高中数学解题思想方法

王正林　编著

· 北京 ·

序

中国名校江苏省常州高级中学的数学学科带头人、高级教师王正林先生编著的《高中数学解题思想方法》正式出版了，这是高中数学界难得的一本好书。这本书好就好在跳出了数学教学的传统观念，提出了把高中数学教学的重点放在培养学生数学思维的能力，帮助学生形成正确的数学意识和观念，并掌握科学的数学思想方法。毫无疑问，以上目的达到必须以传授数学知识为载体，王正林先生这本书正是把数学教学中这种创新思想，通过高中数学中代数、立体几何、解析几何各类知识的传授，得以体现和落实，把传统的知识传授升华到数学思想方法的培养，并内化为学生思维品质的提高，以达到优化学生素质的目的，这正是数学教学在学校全面实施素质教育中的地位和作用。

当今世界是科学技术大发展，知识经济大崛起，国际人才大竞争的全球化时代，教育的改革，直至学科教学领域的改革刻不容缓，王正林先生这本书为学科教学领域的改革作出了尝试，提供了借鉴，值得全体教育工作者，特别是一线教学工作者的深思，为此我提出三点，供学校师生思考和参考：

一是全日制学校必须以教学为中心，而教学又必须以课堂教学为主，而课堂教学又必须以教材为本，教师既要带着教材走向学生，又要启发、指导、激励学生拿着教材走向教师，真正做到以知识为载体，落实学科思想方法的培养。

二是学科思维能力的培养，学科意识、观念的形成，学科思想方法的掌握，必须在知识的传授上实现一个转变，即从“学会”到“会学”的转变。“学会”就是对知识做到“懂、会、熟、巧”；“会学”就是能“获取知识，处理知识，应用知识，拓展知识”。

三是要实施以培养学生创造能力为主体的创新教育，这是素质教育的核心，这是教育与知识经济时代相适应的主要标志，在学科教学中不仅要培养学生的逻辑思维，形象思维，还要激发学生的顿悟思维，这①是教书育人的核心和精华。

丁 浩 生

1998 年 11 月 30 日于江苏常州

① 丁浩生 江苏省常州高级中学校长、特级教师、全国高级中学校长委员会理事

前　　言

（强化数学意识，提高数学能力）

从数学教育的角度看，数学知识不仅指它所包含的数学内容，如概念、定理、公式等，还包含由这些数学内容所反映出来的数学观念和数学思想、方法。这就是说，数学教育必须突出数学观念和数学思想、方法的确立。这一认识正在导致对“传授知识”这一传统教学观念的变革，赋以“培养能力”这一现代教学任务明确的内函，并将深刻影响到教育的改革进程。

剖析数学能力的结构可以看出，数学能力的核心是思维能力，而思维的意识性又是思维能力的重要表征之一。

数学的观念，数学的思想和方法是以一种意识的形态存在于人的脑中，并以意识的形式活跃于人的思维，作用于人的思维。

所谓意识，就是人脑对客观世界的认识的综合反映，是人们的观念、观点、概念的总和。意识使人们在认识事物的思维过程中产生一种自然的心理倾向，这种思维的心理倾向在相应的情境中就会调整、改善思维，形成解决问题的思路和方法，辨别解决问题过程中的操作方向。

数学的观念，数学的思想和方法以数学知识为载体，作用于数学活动的全过程。在教师的教学活动中，在学生的数学知识结构的形成、完善过程中，如果能有意识地以某种数学的观点去观察、分析数学问题，使学生不断地获取、积累、深化这些数学观点，那么这些数学观点就能在学生的头脑中升华为数学意识，这些数学意识在相应的思维情境中将自然地调控、改善学生的思维，引发思维的灵感，获得解决问题的方法。这就是说，数学意识源于数学实践，又反作用于数学实践，因此，数学意识的培养和确立将从根本

上提高学生的数学素质，使学生受益终生，因而也是数学教学的根本目的。

实践告诉我们，有没有数学意识，数学意识强烈不强烈是解题过程中能不能迅速想到合理的解题方法的关键，所以说，数学意识体现着一个人的数学能力，体现着一个人的数学修养，数学素质。在数学教学中有意识地、明确地向学生揭示与数学知识相关的数学思想、方法，逐步渗透，系统训练，不断积累，提炼强化，是使学生形成数学意识的重要途径。必须特别指出的是，数学意识的形成、确立和强化是一个潜移默化的长期过程，必须渗透到学生学习数学的全部过程之中。

本书旨在以高中数学知识为载体，与教学同步地、系统地向学生介绍相关的数学观点，数学思想、方法，强化各种数学观念，举例教会学生从各种不同的角度，应用各种不同的数学观点，寻找各种解决问题的方法，进行各种数学实践，使数学观点在学生的思维活动中强化、升华为数学意识（如揭示数学概念的本质、数学符号的数学意识的意识，求值中的函数意识、方程意识，求值、化简中的消元意识，看等等式的方程意识、函数意识、恒等式的意识，等式的消元作用的意识、限制变量取值范围作用的意识，数形结合的意识、限制变量取值范围作用意识，数形结合的意识，立体几何中添加辅助线的基本图形意识，作线先作面、线作在面内的意识，解题操作中的可行性意识等等），使学生的解题分析有数学思想的指导，解题操作有明确的目标，形成良好的思维素质，从根本上提高数学能力。

希望这本书能为广大高中学生的数学学习提供有益的帮助，也能为广大高中数学教师的教学提供参考。囿于作者水平，书中缺点、错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

作　者

1998 年 11 月

目　　录

代　数

立体几体

解析几何

代　　数

第一章　函　　数

一、认识集合是解集合问题的基础

集合是指一组确定的、不同的对象组成的一个整体。一个给定的集合中的元素具有下列特性：

（1）确定性，即任何一个对象或者是这个集合的元素，或者不是它的元素；

（2）互异性，即集合中的元素是各不相同的；

（3）无序性，即集合中的元素相互交换次序所得的集合与原来的集合是相同的。

集合可以用大写英文字母抽象表示，也可以用列举法、描述法具体表示。

认识集合是解集合问题的基础，认识集合的基本方法是：从不同的角度分析集合中的元素是什么？元素有何特性？较多的是从代数的角度或几何的角度去认识一个集合，这时，集合可以看作方程的解集、不等式的解集、函数的定义域、函数的值域，或看作数轴上的点集、坐标平面内的点集等。

例1　若集合 $A=\{1,2,3,4\}$，集合 $B=\{y \mid y=x-1, x\in A\}$，则 $\{0\}$ 与 B 的关系是（　　）。

（a）$\{0\}\in B$　　　　（b）$\{0\}\subset B$

（c）$\{0\}\not\subset B$　　　　（d）$\{0\}\supseteq B$

分析　集合 A 为有限数集，从代数角度看，集合 B 为以 $y=x-1$ 为解析式，集合 A 为定义域的函数的值域。

解 **函数** $y = x - 1 \quad x \in A$ **的值域为** $\{0,1,2,3\}$,

, $B = \{0,1,2,3\}$,

, $0 \in B$

, $\{0\} \subset B$,**故选**(b)。

例 2 **已知** $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$,$B = \{x | ax - 1 = 0\}$,**若** $B \subset A$,**求实数** a **的取值。**

分析 **题设中的集合** A、B **都是方程的解集,集合** A **是一个一元二次方程的解集,其中有且只有两个不同的元素,集合** B **是一个一元一次方程的解集,其可能为空集或其中有且只有一个元素,由** $B \subset A$ **知,方程** $ax - 1 = 0$ **无解或者方程** $ax - 1 = 0$ **的解就是方程** $x^2 - 2x - 3 = 0$ **的一个解。**

解 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{-1,3\}$,

又 $B \subset A$,

, **方程** $ax - 1 = 0$ **无解或方程** $ax - 1 = 0$ **的解为** -1 **或为** 3。

若方程 $ax - 1 = 0$ **无解,**

则 $a = 0$;

若方程 $ax - 1 = 0$ **的解为** -1,

则 $1/a = -1$,

, $a = -1$。

若方程 $ax - 1 = 0$ **的解为** 3,

则 $1/a = 3$,

, $a = 1/3$。

综上所述,实数 a **的取值为** $0,-1,1/3$。

例 3 **已知集合** $A = \{x | x^2 - (a^2 + a + 1)x + a(a^2 + 1) > 0\}$,$B = \{y | y = x^2/2 - x + 5/2, 0 \leqslant x \leqslant 3\}$,**若** $A \cap B =$ ô,**求实数** a **的取值范围。**

分析 **从代数角度看,集合** A **是不等式** $x^2 - (a^2 + a + 1)x + a(a^2 + 1) > 0\}$ **解集,集合** B **是函数** $y = x^2/2 - x + 5/2$,$(0 \leqslant x \leqslant 3)$ **的**

值域,它们都是数集。

解　不等式 $x^2-(a^2+a+1)x+a(a^2+1)<0$ **可以化为,**

$$(x-a)[x-(a^2+1)]<0。$$

$$a^2+1<a,$$

,　　**不等式的解为** $x<a$ **或** $x<a^2+1$,

,　　$$A=(-\quad,a)\cup(a^2+1,+\quad)。$$

函数 $y=x^2/2-x+5/2$ **的图像的对称轴为** $x=1$,

函数的定义域为 $[0,3]$,

,　　**函数的值域为** $[2,4]$,

,　　$$B=[2,4]。$$

$$A\cap B=ô,$$

,　　$$a\leqslant 2 \text{ 且 } a^2+1\geqslant 4,$$

,　　$$a\leqslant -\sqrt{3} \text{ 或} \sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2。$$

例 4　设 $f(x)=x^2+ax+b$, $A=\{x|f(x)=x\}=\{a\}$,**求** a **和** b。

分析　从代数角度看 $A=\{x|f(x)=x\}=\{a\}$ **可知,集合** A **是方程** $f(x)=x$,**即** $x^2+(a-1)x+b=0$ **的解集,且方程的解为重解** a。

解　　$f(x)=x^2+ax+b$,

,　　**方程** $f(x)=x$ **可以化为**,$x^2+(a-1)x+b=0$

$$A=\{a\}$$

,　　**方程** $x^2+(a-1)x+b=0$ **有重解** a,

,　　$$\begin{cases}\Delta=(a-1)^2-4b=0,\\ a^2+(a-1)a+b=0,\end{cases}$$

解得　　$$a=1/3,\quad b=1/9。$$

说明　问题是要求两个未知量的值,解题过程中应用了列未知量的方程(组),求未知量的取值的思想方法。

例 5　已知 $A=\{x|\dfrac{6}{3-x}\in N, X\in Z\}$,**试用例举法表示集合** A。

分析 从代数角度看,集合 A 中的元素是使$\frac{6}{3-x}$为自然数的整数 x 的取值组成的集合;

若令 $\frac{6}{3-x}=n,n\in N,x\in Z$,

则 $x=3-6/n$,即集合 A 为函数 $x=3-6/n(n=1,2,3,6)$ 的值域。

解法一 $\frac{6}{3-x}=n,n\in N,x\in Z$,

, $3-x=1$ 或 $3-x=2$ 或 $3-x=3$ 或 $3-x=6$,

, $x=2$ 或 $x=1$ 或 $x=0$ 或 $x=-3$,

, 集合 $A=\{2,0,1,0,-3\}$。

解法二 令 $\frac{6}{3-x}=n,n\in N$,

则 $x=3-6/n(n=1,2,3,6)$,

, $x=-3$ 或 $x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=2$,

, 集合 $A=\{2,1,0,-3\}$。

例 6 已知集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant 2\}$,若 $A\cup R^{+}=R^{+}$,求实数 a 的取值范围。

分析 从代数角度看,集合 A 是数集,从几何角度看,集合 A 是数轴上的点组成的点集,因此,借助于数轴可以求得实数 a 的取值范围。

解 $A\cup R^{+}=R^{+}$

, $A\subseteq R^{+}$

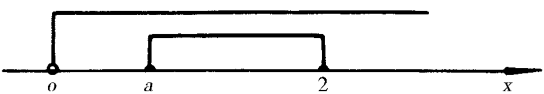


图 1 - 1

由图 1 - 1 可知,点(a)可以在原点和点(2)间移动,

, $0<a\leqslant 2$。

例 7 已知元素$(1,2)\in A\cap B$,并且 $A=\{(x,y)|ax-y^2+b=$

$0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$，试求 a，b 的值。

分析　从代数角度看，(x,y) 表示二元方程的解，集合 A、B 分别是方程 $ax-y^2+b=0$、$x^2-ay-b=0$ 的解集，由 $(1,2)\in A\cap B$ 可知，$(1,2)$ 是方程 $ax-y^2+b=0$ 和方程 $x^2-ay-b=0$ 的解，即方程组 $\begin{cases}ax-y^2+b=0\\x^2-ay-b=0\end{cases}$ 的解；从几何角度看，(x,y) 表示坐标平面上的点，集合 A、B 分别为曲线 $ax-y^2+b=0$ 和曲线 $x^2-ay-b=0$ 上的点组成的点集，点 $(1,2)$ 为曲线 $ax-y^2+b=0$ 和曲线 $x^2-ay-b=0$ 的交点。

解　　$(1,2)\in A\cap B$，

，　　$(1,2)\in A$，$(1,2)\in B$，

$A=\{(x,y)\mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-b=0\}$，

，　　$\begin{cases}a-4+b=0,\\1-2a-b=0,\end{cases}$

解得　$a=-3$　**或**　$b=7$

例 8　**已知** $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0, x\in R\}$ **若** $A\cap R^+=\hat{o}$，**求实数** p **的取值范围。**

分析　从代数角度看，集合 A 是方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的实数解组成的解集，由 $A\cap R^+=\hat{o}$，可知，方程无解或有解但都为非正解。

解法一　　$A\cap R^+=\hat{o}$

，　**方程** $x^2+(p+2)x+1=0$ **无解或有解但都为非正解。**

若方程无解，

则　　$\Delta=(p+2)^2-4<0$

，　　$-4<p<0$；

若方程有解但都为非正解，

则　　$\begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4\geqslant o\\-(p+2)\leqslant 0\end{cases}$

解得， $p \geqslant 0$，

, $p > -4$。

解法二 $A \cap R^{+}$ ô，

, **方程** $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ **无解或有解但都为非正解。**

令 $f(x) = x^2 + (p+2)x + 1$，

则函数 $f(x)$ **的图像与** x **轴无公共点或与** x **轴有公共点但公共点位于** x **轴的非正半轴。**

, $\Delta = (p+2)^2 - 4 < 0$，

或 $\begin{cases} \Delta = (p+2)^2 - 4 \geqslant 0, \\ f(0) \geqslant 0, \\ -\dfrac{p+2}{2} \leqslant 0。 \end{cases}$

, $-4 < p < 0$ **或** $p \geqslant 0$，

, $p < -4$。

［练 习 题］

1. **若** $A = \{x \mid x = a^2 + 2a + 1, a \in R\}$，$B = \{x \mid x = b^2 - 2b, b \in R\}$，**问确定集合** A、B **之间的关系。**

2. **已知** $x \in R$，**集合** $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - mx + 2 = 0\}$，**若** $A \cap B = B$，**求实数** m **的取值范围。**

3. **已知全集** $I = \{(x,y) \mid x, y \in R\}$，$A = \{(x,y) \mid y = 3x - 2\}$，$B = \{(x,y) \mid \dfrac{y-4}{x-2} = 3\}$，**求** $A \cap B$ **及** $\overline{A} \cup B$。

4. **已知集合** $A = \{x \mid y = \lg(x^2 - x - 2)\}$，$B = \{y \mid y = x^{-1/2}\}$，**求** $A \cap B$。

5. **设** $f(x) = x^2 + px + q$，$A = \{x \mid f(x) = x\}$，$B = \{x \mid f(x-1) = x + 1\}$，**若** $A = \{2\}$，**求集合** B。

