. 抽象降为具体

当人们接触到一个比较抽象的数学问题时,往往不易找到思路,总有一种'摸不着头脑'不着边际的感觉,但如果把它具体化,就会窥得解题佳径。

例6　已知 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 对 $x、y\in R$ 都成立,且 $f(0)\neq 0$,试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性。

此题给出的是关于 $f(x)$ 的抽象的恒等式,直接判断显然困难。但根据式子模型特点,联想三角函数的和差化积公式,可把 $f(x)$ 具体化为偶函数 $\cos x$,则不难证明 $f(x)$ 为偶函数。证明(略)。

抽象的数学问题,通过具体的、实际的问题对已有的'模型'、方法、性质加以检验,不断丰富、发展,也可通过具体的或已有的'模型'的解题思路探求抽象问题的解题途径。

例7　设 $a_1、a_2、\cdots a_n$ 均为实数且 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\dfrac{(a_1+a_2+\cdots a_n)^2}{n}$,

求证 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

这是一个 n 维的等式证明问题，直接证明比较困难，但 n=2 时，

$$a_1^2+a_2^2=\frac{(a_1+a_2)^2}{2}\Rightarrow(a_1-a_2)^2=0$$

， $a_1=a_2$，当 n=3 时，

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{3}\Rightarrow(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2=0$$，从而可得

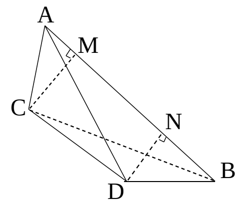
$a_1=a_2=a_3$。发现 n=2、3 的具体证明均将条件化成两数差的平方和的形式，那么对抽象的 n 维情况就不难探测解题思路了。

善于将抽象理论放到具体而简单的背景下去考察，是数学上的一种极其可贵的品格，它使抽象的数学命题变得有血有肉、丰满和充实、富有生命力。

4. 整体降为局部

有些整体性数学问题，如首先研究其局部特征、性质，往往有利于整个问题的解决，也就是通常所说的找‘题眼”。如解排列组合应用题时，先从特殊元素、特殊位置这一局部出发不难使原整体问题得以解决。

例 8 已知四面体 ABCD 中，二面角 A—CD—B 为 120°，AC⊥CD，BD⊥CD，AC=2，BD=4，AB=10，求二面角 D—AB—C 的大小。

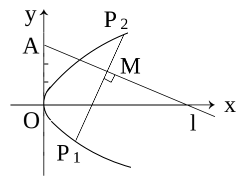


如图,过 C、D 分别作 CM⊥AB,DN⊥AB 交 AB 于 M、N 二面角 D—AB—C 的大小实为 CM 与 DN 所成的角或补角。由异面直线上两点间的距离公式可知,原题所求可转化为求出 CM、DN、MN、CD 之长这样的局部问题,而 MN、CM、DN 可在△ABD 和△ABC 中求解,故关键在于求 CD,而 CD 可借用异面直线 AC、BD 两点间的距离公式求得,又是一个局部问题,这样原整体性问题转化为两个局部问题,巧妙运用了异面直线两点间距离公式。

另外在解含多条件的数学问题时,我们常把原条件减弱,变整体条件为局部条件,采用“退中求进”的思维方式。

例 9　已知 P_1P_2 为抛物线 C :$y^2=4x$ 的弦,且它的中垂线 l 过定点 A(0,3),求 l 的倾斜角 α 的范围。

分析 :中垂线的条件较强,但如先从垂直这一局部条件出发,再去研究中点问题就简明多了。



解　l 过定点(0,3)与 P_1P_2 垂直平分,, l 的斜率存在设为 k,且 $k=tg\alpha<0$,则 P_1P_2 :

$y=-\frac{1}{k}x+b$ 代入 $y^2=4x$ 整理得 :$x^2-2(bk+2k^2)x+b=0$。

,　P_1P_2 的中点 M 为$(bk+2k^2,-2k)$,弦 P_1P_2 的中点 M 的轨迹方程为 $y=-2k$,将 $y=-2k$ 代入 $y^2=4x$ 得 $x_1=k^2$,代入 $y-3=kx$ 得 $x_2=-\frac{2k+3}{k}$,因 l 与直线 $y=-2k$ 的交点在抛物线内部,,　$x_2>x_1$ 即 $-\frac{2k+3}{k}>k^2$ 解得 $-1<k<0$。

