

近年来,各种各样的课外学习资料纷纷涌现,使人目不暇接.其中许多资料,过分注重从知识的角度进行编排,忽视学生的认知规律,导致学生题目做了不少,但效果却不明显.为此,我们组织了一批具有丰富教学经验的一线教师,本着“立足基础,促进迁移,注重方法,培养能力”的宗旨,根据数学知识体系,从学生认知规律的角度,以“举一反三”的形式,编写了这套丛书.

本套丛书在编写中力求体现以下特点:

(1) 一日三练,逐步推进

我们对数学教材上的内容,根据知识的联系程度进行整合,分成若干个专题,以一周一个专题,一天一例三练的形式,奉献给读者.每天花时不多,但能会一题,通一类,带一串,这样持之以恒,便可得到系统的训练,获得“聚沙成塔,集腋成裘”的效果.

(2) 源于基础,突出方法

本书在例题选择上力求典型性强.在注意覆盖本专题的基本知识和基本技能的同时,特别注重基本数学思想和方法的指导和训练.练习题与例题匹配一致,难易有序,做到既源于例题又逐步提高,促使学生在牢固掌握“三基”的基础上,能力得到提高,并能进行有效地迁移.

(3) 注重训练,针对性强

本书在编写中注重培养学生灵活运用知识的能力,坚持以训练为核心,努力培养学生的思维能力、解题能力和应用能力,同时,考虑到中考的需要,在选题上,能紧扣近年来的中考走势,凸显中考中的重点、难点和热点问题,从而为学生的中考复习做好必要的准备.

(4) 自助选择,便于自学

本书在编写过程中,为达到便于自学,无师自通的效果,书中例题都作了详细的分析和讲解,练习题也附有答案和提示.在难度上,呈阶梯状递进,学生可以根据自己的数学水平,选择适合自己能力的练习题,从而使各个层次的学生都能获得成功的快乐.

由于时间紧,任务重,在编写中肯定存在许多不足之处,恳请读者批评指正.

编 者

2004 年 7 月

目录

M U L U

1	实数 (一)	(1)
2	实数 (二)	(8)
3	实数 (三)	(15)
4	位置的确定 (一)	(22)
5	位置的确定 (二)	(29)
6	一次函数 (一)	(37)
7	一次函数 (二)	(47)
8	二元一次方程组 (一)	(59)
9	二元一次方程组 (二)	(65)
10	二元一次方程组 (三)	(72)
11	数据的代表 (一)	(81)
12	数据的代表 (二)	(90)
13	不等关系、不等式的基本性质及解集	(103)
14	一元一次不等式	(111)
15	一元一次不等式与一次函数	(117)
16	一元一次不等式组	(130)
17	不等式 (综合)	(138)

目录

M U L T I

18	分解因式 (一)	(146)
19	分解因式 (二)	(156)
20	分解因式 (三)	(164)
21	分解因式 (四)	(170)
22	分式	(176)
23	分式的乘除法	(184)
24	分式的加减法	(191)
25	分式方程	(200)
26	数据的收集与处理 (一)	(209)
27	数据的收集与处理 (二)	(218)
	参考答案	(233)



实数(一)

专题简析

(1) 无限不循环小数叫做无理数.

(2) 如果一个数 x 的平方等于 a , 即 $x^2 = a$, 那么这个数 x 就叫做 a 的平方根. 一个非负数 a 的平方根记为 $\pm\sqrt{a}$ ($a \geq 0$).

(3) 平方根的性质: 正数 a 的平方根有两个, 一个为 $\sqrt{a}$, 另一个为 $-\sqrt{a}$, 它们互为相反数. 零有一个平方根, 它是零本身. 负数没有平方根. $\sqrt{a}$ 又叫做 a 的算术平方根 ($a \geq 0$), 0 的算术平方根是零.

(4) 求一个数 a 的平方根的运算, 叫做开平方.

王牌例题

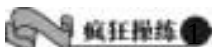
在下列各数: -0.32 , $-\frac{\pi}{2}$, $1.\dot{9}4$, $\frac{22}{7}$, 0 , $\pi + 2$, 0.121221 ,

1. 3030030003... (相邻两个 3 之间的 0 的个数逐次加 1), 有理数是 _____, 无理数是 _____.

【思路导航】有理数包括整数和分数, 无理数是无限不循环小数, 有理数与无理数之和为无理数, 无理数与有理数 (0 除外) 之积为无理数.

解 有理数是 -0.32 , $1.\dot{9}4$, $\frac{22}{7}$, 0 , 0.121221 ;

无理数是 $-\frac{\pi}{2}$, $\pi + 2$, 1. 3030030003... (相邻两个 3 之间 0 的个数逐次加 1)



1. 下列各组数中,都是无理数的一组是 ()

(1) $-\frac{1}{2}, 1.\dot{9}8, \frac{1}{7}, 1.01001$

(2) $\frac{5}{9}, \pi, 0.\dot{7}, 0.121212$

(3) $2\pi, \frac{\pi}{3.14}, \pi+1, 0.2020020002\cdots$ (相邻两个 2 之间 0 的个数逐次加 1)

(4) $0, 0.\dot{1}38, -\pi, 3.1111$

2. 下列说法正确的是 ()

(1) 无理数就是循环小数

(2) 无理数都是无限小数

(3) 有理数都是有限小数

(4) 两个无理数之积仍是无理数

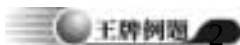
3. 如果一个圆的半径是有理数,那么这个圆的周长是 ()

(1) 整数

(2) 小数

(3) 有理数

(4) 无理数



下列命题中,正确的个数为 ()

(1) 只有正数才有平方根

(2) $-a$ 没有平方根

(3) -2 是 4 的平方根

(4) 4 的平方根是 2

(5) $\sqrt{16}$ 的算术平方根是 4

(6) $(-4)^2$ 的算术平方根为 ± 2

① 1 个

② 2 个

③ 3 个

④ 4 个

【思路导航】正数有两个平方根,0 的平方根是 0,负数没有平方根,任何非负数的算术平方根都是非负数.

解:(1) 错. 负数没有平方根,但 0 有平方根.

(2) 错. a 可以表示正数、负数、零. 当 $-a \geq 0$ 时, $-a$ 有平方根.

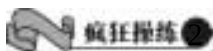
(3) 对.

(4) 错. 4 的平方根是 ± 2 .

(5) 错. $\sqrt{16} = 4$, 4 的算术平方根是 2.

(6) 错. $(-4)^2 = 16$, 16 的算术平方根为 4.

故选 ①.



1. 下列说法中, 正确的是

()

(1) 不是正数没有平方根

(2) 任何数的平方根都有两个

(3) 一个正数的两个平方根之和为 0

(4) 3 的平方根就是 3 的算术平方根

2. 下列各式中, 正确的是

()

(1) $\sqrt{16} = \pm 4$

(2) $\sqrt{12 \frac{1}{4}} = \frac{7}{2}$

(3) $\sqrt{(-27)^2} = -27$

(4) $\sqrt{a^2} = a$

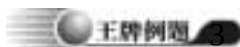
3. 填空:

(1) 若 $x^2 = 8^2$, 则 $x =$ _____.

(2) 若 $\sqrt{x^2} = 9$, 则 $x =$ _____.

(3) 若 $x = -5$, 则 $\sqrt{x^2} =$ _____.

(4) 若 $\sqrt{x+6} = 6$, 则 $\sqrt{x-5} =$ _____.



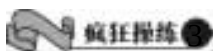
已知 $(x-2)^2 = \frac{1}{4}$, 求 x .

【思路导航】 本题运用了数的平方根的定义. 即如果 $x^2 = a$, 那么 x 叫做 a 的平方根. 将 $x-2$ 作为一个整体, $x-2$ 就是 $\frac{1}{4}$ 的平方根.

解 根据题意, 得 $x-2$ 是 $\frac{1}{4}$ 的平方根.

$$, \quad x - 2 = \frac{1}{2} \text{ 或 } x - 2 = -\frac{1}{2}$$

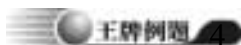
$$, \quad x = \frac{5}{2} \text{ 或 } x = \frac{3}{2}$$



1. 若 $(x - 1)^2 = 36$, 求 x .

2. 若 $(5 - 3x)^2 - \frac{121}{49} = 0$, 求 x .

3. 已知 $\sqrt{x} + y = 0$, $(2 - x)^2 = 49$, 求 y 的值.



八年级 (1) 班教室的面积为 43.2 米^2 , 教室地面恰由 120 块相同的正方形地砖铺成, 你能算出每块地砖的边长是多少吗?

【思路导航】因为每块正方形地砖面积相等, 所以可先求出每块地砖面积, 再利用正方形面积公式求边长.

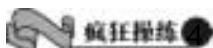
解 每块地砖的面积为 $43.2 \div 120 = 0.36 \text{ 米}^2$

设正方形地砖边长为 x 米, 则有 $x^2 = 0.36$

根据题意, x 为 0.36 的算术平方根.

$$, \quad x = 0.6$$

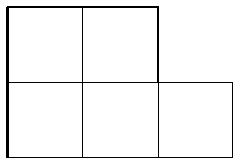
答: 每块地砖的边长为 0.6 米.



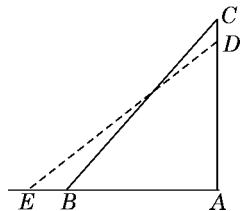
1. 交通警察通常据刹车后车轮滑过的距离估计车辆行驶的速度,所用的经验公式 $v = 16 \sqrt{df}$, 其中 v 表示车速 (单位: 千米/时), d 表示刹车后车轮滑过的距离 (单位: 米), f 表示摩擦因数. 在某次交通事故调查中, 测得 $d = 30$ 米, $f = 1.2$, 则肇事汽车的车速是多少?

2. 如图是由 5 个边长为 1 的正方形拼成的.

- (1) 试将这个图形分成三块, 并将这三块拼成一个正方形.
- (2) 设拼成后的正方形的边长为 x , 试求 x 的长.



3. 一根直立的标杆长 8 米. 一阵大风吹过, 标杆从 C 点处折断, 顶部 (B) 着地, 离杆脚 (A) 4 米 (如图所示). 工人在修复的过程中, 发现在折断点 C 的下方 1.25 米 D 处, 有一个明显伤痕, 如果下次大风将标杆从 D 处吹折, 则距离杆脚周围多大范围内有被砸伤的危险?



王牌例题

已知 $\sqrt{x-y+3}$ 与 $\sqrt{x+y-1}$ 互为相反数, 求 x^2+y^2 的平方根.

【思路导航】 因为互为相反数的两数之和为 0, 所以有

$\sqrt{x-y+3} + \sqrt{x+y-1} = 0$, 因为 $\sqrt{x-y+3} \geq 0, \sqrt{x+y-1} \geq 0$, 可得 $x-y+3=0, x+y-1=0$, 这样可求出 x, y 的值.

解 根据题意得: $\sqrt{x-y+3} + \sqrt{x+y-1} = 0$,

$$\sqrt{x-y+3} \geq 0, \sqrt{x+y-1} \geq 0,$$

$$, \quad x-y+3=0 \quad \text{①} \quad x+y-1=0 \quad \text{②}$$

解由①②式组成的方程组, 得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

$$, \quad \pm\sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(-1)^2+2^2} = \pm\sqrt{5}$$

, x^2+y^2 的平方根为 $\pm\sqrt{5}$.

疯狂操练

1. 已知 $\sqrt{x+2y-5}$ 与 $\sqrt{2x-y-5}$ 互为相反数, 求 $x+y$ 的平方根.

2. 已知 $|a+3| + \sqrt{b-2} + (m-21)^2 = 0$, 求 $(a+b)^m$ 的值.



3. 已知 $|x+y-25| + \sqrt{x-y+7} = 0$,

(1) 求 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 的值;

(2) 如果等腰三角形的两边长是 $\sqrt{x}-1$ 、 $\sqrt{y}$, 求此等腰三角形的周长.

【学后反思】

(1) 开平方和平方运算互为逆运算. 许多求平方根的问题可转化成平方运算来求解或验证.

(2) 求一个数的平方根, 就是将所有平方后等于这个数的数求出来, 在求一个带分数的平方根时, 要先把带分数化成假分数.

(3) 因为 $a^{2n} = (a^n)^2$ ($a \geq 0, n$ 为正整数), 所以 a^{2n} ($a \geq 0, n$ 为正整数) 的平方根是 $\pm a^n$. 因 $a^{-2n} = \frac{1}{a^{2n}}$ ($a > 0, n$ 为正整数), $(\pm \frac{1}{a^n})^2 =$

$(\frac{1}{a^n})^2$, 所以 a^{-2n} ($a > 0, n$ 为正整数) 的平方根是 $\pm \frac{1}{a^n}$, 即 $\pm a^{-n}$. 掌握这些简单易记的规律, 将为今后计算带来方便.

实 数 (二)

专题简析

(1) 如果一个数 x 的立方等于 a , 即 $x^3 = a$, 那么这个数 x 叫做 a 的立方根, 记为 $\sqrt[3]{a}$.

(2) 任何数都有立方根, 且只有一个立方根; 正数有一个正的立方根, 负数有一个负的立方根, 0 的立方根是 0.

(3) 求一个数 a 的立方根的运算叫开立方.

王牌例题

求下列各式的值:

$$(1) \sqrt[3]{\frac{125}{8}}$$

$$(2) \sqrt[3]{0.001}$$

$$(3) \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$$

$$(4) \sqrt[3]{8 \times 10^9}$$

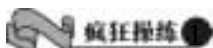
【思路导航】一个数的立方根只有一个, 正数的立方根为正数, 负数的立方根为负数, 0 的立方根是 0.

$$\text{解: (1)} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}, \quad \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$$

$$(2) \sqrt[3]{0.001} = \sqrt[3]{(0.1)^3} = 0.1$$

$$(3) \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = -\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = -\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2}$$

$$(4) \sqrt[3]{8 \times 10^9} = \sqrt[3]{2^3 \times (10^3)^3} = \sqrt[3]{(2 \times 10^3)^3} = 2 \times 10^3$$



1. 下列各式中,成立的是

()

(1) $\sqrt[3]{-8} = -2$

(2) $-\sqrt{-16} = 4$

(3) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \pm \frac{1}{5}$

(4) $\sqrt[3]{-81} = -9$

2. 填空:

64 的平方根的立方根是_____.

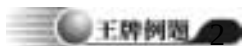
64 的立方根的平方根是_____.

平方根等于本身的数是_____.

立方根等于本身的数是_____.

3. 若 $\sqrt[3]{a^3} = 4$, 则 $a =$ _____ 若 $-\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, 则 $a =$ _____ ;

若 $\sqrt{x} = a$, $\sqrt[3]{y} = b$, 则 $xy =$ _____ 若 $\sqrt{a} = 3$, 则 $\sqrt[3]{-3a} =$ _____ .



求下列各式中的 x .

(1) $5x^3 - 1 = -\frac{24}{25}$

(2) $(x - 2)^3 = -\frac{1}{27}$

【思路导航】 本题运用了数的立方根的定义. 即如果 $x^3 = a$, 那么 x 叫做 a 的立方根, (1) 就是 $x^3 = \frac{1}{125}$, (2) 把 $(x - 2)$ 作为一个整体, $(x - 2)$ 是 $-\frac{1}{27}$ 的立方根.

解: (1) $5x^3 - 1 = -\frac{24}{25}$

, $5x^3 = \frac{1}{25}$, $x^3 = \frac{1}{125}$, $x = \frac{1}{5}$

(2) $(x - 2)^3 = -\frac{1}{27}$



$$, \quad x - 2 = -\frac{1}{3} \quad , \quad x = \frac{5}{3}$$



疯狂操练

1. 求下列各式中的 x .

$$(1) \quad x^3 - \frac{8}{27} = 0$$

$$(2) \quad 64x^3 - 27 = 0$$

$$(3) \quad (x - 3)^3 = -216$$

$$(4) \quad 3(x + 1)^3 = -13\frac{8}{9}$$

2. 已知圆柱的体积为 $16\pi\text{cm}^3$, 底面圆的直径与圆柱的高相等, 求圆柱底面圆的半径.

3. 将一个底面半径为 4cm , 高为 10cm 的圆柱钢材熔化, 能铸造半径为多少厘米的钢球 15 个? (球的体积为 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, R 是球的半径) ?

王牌例题

若 $\sqrt[3]{3x-2}$ 与 $\sqrt[3]{2-5x}$ 互为相反数,求 x 的值.

【思路导航】如果两个数的立方根互为相反数,则这两个数也是互为相反数.

解: $\sqrt[3]{3x-2}$ 和 $\sqrt[3]{2-5x}$ 互为相反数.

, $3x-2$ 与 $2-5x$ 也互为相反数

那么 $3x-2+2-5x=0$, $x=0$

, $x=0$

疯狂操练

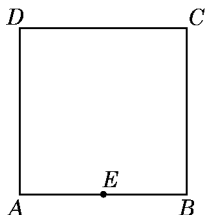
1. 若 $\sqrt[3]{2a-1}$ 和 $\sqrt[3]{1-3b}$ 互为相反数,求 $\frac{a}{b}$ 的值.

2. 若 $\sqrt[3]{1-2x}$ 与 $\sqrt[3]{3y-2}$ 互为相反数,求 $\frac{1+2x}{y}$ 的值.

3. 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\sqrt{a-3}$ 和 $\sqrt[3]{a-3}$ 相等.



如图,在正方形的顶点 A 坐着一只兔子,在 AB 中点 E 处有一只狼,如果狼只能沿着正方形的边跑动,兔子可以随便跑动,且狼的速度与兔子的速度相同,试问,兔子与狼谁先到达 C 处?



【思路导航】因为狼的速度与兔子的速度相同,因此要判断兔子和狼谁先到达 C 处,只需判断它们的路程多少就可以了.

解 设正方形边长为 a ,

则狼行走的路程为 $BE + BC = 0.5a + a = 1.5a$.

兔子跑动的最短路程为 $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$

$$1.5^2 = 2.25 > 2, \quad 1.5 > \sqrt{2}$$

$$, \quad 1.5a > \sqrt{2}a$$

答 因为狼行走的路程大于兔子行走的最短路程,所以兔子先到达 C 点.



1. 小李买了枝新钢笔,小王问小李新钢笔的价格是多少?小李回答说:“这枝钢笔的价格是整数,且小于 $\sqrt{169.5}$ 元,大于 $\sqrt{145}$ 元.”你能说出小李这枝钢笔的价格吗?

2. 座钟的摆针摆动一个来回所需的时间称为一个周期,其计算公式为 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 T 表示周期(单位:秒), l 表示摆长(单位:米), $g = 9.8$ 米/秒². 假如一台座钟的摆长为 0.5 米,它每摆动一个来回发出一次滴答声. 那么在 1 分钟内,该座钟大约发出了多少次滴答声?

3. 如果 $n < \sqrt{10} + \sqrt[3]{10} < n+1$ (n 是正整数), 那么 $n =$ ()
 (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7

王牌例题 5

通过估算比较 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 与 1.5 的大小.

【思路导航】因为 $1.5 = \frac{3}{2}$, 所以本题只需比较 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 与 $\frac{3}{2}$ 的大小关系. 因为两数均为正数, 分母相同, 因此只需比较分子, 分子大的值就大.

解 $1.5 = \frac{3}{2}$

因为 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 与 $\frac{3}{2}$ 分母相同, 所以先比较分子.

$$\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{3} + 1 < 3$$

$$, \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2} < \frac{3}{2}$$

$$, \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2} < 1.5$$



1. 通过估算比较下面各组数的大小.

(1) $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ 与 2.5 的大小;

(2) $\sqrt[3]{67}$ 与 4.2 的大小.

2. 有面积为 3cm^2 、 4cm^2 、 8cm^2 的三个正方形,边长分别为 a 、 b 、 c ,试比较 $a+b$ 与 c 的大小.

3. 如图,加法竖式中,六个方块盖住的六个数字和为 a ,你能比较 a 与 $\sqrt{2490}$ 的大小吗?

$$\begin{array}{r}
 \square\square \\
 \square\square \\
 + \quad \square\square \\
 \hline
 1 \quad 9 \quad 9 \quad 7
 \end{array}$$

【学后反思】

(1) 开立方与立方运算互为逆运算. 许多求立方根的问题可转化为立方运算来求解或验证.

(2) 形如 $(x \pm a)^n = b$ ($n=2$ 或 3 , 当 n 为 2 时, $b \geq 0$) 这一类型的方程的基本解法,是利用平方根或立方根的概念,将 $x \pm a$ 作为一个整体去考虑,学习中应注意正确运用.

(3) 立方根还有性质 $(\sqrt[3]{a})^3 = a$, $-\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{-a}$ 等运算过程中,应注意正确运用积的乘方、幂的乘方、分式的乘方等法则.



实数(三)

专题简析

(1) 有理数和无理数统称为实数,实数可以分为正实数、负实数和零.

(2) 实数和数轴上的点是一一对应的.

(3) 数轴上,右边的点表示的数比左边的点表示的数大.

(4) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$);

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0);$$

这两条性质计算中经常用到,应熟练掌握.

王牌例题

把下列各数分别填在相应的集合中:

$-2, \pi, -45, \frac{22}{7}, 3.14, \sqrt{2}, -\sqrt{9}, \sqrt[3]{9}, \sqrt{5}-1, |-3|, 0.$

有理数集合: { ... }

无理数集合: { ... }

正实数集合: { ... }

负实数集合: { ... }

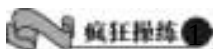
【思路导航】 有理数和无理数统称实数,无限不循环小数又叫做无理数,无理数可分为正无理数和负无理数. 由于有理数和无理数都有正、负之分,实数也有正、负之分,所以实数还可以分类为正实数、0、负实数. $-\sqrt{9}$ 虽用根号形式表示,但不是无理数,它是有理数.

解 有理数集合为 $\{-2, -45, \frac{22}{7}, 3.14, -\sqrt{9}, |-3|, 0, \dots\}$

无理数集合为 $\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{9}, \sqrt{5}-1, \dots\}$

正实数集合为 $\{\pi, \frac{22}{7}, 3.14, \sqrt{2}, \sqrt[3]{9}, \sqrt{5}-1, |-3|, \dots\}$

负实数集合为 $\{-2, -45, -\sqrt{9}, \dots\}$



1. 把下列各数填在相应的集合内：

$$(-\sqrt{3})^0, (\sqrt{\pi})^2, \sqrt{1.21}, \sqrt[3]{-125}, 0, -\sqrt{\frac{25}{81}}, \sqrt{8.1}, \sqrt[3]{-100}.$$

自然数集合： $\{\dots\}$

整数集合： $\{\dots\}$

负有理数集合： $\{\dots\}$

无理数集合： $\{\dots\}$

2. 下列四个命题正确的是 ()

(1) 相反数等于它本身的实数只有 0

(2) 倒数等于它本身的实数只有 1

(3) 绝对值等于它本身的实数只有 0

(4) 算术平方根等于它本身的实数只有 1

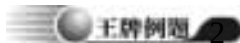
3. 下列说法错误的是 ()

(1) $\sqrt{3}$ 是无理数

(2) $\sqrt{3}$ 是实数

(3) $\sqrt{3}$ 等于 1.732

(4) $\sqrt{3}$ 是无限不循环小数



化简：

$$(1) \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{12}}{\sqrt{6}}$$

$$(2) (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$$

$$(3) (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$(4) \sqrt{50} - \sqrt{8}$$

$$(5) \sqrt{\frac{1}{27}} - \sqrt{3}$$

【思路导航】 本题的化简主要是对 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) ,

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$) 的运用. 我们在前面学过的有理数的运算律

和运算性质, 在实数运算中仍然成立.

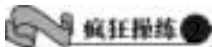
$$\text{解: (1)} \quad \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{32 \times 12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{32 \times 12}{6}} = \sqrt{64} = 8$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 &= (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 7 + 2\sqrt{5 \times 2} = 7 + 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$(3) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$$

$$(4) \quad \sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{4 \times 2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$(5) \quad \sqrt{\frac{1}{27}} - \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{81}} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} - \sqrt{3} = -\frac{8}{9}\sqrt{3}$$



1. 化简:

$$(1) \quad \sqrt{12} \div \sqrt{3} - 3$$

$$(2) \quad (\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

$$(3) \quad (\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

2. 化简:

(1) $\sqrt{32} - 3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}$

(2) $\sqrt{12} \times \sqrt{27} - \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \left| 3 - \sqrt[3]{64} \right|$

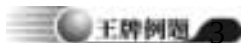
(5) $(\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{2})$

3. 求下列各式中的 x .

(1) $\sqrt{5x} - \sqrt{20} = \sqrt{5}$

(2) $\frac{3}{\sqrt{2}}x - \sqrt{18} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(3) $2\sqrt{3}(x + \sqrt{6}) - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + \sqrt{72}$



若 $\sqrt{10}$ 的整数部分为 x , 小数部分为 y , 求 $x - y + xy$ 的值.

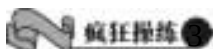
【思路导航】因为 $3 < \sqrt{10} < 4$, 所以 $\sqrt{10}$ 的整数部分为 3, 小数部分为 $\sqrt{10} - 3$.

解： $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$, 即 $3 < \sqrt{10} < 4$

, $\sqrt{10}$ 的整数部分为 3, 小数部分为 $\sqrt{10} - 3$

即 $x = 3, y = \sqrt{10} - 3$

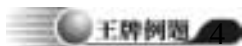
$$\begin{aligned} x - y + xy &= 3 - (\sqrt{10} - 3) + 3 \times (\sqrt{10} - 3) \\ &= 3 - \sqrt{10} + 3 + 3\sqrt{10} - 9 \\ &= 2\sqrt{10} - 3 \end{aligned}$$



1. $\sqrt{11}$ 的小数部分为 d , 求 $d(d+6)$ 的值.

2. 若实数 $M = 3 + 2\sqrt{2}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 $1 - b$, 则 $(a+b)(a-b)$ 的值为 _____.

3. 设 $\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{5}$ 的小数部分为 a 、 b , 求 $b^2 - a^2 + 4b - 4a$ 的值.



当 $x = \sqrt{27} - 1$ 时, 求 $x^2 + 2x + 10$ 的值.

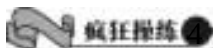
【思路导航】此题若将 $x = \sqrt{27} - 1$ 直接代入计算, 较繁, 考虑将 $x = \sqrt{27} - 1$ 变形为 $x + 1 = \sqrt{27}$, 两边平方即得 $x^2 + 2x + 1 = 27$, 再整体代入原式, 计算就方便多了.

解： $x = \sqrt{27} - 1$, $x + 1 = \sqrt{27}$

$$(x+1)^2 = (\sqrt{27})^2 \quad \text{即 } x^2 + 2x + 1 = 27$$

$$x^2 + 2x + 10 = x^2 + 2x + 1 + 9 = 27 + 9 = 36$$

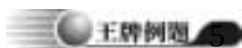
, $x^2 + 2x + 10$ 的值为 36.



1. 当 $x = \sqrt{23} - 1$ 时, 求 $x^2 + 2x + 2$ 的值.

2. 已知 $a + b = \sqrt{12}$, $ab = 2$, 求 $\sqrt{(a - b)^2}$ 的值.

3. 若 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{8}$, 求 $x - \frac{1}{x}$ 的值.



已知 x, y 都是实数, 且 $y = \sqrt{x - 3} + \sqrt{3 - x} - 9$, 求 $\sqrt[3]{xy}$ 的值.

【思路导航】由平方根的性质知, 负数没有平方根, 因此有 $x - 3 \geq 0$, $3 - x \geq 0$, 这样就可以求出 x, y 的值了.

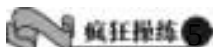
解 根据题意, $x - 3 \geq 0, 3 - x \geq 0$

$$, \quad x - 3 = 3 - x = 0, \text{ 即 } x = 3$$

$$, \quad y = -9$$

$$, \quad \sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{3 \times (-9)} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$, \quad \sqrt[3]{xy} \text{ 的值为 } -3.$$



1. 已知 $y = \sqrt{x - \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{2} - x} + 4$, 求 x^y 的值.

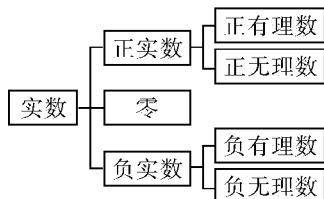
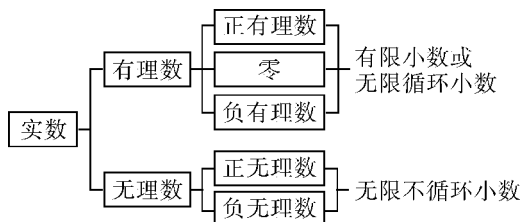


2. 若正实数 a, b 满足 $b^2 = \frac{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{1 - a^2}}{a + 1} + 4$, 求 $3(a + b)$ 的算术平方根.

3. 已知 $|2 - k| + \sqrt{k - 5} = k$, 求 $\sqrt{k}$.

【学后反思】

(1) 实数的分类有以下两种方法：



(2) 在实数范围内, 正数和零统称非负数, 非负数的表现形式为：

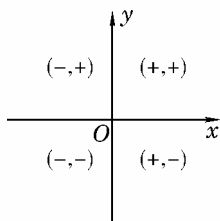
$|a| \geq 0, a^2 \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$ ($a \geq 0$) (其中 a 为实数). 如果有限个非负数的和为零, 则各个非负数必同时为零. 非负数在解题中有着较广泛的应用.



位置的确定 (一)

专题简析

生活中我们常常需要确定物体(点)的位置,确定物体(点)的位置有多种方式,每种方式确定平面上物体的位置需两个数据,平面直角坐标系是确定物体位置的一种方式,它把平面上的点与一对有序实数(坐标)建立起一一对应关系.而互相垂直的 x 轴、 y 轴又把坐标平面分成四个象限,四个象限内点的坐标如图,坐标轴上的点不属于各个象限,其中至少有一个坐标为零.

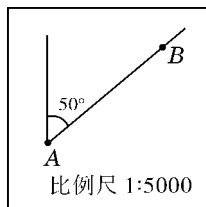


王牌例题

某海轮上午 10 时在 A 处测得灯塔 B 在它的北偏东 50° 的方向上,距海轮 100 米处,在图中标出灯塔 B 的位置.

【思路导航】要确定灯塔 B 的位置需要二个数据,本题已具备.

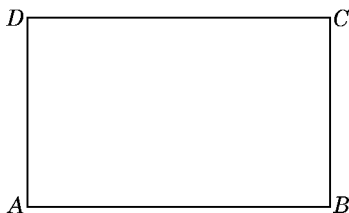
解 先画出北偏东 50° 的方向,然后根据比例尺,在这方向上取 $AB = 2\text{cm}$. B 的位置如右图.



疯狂操练

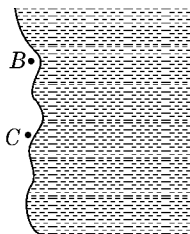
1. 要在一个矩形 ABCD ($AB = 40\text{mm}$, $AD = 25\text{mm}$) 的铁板上钻一个直径为 10mm 的圆孔. 使孔心与 AB 边的距离为 15mm , 与 AD 边的

距离为 20mm. 确定孔心的位置.



2. 在中国地图上确定西安、香港的经纬度,并找出与西安纬度大致相同的一个城市以及与香港经度大致相同的一个城市.

3. 某沿海两个观察所(如图),在 B 处测得渔船 A 在北偏东 75° 的方向上,在 C 处测得渔船 A 在北偏东 45° 的方向上. 试在图中确定渔船 A 的位置.



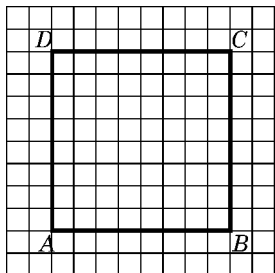
王牌例题 2

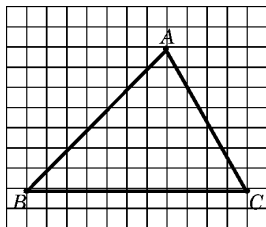
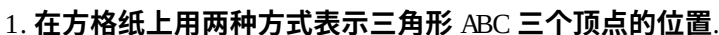
在方格纸上用两种方式表示正方形四个顶点的位置.

【思路导航】确定点的位置,要找出两个数据即可.

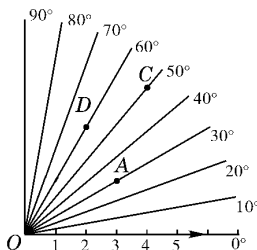
解:(1) A 用 $(0,0)$ 表示,则 B $(8,0)$, C $(8,8)$, D $(0,8)$

(2) B 用 $(0,0)$ 表示,则 A $(-8,0)$, C $(0,8)$, D $(-8,8)$

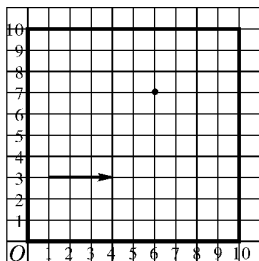




2. 如图, O 用 $(0, 0^\circ)$ 表示, A 用 $(3, 30^\circ)$ 表示, 则 C、D 的位置如何表示.



3. “贪吃蛇”是一种计算机游戏,图中“→”表示贪吃蛇的方向,“·”表示食物,用三种不同的路径表示贪吃蛇吃食物的途径.

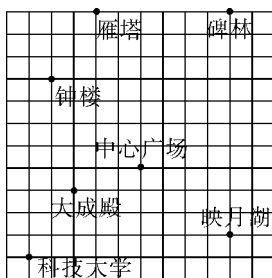


王牌例题

图示为某市旅游景点示意图,如果用 $(0, 0)$ 表示科技大学的位置, $(5, 4)$ 表示中心广场的位置,图中其他景点的位置怎样表示.

【思路导航】由已知数据知,中心广场在第 5 列第 4 行的位置,用类似的方法可得其他景点位置.

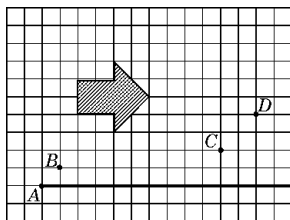
解 大成殿 $(2, 3)$, 映月湖 $(9, 1)$, 钟楼 $(1, 8)$, 雁塔 $(3, 11)$, 碑林 $(9, 11)$.



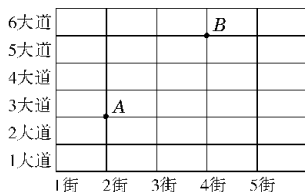
疯狂操练

1. 如图,用 $(0, 0)$ 表示 A 点,用 $(1, 1)$ 表示 B 点的位置,那么:

- (1) 图中阴影部分图形的七个顶点的位置如何表示?
- (2) 图中 $(10, 2)$, $(12, 4)$ 分别是图中哪两点?



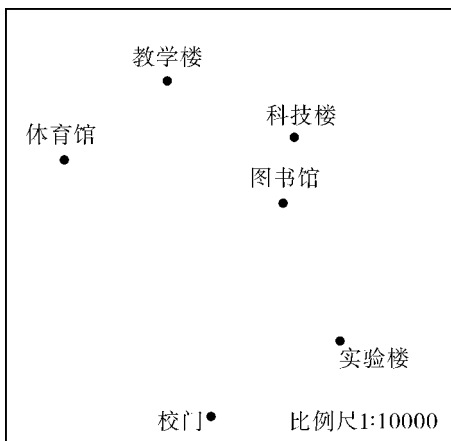
2. 如图, A 表示 2 街 3 大道的十字路口,点 B 表示 4 街 6 大道的十字路口,如果用 $(2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (4, 6)$ 表示 A 到 B 的一条路径,那么你能用同样的方式写出由 A 到 B 的其他几条路径吗?



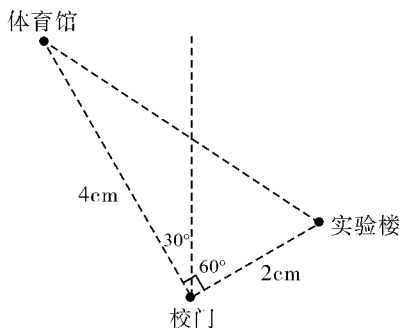
3. 如图所示为学校的平面示意图,借助刻度尺、量角器,解决下列问题:

(1) 体育馆位于校门的北偏西多少度的方向上?到校门的距离为多少厘米?

(2) 某楼位于校门北偏东 60° 的方向,到校门实际距离约为 200 米,说出这一地点的名称.



(3) 你能算出体育馆到实验楼的实际距离吗?



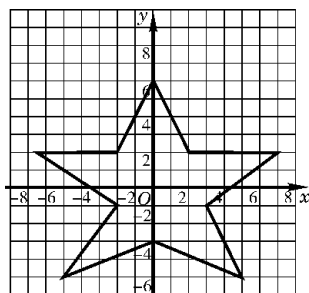
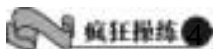
在平面直角坐标系中描出下列各点,并将各点用线段依次连接起来.

$(-7, 2)$, $(-2, 2)$, $(0, 7)$, $(2, 2)$, $(7, 2)$, $(3, -1)$, $(5, -6)$, $(0, -3)$, $(-5, -6)$, $(-3, -1)$, $(-7, 2)$.

观察所得的图形,你觉得它是什么图形?

【思路导航】 分别根据各点的横坐标与纵坐标描出各点,用线段依次连结,所得的图形是五角星.

解 见图.



1. 描出下列各点,并将各组内的点用线段依次连结起来.

- (1) $(0,0)$, $(5,3)$, $(10,0)$, $(5,-3)$, $(0,0)$
- (2) $(1,0)$, $(5,2)$, $(9,0)$, $(5,-2)$, $(1,0)$
- (3) $(6,0)$, $(11,3)$, $(16,0)$, $(11,-3)$, $(6,0)$
- (4) $(7,0)$, $(11,2)$, $(15,0)$, $(11,-2)$, $(7,0)$

2. 已知菱形两条对角线长为 6 和 8,以两条对角线为坐标轴,建立直角坐标系,写出菱形各个顶点的坐标.

3. 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的边 AB 在 x 轴上,且 $AB=3$,A 点的坐标为 $(-5,0)$,C 点的坐标为 $(2,5)$.

- (1) 画出符合条件的 $\triangle ABC$,并写出 B 点的坐标.
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

王牌例题

在平面直角坐标系中,已知点 $(2m, m-4)$ 在第四象限,且 m 为偶数,求 m 的值.

【思路导航】点在第四象限,则 $2m > 0, m-4 < 0$,由此可得 m 的值.

解 由条件得 $\begin{cases} 2m > 0 \\ m-4 < 0 \end{cases}$, 得 $0 < m < 4$

又 m 为偶数, $m = 2$

疯狂操练

1. 已知点 $P(m, 3-m)$ 是第二象限的点,则 m 的取值范围是_____.
2. 已知点 P 在第二象限,且到 x 轴的距离是 2,到 y 轴的距离是 3,则点 P 的坐标是_____.
3. 已知 $P(a, b)$, 当 $ab < 0$ 时,则点 P 的位置在 ()

(1) 第二象限	(2) 第三象限
(3) 第四象限	(4) 第二象限或第四象限

【学后反思】

在平面上确定物体的位置需两个数据. 建立平面直角坐标系,平面上的点可以用一对有序实数对表示,反过来,有序实数对也可确定点的位置,它是数、形结合的工具. 必须注意线段的长与坐标的关系: 线段的长是正数,而坐标可正可负,也可为零.



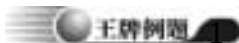
位置的确定 (二)



专题简析

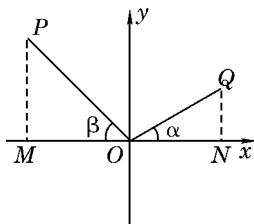
(1) 建立了平面直角坐标系,就建立了平面上的点与坐标(有序实数对)的一一对应关系,在直角坐标系中,将点的坐标进行变换,可将“图形”压扁、拉长、翻转、平移、放大、缩小等.

(2) 平面直角坐标系内点 $P(a, b)$ 关于 x 轴的对称点为 $P_1(a, -b)$, 关于 y 轴的对称点为 $P_2(-a, b)$, 关于原点的对称点为 $P_3(-a, -b)$.



如图 $\angle \alpha = 30^\circ$, $\angle \beta = 45^\circ$, $OP = 5$, $OQ = 4$, 试求点 P 、 Q 的坐标.

【思路导航】由图形,可先确定 P 、 Q 两点的横坐标、纵坐标的符号分别是 $P(-, +)$ 、 $Q(+, +)$;再求出 P 、 Q 点到 x 轴的距离及垂足与原点之间的距离,进而求出 P 、 Q 两点的坐标.



解 过 P 作 $PM \perp x$ 轴,垂足为 M ,过 Q 作 $QN \perp x$ 轴,垂足为 N .

由 $\angle \beta = 45^\circ$ 可知 $OM = PM$.