二、函数与反函数

函数是一个重要的数学概念，其实质为建立在非空数集上的

映射。函数由三部分组成:定义域、值域、及对应法则,这三部分称作函数的三要素。

在函数的三要素中,核心是对应法则 f,$f(x)$ 表示元素 x 被 f 作用的方式,作用后的结果。必须注意到,若函数存在反函数,元素 x 被 f 作用后的结果为 y,则 y 被 f^{-1}作用后的结果为 x。在函数概念的学习中,必须建立这种强烈的“对应”意识。

函数解析式是函数对应法则的表现形式。

函数解析式可以看作建立在函数定义域上的恒等式。

例 1 已知函数 $f(n)$ 定义在整数集上,满足 $f(n)=\begin{cases} f[f(n+19)] & (n<2000), \\ n-16 & (n\geqslant 2000)。\end{cases}$求 $f(1997)$。

分析 函数的解析式规定了对定义域中的元素的作用方式。

解 $1997<2000$,

, $f(1997)=f[f(1997+19)]$

$=f[f(2016)]$。

$2016>2000$,

, $f(2016)=2016-16=2000$,

, $f(1997)=f(2000)$

$=2000-16$

$=1984$。

例 2 已知 $f(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}-1$,求函数 $f(x)$ 的表达式。

分析 等式 $f(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}-1$,表示元素 $1+\frac{1}{x}$被 f 作用后的结果为$\frac{1}{x^2}-1$,问题的要求是求元素 x 被 f 作用后的结果的表达式。

解法一 令 $1+\frac{1}{x}=t$,则$\frac{1}{x}=t-1$,即 $x=\frac{1}{t-1}$,

, $f(t) = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t$,

即 $f(x) = x^2 - 2x$。

解法二 $f(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} - 1$,

, $f(1+\frac{1}{x}) = (1+\frac{1}{x})^2 - 2(1+\frac{1}{x})$。

令 $1+\frac{1}{x}=t$,**则** $f(t)=t^2-2t$,

即 $f(x) = x^2 - 2x$。

说明 **解法一称作换元法,解法二称作配元法,在两种解法中,都是将等式** $f(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} - 1$ **看作恒等式。在解法一中,在恒等式** $f(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} - 1$ **中都用** $t-1$ **代换** $1/x$,**即** x **用** $1/(t-1)$ **代换。在解法二中,先将** $f(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} - 1$ **变成关于** $1+1/x$ **的恒等式,这一过程称作配元,然后用** t **代换** $1+1/x$。

例 3 **若函数** $f(x)$ **的定义域为** R,**满足** $f(x)+2f(x) = -x^3 + 6x^2 - 3x+3$,**求** $f(0)$ **的值,并求** $f(x)$ **的表达式。**

分析 **将等式** $f(x)+2f(-x) = -x^3+6x^2-3x+3$ **看成关于** x **在** R **上的恒等式。**

解 **令** $x = 0$,

则 $f(0)+2f(0) = 3$,**即** $3f(0) = 3$,

, $f(0) = 1$。

由 $f(x)+2f(-x) = -x^3-6x^2-3x+3$ **可得**

$$f(-x)+2f(x) = x^2+6x^2+3x+3,$$

, $$\begin{cases} f(x)+2f(-x) = -x^3+6x^2-3x+3, \\ f(-x)+2f(x) = x^3+6x^2+3x+3。\end{cases}$$

解关于 $f(x)$ **和** $f(-x)$ **的方程组可得,**

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1。$$

例 4　**设** $f(x) = 4^x - 2^{x-1}(x \geqslant 0)$，**求** $f^{-1}(0)$。

分析　$f^{-1}(0)$ **可以看作反函数** $f^{-1}(x)$ **在自变量为** 0 **时的函数值，这时，我们可以先求得反函数** $f^{-1}(x)$，**再求** $f^{-1}(0)$。

$f^{-1}(0)$ **也可以看作原函数** $f(x)$ **在函数值为** 0 **时的变量取值，这时，我们可以解方程** $4^x - 2^{x-1} = 0(x \geqslant 0)$，**得方程的解，即得** $f^{-1}(0)$ **的值。**

解法一　**令**　$y = 4^x - 2^{x-1}$，

则　$(2^x)^2 - 2 \times 2^x - y = 0$，

，　$2^x = 1 + \sqrt{1 + y}$。

$x \geqslant 0$，

，　$2^x \geqslant 1$，

，　**取**　$2^x = 1 + \sqrt{1 + y}$，

，　$x = \log_2 1 + \sqrt{1 + y}$，

，　$f^{-1}(x) = \log_2 1 + \sqrt{1 + x}$，

，　$f^{-1}(0) = \log_2 2 = 1$。

解法二　**令**　$4^x - 2^{x+1} = 0$，$(x \geqslant 0)$

则　$(2^x)^2 - 2 \times 2^x = 0$。

$2^x > 0$，

，　$2^x - 2 = 0$，

，　$x = 1$，

，　$f^1(0) = 1$。

例 5　**已知函数** $f(x) = (1/2)^x (x > 0)$ **和定义在** R **上的奇函数** $g(x)$，**当** $x > 0$ **时**，$g(x) = f(x)$，**试求** $g(x)$ **的反函数。**

解　**先求** $g(x)$

方法一 设 $x<0$,则 $-x>0$。

$x>0$ 时,$g(x)=f(x)=(1/2)^x$,

, $g(-x)=(1/2)^{-x}$。

$g(x)$ 为奇函数,

, $-g(x)=2^x$ 即 $g(x)=-2^x$。

又 $g(0)=0$,

, $$g(x)=\begin{cases}(1/2)^x & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -2^x & (x<0)。\end{cases}$$

方法二 设点 (x,y) 是函数 $g(x)$ 的图像上的点 $(x<0)$,

$g(x)$ 为奇函数,

, 点 $(-x,-y)$ 也是函数 $g(x)$ 的图像上的点 $(-x>0)$。

由题设可知, $-y=(1/2)^{-x}$,

, $y=-2^x$,即 $g(x)=-2^x$ $(x<0)$。

又 $g(0)=0$,

, $$g(x)=\begin{cases}(1/2)^x, & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -2^x, & (x<0)。\end{cases}$$

再求 $g(x)$ 的反函数

令

$y=(1/2)^x$ $(x>0)$,

则 $x=\log_{\frac{1}{2}}y=-\log_2 y$,

, $g^{-1}(x)=-\log_2 x$ $(0<x<1)$

令 $y=-2^x$,$(x<0)$,

则 $x=\log_2(-y)$,

, $g^{-1}(x)=\log_2(-x)$ $(-1<x<0)$

又　　$g^{-1}(0)=0$，

，　　$g^{-1}(x)=\begin{cases}\log_2(-x) & (-1<x<0),\\ 0 & (x=0),\\ -\log_2 x & (0<x<1)。\end{cases}$

说明　在求 $g(x)$ 的方法一中，将 $g(x)=(1/2)^x(x>0)$ 看作关于 x 在 $(0,+\quad)$ 上的恒等式，在方法二中，则是利用奇函数的图像关于原点对称的性质。

例 6　已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+b}$（a,b,c,d 均不为零），试求 a,b,c,d 满足什么条件时，$f(x)$ 的反函数仍是其自身。

分析　$f(x)$ 的反函数是其自身包含两层意义，一是 $f(x)$ 须存在反函数，二是 $f(x)$ 的反函数是其自身，即 $f(x)$ 存在反函数是 $f(x)$ 的反函数是其自身的前提。

解法一　　$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，

，　　$y=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$，

，　当 $bc-ad\neq 0$ 时，函数有反函数，

可求得，反函数 $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$。

由题设，$\dfrac{-dx+b}{cx-a}=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 对定义域内的一切 x 均成立，

，　$-dcx^2+bcx-d^2x+bd=acx^2+bcx-a^2x-ab$，

$c(a+b)x^2-(a+d)(a-d)x-b(a+d)=0$，

$(a+d)[cx^2-(a-d)x-b]=0$，

，　$a+d=0$。

，　所求条件为 $bc-ad\neq 0$ 且 $a+d=0$。

解法二　设 x_1,x_2 为函数 $f(x)$ 的定义域内任意两元素，且 $x_1\neq x_2$，

则由函数存在反函数知，$\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}\neq\dfrac{ax_2+b}{cx_2+d}$，

, $(bc - ad)(x_1 - x_2) \neq 0$,

, $bc - ad \neq 0$。

以下同解法一。

, 所求条件为 $bc - ad \neq 0$ 且 $a + d = 0$。

说明　在求反函数是其自身的条件时,我们将等式 $\frac{-dx+b}{cx-a} = \frac{ax+b}{cx+d}$ 看作关于 x 在定义域上的恒等式。

例 7　已知 $\log_a x + 3\log_a x - \log_x y = 3 (a > 1)$,

(1) 若设 $x = a^t$,试用 a,t 表示 y;

(2) 若当 $0 < t \leqslant 2$ 时,y 有最小值 8,求 a 和 x 的取值。

分析　等式 $\log_a x + 3\log_x a - \log_x y = 3$ 制约着变量 x,y 的变化关系,制约着变量 x,y 的取值范围。若变量 y 能用变量 x 表示,则变量 y 就可成为变量 x 的函数,在题(1)中,由 $x = a^t$ 知,变量 x 为变量 t 的函数,因此,变量 y 也就可以成为变量 t 的函数。

必须注意到,变量的等量关系式在一定条件下可以转换为变量间的函数关系式,即解析式。

解(1)　$\log_a x + 3\log_x a - \log_x y = 3$,

, $\log_a x + \frac{3}{\log_a x} - \frac{\log_a y}{\log_a x} = 3$,

$\log_a y = \log_a^2 x - 3\log_a x + 3$,

$y = a^{\log_a^2 x - 3\log_a x + 3}$。

$x = a^t \quad (a > 1)$,

, $\log_a x = t$,

, $y = a^{t^2 - 3t + 3}$。

解(2)　$0 < t \leqslant 2$,

, $y = a^{t^2 - 3t + 3} \quad (0 < t \leqslant 2)$,

$= a^{(t - 3/2)^2 + 3/4}$。

$a > 1$,

，　　当 $t = \frac{3}{2} \in (0,2]$ 时，$y_{min} = a^{3/4}$，

$$y_{min} = 8，$$

，
$$\begin{cases} x = a^{3/2}， \\ a^{3/4} = 8。 \end{cases}$$

，
$$a = 16，x = 64。$$

练 习 题

1. 已知 $g(x) = 1 - x^2$，且当 $x > 0$ 时，$f[g(x)] = \frac{1 - x^2}{x}$，求 $f(\frac{1}{2})$。

2. 已知 $f(2x + 1) = x^2 - 2x$，求 $f(\sqrt{2})$。

3. 已知定义域为(-　,0] 的函数满足 $f(x - 1) = x^2 - 2x$，求 $f^{-1}(-\frac{1}{2})$。

4. 设函数 $y = f(x)$ 满足 $\lg(\lg y) = \lg(3x) + \lg(3 - x)$，求函数 $f(x)$ 及其值域。

三、函数的定义域和值域

函数的定义域是函数三要素之一，函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值范围，也是能被对应法则 f 作用的元素的集合。特别要注意到，在求复合函数的定义域时要使解析式中的基本函数有意义。

函数的值域也是函数的三要素之一，函数的值域是函数值的集合，也是定义域内的元素被 f 作用后的结果的集合。求函数的值域的基本方法是由定义域出发，根据基本函数的值域、不等式的性质求得函数解析式的取值范围而得函数的值域；若将函数解析式看作关于自变量的方程，则可以从方程有解求得函数的值域；若

将函数解析式看成变量的关系等式,则可以从一个变量的已知的取值范围求另一个变量的取值范围,得函数的值域。

例 1　**求函数** $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}$ **的定义域。**

解　由题设知：$\begin{cases} x+1>0, \\ 2+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\geqslant 0。\end{cases}$

,　$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\leqslant 4。\end{cases}$

,　$0<x+1\leqslant 4$,**即** $-1<x\leqslant 3$,

,　**函数的定义域为** $(-1,3)$。

说明　在解题过程中,给出 $x+1>0$ **就保证了对数函数有意义。**

例 2　**已知函数** $f(x)$ **的定义域为** $[-1,2]$,**求函数** $f[\log_{\frac{1}{2}}(3-x)]$ **的定义域。**

分析　函数 $f(x)$ **的定义域为** $[-1,2]$,**表示能被** f **作用的元素的取值范围为** $[-1,2]$,**从而要求函数** $f(\log_{\frac{1}{2}}(3-x))$ **中自变量** x **的取值必须保证** $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\in[-1,2]$。

解　　函数 $f(x)$ **的定义域为** $[-1,2]$,

,　$-1\leqslant\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqslant 2$,**即** $\log_{\frac{1}{2}}2\leqslant\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqslant\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$,

,　$\frac{1}{4}\leqslant 3-x\leqslant 2$,$1\leqslant x\leqslant\frac{11}{4}$,

,　**函数的定义域为** $\{x|1\leqslant x\leqslant\frac{11}{4}\}$。

例 3　**已知函数** $f(x)=\lg[(a^2-1)x^2+(a+1)x+1]$,**若** $f(x)$ **的定义域为** R,**求实数** a **的取值范围。**

分析　由函数 $f(x)$ **的定义域为** R **可知**,a **的取值必须保证,自变量** x **取** R **内的任意值时**,$(a^2-1)x^2+(a+1)x+1$ **的值总大于零。**

解　　函数 $f(x)$ **的定义域为** R,

若 $a=1$,

则函数为 $f(x)=\lg(2x+1)$,函数的定义域为$\left(-\frac{1}{2},+\quad\right)$,

, $a=1$ 不可取;

若 $a=-1$,

则函数为 $f(x)=\lg 1=0$,函数的定义域为 R,

, $a=-1$ 可取;

若 $a^2-1\neq 0$,

则由二次函数的性质可知,$\begin{cases} a^2-1>0, \\ (a+1)^2-4(a^2-1)<0。\end{cases}$

, $\begin{cases} a<-1 \text{ 或 } a>1, \\ a<-1 \text{ 或 } a>\frac{5}{3}。\end{cases}$

, $a<-1$ 或 $a>\frac{5}{3}$。

综上所述,实数 a 的取值范围为 $a\leqslant -1$ 或 $a>\frac{5}{3}$。

例 4　求函数 $y=\frac{1}{3^{2x-1}-1}$的值域。

解　　$2x-1\in R$,

,　　　$3^{2x-1}>0$,$3^{2x-1}-1>-1$。

若 $-1<3^{2x-1}-1<0$,

则$\frac{1}{3^{2x-1}-1}<-1$,即 $y<-1$;

若 $3^{2x-1}-1>0$,

则$\frac{1}{3^{2x-1}-1}>0$,即 $y>0$。

综上所述,$y<-1$ 或 $y>0$,即函数的值域为$(-\quad,-1)\cup(0,+\quad)$。

说明　本例的解法是求函数值域的基本方法。

例 5　求函数 $y=\frac{x^2-x}{x^2-x+1}$的值域。

解法一

$$y=\frac{x^2-x}{x^2-x+1}=$$

$$\frac{(x^2-x+1)-1}{x^2-x+1}=$$

$$1-\frac{1}{x^2-x+1},$$

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4},$$

, $$0<\frac{1}{x^2-x+1}\leqslant\frac{4}{3},$$

$$-\frac{4}{3}\leqslant-\frac{1}{x^2-x+1}<0,$$

$$-\frac{1}{3}\leqslant 1-\frac{1}{x^2-x+1}<1, \text{即} -\frac{1}{3}\leqslant y<1$$