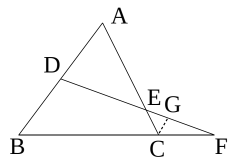
,　$\leqslant\in\left(\frac{3}{4}\pi,\pi\right)$。

综上所论,运用“降维”思想,不仅可以将许多问题特殊化、具体化、简单化、有助于问题的解决,而且利于训练学生的思维,培养探索能力。当然对某些具体问题,我们如能巧妙地运用“升维”策略,往往也能转难为易,因为升与降本身就是辩证的统一。

□降维与升维在联想平几解立几题时的运用

平面几何研究的是平面图形及其数量关系,立体几何则是研究空间立体及其数量关系。由平几到立几是由二维空间进入到三维空间,

它们之间有着紧密的联系，注意研究它们之间的联系，弄清它们之间的区别，在立几问题中注意降一维联想平几问题的解法，从平几问题中得到启发，再升一维探求立几问题的解法，常常使复杂的立几问题解题思路探求过程得到简化。因此，在教学过程中，加强平几和立几之间的横向联想，对培养学生的逻辑思维能力是有益处的 对拓展学生的知识境界，由二维到三维以至今后对 n 维空间的探索也是可望臻效的。江苏靖江县教师进修学校孙一民老师就几个具体例子说明了利用降维联想平几问题，再升维寻找立几解法的思考过程：



例 1　立几题目 :有一公共边但不共面的两个三角形 ABC 和 A'BC 被一平面 a 所截，若 a 分别截 AB、AC、A'B、A'C 于 D、E、D'、E'，求证：

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BD'}{D'A'}\cdot\frac{A'E'}{E'C}\cdot\frac{CE}{EA}=1。$$

降一维联想平几问题（梅涅劳斯定理）:空间四边形→三角形截面→截线

↓

平几题目 :若△ABC 的三边或其延长线被一直线所截，交点分别为 D、E、F（如图），求证 :$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。

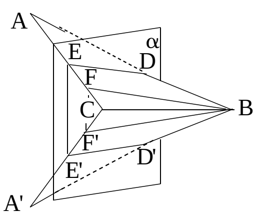
证明 过 C 作 CG∥BA 交 EF 于 G，则$\frac{BF}{FC}=\frac{BD}{CG}$。

，$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}$

$=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BD}{CG}=\frac{AD}{CG}$。　而

$\frac{AD}{CG}=\frac{AE}{EC}$，，$\frac{AD}{CG}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。从而$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。

↓启发



平面中作平行线造比例线段，空间里可作平行平面造比例线段。

↓升一维联想立几证法

证　①若 BC∥a，则 BC∥DE∥D'E'。显然$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。$\frac{BD'}{D'A'}\cdot\frac{A'E'}{E'C}=1$，显然有$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BD'}{D'A'}\cdot\frac{A'E'}{E'C}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。结论成立。

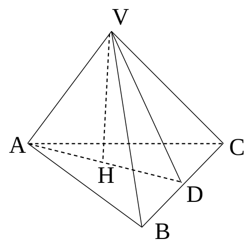
②若 BC 不平行于平面 α，不妨设 B 距 α 较近。过 B 作平面∥平面 a 交 AC 于

F,交 A'C 于 F',则有 DE∥BF,D'E'∥BF',EE'∥FF'⇒

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EF}\\ \dfrac{BD'}{D'A}=\dfrac{F'E'}{E'A'}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BD'}{D'A}$$

$$=\frac{AE}{EF}\cdot\frac{F'E'}{E'A'}\Rightarrow\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BD'}{D'A'}\cdot\frac{A'E'}{E'C}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AE}{EF}\cdot\frac{F'E'}{E'A'}\cdot\frac{A'E'}{E'C}\cdot-\frac{CE}{EA}=\frac{F'E'}{EF}\frac{CE}{E'C}=1。$$

再如平几中证含有线段平方的等式时常用勾股定理和射影定理。在立几中类似问题则可考虑在各种不同的直角三角形中构思相应的等式,见例二。

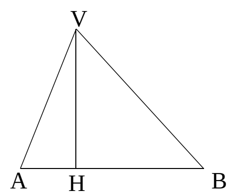


例 2 **立几题目:已知三棱锥** V—ABC **的侧棱两两垂直,且** VA = a,VB = b,VC = c,**锥高** VH = h,**求证:**$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$。