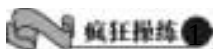
由勾股定理 $OM^2 + PM^2 = OP^2 = 25$

$$, OM = PM = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

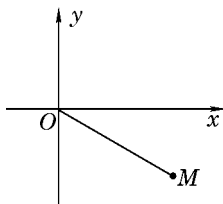
$$, P\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$$

又 $\angle \alpha = 30^\circ$, $QN = \frac{1}{2}OQ = 2$

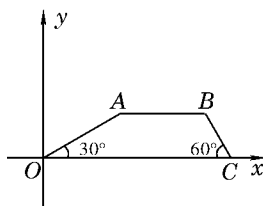
由勾股定理得 $ON = \sqrt{OQ^2 - QN^2} = 2\sqrt{3}$, $Q(2\sqrt{3}, 2)$



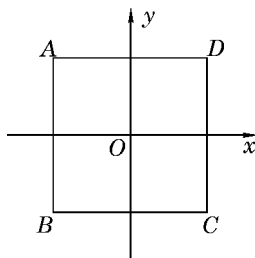
1. 如图, 点 M 是第四象限内的一点, $OM = 6$, $\angle xOM = 30^\circ$, 求点 M 的坐标.



2. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 C 在 x 轴的正半轴上, $\angle AOC = 30^\circ$, $\angle BCO = 60^\circ$, $OA = 20$, $AB = 15$, 求点 A 、 B 、 C 的坐标.



3. 如图, 以正方形 $ABCD$ 平行于边的对称轴为坐标轴建立直角坐标系, 若正方形的边长为 4, 求正方形四个顶点的坐标.

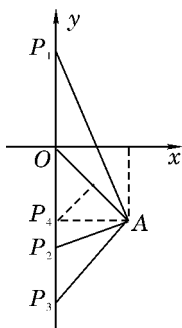


王牌例题 2

在平面直角坐标系中,已知 $A(2, -2)$, 在 y 轴上确定点 P , 使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形, 则符合条件的 P 点共有 ()

- (1) 2 个 (2) 3 个
(3) 4 个 (4) 5 个

【思路导航】 以 OA 为一腰, P 点在 y 轴上, 有三种情况; 以 OA 为底有一种情况. 由四情况分别画出图形, 可求到正确答案.



解: A 点为 $(2, -2)$, $OA = 2\sqrt{2}$

(1) 若以 OA 为一腰, 以 O 为顶角顶点, A 为底角顶点有两种情况 如图 $\triangle OAP_1$ 、 $\triangle OAP_2$.

, $P_1(0, 2\sqrt{2})$ $P_2(0, -2\sqrt{2})$

(2) 以 OA 为一腰, A 为顶角顶点, 有一种情况, 如图 $\triangle OAP_3$

, $P_3(0, -4)$

(3) 以 OA 为底边, 有一种情况, 如图 $\triangle OP_4A$

, $P_4(0, -2)$

综上, 本题应选 (3).

疯狂操练 2

1. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1, -3)$, 在 y 轴上确定点 P , 使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形, 则符合条件的 P 共有 ()

- (1) 2 个 (2) 3 个 (3) 4 个 (4) 5 个

2. 如果正三角形 ABC 的顶点 A 、 B 的坐标分别为 $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, 则点 C 的坐标是 ()

- (1) $(2, 2\sqrt{3})$
(2) $(2, -2\sqrt{3})$
(3) $(2, 2\sqrt{3})$ 和 $(2, -2\sqrt{3})$

(4) $(-2, 2\sqrt{3})$ 和 $(-2, -2\sqrt{3})$

3. 已知平行四边形三个顶点的坐标分别是 $(0,0)$, $(4,0)$, $(3,2)$, 写出平行四边形第四个顶点的坐标.

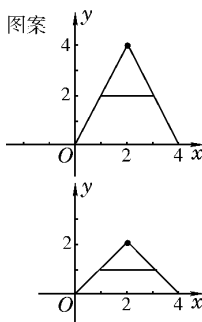
王牌例题

如图所示,在直角坐标系中,将图中的图案“ A ”(1) 各个顶点的横坐标保持不变,纵坐标分别变为原来的 2 倍、 $\frac{1}{2}$.

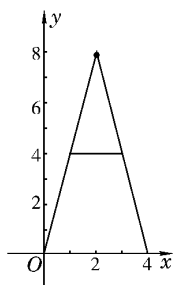
(2) 各个顶点的横坐标、纵坐标都变为原来的 2 倍.

【思路导航】按要求将各顶点坐标变换,然后找出这些点即可.

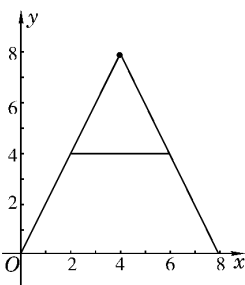
解 如图所示.



纵坐标为
原来的 $\frac{1}{2}$



纵坐标为
原来的 2 倍

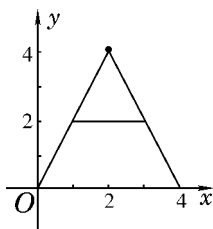


横坐标、纵坐标
均为原来的 2 倍

疯狂操练

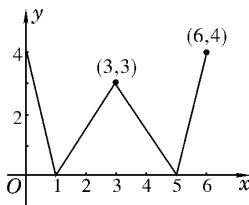
1. 如图所示,在直角坐标系中,将图中的图案“ A ”(1) 各个点的纵坐标保持不变,横坐标分别变为原来的 2 倍、 $\frac{1}{2}$.

(2) 各个点的横坐标、纵坐标都变为原来的 $\frac{1}{2}$.



2. 如图所示：

(1) 将字母“W”每个点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 2 倍.



(2) 将 W 纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$.

(3) 将字母 W 横纵坐标都变为原来的 $\frac{1}{2}$.

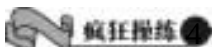
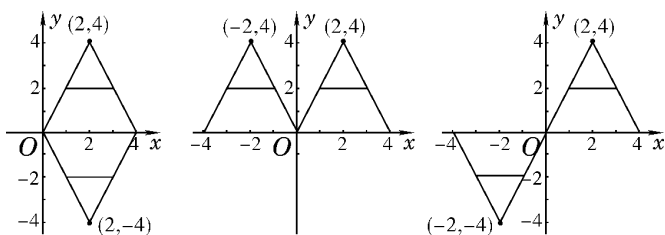
3. (1) 将 1 题中的字母 A 的纵坐标保持不变，横坐标都加上 3.
- (2) 将 1 题中的字母 A 的横坐标保持不变，纵坐标都减去 3.
- (3) 观察图形有什么变化.

如图所示,在直角坐标系中,将王牌例题 3 图中的图案“A”

- (1) 横坐标保持不变,纵坐标乘以 -1 .
- (2) 纵坐标保持不变,横坐标乘以 -1 .
- (3) 横、纵坐标都乘以 -1 .

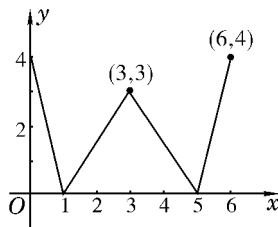
【思路导航】按要求先将各顶点的坐标变换,然后找出这些点即可.

解:



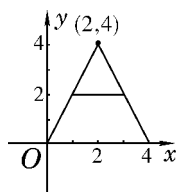
1. 在直角坐标系中,将图中字母 W:

- (1) 各个点的横坐标不变,纵坐标乘以 -1 ;
- (2) 纵坐标保持不变,横坐标乘以 -1 .

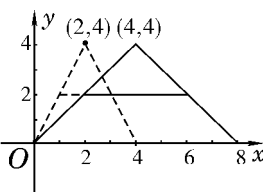


2. 将第 1 题中图中各个点的横坐标及纵坐标都乘以 -1 .

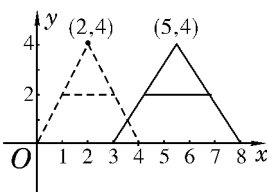
3. 如图所示,在直角坐标系中,图(1)中的图案“A”经过变换分别变成图(2)至图(6)中的相应图案(虚线对应于原图案),探索每次变换前后图案发生了什么变化?对应点的坐标之间有什么关系.



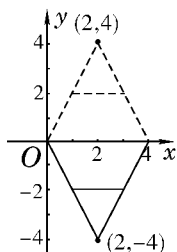
(1)



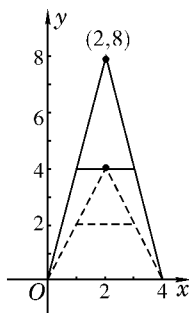
(2)



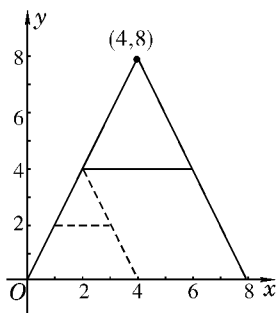
(3)



(4)



(5)



(6)

王牌例题

已知 $P(a, -2)$ 和 $Q(3, b)$

(1) 若 P, Q 关于原点对称, 求 a, b 的值.

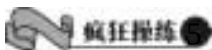
(2) 若 P' 与 P 关于 x 轴对称, Q' 与 Q 关于 y 轴对称, 求 P', Q' 的坐标.

【思路导航】 关于 x 轴对称的两点, 横坐标相同, 纵坐标互为相反数; 关于 y 轴对称的两点, 则横坐标互为相反数, 纵坐标相同; 关于原点对称的两点横坐标与纵坐标分别互为相反数.

解: (1) P, Q 关于原点对称, $a = -3, b = 2$

(2) P' 与 P 关于 x 轴对称, $P'(-3, 2)$

Q' 与 Q 关于 y 轴对称, $Q'(-3, 2)$



1. 点 $A(-2, 3)$ 关于 x 轴、 y 轴及原点的对称点的坐标分别为 _____、_____、_____.

2. 在直角坐标系内, 如果点 B 和点 $A(-3, 4)$ 关于 x 轴对称, 点 B 和点 C 关于 y 轴对称, 则点 C 的坐标是 _____.

3. 当满足条件 _____ 时, 点 $A(m-1, -3)$ 关于 y 轴的对称点在第四象限内.

【学后反思】

在直角坐标系中, 将坐标扩倍可将图形拉长、放大; 将坐标缩小, 则可压扁、缩小图形; 增加、减少可平移图形……当横坐标不变, 纵坐标乘以 -1 , 则这两个点关于 x 轴对称; 当纵坐标不变, 横坐标乘以 -1 , 这两个点关于 y 轴对称; 当纵、横坐标都乘以 -1 , 这两个点关于原点对称.



一次函数 (一)



专题简析

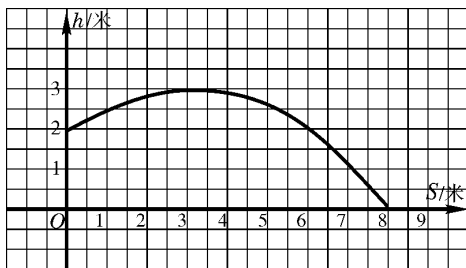
函数是刻画变量之间关系的常用模型,其中最简单的函数是一次函数. $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 是一次函数式的表示方法,正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 是一次函数 $b = 0$ 时的特殊情况. 图像是函数关系的另一种表示方法,它能直观、形象地表示出两个变量之间的关系. 一次函数的图像是一条直线,已知图像上两点即可画出一条函数的图像.



王牌例题

如图是一名学生推铅球时,铅球运动的曲线图,其中 S 表示铅球运动的水平距离, h 表示铅球运动的高度.

(1) 这个图像反映了哪两个变量之间的关系,指出其中的自变量及函数.



(2) 当 $S = 3$ 时, h 是多少?

(3) 当 $h = 2$ 时, S 是多少?

(4) 当 S 取 $0 \sim 8$ 米时, S 取一个确定的值,高度 h 确定吗?

【思路导航】 图像是函数的一种表示方法,它表示了两个变量之间的关系,纵轴表示函数值,横轴则表示自变量. 由此可知,这个图像反映了铅球高度 h 与铅球运动的距离 S 的关系,高度 h 是 S 的函数. 图像上的点对应的横坐标即自变量的值,对应的纵坐标即函数的值.



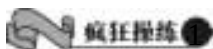
由横坐标可找出图像上的点进而可求纵坐标,反之,由纵坐标找出点也可求横坐标.

解:(1) 这个图像反映了铅球高度 h 与水平距离 S 两个变量之间的关系,其中 S 是自变量, h 是 S 的函数.

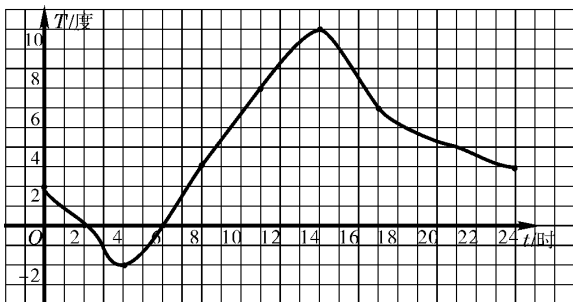
(2) 由图像知 $S=3$ 时, $h=3$.

(3) 当 $h=2$ 时, S 是 0 或 6.

(4) 在 S 的取值范围内, S 取一个确定的值,高度 h 也有一个确定的值与它对应.



1. 下图是某气象站一天气温随时间变化的曲线,回答下列问题:



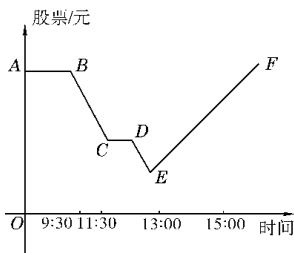
(1) 你能看出 6 时、8 时、18 时的气温各是多少度?

(2) 你能看出这一天的最高气温和最低气温各是多少度?

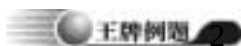
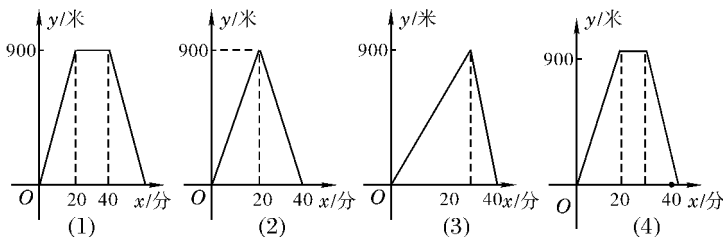
(3) 指出其中的自变量及自变量的函数.

2. 某股票从 9:30 ~ 15:00 股票变化情况如图,则表示上涨的线段是 ()

- (1) AB 和 CD (2) BC 和 DE
(3) CD (4) EF



3. 小明的父亲饭后出去散步,从家中走 20 分钟到一个离家 900 米的报亭看 10 分钟报纸后用 15 分钟返回家里,下面图形中表示小明的父亲离家时间与距离之间的关系是 ()



等腰三角形的周长为 20cm,底边长为 x cm,腰长为 y cm.

- (1) 你能写出 y 与 x 之间的函数关系式吗?
(2) 计算当 $x = 4$ cm 时,腰长 y 的值.
(3) 当腰长为 6cm 时,底边长 x 是多少?

【思路导航】等腰三角形周长即两腰与底边长的和,等腰三角形的两腰相等,因此很容易写出腰长与底边长 x 的函数关系式. 函数的关系式表示了两个变量之间的关系,因此已知其中一个变量代入解析式即可求另一个变量.

解:(1) 由题意得腰长 y 与底边长 x 的关系式为:



$$y = \frac{20 - x}{2} \quad (0 < x < 10)$$

(2) 当 $x = 4\text{cm}$ 时, $y = \frac{20 - 4}{2} = 8 \text{ (cm)}$

(3) 当 $y = 6\text{cm}$ 时, 则 $\frac{20 - x}{2} = 6$,
得 $x = 8 \text{ (cm)}$



疯狂操练

1. 写出等腰三角形的顶角 y (度) 与底角 x (度) 之间的函数关系式. 计算:

(1) 当 $x = 30^\circ$ 时, y 的值.

(2) 当 $y = 100^\circ$ 时, x 的值.

2. 小王骑电瓶车以 10 千米/时的速度由 A 地出发前往距 A 地 100 千米的 B 地.

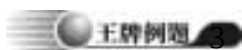
(1) 写出小王距 B 地的路程 S 与所用时间 t 的函数关系式.

(2) 当 $t = 4$ 时 S 的值.

(3) 当 $S = 20$ 千米时 t 是多少?



3. 某小汽车的油箱可装汽油 30L, 原有 10L, 现加油 x L. 如果每升汽油 2.6 元, 求 油箱内汽油的总价 y (元) 与 x (L) 之间的函数关系式.



某校八 (3) 班的同学去离校 8 千米的烈士陵园祭扫烈士墓, 小张因事返回学校, 然后乘出租车前往. 若出租车 3 千米内收费 7 元, 超过 3 千米每千米收费 1.40 元, 小张现有 16 元钱, 问小张能否乘到烈士陵园?

【思路导航】由题意可看出, 乘出租车付费 y (元) 是所乘路程 x (千米) 的函数, 写出函数关系式后, 可从两方面考虑: (1) 求出乘 8 千米路程的费用 y 元与 16 元比较. (2) 也可求出 16 元钱可乘的路程与 8 千米比较.

解 设乘出租车所付费用为 y 元, 所乘路程为 x 千米. 则 y 与 x 的函数关系式为:

$$y = 7 + 1.4(x - 3) \quad (x > 3)$$

$$\text{即 } y = 1.4x + 2.8$$

解法一 当 $x = 8$ 千米时, 所付费用

$$y = 1.4 \times 8 + 2.8 = 14 \text{ (元)} \quad 16 \text{ 元} > 14 \text{ 元}$$

因此, 小张能乘到烈士陵园.

解法二 当 $y = 16$ 时, 则 $16 = 1.4x + 2.8$

$$, \quad x = 9 \frac{3}{7} \text{ (千米)} > 8 \text{ 千米}$$

因此, 小张能乘到烈士陵园.



1. 某种储蓄月利率为 0.15% , 存入 1200 元本金. (1) 求本息和 y (元) 与所存月数 x 之间的函数关系式. (2) 计算 1 年后的本息和. (3) 多少个月后的本息和为 1227 元?

2. 一个小球由静止开始, 从一个斜坡上向下滚动, 其速度每秒增加 2m .
 - (1) 求小球速度 v (m/s) 与时间 t (s) 之间的函数关系式.

 - (2) 求 3.5s 时小球的速度.

 - (3) 多少秒时小球的速度为 16m/s .

3. 从 A 地向 B 地打长途电话, 按时间收费, 3 分钟内收费 2.4 元, 以后每分钟收费 1 元.
 - (1) 求时间 t ($t \geq 3$) 时, 电话费 y (元) 与时间 t (分) 之间的函数关系式.

(2) 当 $t=5$ 分钟时,应付电话费多少元?

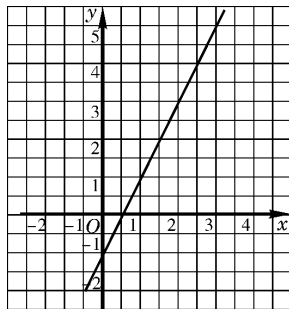
(3) 若所付电话费为 16 元,则所打电话的时间是多少?

王牌例题 4

作一次函数 $y=2x-1$ 的图像,根据图像回答:

- (1) 图像与 x 轴的交点坐标;
- (2) 图像与 y 轴的交点坐标;
- (3) 图像经过哪几个象限?

【思路导航】一次函数的图像是一条直线,因此只要找出图像上两个点,利用两点确定一直线即可画出图像.



解 列表:

x	0	3
y	-1	5

根据表中数据,画一次函数 $y=2x-1$ 的图像如图所示.

由图像知:(1) 图像与 x 轴交点坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$.

(2) 图像与 y 轴交点坐标 $(0, -1)$.

(3) 图像经过第一、三、四象限.



1. 在同一坐标系中,画出下列函数的图像:

(1) $y = 2x + 3$

(2) $y = 2x - 3$

(3) $y = -x + 3$

(4) $y = -x - 3$

观察所画图像围成的图形是什么图形.

2. 作出 $y = 3x + 12$ 的图像,利用图像回答:

(1) 求当 $x = -2, -1, \frac{1}{2}$ 时 y 的值.

(2) 求当 $y = 3, 9, -3$ 时对应的 x 的值.

(3) 求方程 $3x + 12 = 0$ 的解.

3. 作出下列函数的图像.

(1) $y = 3x + 1$

(2) $y = \frac{1}{2}x - 3$

(3) $y = -2x + 5$

(4) $y = -\frac{1}{3}x - 4$

观察其中 y 随 x 增大而增大的函数有哪些?

y 随 x 增大而减小的函数有哪些? 它们各有什么特征?

王牌例题 5

已知函数 $y = \frac{1}{2}x^{m-1} + 2m - 3$

(1) 当 $m =$ _____ 时, 函数是一次函数? 此时函数的图像经过 _____ 象限. y 随 x 的增大而 _____.

(2) 当 $m =$ _____ 时, $y = -2x + \frac{1}{2}m - 3$ 是正比例函数.

【思路导航】(1) 由函数的定义知: 在表示函数的整式中, x 的最高次数为 1, 因此 $m - 1 = 1$

$$, m = 2$$

(2) 正比例函数是 $b = 0$ 时特殊的一次函数, 因此当 $2m - 3 = 0$, 即 $m = \frac{3}{2}$ 时函数是正比例函数.

解: (1) 由 $m - 1 = 1$, _____, $m = 2$

$m = 2$ 时, 函数为 $y = \frac{1}{2}x + 1$, 此时函数图像经过第一、二、三象限, y 随 x 的增大而增大.

(2) 由 $2m - 3 = 0$

$$, m = \frac{3}{2}$$

, 当 $m = \frac{3}{2}$ 时, 函数是正比例函数.

疯狂操练 5

1. 下列各题: (1) 三角形面积一定时, 它的一边与该边上的高; (2) 被除数不变时, 除数与商; (3) 速度不变时, 路程与时间; (4) 圆的半径与圆的面积. 其中两个变量之间是正比例函数的是 _____ (填序号).



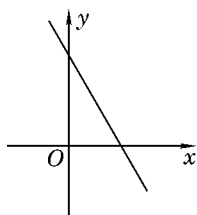
2. 已知一次函数的图像如图, 则 ()

(1) $k > 0, b > 0$

(2) $k > 0, b < 0$

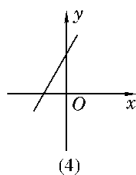
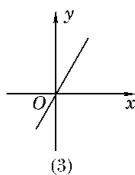
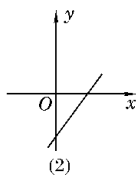
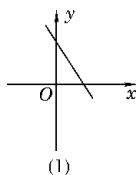
(3) $k < 0, b > 0$

(4) $k < 0, b < 0$



3. $y = mx + m$ 的图像可能是

()



【学后反思】

函数解析式表示为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 形式的函数是一次函数. 当 $b = 0$ 时, 一次函数为正比例函数. 由此可看出正比例函数是特殊的一次函数, 但一次函数不一定是正比例函数.

一次函数的图像一般经过三个象限, 经过哪三个象限, 可由 k, b 的值决定. $k > 0$ 时, 直线是“/”的走向, y 随 x 的增大而增大; $k < 0$ 时, 图像是“h”的走向, y 随 x 增大而减小; $b > 0$ 时, 图像与 y 轴交点在 x 轴上方; $b < 0$ 时, 图像与 y 轴交点则在 x 轴下方.

一次函数图像与 x 轴交点的横坐标即 $y = 0$ 时 x 的值, 即方程 $kx + b = 0$ 的解. 因此我们可以通过解方程 $kx + b = 0$ 求出图像与 x 轴交点的横坐标. 图像与 y 轴交点的纵坐标即 $x = 0$ 时 y 的值, 因此 $y = kx + b$ 的图像与 y 轴交点的坐标是 $(0, b)$ 与 x 轴交点的坐标是 $(-\frac{b}{k}, 0)$.



一次函数 (二)



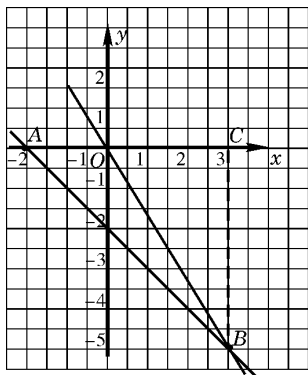
专题简析

一次函数解析式 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中, 有 k 、 b 两个常数, 一次函数的图像和性质由 k 、 b 这两个常数的值确定, 确定 k 、 b 两个字母系数, 则需知道 k 、 b 的两个关系式, 一次函数的图像在实际生活中有很广泛的应用.



王牌例题

已知 $y = kx + b$ 的图像经过两点 $A(-2, 0)$ 、 $B(3, -5)$. (1) 求这个函数的解析式; (2) 在直角坐标系中画出函数的图像; (3) 求 $\triangle AOB$ 的面积.



【思路导航】 求函数解析式就是确定 k 、 b 的值, 因此只要将 A 、 B 两点的坐标代入 $y = kx + b$ 可得关于 k 、 b 的方程组, 解方程组求出 k 、 b . 在直角坐标系中, 描出 A 、 B 两点就可画出函数的图像. 求 $\triangle AOB$ 的

面积,只要知道 OA 的长度及 OA 边上的高,由 A、B 两点的坐标可求出 OA 的长及 OA 边上的高.

解:(1) 将 $x = -2, y = 0$ 及 $x = 3, y = -5$ 代入 $y = kx + b$

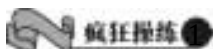
$$\text{得} \begin{cases} -2k + b = 0 \\ 3k + b = -5 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

所以函数的解析式为 $y = -x - 2$

(2) 按已知数据绘出函数的图像如图.

(3) 过 B 作 x 轴的垂线段 BC, C 为垂足,由 B (3, -5) 可知 $BC = 5$,由 A (-2, 0) 可知 $OA = 2$.

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$$



1. (1) 一次函数 $y = kx + b$ 过点 (1, 5) 和 (0, 2), 求 k 和 b.

(2) 已知一次函数 $y = kx + 1$ 的图像过点 (2, -1), 则 $k =$ _____

2. 已知 y 与 $x - 2$ 成正比例, 且 $x = 4$ 时, $y = 2$, 求 y 与 x 的函数关系式.

3. 已知一次函数图像过点 A (1,1)、B (5,9) 两点,问点 (3,7) 是否在该函数图像上?

王牌例题 2

已知一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 A (2, -1) 和函数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 的图像与 y 轴的交点 B,求 k、b 的值.

【思路导航】求 k、b 的值,要知道直线上两个点的坐标,A 点已知,只要求出 B 的坐标就可以了.

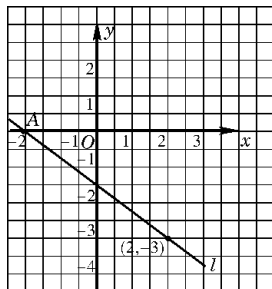
解: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 的图像与 y 轴交点 B 的坐标为 (0,3),

将 $x = 2, y = -1$ 及 $x = 0, y = 3$ 代入 $y = kx + b$ 得: $\begin{cases} b = 3 \\ 2k + b = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} k = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

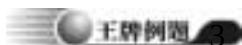
疯狂操练 2

1. 如图,直线 l 是一次函数 $y = kx + b$ 的图像,求 k 和 b 的值.

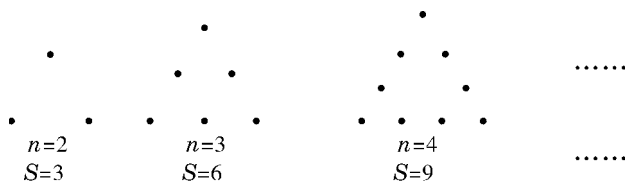


2. 若直线 $y = -x + a$ 和直线 $y = x + b$ 的交点坐标为 $(m, 8)$, 则 $a + b =$ _____.

3. 若一次函数 $y = kx + 4$ 的图像与两坐标轴围成的三角形面积为 16, 求 k 的值.



下列每个图是由若干盆花组成的形如三角形的图案, 每条边 (包括两个顶点) 有 n ($n > 1$) 盆花, 每个图案花盆的总数是 S .



按此规律推断, S 与 n 的关系式是 _____

当 $n = 10$ 时, $S =$ _____

【思路导航】(1) 探求规律 每边 n 盆, 三角形三边为 $3n$ 盆, 此时顶点处重复计算, 减去 3 个顶点, 即得 $S = 3n - 3$.

(2) 猜想 S 是 n 的一次函数, 则可设 $S = kn + b$, 将已知两组数据代入, 求得 k, b 得 S 与 n 的关系式, 再将另外数据代入确认.

解法一 $S = 3n - 3$

解法二 猜想 S 是 n 的一次函数, 设 $S = kn + b$

将 $n = 2, S = 3$; $n = 3, S = 6$ 代入得:

$$\begin{cases} 2k + b = 3 \\ 3k + b = 6 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} k = 3 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$, S = 3n - 3.$$

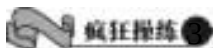
$$\text{当 } n = 4 \text{ 时, } S = 3 \times 4 - 3 = 9.$$

$$, n = 4, S = 9 \text{ 适合 } S = 3n - 3.$$

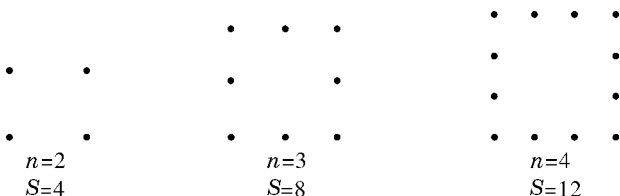


, S 与 n 的关系式是 $S = 3n - 3$.

, 当 $n = 10$ 时, $S = 3 \times 10 - 3 = 27$.



1. 观察下列各正方形图案, 每条边上有 n ($n \geq 2$) 个圆点, 每个图案中圆点的总数是 S .



按此规律, 推断出 S 与 n 的关系式.

2. 某商场经营一批进价为 2 元一件的小商品, 在市场营销中发现此商品的日销售单价 x 元与日销售量 y 件之间有如下关系:

x (元)	3	5	9	11
y (件)	18	14	6	2

(1) 在直角坐标系中, 根据表中提供的数据, 描出实数对 (x, y) 的对应点.

(2) 猜测并确定日销售量 y (件) 与日销售单价 x (元) 之间的函数关系式, 并画出图像.

3. 随着我国人口增长速度的减慢, 小学儿童数量有所减少. 下表中的数据近似地呈现了某地区入学儿童人数的变化趋势, 试用你学的函数知识解决下列问题.

年 份	2000	2001	2002	...
入学儿童人数	2520	2330	2140	...

(1) 求入学儿童人数 y (人) 与年份 x (年) 的函数关系式.

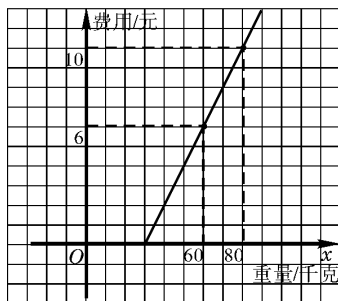
(2) 利用所求函数关系式, 预测该地区从哪一年起入学儿童的人数不超过 1000 人.

王牌例题 4

某地长途汽车客运公司规定旅客可随身携带一定重量的行李, 如果超过规定, 则需要购买行李票, 行李费用 y (元) 是行李重量 x (千克) 的一次函数, 图像如图所示. 求:

(1) y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 旅客最多可免费携带行李的千克数.



【思路导航】 本题需由图像获取信息 (两个点的坐标), 利用待定

系数法可求出一函数的解析式. 由解析式可求出免费 (费用为零) 时 x 的值.

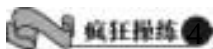
解 : (1) 设一次函数的解析式为 $y = kx + b$.

$$\text{由图像得 : } \begin{cases} 60k + b = 6 \\ 80k + b = 10 \end{cases} \quad \text{解得 : } \begin{cases} k = \frac{1}{5} \\ b = -6 \end{cases}$$

所以, y 与 x 之间的函数关系式为 $y = -\frac{1}{5}x - 6 \quad (x \geq 30)$

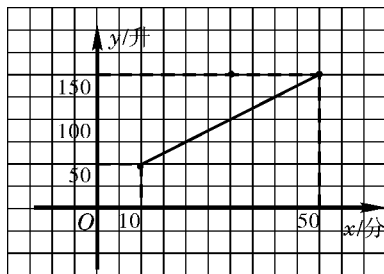
(2) 当 $y = 0$ 时, $\frac{1}{5}x - 6 = 0$, 得 $x = 30$

所以旅客最多可免费携带行李 30 千克.



1. 如图是某学校一电热淋浴器水箱的水量 y (升) 与供水时间 x (分) 的函数图像.

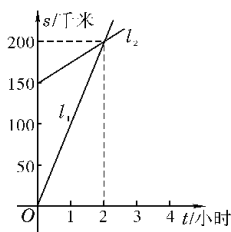
(1) 求 y 与 x 的函数关系式.



(2) 在 (1) 的条件下, 求在 30 分钟时水箱有多少升水?

2. 如图, l_1 、 l_2 分别表示两辆汽车甲、乙的位移 s (千米) 与时间 t (小时) 的关系.

(1) 汽车甲的速度是多少? 汽车甲、乙哪一个速度大?

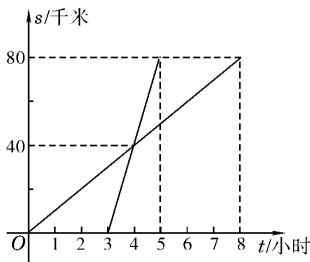


(2) 汽车甲、乙行驶前相距多少千米?

(3) 行驶多长时间后, 甲、乙两辆汽车相遇.

3. 如图表示一骑自行车和一骑摩托车者沿相同路线由甲地到乙地行驶过程的函数图像 (分别为正比例函数和一次函数), 两地间的距离是 80 千米, 请你根据图像回答或解决下面的问题.

(1) 谁出发的较早? 早多长时间?
谁到达乙地较早? 早多长时间?



(2) 两人在途中行驶的速度分别是多少?



(3) 请你分别求出表示自行车和摩托车行驶过程的函数解析式(不要求写出自变量的取值范围)。

(4) 指出什么时间段内两车均行驶在途中(不包括端点),在这一时间段内,请你分别按下列条件列出关于时间 x 的方程(或不等式)(不要化简,也不要求解)。

- ① 自行车行驶在摩托车前面;
- ② 自行车与摩托车相遇;
- ③ 自行车行驶在摩托车后面。

王牌例题

某工厂有甲、乙两条生产线先后投产,在乙生产线投产以前,甲生产线已生产了 200 吨成品;从乙生产线投产开始,甲、乙两条生产线每天分别生产 20 吨和 30 吨成品。

(1) 分别求出甲、乙两条生产线投产后,总产量 y (吨) 与从乙开始投产以来所用时间 x (天) 之间的函数关系式,并求出第几天结束时,甲、乙两条生产线的总产量相同。

(2) 在所示直角坐标系中,作出上述两个函数在第一象限内的图像,观察图像,分别指出第 15 天和第 25 天结束时哪条生产线产量高?

【思路导航】本题的关键是首先写出甲、乙两条生产线的总产量与时间 x 的函数关系式. 总产量相同,即 y 相同,列出方程即可求出

天数 x . 画出图像也不难看出哪条生产线产量高.

解:(1) 根据题意,可得甲、乙生产线总产量与时间 x 的函数关系式:

$$y_{\text{甲}} = 200 + 20x; y_{\text{乙}} = 30x.$$

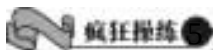
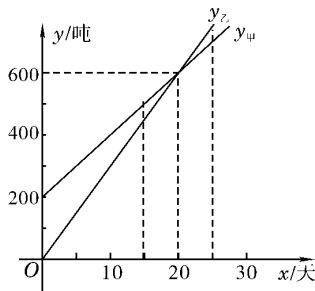
由 $y_{\text{甲}} = y_{\text{乙}}$ 得:

$$200 + 20x = 30x$$

$$, \quad x = 20 \text{ (天)}$$

因此第 20 天结束时,甲、乙两条生产线的总产量相同.

(2) 画出图像如图,由图像可知,第 15 天时 $y_{\text{甲}} > y_{\text{乙}}$; 第 25 天时, $y_{\text{乙}} > y_{\text{甲}}$.



1. 某移动通讯公司开设了两种通讯业务.“全球通”使用者先交 50 元月租费,然后每通话 1 分钟,再付话费 0.4 元.“快捷通”不交月租费,每通话 1 分钟付话费 0.60 元.若一个月通话 x 分钟,两种方式的费用分别为 y_1 元和 y_2 元.

(1) 写出 y_1 、 y_2 与 x 之间的函数关系式.

(2) 一个月内通话多少分钟,两种移动通讯费用相同.

(3) 某人估计一个月通话 300 分钟,应选择哪种移动通讯合算些.

2. 小明用的练习本可以到甲商店购买,也可以到乙商店购买,已知两商店的标价都是每本 1 元,但甲商店的优惠条件是:购买 10 本以上,从第 11 本开始按标价的 70% 卖;乙商店的优惠条件是,从第 1 本开始就按标价的 85% 卖.

(1) 小明要买 20 本时,到哪家商店购买较省钱.

(2) 写出甲商店中,收款 y (元) 关于购买本数 x (本) ($x > 10$) 的函数关系式.

(3) 小明现有 24 元钱,最多可买多少本?

3. 某家电集团公司生产某种型号的新家电,前期投资 200 万元,每生产 1 台这种新家电,后期还需其他投资 0.3 万元,已知每台新家电可实现产值 0.5 万元.

(1) 分别求总投资额 y_1 (万元) 和总利润 y_2 (万元) 关于新家电的总产量 x (台) 的函数关系式.

(2) 当新家电的生产值为 900 台时,该公司的盈亏情况如何?

(3) 请你利用第 (1) 小题中 y_2 与 x 的函数关系式,分析该公司的盈亏情况.

$$\left(\begin{array}{l} \text{注: 总投资} = \text{前期投资} + \text{后期其他投资} \\ \text{总利润} = \text{总产值} - \text{总投资} \end{array} \right)$$

【学后反思】

确定一次函数解析式是函数图像、性质的综合运用. 函数解析式的确定,一般是先设出函数的一般形式,然后应用待定系数法确定系数 k 和 b . 如果题中函数关系不明确时,应先由题中的数据判断函数关系是否是一次函数,再用待定系数法求解. 这是近几年来中考中的热点试题,它突出考查学生根据已知条件获得信息的能力,并根据获得的信息确定函数的解析式,已知其中一个变量即可求出另一个变量.



二元一次方程组 (一)



专题简析

二元一次方程及二元一次方程组的概念中,对未知数的个数及未知项的次数都有一定的要求:含有两个未知数,未知项的次数是1次,使方程组中每一个方程都成立的未知数的值是方程组的解.二元一次方程组的解法的思想是消元:二元化成一元,从而分别求每一个未知数的值.



王牌例题

若 $x^{a-b} - 2y^{a+b-2} = 11$ 是二元一次方程,则 a, b 的值分别是 ()

- (1) 1, 0 (2) 0, -1 (3) 2, 1 (4) 2, -3

【思路导航】二元一次方程的定义是含有两个未知数,且未知项的次数是1次,从而可得:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

答:选 (3)

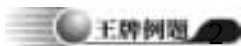


疯狂操练

1. 已知方程 $(k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + (k - 7)y = k + 2$, k 为何值时,方程是一元一次方程; k 为何值时,方程是二元一次方程.

2. 已知方程 $x^{m-1} + 2y^{2m+n-1} = 7$ 是关于 x, y 的二元一次方程, 则 m _____, n _____.

3. 如果 $3x^{2m+5n+9} + 4y^{4m-2n-7} = 2$ 是关于 x, y 的二元一次方程, 则 $(n+1)^{m+1999} =$ _____.

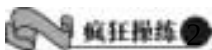


已知方程 $4x - 3y = 5$, 用含 x 的代数式表示 y 的式子是 _____, 当 $x = -\frac{1}{4}$ 时, $y =$ _____.

【思路导航】用含 x 的代数式表示 y , 就是从已知方程中求出 y :

$$4x - 5 = 3y, \quad y = \frac{4x - 5}{3}$$

$$\text{当 } x = -\frac{1}{4} \text{ 时, } y = \frac{4x\left(-\frac{1}{4}\right) - 5}{3} = -2$$



1. 用含 x 的代数式表示 y $2x - 5y = -11$.

2. 已知方程 $(4x+1) - (2y+3) = 3x - 5y$, 用含 y 的代数式表示 x .

3. 求方程 $3x + y = 10$ 的所有正整数解.

王牌例题

已知 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} 2x + y = m \\ nx + 2y = -2 \end{cases}$ 的解, 则 $m^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【思路导航】 已知 $x = -1, y = 0$ 是方程组的解, 即就是说适合方程组中的每一个方程, 把 $x = -1, y = 0$ 代入方程组中形成关于 m, n 的方程, 从而求出 m, n 的值.

$$\begin{cases} 2 \times (-1) + 0 = m \\ -n + 2 \times 0 = -2 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} m = -2 \\ n = 2 \end{cases}$$

$$, \quad m^n = (-2)^2 = 4$$

疯狂操练

1. m 为何值时, 方程组 $\begin{cases} x + y = 5m \\ x - y = 9m \end{cases}$ 的解满足方程 $2x + 3y = 6$.

2. 已知方程组 $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$ 与方程组 $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ ax + by = 6 \end{cases}$ 有相同的解, 求

$(a + b)^{2004}$ 的值.