, **函数的值域为**$\left[-\frac{1}{3},1\right)$。

解法二 $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}$,

, $(y-1)x^2-(y-1)x+y=0$。

显然 $y\neq1$,**因此**$(y-1)x^2-(y-1)x+y=0$ **可看成关于** x **的二次方程**。

, $$\Delta=[-(y-1)]^2-4y(y-1)\geqslant0,$$

, $$(y-1)(3y+1)\leqslant0,$$

$$-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant1,$$

$$y\neq1,$$

$$-\frac{1}{3}\leqslant y<1,$$

, **函数的值域为**$\left[-\frac{1}{3},1\right)$。

解法三 $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}$,

, $(y-1)(x^2-x)=-y$。

$y\neq 1$,

, $x^2-x=\dfrac{-y}{y-1}$。

$x^2-x=(x-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}\geqslant-\dfrac{1}{4}$,

, $-\dfrac{y}{y-1}\geqslant-\dfrac{1}{4}$,

$\dfrac{y}{y-1}\leqslant\dfrac{1}{4}$,

$\dfrac{3y+1}{4(y-1)}\leqslant 0$,

, $-\dfrac{1}{3}\leqslant y<1$,

, 函数的值域为$[-\dfrac{1}{3},1)$。

说明 本例的解法一是采用基本方法求函数的值域,即从函数的定义域出发利用不等式的性质求函数解析式的取值范围得函数的值域。解法二是将解析式看成关于自变量的方程,然后从方程有解求得函数的值域。解法三是将解析式看成变量 x^2-x 和 y 的关系等式,然后由 x^2-x 的取值范围求变量 y 的取值范围,得函数的值域。

例 6 求函数 $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}(x\geqslant 1)$ 的值域。

解法一 $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$,

, $x^2+(3-y)x+3-y=0$ $\qquad(*)$

$x\geqslant 1$,

, 方程$(*)$在$[1,+\ \ )$上有解。

令 $f(x) = x^2 + (3 - y)x + (3 - y)$，

则函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴在 $[1, +\infty)$ 内有公共点。

若 $x = 1$，则 $y = \frac{7}{2}$。

若 $x \neq 1$，

(1) 若 $f(x)$ 的图像与 x 轴在 $(1, +\infty)$ 内有两个公共点，

则 $\begin{cases} \Delta = (3 - y)^2 - 4(3 - y) \geqslant 0, \\ f(0) = 3 - y > 0, \\ -\frac{3 - y}{2} > 1, \end{cases}$ 无解

(2) 若 $f(x)$ 的图像与 x 轴在 $(1, +\infty)$ 有且只有一个公共点，

则 $f(1) < 0$，

， $7 - 2y < 0$，$y > \frac{7}{2}$。

综上所述，$y \geqslant \frac{7}{2}$，即函数的值域为 $[\frac{7}{2}, +\infty)$。

解法二

$$y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} =$$

$$\frac{x(x + 1) + 2(x + 1) + 1}{x + 1} =$$

$$x + \frac{1}{x + 1} + 2 =$$

$$x + 1 + \frac{1}{x + 1} + 1。$$

令 $x + 1 = t$，$(t \geqslant 2)$，

则 $y = t + \frac{1}{t} + 1$，可证函数在 $[2, +\infty)$ 上单调增，

$y \geqslant \frac{7}{2}$，

， 函数的值域为 $[\frac{7}{2}, +\infty)$。

说明　由于函数的自变量 x 的取值范围受到限制，即不处于自然定义域状态，因此本例不能用判别式法求值域。

解法一中，将二次方程在 $[1, +\quad)$ 内有解的问题转化为二次函数的图像与 x 轴在 $[1, +\quad)$ 内有公共点的问题。

解法二中，将函数转换成熟悉的函数，并利用其单调性求其值域。

例 7　求函数 $y = 3x^2 - 12x + 18\sqrt{4x - x^2} - 23$ 的值域。

解　　$y = -3(4x - x^2) + 18\sqrt{4x - x^2} - 23$。

令　　$\sqrt{4x - x^2} = t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2)$

则　　$4x - x^2 = t^2$，

,　　$y = -3t^2 + 18t - 23 \quad (0 \leqslant t \leqslant 2)$。

函数 $y = -3t^2 + 18t - 23$ 的图像的对称轴为 $t = 3$，故 $[0, 2]$ 为函数 $y = -3t^2 + 18t - 23$ 的单调增区间。

,　　$y_{min} = f(0) = -23$，$y_{min} = f(2) = 1$，

,　　函数的值域为 $[-23, 1]$。

说明　本例是用换元法求函数的值域。换元的目的是将函数转换成熟悉的函数，从而可以求新函数的值域得题设函数的值域。必须注意到，换元后必须确切给出新函数的定义域（即新自变量的取值范围），以保证新函数与题设函数等价。

例 8　若实数 x、y 满足 $x^2 + 4y^2 = 4x$，求函数 $S = x^2 + y^2$ 的值域。

解　　$x^2 + 4y^2 = 4x$，

,　　$4y^2 = 4x - x^2 \geqslant 0$，

,　　$0 \leqslant x \leqslant 4$，

$$S = x^2 + y^2$$

$$= x^2 + \frac{1}{4}(4x - x^2)$$

$$= \frac{3}{4}x^2 + x, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 4)$$

, $0 \leqslant S \leqslant 16$,即函数的值域为 $[0,16]$。

说明 题设给出的函数 $S = x^2 + y^2$ 为二元函数,等式 $x^2 + 4y^{=}$ $4x$ 对其起消元作用,并限制变元 x 的取值范围,由此,我们获得了熟悉的函数 $S = \frac{3}{4}x^2 + x$,$(0 \leqslant x \leqslant 4)$,并能求其值域。

例 9 已知函数 $f(x) = \lg[a^2 - 1)x^2 + (a+1)x + 1]$,若 $f(x)$ 的值域 R,求实数 a 的取值范围。

分析 由函数 $f(x)$ 的值域为 R 可知,a 的取值必须保证,$(a^2 - 1)x^2 + (a+1)x + 1$ 在 $(0, + \quad)$ 内的值都取得到。

解 , 函数 $f(x) = \lg[(a^2 - 1)x^2 + (a+1)x + 1]$ 的值域为 R。

, $(a^2 - 1)x^2 + (a+1)x + 1$ 能取到一切正数值。

若 $a = 1$,则函数为 $f(x) = \lg(2x+1)$,

$2x + 1$ 能取到一切正数,

, 函数值域为 R,故 $a = 1$ 可取;

若 $a = -1$,则函数为 $f(x) = \lg 1 = 0$,

, $a = -1$ 不可取;

若 $a \neq \pm 1$,

则 $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \Delta = (a+1)^2 + 4(a^2 - 1) \geqslant 0。 \end{cases}$

$\begin{cases} a < -1 \text{ 或 } a > 1, \\ -1 \leqslant a \leqslant \frac{5}{3}。 \end{cases}$

$1 < a \leqslant \frac{5}{3}$。

综上所述,a 的取值范围为 $[1, \frac{5}{3}]$。

练 习 题

1. **求函数的定义域：**

$y=\frac{\lg(|x|-x)}{\sqrt{1-x^2}}$。

2. **已知函数** $f(x)$ **的定义域为** $[-1,1]$，**求函数** $f(x+1)$ **的定义域。**

3. **求下列函数的值域：**

(1) $y=\frac{1-x}{2x+5}\quad(1\leqslant x\leqslant 8)$，

(2) $y=\frac{x-1}{x^2-2x+3}$。

4. **求函数** $f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$ **的定义域和值域。**

四、函数的奇偶性

奇偶性、单调性是反映函数特征的两个基本性质，它们在图形上分别表现为函数的图像关于原点、y 轴的对称性，曲线的上升、下降。

函数的奇偶性、单调性的讨论以函数的定义域为基础，具有奇偶性的函数的定义域在数轴上所对应的区间关于原点对称，函数的单调区间一定是定义域区间的子区间。

讨论函数的奇偶性、单调性一般先须将函数的解析式作等价化简，化简成熟悉的函数。

判断函数的奇偶性，必须首先判断其定义域在数轴上对应的区间是否关于原点对称，否则就是非奇非偶函数，然后再判断 $f(-x)$ **与** $f(x)$ **的关系，为了便于判断，常应用定义的等价形式：**$f(x)\pm f(x)=0$ **或** $\frac{f(-x)}{f(x)}=\mp 1\,(f(x)\neq 0)$。

从形的角度考虑，函数的奇偶性也可以依据函数的图像是否关于原点、y 轴对称判定。

求函数的单调区间,通常有以下几种方法 根据函数的定义求解 ;应用已知函数的单调性求解 ;应用函数的图像求解。

例 1　**判断下列函数的奇偶性:**

(1)　$f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3^x+1}-\frac{1}{2}\right)$;

(2)　$f(x)=\frac{\lg(4-x^2)}{|x-2|-2}$。

分析　**题**(1)**中,函数** $f(x)$ **的定义域为** $\{x|x\neq0\}$,**其关于原点对称,又** $f(1)=-\frac{1}{4}$,$f(-1)=-\frac{1}{4}$,**故** $f(x)$ **可能为偶函数。**

题(2)**中,函数** $f(x)$ **定义域为** $\{x|-2<x<0$ **或** $0<x<2\}$,**其关于原点对称,又** $f(-1)=\lg3$,$f(1)=-\lg3$,**故** $f(x)$ **可能为奇函数。**

解　(1)　**函数** $f(x)$ **的定义域为** $\{x|x\neq0\}$,**其关于原点对称。**

$$
\begin{aligned}
&f(-x)-f(x)\\
&=\frac{1}{-x}\left(\frac{1}{3^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3^x+1}-\frac{1}{2}\right)\\
&=-\frac{1}{x}\left(\frac{3^x}{3^x+1}+\frac{1}{3^x+1}\right)+\frac{1}{x}\\
&=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\\
&=0,
\end{aligned}
$$

,　$f(-x)=f(x)$

,　**函数** $f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3^x+1}-\frac{1}{2}\right)$ **为偶函数。**

(2)**函数** $f(x)$ **的定义域为** $\{x|-2<x<0$ **或** $0<x<2\}$,**其定义域关于原点对称。**

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{\lg(4-x^2)}{(2-x)-2}\\
&=-\frac{\lg(4-x^2)}{x}。
\end{aligned}
$$

,　　　$f(-x) = -\dfrac{\lg[4-(-x)^2]}{-x}$

$- \left[-\dfrac{\lg(4-x^2)}{x}\right]$

$- f(x)$,

,　　**函数** $f(x) = \dfrac{\lg(4-x^2)}{|x-2|-2}$ **为奇函数。**

说明　**在解题**(2)**时,我们先将函数** $f(x) = \dfrac{\lg(4-x^2)}{|x-2|-2}$ **等价变成** $f(x) = \dfrac{\lg(4-x^2)}{x}$ **再讨论其奇偶性。其实题**(1)**中的** $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{3^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$ **也可以等价变成** $f(x) = \dfrac{1-3^x}{x(3^x+1)}$**,从而** $f(-x)$ **很容易变形为** $f(x)$**:**

$$f(-x) = \frac{1-3^{-x}}{-x(3-^{-x}+1)} =$$

$$\frac{3^x-1}{-x(1+3^x)} = \frac{1-3^x}{x(3^x+1)} = f(x)。$$

例 2　**试判断函数** $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & (x>0) \\ x^2-1 & (x<0) \end{cases}$ **的奇偶性。**

解法一　**显然,函数的定义域关于原点对称**

设 $x>0$**,则** $-x<0$,

,　　$f(-x) = (-x)^2-1 = x^2-1$,

$f(x) = -x^2+1 = -(x^2-1)$,

,　　$f(-x) = -f(x)$;

设 $x<0$**,则** $-x>0$,

,　　$f(-x) = -(-x^2)+1 = -x^2+1$,

$f(x) = x^2-1 = -(-x^2+1)$,

,　　$F(-x) = -f(x)$。

综上所述,$x \in (-\quad,0) \cup (0,+\quad)$ **时,都有** $f(-x) = -f(x)$,

, 函数 $f(x)$ 为奇函数。

解法二 显然函数的定义域关于原点对称。

$$f(x)\begin{cases}-x^2+1 & (x>0),\\ x^2-1 & (x<0)。\end{cases}$$

, $f(x)=|x|\left(-x+\frac{1}{x}\right)。(x\neq 0)$

, $f(-x)=|-x|\left(x-\frac{1}{x}\right)=$

$-|x|\left(-x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$,

, 函数 $f(x)$ 为奇函数。

说明 判断分段函数的奇偶性，必须考察每一“段”上，$f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系。

例 2 求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2-2x+3)$ 的单调减区间。

解 函数的定义域为 $(-3,1)$,

函数 $y'=-x^2-2x+3$ 的单调增区间为 $(-\quad,-1]$,

, 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2-2x+3)$ 的单调减区间为 $(-\quad,-1]\cap(-3,1)$,即 $(-3,-1]$。

例 3 已知 $f(x)=8+2x-x^2$,$g(x)=f(2-x^2)$,试讨论函数 $g(x)$ 的单调性。

解法一 函数 $g(x)=8+2(2-x^2)-(2-x^2)^2$,即 $g(x)=-x^4+2x^2+8$,函数的定义域为 R。

设 $x_1,x_2\in R$,且 $x_1<x_2$,

$$\begin{aligned}g(x_2)-g(x_1)&=(-x_2^4+2x_2^2+8)-(x_1^4+2x_1^4+8)\\&=(x_1^4-x_2^4)+2(x_2^2-x_1^2)\\&=(x_2+x_1)(x_2-x_1)[2-x_1^2+x_2^2)]。\end{aligned}$$

$x_1<x_2$;

, $x_2-x_1>0$;

若 $x_1,x_2\in(-\quad,-1]$,则 $x_1<-1$,则 $x_1<-1$,$x_2\leqslant -1$,

, $x_1+x_2<-2$,

$x_1{}^2 > 1$ 且 $x_2{}^2 \geqslant 1$,

, $x_1 + x_2 < 0$,

$x_1{}^2 + x_2{}^2 > 2$,

, $2 - (x_1^2 + x_2{}^2) < 0$,

, $g(x_2) - g(x_1) > 0$,即 $g(x_1) < g(x_2)$,

, $(-\quad, -1]$ 为函数 $g(x)$ 的单调增区间。

若 $x_1, x_2 \in [-1, 0]$,则 $-1 \leqslant x_1 < 0, -1 < x_2 \leqslant 0$,

, $x_1 + x_2 < 0$,

$x_1{}^2 \leqslant 1, x_2{}^2 < 1$,

, $x_1{}^2 + x_2{}^2 < 2$,

, $2 - (x_1{}^2 + x_2{}^2) > 0$,

, $g(x_2) - g(x_1) < 0$,即 $g(x_1) > g(x_2)$,

, $[-1, 0]$ 为函数 $g(x)$ 的单调减区间。

若 $x_1, x_2 \in [0, 1]$,则 $0 \leqslant x_1 < 1, 0 < x_2 \leqslant 1$,

, $x_1 + x_2 > 0$,

$x_1{}^2 < 1, x_2{}^2 \leqslant 1$,

, $x_1{}^2 + x_2^2 < 2$,

, $2 - (x_1{}^2 + x_2^2) > 0$,

, $g(x_2) - g(x_1) > 0$,即 $g(x_1) < g(x_2)$,

, $[0, 1]$ 为函数 $g(x)$ 的单调增区间。

若 $x_1, x_2 \in [1, +\quad)$,则 $x_1 \geqslant 1, x_2 > 1$,

, $x_1 + x_2 > 2$,

$x_1{}^2 \geqslant 1, x_2{}^2 > 1$,

, $x_1 + x_2 > 0$,

$x_1{}^2 + x_2{}^2 > 2$,

, $2 - (x_2^1 + x_2^2) < 0$,

, $g(x_1) - g(x_2) < 0$,即 $g(x_2) < g(x_1)$,

, $[1, +\quad)$ 为函数 $g(x)$ 的单调减区间。

综上所述,函数 $g(x)$ 的单调减区间为 $[-1, 0]$, $[1, +\quad]$,单

调增区间为$(-\ \ ,-1]$,$[0,1]$。

解法二

令 $f(u)=8+2u-u^2$,$u(x)=2-x^2$,

则 $g(x)=f[u(x)]$。

函数 $u(x)=2-x^2$ 的单调增区间为$(-\ \ ,0]$,单调减区间为$[0,+\ \ )$,

函数 $f(x)=8+2u-u^2$ 的单调增区间为$(-\ \ ,1]$,这时 $2-x^2\leqslant 1$,即 $x\in(-\ \ ,-1)$ 或 $x\in[1,+\ \ )$;单调减区间为$[1,+\ \ )$,这里 $2-x^2\geqslant 1$,即 $x\in(-1,1]$。