降维联想平几题:三棱维→三角形; 锥高→形高。

↓

平几题目:已知 Rt△VAB **中,两直角边长** VA = a,VB = b,**斜边上的高** VH = h,**求证:**$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$。



证明: VH **为** Rt△VAB **的弦高,**

, $VA^2 = AH\cdot AB$。

$VB^2 = BH\cdot AB$。

$VH^2 = AH\cdot BH$。

, $\dfrac{1}{VA^2}+\dfrac{1}{VB^2}=\dfrac{AH+HB}{AH\cdot HB\cdot AB}=\dfrac{1}{AH\cdot HB}=\dfrac{1}{VH^2}$。**即** $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$。

↓**启发**

在左图中,作 Rt△VBC **的弦高** VD,**连** AD,**则** VH **必为** Rt△VAD **的弦高,两次使用射影定理的结论可获解。**

↓**升一维联想立几解法**

证 过 V **作** VD⊥BC,**垂足为** D。

$$\left.\begin{array}{l}VA\perp VB\\ VA\perp VC\end{array}\right\}\Rightarrow VA\perp\triangle VBC\Rightarrow\left.\begin{array}{l}VA\perp BC\\ VD\perp BC\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow BC\perp\triangle VAD$

$$\Rightarrow\left.\begin{cases}\triangle ABC\perp\triangle VAD\\ AD\perp BC\\ \text{作 } VH\perp AD\end{cases}\right\}\Rightarrow VH\perp\triangle ABC。$$

VH 是锥高。

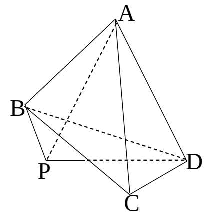
$$\left.\begin{array}{l}Rt\triangle VBC\Rightarrow\dfrac{1}{VD^2}=\dfrac{1}{VB^2}+\dfrac{1}{VC^2}\\ Rt\triangle VAD\Rightarrow\dfrac{1}{VH^2}=\dfrac{1}{VA^2}+\dfrac{1}{VC^2}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{VH^2}=\frac{1}{VA^2}+\frac{1}{VB^2}+\frac{1}{VC^2}。$$

即 $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$。

平几中，“等边三角形中任一点到三边距离之和是定值”这是众所周知的，立几中，相应有“正四面体中任一点到四个面距离之和为定值”。证法上，前者用面积，后者用体积，类似问题亦可仿证。见例三：

例 3　立几题目：已知在正四面体 ABCD 的底面 BCD 的外侧有一点 P，P 到底面的距离是 h，P 到三个侧面的距离分别是 h_1、h_2、h_3。



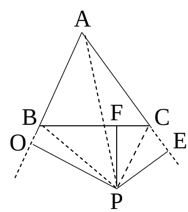
求证：h_1、h_2、h_3 - h 是定值。

降一维联想平几问题：正四面体→正三角形； 锥高→形高。

↓

平几题目：在正△ABC 的底边 BC 的外侧有一点 P，P 到 BC 的距离为 h，P 到另两边的距离分别为 h_1、h_2，求证：h_1+h_2-h 是定值。

证明：设△ABC 的边长为 a，高为 H，连 PA、PB、PC。



$$S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}-S_{\triangle BPC}=S_{\triangle ABC}。$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2-\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}aH$$

$$\Downarrow$$

$$h_1+h_2-h=H(\text{定值})$$

↓启发

有关距离（高）的问题，常常联系三角形面积，立几中联想到三棱维的体积。

↓**升一维找立几证法**

证　设正四面体每个面的面积为 S，体高为 H，连 PA、PB、PC、PD。

$$V_{P-ABC}+V_{P-ACD}+V_{P-ABD}-V_{P-BCD}=V_{\text{四面体}ABCD}$$

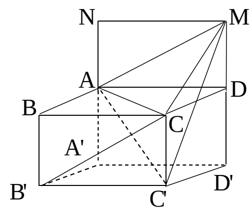
$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{3}sh_1+\frac{1}{3}sh_2+\frac{1}{3}sh_3-\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}SH$$