3. 在关于 x, y 的二元一次方程 $(13x + 4y + 14) + \lambda (5x - 6y + 28) = 0$ 中, 当 λ 变化时, 方程及其解都随之变化, 但无论 λ 取何值时上述方程总有一个固定的解 (即一对 x, y 的值), 你能帮助找出来吗?

王牌例题 4

解下列方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = -4 & \text{①} \\ 5x + 6y = -7 & \text{②} \end{cases}$

【思路导航】解方程组的思想是消元,即消去一个未知数化成一元方程.有两种方法可达到目的:代入消元法和加减消元.

方法一:(代入消元)

由①得 $x = \frac{-4 - 3y}{2}$ ③

③代入②可得 $y = -2$

方法二:(加减消元)

① $\times 2 -$ ②,可得 $x = 1$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$

疯狂操练 4

1. 用代入法解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3(x - 1) = y + 5 \\ 5(y - 1) = 3(x + 5) \end{cases}$

2. 用加减法解方程组:

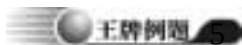
(1) $\begin{cases} 5x + 6y = -5 \\ 5x - y = -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$



3. 解下列方程组：

$$\begin{cases} \frac{m+n}{3} + \frac{n-m}{4} = -\frac{1}{4} \\ \frac{m+8}{6} - \frac{5(n+1)}{12} = 2 \end{cases}$$



$$\text{解方程组} \begin{cases} 23x + 17y = 63 & \text{①} \\ 17x + 23y = 57 & \text{②} \end{cases}$$

【思路导航】对方程观察,发现方程组有特点:系数之和相等,因此采用较特殊的方法来解题.

$$\text{解: } (\text{①} + \text{②}) \div 40 \quad \text{得 } x + y = 3 \quad \text{③}$$

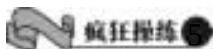
$$\text{原方程组可化成} \begin{cases} 6x + 17x + 17y = 63 \\ 6y + 17x + 17y = 57 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 6x + 17(x + y) = 63 & \text{④} \\ 6y + 17(x + y) = 57 & \text{⑤} \end{cases}$$

$$\text{③代入④,得 } x = 2$$

$$\text{③代入⑤,得 } y = 1$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$



用适当的方法解下列方程组：

$$1. \begin{cases} 7x - 11y = 7 \\ 17x - 13y = -7 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 23x - 31y = 19 \\ 25x - 33y = 23 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{9}{5}(x+y) = 18 \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}(x+y) = 18 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x+2y}{3} + \frac{x-2y}{2} = \frac{17}{6} \\ \frac{x+2y}{3} - \frac{x-2y}{2} = -\frac{13}{6} \end{cases}$$

(1) 利用二元一次方程的定义,可以构造新的方程,求原方程中知字母的值.

(2) 当已知二元一次方程组的解的情况时,可以先求出方程组的解的表达式,再根据解的情况列出关系式,解出未知的系数.

(3) 解二元一次方程时常用的方法是代入消元法、加减消元法，但也要根据题目中具体形式灵活运用.



二元一次方程组 (二)



专题简析

关于二元一次方程组的应用,关键是找到包含全部含义的相等关系,然后用含未知数的代数式来表示相等关系中的每一个量,即把相等关系转化成数学等式.



王牌例题

3月12日植树节,八年级一班同学去植树,如果每人植树3棵,则还有24棵树没有人植;如果每人植树4棵,则还差23棵.问全班有多少学生?植树任务是多少棵?

【思路导航】相等关系是两种分配方式所植树的棵数都等于植树任务:

每人植树3棵 $\times$ 人数 + 24 = 任务

每人植树4棵 $\times$ 人数 - 23 = 任务

解 设全班学生人数是 x 人,植树任务是 y 棵树.

$$\text{据题意: } \begin{cases} 3x + 24 = y \\ 4x - 23 = y \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} x = 47 \\ y = 165 \end{cases}$$

答 全班有47人,一共植树165棵.



疯狂操练

1. 某校有两种类型的学生宿舍36间,较大的宿舍每间可住8人,较小的宿舍每间可住6人,该校现有240名住宿生,恰好住满这36间,问大小两种宿舍各多少间?(设每间宿舍都住满)

2. 一车间共有 90 人,每人平均可加工机轴 15 个或轴承 24 个,如果使每天加工的机轴和轴承配套(两个轴承和一个机轴配成一套),问应如何分配加工机轴和轴承的人数?

3. 某同学到学校上学,如果每小时走 5 千米,可比原定时间提前 6 分钟到校 如果每小时走 4 千米,则要迟到 6 分钟,问该同学从家到校的路程和原来规定路上所用时间是多少?

王牌例题

在西部大开发中,2000 年度西部公路、铁路总投资增至 70 亿元,其中公路投资增加了 25%,铁路投资增加了 15%,已知原计划公路比铁路投资多 8 亿元,问原计划公路、铁路各投资多少亿元?

【思路导航】通过列表来分析说明：

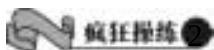
	公路 (亿元)	铁路 (亿元)	总额 (亿元)
原计划投资	x	y	
实际投资	$(1 + 25\%) x$	$(1 + 15\%) y$	70

解 设公路投资 x 亿元, 铁路投资 y 亿元.

据题意
$$\begin{cases} x - y = 8 \\ (1 + 25\%)x + (1 + 15\%)y = 70 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 33 \\ y = 25 \end{cases}$$

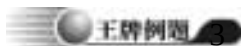
答：原计划公路投资 33 亿元，铁路投资 25 亿元。



1. 两块试验田去年共产大豆 470 千克，改用良种后，今年共产大豆 523 千克，已知第一块田的产量比去年增加 16%，第二块田的产量比去年增加 10%，这两块田改用良种前每块田产量分别是多少千克？今年每块田各增产多少千克？

2. 甲、乙两种拖拉机厂，按计划每月生产拖拉机 460 台，由于两厂都改进了技术，本月甲厂完成计划的 110%，乙厂完成计划的 115%，两厂共生产拖拉机 519 台，本月两厂各超额生产拖拉机多少台？

3. 某中学现有 4200 人，计划一年后初中在校生增加 8%，高中在校生增加 11%，这样全校在校生将增加 10%，问这所学校现在初中和高中在校生各多少人？



南海中学七年级 (1)、(2) 两个班共有 96 人，在一次数学测验中总及格率是 85%，而 (1) 班及格率是 80%，(2) 班及格率是 90%，问

(1) 班、(2) 班各有多少学生？

【思路导航】学生总人数 = (1) 班学生人数 + (2) 班学生人数.

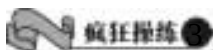
及格总人数 = (1) 班及格人数 + (2) 班及格人数.

解 设 (1) 班有学生 x 人, (2) 班有学生 y 人.

$$\text{据题意} \begin{cases} x + y = 96 \\ 80\%x + 90\%y = 96 \times 85\% \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 48 \\ y = 48 \end{cases}$$

答:(1) 班有学生 48 人, (2) 班有学生 48 人.



1. 已知甲、乙两种商品的原单价和是 100 元,因市场变化,甲商品降低 10%,乙商品提价 5%,调价后,甲、乙两种商品的单价和比原单价和提高了 2%,求甲、乙两种商品的原单价各是多少元?

2. 两个商店以 100 元的相同价格进同一种商品,甲店加价 30% 后出售,乙店加价 20% 后出售,结果乙店销售的件数是甲店的 2 倍,扣除营业税后乙店的总利润比甲店多 1800 元,问甲、乙两店各售出多少件商品(营业税率是营业额的 5%).

3. 某有限公司向工商银行申请了甲、乙两种贷款共计 68 万元,每年需付利息 8.42 万元,甲种贷款每年的利率是 12%,乙种贷款每年的利率是 13%,求两种贷款的数额各是多少?

王牌例题 4

甲、乙两地相距 20 千米, A 从甲地向乙地方向前进, 同时 B 从乙地向甲地前进, 2 小时后两人在途中相遇, 相遇后 A 就返回甲地, B 仍向甲地前进. A 到甲地时, B 离甲地还有 2 千米, 求 A、B 两人的速度各是多少?

【思路导航】整个问题可分成两个阶段 相遇前和相遇后:

相遇前: A 行路程 + B 行路程 = 甲、乙两地距离

相遇后: A 行路程 - B 行路程 = B 离甲地的距离

注意: A 从相遇到返回甲地所用时间等于 A 开始从甲地出发到与 B 相遇的时间相等.

解: 设 A、B 两人速度分别是 x 千米/时、 y 千米/时.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} x = 5.5 \\ y = 4.5 \end{cases}$$

答: A、B 两人的速度分别为 5.5 千米/时、4.5 千米/时.

疯狂操练

1. A、B 两地相距 36 千米, 甲从 A 地出发步行到 B 地, 乙从 B 地出发步行到 A 地, 两人同时出发 4 小时相遇, 6 小时后甲所余路程是乙所余路程的 2 倍, 求两人的速度.

2. 甲、乙两人分别从相距 600 米两地同时出发, 若相向而行, 则经过 $3\frac{3}{4}$ 分钟相遇; 若同向而行, 则乙用 $18\frac{3}{4}$ 分钟可追上甲, 求甲、乙两人速度.

3. 2004 年 4 月 18 日火车大提速后,有货车、客车分别从相距 380 千米的两地出发相向而行. 货车行 2 小时、客车运行了 1.5 小时后两车相遇. 相遇后继续行驶 3 小时它们又相距 720 千米,问客车、货车时速各是多少千米.

王牌例题

现有甲、乙、丙三种货物,若购甲 3 件、乙 7 件、丙 1 件共需要 315 元 若购甲 4 件、乙 10 件、丙 1 件共需要 420 元 若购甲、乙、丙各一件要多少元?

【思路导航】未知量较多,而相等关系少,采用设而不求的方法,通过数学变形求某一整体的值.

解 设三种货物每件分别是 x 元、 y 元、 z 元.

$$\begin{cases} 3x + 7y + z = 315 & \text{①} \\ 4x + 10y + z = 420 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } x + 3y = 105 \quad \text{③}$$

$$\text{①} - \text{③} \times 2 \text{ 得 } x + y + z = 105$$

答 购甲、乙、丙各一件要 105 元.

疯狂操练

1. 有甲、乙、丙三种货物,若购甲 4 件、乙 5 件、丙 1 件共要 230 元 若购甲 7 件、乙 9 件、丙 1 件要 385 元. 问甲、乙、丙三种货物各购一件要多少元?

2. 有一批加工 300 个零件的任务. 甲做 1 天, 乙做 2 天, 丙做 1 天, 这样一共完成总工作量的 $\frac{1}{3}$; 甲做 2 天, 乙做 5 天, 丙做 2 天共可完成 225 个, 问甲、乙、丙三人一起做要几天可以完成全部任务.

3. 甲、乙、丙三个学生一共解出 100 道数学题, 但每人都只解出了其中的 60 道题, 将其中只有 1 人解出的题叫难题, 将三个人都解出的题叫做容易题, 试问难题比容易题多多少题?

【学后反思】

(1) 列方程组解应用题时, 弄清题意和题目中的数量关系是关键. 列二元一次方程组的应用问题都能通过列一元一次方程解得, 但前者更直观、简捷, 易于发掘等量关系.

(2) 列二元一次方程组解应用题时, 一般求解的 n 个未知量就直接设 n 个未知数, 也可多设或少设, 还可以间接设未知数.

(3) 列二元一次方程组解应用题时, 如果所列方程的个数少于未知数的个数时是一个不定方程, 但可以通过变形求出关于未知数的表达式的整体的值.



二元一次方程组(三)



专题简析

图表是近年来考得较多的一类题目,通过图表能给出较多的信息,然后利用这些信息来解决问题.如二元一次方程在坐标中实际反映的是一条直线,直线自然存在相交、平行、重合三种情况,即就是方程组中惟一解、无解和无数解三种情况,也充分反映了数学的数形结合的思想.



王牌例题

在下边的 3×3 方格图中,已有 3 格分别填入 11, 18, 20 三数,如果设中心方格填入的数是 x , 每行、每列、每条对角线上的 3 数之和都等于 y , 那么试用 x 和 y 表示其余各格要填入的数, 并求出 x, y 的值.

11	18	
20	x	

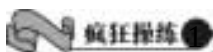
【思路导航】根据题目中条件可用 x 和 y 的代数式表示空格中的数.

11	18	$y - 29$
20	x	$y - 20 - x$
$y - 31$	$y - 18 - x$	$49 - y + x$

然后根据对角线上的 3 数之和等于 y , 列出二元方程组:

$$\begin{cases} y - 29 + x + y - 31 = y \\ 11 + x + 49 - y + x = y \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} x = 15 \\ y = 45 \end{cases}$$

答: x 、 y 的值分别为 15 和 45.



1. 人民公园的门票价格规定如下表所列. 某中学七年级两个班共 104 人去游人民公园, 其中 (一) 班人数较少, 不到 50 人, (二) 班人数较多, 有 50 多人, 经估算如果两班都以班为单位分别购票, 则一共应付 1240 元. 如果两个班联合起来, 作为一个团体购票, 则可以节省不少钱, 问两班各有多少名学生?

购票人数	1 ~ 50 人	51 ~ 100 人	100 以上
每人票价	13 元	11 元	9 元

2. 某训练队进行投篮比赛, 受污损的下表记录了在规定时间内投进 n 个球的人数分布情况:

进球数 (n)	0	1	2	3	4	5
投进 n 个球的人数	1	2	7			2

同时已知进球 3 个或 3 个以上的人平均每人投进 3.5 个球, 进球 4 个或 4 个以下的人平均每人投进 2.5 个球, 问投进 3 个和 4 个球的各有多少人?

3. 下表所示为装运甲、乙、丙三种蔬菜的重量及利润,某汽运公司计划用 20 辆汽车装运甲、乙、丙三种蔬菜 36 吨到外地销售(每辆车按规定满载,每车只装同一种蔬菜,每种蔬菜不少于 1 车),应如何安排,可使公司获利润 18300 元.

	甲	乙	丙
每辆汽车装的吨数	2	1	1.5
每吨蔬菜可获利润(百元)	5	7	4

王牌例题

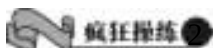
两个同学做数学加减法运算,甲同学把一个加数后面的 0 写丢了,结果是 65,乙同学将同一个加数后面多加了一个 0,结果是 2342,问原来两个加数各是多少?

【思路导航】一个数后面少写了一个 0,则这个数缩小了 10 倍,多写了一个 0,则扩大了 10 倍.

解 设两个加数分别是 x 、 y

$$\begin{cases} \frac{1}{10}x + y = 65 \\ 10x + y = 2342 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 230 \\ y = 42 \end{cases}$$

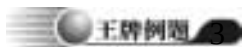
答 原来两个加数各是 230,42.



1. 有一个两位数,除以它的各数位上的数字之和,商 6 余 3 把十位数字和个位数字对调,所得的新数除以它的各数位上的数字之和商 4 余 9,求原来的两位数.

2. 今年小李的年龄是他爷爷的 $\frac{1}{5}$, 小李发现, 12 年之后, 他的年龄变成爷爷的 $\frac{1}{3}$, 试求今年小李的年龄和他爷爷的年龄.

3. 一个箱子中装有若干只蜘蛛与蟋蟀, 每只蜘蛛 8 条腿, 每只蟋蟀 6 条腿, 已知箱内的蜘蛛和蟋蟀共有 46 条腿, 问其中蜘蛛和蟋蟀各有多少只?



方程 $x + 2y = -2$ 有多少组解? 请写出其中一部分? 方程 $2x + y = 2$ 有多少组解? 请写出其中一部分? 在直角坐标系中作出一次函

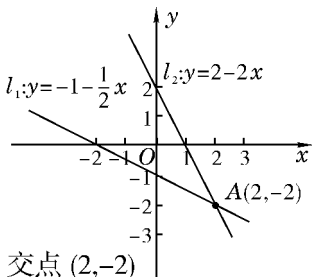
坐标,观察交点坐标与两个方程解的情况?有什么发现?

解 设方程 $x + 2y = -2$ 的解有无数组：

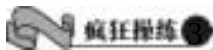
$$\begin{matrix} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} & \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} & \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} & \dots \end{matrix}$$

方程 $2x + y = 2$ 的解有无数组：

$$\begin{matrix} \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} & \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} & \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} & \dots \end{matrix}$$

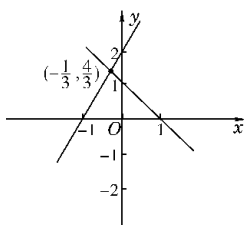


由两个方程组成的方程组的解,就是相应一次函数图像的交点坐标,因此利用一次函数图像,可解二元一次方程组.



1. 利用图像解方程组 $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

2. 图中直线 l_1, l_2 的交点坐标可以看成是方程组 _____ 的解.



3. m, n 为何值时, 方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - my = n \end{cases}$ 有惟

一解、无解、有无数组解. 并在 m, n 的许可范围内取一值画出三种情况下的图像.

王牌例题

如果一次函数的图像与 y 轴交于点 $(0, 4)$, 且它与直线 $x = -2$ 的交点在 x 轴上, 求这个一次函数的解析式.

【思路导航】一次函数的关系式可以用关于 x, y 的二元方程来表示 $y = kx + b$, 又与 y 轴的交点是 $(0, 4)$, 与 $x = -2$ 交在 x 轴上即过点 $(-2, 0)$, 可将已知两点坐标代入 $y = kx + b$, 得到关于 k, b 的方程组, 解方程组即得 k, b 的值.

解 设一次函数的关系式为 $y = kx + b$

由已知得 图像与 x 轴、 y 轴的交点为 $(-2, 0)$ 、 $(0, 4)$

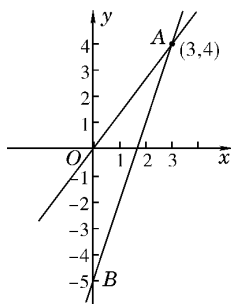
将交点坐标代入关系式得 $\begin{cases} 4 = 0 \times k + b \\ 0 = -2 \times k + b \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

, 一次函数解析式为 $y = 2x + 4$

疯狂操练

1. 一次函数 $y = kx + b$, 当 $x = 2$ 时, $y = 3$; 当 $x = -\frac{3}{2}$ 时, $y = -1$, 求一次函数的解析式.

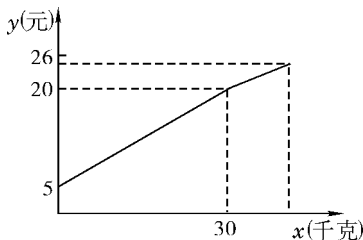
2. 如图,两个函数图像相交于点 $(3,4)$, 且 $OA = OB$, 试求这两个函数的解析式.



3. 在同一坐标系内作出一次函数 $y = 2x - 1$ 和 $y = -2x$ 的图像, 直线 $y = 2x - 1$ 与直线 $y = -2x$ 的交点是 _____, 你能据此求出方程组 $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -2x \end{cases}$ 的解吗?

王牌例题

一农民带了若干千克自产的土豆进城出售, 为了方便, 他带了一些零钱备用, 按市场价售出一些后, 又降价出售, 售出土豆千克数与他手中持有的钱数(含备用零钱)的关系如图所示, 结合图像回答下列问题:



- (1) 农民自带的零钱是多少?
- (2) 降价前他每千克土豆出售的价格是多少?
- (3) 降价后他按每千克 0.4 元将剩余土豆售完, 这时他手中的钱(含备用零钱)是 26 元, 问他一共带了多少千克土豆.

【思路导航】农民自备的零钱就是售出土豆为 0 千克时他手中持有的钱,从图中可以看出 $0 \leq x$ (土豆) ≤ 30 时,农民手中的钱 y (元) 与 x (千克) 的函数关系图像经过点 $(0, 5)$ 和 $(30, 20)$, 利用这一条件, 求出解析式 $y = 5 + 0.5x$, 即土豆单价为 0.5 元. 当 $x \geq 30$ 时, 单价为 0.4 元, 所以 $y = 20 + (x - 30) \times 0.4$, 把 $y = 26$ 代入解出 x .

解: (1) 从图像可知, 农民自备零钱为 5 元.

(2) 设土豆数为 x 千克, 农民手中的钱为 y 元,

当 $0 \leq x \leq 30$ 时, $y = kx + b$ 把 $(0, 5)$ 、 $(30, 20)$ 代入得:

$$\begin{cases} 5 = b \\ 20 = 30k + b \end{cases}, \quad \begin{cases} k = 0.5 \\ b = 5 \end{cases}$$

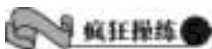
$$y = 0.5x + 5$$

土豆单价为 0.5 元

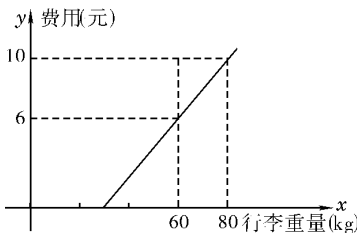
(3) 当 $x \geq 30$ 时, $y = 20 + (x - 30) \cdot 0.4$

把 $y = 26$ 代入解得 $x = 45$.

答: (1) 农民自带 5 元 (2) 降价前价格为 0.5 元 (3) 一共带了 45 千克.



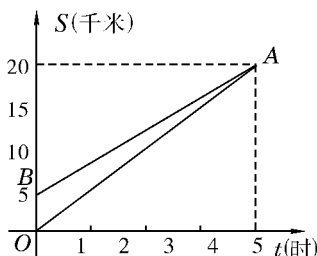
1. 汽车客运公司规定旅客可随身携带一定重量的行李, 如果超过规定, 则要购买行李票, 行李票费用 y (元) 是行李重量 x (千克) 的一次函数, 如图. 求:



(1) y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 旅客最多可免费带行李多少千克?

(1) 甲的速度是 _____ 千米/时.



(2) 两人同时出发,相遇时,甲比乙多走了 千米.

二元一次方程与一次函数有着密切的联系,二元一次方程组的解可以看成是两条一次函数图像(直线)的交点,许多实际问题可以通过建立二元一次方程(一次函数)来解决,也可以通过观察一次函数的图像来解决二元一次方程的问题.



数据的代表 (一)



专题简析

平均数分成算术平均数和加权平均数,而在实际问题中两者的重点不同.算术平均数是反映总体的平均程度,而加权平均数则主要反映一组数据中权重程度.



王牌例题

九个同学比赛跳绳,每人跳的次数如下表,平均每人跳了多少次?

同学编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
跳的次数	179	261	211	198	135	164	156	143	209

【思路导航】平均每人跳绳的次数就是反映九个同学的算术平均数,即是一个总体平均程度.

解:每人跳绳次数

$$= \frac{179 + 261 + 211 + 198 + 135 + 164 + 156 + 143 + 209}{9}$$

$$= 184$$

答:平均每人跳了 184 次.



疯狂操练

1. 爱心小队成员为扶贫捐款情况如下:

姓名	李明	李敏	陈春	马红	张华	王慧	袁华	王丽
钱数(元)	4	9	9	15	12	8	9	10

问平均每人捐款多少元？

2. 红星中学七年级、八年级各班人数如下表：

班级	1	2	3	4
七年级	48	51	53	52
八年级	51	49	54	52

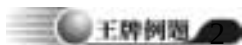
问该校各年级班级平均人数？全校各班平均人数？

3. 政府为了及时了解普通百姓的消费状况,现对三项费用进行统计如下 (一年)：

	水费 (元)	电费 (元)	气费 (元)
王 华	326	676	420
李 云	503	872	475
陈 浩	286	418	346

问 哪户百姓家每月平均费用最高？

每户人家的平均水费、电费、气费各多少元？



小李骑自行车的速度是 15 千米/时,步行的速度是 5 千米/时.

(1) 如果小李先骑自行车 1 小时,然后又步行了 2 小时,则他的平均速度是多少?

(2) 如果先骑车行了 30 千米,然后又步行了 10 千米,则平均速度是多少?

(3) 如果先骑车行了 12 千米,又步行了 0.2 小时,则平均速度是多少?

【思路导航】平均速度是整个运动过程中所通过的路程与时间的比值:

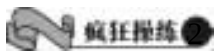
$$\text{解: (1) 平均速度} = \frac{1 \times 15 + 2 \times 5}{1 + 2} = \frac{25}{3} \text{ 千米/时}$$

$$(2) \text{ 平均速度} = \frac{30 + 10}{\frac{30}{15} + \frac{10}{5}} = 10 \text{ 千米/时}$$

$$(3) \text{ 平均速度} = \frac{12 + 0.2 \times 5}{\frac{12}{15} + 0.2} = 13 \text{ 千米/时}$$

答: (1) 平均速度是 $\frac{25}{3}$ 千米/时 (2) 平均速度是 10 千米/时

(3) 平均速度是 13 千米/时



1. 某人骑车通过一段 15 千米的上坡路,用去 2 小时,然后通过一段 25 千米的平路用 1 小时,问此人在这段时间内的平均速度是多少?

2. 轮船在甲、乙两码头之间航行,去时顺水航行,返回时逆水航行,轮船静水速度是 5 千米/时,水速是 1 千米/时. 已知甲、乙两码头之间的距离是 12 千米,问轮船往返的平均速度是多少?

3. 李华骑摩托车去距离 50 千米的省城开会,前 20 分钟走了 20 千米,要在 1 小时内赶到,问后一段路程的速度需要多少千米/时才能及时赶到?整个过程的平均速度是多少?

王牌例题

某居民小区开展节约用水活动,对该区 200 户家庭用水情况分析,3 月份比 2 月份节约用水如下:

节水量 (立方米)	1	1.5	2
户 数	20	120	60

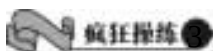
求 3 月份平均每户节约用水多少立方米?哪一数据能较好反映居民的节水量?

【思路导航】平均节水量是用加权平均数来计算,从中可以看出每户节约 1.5 吨水能较好反映居民的节水量情况.

$$\text{解: 平均节约用水} = \frac{1 \times 20 + 1.5 \times 120 + 2 \times 60}{20 + 120 + 60} = 1.6 \text{ (立方米)}$$

答 3 月份平均每户节约用水 1.6 立方米. 每户节约 1.5 吨能较

好反映居民的节水情况.



1. 某班的一次数学测试中 20 名学生的成绩统计如下：

成绩 (分)	50	60	70	80	90
人数 (人)	2	3	4	9	2

试求这 20 名学生的平均成绩？

2. 在韩日世界杯上,中国足球队上场队员的身高 (cm)、年龄如下：

号码	1	2	3	5	8	9	10	12	15	16	17
身高	198	182	183	183	183	183	176	182	181	185	180
年龄	31	23	32	20	28	28	27	28	27	23	31

求中国足球队的平均身高？平均年龄？

3. 小明家的鱼塘中放养了某种鱼苗 2000 条,成活率为 90%,一段时间后准备打捞出售,为了估计鱼塘中的这种鱼的总重量,现从鱼塘中捕捞了三次,得到数据如下：

	鱼的条数	平均每条鱼的重量 (千克)
第一次捕捞	15	1.6
第二次捕捞	15	2.0
第三次捕捞	10	1.8

鱼塘中这种鱼平均每条重量约是_____千克,鱼塘中所有这种鱼的总重量约是_____千克,若将这种鱼不分大小按每千克 7.5 元价格售出,小明家的收入是_____元.

王牌例题

某超市招聘收银员一名,对三名申请人进行了三项素质测试,下面是三名候选人的测试成绩:

测试项目	计算机	商品知识	语言能力
小 赵	70	90	65
小 钱	85	75	60
小 孙	80	35	80

(1) 根据三次测试的平均成绩,谁将被录用?

(2) 根据实际需要,公司将计算机、商品知识、语言能力的成绩分别按 4:3:1 的比例确定各人测试成绩,又是谁被录用?

【思路导航】平均成绩分成算术平均数和加权平均数,它们的侧重点不同.

解:(1) 三次的平均成绩:

$$\text{小赵} \quad \frac{1}{3} (70 + 90 + 65) = 75$$

$$\text{小钱} \quad \frac{1}{3} (85 + 75 + 65) = 73.3$$

$$\text{小孙} \quad \frac{1}{3} (80 + 35 + 80) = 65$$

因此小赵被录用.

(2) 按一定的比例统计:

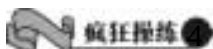
$$\text{小赵的测试成绩} \quad \frac{70 \times 4 + 90 \times 3 + 65 \times 1}{4 + 3 + 1} = 76.875$$

$$\text{小钱的测试成绩} \quad \frac{85 \times 4 + 75 \times 3 + 60 \times 1}{4 + 3 + 1} = 78.125$$

$$\text{小孙的测试成绩} \quad \frac{80 \times 4 + 35 \times 3 + 80 \times 1}{4 + 3 + 1} = 63.125$$

则小钱被录用.

从这个例题可以看出,两种平均数分别反映了两个不同问题,根据实际问题的需要,加权平均数更能说明问题.



1. 八年级有四个班 195 名学生,在一次数学测试中,一班 50 人平均分是 82.4 分,二班 52 人平均分是 80.5 分,三班有 48 人平均分是 85.2 分,四班有 45 人平均分是 84.8 分,问八年级全部学生的平均分是多少分?

2. 红星中学进行广播操比赛,主要评比参加人数、队型是否整齐,动作是否协调,进退场是否有序(每项最高分 10 分).

	人数	队型	动作	进退场
一 班	10	9.5	9	9.2
二 班	10	9	9.4	9.3
三 班	10	9.4	9.2	9.0
四 班	10	9.3	9.1	9.0

(1) 各班的总得分是多少?

(2) 四项成绩按 20%、15%、50%、15% 的比例统计,哪一个班成绩最好.

3. 某校统计学生的学期成绩时由三部分组成:平时成绩占 30%,期中成绩占 30%,期末成绩占 40%,现有一学生平时成绩是 88 分,期中成绩是 92 分,期末成绩是 95 分,试问他的学期总评成绩是多少?另一名同学平时成绩是 86 分,期中成绩是 90 分,如果他期末学习努力,成绩好,能否在学期成绩中超过另一名同学,这时,期末的成绩该是多少?

王牌例题

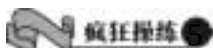
一次体育测验,九年级全年级四个班的平均成绩分别是 $\overline{x_1}$ 、 $\overline{x_2}$ 、 $\overline{x_3}$ 、 $\overline{x_4}$,于是一位同学断言,这次测验全年级的平均成绩是 $\frac{1}{4}(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4})$,你同意这种说法吗?

【思路导航】此题具有一定的探索性,全年级的平均分与各班学生人数有关.应该是年级总分除以年级总人数.

解 这种说法不正确.设四个班的人数分别为 a 、 b 、 c 、 d .

$$\text{则,年级平均分 } \overline{x} = \frac{a\overline{x_1} + b\overline{x_2} + c\overline{x_3} + d\overline{x_4}}{a + b + c + d}$$

所以,不同意这种说法.



1. 如果一组数据 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数是 $\bar{x}$, 则另一组数据 $x_1, x_2 + 1, x_3 + 2, x_4 + 3, x_5 + 4$ 的平均数是 ()

- (1) $\bar{x}$ (2) $\bar{x} + 2$ (3) $\bar{x} + \frac{5}{2}$ (4) $\bar{x} + 10$

2. 设 $\bar{x}$ 是 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ 的平均数, $\bar{y}$ 是 $\sqrt{2}x_1 + \sqrt{3}, \sqrt{2}x_2 + \sqrt{3}, \sqrt{2}x_3 + \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2}x_n + \sqrt{3}$ 的平均数, 则 $\bar{y}$ 与 $\bar{x}$ 的关系式是 ()

- (1) $\bar{y} = \bar{x}$ (2) $\bar{y} = \sqrt{2} \bar{x} + \sqrt{3}$
(3) $\bar{y} = \sqrt{2} \bar{x}$ (4) $\bar{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\bar{y} + 3)$

3. 光明中学七年级一班有学生 47 人, 学生的平均身高是 1.58 米, 小华身高 1.59 米, 但小华说他的身高在全班是中等偏下的, 班上有 26 人比他高, 20 人比他矮, 这可能吗?

【学后反思】

算术平均数和加权平均数都是平均数, 但加权平均数能反映这一组数据中某些数据所产生的影响, 这是算术平均数所不能反映的, 因此在分析数据时要根据题目的需要, 选用哪一种平均数来反映, 来统计.

算术平均数、加权平均数都可通过计算器较简单地进行计算.



数据的代表 (二)



专题简析

一般几个数据按大小顺序排列,处于最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)是这组数据的中位数,这组数据中出现次数最多的那个数据叫做这组数据的众数,通过计算中位数和众数,也能反映这组数据的“平均水平”.它克服了受个别数据而影响平均数的作用,但不能充分利用所有数据的信息.



王牌例题

有 11 名工人某一天生产同一零件,生产的件数是 15,17,14,10,15,17,17,17,16,14,12,设其平均数是 a ,中位数是 b ,众数是 c ,则有 ()

(1) $a > b > c$

(2) $b > c > a$

(3) $c > a > b$

(4) $c > b > a$

【思路导航】 注意正确理解平均数、众数和中位数的概念,利用概念正确求出平均数、中位数和众数.

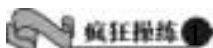
$$\begin{aligned}\text{解 } a &= \frac{15 + 17 + 14 + 10 + \cdots + 12}{11} \\ &= 14.91\end{aligned}$$

把数据按小到大排列 10,12,14,14,15,15,16,17,17,17

$$b = 15 \quad c = 17$$

$$c > b > a$$

答:选 (4)



1. 已知一组数据是 $-1, 0, 4, x, 6, 15$, 且这组数据的众数是 6, 则数据的中位数是 ()

- (1) 5 (2) 6 (3) 4 (4) 5.5

2. 在一次中学生田径运动会上, 参加男生跳高的 17 名运动员的成绩如下:

成绩 (m)	1.5	1.6	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人数	2	3	2	3	4	1	1	1

则这组数据的众数、中位数分别是 ()

- (1) 1.70, 1.70 (2) 1.75, 1.70
(3) 1.70, 1.69 (4) 1.75, 1.69

3. 下表是某班 20 名学生的第一次数学测验的成绩分布情况表:

成绩 (分)	50	60	70	80	90
人数 (人)	1	4	x	y	2

(1) 若成绩的平均数是 73 分, 求 x, y 的值.

(2) 在 (1) 的条件, 设此班 20 名学生成绩众数为 a , 中位数为 b , 求 $a - b$ 的值.



某公司有 15 名员工,他们所在的部门及相应每人所创的年利润如下表所示:

部门	A	B	C	D	E	F	G
人数	1	1	2	4	2	2	3
每人所创年利润 (万元)	20	5	2.5	2.1	1.5	1.5	1.2

根据表中提供的信息填空:

- (1) 该公司每人所创年利润的平均数是_____万元.
- (2) 该公司每人所创年利润的中位数是_____万元.
- (3) 你认为应该用平均数和中位数中哪一个数据来描述该公司每人所创年利润的一般水平?

【思路导航】平均数和中位数是从两个不同的角度反映该公司的年利润情况,要反映该公司每人所创年利润的一般水平,应该使用中位数而不能利用平均数,因为中位数受个别数据影响较小.

解:(1) 平均数 =

$$\frac{1 \times 20 + 1 \times 5 + 2 \times 2.5 + 4 \times 2.1 + 2 \times 1.5 + 2 \times 1.5 + 3 \times 1.2}{15}$$

$$= 3.2$$

(2) 按大到小的顺序排:

20, 5, 2.5, 2.5, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.2, 1.2, 1.2, 中位数是 2.1 万元.

(3) 用中位数能较好反映每人创利的一般水平.



1. 某餐厅共有 7 名员工,所有员工的工资如下:

人 员	经理	厨师甲	厨师乙	会计	服务员甲	服务员乙	勤杂工
人数	1	1	1	1	1	1	1
工资额 (元)	3000	700	500	450	360	340	320

解答下列问题：

- (1) 餐厅所有员工的平均工资是_____元.
- (2) 所有员工的工资中位数是_____元.
- (3) 用哪一个数据描述该餐厅员工工资的一般水平比较恰当.

(4) 去掉经理工资后,其他员工的平均工资是_____元,是否也能反应该餐厅员工工资的一般水平?

2. 七年级某班教室里三位同学正在为谁的数学成绩最好而争论,他们的五次数学成绩如表 I ,这五次数学成绩的平均数、中位数、众数如表 II 所示:

表 I

学生姓名	1	2	3	4	5
小 刘	61	93	94	97	97
小 华	61	61	97	98	99
小 李	39	61	84	98	98

表 II

学生姓名	平均数	中位数	众数
小 刘	88.4	94	97
小 华	83.2	97	61
小 李	76	84	98

现在这三位同学都说自己的数学成绩是最好的.

(1) 请你说明他们各自的理由?

(2) 三人似乎都有道理,你对此有何看法?

请运用所学的知识作出正确的分析.

3. 美国一个工厂职工工资及人数如下表:

人 数	1 (厂长)	2 (副厂长)	2 (科长)	5	12	18	23	5	2
工 资 (美元)	10000	8000	5000	2000	1000	900	800	700	500

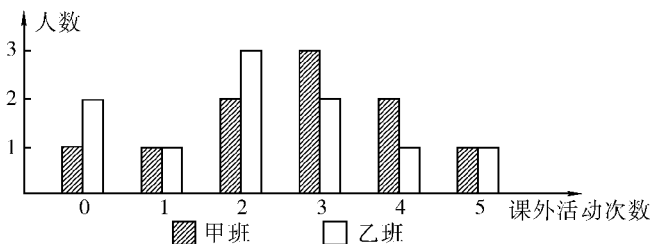
(1) 求月工资的平均数,工厂主用这个平均数作为代表数,为什么?

(2) 求月工资的众数,工会领导用众数作为代表,这是为什么?

(3) 求月工资的中位数,税务员用中位数为代表,这又是为什么?

王牌例题

某校为了了解素质教育的情况,抽查了七年级甲、乙两班的部分学生,了解他们在一周内(星期一至星期五)参加课外活动的次数如下:



(1) 这次活动中,甲班被抽查了_____人,乙班被抽查了_____人.

(2) 被抽查的学生中,甲、乙两班参加活动的平均次数分别是多少?

(3) 根据以上信息,用你学过的知识估计哪个班课外活动较好.

(4) 从图中还能得到哪些信息.

【思路导航】从图中可知甲班被抽查人数是 10 人,乙班被抽查人数是 10 人,甲班学生参加活动的平均数是 2.7 次,乙班学生参加活

动次数是 2.2 次,从平均次数上来看,乙班不如甲班好,甲班活动 2 次有 2 人,3 次有 3 人,乙班活动 2 次 3 人,3 次 2 人,两班中活动开展较好的是甲班.

解:(1) 从图中可以看出甲、乙两班各被抽查了 10 名学生.

(2) 甲班参加活动的平均次数是:

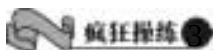
$$\frac{0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 5}{10} = 2.7 \text{ 次}$$

乙班参加活动的平均次数是:

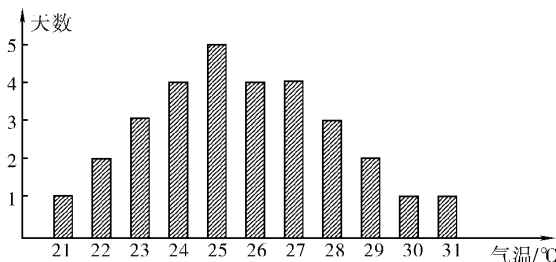
$$\frac{0 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5}{10} = 2.2 \text{ 次}$$

(3) 甲班活动开展较好,参加人数多,活动次数多.

(4) 从图中可以得到两班各有 1 人和 2 人没有参加活动,甲班参加 2 次有 3 人,乙班参加 3 次有 3 人.



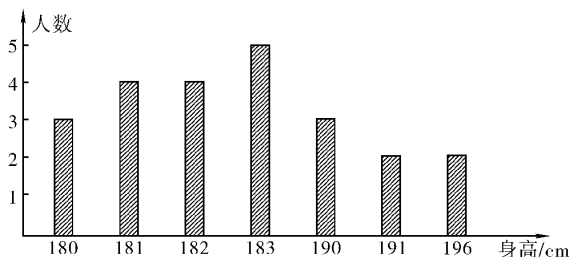
1. 某地区一个月 (30 天) 的每天气温统计如下:



(1) 这个月的平均气温是多少度?

(2) 这个月气温的中位数、众数是多少?

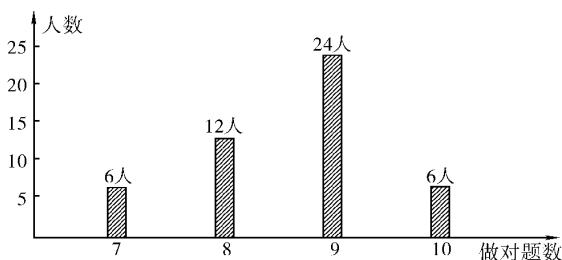
2. 为了备战 2006 年世界杯足球赛,中国足球队主教练选定 23 人入选中国国家足球队,其身高现统计如下:



试求:(1) 中国国家足球队的平均身高;

(2) 身高的中位数、众数各是多少?

3. 数学老师布置 10 道选择题,小王将全班同学的解题情况统计成条形统计图,根据图中所提供的信息数据,求平均每个学生做正确的题目数.