根据以上分析列表如下:

$f(u)$ \ $f[u(x)]$ \ $u(x)$	$(-\ \ ,0]\uparrow$	$[0,+\ \ )\downarrow$
$(-\ \ ,-1]\uparrow$	$(-\ \ ,-1]\uparrow$	
$[-1,1]\downarrow$	$[-1,0]\downarrow$	$[0,1]\uparrow$
$[1,+\ \ )\uparrow$		$[1,+\ \ )\downarrow$

, 函数 $g(x)$ 的单调减区间为$[-1,0]$,$[1,+\ \ )$,单调增区间为$(-\ \ ,-1]$,$[0,1]$。

说明 方法一是用函数单调性的定义讨论函数的单调性,这是讨论函数单调性的基本方法。必须注意到,差式 $g(x_2)-g(x_1)$ 一般用化成' 积 '的形式讨论其正、负。

例 4 试判断函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-1}(a\neq 0)$ 在区间$(-1,1)$上的单调性。

解 设 $x_1,x_2\in(-1,1)$,且 $x_1<x_2$,

则
$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{ax_2}{x_2^{\ 2}-1}-\frac{ax_1}{x_1^{\ 2}-1}$$
$$=a\left(\frac{x_2}{x_2^{\ 2}-1}-\frac{x_1}{x_1^{\ 2}-1}\right)$$

$$= a\frac{x_2(x_1^2-1)-x_1(x_2^2-1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

$$= -a\frac{(x_1x_2+1)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}。$$

$x_1 < x_2$，

, $x_2 - x_1 > 0$；

x_1、$x_2 \in (-1,1)$，即 $-1 < x_1 < 1$，且 $-1 < x_2 < 1$，

, $-1 < x_1x_2 < 1$，$0 \leqslant x_1^2 < 0$，$x_2^2 < 1$，

, $x_1x_2 + 1 > 0$，$x_1^2 - 1 < 0$，$x_2^2 - 1 < 0$，

, $\dfrac{(x_1x_2+1)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} < 0$。

, 当 $a > 0$ 时，$f(x_2) - f(x_1) > 0$，即 $f(x_2) < f(x_1)$，函数在 $(-1,1)$ 上单调递减；

当 $a < 0$ 时，$f(x_2) - f(x_1) < 0$，即 $f(x_2) > f(x_1)$，函数在 $(-1,1)$ 上单调递增。

说明　本例中函数的单调性与参变量 a 相关。

例 5　已知函数 $f(x) = x\left(\dfrac{1}{2^x-1} + m\right)$ $(x \in R$ 且 $x \neq 0)$ 为偶函数，求实数 m 的值。

解　由题设可知，$f(-x) - f(x) = 0$，

即　$-x\left(\dfrac{1}{2^{-x}-1} + m\right) - x\left(\dfrac{1}{2^x-1} + m\right) = 0$，

整理得　$x\left(\dfrac{2^x-1}{1-2^x} + 2m\right) = 0$，即 $x(2m-1) = 0$，

, $m = \dfrac{1}{2}$。

说明　在本例的解法中，我们将 $f(-x) - f(x) = 0$ 看作关于 x 在 $(-\quad,0) \cup (0,+\quad)$ 上的恒等式，从而由 $x(2m-1) = 0$ 得 $m = \dfrac{1}{2}$。

例 6　已知函数 $f(x)$ 为定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数，且其在

$(-1,0]$ 上为单调减函数,又 $f(a^2-a-1)>f(2a-3)$,求实数 a 的取值范围。

解　　函数的定义域为 $(-1,1)$,

, $$\begin{cases}-1<a^2-a-1<1,\\ -1<2a-3<1。\end{cases}$$

$f(x)$ 为偶函数,

$$f(a^2-a-1)>f(2a-3),$$

$$f(-|a^2-a-1|)>f(-|2a-3|)。$$

$f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上为单调减函数,

, $-|a^2-a-1|<-|2a-3|$,即 $|a^2-a-1|>|2a-3|$。

, $$\begin{cases}-1<a^2-a-1<1,\\ -1<2a-3<1,\\ |a^2-a-1|>|2a-3|。\end{cases}$$

, $$\begin{cases}-1<a<0\text{ 或 }1<a<2,\\ 1<a<2,\\ \left(a-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(a-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)(a-1)(a-2)>0。\end{cases}$$

, $$\begin{cases}-1<a<0\text{ 或 }1<a<2,\\ 1<a<2,\\ a<-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\text{ 或 }1<a<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\text{ 或 }a>2。\end{cases}$$

, $$1<a<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}。$$

说明　本例实质上是在给出函数 $f(x)$ 的性质的条件下解不等 $f(a^2-a-1)<f(2a-3)$。在化成的等价不等式组中,包含有两类不等式,其中 $-1<a^2-a-1-\ <1$ 和 $-1<2a-3<1$ 保证不等号两边的式子有意义,$|a^2-a-1|>|2a-3|$ 保证不等关系成立。

在解题过程中,利用函数为偶函数并且在 $(-1,0]$ 上为单调函数脱去 f,将抽象符号表示的不等式转化成代数不等式是关键。

例 7　**设** $f(x)$ **是定义在** R^{+} **上的增函数，且** $f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$**，若** $f(3)=1$**，**$f(x)-f\left(\frac{1}{x-5}\right)\geqslant 2$**，求** x **的取值范围。**

分析　**本例的实质是在给出函数** $f(x)$ **的性质的条件下，解不等式** $f(x)-f\left(\frac{1}{x-5}\right)\geqslant 2$。

题设中给出的 $f(x)$ **的性质有：函数的定义域为** R^{+}**，函数在定义域上为单调增函数，函数** $f(x)$ **满足** $f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$**，且** $f(3)=1$。

解　　$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$，

,　　$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$，

,　　$f(x)-f\left(\frac{1}{x-5}\right)=f[x(x-5)]$。

在等式 $f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$ **中，令** $y=m$**，**$\frac{x}{y}=n$**，则** $x=yn=mn$**，**

,　**等式** $f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$ **可以化为** $f(m)+f(n)=f(mn)$**，**

由 $f(3)=1$**，**$2=f(3)+f(3)=f(9)$**，**

,　**原不等式可以化为，**$f[x(x-5)]>f(9)$

由题设，函数 $f(x)$ **是定义在** R^{+} **上的增函数知，**

$$\begin{cases} x>0, \\ \dfrac{1}{x-5}>0 \\ x(x-5)>9。\end{cases}$$

,
$$\begin{cases} x>5, \\ x^2-5x-9>0。\end{cases}$$

，　　　　　$x>\frac{5+\sqrt{61}}{2}$。

练 习 题

1. 判断函数 $f(x)=\frac{(1+2^x)^2}{2^x}$ 的奇偶性。

2. 若 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$，$(x\in R)$。

(1) 试证明 对于 a 取任意实数，$f(x)$ 为增函数；

(2) 试确定 a 的值，使 $f(x)$ 为奇函数。

3. $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且 $x>0$ 时，$f(x)=x^3+2x^2+1$，求 $f(x)$ 的表达式。

4. 定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $y=f(x)$ 是减函数，且是奇函数，若 $f(a^2-a-1)+f(4a-5)>0$，求实数 a 的取值范围。

5. 已知 $f(x)=x^2+c$，且 $f[f(x)]=f(x^2+1)$，

(1) 设 $g(x)=f[f(x)]$，求 $g(x)$ 的解析式；

(2) 设 $\varphi(x)=g(x)-\lambda f(x)$，试问 是否存在实数 λ，使 $\varphi(x)$ 在 $(-\quad,-1)$ 上是减函数，并且在 $(-1,0)$ 上是增函数。

五、数的图像

函数的图像是表示函数的一种方法，它从形的角度生动、形象、直观地刻划了变量间的函数关系。

函数图像的特征与函数的性质是紧密相联的，从图像的特征可以看出函数的性质，反过来，由函数的性质也可以分析得出图像的特征，函数的图像与性质的这种关系是运用数形结合的思想方法解决函数问题的基础。

画函数的图像常用描点法与变换法这两种方法。应用描点法画函数的图像时，要注意选择具有特殊性质的点，对于比较复杂的函数，通常采用变换的方法画图，即先作出相应的基本函数的图

像,然后通过变换得原来函数的图像。

函数图像的变换常用下列方法:

(1)平移变换:$y=f(x)\to y=f(x-a)+b$;

(2)伸缩变换:$y=f(x)\to y=Af(\omega x)\quad(A>0,\omega>0)$;

(3)对称变换:$y=f(x)\to y=f(-x)$或$y=-f(x)$或$y=-f(-x)$

(4)翻折变换:$y=f(x)\to y=|f(x)|$或$y=f(|x|)$。

这些变换,揭示了一些函数的图像与基本函数图像的关系,有利于利用基本函数图像的性质深刻认识较复杂的函数的性质,这种转化的思想是解决数学问题的基本思想。

必须注意到,画函数的图像同样要受到函数定义域的制约,对于较复杂的函数,需要对其解析式作适当的等价变形,使其与基本函数相联系。

对称是函数图像的一个重要概念,常分为关于点对称和关于一条直线对称,这时点称作对称中心,直线称作对称轴。特别必须清楚的是,对称又可分为一个函数的图像具有关于一个点或一条直线对称的性质和两个函数的图像具有关于一个点或一条直线对称的关系。如奇函数、偶函数的图像分别具有关于原点、y轴对称的性质,原函数和反函数的图像具有关于直线$y=x$对称的关系。

函数的图像在研究函数的性质中具有广泛的应用,而且具有形象、直观的特点。应用函数的图像解一些选择题或填空题时,由于形的直观而可避免复杂的运算过程,解法具有明显的优越性;在解需要给出运算或推理过程的解答题时,可以利用图像的直观性拓宽思路,合理设计解题方案。

例1　作出下列函数的图像的简图:

(1)　$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$;

(2)　$y=2^{|x-1|}$。

解　(1)　$y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$,

，　将函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图像向右平移一个单位，得函数 $y=\frac{3}{x-1}$ 的图像；再将此图像向上平移 2 个单位，得函数 $y=\frac{3}{x-1}+2$ 的图像，即得函数 $y=\frac{2x+1}{x-1}$ 的图像（如图 1-2 所示）。

（2）先作出函数 $y=2^x$ 的图像，再作函数 $y=2^x$ 的图像在 y 轴右侧部分图像的对称图像，并将原来在 y 轴左侧部分的图像舍去，得函数 $y=2^{|x|}$ 的图像（此时图像关于 y 轴对称），最后将此图像向右平移一个单位，得函数 $y=2^{|x-1|}$ 的图像（如图 1-3 所示）。

说明　在题（1）的解题过程中，若函数 $y=\frac{3}{x}$ 记为 $y=f(x)$，则函数 $y=\frac{3}{x-1}$，$y=\frac{3}{x-1}+2$ 分别为 $y=f(x-1)$ $y=f(x-1)+2$；

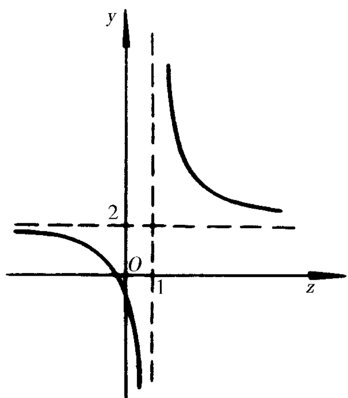


图 1-2

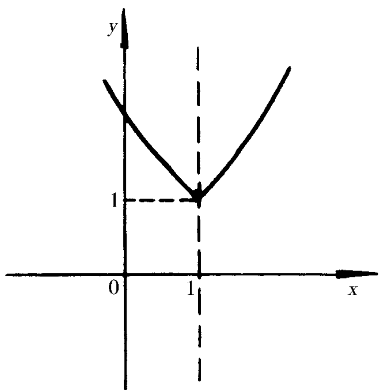


图 1-3

在题（2）的解题过程中，若函数 $y=2^x$ 记为 $y=f(x)$，则函数 $y=2^{|x|}$，$y=2^{|x-1|}$ 分别为 $y=f(|x|)$，$y=f(|x-1|)$。

例 2　设 $\varphi(x-1)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 1)\\ -1 & (x<1)\end{cases}$ 画出函数 $y=\varphi(x)$ 的图像。

解 $\varphi(x-1)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 1),\\ -1 & (x<1)。\end{cases}$

, $\varphi(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ -1 & (x<0)。\end{cases}$

见图 1 - 4。

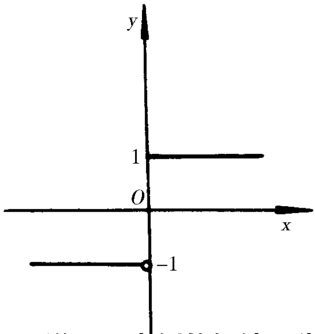


图 1 - 4

说明　本例的解法是先由 $y=\varphi(x-1)$ **求出函数** $y=\varphi(x)$**,再画出其图像。也可以先画出函数** $y=\varphi(x-1)$ **的图像,再将此图像向左平移一个单位而得函数** $y=\varphi(x)$ **的图像。**

例 3　**求函数** $y=(x+1)^{-\frac{2}{3}}+1$ **的定义域、值域、单调区间及函数图像的对称轴和渐近线。**

分析　函数 $y=(x+2)^{-\frac{2}{3}}+1$ **相应的基本函数为幂函数** $y=x^{-\frac{2}{3}}$**,函数** $y=(x+2)^{-\frac{2}{3}}+1$ **的图像可以由幂函数** $y=x^{-\frac{2}{3}}$ **的图像向左平移** 2 **个单位,再向上平移** 1 **个单位而得到。**

必须注意到,图像的左、右平移改变了函数的定义域和函数的单调区间,不改变函数的值域,即原来的函数的定义域区间和函数的单调区间也作左、右平移;图像的上、下平移不改变函数的定义域和单调区间,但改变了函数的值域,即原来的函数的值域区间也作上、下平移;图像作左、右、上、下平移时,与图像相关的几何元素(如称中心、对称轴、渐近线等)出作相应的平移。

解 $y=(x+2)^{-\frac{2}{3}}+1$,

, **函数的定义域为**(- 　, - 2)∪(- 2, + 　);

函数的值域为$(1,+\quad)$；

$(-\quad,-2)$为函数的单调增区间,$(-2,+\quad)$为函数的单调减区间；

函数图像的对称轴为$x=-2$；

函数图像的渐近线为$x=-2$和$y=-1$。

例4 设函数$y=f(x)$是定义在R上的偶函数,$(2,6)$是其的一个单调递增区间,则$f(2+x)$的(　　)

(A)对称轴为$x=1$,且一个单调增区间为$(-8,-4)$；

(B)对称轴为$x=-1$,且一个单调增区间为$(-4,0)$；

(C)对称轴为$x=-2$,且一个单调减区间为$(-8,-4)$；

(D)对称轴为$x=-2$,且一个音调减区间为$(-4,0)$。

解 由函数$y=f(x)$是定义在R上的偶函数,$(2,6)$是其的一个单调递增区间可知,$(-6,-2)$是函数$y=f(x)$的一个单调递减区间,

函数$y=f(2+x)$的图像由函数$y=f(x)$的图像向左平移2个单位而得到,这时函数$y=f(x)$的对称轴和单调区间也向左平移2个单位,所以函数$y=f(x)$的对称轴$x=0$向左平移2个单位为$x=-2$成为函数$y=f(2+x)$的对称轴,函数$y=f(x)$的单调减区间$(-6,-2)$也向左平移2个单位为$(-8,-4)$成为函数$y=f(2+x)$的一个单调减区间。