$$\Downarrow$$

$h_1+h_2+h_3-h=H$（定值）

平几中，求三角形面积用不同边作底可导出新的等式，立几中，用不同的面作底来求锥体体积也可导出新的等式帮助解题，请看例四。

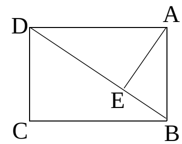


例4　立几题目：已知长方体的三条棱 $AB=4$，$AA'=3$，$AD=6$，求面对角线 $B'C$ 到体对角线 AC' 的距离。

降一维联想平几问题：长方体→长方形；异面直线间的距离→点到直线维离。

$$\downarrow$$

平几题目：已知矩形两邻边长分别是 $AB=3$，$AD=4$，求点 A 到对角线 BD 的距离 AE 的长。



解：　$AD\cdot AB=2S_{\triangle AED}=AE\cdot BD$。

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=5$。

，　$AD=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$

$\downarrow$**启发**

求三角形面积可用不同的边作底边，从而得出 $ah_a=ch_c$，**求三棱锥的体积也可用不同的三角形作底边，从而得** $s_ah_a=sh_b$。

本题中，将面 $ADD'A'$ **向上延升一倍得矩形** $ADMN$。**则** $AM/\!/B'C$，，　$B'C/\!/\triangle AC'M$ **平面。因此** $B'C$ **与** AC' **之间的距离** $=C$ **到** $\triangle AC'M$ **平面的距离。**

$\downarrow$**升一维联想找出立几解法**

解　①**将矩形** $AA'D'D$ **向上延升一倍到** $NADM$ **的位置，**　$B'C/\!/A'D/\!/AM$，，$B'C/\!/\triangle AC'M$ **平面。因此，C 到** $\triangle AC'M$ **的距离即是** $B'C$ **到** AC' **的距离** h。

② $$\left.\begin{array}{l}AA'=3\\AB=4\\AD=6\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}CM=5\\CC'=DD'=3\\C'M=2\sqrt{13}\end{array}\right\}\Rightarrow\cos\angle MCC'=\frac{5^2+3^2-(2\sqrt{13})^2}{2\times5\times3}=-\frac{3}{5}。$$

$$\Rightarrow\sin\angle MCC'=\frac{4}{5}\Rightarrow S_{\triangle CC'M}=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{4}{5}=6\Rightarrow V_{A-CC'M}=\frac{1}{3}\times6\times6=12$$

③ $$\left.\begin{array}{l}C'M=2\sqrt{13}\\\left.\begin{array}{l}AD=6\\MD=3\end{array}\right\}\Rightarrow AM=3\sqrt{5}\\AC'=\sqrt{3^2+4^2+6^2}=\sqrt{61}\end{array}\right\}\Rightarrow\cos\angle AMC'=\frac{3}{\sqrt{65}}\Rightarrow\sin\angle AMC'=\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{65}}$$

$\Rightarrow S_{\triangle AMC'}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 2\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{65}}$

$=3\sqrt{56}$

$\left.\begin{array}{l} V_{C-AC'M}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{56}h \\ V_{A-CC'M}=12 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{3}\times 3\sqrt{56}h$

$=12\Rightarrow h=\frac{3}{7}\sqrt{14}$。

即 B'C 到 AC' 的距离为$\frac{3}{7}\sqrt{14}$。

以上仅仅从几个侧面陈列了对立几题降维联想平几题，再升维寻找立几题解法的模式，其实，类似的问题还很多，诸如"对称问题在平几中的应用"，是找关于直线的对称点来解题，在立几中则可找关于平面的对称点来解题；平面几何中关于圆的问题在立几中有不少题目可在球的问题中找到踪迹；平几的作图思路很多不乏为立几作图的先异，只要我们认真联想，反复对比，那末平几与立几的解题方法就可以相辅相成，相得益彰。

□补集的思想在解题中的运用

补集是集合论中的重要内容之一，应用补集的思想解题是一种重要的解题技巧。其基本思想是：设 I 是全集，A 是 I 的一个子集，现要确定集合 A(有时只须确定 A 中元素的性质或确定具有 A 中性质的元素)，我们先反向考虑与其对立的集合，即 A 在 I 中的补集 $\overline{A}$，然后再根据公式 $\overline{\overline{A}}=A$，由所得结果仅推出集合 A，这是一种反面考虑问题的方法。其思维地式属于逆向思维，江苏陈德前老师举例说明了这一思想方法在解题中的应用。