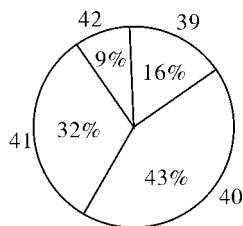
王牌例题 4

某商店销售大小分别是 39, 40, 41, 42 的衬衫, 现将销售情况统计如右扇形图, 你认为该店在今后的进货中应如何选择.

【思路导航】从扇形面积上可以判断出销售情况.

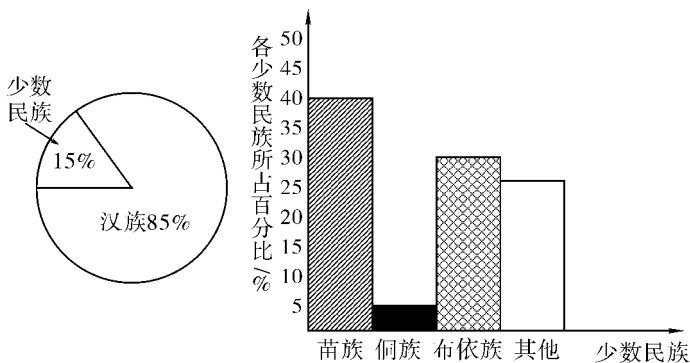
解 根据销售情况, 40, 41 两个尺寸的衬衫销售最理想, 反映市场的需求, 因此在今后的进货中这两种尺寸应占较多比例.

答: 今后应多进取 40, 41 两种规格的衬衫.



疯狂操练 4

1. 贵阳市是我国西部的一个多民族城市, 总人口数是 370 万 (2000 普查统计), 2000 年贵阳市有 40000 名学生参加中考, 如图是贵阳市各民族人口统计图, 请你根据提供的信息回答:



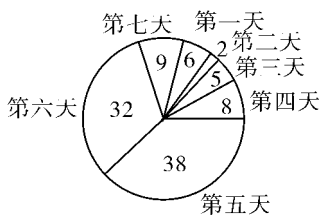
(1) 2000 年贵阳市少数民族总人口数是多少?

(2) 2000 年贵阳市总人口中苗族占的百分比是多少？

(3) 求 2000 年贵阳市参加中考的少数民族学生数？

2. 某商场进某种商品 100 件，一周内全部销售完毕，现将一周内每天销售情况统计如下：

(1) 试问平均每天销售多少件？



(2) 一周中几天达到平均销售的件数？

3. 学期结束前，学校想调查学生对七年级实验教材的意见，特向七年级 300 名学生作问卷调查，其结果如下：

意见	非常喜欢	喜欢	有一点喜欢	不喜欢
人数	150	120	21	9

(1) 计算出每一种意见的人数占总调查人数的百分比。

(2) 请作出反映此次调查结果的扇形统计图.

(3) 从统计图中你能得出什么结论? 说明理由.

王牌例题

如果将 10, 12, 13, 14, 15 依次重复写 18 遍, 会得到一组由 90 个数字组成的一组数据, 请用巧妙的方法计算这组数据的平均数、中位数和众数.

【思路导航】这一组数据共有 90 个数, 其中这五个数各有 18 个, 利用加权平均数公式可以计算出平均数. 可以通过计算器进行运算.

解 利用计算器按键可得平均数是

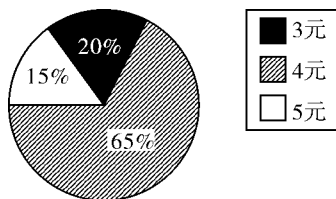
$$\frac{10 + 12 + 13 + 14 + 15}{5} = 12.8$$

中位数是 13, 众数是 10, 12, 13, 14, 15.

答: 平均数是 12.8, 中位数是 13, 众数是 10, 12, 13, 14, 15.

疯狂操练

1. 某饮食公司为一学校提供午餐, 有 3 元、4 元、5 元三种价格的饭菜供师生选择 (每人限定一份), 右图是 4 月份的销售情况统计图, 这个月一共销售了 9800 份饭菜, 则师生购买午餐费用的平



均数、中位数和众数各是多少？

2. 老师想知道学生们每天在上学的路上要花多少时间,于是让大家将每天来校上课的单程时间写在纸上,统计如下(分钟):

20,20,30,15,20,25,5,15,20,10,15,35,45,10,20,25,30,20,15,20,20,10,20,5,15,20,20,20,5,15.

(1) 请画出学生上学单程所花时间出现频数的条形统计图和扇形图.

(2) 利用计算器求所花时间的平均数、中位数、众数.

(3) 假如老师随机地问一个同学,你认为老师最可能得到的回答是多少分钟?

3. 在一些体育比赛中,在所有裁判对某选手给出的评分中,要去掉一个最高分和一个最低分,再对剩下的评分取平均数作为这个选手的最终得分,这是为什么?试举例,并以统计图加以说明.

【学后反思】

求中位数时,先将数据从小到大排列,若数据个数是奇数,中间一个数即为中位数.若数据个数是偶数,中间两个数的平均数即为中位数.求众数时,若数据中有两个数据出现的次数最多(一样多),则这两个数都是这组数据的众数.

平均数、中位数和众数都是描述一组数据集中趋势的特征数,其特点是:平均数的大小与数据中的每一个数据均有关系,任何数的变动都会引起平均数的变动.中位数只与数据的排列位置有关,个别数据对中位数不能产生影响,而众数则反映这一组数据中绝大多数情况,也能摆脱个别数据的变动影响.因此在统计数据时应根据实际需要而选择最能反映问题实质的数据来说明问题,这样才更有意义.



不等关系、不等式的基本性质及解集



专题简析

(1) 用符号“ $<$ ”(或“ $\leq$ ”),“ $>$ ”(或“ $\geq$ ”)连结的式子叫不等式.

(2) 不等式的基本性质:

不等式两边都加上(或减去)同一个整式,不等号的方向不变.

不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数,不等号的方向不变.

不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数,不等号的方向改变.

(3) 使不等式成立的每个未知数的值叫做不等式的解,不等式解的全体叫不等式的解集,求不等式解集的过程叫解不等式.

(4) 用数轴表示不等式的解集要注意两“定”:一是定边界点,二是定方向.若解集包含边界点,则用实心点;解集不包含边界点,则为空心点.相对于边界点而言,大于向右,小于向左.



王牌例题

用不等式表示:

(1) a 的 $\frac{1}{2}$ 与 b 的 $\frac{1}{3}$ 的差是负数.

(2) y 的 2 倍与 1 的和大于等于 3.

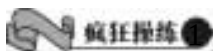
(3) 江苏省的面积比法国的国土面积还大.

【思路导航】列不等式时要注意抓住关键词的意义,如(1)中“负数”; (2)中“大于等于”等;对于没有给出字母的题目可设字母来表示题中的量.

解:(1) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b < 0$

$$(2) 2y + 1 \geq 3$$

$$(3) x > y \text{ (} x \text{ 表示江苏省的面积, } y \text{ 表示法国的国土面积)}$$

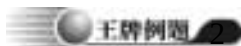


用不等式表示：

$$(1) x \text{ 的一半与 } 4 \text{ 的差小于等于 } x.$$

(2) 美国 F - 15“鹰”式战斗机的空重比俄制 Mig - 21 型战斗机的满载重量的 1.5 倍至少还多 728kg.

$$(3) a \text{ 的 } 3 \text{ 倍的相反数大于 } a \text{ 的相反数的绝对值.}$$



判断下列说法是否正确.

$$(1) \text{ 若 } a < b < 0, \text{ 则 } \frac{1}{2} (b - a) < 0. \quad (\quad)$$

$$(2) \text{ 若 } a < 0, \text{ 则 } -\frac{(a + b)}{2} < -\frac{b}{2}. \quad (\quad)$$

(3) 若 $a < b, c < 0$, 则 $ac + c < bc + c$. ()

(4) 若 $0 < x < 1$, 则 $x^2 > x, \frac{1}{x} < x$. ()

【思路导航】解这类题时要灵活、准确,运用不等式的基本性质.

解:(1) 错. $a < b$, $b - a > 0$, $\frac{1}{2}(b - a) > 0$.

(2) 错: $a < 0$, 根据不等式基本性质 3, 两边同时除以 -2

得 $-\frac{a}{2} > 0$, 再根据不等式基本性质 1, 两边都加 $-\frac{b}{2}$,

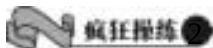
$$-\frac{a+b}{2} > -\frac{b}{2}.$$

(3) 错. $a < b, c < 0$, 根据不等式的基本性质 3, 两边都乘以 c ,

$ac > bc$, 再由不等式基本性质 1, 两边都加上 c ,

$ac + c > bc + c$.

(4) 错. $0 < x < 1$, $x^2 < x, \frac{1}{x} > x$.



1. 判断题:

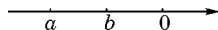
(1) 如果 $a > b$, 那么 $3 - 2a > 3 - 2b$. ()

(2) 如果 $a^2 > b^2$, 那么 $a > b$. ()

(3) 如果 $a > 5$, 那么 $|a - 5| = 5 - a$. ()

(4) 如果 $-\frac{a}{4} > -\frac{b}{2}$, 那么 $a > 2b$. ()

2. 有理数 a, b 在数轴上的位置如图所示:



用不等号填空:

$a - b$ _____ 0 ;

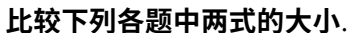
$a + b$ _____ 0 ; ab _____ 0 ;

a^2 _____ b^2 ; $\frac{1}{a}$ _____ $\frac{1}{b}$; $|a|$ _____ $|b|$.

那么“●”、“▲”、“■”

()

- (4)



- (2) $a + b$ 与 $a - b$

【思路导航】比较两式的大小可利用不等式的基本性质,也可用作差法 两个代数式 A, B , 若 $A - B > 0$, 则 $A > B$ 若 $A - B < 0$, 则 $A < B$; 若 $A - B = 0$, 则 $A = B$.

解：(1)

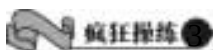
$$, \quad -\frac{2}{3}m + 3 < -\frac{2}{3}n + 3.$$
$$m > n, \quad n - m < 0, \quad \frac{2}{3} (n - m) < 0$$
$$, \quad -\frac{2}{3}m + 3 < -\frac{2}{3}n + 3 \quad (m > n)$$
$$(2) \quad (a + b) - (a - b) = 2b$$

当 $b > 0$ 时, $2b > 0$, $a + b > a - b$,

当 $b < 0$ 时, $2b < 0$, $a + b < a - b$,

当 $b=0$ 时, $2b=0$, $a+b=a-b$.

注 $2b$ 的正负性取决于 b 的取值,分类讨论的思想十分重要.



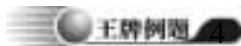
疯狂操练

比较下列各题中两式的大小.

1. $-3x^2 + 2x + 1$ 和 $-3x^2 + 2x - 3$.

2. $\frac{a^2 - b^2 + 2}{2}$ 与 $\frac{a^2 - 2b^2 + 1}{3}$.

3. $x^2 + ax + 1$ 和 $x^2 - x + 1$ ($x > 0$).



王牌例题

判断下列说法是否正确:

(1) 5 是 $y - 7 > 6$ 的解. ()

(2) $x = 4$ 是不等式 $x + 3 > 5$ 的解集. ()

(3) 不等式 $x + 1 < 2$ 有正整数解. ()

【思路导航】要明确不等式的解集和解是不同范畴的概念.

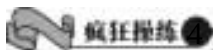
解:(1) 错. 将 5 代入不等式 $5 - 7 < 6$,

5 不是 $y - 7 > 6$ 的解.

(2) 错. $x=4$ 仅是不等式 $x+3 > 5$ 的一个解, 是解集中的一个.

(3) 错. 不论 x 取何正整数, $x+1 \geq 2$,

$x+1 < 2$ 无正整数解.



1. 下列说法正确的是

()

(1) 5 是不等式 $x+5 > 10$ 的解

(2) $x < 5$ 是不等式 $x - 5 > 0$ 的解集

(3) $x \geq 5$ 是不等式 $-x \leq -5$ 的解集

(4) $x > 3$ 是不等式 $x - 3 \geq 0$ 的解集

2. 下列不等式的解集中, 不包括 -4 的是

()

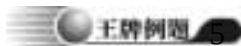
(1) $x \leq -4$

(2) $x \geq -4$

(3) $x \leq -5$

(4) $x \geq -5$

3. 适合 $2 < |x| < 5$ 的整数解有_____.



在数轴上表示出下列不等式的解集.

(1) $x > -1$

(2) x 不大于 2

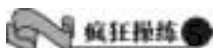
(3) x 小于 3 而不小于 -1

【思路导航】“ $\geq$ ”即“大于或等于”或“不小于”

解:(1)

(2)

(3)



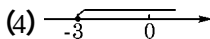
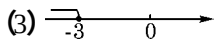
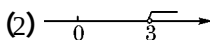
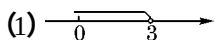
1. 在数轴上表示：

(1) 大于 -2 且不大于 3 的数.

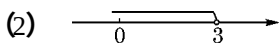
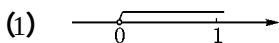
(2) 小于 3 且绝对值不小于 1 的数.

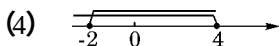
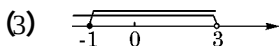
2. 表示 $-3x \leq 9$ 的解集的是

()



3. 根据下图写出不等式的解集：





【学后反思】

一元一次不等式是表示不等关系的最基本的工具,是学习其他不等式的基础,正确理解和运用不等式性质 (3) 是难点也是学生易产生错误的地点. 比较代数式的值的大小是不等式性质的一个应用,其中,求差法比较大小是一常用方法.



一元一次不等式



专题简析

(1) 等号左右两边都是整式,只含有一个未知数并且未知数的最高次数是 1 的不等式叫一元一次不等式.

(2) 解一元一次不等式的步骤:①去分母;②去括号;③移项;④合并同类项;⑤系数化 1.



王牌例题

解不等式 $7 - \frac{2x - 26}{3} > \frac{3x - 14}{4} - x$, 并把解集在数轴上表示出来.

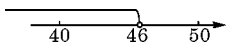
解 去分母得 $84 - 4(2x - 26) > 3(3x - 14) - 12x$

去括号得 $84 - 8x + 104 > 9x - 42 - 12x$

移项合并同类项得: $-5x > -230$

系数化 1 得 $x < 46$

· 表示在数轴上,如下:



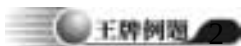
疯狂操练

1. 解下列不等式:

$$(1) \quad x - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3} \left(2 - \frac{x}{4}\right) \geq 2.$$

$$(2) -x - \frac{x}{2} - \frac{2x-6}{3} < 1 - \frac{3x-8}{6}.$$

2. 解关于 x 的不等式 $\frac{1+ax}{2} > \frac{2ax-1}{3} - 2$. ($a \neq 0$)



m 为何正整数时, 关于 x 的方程 $\frac{5x-2m}{4} = \frac{m}{2} - \frac{15}{4}$ 的解是非正数.

【思路导航】先解关于 x 的方程, 再根据解是非负数列出关于字母 m 的不等式, 从而得出 m 的取值, 要注意 m 是“正整数”这一条件.

解 解关于 x 的方程 $\frac{5x-2m}{4} = \frac{m}{2} - \frac{15}{4}$

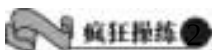
得 $x = m - 3$.

方程的解是非正数

, $m - 3 \leq 0$ 即 $m \leq 3$.

又 m 是正整数

, $m = 1, 2, 3$.



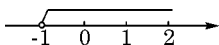
1. 若 m, n 均为有理数, 则不等式 $(-m^2 - 1)x > n$ 的解集是_____.

2. 若 x 是非负数, 则 $-1 \leq \frac{3-2x}{5}$ 的解集是_____.

3. 已知不等式 $5(x-2) + 8 < 6(x-1) + 7$ 的最小正整数解为方程 $2x - ax = 4$ 的解, 求 a 的值.

王牌例题

已知关于 x 的不等式 $2x - a > -3$ 的解集如图所示, 则 a 的值等于 ()



(1) 0

(2) 1

(3) -1

(4) 2

【思路导航】数形结合, 先解关于 x 的一元一次不等式, 再由 $x > -1$ 求 a 的值.

解 解 $2x - a > -3$ 得 $x > \frac{a-3}{2}$

观察数轴, 得 $x > -1$

, $\frac{a-3}{2} = -1$, $a = 1$

答: 选 (2)

疯狂操练

1. 已知单项式 $-35a^{2n}b^{15}$ 的次数高于 $\frac{1}{9}a^5b^{4n}$ 的次数, 则正整数 n 的值为_____.

2. 已知 a, b 为常数, 若 $ax + b > 0$ 的解集是 $x < \frac{1}{3}$, 则 $bx - a < 0$ 的解集是_____.

3. 若关于 x 的不等式 $(2a - b)x + a - 5b > 0$ 的解集为 $x < \frac{10}{7}$, 求

关于 x 的不等式 $ax > b$ 的解集.

王牌例题 4

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = p + 1 \\ 4x + 3y = p - 1 \end{cases}$ 的解满足 $x > y$, 求 p 的取值范围.

【思路导航】根据题意解出 x, y , 再由 $x > y$ 得到关于 p 的不等式, 从而解出 p 的取值范围.

解 解关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = p + 1 \\ 4x - 3y = p - 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = p + 5 \\ y = -p - 7 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x > y, & \quad , \quad p + 5 > -p - 7; \\ , & \quad p > -6. \end{aligned}$$

疯狂操练 1

1. 若方程 $\frac{3x-1}{2} - a = \frac{1-a}{3}$ 的根为 $x=1$, 则不等式

$3ax - \frac{5}{2} \leq 2a$ 的解集为_____.

2. k 满足什么条件时, 方程 $x - \frac{x-k}{2} = 2 - \frac{x+3}{3}$ 的解是正数.

3. 已知关于 x 的不等式 $(4a - 3b)x > 2b - a$ 的解集为 $x < \frac{4}{9}$, 求 $ax > b$ 的解集.

王牌例题 5

在一次“人与自然”知识竞赛中,共有 16 道选择题,评分标准是:答对一题给 6 分,答错一题倒扣 2 分,不答则不扣分.某生有一题未答,那么此同学至少要答对多少题成绩才能在 60 分以上.

【思路导航】与列方程解应用题类似,列不等式解应用性问题关键在找到数量上的不等关系,常要抓住“至少”、“最多”、“不低于”、“最低”、“不足”等关键词.

解 设此生至少要答对 x 题才能有 60 分以上,则答错 $(16 - x - 1)$ 题,由题意有不等关系:

$$\text{答对题数} \times 6 - \text{答错题数} \times 2 > 60$$

$$\text{列出不等式 } 6x - 2(16 - x - 1) > 60$$

$$\text{解得 } x > 11 \frac{1}{4}$$

又 $0 \leq x \leq 15$ 且为整数,
此生至少要答对 12 题.

疯狂操练

1. 小于 88 的两位正整数,其个位数字比十位数字大 4,这样的两位数有 _____ 个.

2. 已知前年物价涨幅(即前年比上一年即大前年物价增加的百分比)为 20%,去年物价的涨幅为 15%,预计今年物价涨幅比去年物

价涨幅降低 5 个百分点,为使明年物价比大前年物价不高出 55%,明年物价涨幅最少比今年降低几个百分点?

3. 某校需刻录一批电脑光盘,若到电脑公司刻,每张需 8 元(包括空白光盘费)若学校自刻,除租用刻录机需 120 元外,每张还需要成本费 4 元,问刻录这样的光盘,到电脑公司刻费用省还是自刻费用省?

【学后反思】

解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程有相似之处,但在系数化 1 时要特别注意,如果两边都乘(除)以同一个负数,则根据不等式基本性质 3,不等号的方向要改变. 讨论含有字母系数的方程根的情况,一般可以转化为一个解不等式的问题.



一元一次不等式与一次函数



专题简析

(1) 函数、方程、不等式都是刻画现实世界中量与量之间变化规律的.

(2) 通过作一次函数 $y = kx + b$ 的图像观察可得, 当 $x > -\frac{b}{k}$ 时, $y > 0$; 当 $x = -\frac{b}{k}$ 时, $y = 0$; 当 $x < -\frac{b}{k}$ 时, $y < 0$.

(3) 解一元一次不等式 $ax + b > 0$ 或 $ax + b < 0$ 可以直接利用解不等式的方法来解, 也可以运用一次函数的图像来解.

(4) 可以运用解不等式来帮助研究解决一次函数的问题.



王牌例题

某服装厂现有 A 种面料 70 米, B 种面料 52 米, 现计划用这两种面料生产 M、N 两种型号的时装共 80 套. 已知做一套 M 号时装需用 A 种布料 0.6 米, B 种布料 0.9 米, 可获利 45 元, 做一套 N 号时装需 A 种布料 1 米, B 种布料 0.4 米, 可获利 50 元, 若设生产 N 型号时装的套数为 x , 用这批布料生产这批时装所获利润为 y 元.

(1) 求 y (元) 与 x (套) 的关系式并求出 x 的取值范围.

(2) 此服装厂生产的这批时装中, 当 N 型号时装多少套时, 所获利润最大? 最大利润是多少?

【思路导航】N 型号时装为 x 套, M 型号时装为 $(80 - x)$ 套, 这批时装所获的利润可表示为 $45(80 - x) + 50x$, 即 $y = 45(80 - x) + 50x$, 再根据面料的条件限制, 求出 x 的取值范围, 80 套服装所需 A 种布料 $0.6(80 - x) + 1.1x$, 所需 B 种布料 $0.9(80 - x) + 0.4x$, 这样可列

不等式组

$$\begin{cases} 0.6(80-x) + 1.1x \leq 70 \\ 0.9(80-x) + 0.4x \leq 50 \end{cases}$$

解不等式组可得 x 的取值范围.

解:(1) $y = 45(80-x) + 50x$

$$\text{即 } y = 50x + 3600$$

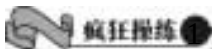
$$\text{由题意得 } \begin{cases} 0.6(80-x) + 1.1x \leq 70 \\ 0.9(80-x) + 0.4x \leq 50 \end{cases}$$

解之得 $40 \leq x \leq 44$

(2) 在 $y = 5x + 3600$ 中, x 越大, y 越大.

, 当 $x = 44$ 时, y 的最大值为 3820 元.

答:(1) $y = 50x + 3600, 40 \leq x \leq 44$. (2) 当生产 44 套 N 型号时装时, 获利最大, 最大利润为 3820 元.



1. 小明用 100 元去购买笔记本和钢笔共 30 件, 已知笔记本每本 2 元, 每枝钢笔 5 元, 那么小明最多能买 _____ 枝钢笔.

2. 某自行车保管站在某周日接受保管的自行车共有 3500 辆次, 其中变速车保管费为每辆一次 0.5 元, 一般车保管费为每辆一次 0.3 元.

(1) 若设一般车停放的辆次为 x , 总的保管费为 y 元, 试写出 x 与 y 的关系式.

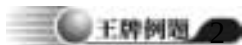
(2) 若估计前来停放的 3500 辆次自行车中变速车的辆次不小于 25% 但不大于 40%, 试求该保管处该周日收入保管费总数的范围.

3. 某公司在甲、乙两座仓库分别有农用车 12 辆和 6 辆,现需要调往 A 县 10 辆,调往 B 县 8 辆,已知从甲仓库调运一辆农用车到 A 县和 B 县的运费分别为 40 元和 80 元;从乙库调一辆农用车往 A 县和 B 县的运费分别为 30 元和 50 元.

(1) 设从乙仓库调往 A 县农用车 x 辆,求总运费 y 关于 x 的函数关系式.

(2) 若要求总运费不超过 900 元,问共有几种调运方案?

(3) 求出总运费最低的调运方案,最低运费是多少元?



在双休日,某公司决定组织 48 名员工到附近一水上公园坐船游园,公司先派一个人去了解船只的租金情况,此人看到的情况如下表:

船型	每船限载人数 (人)	租金 (元)
大船	5	3
小船	3	2

那么怎样设计租船方案才能使所付租金最少?

【思路导航】分类讨论只租大船和只租小船所花费用,并列方程用函数关系式表示既租大船又租小船所花费用,再由 48 名员工这一限制条件,可知此种情况下租几只大船费用最省,最后,横向比较三种方案哪种最省钱.

解 如果只租大船,则需船只数为 $\frac{48}{5}$,因不能超载,故需租大船 10 只,需租金 30 元.

如果只租小船,则需船 $\frac{48}{3}=16$ 只,所付租金为 32 元.

若租大船 x 只,小船 y 只,所付租金为 A 元,则

$$\begin{cases} 5x + 3y = 48 \\ A = 3x + 2y \end{cases} \quad \text{得} \quad A = -\frac{1}{3}x + 32$$

A 随 x 的增大而减小, $0 < 5x < 48$ 且 x 为正整数,
 $x=9$ 时, $A_{\text{最小}}=29$ 此时 $y=1$

答 租 9 只大船、1 只小船时,费用最省.



1. 某糖果店新进 60kg 散装糖果,为获得更多利润,商店决定将其包装后再出售,现有 3kg 装和 2kg 装两种包装盒,每只的成本分别为 0.8 和 0.6 元.

(1) 若全部用 3kg 装,共需包装成本_____元.

若全部用 2kg 装,共需包装成本_____元.

(2) 若考虑到顾客需求,商店要求 2kg 装的奶糖不少于 20kg,怎样设计方案才能使包装成本最省? 最省成本多少元(说明理由)?

2. 某校组织师生春游,如果单独租用 45 座客车若干辆,刚好坐满,如果只租用 60 座客车,则可少一辆且余 30 个空座位.

(1) 求该校参加春游的人数.

(2) 已知 45 座客车的租金为每辆 250 元,60 座客车的租金为每辆 300 元,此次春游同时租用这两种客车,其中 60 座客车比 45 座客车多租一辆,此时租金比单独租用任意一种车都要节省,按这种方案需用租金多少元?

3. 某商场计划拨款 9 万元从厂家购进 50 台电视机,已知该厂家生产三种不同型号的电视机,出厂价分别为:甲种每台 1500 元,乙种每台 2100 元,丙种每台 2500 元.

(1) 若商场同时购进其中两种不同型号电视机共 50 台,用去 9 万元,请你研究一下商场的进货方案.

(2) 若商场销售一台甲种电视机可获利 150 元,销售一台乙种电视机可获利 200 元,销售一台丙种电视机可获利 250 元,在同时购进两种不同型号电视机的方案中,为使销售时获利最多,应选择何种方案?

(3) 若商场准备用 9 万元同时购进三种不同型号的电视机 50 台,请设计进货方案.

王牌例题

某商店积压了 100 件某种商品,为使它们尽快脱手,该商店采用了如下销售方案:将价格提高到原来的 2.5 倍,再作三次降价处理.第一次降低 30%,标出“亏本价”;第二次降价 30%,标出“破产价”;第三次降价 30%,标出“跳楼价”,三次降价处理销售结果如下表:

降价次数	一	二	三
销售件数	10	40	一扫而光

问:(1) 跳楼价与原价的百分比是多少?

(2) 该商品按新销售方案销售,相比原价全部销售完,哪种方案更盈利?

【思路导航】用函数表示出新旧两种方案后比较它们的大小.

解:设原售价 x 元/件

(1) 则跳楼价占原价的百分比为

$$\frac{2.5x(1-30\%)^3}{x} \times 100\% = 85.75\%$$

(2) 原方案总销售额为 $y_1 = 100x$,新方案的总销售额为

$$y_2 = 2.5x(1-30\%) \times 10 + 2.5x(1-30\%)^2 \times 40 +$$

$$2.5x(1-30\%)^3 \times (100 - 10 - 40) = 109.75x$$

$$x > 0, y_1 < y_2$$

答:(1) 跳楼价与原价的百分比是 85.75%. (2) 新方案更盈利.

疯狂操练

1. 北京故宫博物院内宾门票每位 10 元,20 人以上(含 20 人)的团体票 8 折优惠,现有 18 位游客买 20 人的团体票,问比买普通票总共便宜了多少钱?不足 20 人时,多少人买 20 人的团体票才比普通票便宜?

2. 从鄂州到武汉有新旧两条公路可走,一辆最多可载乘客 19 人的依维柯汽车在两公路上行驶的相关数据如下表:

	路程 (km)	耗油量 (L/100km)	票价 (元/人)	过路费 (元/辆)	油价 (元/L)
新路	60	14	16	20	2.9
旧路	64	10	12	5	2.9

(注: 1L/100km 表示汽车每行驶 100km 耗油 1L)

(1) 如果用 y_1 (元)、 y_2 (元) 表示汽车从鄂州到武汉分别是新路、旧路时司机的收入,仅就上表写出 y_1 、 y_2 与载客人数的关系式.

(2) 你认为司机选择哪条路才能收入较多?

3. 项王故里的门票价规定如下表:

购票人数	1 ~ 50 人	51 ~ 100 人	100 人以上
每人门票价	5 元	4.5 元	4 元

某校七年级甲、乙两班共 105 人 (其中甲班人数多于乙班人数) 去游项王故里,如果两班均以班级为单位分别购票,则一共需付 486 元.

(1) 如果两班联合起来作为一个团体,则可节省多少钱?

(2) 两班各有多少学生?

王牌例题 4

为加强节水意识,某市制订了以下用水收费标准:每户每月用水未超过 7m^3 时,每立方米收费 1.0 元,并加收 0.2 元的城市污水处理费,超过 7m^3 的部分,每立方米收费 1.5 元并加收 0.4 元的城市污水处理费.

设某户每月用水量为 $x(\text{m}^3)$ 应交水费为 y (元).

(1) 分别写出用水未超过 7m^3 和超过 7m^3 时 y 和 x 的函数关系.

(2) 如果某单位共有用户 50 户,某月共交水费 541.6 元且每户的用水量均未超过 10m^3 ,求这个月用水未超过 7m^3 的用户最多可能有多少户?

【思路导航】根据题意,本题构造的是分段函数,当 $0 \leq x \leq 7$ 时,
 $y = (1.0 + 0.2)x$. 当 $x > 7$ 时, $y = (1.5 + 0.4)(x - 7) + 7(1.0 + 0.2)$,
 列方程时要注意对号入座.

解:(1) 由题意 $0 \leq x \leq 7$ 时 $y = (1.0 + 0.2)x$ 即 $y = 1.2x$

$x > 7$ 时 $y = (1.5 + 0.4)(x - 7) + 7(1.0 + 0.2)$

即 $y = 1.9x - 4.9$

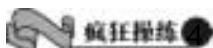
(2) 设这个月未超过 7m^3 的用户最多 x 户得

$$(50 - x) \cdot (5.7 + 8.4) + 8.4x = 541.6$$

, $x = 28.67$. 若 $x = 29$ 此时交费的最大数额为

$$29 \times 8.4 + 21 \times 14.1 = 539.7 < 541.6$$

, $x = 28$.



1. 某市宽带上网的收费方式有流量方式 (按在网上所接受和发送的信息收费)、时间方式 (按在网上的时间收费) 等几种不同的方式,其中流量方式的收费标准是:基本月租费 75 元,赠送 900M 流量 (即每月流量在 900M 以内不再收费),超过 900M 的部分按流量分段收费,具体规定为:流量不超过 400M 时每 M 收费 a 元,超过 400M 时,不超过部分按每 M 收费 a 元,超过部分每 M 收费 c 元,某单位今年 4、5 月份上网的流量和费用如下表:

月份	流量 (M)	费用 (元)
4	1200	135
5	1400	165

(1) 求 a 、 c 的值.

(2) 设该单位每日上网的流量为 x (M),费用为 y (元),写出流量超过 1300 (M) 时, y 与 x 之间的函数关系.

2. 某校组织学生去距校 6km 的科技馆参观,学生王红因事没能乘上学校的包车,于是准备在校门口乘出租车至科技馆,出租车的收费标准如下:

里 程	收费 (元)
3km 以下 (含 3km)	8.00
3km 以上每增加 1km	1.80

(1) 写出出租车行驶的里程数 $x \geq 3$ (km) 与费用 y 之间的关系式

(2) 王红身上仅有 14 元, 乘到科技馆够不够? 说明理由.

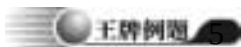
3. 电力公司为了鼓励居民用电, 采用了分段计费的方法计算电费, 每月用电不超过 100 度时, 按每度 0.57 元计算, 每月用电超过 100 度时, 其中 100 度仍按原标准收费, 超过部分按每度 0.50 元计费.

(1) 设月用电 x 度, 应交电费 y 元, 当 $x \leq 100$ 和 $x > 100$ 时分别写出 y 与 x 的函数关系式.

(2) 小王家第一季度交纳电费情况如下:

月份	一月份	二月份	三月份	合 计
交费金额	76 元	63 元	45 元 6 角	184 元 6 角

问小王第一季度共用电多少度?



某批发商欲将一批海产品由 A 地运往 B 地, 汽车货运公司和铁路货运公司均开办海产品运输业务, 已知运输路程为 120km, 汽车和火车的速度分别为 60km/h、100km/h, 两货运公司的收费项目及收费

标准如下表所示：

运输工具	运输费单价	冷藏费单价	过路费	装卸及管理费
汽 车	2 (元 / (t · km))	5 (元 / (t · h))	200 (元)	0 (元)
火 车	1.8 (元 / (t · km))	5 (元 / (t · h))	0 (元)	1600 (元)

[注：“元 / (t · km)”表示每吨货物每千米的运费；“元 / (t · h)”表示每吨货物每小时的冷藏费.]

(1) 设该批发商待运的海产品有 x (t)，汽车货运公司和铁路货运公司所要收取的费用分别为 y_1 (元) 和 y_2 (元)，试求 y_1 和 y_2 与 x 的关系式；

(2) 若该批发商待运的海产品不少于 30t，为节省费用，他应选择哪个公司承担运输任务？

[思路导航] 理解表格的信息，所反映出的各数量的含义是列出函数关系式的关键，汽车的运输费应考虑运输费 $2 \times 120x$ 、冷藏费 $5 \times \frac{120}{60}x$ 、过路费

200，所以 $y_1 = 200 + 2 \times 120x + 5 \times \frac{120}{60}x$ 。火车运费应考虑运输费 $1.8 \times 120x$ 、

冷藏费 $5 \times \frac{120}{100}x$ 、装卸费 1600，所以 $y_2 = 1600 + 1.8 \times 120x + 5 \times \frac{120}{100}x$ 。

解：(1) 由题意得 $y_1 = 200 + 2 \times 120x + 5 \times \frac{120}{60}x = 250x + 200$

$$y_2 = 1600 + 1.8 \times 120x + 5 \times \frac{120}{100}x = 222x + 1600$$

(2) 分三种情况讨论：

①若 $y_1 > y_2$ 即 $250x + 200 > 222x + 1600$ 解得 $x > 50$

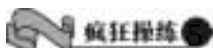
②若 $y_1 = y_2$ 即 $250x + 200 = 222x + 1600$ 解得 $x = 50$

③若 $y_1 < y_2$ 即 $250x + 200 < 222x + 1600$ 解得 $x < 50$

综上所述，当所运海产品不少于 30t 且不足 50t 时应选择汽车货运公司。

当所运海产品刚好 50t 时可选择铁路与公路运输公司中的任意一家。

当所运海产品多于 50t 时应选择铁路货运公司承担运输任务。



1. 为加快教学手段现代化,某校计划购置一批电脑,已知甲公司的报价为每台 5800 元,优惠条件是购买 10 台以上,则从第 11 台开始可按报价的 70% 计算. 乙公司的报价也是每台 5800 元,但每台均按报价的 85% 计算,假如你是学校负责人,在电脑品牌、质量、售后服务等完全相同的情况下,如何选择(说明理由)?

2. 某商场计划投入一笔资金采购一批商品,经市场调查发现,如果月初出售可获利 15%,并可用本和利再投资其他商品到月末又可获利 10%. 如果月末出售可获利 30%,但要付出仓储费用 700 元,请问根据商场的资金状况,如何购销获利最多?

3. 甲、乙两个体育用品商店出售同样的乒乓球拍和乒乓球,乒乓球拍每副定价 20 元,乒乓球每盒定价 5 元,现两商家搞促销活动,甲店:买一副球拍赠一盒乒乓球;乙店:按定价的 9 折优惠,某班级需球拍四副,乒乓球若干盒(不少于 4 盒).

(1) 设购买乒乓球盒数为 x (盒), 在甲店购买的付款数为 y_1 (元), 在乙店购买的付款数为 y_2 (元), 分别写出在两家店购买的付款数与乒乓球盒数 x 之间的关系式.

(2) 就乒乓球盒数讨论在哪家商店购买合算.

【学后反思】

不等式的应用问题是近年来的中考命题的热点, 解决此类问题的关键是找准不等关系列不等式或不等式组, 也可和一次函数结合, 利用解不等式求自变量的取值范围, 还可比较函数值的大小, 求函数的最大或最小值.



一元一次不等式组



专题简析

(1) 关于同一个未知数的几个一元一次不等式合在一起,就组成了一个一元一次不等式组. 一元一次不等式组中各个不等式解集的公共部分叫做一元一次不等式组的解集,其在数轴上表示为各一元一次不等式解集的重合部分.

(2) 由一元一次不等式组成的一元一次不等式组经化简，最终可归纳为四种基本类别：设 $a < b$ ，则

$$\textcircled{1} \begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}; \quad \textcircled{2} \begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}; \quad \textcircled{3} \begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}; \quad \textcircled{4} \begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}.$$

利用数轴可确定它们的解集也可借助“同大(于)取大(数);同小(于)取小(数);小(于)大(数)大(于)小(数)取中间,大(于)小(数)小(于)大(数)是空集”的口诀来分析.

， ①、②、③、④的解集分别为① $x > b$;② $x < a$;③ $a < x < b$;
④无解.



王牌例题

解下列不等式组并在数轴上表示解集.

$$(1) \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}x + 1 & \text{①} \\ 3x < 2x + 3 & \text{②} \end{cases}$$

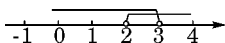
$$(2) \begin{cases} \frac{1}{2}(x+4) < 1 & \textcircled{1} \\ \frac{x+2}{2} > \frac{x+3}{3} & \textcircled{2} \end{cases}$$



解：(1) 由①得 $x > 2$

由②得 $x < 3$

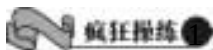
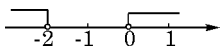
， 原不等式组的解集为 $2 < x < 3$



(2) 由①得 $x < -2$

由②得 $x > 0$

， 原不等式组无解.



解下列不等式组：

$$1. \begin{cases} \frac{1}{2}(5x - 1) < 3 + 2x \\ 3x + \frac{1}{2} < -2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{5}{4}x - 1 < x - 1 \\ \frac{3 - 2x}{3} > 2 - x \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x - 1 > 3x - 4 \\ -\frac{1}{3}x \leq \frac{2}{3} - x \end{cases}$$

并求出它的整数解的和.

王牌例题

求同时满足 $6x + \frac{5}{7} > 4x + 7$ 和 $\frac{2}{3}x - \frac{25}{6} < \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$ 的 x 的整数
值.

【思路导航】“同时满足”说明要求两个不等式组成的不等式组的解集,再确定其整数解.

解 由题意得:

$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{25}{6} < \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{②}$$

由①得 $x > 3\frac{1}{7}$

由②得 $x < 11\frac{3}{4}$

, $3\frac{1}{7} < x < 11\frac{3}{4}$

, x 的整数值为 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

疯狂操练

1. 求同时满足 $2(x+2) + 1 > -3$ 和 $\frac{7}{3} + 2x < 8 - \frac{x}{4}$ 的非负整数解.

2. 已知 $4a + 5$ 和 $2a + 1$ 的符号相同, 求 a 的取值范围.

3. 当 k 为何值时, 方程组 $\begin{cases} 3x - 5y = k \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ 的解 x, y 都是负数.

王牌例题

解不等式组 $\begin{cases} x > a + 1 \\ x < 2a - 1 \end{cases}$

【思路导航】解含字母系数的不等式(组)要对字母系数进行讨论.

解: 当 $a + 1 \geq 2a - 1$ 即 $a \leq 2$ 时, 原不等式组无解.

当 $a + 1 < 2a - 1$ 即 $a > 2$ 时, 原不等式组的解集为
 $a + 1 < x < 2a - 1$.

疯狂操练

解下列不等式(组):

1. $\begin{cases} x > a \\ 3x + 2 < 4x - 1 \end{cases}$

$$2. 2mx + 3 < 3x + n$$

$$3. \begin{cases} ax - 4 < 8 - 3ax \\ (a+2)x - 2 > 2(1-a)x + 4 \end{cases}$$

王牌例题

若不等式 $(ax - 1)(x + 2) > 0$ 的解集是 $-3 < x < -2$, 求 a .

【思路导航】由有理数的乘法法则,可得 $(ax-1)$ 与 $(x+2)$ 同号,原不等式可转化为不等式组,再由不等式组的解集逆推出参数 a 的值.