故选(C)。

例5 已知函数$y=2^{-|x-1|}-m$的图像与x轴有交点,求实数m的取值范围。

分析 函数$y=2^{-|x-1|}-m$的图像与x轴有交点可以看作函数$y=2^{-|x-1|}$的图像向上$(m<0)$或向下$(m>0)$平移$|m|$个单位与x轴有交点。

函数$y=2^{-|x-1|}-m$的图像与x轴有交点可以看作函数$y=2^{-|x-1|}$的图像与动直线$y=m$有交点。

解法一 作出函数$y=2^{-|x-1|}$的图像,可以发现图像向下平移m个单位与x轴有交点,这时$m\in(0,1]$,(见图1-5)。

解法二　作出函数 $y=2^{-|x-1|}$ **的图像,动直线** $y=m$ **与图像有交点,即函数** $y=2^{-|x-1|}-m$ **的图像与** x **轴有交点,这时** $m\in(0,1]$**,(见图** 1-6**)。**

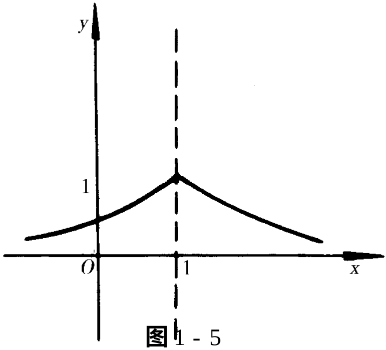


图 1-5

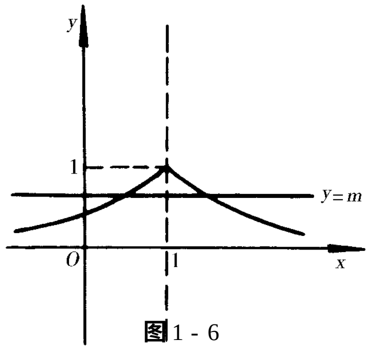


图 1-6

例 6　**已知定义在** R **上的函数** $y=f(x)$ **满足** $f(x)=f(2a-x)$**,求证：函数** $f(x)$ **的图像关于直线** $x=a$ **对称。**

分析　要证明函数 $y=f(x)$ **的图像关于直线** $x=a$ **对称,只要证明函数图像上任意一点关于直线** $x=a$ **的对称点仍在这个函数的图像上。**

证明　设点 $P(x_0,y_0)$ **是函数** $y=f(x)$ **图像上的任意一点,则** $y_0=f(x_0)$**。**

点 $P(x_0,y_0)$ **关于直线** $x=a$ **的对称点为** $(2a-x_0,y_0)$**,**

$y=f(x)$ **满足** $f(x)=f(2a-x)$ $(x\in R)$**,**

, $y_0=f(x_0)=f(2a-x_0)$**,**

这就是说,点 $(2a-x_0,y_0)$ **也在函数** $y=f(x)$ **的图像上,**

, **函数** $y=f(x)$ **的图像关于** $x=a$ **对称。**

例 7　**试分析函数** $y=f(a+x)$ **与函数** $y=f(a-x)$ **的图像对称关系,并给出证明。**

解　　函数 $y=f(x)$ **与函数** $y=f(-x)$ **的图像关于** y **轴(即** $x=0$**)对称,**

函数 $y=f(a+x)$ **的图像可以由函数** $y=f(x)$ **的图像向左平移** a **(不妨设** $a>0$**)个单位而得到,**

函数 $y=f(a-x)$ 的图像可以由函数 $y=f(-x)$ 的图像向右平移 a 个单位而得到，

, 　函数 $y=f(a+x)$ 与函数 $y=f(a-x)$ 的图像关于 y 轴对称。

事实上，设点 $P(x_0, y_0)$ 在函数 $y=f(a-x)$ 的图像上的任意一点，则 $y_0=f(a-x_0)$，点 $P(x_0, y_0)$ 关于 y 轴的对称点为 $(-x_0, y_0)$，

$$y_0=f(a+x_0)=f(a-(-x_0))，$$

, 　点 $(-x_0, y_0)$ 在函数 $y=f(a-x)$ 的图像上，

由点 P 的任意性可知，函数 $y=f(a+x)$ 的图像上任意一点关于 y 轴的对称点都在函数 $y=f(a-x)$ 的图像上。

同理可证，函数 $y=f(a-x)$ 的图像上的任意一点关于 y 轴的对称点也都在函数 $y=f(a+x)$ 的图像上，

, 　函数 $y=f(a+x)$ 与函数 $y=f(a-x)$ 的图像关于 y 轴对称。

练 习 题

1. 作出下列函数图像的简图：

(1) $y=|\lg^{x+1}|$；

(2) $y=2^{1-x}-2$。

2. 已知函数 $y=2^x+b$ 的图像与直线 $y=-1$ 有公共点，求 b 的取值范围。

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (0\leqslant x\leqslant 1) \\ x+1 & (-1\leqslant x<0) \end{cases}$ 试分别画出下列函数的图像：

(1) $y=f(x-1)$；

(2) $y=f(1-x)$。

4. 已知方程 $|x^2-2x-3|=m$ 有且仅有四个不同的解，求实数 m 的取值。

5. 已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$，

求证：$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称。

6. 试分析函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(2a-x)$ 的图像的对称关系，并给出证明。

7. 已知函数 $y=(x+2)^{-2}+2$，试写出这个函数的定义域、值域、单调区间及函数图像的对称轴。

8. 已知函数 $y=\log_2|ax-1|(a\neq 0)$ 的图像的对称轴为 $x=2$，求 a 的值。

六、函数与方程

自然界中相关的量之间互相依存、互相制约，等量关系就是对一个问题的数量特征及其相互依存、制约关系的一种刻划。

若这种等量关系式就是函数解析式或可以转换成函数解析式，则可以考虑用函数的图像和性质来解决问题，这种利用函数和图像和性质来解决问题的思想即为函数的思想。

若将这种等量关系式看作未知量的方程，则可以考虑用解方程，或利用方程有解、方程解的特征来解决问题，也可以考虑将这种等量关系式看作变量的方程，考虑利用方程的曲线和性质来解决问题，这种利用解方程、方程解的特征或方程的曲线和性质来解决问题的思想即为方程的思想。

函数与方程是两个既有区别又有联系的概念，若在问题出中出现或可以给出量之间的等量关系式，则我们可以用函数的观点或方程的观点去看等给出的等量关系式，从而可以用函数或方程的思想解决问题，我们必须加强这方面的意识。

例 1 已知 a 为实数，试讨论关于 x 的方程 $\lg 4x=2\lg(2x+a)$ 的实数解的个数。

解法一 原方程可以化为 $\begin{cases}4x>0,\\ 2x+a>0,\\ 4x=(2x+a)^2。\end{cases}$

, $\begin{cases}2x+a>0,\\ 4x=(2x+a)^2。\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+a>0,\\ 4x^2+4(a-1)x+a^2=0\end{cases}$ $(*)$

$\Delta=16(a-1)^2-16a^2=16-32a=16(1-2a)$。

(一)若 $\Delta<0$**,即** $a>\frac{1}{2}$**,**

则方程(*)无解,

, **原方程无解;**

(二)若 $\Delta=0$**,即** $a=\frac{1}{2}$**,**

则方程(*)为 $4x^2-2x+\frac{1}{4}=0$**,**

, $x=\frac{1}{4}$**,**

这时 $2x+a=2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1>0$**,故** $x=\frac{1}{4}$**是原方程的解,**

, **当** $a=\frac{1}{2}$**时,原方程有一个解;**

(三)若 $\Delta>0$**,即** $a<\frac{1}{2}$**,**

则方程(*)的解为 $x=\frac{1-a\pm\sqrt{1-2a}}{2}$**,**

令 $2\times\frac{1-a+\sqrt{1-2a}}{2}+a>0$**,**

则 $a<\frac{1}{2}$**,**

令 $2\times\frac{1-a-\sqrt{1-2a}}{2}+a>0$**,**

则 $0<a<\frac{1}{2}$**,**

, **当** $0<a<\frac{1}{2}$**时,**$x=\frac{1-a\pm\sqrt{1-2a}}{2}$**都是原方程的解,当** $a\leqslant 0$ **时,**$x=\frac{1-a+\sqrt{1-2a}}{2}$**是原方程的解。**

综上所述,当 $a>\frac{1}{2}$ 时,原方程无解,当 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant 0$ 时,原方程只有一解,当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,原方程有两解。

解法二　由解法一,原方程可以化为

$$\begin{cases} x>-\frac{1}{2}a, \\ 4x^2+4(a-1)x+a^2=0。 \end{cases} \qquad (*)$$

令
$$f(x)=4x^2+4(a-1)x+a^2,$$

则函数 $f(x)=4x^2+4(a-1)x+a^2$ 的图像与 x 轴在 $(-\frac{1}{2}a,$
$+\quad)$上公共点的个数就是原方程解的个数。

(1)　若函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴无公共点,则

$$\Delta=16(a-1)^2-16a^2=16-32a<0,$$

,　　$a>\frac{1}{2}$,这时原方程无解;

(2)　若函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有且只有一个公共点,则

$$\Delta=16-32a=0,$$

,
$$a=\frac{1}{2},$$

这里 $f(x)=4x^2-2x+\frac{1}{4}$,公共点的横坐标为 $\frac{1}{4}$,$(-\frac{1}{2}a,+$
$\quad)$ 即 $(-\frac{1}{4},+\quad)$,

$$\frac{1}{4}\in(-\frac{1}{4},+\quad),$$

,　　$a=\frac{1}{2}$ 时,原方程只有一个解;

(3)　若函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有两个公共点,

①　若两个公共点在点 $(-\frac{1}{2}a,0)$ 的两侧,则

$$f(-\frac{1}{2}a)<0,$$

, $$4\left(-\frac{1}{2}a\right)^2+4(a-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}a\right)+a^2<0,$$

, $a<0$,这时原方程只有一个解;

② 若两个公共点中有一个公共点为点$\left(-\frac{1}{2}a,0\right)$,则

$$f\left(-\frac{1}{2}a\right)=0,$$

, $$a=0,$$

, 这时方程(∗)为$4x^2-4x=0$,

, $x=0$ 或 $x=1$,

这时$\left(-\frac{1}{2}a,+\quad\right)$,即$(0,+\quad)$,

$1\in(0,+\quad)$,

, $x=1$ 是原方程的解,

, $a=0$ 时,原方程只有一解;

③ 若两个公共点都在点$\left(-\frac{1}{2}a,0\right)$的右侧,则

$$\begin{cases}\Delta=16-32a>0,\\ \dfrac{1-a}{2}>-\dfrac{1}{2}a,\\ f\left(-\dfrac{1}{2}a\right)>0。\end{cases}$$

, $$\begin{cases}a<\dfrac{1}{2},\\ a>0。\end{cases}$$

, $0<a<\frac{1}{2}$,这时原方程有二解。

综上所述,当$a>\frac{1}{2}$时,原方程无解;当$a=\frac{1}{2}$或$a\leqslant0$时,原方程只有一解;当$0<a<\frac{1}{2}$时,原方程有二解。

解法三　原方程可以化为$\begin{cases}4x>0, \\ 2x+a>0, \\ \sqrt{4x}=2x+a。\end{cases}$

,　　$\begin{cases}x>0, \\ \sqrt{x}=x+\dfrac{1}{2}a。\end{cases}$

令　　$y_1=\sqrt{x}, y_2=x+\dfrac{1}{2}a,$

则函数 $y_1=\sqrt{x}$**与函数** $y_2=x+\dfrac{1}{2}a$ **的图像的公共点个数就是原方程解的个数。**

当 $a>\dfrac{1}{2}$**时,原方程无解;当** $a=\dfrac{1}{2}$**或** $a\leqslant 0$ **时,原方程只有一解;当** $0<a<\dfrac{1}{2}$**时,原方程有二解。**

说明　解法一用的是方程求根法,解法二是将方程问题转化成二次函数的图像问题,解法三应用了方程解的几何意义(方程 $f(x)=g(x)$ **的解就是函数** $y=f(x)$ **与函数** $y=g(x)$ **的图像的交点的横坐标)。**

例2　**若关于** x **的方程** $25^{-|x+1|}-4\times5^{-|x+1|}=m$ **有实根,求实数** m **的取值范围。**

解法一　令 $5^{-|x+1|}=t\quad(0<t\leqslant 1)$,

则方程可以化为 $t^2-4t-m=0$,　　(*)

当 $\Delta=16+4m\geqslant 0$,**即** $m\geqslant -4$ **时,方程(*)的解为** $t=2\pm\sqrt{4+m}$,

令　$0<2\sqrt{4+m}\leqslant 1$,**则无解;**

令　$0<2-\sqrt{4+m}\leqslant 1$,**则** $-3\leqslant m<0$。

综所述,当 $-3\leqslant m<0$ **时,原方程有实根。**

解法二　令 $5^{-|x=1|}=t\quad(0<t\leqslant 1)$,

则方程可以化为 $t^2-4t-m=0$,

令 $f(t)=t^2-4t-m$，**其对称轴为** $t=2$，

, $\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)\leqslant 0 \end{cases}$ **时，方程有解，**

, $\begin{cases} -m>0, \\ -3-m\leqslant 0。 \end{cases}$

, $-3\leqslant m<0$，**即** $-3\leqslant m<0$ **时原方程有实根。**

解法三　令 $5^{-|x+1|}=t \quad (0<t\leqslant 1)$，

则原方程可以化为 $t^2-4t=m$。

令 $y_1=t^2-4t, y_2=m \quad (0<t\leqslant 1)$

则　当函数 $y=t^2-4t$ **与函数** $y=m$ **在** $(0,1]$ **上有公共点时，原方程有实数根。**

由图形可知，当 $-3\leqslant m<0$ **时，原方程有实数根。**

解法四　令 $5^{-|x+1|}=t(0<t\leqslant 1)$，

则原方程可以化为 $t^2-4t=m$，**即** $m=t^2-4t$。

由此可知，方程 $t^2-4t=m$ **在** $(0,1]$ **上有解时** m **的取值范围就是函数** $m=t^2-4t(0<t\leqslant 1)$ **的值域。**

函数 $m=t^2-4t(0<t\leqslant 1)$ **的值域为** $[-3,0)$，

, **当** $-3\leqslant m<0$ **时，原方程有实数根。**

说明　解法四中，我们将方程 $t^2-4t=m$ **转换成解析式** $m=t^2-4t$，**将方程有实根的问题转换成求函数的值域的问题。**

例 3　**若** x、$y\in R^+$，**且** $xy-(x+y)=1$，**求** $x+y$ **的最小值。**

解法一　$xy-(x+y)=1$，

, $(x-1)y=x+1$，

$$y=\frac{x+1}{x-1},$$

令 $m=x+y$，

则 $m=x+\dfrac{x+1}{x-1}=$

$$(x-1)+\frac{2}{x-1}+2,$$

令$\frac{x+1}{x-1}>0$,则 $x>0$,

令　　　　　　$x-1=t\quad(t>0)$,

则　　　　　　$m=t+\frac{2}{t}+2(t>0)$,

　　函数 $m=t+\frac{2}{t}+2$ 在$(0,\sqrt{2}]$上单调减,在$[\sqrt{2},+\quad)$上单调增,

,　$m_{min}=m_{t=\sqrt{2}}=2+2\sqrt{2}$,即 $x+y$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$。