例 1　若三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实根，试求 a 的范围

分析：解本题时，若直接求解，三个方程中至少有一个方程有实根的可能情况有七种，逐一讨论比较繁，用补集的思想方法求解，则可化繁为简。设全集 I=R，集合 A={a|三个方程中至少有一个方程有实根}，则 $\overline{A}$={a|三个方程都无实根}，于是，$\overline{A}$的元素特征可由不等式组

$$\begin{cases}(4a)^2-4(-4a+3)<0,\\(a-1)^2-4a^2<0,\\4a^2-4(-2a)<0,\end{cases}$$ 来确定,解得

$-\frac{3}{2}<a<-1$,, $\overline{A}=\{a\,|\,-\frac{3}{2}<a<-1\}$。

故 $A=\overline{\overline{A}}=\{a\,|\,a\leqslant-\frac{3}{2}\}\cup\{a\,|\,a\geqslant-1\}$。

即所求实数 a 的范围为 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 或 $a\geqslant-1$。

例 2 如果二次函数 $y=mx^2+(m-3)x+1$ 的图象与 x 轴的交点至少有一个在原点的右侧,试求 m 的取值范围。(1985 年北京市中考试题)

分析:正面求解,必须分别就“两交点均在原点右侧”,“一个交点在原点右侧,另一个交点在原点左侧”等情况一一讨论,这样解答虽可行,但冗繁。用补集的思想,设全集 $I=R$,集合 $A=\{m\,|$ 函数与 x 轴的交点至少有一个在原点右侧$\}$,则,$\overline{A}=\{m\,|$ 函数图象与 x 轴的交点均在原点左侧$\}$ 于是,由一元二次方程有两非正实根的条件有如下不等式组:

$$\begin{cases}\Delta=(m-3)^2-4m\geqslant0,\\\frac{3-m}{m}<0,\\\frac{1}{m}>0,\end{cases}$$

, $$\begin{cases}m\geqslant9 \text{ 或 } m\leqslant1,\\m<0 \text{ 或 } m>3,\\m>0。\end{cases}$$

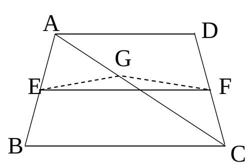
, $\overline{A}=\{m\,|\,m\geqslant9\}$,

$A=\overline{\overline{A}}=\{m\,|\,m<9\}$。

又二次函数图象与 x 轴有交点,所以必须 $\Delta\geqslant0$,$m\neq0$,因此函数图象与 x 轴的交点至少有一个在原点右侧的条件是 $m\leqslant1$ 且 $m\neq0$。

反证法是应用补集思想解题的又一典型数学方法。

例 3 已知四边形 $ABCD$ 中,E、F 分别是 AB、DC 两边的中点,$EF=\frac{1}{2}(AD+CB)$,求证:$AD\parallel CB$(如图)。



分析:设结论 $P(AD\nparallel CB)$ 不成立,即假立 $\overline{P}(AD\parallel CB)$ 成立,则连 AC,取 AC 的中点 G,连结 EG、FG,则 $GE\parallel CB$,$GF\parallel AD$,E、G、F 不共线,则 $EF<GE+GF$。但 $GF=\frac{1}{2}AD$,$GE=\frac{1}{2}CB$,故 $EF<\frac{1}{2}(AD+$

CB),这与已知 $EF=\frac{1}{2}(AD+CB)$矛盾。

于是 $\overline{P}$ 不成立,故 $AD \parallel CB$。

解数学选题中的排除法也是应用的补集思想。

例 4 在锐角△ABC 中,$AC=1$,$AB=C\angle A=60°$,△ABC 的外接圆半径, $R\leqslant 1$,则( )。

(A) $\frac{1}{2}<C<2$;(B) $0<C\leqslant\frac{1}{2}$;(C) $C>2$;(D) $C=2$。

分析 :取△ABC 为等边三角形。可得 $C=1$,$R=\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant 1$,显然 $C=1$ 不在选择支(B)、(C)、(D)的范围之内,排除之,所以选(A)。