解 由题意得

$$(1) \begin{cases} ax - 1 > 0 & \textcircled{1} \\ x + 2 > 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

①

②

或 (2) $\begin{cases} ax - 1 < 0 & \text{①} \\ x + 2 < 0 & \text{②} \end{cases}$

①

②

由已知 $-3 < x < -2$,

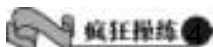
, (1) 舍去 解 (2), 由②得 $x < -2$

根据已知,必有 $a < 0$, 即 $x > \frac{1}{a}$

$$, \quad \frac{1}{a} < x < -2$$

$$, \quad \frac{1}{a} = -3, a = -\frac{1}{3}$$

, a 为 $-\frac{1}{3}$.



1. 若不等式组 $\begin{cases} x > a \\ 3x + 2 < 4x - 1 \end{cases}$ 的解集为 $x > 3$, 则 a 的取值范围是

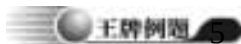
_____.

2. 如果不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 无解, 则不等式组 $\begin{cases} x > 1 - a \\ x < 1 - b \end{cases}$ 的解集是

怎样的?

3. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - a \geq 0 \\ 3 - 2x > -1 \end{cases}$ 的整数解共 5 个, 求 a 的

取值范围.



某工厂工人经过第一次改进工作方法, 每人每天平均加工的零件比原来多 10 个, 因而每人在 8 天内加工了 200 个以上的零件. 第二次改进工作方法, 每天比第一次改进工作方法后多做 27 个零件, 这样只做 4 天, 每人平均所做的零件就超过了前 8 天所做的数量. 试问每个工人原来平均每天做多少零件? 第二次改进工作方法后, 使工作效率提高到原来的几倍?

【思路导航】根据已知,通过列一元一次不等式组求解,再由所做零件数必为整数等隐含条件求出具体的数值.

解 设原来每个工人平均每天加工 x 个零件.

$$\text{由题意, } \begin{cases} 8(x+10) > 200 \\ 4(x+10+27) > 8(x+10) \end{cases}$$

$$\text{解得 } 15 < x < 17$$

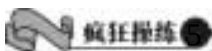
x 是整数

$$, \quad x = 16.$$

$$\text{则 } x + 10 + 27 = 53.$$

提高到原来的 $3\frac{5}{16}$ 倍.

答: 每个工人原来平均每天加工 16 个零件. 第二次改进工作方法后,工作效率提高到原来的 $3\frac{5}{16}$ 倍.



1. 幼儿园有若干件玩具分给小朋友,若每人分 3 件,则最后一人还少若干件,求有多少件玩具,有多少个小朋友?

2. 据《中国青年报》1993 年 10 月 9 日报导:国家计委专家预测,今后国民经济若按 $8\% \sim 9\%$ 的速度递增,到 2000 年,我国能源缺口将约达 5 ~ 6 亿吨标准煤,占当年总需求量的 25%,试求出 2000 年我国能源的总需求量约为多少亿吨标准煤?



3. 某宾馆底层房间比二楼少 5 间,某旅游团共有 48 人,若全部安排住底层,每间住 4 人,房间不够,每间住 5 人,有房间没住满;又若全安排住二楼,每间住 3 人,房间不够,每间住 4 人,有房间没住满,问该宾馆有客房多少间?

【学后反思】

准确解不等式是解不等式组的基础,不等式组的四种基本类型及它们的解集需准确掌握,一些实际问题可以通过列不等式组来解决,其关键是找准不等关系.



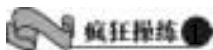
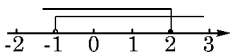
不等式 (综合)



解不等式组
$$\begin{cases} x+2(x-1) \leq 4 & \text{①} \\ \frac{1+4x}{3} > x & \text{②} \end{cases}$$
 并把解集在数轴上表示出来.

来.

【思路导航】在数轴上表示不等式 (组) 的解集时, 必须先解每一个不等式, 再求不等式组的解集, 在数轴上表示时, 要注意端点是实心还是空心.

解 由①得 $x \leq 2$ 由②得 $x > -1$, 原不等式组的解集为 $-1 < x \leq 2$.

1. 解下列不等式 (组) 并把解集在数轴上表示出来.

(1) $x - 2 \geq \frac{3x - 5}{4}$

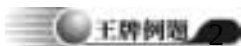
(2)
$$\begin{cases} 3(x+1) > 4x+2 \\ \frac{x}{2} \geq \frac{x-1}{3} \end{cases}$$



2. 已知不等式组
$$\begin{cases} x > -1 \\ x < 1 \\ x < 1 - k \end{cases}$$

(1) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 不等式组的解集是 _____ ; 当 $k = 3$ 时, 不等式组的解集是 _____ ; 当 $k = -2$ 时, 不等式组的解集是 _____ .

(2) 由 (1) 知, 不等式组的解集随 k 的变化而变化, 当 k 为任意实数时, 写出不等式组的解集.



已知 $(x+3)^2 + |3x+y+m| = 0$ 中, y 为负数, 求 m 的取值范围.

【思路导航】 对于形如 $|m| + n^2 = 0$ (或 $|m| + |n| = 0$ 或 $m^2 + n^2 = 0$) 的等式, 当且仅当 $m = n = 0$ 时, 等号成立, 由此可求出 x , 再根据 $y < 0$, 求出 m 的取值范围.

解 由题意得:

$$\begin{cases} x+3=0 & \text{①} \\ 3x+y+m=0 & \text{②} \end{cases}$$

由①得 $x = -3$, 将 $x = -3$ 代入②得:

$$y + m = 9$$

$$, y = 9 - m, y < 0, \therefore 9 - m < 0$$

$$\text{即 } m > 9$$

$$, m > 9$$



1. 已知 $\left| 2x - 24 \right| + \left| 3x - y - k \right| = 0$, 若 $y < 0$, 求 k 的值.

2. 已知 $(x - 2)^2 + \left| 3x - y + k \right| = 0$

(1) 当 k 为何值时, $y \geq 0$;

(2) 当 k 为何值时, $y < -3$.

3. 如果 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 是方程 $(ax + by - 12)^2 + \left| ax - by + 8 \right| = 0$ 的解,

求不等式组 $\begin{cases} x - a > \frac{13x + 14}{b} \\ ax - 3 < x + 3 \end{cases}$ 的解集.

王牌例题

已知方程组 $\begin{cases} 3x + y = 1 + 3m & \text{①} \\ x + 3y = 1 - m & \text{②} \end{cases}$ 的解满足 $x + y > 0$, 那么 m 的取值范围是_____.

【思路导航】此题可先解出方程组的解(字母 m 的表达式), 再由 $x + y > 0$ 列不等式, 从而求出 m 的取值范围 或直接将①、②相加, 得 $x + y$ 的表达式.

解法一 解方程组 $\begin{cases} 3x + y = 1 + 3m \\ x + 3y = 1 - m \end{cases}$

$$\text{得 } x = \frac{1 + 5m}{4}$$

$$y = \frac{1 - 3m}{4}$$

$$x + y > 0, \text{ 即 } \frac{1 + 5m}{4} + \frac{1 - 3m}{4} > 0$$

$$\frac{2 + 2m}{4} > 0$$

$$, 2 + 2m > 0$$

$$m > -1$$

解法二 : ① + ② 得 $4x + 4y = 2 + 2m$

$$x + y = \frac{2 + 2m}{4}$$

$$x + y > 0, \text{ 即 } \frac{2 + 2m}{4} > 0$$

$$, 2 + 2m > 0$$

$$, m > -1$$

显然解法二更简单明了.



1. 若方程 $\frac{4x-1}{4} = \frac{2x+a}{3} + 1$ 的根为 $\frac{3}{4}$, 求不等式 $7 - \frac{2x-26}{a} >$

$\frac{ax-14}{4} - x$ 的解集.

2. m 为何值时, 方程组 $\begin{cases} mx - y - 5 = 0 \\ 2x + 3my - 7 = 0 \end{cases}$ 的解为 $x > 0, y < 0$.

3. 已知整数 x 满足不等式 $3x - 4 \leq 6x - 2$ 和 $\frac{2x+1}{3} - 1 < \frac{x-1}{2}$,

并且满足方程 $3(x+a) - 5a + 2 = 0$, 试求 $5a^7 - \frac{1}{2a}$ 的值.

王牌例题 4

若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} > x-1 & \text{①} \\ x-k < 0 & \text{②} \end{cases}$ 的解集为 $x < 2$, 则 k 的

取值范围是_____.

【思路导航】这是一道已知结论求未知系数的考题,可应用不等式组求解集的规律确定未知数系数.

解 由①得 $x < 2$

由②得 $x < k$

不等式的解集为 $x < 2$,

根据同小(于)取小(数), $k \geq 2$.

疯狂操练 1

1. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x+6}{5} > \frac{x}{4} + 1 \\ x+m < 0 \end{cases}$ 的解集为 $x < 4$, 则 m 的取

值范围是_____.

2. 若不等式组 $\begin{cases} 2x-a < 1 \\ x-2b > 3 \end{cases}$ 的解集为 $-1 < x < 1$, 则 $(a+1)(b-1)$

的值等于_____.

3. 如果关于 x 的不等式 $(2m-n)x - m - 5n > 0$ 的解集为 $x < \frac{10}{7}$,

那么不等式 $mx > n$ ($m \neq 0$) 的解集为_____.

王牌例题 5

现有三种合金,第一种含铜 60% 和含锰 40%,第二种含锰 10% 和含镍 90%,第三种含铜 20%,含锰 50% 和含镍 30%,现各取适量的这三种合金,组成一块含镍 45% 的新合金,重 1kg.



- (1) 试用新合金中第一种合金的重量表示第二种合金的重量.
- (2) 求新合金中第二种合金重量的范围.
- (3) 求新合金中含锰的范围.

解 设第一种合金 x kg, 第二种合金 y kg, 第三种合金 $(1 - x - y)$ kg.

$$(1) \quad 90\%y + 30\%(1 - x - y) = 45\%$$

$$, \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad \text{由 (1) 得 } 1 - x - y = 1 - x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}x$$

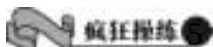
$$, \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{3}{4} - \frac{3}{2}x \leq 1 \end{cases} \quad \text{解得 } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

代入得 $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$ 即第二种合金重量在 $\frac{1}{4}$ kg 与 $\frac{1}{2}$ kg 之间.

$$\begin{aligned} (3) \quad \text{新合金中含锰质量: } & 40\%x + 10\%y + 50\%(1 - x - y) \\ &= 50\% - 10\%x - 40\%y \\ &= 50\% - 10\%x - 40\%\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \\ &= 40\% - 30\%x \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$, \quad 25\% < 40\% - 30\%x < 40\%$$



1. 韩日世界杯期间,某市球迷一行 56 人从旅馆乘出租车到球场为中国队加油,现有 A、B 两个出租车队,A 队比 B 队少 3 辆车,若全部安排乘 A 队的车,每辆坐 5 人车不够,每辆坐 6 人,有车未坐满;若全坐 B 队的车,每辆车坐 4 人车不够,每辆坐 5 人有车未坐满,则 A 队有出租车_____辆.

2. 某商品的标价比成本高 25%,当该商品降价销售时,售价的折扣不得超过_____%.

3. 某园林门票每张 10 元,一次使用,考虑到人们的不同需求,也为了吸引更多的游客,该园林除保留原售票方法外,还推出购买个人年票的售票方法(个人年票从购买日起,可供持票者使用一年)年票分 A、B、C 三类:A 类每张 120 元,持票人进入园林时无须再购买门票;B 类年票每张 60 元,持票人进入园林时,须再购买门票,每张 2 元;C 类年票 40 元,持票人进入园林时须购买门票每次 3 元.

(1) 如果你只选择一种购买门票的方式,并计划一年中用 80 元花在门票上,试通过计算,找出可使进入园林次数最多的购票方式;

(2) 求一年中进入该园林超过多少次,购买 A 类年票比较划算.



分解因式 (一)



专题简析

(1) **分解因式** 把一个多项式化成几个整式的积的形式,这种变形叫做把这个多项式分解因式.

(2) **公因式** 多项式各项都含有的相同因式,叫做这个多项式的公因式.

(3) **提公因式法** 如果一个多项式的各项含有公因式,那么就可以把这个公因式提出来,从而将多项式化成两个因式乘积的形式.这种分解因式的方法叫做提公因式法.



王牌例题

下列由左到右的变形,哪些是分解因式?哪些不是?为什么?

(1) $-5x^2y^3 = -5xy \cdot (xy^2)$

(2) $x^2 - 9 + 8x = (x+3)(x-3) + 8x$

(3) $x^2 - 3x - 5 = x(x-3 - \frac{5}{x})$

(4) $-x^2 + 2xy = -x(x-2y)$

【思路导航】 解答此题的关键在于正确理解分解因式的概念及它与整式乘除法的区别与联系.

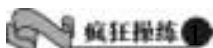
解: (1) 等式左边不是多项式.

(2) 的右边不是乘积的形式.

(3) 的右边不是整式的积.

(4) 把多项式 $-x^2 + 2xy$ 化成了 $-x$ 与 $(x-2y)$ 不可再分解的整式的乘积的形式.

, (4) 是,其余均不是.



1. 判断下列各式从左到右的变形是否是因式分解, 是的用“ $\checkmark$ ”表示, 不是的用“ $\times$ ”表示.

(1) $x^2 + 2x - 3 = x(x + 2) - 3$ ()

(2) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ()

(3) $m^3 - m^2 + m = m(m^2 - m)$ ()

(4) $4x^3 - 16x^2 - 4x = 4x(x^2 - 4x - 1)$ ()

2. 选择题: 下列从左到右的变形, 是分解因式的是 ()

(1) $(x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$

(2) $a^2 - 4a - 5 = (a - 2)^2 - 9$

(3) $a^2 + 1 = a(a + \frac{1}{a})$

(4) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

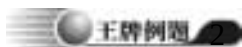
3. 下列从左到右的变形中错误的是 ()

(1) $(y - x)^2 = (x - y)^2$

(2) $-a - b = -(a + b)$

(3) $(m - n)^3 = -(n - m)^3$

(4) $-x + y = -(x + y)$

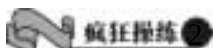


$539^2 - 439 \times 539$ 能被 100 整除吗? 为什么?

【思路导航】所谓能被 100 整除, 是指这个数分解因数后含有因数 100, 如果含有因数 100 则结论成立.

$$\begin{aligned} \text{解: } & 539^2 - 439 \times 539 \\ &= 539 \times (539 - 439) \\ &= 539 \times 100 \end{aligned}$$

所以, $539^2 - 439 \times 539$ 能被 100 整除.



1. $2005^2 - 2005 \times 5$ 能被 2000 整除吗? 它还能被哪些正整数整除? 试举 5 例.

2. 计算:

$$\frac{2000^3 - 2 \times 2000^2 - 1998}{2003^3 + 2000^2 - 2001}$$

3. 计算:

(1) $21 \times 3.14 + 6.2 \times 31.4 + 0.17 \times 314$

(2) $4.3 \times 199.9 + 76 \times 19.99 - 0.19 \times 1999$

(3) $\frac{2001 \times 0.3 + 200.1 \times 57 - 20.01 \times 610}{667 \times 0.5 + 66.7 \times 7 - 6.67 \times 110}$



王牌例题

指出下列多项式中各项的公因式：

(1) $3a^2b^5 - 6a^3b^4$

(2) $8x^2y^2 - 12xy^2 + 24xy^3z$

(3) $15a(x-y)^3 + 10b(x-y)^4$

(4) $21a^2b(2x-3y)^2 - 14a(3y-2x)^2$

【思路导航】(1) 正确找出多项式各项的公因式是提公因式法的关键,找多项式各项公因式的方法是:① 公因式的系数是多项式系数的最大公约数;② 字母取多项式各项中都含有的相同的字母;③ 相同字母的指数取该字母在各项中指数最小的那一个.(2) 多项式各项的公因式可以是单项式,也可以是多项式.

解 各项的公因式分别是:(1) $3a^2b^4$; (2) $4xy^2$; (3) $5(x-y)^3$;

(4) $7a(2x-3y)^2$

疯狂操练

1. 指出下列多项式中各项的公因式：

(1) $4x^8 - 12x^5 + 24x^3$

(2) $20x^2y^2z - 25x^2y^3 + 35x^3y^2$

(3) $3ab^3 + 6a^2b^2 + 12a^3b$

2. 写出下列各式的公因式：

(1) $-35(x+y)$ 与 $42(x+y)$

(2) $(b-a)^2$, $(a-b)(a-c)$, $(b-a)(b+c)$

3. 整式 $(x+y-z)(x-y+z) + (y-x+z)(y-x-z)$ 有公因式吗？若有，请找出来.

王牌例题

将下列各式分解因式：

(1) $9x^2 - 6xy + 3xz$

(2) $-4m^3 + 16m^2 - 26m$

(3) $4a^2 + 6ab + 2a$

(4) $-8a^{m+2}b^3 + 12a^{m+3}b^2 + 16a^{m+4}b$

【思路导航】解这类题的第一步是运用例1所介绍的方法找公因式，第二步是提取公因式. 当多项式的第一项是负数时，一般先提出“-”号，使括号内的第一项的系数为正数，在提出“-”号时要注意括号内的各项都要变号. 当多项式中的某一项恰好是各项的公因式时，很容易误解为此项提公因式后就没有了，从而漏掉一项“1”，如例题中(3)应避免错为 $4a^2 + 6ab + 2a = 2a(2a + 3b)$.

解：(1) $9x^2 - 6xy + 3xz$

$$= 3x \cdot 3x - 3x \cdot 2y + 3x \cdot z$$

$$= 3x (3x - 2y + z)$$

(2) $-4m^3 + 16m^2 - 26m$

$$= - (4m^3 - 16m^2 + 26m)$$

$$= - (2m \cdot 2m^2 - 2m \cdot 8m + 2m \cdot 13)$$

$$= - 2m (2m^2 - 8m + 13)$$

(3) $4a^2 + 6ab + 2a$

$$= 2a \cdot 2a + 2a \cdot 3b + 2a \cdot 1$$

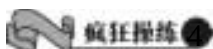
$$= 2a (2a + 3b + 1)$$

(4) $-8a^{m+2}b^3 + 12a^{m+3}b^2 + 16a^{m+4}b$

$$= - (8a^{m+2}b^3 - 12a^{m+3}b^2 - 16a^{m+4}b)$$

$$= - (4a^{m+2}b \cdot 2b^2 - 4a^{m+2}b \cdot 3ab - 4a^{m+2}b \cdot 4a^2)$$

$$= - 4a^{m+2}b (2b^2 - 3ab - 4a^2)$$



1. 把下列各式分解因式：

(1) $8a^3b^3c - 6a^3b^3c^3 + 4a^4b^2c^2$

(2) $\frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{8}a^2b + \frac{1}{3}ab$

(3) $8a^mb^3 + 12a^{m+1}b^2 + 16a^{m+2}b$

2. (1) $-4x^4y - 6x^2y^3 + 2xy^4$

(2) $-5ab^2 + 10a^2b - 15ab^3$

(3) $-10x^2y - 5xy^2 + 15xy$

3. (1) $36abx - 8ab^2x + 4ax$

(2) $2x^2y + 5xy^2 - xy$

(3) $3x^2 - 6xy + x$

王牌例题

把下列各式分解因式：

$$(1) a(a-b) + b(b-a)$$

$$(2) (2a+b)(2a-3b) - a(-2a-b)$$

$$(3) 6a^2(x-2a)^2 - 3a(2a-x)^3$$

【思路导航】多项式的公因式可以是一个单项式,也可以是一个多项式.若将某个多项式看做一个整体(如本例(1)中的 $a-b$),那么这个多项式就可作为一个公因式提出来了.这时应注意下列各式的应用: $(b-a)^{2n+1} = -(a-b)^{2n+1}$, $(b-a)^{2n} = (a-b)^{2n}$ (其中, n 为正整数).提取公因式后,剩下的另一个因式要进行化简,有公因式的还需提出公因式,每个因式必须分解到不能分解为止.

解:(1) $a(a-b) + b(b-a)$

$$= (a-b) \cdot a + (a-b) \cdot (-b)$$

$$= (a-b) \cdot (a-b)$$

$$= (a-b)^2$$

$$(2) (2a+b)(2a-3b) - a(-2a-b)$$

$$= (2a+b)(2a-3b) + a(2a+b)$$

$$= (2a+b) \cdot (2a-3b) + (2a+b) \cdot a$$

$$= (2a+b)(2a-3b+a)$$

$$= (2a+b)(3a-3b)$$

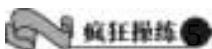
$$= 3(2a+b)(a-b)$$

$$(3) 6a^2(x-2a)^2 - 3a(2a-x)^3$$

$$= 6a^2(x-2a)^2 + 3a(x-2a)^3$$

$$= 3a(x-2a)^2(2a+x-2a)$$

$$= 3ax(x-2a)^2$$



1. 把下列各式分解因式：

$$(1) \quad a(x-y) - b(y-x) - c(x-y)$$

$$(2) \quad m^2(p-q) + m(q-p)$$

$$(3) \quad 2x(a-2b+3c) - 3y(2b-a-3c)$$

2. 分解因式：

$$(1) \quad 3a(x-4y) - 4b(4y-x) - 5c(x-4y)$$

$$(2) \quad (3p-4q)(7p-2q) + (5p-4q)(4q-3p)$$

$$(3) \quad 2x(a-b)(a-c) - 4y(b-a)(c-a)$$

3. 分解因式：

$$(1) a(b-a)^3 - b(a-b)^2$$

$$(2) -24x^2(3x-y)^2 - 6x(y-3x)$$

$$(3) x(a-3)^n - y(3-a)^n \quad (\text{其中, } n \text{ 为任意自然数})$$

【学后反思】

(1) 提公因式法是分解因式的基本方法,其关键是正确地确定各项的公因式.

(2) 公因式可以是单项式,也可以是多项式.把相同字母的式子作为公因式提出来时,要统一字母的排列顺序,且要注意符号的变化.

(3) 因式分解后,若含有相同的因式,一定要写成幂的形式.

(4) 提出公因式后,剩下的另一个因式必须加以整理,去括号,合并同类项,结果中不能带有中括号,若合并同类项后还有公因式,应继续提出,保证每一个因式分解彻底,直到不能再分解为止.



分解因式 (二)



专题链接

能运用平方差公式和完全平方公式对多项式进行因式分解.



王牌例题

分解因式：

$$(1) \quad x^2 - 9y^2$$

$$(2) \quad -x^2 + \frac{1}{25}y^2$$

【思路导航】本题两小题均是二项式,这两项符号恰好相反,且它们都能写成某个整式的平方的形式,这些正符合平方差公式的特征,故可运用平方差公式来分解因式.

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad x^2 - 9y^2 &= x^2 - (3y)^2 \\ &= (x + 3y)(x - 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad -x^2 + \frac{1}{25}y^2 &= \left(\frac{1}{5}y\right)^2 - x^2 \\ &= \left(\frac{1}{5}y + x\right)\left(\frac{1}{5}y - x\right) \end{aligned}$$



疯狂操练

1. 把下列各式分解因式：

$$(1) \quad -1 + \frac{4}{9}m^2$$

$$(2) \frac{16}{49}x^2 - \frac{1}{25}y^2$$

2. 把下列各式分解因式：

$$(1) -x^6 + 4y^2$$

$$(2) y^2 - 0.16x^2$$

3. 分解因式：

$$(1) 16x^2 - 49y^4$$

$$(2) -36x^2 + 121y^2$$

王牌例题

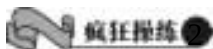
分解因式：

$$(1) -1 + a^4$$

$$(2) (2x - 5y)^2 - 4x^2$$

【思路导航】 本题两小题可当做二项式(把 $2x - 5y$ 看成一个整体), 只需适当整理即是平方差 $a^2 - b^2$ 的形式, 可以运用平方差公式来分解.

$$\begin{aligned}
 \text{解: (1)} \quad & -1 + a^4 = a^4 - 1 = (a^2)^2 - 1 \\
 & = (a^2 + 1)(a^2 - 1) = (a^2 + 1)(a^2 - 1^2) \\
 & = (a^2 + 1)(a + 1)(a - 1) \\
 \text{(2)} \quad & (2x - 5y)^2 - 4x^2 \\
 & = (2x - 5y)^2 - (2x)^2 \\
 & = [(2x - 5y) + 2x][(2x - 5y) - 2x] \\
 & = -5y(4x - 5y)
 \end{aligned}$$



1. 分解因式：

$$(1) \quad 25 - (3a + b)^2$$

$$(2) \quad (3x - 4y)^2 - (4x - 3y)^2$$

2. 分解因式：

$$(1) \quad 16a^4 - 64b^4$$

$$(2) \quad 3(x^2 - y^2)^2 - \frac{1}{3}x^2y^2$$

3. 分解因式：

$$(1) \quad 4(m - n)^2 - 9(m + n)^2$$

$$(2) 4(a+2b)^2 - 25(a-b)^2$$

王牌例题 3

把下列各式分解因式：

$$(1) 1 - 6xy + 9x^2y^2$$

$$(2) 9(x-y)^2 + 12(x-y) + 4$$

【思路导航】 本题的两小题都是三项式（将 $x-y$ 看做一个整体），从项数看与完全平方公式相符，再看能否凑成 $a^2 \pm 2ab + b^2$ 这个形式。可以按“先两边，后中间”的步骤进行，即先确定 a^2 、 b^2 ，再看中间的项能否写成 $\pm 2ab$ 的形式。

解：(1) $1 - 6xy + 9x^2y^2$

$$= 1^2 - 2 \cdot 3xy + (3xy)^2$$

$$= (1 - 3xy)^2$$

$$(2) 9(x-y)^2 + 12(x-y) + 4$$

$$= [3(x-y)]^2 + 2 \cdot 3(x-y) \cdot 2 + 2^2$$

$$= [3(x-y) + 2]^2$$

$$= (3x - 3y + 2)^2$$

疯狂操练

1. 把下列各式分解因式：

$$(1) 9x^2 - 6x + 1$$

$$(2) (x+2y)^2 + 2(x+2y) + 1$$

2. 把下列各式分解因式：

$$(1) (x - 3y)^2 - 14(3y - x) + 49$$

$$(2) (a + b)^2 - 6(a + b)b + 9b^2$$

3. 分解因式：

$$(1) 16(a + b)^2 - 8(a^2 - b^2) + (a - b)^2$$

$$(2) 4(a - 2b)^2 - 4a(a - 2b) + a^2$$

王牌例题

把下列各式分解因式：

$$(1) 12xy - x^2 - 36y^2$$

$$(2) 5(a + b)^2 + 10(a + b) + 5$$

【思路导航】第(1)小题按 x 进行降幂排列并提取“-”号后,符合完全平方的形式 第(2)小题提取公因式后,也可采用完全平方公式进行分解因式.

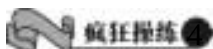
$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad & 12xy - x^2 - 36y^2 \\ &= - (x^2 - 12xy + 36y^2) \\ &= - [x^2 - 2 \cdot x \cdot 6y + (6y)^2] \end{aligned}$$

$$= -(x - 6y)^2$$

$$(2) \quad 5(a + b)^2 + 10(a + b) + 5$$

$$= 5[(a + b)^2 + 2 \cdot (a + b) + 1]$$

$$= 5(a + b + 1)^2$$



1. 分解因式：

$$(1) \quad 12xy^2 - 3x^2y - 12y^3$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}a^2 - 4ab + 8b^2$$

2. 分解因式：

$$(1) \quad 12xy - 2x^2 - 18y^2$$

$$(2) \quad -xy - x^3y + 2x^2y$$

3. 利用分解因式计算：

$$(1) \quad 87^2 + 87 \times 26 + 13^2$$

$$(2) 12^2 + 192 + 8^2$$

王牌例题 5

分解因式：

$$(1) (x^2 + 9y^2)^2 - 36x^2y^2$$

$$(2) (a^2 - 1)^2 - 6(a^2 - 1) + 9$$

$$(3) (x - y)^2 - 4(x - y - 1)$$

【思路导航】第(1)小题可以看做是两项,符合平方差公式的形式,可运用平方差公式分解 第(2)小题可以看做是三项式,可运用完全平方公式分解 第(3)小题则需进行合理变形,巧妙运用公式.

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad & (x^2 + 9y^2)^2 - 36x^2y^2 \\ &= (x^2 + 9y^2 + 6xy)(x^2 + 9y^2 - 6xy) \\ &= (x + 3y)^2 (x - 3y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (a^2 - 1)^2 - 6(a^2 - 1) + 9 \\ &= (a^2 - 1 - 3)^2 \\ &= (a^2 - 4)^2 \\ &= (a + 2)^2 (a - 2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & (x - y)^2 - 4(x - y - 1) \\ &= (x - y)^2 - 4(x - y) + 4 \\ &= (x - y - 2)^2 \end{aligned}$$

疯狂操练

1. 把下列各式分解因式：

$$(1) (x^2 + 16y^2)^2 - 64x^2y^2$$

$$(2) -3x^7 + 24x^5 - 48x^3$$

2. 把下列各式分解因式：

$$(1) (x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2$$

$$(2) (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 4$$

3. 把下列各式分解因式：

$$(1) (m+n)^2 - 4(m+n-1)$$

$$(2) (p-q)^2 + 7(2p-2q+7)$$

【学后反思】

把一个多项式分解因式,可概括为如下几步:(1) 先看各项有没有公因式,若有,先提公因式. (2) 观察项数. 根据需要,可把多项式中的某一整体当做一个项. 如果是二项式,就考虑用平方差公式. 如果是三项式,就用完全平方公式. (3) 要将每个因式分解到不能再分解为止. (4) 需要时可合理变形,巧妙运用公式.



分解因式 (三)



专题导引

分组分解法 : 多项式的某些项通过适当的结合, 成为一组, 利用分组来分解一个多项式的因式, 这种方法叫分组分解法.



王牌例题

把下列各式分解因式 :

$$(1) x^2 - xy - ax + ay$$

$$(2) 5x^3 - 15x^2 - x + 3$$

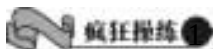
【思路导航】 本题的两小题均是四项式, 既没有公因式, 又不能直接套用公式, 可考虑采用分组分解法. 可试分成两组, 每组两项, 使分成的两组的对应项的系数比相等, 就能提取公因式, 为继续分解创造条件.

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad & x^2 - xy - ax + ay \\ &= (x^2 - xy) + (-ax + ay) \\ &= x(x - y) - a(x - y) \\ &= (x - y)(x - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad & x^2 - xy - ax + ay \\ &= (x^2 - ax) + (-xy + ay) \\ &= x(x - a) - y(x - a) \\ &= (x - a)(x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 5x^3 - 15x^2 - x + 3 \\ &= (5x^3 - 15x^2) + (-x + 3) \\ &= 5x^2(x - 3) - (x - 3) \\ &= (x - 3)(5x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{或} \quad 5x^3 - 15x^2 - x + 3 \\
 &= (5x^3 - x) + (-15x^2 + 3) \\
 &= x(5x^2 - 1) - 3(5x^2 - 1) \\
 &= (5x^2 - 1)(x - 3)
 \end{aligned}$$



1. 把下列各式分解因式：

(1) $2ab - 3bc - 6b^2 + ac$

(2) $4am - 3an - 8bm + 6bn$

2. 分解因式：

(1) $2bm - 15bn + 4am - 30an$

(2) $6x^2 - 15ab - 10ax + 9bx$

3. 分解因式：

(1) $x^3 + (3x^2 - 4x) - 12$

$$(2) 3(a-b)^2 - a + b$$

 王牌例题

分解因式 $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$

【思路导航】这个多项式含有两大项,且两项均是多项式与整式的乘积形式,但最终还是和的形式,故不是因式分解的最后结果,又无公因式可提,因此应利用乘法运算展开,再重新分组.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) \\
 &= abx^2 + aby^2 + xya^2 + xyb^2 \\
 &= (abx^2 + xya^2) + (aby^2 + xyb^2) \\
 &= ax(bx + ay) + by(ay + bx) \\
 &= (bx + ay)(ax + by)
 \end{aligned}$$

 疯狂操练

$$1. mn(x^2 - y^2) - xy(m^2 - n^2)$$

$$2. ab(x^2 + 1) + x(a^2 + b^2)$$

$$3. x(x-1)(x-2) - 6$$

王牌例题

分解因式 $x^2 - x - 16y^2 - 4y$

【思路导航】本题是四项式,若将一、三两项为一组,二、四两项为一组,可以发现两组间会有公因式出现,可继续分解.

$$\begin{aligned} \text{解: } & x^2 - x - 16y^2 - 4y \\ &= (x^2 - 16y^2) - (x + 4y) \\ &= (x + 4y)(x - 4y) - (x + 4y) \\ &= (x + 4y)(x - 4y - 1) \end{aligned}$$

疯狂操练

将下列各式分解因式:

1. $x^2 - 4x - y^2 + 4y$

2. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 25$

3. $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y$

王牌例题

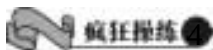
分解因式 $a^2b^2 - (a + b)^2 + 2ab + 1$

【思路导航】本题因式分解的方法较多,第一种方法可将 $(a + b)^2$ 展开再重新分组分解 第二种方法可将第一、三、四项作为一组,运用

完全平方公式后再与第二项运用平方差公式进行因式分解.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & a^2b^2 - (a+b)^2 + 2ab + 1 \\
 &= a^2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) + 2ab + 1 \\
 &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\
 &= (a^2 - 1)(b^2 - 1) \\
 &= (a+1)(a-1)(b+1)(b-1)
 \end{aligned}$$

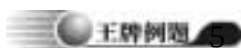
$$\begin{aligned}
 \text{或 } & a^2b^2 - (a+b)^2 + 2ab + 1 \\
 &= (ab+1)^2 - (a+b)^2 \\
 &= (ab+1+a+b)(ab+1-a-b) \\
 &= (a+1)(b+1)(a-1)(b-1)
 \end{aligned}$$



$$1. x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y + 9$$

$$2. 9a^2 - 18a + 9 - b^2 + 2b - 1$$

$$3. 4x^2y - 4xy + y - y^3 + 6y^2z - 9z^2y$$

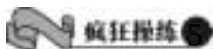


因式分解 $4a^4 + 1$

【思路导航】这是一个四次二项式,无法运用公式直接分解. 如果添上一项 $4a^2$ 变为 $4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^2$,再分组即可继续分解.

$$\text{解: } 4a^4 + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^2 \\
 &= (4a^4 + 4a^2 + 1) - 4a^2 \\
 &= (2a^2 + 1)^2 - (2a)^2 \\
 &= (2a^2 + 1 + 2a)(2a^2 + 1 - 2a)
 \end{aligned}$$



1. $a^4 + 64$

2. $x^4 + 4x^2 + 16$

3. $x^4 + x^2y^2 + y^4$

【学后反思】

因式分解的一般步骤是：

(1) 如果多项式的各项有公因式,那么,首先提取多项式的公因式.

(2) 如果各项没有公因式,可按其项数确定分解方法.

① 多项式是两项时：

a. 两项为异号时,考虑用平分差公式.

b. 两项为同号时,考虑用添项的方法.

② 多项式为三项时,考虑用完全平方公式分解因式,不能用此公式的,考虑用拆、添项法.

③ 多项式是四项或四项以上的,考虑用分组分解法.

(3) 因式分解必须分解到每一个因式都不能再分解为止.



分解因式(四)



专题导航

运用因式分解方法可以使某些计算得到简化,可以证明一些整除性问题等.



王牌例题

试证明 $5^{25} - 5^{23}$ 能被 120 整除.

【思路导航】要证该数能被 120 整除,可将这个数分解因数,如果含有因数 120,则结论成立.

$$\begin{aligned}\text{解: } 5^{25} - 5^{23} &= 5^{23} \times (5^2 - 1) = 5^{23} \times 24 \\ &= 5^{22} \times 5 \times 24 = 5^{22} \times 120\end{aligned}$$

所以, $5^{25} - 5^{23}$ 能被 120 整除.



疯狂操练

1. 求证 $2^{100} - 2^{96}$ 一定能被 15 整除.

2. 已知 $2^{48} - 1$ 可以被 60 至 70 之间的两个整数整除,求这两个数.

3. 试证 $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除.

王牌例题

把 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+16$ 分解因式.

【思路导航】由多项式乘法可知,对于两个一次二项式的积 $(x+a_1)(x+b_1)$ 与 $(x+a_2)(x+b_2)$,若有 $a_1+b_1=a_2+b_2$,则积里的二次项系数与一次项系数均相同.适当展开后,可将某多项式作为整体分解因式.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+16 \\
 &= [(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+16 \\
 &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+16 \\
 &= (x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+121 \\
 &= (x^2+8x+11)^2
 \end{aligned}$$

疯狂操练

1. 求证: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 是完全平方式.

2. 试证: $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ 是完全平方式.

3. 对于 x 的任何实数值,证明多项式

$(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)+20$ 的值永远为正数.

王牌例题

已知 $x^4 - 3x^2 + 6x + 8$ 有一个因式是 $x^2 - 3x + 4$, 试将这个式子因式分解.

【思路导航】 因为 $x^4 - 3x^2 + 6x + 8$ 是一个四次式且有一个因式是 $x^2 - 3x + 4$, 所以另一个因式也是二次式, 且常数项为 $8 \div 2 = 4$, 故可设另一个因式为 $x^2 + bx + 2$.

解 设另一个因式为 $x^2 + bx + 2$,

$$\text{则 } x^4 - 3x^2 + 6x + 8 = (x^2 - 3x + 4)(x^2 + bx + 2)$$

$$= x^4 + (b - 3)x^3 + (6 - 3b)x^2 + (4b - 6)x + 8$$

$$\therefore \begin{cases} b - 3 = 0 \\ 6 - 3b = -6 \\ 4b - 6 = 8 \end{cases}$$

解得 $b = 3$

, 另一个因式是 $x^2 + 3x + 2$

$$\begin{aligned} & x^4 - 3x^2 + 6x + 8 \\ &= (x^2 - 3x + 4)(x^2 + 3x + 2) \\ &= (x^2 - 3x + 4)(x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

疯狂操练

1. 已知 $x^4 + 4x^2 + 3x + 4$ 有一个因式是 $x^2 + x + 1$, 求另一个因式.

2. 已知多项式 $2x^4 - 3x^3 + ax^2 + 7x + 6$ 能被 $x^2 + x - 2$ 整除. 试求 a 的值并将这个式子因式分解.

3. 已知 $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ 是一个整式的平方, 求这个整式.

王牌例题 4

求方程 $xy - x + y - 4 = 0$ 的整数解.

【思路导航】由条件知 $(x+1)(y-1) = 3$. 因为 x, y 均为整数, 所以 $x+1$ 与 $y-1$ 也均为整数. 而质数 3 只能写成 1×3 或 $(-1) \times (-3)$ 这两对整数的积的形式, 从而可求出所需的整数解.

解 $xy - x + y - 4 = 0$

$$x(y-1) + (y-1) = 3$$

$$(x+1)(y-1) = 3$$

因为 x, y 均为整数,

$$\text{所以 } \begin{cases} x+1=1 \\ y-1=3 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+1=3 \\ y-1=1 \end{cases}$$

$$\text{或} \quad \begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=-3 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+1=-3 \\ y-1=-1 \end{cases}$$

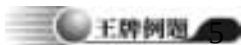
$$\text{解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}$$

疯狂操练 1

1. 求方程 $x + y + xy = 30$ 的整数解.

2. 正数 a, b, c 满足 $ab + a + b = bc + b + c = ac + c + a = 3$, 求 $(a+1)(b+1)(c+1)$ 的值.

3. 已知正整数 a, b, c 满足 $ab + bc = 3984, ac + bc = 1993$, 求 abc 的最大值.



设 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边, 求证 $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0$

【思路导航】本题是一道代数与几何相结合的综合性题目. 式子左边是四项式, 可考虑运用分组分解法分解因式, 再结合三角形的三边关系等知识即可得证.

证明: $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$

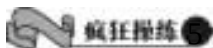
$$= a^2 - (b+c)^2 = (a+b+c)(a-b-c)$$

a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边

, $a+b+c > 0, a-b < c$, 即 $a-b-c < 0$

, $(a+b+c)(a-b-c) < 0$

即 $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0$



1. 若 a, b, c 为三角形的三边长.

求证： $(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$.

2. 若 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $a^3 - a^2b + ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2 = 0$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

3. 若 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.



分 式



专题简析

(1) 分式 整式 A 除以整式 B , 可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式. 如果除式 B 中含有字母, 则称 $\frac{A}{B}$ 为分式. 其中, A 称为分式的分子, B 称为分式的分母, 且 $B \neq 0$.

(2) 分式的基本性质: 分式的分子与分母都乘以 (或除以) 同一个不等于零的整式, 分式的值不变.

(3) 约分 把一个分式的分子和分母的公因式约去, 这种变形称为分式的约分.

(4) 最简分式 如果一个分式的分子和分母没有公因式, 这样的分式称为最简分式. 化简分式时, 通常要使结果成为最简分式或整式.



王牌例题

x 取何值时, 分式 $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-9}$

(1) 有意义 (2) 无意义 (3) 值为 0

【思路导航】“分式有意义”是指分母不为 0; “分式无意义”是指分母的值为 0; “分式的值为 0”是指分式在有意义的前提下 (分母不为 0), 分子的值为 0.