解法二　令　　$m=x+y$,

则　　$\begin{cases} xy-(x+y)=1, \\ x+y=m。\end{cases}$

,　$x(m-x)-m=1$,即 $x^2-mx+m+1=0$

由题设可知,方程 $x^2-mx+m+1=0$ 的根为正根,

,　　$\begin{cases} \Delta=m^2-4(m+1)\geqslant 0, \\ m>0, \\ m+1>0。\end{cases}$

,　$m\geqslant 2+2\sqrt{2}$,即 $x+y$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$。

说明　在解法一中,我们是构造函数求变量的最小值;在解法二中,我们将解法一中出现的等式 $m=x+y$ 看作方程,然后构造方程组,并转换成方程,利用方程的解的性质求变量 m 的最小值。

练 习 题

1. 当 a 为何值时,关于 x 的方程 $2\lg x-\lg(x-1)=\lg a$ 无解?有一解?有两解。

2. 若方程$\frac{\lg(2-x^2)}{\lg(x-a)}=2$ 有实数根,求实数 a 的取值范围。

3. 关于 x 的方程 $3^{2x+1}+(m-1)(3^{x+1}-1)-(m-3)\cdot 3^x=0$ 有两个不同的实根,求实数 m 的取值范围。

4. **求函数** $y=\frac{x+1}{x^2-2x+3}$ **(**$x>-1$**)的值域。**

第二章　三 角 函 数

一、单 位 圆

半径为单位长的圆称作单位圆,在三角函数问题的研究中,常取平面直角坐标系的原点为圆心。单位圆在三角函数中有着广泛的应用。

我们常把角置于直角坐标系中,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边在 x 轴的正半轴上,这时,角的终边落在第几象限,就说这个角是第几限的角,如果解的终边落在坐标轴上,就认这个角不属于任何象限。若角是由三角函数值确定的,则我们可以借助单位圆确定这个角在坐标系中的位置,反之,由角在单位圆中的位置讨论与角相关的三角函数问题。

例 1　在直角坐标平面内画出表示角 $\alpha=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 的终边。

分析　角 $\frac{k\pi}{2}$ 就是终边落在坐标轴上的角,故只要将坐标轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$,即可得角 $\alpha=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ 的终边。

解　见图 2 - 1。

例 2　已知 α、$\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,且 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{4}$,$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{2}$,试比较 α、β 的大小。

分析　利用单位圆可在同一坐标系内画出角 α、β 然后可直观地指出角 α、β 的大小关系。

解

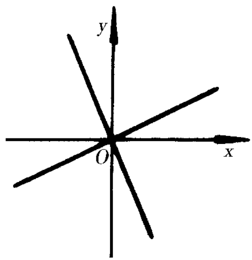


图 2 - 1

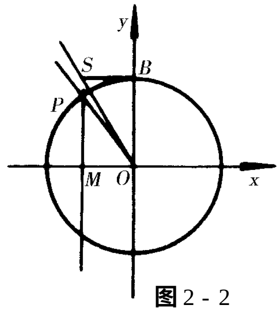


图 2 - 2

图 2 - 2 中，$OM=-\frac{\sqrt{5}}{4}$，$BS=-\frac{1}{2}$，

射线 OP、OS 分别为角 α、β 的终边，由图可知 $\alpha>\beta$。

例 3 若 α 为锐角，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$，试判断解 β 所在的象限。

分析 本例可以用计算角 β 的正弦值和余弦值判断角 β 所在像限，而利用单位圆可以直观地表示角 β 的大小，指出角 β 所在像限。

解

图 2 - 3 中，$OM=\frac{3}{5}$，$ON=-\frac{5}{13}$，

射线 OP 为解 α 的终边，射线 OP_1、OP_2 角 $\alpha+\beta$ 的终边。若将射线 OP_1、OP_2 绕点 O 顺时针旋转角 α，则射线 OP_1、OP_2 分别落在第一、第三象限，即角 β 为第一或第三象限的角。

例 4 已知集合 $E=\{\theta\mid\cos\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，$F=\{\theta\mid\tan\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，求 $E\cap F$。

分析 由 $\tan\theta<\sin\theta$ 可知，$\tan\theta(1-\cos\theta)<0$，故 $\tan\theta<0$，$F=\{\theta\tan\theta<0,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$。

解 在单位圆中，分别用阴影线表示集合 E、F，它们的重叠部分即表示集合 $E\cap F$（见图 2 - 4）。

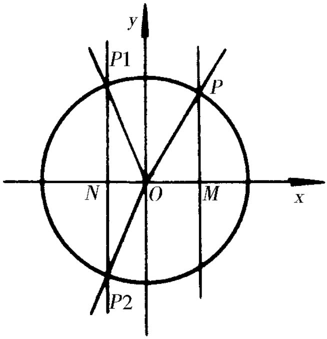


图 2 - 3

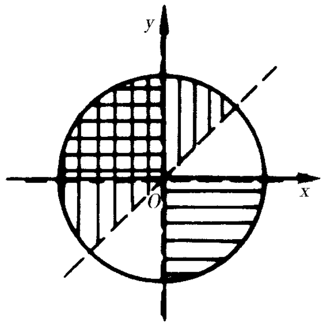


图 2 - 4

，　$E\cap F=\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$。

例 5　已知　$a=\cos 5°$，$b=\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right)$，$c=\cot\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$，**试比较** a、b、c **的大小。**

分析　在单位圆中，分别给出表示 $\cos 5°$，$\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right)$，$\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **的函数线，即可知** a、b、c **的大小。**

解

在单位圆中，有向线段 OM、NQ、BS **分别表示** $\cos 5°$，$\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right)$，$\cot\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$，**由** $NQ<OM<BS$ **知** $a<b<c$（**见图** 2 - 5）。

例 6　已知 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，**试利用单位圆证明**：$\sin x+\cos x>0$。

证明　设角 x **的终边** OP **与单位圆交于点** P，**过点** P **作** x **轴的垂线，垂足为** M，**则** $\sin x=MP$，$\cos x=OM$（**见图** 2 - 6）。

在 ΔOMP **中**，$|MP|+|OM|>|OP|$，

$$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

，　$|MP|=MP$，$|OM|=OM$，

又　$|OP|=1$，

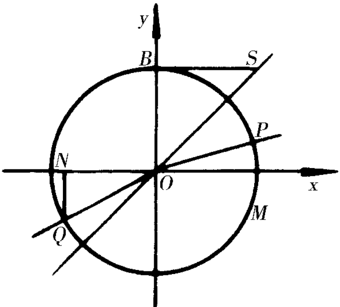


图 2 - 5

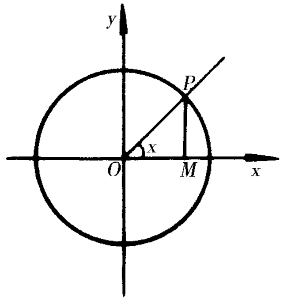


图 2 - 6

, $\sin x+\cos x>1$。

例 7　求函数 $y=\log_{\sin x}(\sqrt{2}\cos x+1)$ **的定义域。**

解　要使对数有意义，必须

$$\begin{cases}\sin x>0, \\ \sin x\neq 1, \\ \sqrt{2}\cos x+1>0。\end{cases} \text{即} \begin{cases}\sin x>0, & (1)\\ \sin x\neq 1, & (2)\\ \cos x>-\dfrac{\sqrt{2}}{2}。 & (3)\end{cases}$$

由(1)，$2k\pi<x<2k\pi+\pi$，**表示为图** 2 - 7 **中横线阴影部分；**

由(2)，$x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，**表示为图** 2 - 7 **中除** y **轴正半轴；**

由(3)，$2k\pi-\dfrac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\dfrac{3}{4}\pi$，

表示为图 2 - 7 **中竖线阴影部分。**

, **函数** $y=\log_{\sin x}(\sqrt{2}\cos x+1)$ **的定义域为** $\{x\mid 2k\pi<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ **或** $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi, k\in Z\}$。

例 8　讨论函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2+4\cos 3x)$ **的单调性。**

分析　先求函数关于 3x **的单调区间，再求得函数关于** x **的单调区间。**

解　要使对数有意义，必须 $2+4\cos 3x>0$，**即** $\cos 3x>-\dfrac{1}{2}$，

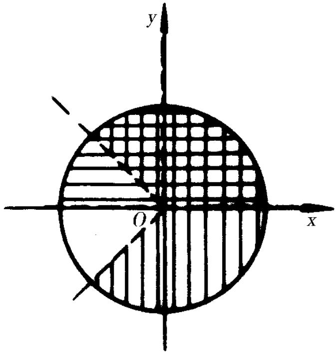


图 2 - 7

，　　$2k\pi - \frac{2}{3}\pi < 3x < 2k\pi + \frac{2}{3}\pi$，这时，$3x$ 的取值范围表示为图 2 - 8 中横线阴影部分；

函数 $y' = 2 + 4\cos 3x$ 关于 $3x$ 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 上单调递减，在区 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 上单调递增，分别表示为图 2 - 8 中竖线阴影部分。

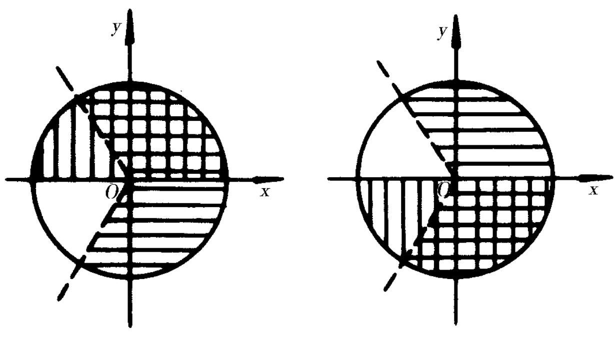


图 2 - 8

令　　$2k\pi \leqslant 3x < 2k\pi + \frac{2}{3}\pi$，

则　　$\frac{2k\pi}{3} \leqslant x < \frac{2k\pi}{3} + \frac{2}{9}\pi$；

令 $$2k\pi - \frac{2}{3}\pi < 3x \leqslant 2k\pi,$$

则 $$\frac{2k\pi}{3} - \frac{2}{9}\pi < x \leqslant \frac{2k\pi}{3}。$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1,$$

, **所求函数的单调递增区间**$\left[\frac{2k\pi}{3},\frac{2k\pi}{3}+\frac{2}{9}\pi\right)$**,单调递减区间为**$\left(\frac{2k\pi}{3}-\frac{2}{9}\pi,\frac{2k\pi}{3}\right]$,$k\in Z$。

说明 由本例可知,在单位圆中求区间的交区间是很方便的。

例 9 **讨论函数** $y=\sin^2x-\sin x+2\frac{1}{4}$**的单调性。**

解 函数的定义域为 R。

当 $\sin x\leqslant\frac{1}{2}$**时,函数** $y=\sin^2x-\sin x+2\frac{1}{4}$ **关于** $\sin x$ **单调递减,这时** $2k\pi-\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}$**,表示为图** 2 - 9 **中横线阴影部分;**

当 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$**时,函数** $y=\sin^2x-\sin x+2\frac{1}{4}$ **关于** $\sin x$ **单调递增,这时** $2k\pi+\frac{1}{6}\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5}{6}$**,表示为图** 2 - 10 **中横线阴影部分。**

函数 $y'=\sin x$ **的单调递增区间为**$\left[2k\pi-\frac{1}{2}\pi,2k\pi+\frac{1}{2}\pi\right]$**,单调减区间为**$\left[2k\pi+\frac{1}{2}\pi,2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$**,表示为图中竖线阴影部分。**

, **所示函数单调递增区间为**$\left[2k\pi+\frac{1}{6}\pi,2k\pi+\frac{1}{2}\pi\right]$,$\left[2k\pi+\frac{5}{6}\pi,2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$**,单调递减区间为**$\left[2k\pi-\frac{1}{2}\pi,2k\pi+\frac{1}{6}\pi\right]$,$\left[2k\pi+\frac{1}{2}\pi,2k\pi+\frac{5}{6}\pi\right]$,$k\in Z$。

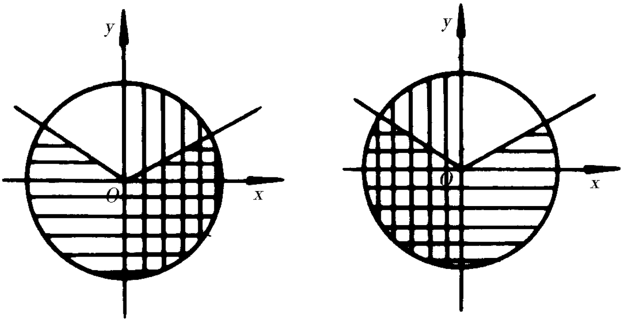


图 2 - 9

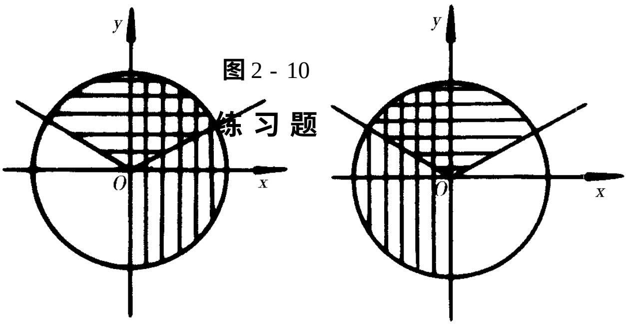


图 2 - 10

练 习 题

1. 利用单位圆中的函数线比较 $\sin 790°$ 与 $\sin(-1640°)$ 的大小。

2. 求函数 $y = \lg(-\sin x) + \sqrt{1 - 4\sin^2 x}$ 的定义域。

3. 求函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left[1 + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$ 的单调递减区间。

4. 求函数 $y = \cos^2 x + \cos x - 2$ 的单调递增区间。

二、三角函数的图像和性质

三角函数的图像和性质分别从形和数的两个侧面反映了三角

函数的变化规律。利用图像可以直观地研究三角函数的有关性质。

例 1　**已知正弦函函的图像(如图** 2 - 11 **所示)。**

(1**)求这个函数的解析式** $f_1(x)$**;**

(2**)求与** $f_1(x)$ **的图像关于直线** $x=8$ **对称的图像的函数的解析式** $f_2(x)$**。**

解　(1)　**设所求函数的解析式为**

$$f_1(x) = A\sin(\omega x+\varphi),(A>0,\omega>0)$$

由图像可知,$A=\sqrt{2}$**,周期** $T=16$**,**

,　$\omega=\dfrac{\pi}{8}$,

,　**函数解析式可表示为** $f_1(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\varphi\right)$**。**

下面求 φ**:**

方法一　**点**(6,0)**在函数的图像上,**

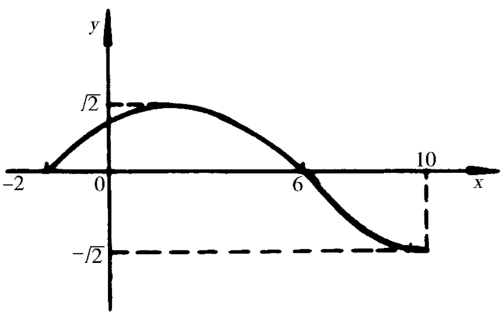


图 2 - 11

,　$\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi+\varphi\right)=0$,

,　$\dfrac{3}{4}\pi+\varphi=k\pi$**,即** $\varphi=k\pi-\dfrac{3}{4}\pi$, $k\in Z$

取　$\varphi=\dfrac{1}{4}\pi$ **或** $\dfrac{5}{4}\pi$,

, 解析式为 $f_1(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{1}{4}\pi)$ 或 $f_1(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{5}{4}\pi)$，

经检验知，所求函数解析式为 $f_1(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{1}{4}\pi)$。

方法二　由图像可知，点$(2,\sqrt{2})$在函数的图像上，

, $\sin(\frac{1}{4}\pi+\varphi)=1$。

, $\frac{1}{4}\pi+\varphi=2k\pi+\frac{1}{2}\pi$，即 $\varphi=2k\pi+\frac{1}{4}\pi,k\in Z$，

取 $\varphi=\frac{1}{4}\pi$，

, 所求函数解析式为 $f_1(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{1}{4}\pi)$。

方法三　由图像可知，函数 $f_1(x)$ 的图像可由函数 $y=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x)$ 的图像向左平移 2 个单位而得到，

, 所求函数解析式为 $f_1(x)=\sqrt{2}\sin[\frac{\pi}{8}(x+2)]$，即 $f_1(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{1}{4}\pi)$。

说明　求 φ 的方法一和方法二称作代点法，在方法一中，由于点$(6,0)$是图像的对称中心，故产生了增解（如图 2 - 12 所示），必须注意到，一个图像只能有一个解析式。

(2)解法一　设点 $P(x,y)$ 是函数 $f_2(x)$ 的图像上的任意一点，则点 P 关于直线 $x=8$ 的对称点的坐标为 $P'(16-x,y)$，

由题意知，点 $P'(16-x,y)$ 在函数 $f_1(x)$ 的图像上，

$$, \quad f_2(x)=\sqrt{2}\sin[\frac{\pi}{8}(16-x)+\frac{1}{4}\pi]$$

$$=\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{8}x+\frac{1}{4}\pi)$$

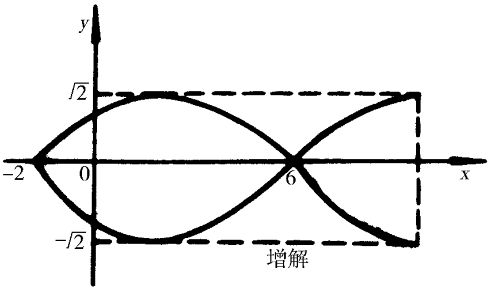


图 2 - 12

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3}{4}\pi\right)。$$

解法二

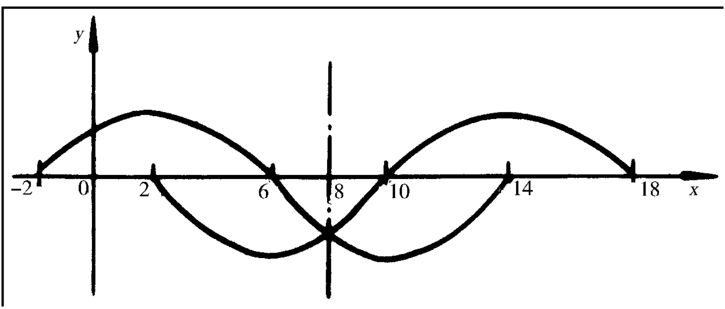


图 2 - 13

由图 2 - 13 **可知，函数** $f_1(x)$ **的图像可以由函数** $f_1(x)$ **的图像向左平移** 4 **个单位（或向右平移** 12 **个单位而得到，**

，
$$f_2(x) = \sqrt{2}\sin\left[\frac{\pi}{8}(x+4) + \frac{1}{4}\pi\right]$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3}{4}\pi\right)。$$

（**或** $f_2(x = \sqrt{2}\sin)\left[\frac{\pi}{8}(x-12) + \frac{1}{4}\pi\right] = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{5}{4}\pi\right)$。）

例 2　**已知函数** $y = a\sin 2x + \cos 2x$ **的图像关于直线** $x = \frac{\pi}{8}$ **对称，求** a **的取值。**

分析 **本例是说,函数** $y = a\sin2x + \cos2x$ **的图像具有关于直线** $x = \frac{\pi}{8}$**对称的性质,而例** 1 **是说,函数** $f_1(x)$ **与** $f_2(x)$ **的图像具有关于直线** $x = 8$ **对称的关系。**

解法一 **函数** $y = a\sin2x + \cos2x$ **的图像关于直线** $x = \frac{\pi}{8}$ **对称,**

, $f(x) = f(\frac{\pi}{4} - x)$,

即 $a\sin2x + \cos2x = a\mathrm{sis}2(\frac{\pi}{4} - x) + \cos2(\frac{\pi}{4} - x)$,

, $a\sin2x + \cos2x = a\cos2x + \sin2x$,

$(a - 1)(\sin2x - \cos2x) = 0$。 $(*)$

等式$(*)$**对任意的实数** x **都成立,**

, $a - 1 = 0$,**即** $a = 1$。

解法二 **函数** $y = a\sin2x + \cos2x$ **的图像关于直线** $x = \frac{\pi}{8}$ **对称,**

, **将函数** $y = a\sin2x + \cos2x$ **的图像向左平移**$\frac{\pi}{8}$,**所得图像关于** y **轴对称,即所得函数** $y = a\sin2(x + \frac{\pi}{8}) + \cos2(x + \frac{\pi}{8})$ **为偶函数,**

, $a\sin2(-x + \frac{\pi}{8}) + \cos2(-x + \frac{\pi}{8}) =$

$a\sin2(x + \frac{\pi}{8}) + \cos2(x + \frac{\pi}{8})$,

, $(a - 1)\sin2x = 0$。 $(*)$

等式$(*)$**对于任意实数** x **都成立,**

, $a - 1 = 0$,**即** $a = 1$。

解法三 **函数** $y = a\sin2x + \cos2x$ **的图像关于直线**$\frac{\pi}{8}$**对**

称,

, 直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 一定经过函数 $y=a\sin2x+\cos2x$ 的图像的最高点或最低点,

, $$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\pm\sqrt{a^2+1},$$

即 $$a\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\pm\sqrt{a^2+1},$$

, $$\frac{\sqrt{2}}{2}(a+1)=\pm\sqrt{a^2+1},$$

$$\frac{1}{2}(a+1)^2=a^2+1,$$

解得 $a=1$。

说明 本例的解法一和解法二都是利用函数的图像关于直线对称定义,解题过程中分别给出的等式

$$a\sin2x+\cos2x=a\sin2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos2\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

$$a\sin2\left(-x+\frac{\pi}{8}\right)+\cos2\left(-x+\frac{\pi}{8}\right)=a\sin2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\cos2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

都看作关于 x 的恒等式。

例 3 已知函数 $y=\sqrt{\sin^2x}+\sqrt{\cos^2x}+1$,

(1)讨论它的奇偶性;

(2)讨论它的周期性;

(3)讨论它的单调性和最值。

解 函数可以化为 $y=|\sin x|+|\cos x|+1$,

(1)函数的定义域为 R,显然关于原点对称,

$$\begin{aligned}f(-x)&=|\sin(-x)|+|\cos(-x)+1|\\&=|\sin x|+|\cos x|+1\\&=f(x),\end{aligned}$$

,　　函数 $y=|\sin x|+|\cos x|+1$ 为偶函数。

(2)函数 $y=|\sin x|+|\cos x|+1$ 为周期函数,其最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$。

事实上,设函数 $y=|\sin x|+|\cos x|+1$ 的周期为 $T(T>0)$,

则　$|\cos(x+T)+(|\sin(x+T)|+1=|\sin x|+|\cos x|+1$,

即　$|\cos(x+T)+(|\sin(x+T)|=|\sin x|+|\cos x|$,

等式两边平方,得 $|\sin 2(x+T)|=|\sin 2x|$,

,　$\sin^2 2(x+T)=\sin^2 2x$,

$\frac{1-\cos 4(x+T)}{2}=\frac{1-\cos 4x}{2}$,

$\cos 4(x+T)-\cos 4x=0$

$-2\sin(4x+2T)\sin 2T=0$。(JY)(*)

等式(*)对任意的实数 x 都成立,

,　$\sin 2T=0$,

,　$2T=k\pi$,即 $T=\frac{k\pi}{2}$,$(k\in N)$

,　函数的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$。

(3)设 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

则　$y=\sin x+\cos x+1$

$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+1$。

令　$-\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$,

则　$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\pi\leqslant 4$,

$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

, **函数的一个单调增区间为**$[0,\frac{\pi}{4}]$**；**

令$\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}$**，**

则$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$**，**

$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

, **函数的一个单调减区间为**$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$**。**

函数的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$**，**

, **函数的单调增区间为**$[\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$**，单调减区间为**$[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$，$k\in Z$。

函数据 $y=|\sin x|+|\cos x|+1$ **是周期为**$\frac{\pi}{2}$**的周期函数。**

, **函数在**$[0,\frac{\pi}{2}]$**上的最值就是其最值。**

$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

, $\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，

$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqslant 1$，

$1\leqslant\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}$，

, $2\leqslant\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+1\leqslant\sqrt{2}+1$

即 $2\leqslant\sin x+\cos x+1\leqslant 2+1$，

, **函数** $y=|\sin x|+|\cos x|+1$ **的最小值为** 2**，最大值为**$\sqrt{2}+1$。

说明 由本例可知,若函数为周期函数,则可由其在一个周期上的性质推知其在定义域上的性质。

例 4 **求函数** $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ **的单调递减区间。**

解法一 函数 $y=3\sin x-1$ 在区间 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ $k\in Z$ 上单调递减,

令 $$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},$$

则 $$k\pi+\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{8},k\in Z,$$

, 函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的单调递减区间为 $[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}]$ $k\in Z$。

分析 由于图像的纵向伸缩变换和纵向平移变换不改变函数的单调区间,因此,求得函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间即得函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的单调递减区间。

解法二 函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像可以先由函数 $y=\sin x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像,再将所得图像上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变而得到。

这时,函数 $y=\sin x$ 的一个单调递减区间 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 出也相应的变化 :区间先向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 为 $[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$,再普为 $[\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}]$,成为函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的一个单调区间,也就是函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的一个单调递减区间。

函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 π，

， 函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}\right]$ $k\in Z$。

解法三 函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像可以先由函数 $y=\sin x$ 的图像上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变得函数 $y=\sin 2x$ 的图像，再将所得图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 而得到。

这时，函数 $y=\sin x$ 的一个单调递减区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 也作相应的变化：区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 先变为 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，再向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 而变为 $\left[\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$，成为函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的一个单调减区间，也就是函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的一个单调递减区间。

函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的周期为 π，

， 函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的单调减区间为 $\left[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}\right]$ $k\in Z$。

例 5 当实数 m 取何值时，关于 x 的方程 $2\sin^2x-\cos x+2m=0$ 有解？

解法一 原方程可以化为 $2\cos^2x+\cos x-2m-2=0$，

令 $\cos x=t$，$t\in[-1,1]$，则方程可以化为

$$2t^2+t-2m-2=0。\qquad (*)$$

等式 $(*)$ 可以化为 $m=t^2+\frac{1}{2}t-1$，$t\in[-1,1]$，

函数 $m=t^2+\frac{1}{2}t-1$ 的对称轴为 $t=-\frac{1}{4}$，

, $m\in[-\frac{17}{16},\frac{1}{2}]$，

, 当 $-\frac{17}{16}\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$ 时，原方程有解。

解法二　原方程可以化为 $\cos^2x+\cos x-2m-2=0$，

令　$\cos x=t, t\in[-1,1]$，

则方程可以化为 $2t^2+t-2m=0$　　(2)

等式(2)可以化为 $2t^2+t=2m+2$。

令 $y_1=2t^2+t, y_2=2m+2$，

则函数 $y_1=2t^2+t, t\in[-1,1], y_2=2m+2$ 的图像有公共点时，原方程有解。

从图 2-14 可知，当 $-\frac{1}{8}\leqslant 2m+2\leqslant 3$，$-\frac{17}{16}\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$ 时，两个图像必有公共点。

, 当 $-\frac{17}{16}\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$ 时，原方程有解。

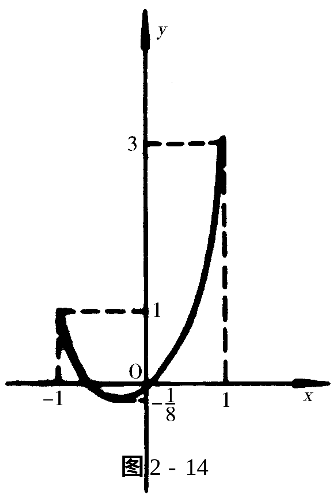


图 2-14

说明　解法一是将方程有解的问题转化为函数值域问题，即从解析式的角度看待方程：

解法二是从函数图像的角度去看等方程。

练 习 题

1. 求函数 $y=\cos(\frac{\pi}{4}-3x)$ 的单调递增区间。

2. 已知正弦曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 上一个最高

点的坐标是$(2,\sqrt{2})$，由这个最高点到相邻最低点，曲线与 x 轴交于点$(6,0)$，求这个函数的解析式。

3. 若函数 $y=3\sin(2x+\theta)$ 的图像关于 y 轴对称，求 θ 的值。

4. 若 $f(x)=\sin^2x-a\cos x+1$ 的最小值为 -6，求 a 的值。

三、三角函数求值

三角函数中的求值一般表现为两种方式：

(1)函数求值，即用求函数值的方法求值。用函数求值的方法求三角函数式的值，常用消元的方法，三角消元一般表现为减少函数的名称和减少角的表示形式，从某种意义上说，值是消元的结果。

(2)方程求值。在三角函数求值中，如果把已知条件等式看成关于某个三角函数式的方程，解这个方程就可求得这个三角函数式的值。

特别注意到，已知条件中的等式可对三角函数计算式起消元作用，也可以将已知等式看成某个三角式的方程。在三角函数求值中，必须有强烈的消元意识和方程意识。

例 1　已知 $\sin\theta=\frac{2}{3}$，求$\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}+\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$的值。

解原式　$=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

$=\frac{2}{1-2\sin^2\theta}$。

$\sin\theta=\frac{2}{3}$，

,　原式 $=\frac{2}{1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$=18$。

例 2　求 $\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$的值。

分析　在降次、和差化积、积化和差的过程中，产生特殊角，并

化成特殊三角值就是消元。

解　原式 $=\frac{1}{2}(1-\cos 40°)+\frac{1}{2}(1+\cos 100°)+\sin 20°\cdot\cos 50°$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos 100°-\cos 40°)+\sin 20°\cdot\cos 50°$$

$$=1-\sin 70°\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}(\sin 70°-\sin 30°)$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin 70°+\frac{1}{2}\sin 70°-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}。$$

例 3　**求**$(2\cos 20°+1)\tan 40°-2\cos 70°$**的值。**

解　原式 $=(2\cos 20°+1)\cdot\frac{\sin 40°}{\cos 40°}-2\cos 70°$

$$=\frac{2\sin 40°\cos 20°+\sin 40°-2\cos 70°\cos 40°}{\cos 40°}$$

$$=\frac{\sin 60°+\sin 20°+\sin 40°-\cos 110°-\cos 30°}{\cos 40°}$$

$$=\frac{\sin 20°+\sin 40°+\sin 20°}{\cos 40°}$$

$$=\frac{2\sin 30°\cdot\cos 10°+\sin 20°}{\cos 40°}$$

$$=\frac{\sin 80°+\sin 20°}{\cos 40°}$$

$$=\frac{2\sin 50°\cdot\cos 30°}{\cos 40°}$$

$$=\sqrt{3}。$$

说明　分式形式的三角函数式求值，一般采用分子、分母化积相约消元的方法。

例 4　**在** $\triangle ABC$ **中，已知** $2b=a+c$**，求证** $\cos A+\cos C-\cos A\cos C+\frac{1}{3}\sin A\sin C$ **是定值。**

分析　题设中边的关系等式 $2b=a+c$ 可以转化成角的关系等式 $2\sin B=\sin A+\sin C$，并可以化为 $\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$，而 $\cos A+\cos C-\cos A\cos C+\frac{1}{3}\sin A\sin C$ 可以化为关于 $\cos\frac{A+C}{2}$，$\cos\frac{A-C}{2}$ 的式子，因此，等式 $\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$ 可对其起消元作用。