解: (1) 由 $x^2 - 9 \neq 0$ 得

$$x \neq \pm 3$$

所以,当 $x \neq \pm 3$ 时,分式 $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-9}$ 有意义.

(2) 由 $x^2 - 9 = 0$ 得

$$x = \pm 3$$

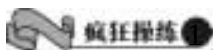
所以,当 $x = \pm 3$ 时,分式 $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-9}$ 无意义.

(3) 由 $(x-2)(x-3) = 0$ 得 $x=2$ 或 $x=3$.

当 $x=2$ 时,分母 $x^2 - 9 \neq 0$;

当 $x=3$ 时,分母 $x^2 - 9 = 0$;

所以,当 $x=2$ 时,分式 $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-9}$ 的值为零.



1. 当 x 取何值时,下列分式有意义?

(1) $\frac{x+1}{3x+2}$

(2) $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-5)(x-6)}$

(3) $\frac{1}{|x|-3}$

(4) $\frac{x^2-1}{x^2+3}$

2. 当 x 取何值时,下列分式无意义?

(1) $\frac{x^2-x-2}{x-2}$

(2) $\frac{2x}{x^2+1}$

$$(3) \frac{x+1}{(x+5)(x-4)}$$

$$(4) \frac{|x| - 1}{|x| + x}$$

3. 当 x 为何值时, 下列分式的值为零?

$$(1) \frac{|x| - 5}{(x+5)(x+2)}$$

$$(2) \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

$$(3) \frac{x - 2}{2x - 4}$$

王牌例题

当 x 为何值时, 分式 $\frac{5}{23 - 7x}$ 的值为正数?

【思路导航】要使分式的值为正数, 只要分子与分母同号即可.

解 因为 $\frac{5}{23 - 7x} > 0$ 且 $5 > 0$

所以 $23 - 7x > 0$, 即 $x < \frac{23}{7}$

所以, 当 $x < \frac{23}{7}$ 时, 分式 $\frac{5}{23 - 7x}$ 的值为正数.

疯狂操练

1. 当 x 为何值时, 分式 $\frac{x+3}{x^2}$ 的值为正数?

2. 若分式 $\frac{3y-1}{|y|}$ 的值为非正数, 求 y 的取值范围.

3. 当 x 为何值时, 分式 $\frac{x-7}{x^2+2x+3}$ 的值为正数?

王牌例题 3

下列等式的右边是怎样从左边得到的?

$$(1) \frac{xy^2}{x^2y} = \frac{y}{x}$$

$$(2) \frac{a-1}{a+1} = \frac{a^2-1}{(a+1)^2}$$

【思路导航】要找出右边是如何从左边得到的, 只要注意分析分子 (或分母) 从左到右发生了怎样的变化.

解: (1) $\frac{xy^2}{x^2y} = \frac{xy^2 \div xy}{x^2y \div xy} = \frac{y}{x}$

$$(2) \frac{a-1}{a+1} = \frac{(a-1) \cdot (a+1)}{(a+1) \cdot (a+1)} = \frac{a^2-1}{(a+1)^2}$$

疯狂操练 1

1. 下列等式的右边是怎样从左边得到的?

$$(1) \frac{2n}{m+2} = \frac{8n(m+2)}{4(m+2)^2}$$

$$(2) \frac{xy+y^2}{xy^2+y} = \frac{x+y}{xy+1}$$



2. 分别写出下列等式中括号里面的分子或分母.

$$(1) \frac{-2x}{1-2x} = -\frac{(\quad)}{2x^2-x}$$

$$(2) \frac{2ab-2a^2}{-3b^2+3ab} = \frac{2a}{(\quad)}$$

3. 下列各式中正确的是

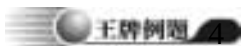
()

$$(1) \frac{3}{a^2+1} = \frac{3+b}{a^2+b+1}$$

$$(2) \frac{3}{a^2+1} = \frac{3-b}{a^2-b+1}$$

$$(3) \frac{3}{a^2+1} = \frac{3b^2}{(a^2+1)b}$$

$$(4) \frac{3}{a^2+1} = \frac{3(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$



化简下列分式：

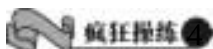
$$(1) \frac{x^2-y^2}{ax-by+ay-bx}$$

$$(2) \frac{4x(x-y)^3}{6y^2(y-x)^2}$$

【思路导航】分式约分的主要步骤是：把分式的分子与分母分解因式，然后约去分子与分母的公因式.

$$\begin{aligned} \text{解：(1)} \quad & \frac{x^2-y^2}{ax-by+ay-bx} \\ &= \frac{(x+y)(x-y)}{a(x+y)-b(x+y)} \\ &= \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(a-b)} \\ &= \frac{x-y}{a-b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{4x(x-y)^3}{6y^2(y-x)^2} = \frac{4x(x-y)^3}{6y^2(x-y)^2} \\ &= \frac{2(x-y)^2 \cdot 2x(x-y)}{2(x-y)^2 \cdot 3y^2} \\ &= \frac{2x(x-y)}{3y^2} \end{aligned}$$



1. 化简下列分式：

(1) $\frac{-32a^2b^3c}{24b^2cd}$

(2) $\frac{m^2 - 3m}{9 - m^2}$

(3) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$

2. 已知 $\frac{|x|}{x-2} = \frac{x}{2-x}$, 则 x 应满足 ()

(1) $x < 2$

(2) $x \leq 0$

(3) $x > 2$

(4) $x \geq 0$ 且 $x \neq 2$

3. 先化简,再求值.

(1) $\frac{3+2x-x^2}{x^2-7x+12}$

其中, $x = -\frac{1}{3}$

(2) $\frac{3x^2 - xy}{9x^2 - 6xy + y^2}$

其中, $x = -8, y = 2$.



王牌例题

已知 $\frac{x}{y} = 3$, 求 $\frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 - y^2}$ 的值.

【思路导航】本题可将已知条件变形为 $x = 3y$, 通过代入消元来达到分式求值的目的.

解 由 $\frac{x}{y} = 3$ 得 $x = 3y$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 - y^2} &= \frac{(3y)^2 + y^2 - 3y \cdot y}{(3y)^2 - y^2} \\ &= \frac{7y^2}{8y^2} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$



疯狂操练

1. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$, 求分式 $\frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{2x^2 + 5xy - 7y^2}$ 的值.

2. 已知 $\frac{a-b}{b} = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{3a^2 - 5ab + 2b^2}{2a^2 + 3ab - 5b^2}$ 的值.

3. 已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$, 求 $\frac{a - 2ab - b}{2a - 3ab - 2b}$ 的值.

【学后反思】

(1) 弄清分数与分式间的联系.

分式是分数的继续与拓展,分数则是分式的特例,两者有许多相似之处.因此,在学习时可运用类比的思想,对照分数的有关知识来学习分式,这也是掌握本章关键知识的有效方法.

(2) 理解分式的概念.

①分式的分母中必须含有字母,而分子中可以含有字母,也可以不含有字母.这是区别于整式的重要依据.

②在任何情况下,分式的分母的值都不能为零,否则分式无意义.这里,分母是指整个除式而言,而不只是就分母中某一个字母来说的.也就是说,分式的分母不为零是隐含在此分式中,而无须证明.

如分式 $\frac{1}{x-2}$ 中, $x \neq 2$ 是隐含在 $\frac{1}{x-2}$ 中,否则, $\frac{1}{x-2}$ 就失去意义.

(3) 每当应用分式的基本性质 (即 $\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}$ 或 $\frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$, 其中 $M \neq 0$) 时,都应考查 M 这个整式的值是否为 0. 只有整式 M 不为 0 时,基本性质才成立.

(4) 最简分式是对一个独立的分式而言的,明显标志是只有一个

分数线,且分子、分母没有公因式. 如 $1 - \frac{1}{x+2}$, $\frac{x+\frac{1}{2}}{x-2}$ 等均不是最简分式. 在今后的有关分式的运算中,其结果一定要运算到最简分式或整式为止.

(5) 约分是对分子、分母整体进行的,也就是说,约分时,分子的整体和分母的整体都要除以同一个公因式. 当分子或分母是多项式时,要用分子、分母的公因式去除整个多项式,不能只除某一项,更不能减去某一项,如 $\frac{a+x}{2b+x} = \frac{a}{2b}$ 是错误的. 通常应先将分子分母分解因式,只有当分子、分母都是乘积形式时,方能进行约分.



分式的乘除法



专题简析

分式乘除法的法则是 两个分式相乘,把分子相乘的积作为积的分子,把分母相乘的积作为积的分母;两个分式相除,把除式的分子和分母颠倒位置后,再与被除式相乘.



王牌例题

计算:

$$(1) \frac{9a^2bx}{4cd^2y} \cdot \frac{-16cy^3}{27ax^3}$$

$$(2) \frac{xy^2}{2yz} \div \frac{3x^2y}{4yz}$$

【思路导航】第(1)小题运用分式的乘法法则,即分式乘分式,用分子的积做积的分子,分母的积做积的分母;第(2)小题运用分式的除法法则,将除法运算转化为乘法运算.但要注意,如果运算结果不是最简分式,一定要进行约分,使运算结果化成最简分式.

$$\text{解:}(1) \frac{9a^2bx}{4cd^2y} \cdot \frac{-16cy^3}{27ax^3} = -\frac{9a^2bx \cdot 16cy^3}{4cd^2y \cdot 27ax^3} = -\frac{4aby^2}{3x^2d^2}$$

$$(2) \frac{xy^2}{2yz} \div \frac{3x^2y}{4yz} = \frac{xy^2}{2yz} \cdot \frac{4yz}{3x^2y} = \frac{2y}{3x}$$



疯狂操练

计算:

$$1. \frac{5x^2y^2}{6z} \cdot \frac{3xz^3}{2yz^2}$$



$$2. \frac{ab^2}{2c^2} \div \frac{-3a^2b^2}{4cd}$$

$$3. \frac{2ax}{yz} \cdot \frac{ay}{3bx} \div \frac{9b^2z}{8a^2xy}$$

王牌例题

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 + 2x - 8} \div (x - 2) \cdot \frac{x^2 + 4 - 4x}{x - 2}$$

【思路导航】进行分式乘除法运算,当分子、分母是多项式时,一般应先分解因式,并在运算过程中约分,使运算简化.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{x^2 - 16}{x^2 + 2x - 8} \div (x - 2) \cdot \frac{x^2 + 4 - 4x}{x - 2} \\ &= \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-2)} \cdot \frac{1}{x-2} \cdot \frac{(x-2)^2}{x-2} \\ &= \frac{x-4}{x-2} \end{aligned}$$

疯狂操练

计算或化简求值：

$$1. \frac{2m-6}{4-4m+m^2} \div (m+3) \cdot \frac{m^2+m-6}{3-m}$$

$$2. (xy - x^2) \div \left(\frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} \div \frac{x - y}{x^2} \right)$$

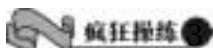
$$3. \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 - xy - 6y^2} \div (x - 2y) \cdot \frac{x^2 - 3xy}{x - 2y}, \text{其中 } x = 4, y = 1.$$

王牌例题

$$\text{计算: } \left(\frac{c^2}{2ab^2} \right)^3 \div (-3a^2b)^2 \div \left(\frac{c^3}{6a^3b^5} \right)^2$$

【思路导航】本题运用了分式乘方的运算法则,即分式乘方是把分子、分母各自乘方.要特别注意,在计算带有“-”号的式子的乘方时,应先确定结果的符号,再完成乘方运算.对乘除法运算应先统一为乘法运算.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \left(\frac{c^2}{2ab^2} \right)^3 \div (-3a^2b)^2 \div \left(\frac{c^3}{6a^3b^5} \right)^2 \\ &= \frac{c^6}{8a^3b^6} \cdot \frac{1}{9a^4b^2} \cdot \frac{36a^6b^{10}}{c^6} = \frac{b^2}{2a} \end{aligned}$$

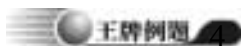


计算或化简求值：

$$1. \left(-\frac{a^3}{2b}\right)^2 \div \left(-\frac{a^2}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$2. \left[\left(\frac{y^2}{2x^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4x^3}{3y^2}\right)^2\right]^2$$

$$3. \left(\frac{x^2 - y^2}{y}\right)^2 \div (x^2 + xy)^3 \cdot \left(\frac{xy}{y - x}\right)^2, \text{其中 } x = 1, y = 1.$$

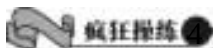


计算：

$$\frac{6x^{2n} - 24}{x^{2n+3} + 6x^{n+3} + 9x^3} \div \frac{3x^n + 6}{x^{n+2} + 3x^2} \cdot \frac{x^n + 3}{x^n - 2}$$

【思路导航】 本题是含有字母指数的分式的运算, 可将 x^{2n} 看成 $(x^n)^2$, 然后进行因式分解.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{6x^{2n} - 24}{x^{2n+3} + 6x^{n+3} + 9x^3} \div \frac{3x^n + 6}{x^{n+2} + 3x^2} \cdot \frac{x^n + 3}{x^n - 2} \\ &= \frac{6(x^n - 2)(x^n + 2)}{x^3(x^n + 3)^2} \cdot \frac{x^2(x^n + 3)}{3(x^n + 2)} \cdot \frac{x^n + 3}{x^n - 2} \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

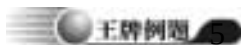


计算：

$$1. \frac{12x^{2n+1}y^{n-2}}{-24x^{2n-1}y^{n+1}} \cdot \frac{x^{2n+2} + 2x^{n+2} + x^2}{y^{n-1}} \cdot \frac{4y^{n+2}}{x^{n+4} + x^4}$$

$$2. \left(\frac{x^{2n+1}}{y^{2n-1}z} \right)^4 \div \left[\left(\frac{-y}{x^2z} \right)^2 \right]^6 \cdot \left(\frac{-2y}{x^{n+3}} \right)^3$$

$$3. \frac{10x^{2n} - 40}{x^{2n+3} + 6x^{n+3} + 9x^3} \div \frac{x^n - 2}{x^n + 3} \div \frac{5x^n + 10}{x^{n+2} + 3x^2}$$



已知 $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{2} \neq 0$, 求 $\frac{a+2b-3c}{2a-b+4c}$ 的值.

【思路导航】解与连比式有关的问题,时常设连比式的比值为某常数 k ,这样可以使原来含有几个字母的代数式的计算,变成含有 1 个字母的计算,从而使计算简便、迅速,这种方法是解决此类连比问题的常用方法. 本题若用其中一个字母去表达另外两个,再代入化简则较繁 (见本题的方法二).



解 方法一 设 $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{2} = k \neq 0$,

则 $a = 3k, b = 7k, c = 2k$.

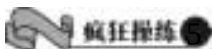
$$\begin{aligned} \frac{a+2b-3c}{2a-b+4c} &= \frac{3k+2 \times 7k-3 \times 2k}{2 \times 3k-7k+4 \times 2k} \\ &= \frac{3k+14k-6k}{6k-7k+8k} = \frac{11k}{7k} = \frac{11}{7} \end{aligned}$$

方法二 由 $\frac{a}{3} = \frac{b}{7}$ 得 $b = \frac{7a}{3}$, 由 $\frac{a}{3} = \frac{c}{2}$ 得 $c = \frac{2a}{3}$,

将 $b = \frac{7a}{3}, c = \frac{2a}{3}$ 代入得:

$$\begin{aligned} \frac{a+2b-3c}{2a-b+4c} &= \frac{a+2 \times \frac{7a}{3} - 3 \times \frac{2a}{3}}{2a - \frac{7a}{3} + 4 \times \frac{2a}{3}} \\ &= \frac{\frac{11}{3}a}{\frac{7}{3}a} = \frac{11}{7} \end{aligned}$$

, 原式 = $\frac{11}{7}$



1. 若 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \neq 0$, 求 $\frac{x^2 - 2y^2 + 3z^2}{xy + 2yz + 3zx}$ 的值.

2. 已知 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, $x + y - z = 6$, 求 $x - y + z$ 的值.

3. 如果 $\frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+8}{4}$ 且 $x + y + z = 12$, 求 x, y, z 的值.

【学后反思】

(1) 分式与分式相乘时, 如果分子和分母是多项式, 则先分解因式, 看能否约分, 然后再乘.

(2) 整式和分式相乘, 可以直接把整式 (分母是 1) 和分式的分子相乘作分子, 分母不变. 当整式是多项式时, 同样先分解因式.

(3) 乘除运算属同级运算. 分式除以分式, 可将除式的分子、分母颠倒位置后与被除式相乘, 用式子表示是 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. 在乘除混合运算中, 第一步应把除法转化为乘法, 再运算, 整式看做分母是 1 的分式, 参与运算.

(4) 进行分式的乘方时, 必须是分子、分母整体各自乘方, 防止如 $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ 这样的错误. 同时, 要注意系数的符号的乘方. 可按照“负数的偶数方为正, 奇数方为负; 正数的任何次方均为正”的规律确定乘方的符号.

(5) 在进行乘方、乘除运算时, 通常是先算乘方, 再算乘除.

24

分式的加减法

专题简析

(1) 同分母分式加减法的法则：同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减.

(2) 通分 根据分式的基本性质，异分母的分式可以化为同分母的分式，这一过程称为分式的通分.

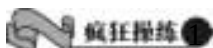
(3) 异分母分式的加减法法则：异分母的分式相加减，先通分，化为同分母的分式，然后再按同分母分式的加减法法则进行计算.

王牌例题

计算： $\frac{a+b}{b-a} + \frac{b}{a-b} - \frac{2a-b}{b-a}$

【思路导航】 本题三个分式的分母看起来不同，但 $a-b = -(b-a)$ ，故很容易化为同分母分式相加减.

$$\begin{aligned} \text{解：} & \frac{a+b}{b-a} + \frac{b}{a-b} - \frac{2a-b}{b-a} \\ &= \frac{a+b}{b-a} - \frac{b}{b-a} - \frac{2a-b}{b-a} \\ &= \frac{a+b-b-(2a-b)}{b-a} \\ &= \frac{a+b-b-2a+b}{b-a} \\ &= \frac{b-a}{b-a} = 1 \end{aligned}$$

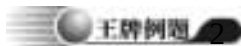


计算：

$$1. \frac{x+2y}{x^2-y^2} - \frac{3y-x}{x^2-y^2} - \frac{3x-4y}{x^2-y^2}$$

$$2. \frac{m^2}{2-m} + \frac{3-m}{m-2} - \frac{m+1}{2-m}$$

$$3. \frac{b}{a-b+c} + \frac{2a+c}{b-a-c} - \frac{b-c}{b-a-c}$$



计算：

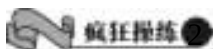
$$(1) \frac{2}{2a+3} - \frac{2}{3-2a} + \frac{2a+15}{4a^2-9}$$

$$(2) \frac{a^2+b^2}{a-b} - a - b$$

【思路导航】本两小题都用异分母的分式加减法法则，即异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，然后再加减. 第(1)小题的最简公分母是 $4a^2-9$ ，第(2)小题中 $-a-b$ 看成分母为 1，公分母为 $a-b$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: (1)} \quad & \frac{2}{2a+3} - \frac{2}{3-2a} + \frac{2a+15}{4a^2-9} \\
 &= \frac{2}{2a+3} + \frac{2}{2a-3} + \frac{2a+15}{(2a+3)(2a-3)} \\
 &= \frac{2(2a-3) + 2(2a+3) + (2a+15)}{(2a+3)(2a-3)} \\
 &= \frac{4a-6+4a+6+2a+15}{(2a+3)(2a-3)} \\
 &= \frac{10a+15}{(2a+3)(2a-3)} \\
 &= \frac{5}{2a-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2)} \quad & \frac{a^2+b^2}{a-b} - a - b \\
 &= \frac{a^2+b^2}{a-b} - \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} \\
 &= \frac{a^2+b^2}{a-b} - \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{2b^2}{a-b}
 \end{aligned}$$



计算：

$$1. \frac{5}{3(a-1)} + \frac{1}{2a+2} + \frac{3a-1}{1-a^2}$$

$$2. \frac{12}{m^2-9} + \frac{2}{3-m} + 1$$

$$3. \frac{2a^2 + 10}{a + 5} + a - 5 - \frac{a^2 - 15}{a + 5}$$

王牌例题

$$\text{计算: } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}$$

【思路导航】 本题若采取全部通分的方法,则分式的加减运算比较繁,最后很难将结果化为最简分式. 根据该题特点,第一、二两个分式先通分,再逐个通分,这样,分子也较为简单.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} \\ &= \frac{8}{1-x^8} \end{aligned}$$

疯狂操练

计算:

$$1. \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4}$$



$$2. x + 2y + \frac{4y^2}{x - 2y} - \frac{4x^2y}{x^2 - 4y^2}$$

$$3. -\frac{6a^2b}{a^2 - 9b^2} - \frac{9b^2}{a + 3b} - a + 3b$$

王牌例题

计算：

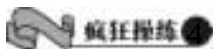
$$\left(\frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{1}{a^2 - 2a + 1} \right) \div \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a - 1} \right)$$

【思路导航】分式的混合运算与分数的混合运算顺序一样,先算乘除,再算加减,若有括号,应先算括号内的. 本题可以先算小括号内的,再算除法,也可以根据题目的特点,利用因式分解进行灵活运算.

解：

$$\begin{aligned} \text{方法一：} & \left(\frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{1}{a^2 - 2a + 1} \right) \div \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a - 1} \right) \\ &= \left[\frac{1}{(a + 1)^2} - \frac{1}{(a - 1)^2} \right] \div \frac{a - 1 - a - 1}{a^2 - 1} \\ &= \frac{-4a}{(a^2 - 1)^2} \cdot \frac{a^2 - 1}{-2} \\ &= \frac{2a}{a^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{方法二: } & \left(\frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{1}{a^2 - 2a + 1} \right) \div \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a - 1} \right) \\
 &= \left[\frac{1}{(a + 1)^2} - \frac{1}{(a - 1)^2} \right] \div \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a - 1} \right) \\
 &= \left[\left(\frac{1}{a + 1} \right)^2 - \left(\frac{1}{a - 1} \right)^2 \right] \div \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a - 1} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{a + 1} + \frac{1}{a - 1} \right) \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a - 1} \right) \div \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{a - 1} = \frac{2a}{a^2 - 1}
 \end{aligned}$$

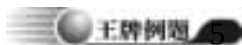


计算：

$$1. \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \div \left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} \right) \cdot (x + y)$$

$$2. \left(x - \frac{4xy}{x + y} + y \right) \div \left(\frac{x}{x + y} - \frac{y}{y - x} - \frac{2xy}{x^2 - y^2} \right)$$

$$3. 1 - \frac{8}{a^2 - 4} \left[\left(\frac{a^2 + 4}{4a} \right) - 1 \right] \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a} \right)$$



甲、乙两船在静水中的航速相同,其中甲船在河流中航行,顺水航行 S 千米后,立即返回原处,乙船在静水中航行 S 千米后也立即返回原处. 问甲、乙两船所用的航行时间谁多?

【思路导航】本题是航行问题. 其基本关系式是 顺流速度 = 静水中速度 + 水流速度 逆流速度 = 静水中速度 - 水流速度. 根据题意,先求甲船顺水,再逆水行 S 千米所用时间,然后求乙船在静水中航行 $2S$ 千米所用时间,最后比较这两个时间的大小即可.

解 设船静水航速为 v_1 千米/时,水流速度为 v_2 千米/时,

显然 $v_1 > v_2$.

则甲船顺水航行 S 千米所用时间为 $\frac{S}{v_1 + v_2}$,

甲船逆水(返回)航行 S 千米所用时间为 $\frac{S}{v_1 - v_2}$,

甲船来回共用时间为 $\frac{S}{v_1 + v_2} + \frac{S}{v_1 - v_2} = \frac{2Sv_1}{v_1^2 - v_2^2}$.

乙船来回共用时间为 $\frac{2S}{v_1}$,

比较 $\frac{2Sv_1}{v_1^2 - v_2^2}$ 与 $\frac{2S}{v_1}$ 的大小:

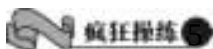
$$\begin{aligned} \frac{2Sv_1}{v_1^2 - v_2^2} - \frac{2S}{v_1} &= \frac{2Sv_1^2 - 2Sv_1^2 + 2Sv_2^2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)} \\ &= \frac{2Sv_2^2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)} \end{aligned}$$

又 $S > 0, v_1 > 0, v_1^2 - v_2^2 > 0$

$$\therefore \frac{2Sv_2^2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)} > 0$$

$$\therefore \frac{2Sv_1}{(v_1^2 - v_2^2)} > \frac{2S}{v_1}$$

故甲船所用时间多.



1. 甲、乙两人两次同时在同一粮店购买粮食(假设两次购买粮食的单价不相同),甲每次购买粮食 100 千克,乙每次购粮用去 100 元.问甲、乙所购粮食的平均单价各是多少?甲、乙两人的购粮方式哪一个更合算些?说明理由.

2. 从火车上下来的两个旅客,他们沿着一个方向到同一个地点去,第一个旅客一半路程以速度 a 行走,另一半路程以速度 b 行走;第二个旅客一半时间以速度 a 行走,另一半时间以速度 b 行走,问哪个旅客先到达目的地?(速度单位都是千米/时)

3. 为了支持北京申奥,红、绿两支宣传北京申奥万里行车队在距北京 3000 千米处会合,并同时向北京进发,绿队走完 2000 千米时,红队走完 1800 千米.随后,红队的速度比原来提高 20%,两车队继续同时向北京进发.

(1) 求红队提速前红、绿两支车队的速度比.

(2) 问红、绿两支车队能否同时到达北京？说明理由.

(3) 若红、绿两支车队不能同时到达北京,那么,哪支车队先到达北京？求出第一支车队到达北京时,两车队的距离. (单位 :千米)

【学后反思】

(1) 由于分式的分子不单是一个数,而是一个代数式,这样“把分子相加减”就是把各个分式的分子“整体”相加减,因此原来的分子要添上括号.

(2) 一个分式与一个整式相加减时,可以把整式看做分母是 1 的式子,进行通分.

(3) 分式加减运算的基本步骤是 :① 通分,将异分母分式化成同分母的分式 ;② 写成“分母不变”,分子相加减的形式 ;③ 分子去括号,合并同类项 ;④ 分子、分母约分,将结果化成最简分式或整式.

(4) 在进行分式运算时,要根据分式的特点,选择合适的方法. 如例 3 若不采用分步通分的方法,计算量会大增,且容易出错.

(5) 分式的加减乘除混合运算,应先进行乘、除运算,再进行加、减运算. 若有括号,先算括号内的.

(6) 比较两个数的大小,通常求出两个数的差,若 $a - b > 0$, 则 $a > b$;若 $a - b < 0$, 则 $a < b$.



分式方程



专题简析

(1) 分式方程 :分母里含有未知数的方程叫分式方程.

(2) 增根 :使得原分式方程分母为零的根,叫做原方程的增根. 因为解分式方程可能产生增根,所以解分式方程必须检验.



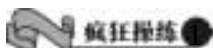
王牌例题

为了方便广大游客到昆明参加游览“世博会”,铁道部门临时增开了一列南宁——昆明的直达快车. 已知南宁——昆明两地相距 828 千米,一列普通列车与一列直达快车都由南宁开往昆明,直达快车的平均速度是普通快车平均速度的 1.5 倍. 直达快车比普通快车晚出发 2 小时,比普通快车早 4 小时到达昆明. 设普通快车的平均速度为 x 千米/时,那么 x 满足怎样的分式方程?

【思路导航】本题是追及问题. 基本数量关系是 路程 = 速度 $\times$ 时间, 速度 = $\frac{\text{路程}}{\text{时间}}$, 时间 = $\frac{\text{路程}}{\text{速度}}$. 根据题意,可用含有 x 的代数式分别表示出普通快车与直达快车由南宁到昆明所用的时间,并且由题意还能得出“普通快车比直达快车共多用 6 小时”这个结论,最后可列出方程.

解 设普通快车的平均速度为 x 千米/时,则直达快车的平均速度为 $1.5x$ 千米/时,根据题意,得 $\frac{828}{x} - \frac{828}{1.5x} = 6$.

答 x 应满足的分式方程为: $\frac{828}{x} - \frac{828}{1.5x} = 6$.



1. A、B 两城相距 50 千米. 甲骑自行车从 A 城往 B 城, 出发 1 小时 30 分钟后, 乙骑摩托车也从 A 城往 B 城. 已知乙的速度是甲的速度的 2.5 倍, 并且乙比甲早到 1 小时. 若设甲的速度为 x 千米/时, 那么 x 应满足怎样的分式方程?

2. 甲、乙两个工程队合作一项工程, 需 16 天完成, 现两个队合作 9 天, 甲队因另有任务, 余下的任务由乙又独做 21 天完成. 若设甲单独做 x 天完成, 那么 x 应满足怎样的分式方程?

3. 某校办工厂将总价值为 2000 元的甲种原料与总价值为 4800 元的乙种原料混合后, 其平均价比原甲种原料少 3 元/公斤, 比乙种原料多 1 元/公斤, 若设混合后的单价为每公斤 x 元, 那么 x 应满足怎样的分式方程?

王牌例题

解下列方程：

$$(1) \frac{t}{3+t} - \frac{t}{2-t} = 2$$

$$(2) \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 1$$

【思路导航】解分式方程可仿照解一元一次方程的步骤进行，但所不同的是一元一次方程去分母时，方程两边都乘以一个不为零的常数，而分式方程去分母时，方程两边都乘以一个含有未知数的整式——最简公分母。若求出的未知数的值使最简公分母为零，就意味着原分式方程中有的分母为零，此分式就没有意义了。所以此未知数的值就是原方程的增根，原方程无实根。因此，解题时必须将未知数的值代入原分式方程进行检验。

解：(1) 方程两边都乘以 $(3+t)(2-t)$ ，

$$\text{得 } t(2-t) - t(3+t) = 2(3+t)(2-t)$$

解这个方程，得 $t = 12$

检验 将 $t = 12$ 代入原方程，得 左边 $= 2 =$ 右边。

所以， $t = 12$ 是原方程的根。

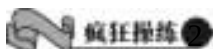
$$(2) \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{(x+1)(x-1)} = 1$$

方程两边都乘以 $(x+1)(x-1)$ ，得

$$(x+1)^2 - 4 = x^2 - 1$$

解这个方程，得 $x = 1$

检验 当 $x = 1$ 时， $(x+1)(x-1) = 0$ ，所以， $x = 1$ 是增根，原方程无解。



1. 解方程 $\frac{2+x}{x-3} = \frac{x-1}{x+4}$

2. 解方程 $\frac{x+2}{2x-6} - \frac{1-2x}{6-2x} = 0$

3. 若关于 x 的方程 $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{1-x}{2-x}$ 与 $\frac{x+1}{x-|a|} = 2 - \frac{3}{|a|-x}$ 有相同的增根, 则 a 的值为 ()

(1) 2 (2) 3 (3) ± 2 (4) ± 3



轮船顺流航行 66 千米所需的时间和逆流航行 48 千米所需的时间相等, 已知水流速度为 3 千米/时, 求轮船在静水中的速度.

【思路导航】设轮船在静水中的速度为 x 千米/时, 则轮船的顺水速度为 $(x+3)$ 千米/时, 逆水的速度为 $(x-3)$ 千米/时. 时间为等量关系.

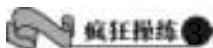
解 设轮船在静水中的速度为 x 千米/时, 根据题意, 得:

$$\frac{66}{x+3} = \frac{48}{x-3}$$

解这个方程, 得 $x = 19$

经检验, $x = 19$ 是所立方程的根.

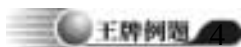
所以, 轮船在静水中的速度为 19 千米/时.



1. 一轮船航行在 A、B 两地, 顺流航行所需的时间是逆流航行所需时间的 $\frac{4}{5}$, 已知船在静水中每小时航行 14 千米, 求水流速度.

2. 一汽车顺流航行 46 公里和逆流航行 34 公里的时间, 恰好等于它在静水中航行 80 公里的时间. 已知水流速度为每小时 2 公里, 求汽车在静水中航行的速度.

3. 一小船由 A 港到 B 港顺流需行 6 小时, 由 B 港到 A 港逆流需行 8 小时. 一天, 小船从早晨 6 点由 A 港出发, 顺流行到 B 港时, 发现一救生圈在途中掉落水中, 立即返回, 一小时后找到救生圈, 问: (1) 若小船按水流速度由 A 港漂流到 B 港需要多少小时? (2) 救生圈是在何时掉入水中的.



A、B 两地相距 135 千米, 有大、小两辆汽车从 A 地开往 B 地, 大汽车比小汽车早出发 5 小时, 小汽车比大汽车晚到 30 分钟. 已知大、小汽车的速度比为 2:5, 求两辆汽车的速度.

【思路导航】 本题是行程类问题. 速度为未知量, 时间为等量关系. 解题过程中巧用比值去设未知数, 对迅速正确解题十分有益.

解 设大汽车的速度为 $2x$ 千米/时, 则小汽车的速度为 $5x$ 千米/时, 根据题意, 得:

$$\frac{135}{5x} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{135}{2x}$$

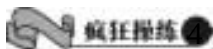
解这个方程得 $x = 9$

经检验, $x = 9$ 是所列方程的根.

$$2x = 2 \times 9 = 18 \text{ (千米/时)}$$

$$5x = 5 \times 9 = 45 \text{ (千米/时)}$$

所以, 大汽车的速度为 18 千米/时, 小汽车的速度为 45 千米/时.



1. A、B 两城相距 280 千米, 甲、乙两车分别从 A、B 两地出发相向而行, 速度比为 3:4, 若甲先出发半小时, 则当乙车行至两地之间中点且停下 10 分钟后, 甲车也到达两地之间中点位置, 求两车的速度各为多少?

2. 甲、乙两人合作一件工作, 4 天后, 甲因另有任务, 余下的工作由乙单独完成, 还需 16 天, 甲、乙两人单独完成这项工作所用的时间的比为 4:5, 问甲、乙单独完成这项工作各需要多少天?

3. 汛期将至,我军某机械化工兵连的官兵为驻地群众办实事,计划加固驻地附近 20 公里的河堤,根据气象部门预测,今年的汛期有可能提前,因此,官兵们发扬我军不怕苦、不怕累的优良传统,早出晚归,使实际施工速度与计划施工速度的比为 3:2,结果比计划提前 10 天完成任务,问该连实际每天可加固河堤多少公里?

王牌例题

某个体商贩一次同时卖出两件上衣,每件都以 135 元出售,其中一件盈利 25%,另一件亏本 25%,试析这次买卖中,该商贩能否赚到钱.

【思路导航】利润率 = $\frac{\text{售价} - \text{进价}}{\text{进价}}$, 因为两件上衣售价相同,而一件盈利,另一件却亏本,这就说明两件上衣的进价不同,需分别求出各自的进价,再进一步加以计算和比较.

解 设盈利的一件上衣进价为 x 元,亏本的一件上衣进价为 y 元,根据题意,得:

$$\frac{135 - x}{x} \times 100\% = 25\%$$

$$\frac{y - 135}{y} \times 100\% = 25\%$$

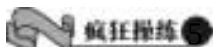
解这个方程,得:

$$x = 108, y = 180$$

经检验, $x = 108, y = 180$ 是所列方程的根.

当 $x = 108, y = 180$ 时, $135 - x = 27$ (元), $135 - y = -45$ (元)

即其中的一件上衣盈利 27 元,另一件亏本 45 元. 所以,在这次买卖中,该商贩赚不到钱.



1. 某商店有甲、乙、丙三种手表,每块表甲种比乙种贵 20 元,乙种比丙种贵 30 元,现在甲种表总金额为 6000 元,乙种表为 9000 元,丙种表为 3000 元,并知乙种表的块数与甲、丙两种表的总块数相等,求每种表的单价.

2. 用价值为 100 元的甲种涂料与价值为 240 元的乙种涂料配成一种新涂料,其每千克的售价比甲种涂料每千克少 3 元,比乙种涂料每千克的售价多 1 元,求这种新涂料每千克售价多少元?

3. 近几年我省高速公路的建设有了较大的发展,有力地促进了我省的经济建设. 正在修建中的某段高速公路要招标,现有甲、乙两个工程队,若甲、乙两队合作,24 天可以完成,需费用 120 万元;若甲单独做 20 天后,剩下的工程由乙做,还需 40 天才能完成,这样需费用 110 万元,问:(1) 甲、乙两队单独完成此项工程,各需多少天?(2) 甲、乙两队单独完成此项工程,各需要费用多少万元?

【学后反思】

(1) 解分式方程的基本步骤是:

① 去分母 在方程的两边都乘以最简公分母,约去分母,化为整式方程;

② 解方程 解这个整式方程;

③ 验根 把整式方程的根代入原方程去检验,看左边与右边是否相等. 若此根使原分式方程的最简公分母为 0,则这个根是原方程的增根,应舍去;

④ 下结论. 根据检验的结果对原方程是否有解,是什么解下结论.

(2) 列分式方程解应用题的基本步骤:

① 审清题意,设合适的未知数;

② 根据题意,找出等量关系,列出分式方程;

③ 解分式方程,并验根. 列分式方程解应用题的验根包括两个方面:一方面检验所求得的根是否是所列方程的根;另一方面要检验此根是否符合题意.

④ 写出符合题意的答案.

26

数据的收集与处理 (一)

专题简析

调查分普查和抽样调查

(1) 普查是为了一定的目的而对考察对象进行全面调查, 抽样调查是从总体中抽取部分个体进行调查.

(2) 总体、个体和样本.

调查所要考察对象的全体称为总体, 而组成总体的每一个考察对象称为个体. 抽样调查时从总体中抽取的一部分个体叫做总体的一个样本.

(3) 频数和频率.

频数是小组内数据出现的个数.

每一小组的频数与数据总数的比值叫做频率.

各小组频数之和等于数据总数 频率之和为 1.

王牌例题

今年某市有 6 万名初中毕业生参加升学考试, 为了了解 6 万名考生的数学成绩, 从中抽取 1500 名考生的数学成绩进行统计分析, 以下说法正确的是 ()

- (1) 6 万名学生是总体
- (2) 每名考生的数学成绩是个体
- (3) 1500 名考生是总体的一个样本
- (4) 本调查采用的是普查的方法

【思路导航】总体是所要考察对象的全体, 个体是组成总体的每一个考察对象. 此题的每一个考察对象应是学生的数学成绩, 且显然采用的是抽样调查的方法.

解: (2)

 疯狂操练

1. 为了了解全国城市儿童肥胖情况,从不同城市考察了 5000 名儿童的体重,此调查中,

总体是_____.

个体是_____.

样本是_____.

2. 为了了解某块试验田里小麦的麦穗重量,从中抽取 1000 个小麦穗,此调查中,总体、个体、样本分别是什么?

3. 为了考察某公园一年中每天进园的人数,在其中的 30 天里对进园的人数进行了统计,此调查中,总体、个体、样本分别是什么?

 王牌例题

为了完成下列任务,你认为采用什么调查方式更合适?

(1) 为了了解全班学生的视力状况

(2) 为了了解某电视节目的收视率

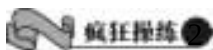
(3) 为了了解一批鞋的耐磨情况

(4) 为了了解一批炮弹的杀伤半径

【思路导航】一般来讲,当要全面了解数据,且总体个数较少时,采用普查的方式,如 (1),而由于受到条件限制,如考虑总体中包含的个体数很多,如 (2),或个体数不是很多,但考察时带有破坏性,如 (3)、(4),就采取抽样调查的方法.

解：(1) 采用普查的方式

(2)、(3)、(4) 采用抽样调查的方式.



1. 为了完成下列任务,你认为采用什么调查方式更合适?

(1) 了解你们班学生的零花钱是如何安排的;

(2) 了解你们班每个学生家庭每天的垃圾量;

(3) 了解一批排球的使用寿命;

(4) 了解八年级学生的体重情况.

2. 下列调查适合普查方式的是:

(1) 了解某一单元楼家庭中有 60 岁以上老人情况.

(2) 了解一批汽车轮胎耐磨情况.

(3) 了解一批日光灯管使用寿命.

3. 下列调查不适合抽样调查方式的是:

(1) 了解本市中学生最喜欢什么体育活动情况.

(2) 了解某部电影在某个电影院的上座率.

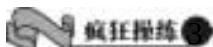
(3) 了解一块棉花地的棉花纤维长度.

王牌例题 3

某市《老年之友》杂志社为了了解本市市长受市民欢迎程度,设计了一份表格并随杂志发给读者,结果有 215 位读者寄来答案,请你说说该杂志社能否据此认为市长的受欢迎程度?

【思路导航】抽样调查时,既要关注样本的大小,又要关注样本的代表性.由于《老年之友》杂志面对的是老年读者,这 215 份答案只能看做看做是本市喜欢读报的老年人对市长的评价,他们还不能代表全市人民对市长的评价,这种抽样不具有代表性.

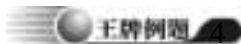
解 略.



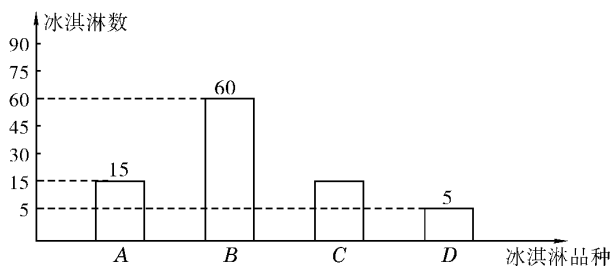
1. 某班学生为了了解某歌星的受欢迎程度,需要对所有听过此歌星唱歌的人作调查吗?对一所中学学生的调查结论可否作为对此歌星受欢迎程度的评价?

2. 某学生为了了解中学生最喜欢观看什么体育比赛,对七、八、九年级各一个班的男生进行了问卷调查,你认为他的调查结果能否作为中学生最爱看体育比赛的依据吗?为什么?

3. 小明为了了解每个家庭每天垃圾产生量,设计了一个表格,发给他班所有同学,要求星期天在家注意观察,据实填写,你觉得小明最后得出的结论是否科学?



某一商店在某一天内卖出 A、B、C、D 冰淇淋共 100 只,如图所示:



(1) 求 C 的频数和频率.

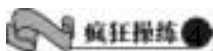
(2) 哪种冰淇淋在第二天进货要多进些?

【思路导航】各组频数之和应为总数,所以,

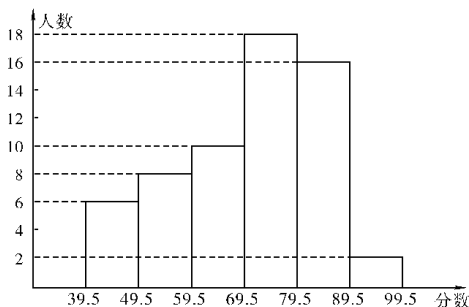
$$C \text{ 的频数} = 100 - 15 - 60 - 5 = 20, \quad \text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{总数}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

解:(1) C 的频数为 20,频率为 0.2.

(2) B 种冰淇淋应多进些.



1. 在对某班的一次数学测验成绩进行统计分析中,各分数段的人数如图所示(分数取正整数,满分 100 分),请观察图形,并回答下列问题:



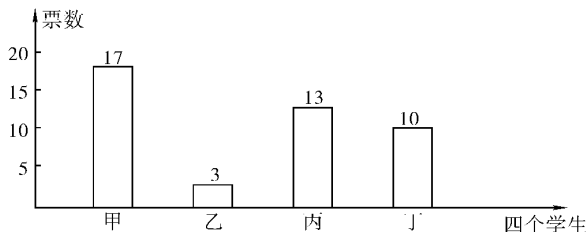
(1) 该班有 _____ 名学生.

(2) 69.5 ~ 79.5 这一组的频数是 _____ 频率是 _____.

(3) 请估算该班这次测验的平均成绩.



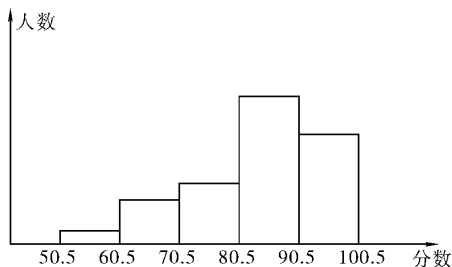
2. 甲、乙、丙、丁四位同学竞选班长（每人必须且只能投一票），得票数如图所示：



(1) 该班有多少名学生？

(2) 甲的频数和频率分别是多少？

3. 为了了解小学生的素质教育情况，某县在全县各小学共抽取了 200 名五年级学生进行素质教育调查，将所得数据整理后，画出频数分布直方图，已知图中从左到右前 4 个小组的频数分别为 8, 24, 32, 80, 则第五小组的频率为_____。



为了了解某地初三年级男生的身高情况,从其中一所中学选取了 60 名学生的身高,分组情况如下表,求出表中的 a 、 m 的值.

分 组	147.5 ~ 155.5	155.5 ~ 163.5	163.5 ~ 171.5	171.5 ~ 179.5
频 数	6	21		m
频 率			a	0.1

【思路导航】频数是在每组中对象出现的次数,而每一小组中的频数与数据总数的比值叫做这一小组的频率.上表中, $\frac{m}{60} = 0.1$,所以得 $m = 6$,而各组频数之和应等于数据总数,所以可知 163.5 ~ 171.5 组中的频数为 $60 - 6 - 21 - 6 = 27$,因此 $a = \frac{27}{60} = 0.45$

解: $m = 6, a = 0.45$

1. 在青年业余歌手卡拉 OK 大奖赛中,8 位评委给某选手所评分数如表:

评委	1	2	3	4	5	6	7	8
评分	9.8	9.5	9.7	9.9	9.8	9.7	9.4	9.8

问 9.8 分的频数是 ()

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

2. 某数学老师为了了解某次数学考试的一道选择题的解答情况,对全班学生的试卷作了统计,请你填出表中的空格.



选项	频数	频率
A	20	0.4
B	15	
C	5	
D		

3. 甲、乙、丙、丁四支足球队在世界杯预选赛中进球数分别为 9、9、 x 、7,若这组数据的众数与平均数恰好相等,则丙的频数为 _____,频率为 _____.

【学后反思】

数据的收集常有两种方法——普查和抽样调查,要明确两种方式的特点,根据不同的目的,选择合适的调查方法,在抽样调查时,还要注意所选取样本具有代表性和广泛性.

对于数据,不仅要学会搜集,还要学会整理,应从具体例子中理解频数、频率等概念,并能从统计图、统计表中分析出各小组的频数和频率及各小组间频数与频率的关系.

27

数据的收集与处理 (二)



专题简析

(1) 频数分布直方图是一种条形统计图,通过图可以较直观地发现哪一组出现的数据多及数据的总体规律. 如果在频数分布直方图上取点、连结,则得到频数折线图.

(2) 方差、标准差和极差

方差是各个数据与平均数差的平方的平均数,即:

$$S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

其中, $\bar{x}$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数, S^2 是方差,而标准差就是方差的算术平方根.

极差是指一组数据中最大数据与最小数据的差.

方差反映数据的波动性. 一般地,一组数据的极差、方差或标准差越小,这组数据就越稳定.

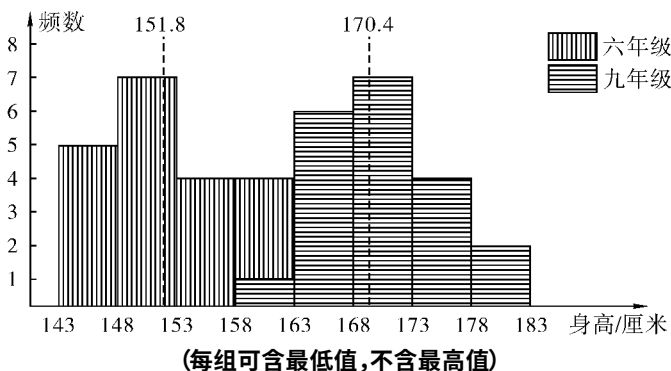
王牌例题

某校在六年级和九年级男生中分别随机抽取 20 名男生测量他们的身高,绘制的频数分布直方图如图所示,其中两条点画线上端的数值分别是每个年级抽 20 名男生身高的平均数,试根据该图提供的信息填空:

(1) 六年级被抽取的 20 名男生身高中的中位数所在组的范围是 _____ 厘米 九年级被抽取的 20 名男生身高的中位数所在组的范围是 _____ 厘米.

(2) 估计这所学校九年级男生的平均身高比六年级男生的平均身高高 _____ 厘米.

(3) 估计这所学校六、九两个年级全体男生中,身高不低于 153 厘米且低于 163 厘米的男生所占的百分比是 _____.

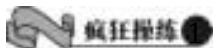


【思路导航】 频数分布直方图中,横轴反映考察对象类别,而各个小长方形的长则表示各组的频数. 频数分布直方图能较直观地反映出各组的频数. 根据频数分布直方图,也可大致求出该组的身高总和. 如 168 ~ 173 组,可取 170 作为其平均身高,再乘以频数 7,依此法可求出各组的身高总和,从而求出一个年级学生的平均身高.

解:(1) 148 ~ 153

(2) 168 ~ 173, 18.6

(3) 22.5%

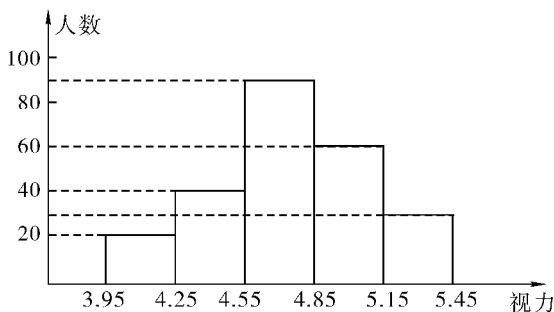


1. 初中生的视力状况受到全社会的广泛关注. 某市有关部门对全市 3 万名初中生视力状况进行了一次抽样调查. 下图是利用所得数据绘制的频数分布直方图(长方形的高表示该组人数). 根据图中所提供的信息回答下列问题:

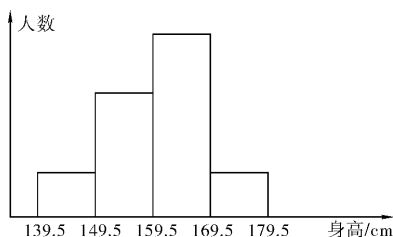
(1) 本次调查共抽测了多少名学生?

(2) 在这个问题中的样本指什么?

(3) 如果视力在 4.9 ~ 5.1 (含 4.9 和 5.1) 均属正常,那么全市有多少初中生的视力正常?

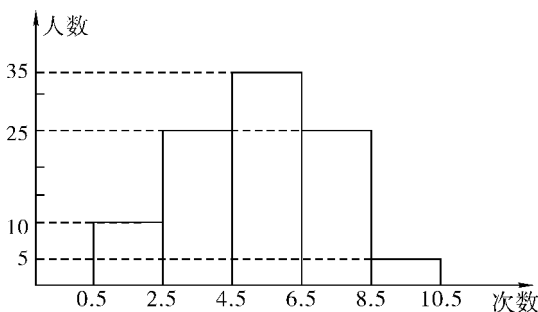


2. 如图是某班 50 名学生身高 (精确到 1cm) 的频数分布直方图, 从左起第一、二、三、四四个小长方形的高的比为 1:3:5:1, 那么身高是 160cm 及 160cm 以上的学生有 _____ 人.



3. 为了解高中学生的体能情况,抽了 100 名学生进行引体向上次数测试,将所得数据整理后,画出频数分布直方图,图中从左到右依次为第 1、2、3、4、5 组.

- (1) 第 1 组的频数为_____.
- (2) 若次数在 5 次(含 5 次)以上为达标,则达标率为_____ %.
- (3) 这 100 个数据的众数一定落在第 3 组吗?



王牌例题

为制定本市七、八、九年级学生校服的生产计划,有关部门准备对 180 名初中男生的身高作调查,现有三种调查方案:

- (1) 测量少体校中 180 名男子篮球、排球队员的身高;
- (2) 查阅有关外地 180 名男生身高的统计资料;

(3) 在本市的市区和郊县各选一所完全中学、两所初级中学,在这六所学校有关年级的 (1) 班中,用抽签的方法分别选出 10 名男生,然后测量他们的身高.

① 为了达到估计本市初中这三个年级男生身高分布的目的,你认为采用上述哪种调查方案比较合理?为什么?(答案分别填在空格里)

答 选_____.

理由:_____

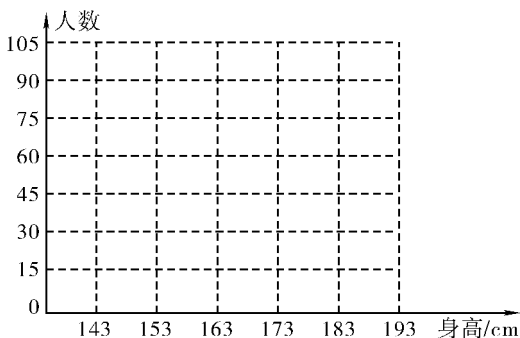
② 下表中的数据是使用某种调查方法获得的:

a. 根据表中数据填写表中空格;

b. 根据填写的数据绘制频数分布直方图和频数折线图.

人数 身高 (cm) \ 年 级	七年级	八年级	九年级	总计 (频数)
143 ~ 153	12	3	0	
153 ~ 163	18	9	6	
163 ~ 173	24	33	39	
173 ~ 183	6	15	12	
183 ~ 193	0	0	3	

(注 每组可含最低值,不含最高值)

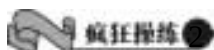
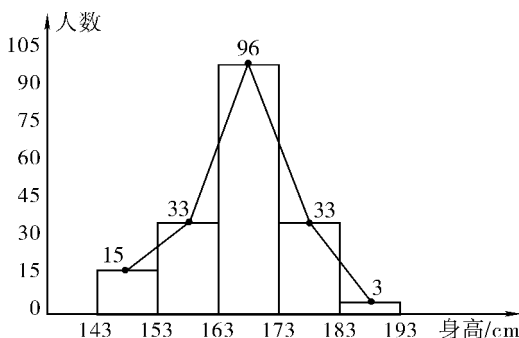


【思路导航】 抽样调查时,抽样要注意样本的代表性及广泛性.显然 (1)、(2) 都不具有代表性,而 (3) 能达到抽样调查的目的.绘制频数分布直方图前,应恰当分组,并统计出各组的频数,各组频数就是落在各组中的数据个数.然后才可绘制频数分布直方图.取点、连

线,可得频数折线图.

解 选 (3),理由:(1)、(2)不具有代表性,而(3)能达到抽样调查的目的.

各组的频数依次是 15,33,96,33,3



1. 为了考察某种大麦穗长的分布情况,在一块试验地里抽取了 100 个穗,量得它们的长度如下(单位:厘米):

6.5	6.4	6.7	5.8	5.9	5.9	5.2	4.0	5.4	4.6
5.8	5.5	6.0	6.5	5.1	6.5	5.3	5.9	5.5	5.8
6.2	5.4	5.0	5.0	6.8	6.0	5.0	5.7	6.0	5.5
6.8	6.0	6.3	5.5	5.0	6.3	5.2	6.0	7.0	6.4
6.4	5.8	5.9	5.7	6.8	6.6	6.0	6.4	5.7	7.4
6.0	5.4	6.5	6.0	6.8	5.8	6.3	6.0	6.3	5.6
5.3	6.4	5.7	6.7	6.2	5.6	6.0	6.7	6.7	6.0
5.5	6.2	6.1	5.3	6.2	6.8	6.6	4.7	5.7	5.7
5.8	5.3	7.0	6.0	6.0	5.9	5.4	6.0	5.2	6.0
6.3	5.7	6.8	6.1	4.5	5.6	6.3	6.0	5.8	6.3

列出样本的频数分布图,并画出频数分布直方图.

2. 为了解学生的身高情况,抽测了某校 17 岁的 50 名男生的身高. 数据如下 (单位: m) :

身高	1.57	1.59	1.60	1.62	1.63	1.64	1.65	1.66	1.68
人数	1	1	2	2	3	2	1	6	5
身高	1.69	1.70	1.71	1.72	1.73	1.74	1.75	1.76	1.77
人数	8	7	2	3	2	1	2	1	1

若将数据分成 7 组,取组距 0.03m,画出频数分布直方图和频数折线图.

3. 已知 50 个数据的分组以及各组的频数如下:

53.5 ~ 55.5	4
55.5 ~ 57.5	7
57.5 ~ 59.5	9
59.5 ~ 61.5	11
61.5 ~ 63.5	10
63.5 ~ 65.5	6
65.5 ~ 67.5	3

画出这组数据的频数分布直方图.

王牌例题 3

已知一组数据 $-2, -1, 0, x, 1$ 的平均数是 0 , 那么这组数据的方差是_____, 极差是_____, 标准差是_____.

【思路导航】先根据平均数的计算公式, 求出 x , 用这组数据中最大数据减去最小数据就可求出极差, 用方差公式可求出方差、标准差是方差的算术平方根.

解: $2, 4, \sqrt{2}$

疯狂操练 2

1. 计算数据 $-1, 2, 0, -3, -2, 3, 0$ 的极差和方差.

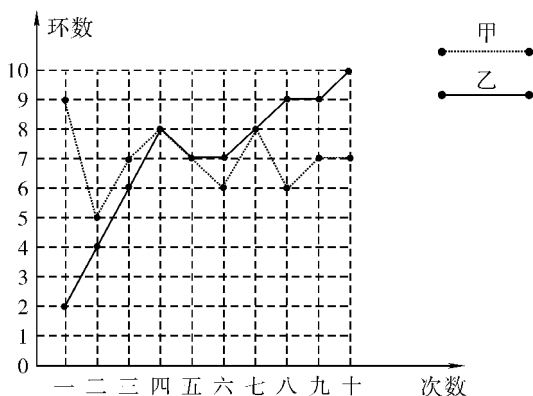
2. 已知一组数据 $1, 3, 2, 5, x$, 它的平均数是 3 , 则这组数据的极差是_____, 标准差是_____.

3. 一运动员某次训练射靶 10 次, 命中的环数如下:

$7, 9, 5, 7, 8, 7, 6, 8, 6, 7$, 则这组数据的平均数是_____, 方差是_____.

王牌例题 4

甲、乙两人在相同条件下各射靶 10 次, 每次射靶的成绩情况如下图所示:



(1) 请填写下表：

	平均数	方差	命中九环以上次数
甲	7	1.2	1
乙		5.4	

(2) 请从下列不同的角度对这次测试结果进行分析：

- ①以平均数和方差相结合来看；
- ②从平均数和命中九环以上的次数相结合来看 (分析谁的成绩好些)；
- ③从折线图上两人射击命中环数的走势看 (分析谁的潜力更大)。

【思路导航】对一组数据,可从不同角度去分析,从而能更科学、更客观地去解决实际问题。

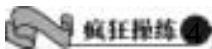
解:(1)

	平均数	方差	命中九环以上次数
甲	7	1.2	1
乙	7	5.4	3

(2) ①因为 $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$, 所以甲成绩比乙成绩稳定.

② 因为平均数相同, 命中九环以上的次数甲比乙少, 所以乙的成绩比甲好些.

③ 甲成绩在平均数上下波动, 而乙处于上升势头, 从第 4 次以后, 就没有比甲少的情况发生, 乙较有潜力.

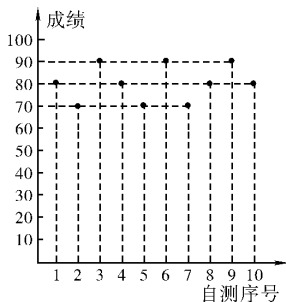


1. 某校九年级甲、乙两班举行电脑汉字输入速度比赛, 两个班参加比赛的学生每分钟输入汉字的个数, 经统计和计算后结果如下表:

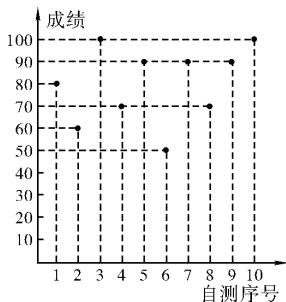
班级	参加人数	平均字数	中位数	方差
甲	55	135	149	191
乙	55	135	151	110

有一名同学根据上表得出如下结论: (1) 甲、乙两班学生的平均水平相同; (2) 乙班优秀的人数比甲班优秀的人数多 (每分钟输入汉字 150 个以上为优秀); (3) 甲班学生比赛成绩的波动比乙班学生成绩的波动大, 上述结论正确的是_____ (填序号)

2. 张明、王成两位同学初二学年 10 次数学单元自我测验的成绩 (成绩均为整数, 且个位数为 0) 分别如下图所示:



张明同学



王成同学

利用图中提供的信息, 解答下列问题.

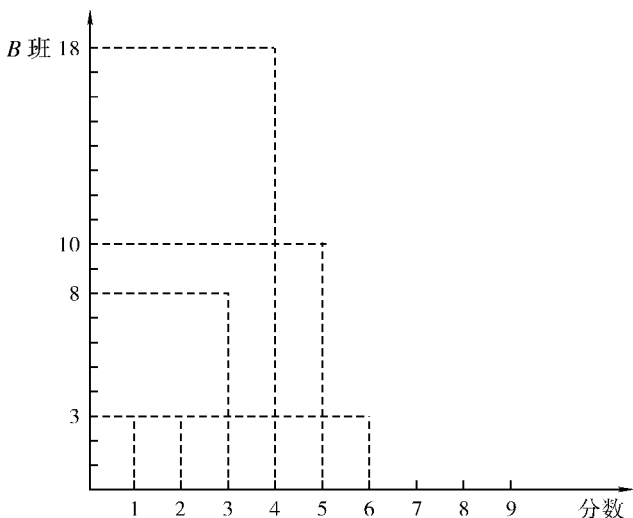
(1) 完成下表:

姓名	平均成绩	中位数	众数	方差 (S^2)
		80	80	
				260

(2) 如果将 90 分以上 (含 90 分) 的成绩视为优秀, 则优秀率高的同学是_____.

(3) 根据图表信息, 请你对这两位同学提一条不超过 20 个字的学习建议.

3. 现有 A、B 两个班级, 每个班级各有 45 名学生参加一次测验, 每名参加者可获得 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 分这几种不同分值中的一种, 测验结果是 A 班成绩如下表所示, B 班成绩如图所示.

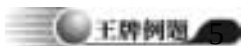


A班：

分 数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
人 数	1	3	5	7	6	8	6	4	3	2

(1) _____ 班的标准差较大.

(2) 若两班合计共有 60 人及格,问参加者最少获 _____ 分才可以及格.



为了考察甲、乙两种小麦的长势,分别从中抽取了 10 株苗,测得苗高如下(单位:厘米):

甲: 12,13,14,15,10,16,13,11,15,11

乙: 11,16,17,14,13,19,6,8,10,16

(1) 分别计算两种小麦的平均苗高.

(2) 哪种小麦的 10 株苗高较整齐.

【思路导航】两种小麦的 10 株苗高的平均数相同,而要比哪种苗高较整齐,可比较它们的方差,方差反映数据的波动大小,方差小的较整齐.

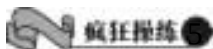
$$\begin{aligned}\text{解: (1) } \bar{x}_{\text{甲}} &= \frac{1}{10} (12 + 13 + 14 + 15 + 10 + 16 + 13 + 11 + 15 + 11) \\ &= 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_{\text{乙}} &= \frac{1}{10} (11 + 16 + 17 + 14 + 13 + 19 + 6 + 8 + 10 + 16) \\ &= 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) S_{\text{甲}}^2 &= \frac{1}{10} [(12 - 13)^2 + (13 - 13)^2 + (14 - 13)^2 + (15 - \\ &\quad 13)^2 + (10 - 13)^2 + (16 - 13)^2 + (13 - 13)^2 + \\ &\quad (11 - 13)^2 + (15 - 13)^2 + (11 - 13)^2] \\ &= 3.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{乙}}^2 &= \frac{1}{10} [(11 - 13)^2 + (16 - 13)^2 + (17 - 13)^2 + (14 - \\ &\quad 13)^2 + (19 - 13)^2 + (6 - 13)^2 + (8 - 13)^2 + (10 - \\ &\quad 13)^2 + (16 - 13)^2] \\ &= 15.8 \end{aligned}$$

由于 $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$, 所以甲种小麦的 10 株苗高长得较整齐.



1. 两名跳远运动员在 10 次测验比赛中的成绩分别如下
(单位 :cm) :

甲 : 585, 593, 607, 591, 599, 613, 598, 605, 600, 519

乙 : 611, 608, 583, 592, 584, 581, 618, 617, 585, 621

请问哪个运动员测验成绩较稳定 ?

2. 某市某风景区在连续两年两个五一黄金周期间,每天接待旅游人数如下表:

日 期	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日
第一年接待人数 (单位:万)	1.2	2	2.5	2	1.2	2	0.6
第二年接待人数 (单位:万)	2	2.6	3	2.5	0.7	0.4	0.3

请你从上述数据比较两个黄金周旅游人数有什么相同和不同之处,并试着分析人数不同的原因可能是什么?

3. 一次学生课外作业中,甲、乙两组学生各自对学校旗杆高度进行了 5 次测量,所得数据如下表所示:

所测得的旗杆高度 (单位:米)	11.90	11.95	12.00	12.05
甲组测得的次数	1	0	2	2
乙组测得的次数	0	2	1	2

(1) 求甲组所测得数据的中位数与平均数.

(2) 问哪一组学生所测得的旗杆高度比较一致?

【学后反思】

画频数分布直方图一般步骤是:

- (1) 计算极差;
- (2) 决定组距与组数;
- (3) 确定分点;
- (4) 统计各组的频数;
- (5) 画出频率分布直方图.

在第(2)步骤中,要注意数据越多,分的组数也越多.当数据在100以内时,通常按照数据的多少,分成5~12组.第(3)步骤中,确定分点要注意组距相等并使得某一个数据只能落在一组中.第(4)步骤中,可采用唱票法统计频数.在频数分布直方图上取点、连线,可得到频数分布直方图,也可直接绘制折线图,但不管怎样,所取的点应在“条形”或所取区间上部的正中,更好地反映频数分布情况.

方差、标准差和极差常反映数据的稳定性,两组数据的“平均水平”相近,“波动状况”则可能不尽相同.一组数据的极差、方差或标准差越小,这组数据就越稳定.计算方差或标准差要能熟练运用计算器或计算机来进行.



参考答案

1

练 1

1. (3) 2. (2) 3. (4)

练 2

1. (3) 2. (2) 3. (1) ± 8 , (2) ± 9 (3) 5 (4) 5

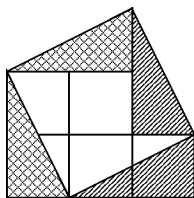
练 3

1. $x=7$ 或 $x=-5$ 2. $x=\frac{8}{7}$ 或 $x=\frac{46}{21}$

3. $y=-3$ (提示 先通过 $(2-x)^2=49$, 求得 $x=-5$ 或 9 , 由 $\sqrt{x}+y=0$, 得 $x \neq -5$, 则 $x=9$, 代入 $\sqrt{x}+y=0$ 即可)

练 4

1. 车速 96 千米/时
2. (1) 如右图所示 (2) $x=\sqrt{5}$
3. 距离杆脚周围半径不大于 6 米的范围内有被砸伤



的危险 (提示 设 $AC=x$, 则 $BC=8-x$, 由勾股定理:

$x^2+4^2=(8-x)^2$, 得 $x=3$ 米, 所以 $AD=1.75$, $ED=6.25$, 可得 $AE=6$ 米)

练 5

1. 由 $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$, $x+y$ 的平方根为 ± 2 .
2. $a=-3, b=2, m=21$, 所以 $(a+b)^m = (-1)^{21} = -1$
3. 由 $\begin{cases} x+y-25=0 \\ x-y+7=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=9 \\ y=16 \end{cases}$

(1), $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$ (2) $\sqrt{x}-1=2, \sqrt{y}=4$

仅以 4 为腰, 2 为底, 其周长为 10.

2

练 1

1. (1) 2. $\pm 2, \pm 2, 0, 0$ 和 ± 1 3. $4, -\frac{1}{2}, a^2b^3, -3$

练 2

1. (1) $x = \frac{2}{3}$ (2) $x = \frac{3}{4}$ (3) $x = -3$ (4) $x = -\frac{8}{3}$
 2. 提示 设底面圆半径为 x , 则 $\pi x^2 \cdot 2x = 16\pi$ 解得 $x = 2$,
 底面圆半径为 2 cm
 3. 提示 设小钢球的半径为 r cm, 则 $4^2\pi \times 10 = 15 \times \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, 解之 $r = 2$

练 3

1. $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$
 2. 由 $1 - 2x + 3y - 2 = 0$ 得 $-2x - 1 = -3y$, 即 $2x + 1 = 3y$, $\frac{1+2x}{y} = 3$
 3. 提示 算术平方根与立方根相等的数只有 0, $a - 3 = 0$ 即 $a = 3$

练 4

1. $12 < \sqrt{145} < 13 < \sqrt{169.5}$, 钢笔价格为 13 元
 2. 42 次 3. (2)

练 5

1. (1) $\frac{\sqrt{5}+3}{2} > 2.5$ (2) $\sqrt[3]{67} < 4.2$
 2. $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $a + b > c$
 3. 提示 分析得 $a = 18 + 18 + 17 = 53$, $a > \sqrt{2490}$

3

练 1

自然数集合为 $\{(-\sqrt{3})^0, 0, \dots\}$

整数集合为 $\{(-\sqrt{3})^0, 0, \sqrt[3]{-125}, \dots\}$



负有理数集合为 $\{\sqrt[3]{-125}, -\sqrt{\frac{25}{81}}, \dots\}$

无理数集合为 $\{(\sqrt{\pi})^2, \sqrt{8.1}, \sqrt[3]{-100}, \dots\}$

2. (1)

3. (3)

练 2

1. (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2

2. (1) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ (2) 15 (3) 9 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $2\sqrt{10}$

3. (1) $x=3$ (2) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}+2$ (3) $x=1$

练 3

1. 提示 $d = \sqrt{11} - 3, d(d+6) = 2$

2. 由题意 $a=5, 1-b=3+2\sqrt{2}-5$, 即 $b=3-2\sqrt{2}$,
 $(a+b)(a-b) = 8+12\sqrt{2}$

3. 提示 $\sqrt{7}=2+a, \sqrt{5}=2+b$,

$b^2 - a^2 + 4b - 4a = (b^2 + 4b + 4) - a^2 - 4a - 4 = (b+2)^2 - (a+2)^2 = -2$

练 4

1. $x^2 + 2x + 2 = 24$

2. $\sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{12-8} = 2$

3. $x - \frac{1}{x} = \pm 2$ (提示 先求 $(x - \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 4 = 4$)

练 5

1. $x = \sqrt{2}, y = 4, x^y = (\sqrt{2})^4 = 4$

2. $a=1, b=2, \sqrt{3(a+b)} = 3$

3. $\sqrt{k}=3$ (提示 由 $\sqrt{k-5}$ 得 $k \geq 5$, 原等式变形为 $k-2+\sqrt{k-5}=k$, 即

$\sqrt{k-5}=2, k=9$)

4

练 1

略.

练 2

1. 、3. 略.

2. C (4,50°) D (2,60°)

练 3

1. 七个顶点的坐标为 : (2,6)、(4,6)、(4,7)、(6,5)、(4,3)、(4,4)、(2,4) ;
(10,2) 表示 C 点, (12,4) 表示 D 点.

2. (2,3) → (2,4) → (2,5) → (2,6) → (3,6) → (4,6)

(2,3) → (3,3) → (3,4) → (3,5) → (3,6) → (4,6)

(2,3) → (2,4) → (3,4) → (4,4) → (4,5) → (4,6)

3. (1) 北偏西 30° 到校门距离为 4 cm, 实际距离 400 米

(2) 实验楼 (3) 450 米

练 4

1. 略.

2. (-4,0)、(0,3)、(4,0)、(0,-3) 或 (-3,0)、(0,4)、(3,0)、(0,-4)

3. (1) B₁ (-2,0) B₂ (-8,0) (2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = \frac{15}{2}$

练 5

1. $m < 0$ 2. P (-3,2) 3. (4)

5

练 1

1. M (3 $\sqrt{3}$, -3)

2. A (10 $\sqrt{3}$,10) B (15+10 $\sqrt{3}$,10) C (15+ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$,0)

3. A (-2,2) B (-2,-2) C (2,-2) D (2,2)

练 2

1. (3) 2. (3) 3. (7,2) 或 (-1,2) 或 (1,-2)

练 5

- $(-2, -3)$ $(2, 3)$ $(2, -3)$
- $(3, -4)$ 3. $m < 1$

6

练 1

- (1) 6 时、8 时、18 时的气温分别是 0、3、6 (2) 最高气温 10，最低气温 -2 (3) 自变量是时间 t ，函数是气温 T .

- (4)
- (4)

练 2

- $y = 180 - 2x$ ($0^\circ < x < 90^\circ$) (1) $x = 30^\circ$ 时 $y = 120^\circ$
 (2) $y = 100^\circ$ 时, $x = 40^\circ$
- (1) $S = 100 - 10t$ ($0 \leq t \leq 10$) (2) $t = 4$ 时, $S = 60$ (3) $S = 20$ 时, $t = 8$
- $y = 2.6x + 26$ ($0 \leq x \leq 20$)

练 3

- (1) $y = 1200 + 0.15\% x$ (2) 1221.6 (3) 15 个月
- (1) $v = 2t$ (2) 7 (3) 8 秒
- (1) $y = 2.4 + t$ ($t \geq 3$) (2) $t = 5$ 时 $y = 4.4$ (3) 14.6 分

练 5

- (3) 2. (3) 3. (4)

7

练 1

- (1) $k = 3, b = 2$ (2) $k = -1$
- $y = x - 2$ 3. 不在

练 2

- $k = -\frac{3}{4}, b = -\frac{3}{2}$
- 16 3. $\pm \frac{1}{2}$

练 3

- $S = 4n - 4$
- (1) 略, (2) $y = -2x + 24$
- (1) $y = -190x + 2520$ (2) 2008

练 4

- $y = \frac{5}{2}x + 25$ ($x \geq 10$) (2) 100 升
- (1) 甲 100 千米/时 乙 25 千米/时 甲速度大
(2) 150 千米 (3) 2 小时
- (1) 骑自行车出发早, 早 3 小时, 摩托车到达乙地早, 早 3 小时
(2) 10 千米/时 40 千米/时
(3) $y_1 = 10x$ $y_2 = 40x - 120$
(4) 在 3 时 ~ 5 时两车均在途中 ① $10x > 40x - 120$ ② $10x = 40x - 120$
③ $10x < 40x - 120$ ($x < 5$)

练 5

- (1) $y_1 = 50 + 0.4x, y_2 = 0.6x$ (2) 250 分钟 (3) 全球通
- (1) 一样 (2) $y_{\text{甲}} = 0.7x + 10$ $y_{\text{乙}} = 0.85x$ (3) 30 本
- (1) $y_1 = 200 + 0.3x$ $y_2 = 0.2x - 200$ (2) 亏、亏 20 万元
(3) 当 $x > 1000$ 时, 盈利; 当 $x = 1000$ 时, 不盈不亏; 当 $x < 1000$ 时, 亏损

8

练 1

- (1) $\begin{cases} k^2 - 1 = 0 \\ k + 1 = 0 \end{cases}$ $k = -1$ 时, 是一元一次方程
(2) $\begin{cases} k^2 - 1 = 0 \\ k + 1 \neq 0 \\ k - 7 \neq 0 \end{cases}$ $k = 1$ 时, 是二元一次方程
- $m = 2, n = -2$
- $\begin{cases} 2m + 5n + 9 = 1 \\ 4m - 2n - 7 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 1 \\ n = -2 \end{cases}$
 $(n+1)^{m+1999} = (-2+1)^{2001} = -1$

练 2

1. $y = \frac{2x+11}{5}$

2. $x = 2 - 3y$

3. $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

练 3

1. 提示 解关于 x, y 的方程组将 $x = 7m, y = -2m$, 代入 $2x + 3y = 6, m = \frac{3}{4}$

2. 解: $\begin{cases} x+2y=10 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ 代入方程组的第二式得 $\begin{cases} 4b+3a=1 \\ 4a+3b=6 \end{cases}$

解得 $a=3, b=-2. (a+b)=1 \quad (a+b)^{2004}=1$ 3. 提示 无论 λ 取何值, 都与 λ 无关.

$$\begin{cases} 13x+4y+14=0 \\ 5x-6y+28=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

练 4

1. (1) $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x=-\frac{17}{35} \\ y=-\frac{3}{7} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-\frac{11}{17} \\ y=\frac{26}{17} \end{cases}$

3. $\begin{cases} m=4 \\ n=-1 \end{cases}$

练 5

1. ① + ② 得 $x = y \quad \begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases}$

2. ② - ① 得 $x - y = 2 \quad \begin{cases} x = \frac{43}{8} \\ y = \frac{27}{8} \end{cases}$

3. 由①得 $x + y = 10$ 代入② 得
$$\begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{11}{2} \end{cases}$$

4. 提示 设 $\frac{x+2y}{3} = A$ $\frac{x-2y}{2} = B$ 解得
$$\begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{5}{2} \end{cases}$$
 解得
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

9

练 1

1. 设学校有大宿舍 x 间,小宿舍 y 间
$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 8x + 6y = 240 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 \text{ 间} \\ y = 24 \text{ 间} \end{cases}$$

2. 设加工机轴 x 人,加工轴承 y 人
$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 2 \times 15x = 24y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40 \text{ 人} \\ y = 50 \text{ 人} \end{cases}$$

3. 设该同学从家到学校的路程是 x 千米,原来规定路上所用时间是 y 小

时.
$$\begin{cases} 5(y - \frac{6}{60}) = x \\ 4(y + \frac{6}{60}) = x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \text{ 千米} \\ y = \frac{9}{10} \text{ 小时} \end{cases}$$

练 2

1. 设这两块田改用良种前产量分别是 x 千克和 y 千克

$$\begin{cases} x + y = 470 \\ (1 + 16\%)x + (1 + 10\%)y = 523 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 100 \text{ 千克} \\ y = 370 \text{ 千克} \end{cases}$$

则今年两块田的产量分别是 116 千克和 407 千克,各增产 16 千克和 37 千克.

2. 设原计划甲厂生产 x 台,乙厂生产 y 台

$$\begin{cases} x + y = 460 \\ 110\%x + 115\%y = 519 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 200 \text{ 台} \\ y = 260 \text{ 台} \end{cases}$$

本月甲厂超额 20 台,乙厂 39 台.

3. 设原来初中有 x 人,高中有 y 人

$$\begin{cases} x + y = 4200 \\ (1 + 8\%)x + (1 + 11\%)y = 4200 \times (1 + 10\%) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1400 \text{ 人} \\ y = 2800 \text{ 人} \end{cases}$$

这所学校现在有初中学生数是 1512 人,高中学生数是 3108 人

练 3

1. 设甲种商品原来的单价是 x 元,乙种商品原来的单价是 y 元

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ (1 - 10\%)x + (1 + 5\%)y = 100 \times (1 + 2\%) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 20 \text{ 元} \\ y = 80 \text{ 元} \end{cases}$$

2. 设甲店售出 x 件,乙店售出 y 件

$$\begin{cases} y = 2x \\ 100(1 + 20\%)y(1 - 5\%) - 100y - [100(1 + 30\%)x(1 - 5\%) - 100x] = 1800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 400 \text{ 件} \\ y = 800 \text{ 件} \end{cases}$$

3. 设甲种贷款 x 万元,乙种贷款 y 万元

$$\begin{cases} x + y = 68 \\ 12\%x + 13\%y = 8.42 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 42 \text{ 万元} \\ y = 26 \text{ 万元} \end{cases}$$

练 4

1. 设甲的速度是 x 千米/时,乙的速度是 y 千米/时

$$\begin{cases} 4x + 4y = 36 \\ 36 - 6x = 2(36 - 6y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \text{ 千米/时} \\ y = 5 \text{ 千米/时} \end{cases}$$

2. 设甲、乙两人的速度分别是 x 米/分、 y 米/分

$$\begin{cases} 3\frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}y = 600 \\ 18\frac{3}{4}y - 18\frac{3}{4}x = 600 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 64 \text{ 米/分} \\ y = 96 \text{ 米/分} \end{cases}$$

3. 设货车的速度是 x 千米/时,客车的速度是 y 千米/时

$$\begin{cases} 2x + 1.5y = 380 \\ 3x + 3y = 720 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40 \text{ 千米/时} \\ y = 200 \text{ 千米/时} \end{cases}$$

练 5

1. 设甲、乙、丙三种货物购一件各是 x 元、 y 元、 z 元

$$\begin{cases} 4x + 5y + z = 230 & \text{①} \\ 7x + 9y + z = 385 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得: } 3x + 4y = 155 \quad \text{③}$$

$$\text{③} \text{ 代入①得: } x + y + z = 85 \text{ 元}$$

2. 设甲一天做 x 件,乙一天做 y 件,丙一天做 z 件

$$\begin{cases} x+2y+z=\frac{1}{3}\times 300 \\ 2x+5y+2z=225 \end{cases}$$

解得 $x+y+z=75$ 件,则三人一起做, $\frac{300}{75}=4$ 天完成任务.

3. 设难题 x 道,容易题 y 道,两人都做出的题目 z 道

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+3y+2z=60\times 3 \end{cases}$$

解 $x-y=20$

10

练 1

1. 设 (一) 班有 x 名学生, (二) 班有 y 名学生

$$\begin{cases} x+y=104 \\ 13x+11y=1240 \end{cases} \quad \begin{cases} x=48 \text{ 人} \\ y=56 \text{ 人} \end{cases}$$

2. 设投进 3 个球 x 人, 4 个球 y 人

$$\begin{cases} 3x+4y+2\times 5=3.5\times (x+y+2) \\ 3x+4y+2\times 7+1\times 2=2.5(1+2+7+x+y) \end{cases} \quad \begin{cases} x=9 \text{ 人} \\ y=3 \text{ 人} \end{cases}$$

3. 设运输甲种蔬菜 x 辆,乙种蔬菜 y 辆,丙种蔬菜 z 辆

$$\begin{cases} 2x+y+1.5z=36 \\ x+y+z=20 \\ 500\times 2x+700\times y+400\times 1.5z=18300 \end{cases} \quad \begin{cases} x=15 \text{ 辆} \\ y=3 \text{ 辆} \\ z=2 \text{ 辆} \end{cases}$$

练 2

1. 设原来两位数的十位数字是 x ,个位数字是 y

$$\begin{cases} 10x+y=6(x+y)+3 \\ 10y+x=4(x+y)+9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$$

2. 设今年小李 x 岁,他爷爷 y 岁

$$\begin{cases} x=\frac{1}{5}y \\ x+12=\frac{1}{3}(y+12) \end{cases} \quad \begin{cases} x=12 \text{ 岁} \\ y=60 \text{ 岁} \end{cases}$$

3. 设蜘蛛 x 只,蟋蟀 y 只 $8x+6y=46$ 这是一个不定方程 x, y 都是正整数

且 $0 < x \leq 5, 0 < y \leq 7$ $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$

箱中蜘蛛和蟋蟀是 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$

练 3

1. 交点坐标是 (2,0)

2. $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=-2 \end{cases}$

3. (1) 当 $m \neq 6$ 时有惟一解 两直线相交 (2) 当 $m=6$ 且 $n \neq 2$ 时无解
两直线平行 (3) 当 $m=6$ 且 $n=2$ 时有无数组解,两直线重合,图略.

练 4

1. $\begin{cases} 3=2k+b \\ -1=-\frac{3}{2}k+b \end{cases} \quad \begin{cases} k=\frac{8}{7} \\ b=\frac{5}{7} \end{cases} \quad y=\frac{8}{7}x+\frac{5}{7}$

2. $OA=OB$ $B(0, -5)$ $OA: y=\frac{4}{3}x$ $AB: y=3x-5$

3. 图(略) 交点 $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ 方程组的解 $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

练 5

1. (1) 设 $y=kx+b$ $\begin{cases} 10=80k+b \\ 6=60k+b \end{cases} \quad \begin{cases} k=\frac{1}{5} \\ b=-6 \end{cases}$

$y=\frac{1}{5}x-6$ ($x \geq 30$) (2) 可免费带 30 kg 的行李

2. 甲 3 小时行了 6 千米,乙 3 小时行了 $\frac{3}{2}$ 千米,则相距 $6-3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ 千米

3. (1) 4 千米/时 (2) 5 千米

练 1

1. 9.5 元

2. 七年级平均每班 51 人,八年级平均每班 51.5 人,全校平均每班 51.25 人

3. 王华家平均每月费用最高:118.5 元, 每户平均水费 371.67 元, 电费 655.33 元, 气费 413.67 元.

练 2

1. $13\frac{1}{3}$ 千米/时

2. 4.8 千米/时

3. 后一段路速度需要 45 千米/时 整个过程的平均速度是 50 千米/时

练 3

1. 73 分

2. 平均身高 183.27 cm 平均年龄 27.09 岁

3. 1.8 千克 3240 千克 24300 元

练 4

1. 八年级全部学生的平均分约为 83.14 分

2. (1) 各班总得分 37.7 分 37.7 分 37.6 分 37.4 分

(2) 二班成绩最好 9.445 分

3. 学期总评分数是 92 分, 另一个同学如能超过, 这时, 期末成绩应高于 98 分

练 5

1. (2)

2. (2)

3. 这种可能存在, 因为比他矮的 20 人中有偏离平均数较大的同学, 他对全班的平均身高产生了较大的影响.

12

练 1

1. (1)

2. (2)

3. (1) $x=5$ $y=8$ (2) $a=80$ $b=75$ $a-b=80-75=5$

练 2

1. (1) 810 元 (2) 450 元 (3) 中位数, 个别数据对它影响较小

(4) 445 元, 能, 因为影响较大数据去掉



2. (1) 小刘是从平均分上来说,小华是从中位数上来说,小李是从众数上来说.
(2) 三人说法分别从对自己有利的一方面来说明,从整体上来看,小刘较稳定,小华、小李进步较大

3. (1) 1378.14 美元 :这个数能较高反映工人的工资情况 (2) 800 美元 :代表广大工人的实际情况 (3) 900 美元 :征得较多的税额

练 3

1. 25.67 (2) 中位数 25 众数是 25
2. (1) 平均身高 184.83 cm (2) 身高的中位数 183 cm, 众数 183 cm.
3. 8.625 题

练 4

1. (1) 55.5 万 (2) 6% 22.2 万 (3) 6 万
2. (1) 14.29 件 (2) 两天达到平均销售件数
3. (1) 50% 40% 7% 3% (2) 图略 (3) 对实验教材 90% 的同学较喜欢,说明这次教材改革是较成功的

练 5

1. 平均数是 3.95 元 中位数是 4 元 众数是 4 元.
2. (1) 图略 (2) 平均数是 19.48 分钟,中位数 20 分钟,众数 20 分钟
- (3) 20 分钟
3. 去掉最高分、最低分后,从而使得平均分受个别数据的影响减小

13

练 1

1. $\frac{1}{2}x - 4 \leq x$
2. $x - 1.5y \geq 728$ (x 为美国 F - 15 战斗机的空重, y 为俄制 Mig - 21 战斗机满载重量,单位 :千克)
3. $-3a > |-a|$

练 2

1. (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$ (4) $\times$
2. $<, <, >, >, >, >$
3. (2)

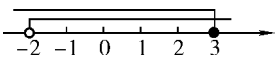
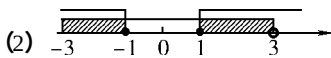
练 3

1. $>$
2. $>$
3. $a > -1$ 时, $>$; $a = -1$ 时, $=$; $a < -1$ 时, $<$

练 4

1. (3)
2. (3)
3. $\pm 3, \pm 4$

练 5

1. (1)  (2) 
2. (4)
3. (1) $x > 0$ (2) $x < 3$ (3) $-1 \leq x < 3$ (4) $-2 \leq x \leq 4$

14

练 1

1. (1) $x \geq \frac{70}{29}$ (2) $x > -\frac{1}{5}$
2. $a > 0$ 时, $x < \frac{17}{a}$; $a < 0$ 时, $x > \frac{17}{a}$

练 2

1. $x < -\frac{n}{m^2 + 1}$
2. $0 \leq x \leq 4$
3. $a = 4$

练 3

1. 1, 2, 3, 4
2. $x < -3$
3. $x < \frac{3}{5}$

练 4

1. $x \leq \frac{3}{2}$

2. $k < 2$

3. $x < \frac{5}{6}$

练 5

1. 7 个

2. 8 个百分点

3. 刻录数少于 30 张时,自刻费用省;当刻录 30 张时,费用一样;当刻录多于 30 张时,到电脑公司刻费用少.

15

练 1

1. 13 枝

2. (1) $y = 0.3x + 0.5 (3500 - x)$ (2) 在 1225 元到 1330 元之间

3. (1) $y = 20x + 860$ (2) 三种,即 $x = 0, 1, 2$ (3) 乙仓库的 6 辆调往 B 县,甲仓库的 2 辆、10 辆分别调往 B 县、A 县,最低运费为 860 元.

练 2

1. (1) 16 18

(2) 3 kg, 2 kg 包装盒各 12 kg 时包装成本最省,最省成本为 16.8 元

2. (1) (1) 270 人 (2) 1400 元

3. (1) 甲 25 台乙 25 台,或甲 35 台丙 15 台 (2) 甲 35 台,乙 0 台,丙 15 台时获利最多 (3) 4 种方案

练 3

1. 便宜 20 元 最少 17 人

2. (1) $y_1 = 16x - 44.36, y_2 = 12x - 23.56$ (2) 当载客 6 ~ 19 人时,走新路收入多,当载客不多于 5 人时,走旧路收入多

3. (1) 节约 74 元 (2) 甲班有 58 名学生,乙班有 45 名学生

练 4

1. (1) $a = 0.2, c = 0.1$ (2) $y = 0.1x + 25$

2. (1) $y = 1.8(x - 3) + 8$

(2) 够打的 ($x = 6$ 时, $y = 1.8 \times (6 - 3) + 8 = 13.4 < 14$)

3. (1) $0 \leq x \leq 100$ 时 $y = 0.57x$ $x > 100$ 时 $y = 0.57x + 0.5(x - 100)$

(2) 330 度

练 5

1. 购买 10 台或 10 台以下选乙公司, 购买 11 台至 19 台选乙公司, 购买 20 台甲、乙两公司可任选一个, 购买 20 台以上时选甲公司.

2. 投资不足 20000 元时, 第一种方案获利多 投资 20000 元时, 两种方案获利一样多 投资超过 20000 元时, 第二种方案获利多

3. (1) $y_{\text{甲}} = 5x + 60$ ($x \geq 4$) $y_{\text{乙}} = 72 + 4.5x$ ($x \geq 4$) (2) 购买乒乓球少于 24 盒时去甲店买合算, 购买 24 盒乒乓球时两家店一样合算, 购买乒乓球超过 24 盒时去乙店买合算.

16

练 1

1. $x < -1$ 2. 无解 3. $-\frac{3}{2} < x \leq 1$, 则整数解的和为 0.

练 2

1. 0, 1, 2 2. $a > -\frac{1}{2}$ 或 $a < -\frac{5}{4}$ 3. $-\frac{15}{2} < k < 25$

练 3

1. 若 $a \geq 3$ 时, $x > a$ 若 $a < 3$ 时, $x > 3$

2. $m > \frac{3}{2}$ 时, $x < \frac{n-3}{2m-3}$. $m < \frac{3}{2}$ 时, $x > \frac{n-3}{2m-3}$.

$m = \frac{3}{2}$ 且 $n > 3$ 时, 解集为所有实数.

$m = \frac{3}{2}$ 且 $n \leq 3$ 时, 无解.

3. $a > 0$ 时, $\frac{2}{a} < x < \frac{3}{a}$; $a = 0$ 时, 无解; $a < 0$ 时, $\frac{3}{a} < x < \frac{2}{a}$.

练 4

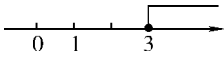
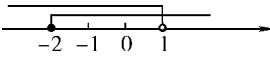
1. $a \leq 3$ 2. $1 - a < x < 1 - b$ 3. $-4 < a \leq -3$

练 5

- 30 或 31 个小朋友 149 或 152 件玩具
- 约为 20 ~ 24 亿吨标准煤
- 底楼有客房 10 间

17

练 1

- $x \geq 3$ 
 - $-2 \leq x < 1$ 
- $-1 < x < \frac{1}{2}$ 无解; $-1 < x < 1$.

(2) $k \leq 0$ 时, $-1 < x < 1$ 且 $k < 2$ 时, $-1 < x < 1 - k$ $k \geq 2$ 时, 无解.

练 2

- $k > 36$
- (1) $k \geq 6$ (2) $k < -9$ 3. $x < 3$

练 3

- $x < 46$
- $-\frac{7}{15} < m < \frac{10}{7}$
- $\frac{9}{2}$

练 4

- $m \leq -4$
- -6
- $x < \frac{13}{45}$

练 5

- 10 辆
- 20%
- (1) 应选 C 类年票 (2) 超过 30 次

18

练 1

- (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $\times$ (4) $\checkmark$
- (4)
- (4)

练 2

- $2005^2 - 2005 \times 5 = 2005 \times (2005 - 5) = 2005 \times 2000$,

所以, $2005^2 - 2005 \times 5$ 能被 2000 整除. 它还能被 2, 5, 8, 10, 100 等正整数整除 (结果不惟一, 只要符合题意即可).

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &= \frac{2000^2 (2000 - 2) - 1998}{2000^2 (2000 + 1) - 2001} = \frac{1998 \times 2000^2 - 1998}{2001 \times 2000^2 - 2001} \\ &= \frac{1998 (2000^2 - 1)}{2001 (2000^2 - 1)} = \frac{1998}{2001} \end{aligned}$$

$$3. (1) \text{原式} = 21 \times 3.14 + 62 \times 3.14 + 17 \times 3.14 = 3.14 \times (21 + 62 + 17) \\ = 3.14 \times 100 = 314$$

$$(2) \text{原式} = 0.43 \times 1999 + 0.76 \times 1999 - 0.19 \times 1999 \\ = 1999 \times (0.43 + 0.76 - 0.19) = 1999$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= \frac{2001 \times 0.3 + 2001 \times 5.7 - 2001 \times 6.1}{667 \times 0.5 + 667 \times 0.7 - 667 \times 1.1} \\ &= \frac{2001 \times (0.3 + 5.7 - 6.1)}{667 \times (0.5 + 0.7 - 1.1)} \\ &= \frac{2001 \times (-0.1)}{667 \times 0.1} = -3 \end{aligned}$$

练 3

$$1. (1) 4x^3 \quad (2) 5x^2y^2 \quad (3) 3ab$$

$$2. (1) 7(x+y) \quad (2) a-b \text{ 或 } b-a$$

$$3. \text{原式} = (x+y-z)(x-y+z) + (x-y-z)(x-y+z), \\ \text{故有公因式 } (x-y+z).$$

练 4

$$1. (1) 2a^3b^2c(4b-3b^2c+2ac) \quad (2) \frac{1}{24}ab(6b-3a+8)$$

$$(3) 4a^mb(2b^2+3ab+4a^2)$$

$$2. (1) -2xy(2x^3+3xy^2-y^3) \quad (2) -5ab(b-2a+3b^2)$$

$$(3) -5xy(2x+y-3)$$

$$3. (1) 4ax(9b-2b^2+1) \quad (2) xy(2x+5y-1) \quad (3) x(3x-6y+1)$$

练 5

$$1. (1) (x-y)(a+b-c) \quad (2) m(p-q)(m-1) \quad (3) (a-2b+3c)(2x+3y)$$

$$2. (1) (x-4y)(3a+4b-5c) \quad (2) 2(3p-4q)(p+q)$$

$$(3) 2(a-b)(a-c)(x-2y)$$

$$3. (1) (b-a)^2(ab-a^2-b^2) \quad (2) -6x(y-3x)(4xy-12x^2-1)$$

$$(3) \begin{cases} (a-3)^n(x-y) & (n \text{ 为偶数}) \\ (a-3)^n(x+y) & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

练 1

- (1) $(\frac{2}{3}m+1)(\frac{2}{3}m-1)$ (2) $(\frac{4}{7}x+\frac{1}{5}y)(\frac{4}{7}x-\frac{1}{5}y)$
- (1) $(2y+x^3)(2y-x^3)$ (2) $(y+0.4x)(y-0.4x)$
- (1) $(4x+7y^2)(4x-7y^2)$ (2) $(11y+6x)(11y-6x)$

练 2

- (1) $(5+3a+b)(5-3a-b)$ (2) $-7(x-y)(x+y)$
- (1) $16(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)$ (2) $\frac{1}{3}(3x^2-3y^2+xy)(3x^2-3y^2-xy)$
- (1) 原式 $= [2(m-n)]^2 - [3(m+n)]^2$
 $= (2m-2n+3m+3n)(2m-2n-3m-3n)$
 $= (5m+n)(-m-5n) = -(5m+n)(m+5n)$
 (2) 原式 $= [2(a+2b)]^2 - [5(a-b)]^2$
 $= (2a+4b+5a-5b)(2a+4b-5a+5b)$
 $= (7a-b)(9b-3a) = 3(7a-b)(3b-a)$

练 3

- (1) $(3x-1)^2$ (2) $(x+2y+1)^2$
- (1) $(x-3y+7)^2$ (2) $(a-2b)^2$
- (1) $(3a+5b)^2$ (2) $(a-4b)^2$

练 4

- (1) $-3xy(x-2y)^2$ (2) $\frac{1}{2}(a-4b)^2$
- (1) $-2(x-3y)^2$ (2) $-xy(x-1)^2$
- (1) 原式 $= 87^2 + 2 \times 87 \times 13 + 13^2$
 $= (87+13)^2 = 10000$
 (2) 原式 $= 12^2 + 2 \times 12 \times 8 + 8^2$
 $= (12+8)^2 = 400$

练 5

- (1) $(x+4y)^2(x-4y)^2$ (2) $-3x^3(x-2)^2(x+2)^2$
- (1) $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$

$$(2) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\begin{aligned} 3. (1) \text{原式} &= (m+n)^2 - 4(m+n) + 4 \\ &= (m+n-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= (p-q)^2 + 14(p-q) + 49 \\ &= (p-q+7)^2 \end{aligned}$$

20

练 1

- (1) $(a-3b)(2b+c)$ (2) $(4m-3n)(a-2b)$
- (1) $(2m-15n)(b+2a)$ (2) $(2x+3b)(3x-15a)$
- (1) $(x+2)(x-2)(x+3)$ (2) $(a-b)(3a-3b-1)$

练 2

- $(nx-my)(mx+ny)$
- $(bx+a)(ax+b)$
- $(x^2+2)(x-3)$

练 3

- $(x-y)(x+y-4)$
- $(2x-3y+5)(2x-3y-5)$
- $(x-y)(x-y-3)$

练 4

- $(x-y+3)^2$
- $(3a+b-4)(3a-b-2)$
- $y(2x+y-3z-1)(2x-y+3z-1)$

练 5

- $$\begin{aligned} \text{原式} &= (a^4 + 16a^2 + 64) - 16a^2 \\ &= (a^2 + 8 - 4a)(a^2 + 8 + 4a) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \text{原式} &= (x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2 \\ &= (x^2 + 4 + 2x)(x^2 + 4 - 2x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \text{原式} &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \end{aligned}$$

练 1

$$1. 2^{100} - 2^{96} = 2^{96} \times (2^4 - 1) = 2^{96} \times 15,$$

所以, $2^{100} - 2^{96}$ 一定能被 15 整除.

$$\begin{aligned} 2. 2^{48} - 1 &= (2^{24} + 1)(2^{12} + 1)(2^6 + 1)(2^6 - 1) \\ &= (2^{24} + 1)(2^{12} + 1) \times 65 \times 63 \end{aligned}$$

所以, 这两个数分别为 65 与 63

$$\begin{aligned} 3. 81^7 - 27^9 - 9^{13} &= (3^4)^7 - (3^3)^9 - (3^2)^{13} \\ &= 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26} \times (3^2 - 3 - 1) \\ &= 3^{26} \times 5 = 3^{24} \times 3^2 \times 5 = 3^{24} \times 45 \end{aligned}$$

所以, $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除.

练 2

$$\begin{aligned} 1. \text{原式} &= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1 \\ &= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 5)^2 \quad \text{结论成立} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &= [(x+a)(x+4a)][(x+2a)(x+3a)] + a^4 \\ &= (x^2 + 5a + 4a^2)(x^2 + 5a + 6a^2) + a^4 \\ &= (x^2 + 5a)^2 + 10a^2(x^2 + 5a) + 24a^4 + a^4 \\ &= (x^2 + 5a + 5a^2)^2 \quad \text{命题成立} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{原式} &= [(x+2)(x-5)][(x+3)(x-6)] + 20 \\ &= (x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x - 18) + 20 \\ &= (x^2 - 3x)^2 - 28(x^2 - 3x) + 180 + 20 \\ &= (x^2 - 3x)^2 - 28(x^2 - 3x) + 196 + 4 \\ &= (x^2 - 3x - 14)^2 + 4 \end{aligned}$$

因为, $(x^2 - 3x - 14)^2 \geq 0$,

所以, $(x^2 - 3x - 14)^2 + 4 > 0$ 即为正数.

故结论成立.

练 3

1. 设另一个因式为 $x^2 + bx + 4$, 则

$$x^4 + 4x^2 + 3x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + bx + 4)$$

$$=x^4 + (b+1)x^3 + (5+b)x^2 + (4+b)x + 4,$$

所以 $b+1=0, 5+b=-4, 4+b=-3$, 解得 $b=-1$.

所以, 另一个因式为 $x^2 - x + 4$.

2. 设另一个因式为 $2x^2 + bx - 3$,

$$\begin{aligned} \text{则 } 2x^4 - 3x^3 + ax^2 + 7x + 6 &= (x^2 + x - 2)(2x^2 + bx - 3) \\ &= 2x^4 + (b+2)x^3 + (b-7)x^2 + (-3-2b)x + 6, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} b+2 = -3, \\ b-7 = a \\ 3+2b = -7 \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a = -12 \\ b = -5 \end{cases}$$

所以, $a = -12$

$$\text{原式} = (x^2 + x - 2)(2x^2 - 5x - 3)$$

3. 设这个整式为 $x^2 + ax + b$, 则

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 &= (x^2 + ax + b)^2 \\ &= x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2 \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \begin{cases} 2a = -6 \\ a^2 + 2b = 13 \\ 2ab = -12 \\ b^2 = 4 \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

所以, 所求的整式为 $x^2 - 3x + 2$.

练 4

$$1. \begin{cases} x=30 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=30 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=-32 \\ y=-2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-32 \end{cases}$$

$$2. \quad ab + a + b = 3, \quad (a+1)(b+1) = 4,$$

$$\text{同理 } (b+1)(c+1) = 4, (c+1)(a+1) = 4$$

上面三式相乘, 得

$$(a+1)^2 (b+1)^2 (c+1)^2 = 64$$

由题意知 $a+1 > 0, b+1 > 0, c+1 > 0$,

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 8$$

$$3. \text{ 由已知得 } c(a+b) = 1993.$$

a, b, c 都是正整数,

, $a+b > 1$, 而 1993 是质数,

$$c=1, a+b=1993,$$

$$\begin{cases} a+b=1993 \\ ab+bc=3984 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1992 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=1992 \\ b=1 \end{cases}$$

, $abc=1992$ 或 $abc=3982$

故 abc 的最大值是 3982.

练 5

$$1. (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = [(b+c)^2 - a^2][(b-c)^2 - a^2] \\ = (b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a),$$

因为 a, b, c 是三角形的三边,

所以 $b+c+a > 0, b+c-a > 0, b-c+a > 0, b-c-a < 0$,

所以, $(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$, 结论成立.

$$2. a^3 - a^2b + ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2 = a^2(a-b) + b^2(a-b) - c^2(a-b) \\ = (a-b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

所以 $a-b=0$ 或 $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, 即 $a=b$ 或 $a^2 + b^2 = c^2$, 所以, $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

$$3. a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0, \text{所以}, 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 0, \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0, \text{故 } a-b=0, b-c=0, a-c=0, \text{所以 } a=b \\ \text{且 } b=c \text{ 且 } a=c, \text{即 } a=b=c, \text{所以}, \triangle ABC \text{ 为等边三角形.}$$

22

练 1

$$1. (1) x \neq -\frac{2}{3} \quad (2) x \neq 5 \text{ 且 } x \neq 6$$

$$(3) x \neq \pm 3 \quad (4) x \text{ 为任意实数}$$

$$2. (1) x=2 \quad (2) \text{无解} \quad (3) x=-5 \text{ 或 } x=4 \quad (4) x \leq 0$$

$$3. (1) x=5 \quad (2) \text{无解} \quad (3) \text{无解}$$

练 2

$$1. x > -3 \text{ 且 } x \neq 0$$

$$2. y \leq \frac{1}{3} \text{ 且 } y \neq 0$$

$$3. x > 7$$

练 3

$$1. (1) \text{分子、分母同时乘以 } 4(m+2)$$

(2) 分子、分母同时除以 y

2. (1) $-2x^2$ (2) $-3b$

3. (4)

练 4

1. (1) $-\frac{4a^2b}{3d}$ (2) $-\frac{m}{m+3}$ (3) $\frac{x+1}{x-2}$

2. (2)

3. (1) 原式 $= -\frac{x+1}{x-4} = \frac{2}{13}$

(2) 原式 $= \frac{x}{3x-y} = \frac{4}{13}$

练 5

1. 设 $x=3k$, 则 $y=5k$,

原式 $= \frac{(3k)^2 - 3 \times 3k \times 5k + 2 \times (5k)^2}{2 \times (3k)^2 + 5 \times 3k \times 5k - 7 \times (5k)^2} = -\frac{7}{41}$

(或用 $x = \frac{3}{5}y$ 代入所求的式子)

2. 由题意得 $a = \frac{3}{2}b$, 原式 $= \frac{5}{16}$.

3. 由题意得 $a-b = -ab$, 代入得原式 $= \frac{3}{5}$.

23

练 1

1. $\frac{5}{4}x^3y$ 2. $-\frac{2d}{3ac}$ 3. $\frac{16a^4xy}{27b^3z^2}$

练 2

1. $-\frac{2}{m-2}$ 2. $-y$ 3. $\frac{x}{x-2y} = 2$

练 3

1. $-\frac{b^3}{16}$ 2. $\frac{4y^4}{81x^6}$ 3. $\frac{1}{x(x+y)} = \frac{1}{2}$

练 4

$$1. -2x^n - 2 \quad 2. -\frac{x^{5n+19}z^8}{y^{8n+5}} \quad 3. \frac{2}{x}$$

练 5

$$1. \frac{17}{27}$$

$$2. 12$$

$$3. \text{ 设 } \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+8}{4} = k, \text{ 则 } x+4=3k \quad \text{①},$$

$$y+3=2k \quad \text{②},$$

$$z+8=4k \quad \text{③},$$

①+②+③, 得 $x+y+z+15=9k$, 又 $x+y+z=12$, $12+15=9k$,
即 $k=3$, 代入 得 $x=5, y=3, z=4$.

24

练 1

$$1. \text{ 原式 } = \frac{x+2y-(3y-x)-(3x-4y)}{x^2-y^2} = \frac{3y-x}{x^2-y^2}$$

$$2. \text{ 原式 } = \frac{-m^2+3-m+m+1}{m-2} \\ = -(m+2) = -m-2$$

$$3. \text{ 原式 } = \frac{b}{a-b+c} - \frac{2a+c}{a-b+c} + \frac{b-c}{a-b+c} \\ = -2$$

练 2

$$1. \text{ 原式 } = \frac{10(a+1)+3(a-1)-6(3a-1)}{6(a+1)(a-1)} \\ = \frac{-5a+13}{6(a+1)(a-1)} = -\frac{5a-13}{6(a^2-1)}$$

$$2. \text{ 原式 } = \frac{12-2(m+3)+(m+3)(m-3)}{(m+3)(m-3)} \\ = \frac{m^2-2m-3}{(m+3)(m-3)} = \frac{m+1}{m+3}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{原式} &= \frac{2a^2 + 10 + (a-5)(a+5) - (a^2 - 15)}{a+5} \\ &= \frac{2a^2}{a+5} \end{aligned}$$

练 3

$$\begin{aligned} 1. \text{原式} &= \frac{2a}{a^2 - b^2} + \frac{2a}{a^2 + b^2} + \frac{4a^3}{a^4 + b^4} \\ &= \frac{4a^3}{a^4 - b^4} + \frac{4a^3}{a^4 + b^4} = \frac{8a^7}{a^8 - b^8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &= \frac{(x^2 - 4y^2) + 4y^2}{x - 2y} - \frac{4x^2y}{x^2 - 4y^2} \\ &= \frac{x^2(x+2y) - 4x^2y}{x^2 - 4y^2} = \frac{x^3 - 2x^2y}{x^2 - 4y^2} = \frac{x^2}{x+2y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{原式} &= - \left[\frac{6a^2b}{a^2 - 9b^2} + \frac{9b^2 + (a^2 - 9b^2)}{a + 3b} \right] \\ &= - \frac{6a^2b + a^2(a - 3b)}{a^2 - 9b^2} = - \frac{a^3 + 3a^2b}{a^2 - 9b^2} \\ &= - \frac{a^2}{a - 3b} \end{aligned}$$

练 4

$$1. \text{原式} = \frac{x+y}{xy} \div \frac{(x+y)^2}{xy} \cdot (x+y) = 1$$

$$\begin{aligned} 2. \text{原式} &= \frac{(x-y)^2}{x+y} \div \frac{x^2 - xy + xy + y^2 - 2xy}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{(x-y)^2}{x+y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2} = x - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{原式} &= 1 - \frac{8}{a^2 - 4} \cdot \frac{(a-2)^2}{4a} \div \frac{a-2}{2a} \\ &= 1 - \frac{4}{a+2} = \frac{a-2}{a+2} \end{aligned}$$

练 5

1. 解 设两次购买粮食的单价分别为 x 元/千克和 y 元/千克.

, 甲两次购粮共需付粮款 $(100x + 100y)$ 元;

乙每次购粮用去 100 元, 故第一次购粮 $\frac{100}{x}$ 千克, 第二次购粮 $\frac{100}{y}$ 千克, 共



购粮 $(\frac{100}{x} + \frac{100}{y})$ 千克.

甲两次购粮的平均单价为：

$$\frac{100x + 100y}{100 + 100} = \frac{x + y}{2} \text{ (元/千克)}$$

乙两次购粮的平均单价为：

$$200 \div \left(\frac{100}{x} + \frac{100}{y} \right) = \frac{2xy}{x + y} \text{ (元/千克)}$$

，甲、乙所购粮食的平均单价之差为：

$$\frac{x + y}{2} - \frac{2xy}{x + y} = \frac{(x + y)^2 - 4xy}{2(x + y)} = \frac{(x - y)^2}{2(x + y)},$$

$$x \neq y, \quad (x - y)^2 > 0,$$

$$x, y \text{ 为正数}, \quad 2(x + y) > 0,$$

$$\therefore \frac{(x - y)^2}{2(x + y)} > 0,$$

$$\therefore \frac{x + y}{2} > \frac{2xy}{x + y},$$

即甲平均单价高于乙平均单价，故乙的购粮方式更合算些.

2. 设车站到目的地的距离为 S 千米，依题意，可求得第一个旅客所需时间为

$$\frac{S}{2} \div a + \frac{S}{2} \div b = \frac{(a + b)S}{2ab}, \text{ 第二个旅客所需时间为 } \frac{2S}{a + b},$$

$$\frac{(a + b)S}{2ab} - \frac{2S}{a + b} = \frac{S(a - b)^2}{2ab(a + b)}.$$

故①当 $a = b$ 时，两旅客同时到达；

$$\text{②当 } a \neq b \text{ 时}, \frac{(a + b)S}{2ab} > \frac{2S}{a + b}, \text{ 第二个旅客先到.}$$

3. (1) 设红队提速前红、绿两支车队的速度分别为 x 千米/时和 y 千米/时，

$$\text{则有 } \frac{1800}{x} = \frac{2000}{y}, \text{ 解得 } \frac{x}{y} = \frac{9}{10}, \text{ 即红、绿两支车队提速前的速度比为 } 9:10.$$

(2) 设 $x = 9k$ ，则 $y = 10k$ ，

故绿队行后 1000 千米所用时间为 $t_1 = \frac{1000}{10k}$ ，红队行后 1200 千米所用时间

为 $t_2 = \frac{1200}{9k \times 1.2} = \frac{1000}{9k}$ ，因为 $t_1 \neq t_2$ ，所以红、绿两支车队不能同时到达北京.

(3) 由 (2) 得， $t_1 < t_2$ ，所以绿车队先到达北京，设绿队到达北京时，两车队相

距 a 千米,依题意有 $\frac{1200 - a}{9k \times 1.2} = \frac{1000}{10k}$,解得 $a = 120$ 千米.

25

练 1

1. x 应满足的分式方程为 $\frac{50}{2.5x} + 1 + 1 \frac{30}{60} = \frac{50}{x}$.

2. x 应满足的分式方程为

$$\frac{9}{16} + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{x} \right) \times 21 = 1$$

3. x 应满足的分式方程为:

$$\frac{2000}{x+3} + \frac{4800}{x-1} = \frac{2000+4800}{x}$$

练 2

1. $x = -\frac{1}{2}$

2. $x=3$ 是增根,原方程无解

3. 根据题意知,两个方程都有增根,且增根相等,而分式方程的增根必使方程中各个分式的公分母的值为零,因此,

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x-|a|=0 \end{cases} \quad \text{由此求得 } a = \pm 2, \text{故应选 C.}$$

练 3

1. 设水流速度为 x 千米/时, A、B 两地相距 a 千米,

则 $\frac{a}{x+14} = \frac{4}{5} \cdot \frac{a}{14-x}$, 解得 $x = \frac{14}{9}$.

2. 设汽船在静水中航行的速度为 x 千米/时,根据题意得

$$\frac{46}{x+2} + \frac{34}{x-2} = \frac{80}{x}, \text{解得 } x = \frac{40}{3}.$$

3. (1) 设船由 A 港漂流到 B 港需 x 小时,根据题意得

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{x} = \frac{1}{8} + \frac{1}{x}, \text{解得 } x = 48.$$

(2) 设救生圈是在 y 点钟落水的,由 (1) 知,水流速度为每小时流动全程的 $\frac{1}{48}$,根据题意得:

$$(12 - y) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{48}\right) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{48}\right) \times 1$$

解得 $y = 11$, 即救生圈是在 11 点钟落入水中的.

练 4

1. 设甲车速度为 $3x$ 千米/时, 乙车速度为 $4x$ 千米/时,

根据题意, 得 $\frac{140}{3x} - \frac{140}{4x} = \frac{2}{3}$, 解得 $x = 17.5$, 所以, $3x = 52.5$ (千米/时),

$4x = 70$ (千米/时), 即甲车速度为 52.5 千米/时, 乙车速度为 70 千米/时.

2. 设甲、乙两人单独完成这项工作所用的时间为 $4k, 5k$ 天, 则

$$\left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{5k}\right) \times 4 + \frac{1}{5k} \times 16 = 1, \text{ 解得 } k = 5, \text{ 所以, } 4k = 20 \text{ (天)}, 5k = 25 \text{ (天)}, \text{ 即}$$

甲、乙两人单独完成这项工作所用的时间分别为 20 天、25 天.

3. 设实际每天加固河堤 $3x$ 公里, 则计划每天加固河堤 $2x$ 公里, 根据题意,

$$\text{得 } \frac{20}{2x} - \frac{20}{3x} = 10, \quad \text{解得 } x = \frac{1}{3}, \text{ 所以, } 3x = 1 \text{ (公里/天)}.$$

即实际每天加固河堤 1 公里.

练 5

1. 设乙种表的单价为 x 元/件, 则甲种表为 $(x + 20)$ 元/件, 丙种表为 $(x - 30)$ 元/件, 得 $\frac{6000}{x+20} + \frac{3000}{x-30} = \frac{9000}{x}$, 解得 $x = 180$,

代入, 得甲表单价 $x + 20 = 200$ (元), 丙表单价为 $x - 30 = 150$ (元), 即甲、乙、丙三种表的单价分别为每块 200 元、180 元、150 元.

2. 设新涂料售价为每千克 x 元, 则方程为

$$\frac{100}{x+3} + \frac{240}{x-1} = \frac{100+240}{x}, \quad \text{解得 } x = 17,$$

所以这种新涂料每千克 17 元.

3. (1) 设甲独自完成此项工程需 x 天, 则

$$\frac{20}{x} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{x}\right) \cdot 40 = 1, \quad \text{解得 } x = 30, \text{ 代入得 } \frac{1}{24} - \frac{1}{x} = \frac{1}{120},$$

所以乙单独完成此项工程需 120 天.

(2) 设单独完成此项工程, 甲需费用 m 万元, 乙需费用 n 万元,

$$\text{得 } \begin{cases} \left(\frac{m}{30} + \frac{n}{120}\right) \times 24 = 120 \\ \frac{m}{30} \times 20 + \frac{n}{120} \times 40 = 110 \end{cases} \quad \text{解得 } m = 135, n = 60,$$

所以,甲单独完成此项工程需 30 天,乙单独完成此项工程需 120 天,甲、乙单独完成此项工程分别需要费用 135 万元、60 万元.

26

练 1

- 总体是 全国城市儿童体重的全体,
个体是 每一个城市儿童的体重,
样本是 所抽取的 5000 名儿童的体重.
- 总体是 某块试验田里小麦的麦穗重量的全体,
个体是 每一个小麦麦穗的重量,
样本是 所抽取的 1000 个小麦麦穗的重量.
- 总体是 这一年中每天进公园的人数的全体,
个体是 每天进公园的人数,
样本是 所抽取的 30 天里每天进公园的人数.

练 2

- (1) (2) 采用普查方式 (3) (4) 采用抽样调查方式较合适
- (1)
- (2)

练 3

- 不需要 不能. 因为一所中学的学生并不具有代表性和广泛性,歌星受欢迎程度应考虑对不同年龄、文化层次的人群进行调查.
- 不能,因为所要了解的是中学生最爱的体育比赛,而对男生的调查并不具有代表性.
- 不科学,因为小明想了解的是每个家庭每天的垃圾产生量,而同学们所写的仅是星期天家庭的垃圾产生量.

练 4

- 60 ; (2) 18, 0.3 ;
- (3) $\bar{x} \approx \frac{45 \times 6 + 55 \times 8 + 65 \times 10 + 75 \times 18 + 85 \times 16 + 95 \times 2}{60} = 71$ (分)
- (1) 43 ; (2) 17 和 $\frac{17}{43}$
- 0.28

练 5

1. (3)
2.

选项	频数	频率
A	20	0.4
B	15	0.3
C	5	0.1
D	10	0.2

3. $11\frac{11}{36}$

27

练 1

1. (1) 240, (2) 240 名学生视力
(3) 7500 名学生视力正常
2. 30
3. ①10; ②65%; ③不一定

练 2

1. (1) 计算极差

极差 = $7.4 - 4.0 = 3.4$ (厘米)

- (2) 决定组距与组数

分成 12 组较合适, 于是组距 0.3 厘米 ($\frac{3.4}{12} \approx 0.3$)

- (3) 决定分点

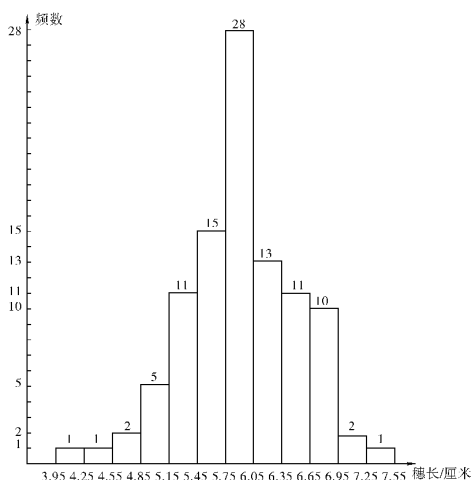
所分的 12 个小组可以是:

$3.95 \sim 4.25, 4.25 \sim 4.55, 4.55 \sim 4.85, \dots, 7.25 \sim 7.55$

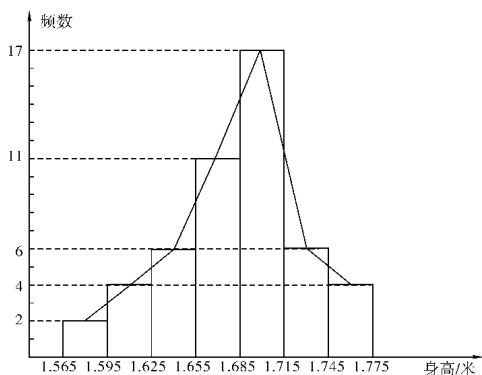
- (4) 统计各组频数, 如表所示 (见下页).

- (5) 画频数分布直方图 (见下页).

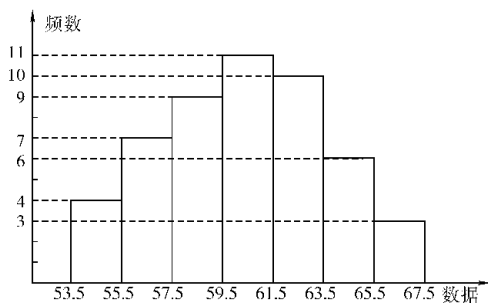
分组	频数累计	频数
3.95 ~ 4.25	—	1
4.25 ~ 4.55	—	1
4.55 ~ 4.85	┐	2
4.85 ~ 5.15	正	5
5.15 ~ 5.45	正正一	11
5.45 ~ 5.75	正正正	15
5.75 ~ 6.05	正正正正正┐	28
6.05 ~ 6.35	正正┐	13
6.35 ~ 6.65	正正一	11
6.65 ~ 6.95	正正	10
6.95 ~ 7.25	┐	2
7.25 ~ 7.55	—	1



2.



3.



练 3

1. 6, 3.5

2. 4, $\sqrt{2}$.

3. 7, 1.2

练 4

1. (1) (2) (3)

2. (1)

姓名	平均成绩	中位数	众数	方差 (S^2)
张明	80	80	80	60
王成	80	85	90	260

(2) 王成

(3) 王成的学习要持之以恒,保持稳定,张明的学习还得加把劲,提高优秀率.

3. (1) A 班 (2) 4 分

练 5

1. $S_{\text{甲}}^2 = 95.4$, $S_{\text{乙}}^2 = 243.4$

$S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$,

, 甲运动员 10 次测验较稳定

2. 相同之处 接待总人数和日均接待人数相同. 不同之处 第二年的方差大于第一年,所以第二年接待人数比第一年波动大. 前半周接待正常,由于天气突然恶劣,或发生了重大事故或爆发流行性疾病等,导致后半周游玩人数急剧下降(原因只要言之有理,都可以算正确).

3. (1) 12.00, 12.00

(2) $S_{\text{甲}}^2 = 0.003 > S_{\text{乙}}^2 = 0.002$

, 乙组学生所测得旗杆高度比较一致.