解　$2b=a+c$，

, $2\sin B=\sin A+\sin C$，

$2\sin(A+C)=\sin A+\sin C$，

$4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$。

$\sin\frac{A+C}{2}\neq 0$，

, $\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$。

$\cos A+\cos C-\cos A\cos C+\frac{1}{3}\sin A\sin C$

$=\cos A+\cos C-\frac{1}{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$

$-\frac{1}{6}[\cos(A+C)-\cos(A-C)]$

$=\cos A+\cos C-\frac{2}{3}\cos(A-C)-\frac{1}{3}\cos(A-C)$

$=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}-\frac{2}{3}(2\cos^2+\frac{A+C}{2}-1)$

$-\frac{1}{3}(2\cos^2\frac{A-C}{2}-1)$

$=4\cos^2\frac{A+C}{2}-\frac{4}{3}\cos^2\frac{A+C}{2}+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\cos^2\frac{A+C}{2}+\frac{1}{3}$

$=1$。

例 5　已知 $\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$，

求证：$\dfrac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\dfrac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$。

分析　本例可以看作已知结果为 1 的求值问题。已知等式化成只含 A、B 的正弦或只含 A、B 的余弦，即可化成简单的关系等式，并让其对被证等式的左边起消元作用。

解　$\dfrac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\dfrac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$，

, $\dfrac{(1-\sin^2 A)^2}{1-\sin^2 B}+\dfrac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$，

$\sin^2 B(1-\sin^2 A)^2+(1-\sin^2 B)\sin^4 A=\sin^2 B(1-\sin^2 B)$，

$-2\sin^2 A\sin^2 B+\sin^4 A=-\sin^4 B$，

, $(\sin^2 A-\sin^2 B)^2=0$，

, $\sin^2 A=\sin^2 B$，

, $\cos^2 A=\cos^2 B$，

, $\dfrac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\dfrac{\sin^4 B}{\sin^2 A}$，

$=\dfrac{\cos^4 B}{\cos^2 B}+\dfrac{\sin^4 B}{\sin^2 B}$

$=\cos^2 B+\sin^2 B$

$=1$。

例 6　**已知** $1+\cos\alpha-\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，$1-\cos\alpha-\cos\beta+\sin\beta=0$，求 $\sin\alpha$ 的值。

分析　将已知条件中的两个等式看成关于 α、β 的方程组，消去 β 得关于 $\sin\alpha$ 的方程，解这个方程就可求得 $\sin\alpha$ 的值。

解　由方程组 $\begin{cases}1+\cos\alpha-\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta=0,\\1-\cos\alpha-\cos\beta+\sin\alpha\cos\beta=0。\end{cases}$

可得 $\begin{cases}\sin\beta=\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\\\cos\beta=\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\end{cases}$　$(\sin\alpha\neq1)$。

由 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ 可得 $\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^2=1$，

, $(1+\cos\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2=(1-\sin\alpha)^2$，

$2+2\cos^2\alpha=(1-\sin\alpha)^2$，

, $3\sin^2\alpha-2\sin\alpha-3=0$，

, $\sin\alpha=\frac{1-\sqrt{10}}{3}$。

例 7 若 $2\cos(2\alpha+\beta)+3\cos\beta=0$，求 $\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\alpha$ 的值。

分析 将等式 $2\cos(2\alpha+\beta)+3\cos\beta=0$ 转化成关于 $\alpha+\beta$、α 的方程，即可解得 $\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha$ 的值。

解 $2\cos(2\alpha+\beta)+3\cos\beta=0$，

, $2\cos[(\alpha+\beta)+\alpha]+3\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=0$，

, $5\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=0$，

等式两边都除以 $\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$ 可得，$\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha=-5$。

例 8 已知 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A、B、C 满足 $A+C=2B$，$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值。

分析 把题设等式中的 B 消去，并转化成关于 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的方程，解这个方程即可得 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值。

解 $A+C=2B$，

, $B=60°$，$A+C=120°$。

$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$，

, $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$，

$\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$，

, $2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=$

$$-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)],$$

$$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\left(2\cos^2\frac{A-C}{2}-1\right),$$

, $$4\sqrt{2}\cos^2\frac{A-C}{2}+2\cos\frac{A-C}{2}-3\sqrt{2}=0,$$

$$\left(2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\right)=0,$$

$$2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\neq 0,$$

, $$2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2}=0,$$

, $$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

练 习 题

1. **已知** $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$**,**$0<x<\frac{\pi}{4}$**,求**$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$**的值。**

2. **求下列各式的值:**

(1) $\sin^2 17°+\cos^2 47°+\sin 17°\cos 47°$;

(2) $\frac{\tan 10°-\sqrt{3}}{\csc 40°}$;

(3) $\csc 40°+\cot 80°$。

3. **求** $\cos^6 A+\sin^6 A+3\sin^2 A\cos^2 A$ **的值。**

4. **已知** $\tan\alpha-\tan\beta=2\tan^2\alpha\tan\beta$,

求$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$**的值。**

5. **在**$\triangle ABC$ **中,已知** $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\cos^2\frac{B}{2}$**,求**

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$**的值。**

6. 设 α、β、γ 为锐角，$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\gamma=\sin\beta,\\ \cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha,\end{cases}$ 求 $\beta-\alpha$。

四、化简与恒等式的证明

三角化简与三角恒等式证明就是用三角恒等变换的方法化简三角函数式与证明三角恒等式成立。

若一个化数式能被化简，那么这个代数式中的变量之间就存在着特定的制约关系，同样三角函数式也具有这一特征。这就是说，三个函数式化简的过程就是变量之间的制约关系明朗化的过程。消元是被化简的三角函数式中的变量间制约关系明朗化的手段，从某种意义上说，“简”是消元之后的结果。

恒等式的证明可以看作已知结果的化简。

在三角函数式化简过程中，减少三角函数的名称（如切化弦或弦化切），减少角的表达形式，分式形式中的分子、分母化积、公因式相约等都是消元的具体方法。

在条件三角恒等式的证明中，已知条件中的等式可以看作方程，从而可以用解方程的方法证明结论中的恒等式成立；也可以让已知条件中的等式对被证恒等式中的三角函数式起消元作用，从而化简被证等式两边的三角式证得恒等式成立。

例 1 化简 $\sin A(1+\text{ctan}A)+\cos A(1+\text{ctan}A)-\sec A-\csc A$。

分析 本例的三角函数式中，含有较多的三角函数，因此，可以用化弦的方法减少三角函数式中的函数名称化简。

解 $\sin A(1+\cot A)+\cos A(1+\cot A)-\sec A-\csc A$

$$=\sin A\left(1+\frac{\sin A}{\cos A}\right)+\cos A\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}\right)-\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\sin A}$$

$$=\left(\sin A+\frac{\cos^2 A}{\sin A}\right)+\left(\cos A+\frac{\sin^2 A}{\cos A}\right)-\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\sin A}$$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\sin A}$$

$$=0。$$

例 2　**化简** $\frac{\sin 2x}{2\cos x}\left(1+\tan x\cdot\tan\frac{x}{2}\right)$。

分析　本例的三角函数式中，含有三种三角函数（正弦、余弦、正切）和三种形式的角（$\frac{x}{2}$，x，$2x$）。化弦可以使三角函数名称减少，同时对 $\sin 2x$，$\tan\frac{x}{2}$ **分别用倍角公式、半角公式变形可以减少角的表达形式，从而达到化简的目的。**

解

$$\frac{\sin 2x}{2\cos x}\left(1+\tan x\cdot\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos x}\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$$

$$=\sin x\left(1+\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)$$

$$=\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\tan x。$$

例 3　**化简** $\frac{1-\sin^6 x-\cos^6 x}{1-\sin^4 x-\cos^4 x}$。

分析　分析形式的三角函数式一般采用分子、分母化积约简的方法化简。三角式的化积不但用到三角公式，而且经常要用代数公式。

解法一　$1-\sin^6 x-\cos^6 x$

$$=1-(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=1-(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=1-[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x]$$

$$=1-(1-3\sin^2 x\cos^2 x)$$

$$= 3\sin x\cos^2 x。$$

$$1 - \sin^4 x - \cos^4 x$$

$$= 1 - [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x]$$

$$= 1 - (1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)$$

$$= 2\sin^2 x\cos^2 x。$$

，

$$\frac{1 - \sin^6 x - \cos^6 x}{1 - \sin^4 x - \cos^4 x}$$

$$= \frac{3\sin^2 x\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$= \frac{3}{2}。$$

解法二 $1 - \sin^6 x - \cos^6 x$

$$= (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x + \sin^4 x) - \cos^6 x$$

$$= \cos^2 x(1 + \sin^2 x + \sin^4 x) - \cos^6 x$$

$$= \cos^2 x[1 + \sin^2 x + (\sin^4 x - \cos^4 x)]$$

$$= \cos^2 x[1 + \sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)]$$

$$= \cos^2 x(1 + 2\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$= \cos^2 x \cdot 3\sin^2 x$$

$$= 3\sin^2 x\cos^2 x。$$

$$1 - \sin^4 x - \cos^4 x$$

$$= (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) - \cos^4 x$$

$$= \cos^2 x(1 + \sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$= \cos^2 x \cdot 2\sin^2 x$$

$$= 2\sin^2 x\cos^2 x。$$

，$$\frac{1-\sin^6 x-\cos^6 x}{1-\sin^4 x-\cos^4 x}$$

$$= \frac{3\sin x\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos 2x}$$

$$= \frac{3}{2}。$$

例 4　**化简** $\frac{1+\cos\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta-\sin\theta}+\frac{1-\cos\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}$。

解法一　$\frac{1+\cos\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta-\sin\theta}+\frac{1-\cos\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}$

$$= \frac{(1+\cos\theta-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta-\sin\theta)^2}{(1-\cos\theta-\sin\theta)(1+\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{[(1-\sin\theta)+\cos\theta]^2+[(1-\sin\theta)-\cos\theta]^2}{[(1-\sin\theta)-\cos\theta]\cdot[1-\sin\theta)+\cos\theta]}$$

$$= \frac{2(1-\sin\theta)^2+2\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{4(1-\sin\theta)}{2\sin\theta(\sin\theta-1)}$$

$$= -\frac{2}{\sin\theta}。$$

解法二　$\frac{1+\cos\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta-\sin\theta}$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})}$$

$$= -\cot\frac{\theta}{2},$$

，原式 $= -\cot\frac{\theta}{2} - \tan\frac{\theta}{2}$

$$= -\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\sin\theta}。$$

说明　以上三种解法中，操作目标就是将分式形式的三角函数式的分子、分母化积约简。

例 5　**化简** $\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \frac{1}{2}\cos2\alpha\cos2\beta$。

分析　本例中的三角函数式可以用减少角的表示形式和三角函数的名称化简。

解法一　$\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \frac{1}{2}\cos2\alpha\cos2\beta$

$$= (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) + \cos^2\alpha\cos^2\beta$$

$$- \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha - 1)(2\cos^2\beta - 1)$$

$$= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2\cos^2\alpha\mathrm{coa}^2\beta -$$

$$2\cos^2\alpha\cos^2\cos^{\beta} + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}。$$

解法二 $\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \frac{1}{2}\cos2\alpha\cos2\beta$

$$= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{1-\cos 2\beta}{2} + \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{1+\cos 2\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\cos 2\beta$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\alpha - \frac{1}{4}\cos 2\beta + \frac{1}{4}\cos 2\alpha\cos 2\beta + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\beta + \frac{1}{4}\cos 2\alpha\cos 2\beta - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\cos 2\beta$$

$$= \frac{1}{2}。$$

解法三　$\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\cos 2\beta$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\cos 2\beta$$

$$= \cos^2(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta)$$

$$= \frac{1}{2}[1+\cos 2(\alpha+\beta)] - \frac{1}{2}\cos 2(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{1}{2}。$$

例 6　**求证**:$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)$。

分析　本例可以看作结果为 $\sin^2(\alpha+\beta)$ **的化简问题。若能将三角函数式** $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$ **的角** α、β **向角** $\alpha+\beta$ **转化,则这个三角函数式就能被消元化简,得结果** $\sin^2(\alpha+\beta)$。

证明　$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1-\cos 2\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

$$= 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - [\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)$$

$$= 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

$$= 1 - \cos^2(\alpha+\beta)$$

$$= \sin^2(\alpha+\beta)。$$

例 7　**求证**：$2\sin^4 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + 5\cos^4 x - \cos 3x\cos x = 2(1 + \cos^2 x)$。

分析　**只要将等式左边化成含有** $\cos x$ **的形式，就可以化简得** $2(1+\cos^2 x)$。

证法一　$2\sin^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + 5\cos^4 x - \cos 3x\cos x$

$$= 2\sin^4 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + 5\cos^4 x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= 2(1-\cos^2 x)^2 + 3(1-\cos^2 x)\cos^2 x + 5\cos^4 x - \frac{1}{2}[2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1] - \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1)$$

$$= 2 - 4\cos^2 x + 2\cos^4 x + 3\cos^2 x - 3\cos^4 x + 5\cos^4 x - 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - \frac{1}{2} - \cos^2 x + \frac{1}{2}$$

$$= 2 + 2\cos^2 x$$

$$= 2(1+\cos^2 x)。$$

分析　**由于等式的右边** $\cos^2 x$ **可以用** $\cos 2x$ **表示。故将等式的左边化成** $\cos 2x$ **的表达式也可证得等式成立。**

证法二　$2\sin^4 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + 5\cos^4 x - \cos 3x\cos x$

$$= 2\sin^4 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + 5\cos^4 x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(1-\cos^2 2x) + 5\cdot$$

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-1)-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=\frac{1}{2}-\cos 2x+\frac{1}{2}\cos^2 2x+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^2 2x+\frac{5}{4}+\frac{5}{2}$$

$$\cos 2x+\frac{5}{4}\cos^2 2x-\cos^2 2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$=3+\cos 2x$$

$$=3+2\cos^2 x-1$$

$$=2(1+\cos^2 x)。$$

例 8　**已知** $\sin=A\sin(\alpha+\beta)(|A|<1)$，**求证**：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$。

分析　**等式** $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$ **可以消去** $\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$ **中的** A，**化成** $\frac{\sin\beta}{\cos\beta-\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}$，**再将其化简成** $\tan(\alpha+\beta)$ **即证得等式成立，这时等式** $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$ **起着消元作用。必须注意到，化简** $\frac{\sin\beta}{\cos\beta-\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}$ **时必须减少角的表示形** A'。

等式 $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$ **也可以看作方程，这时，必须让等式仅含有角** $\alpha+\beta$，**即可解出** $\tan(\alpha+\beta)$，**证得等式成立。**

证法一　　$\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$，

,　　$A=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

,　　$\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$

$$=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$=\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin[(\alpha+\beta)-\beta]}$$

$$=\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}$$

$$=\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}$$

$$=\tan(\alpha+\beta)。$$

证法二 $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$，

, $\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=A\sin(\alpha+\beta)$，

$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=A\sin(\alpha+\beta)$，

$\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta-A)=\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$，

, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$。

例 9 **已知** $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin2\beta}{5-\cos2\beta}$，**求证**：$2\tan\alpha=3\tan\beta$。

证法一 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin2\beta}{5-\cos2\beta}$，

, $$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta}}{5-\dfrac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}}$$

$$=\frac{2\tan\beta}{4+6\tan^2\beta}$$

$$=\frac{\tan\beta}{2+3\tan^2\beta}。$$

, $$\tan\alpha=\tan[(\alpha-\beta)+\beta]$$

$$=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\beta}{2+3\tan^2\beta}+\tan\beta}{1-\dfrac{\tan\beta}{2+3\tan^2\beta}\cdot\tan\beta}$$

$$= \frac{3\tan\beta + 3\tan^3\beta}{2 + 2\tan^2\beta}$$

$$= \frac{3}{2}\tan\beta，$$

, $2\tan\alpha = 3\tan\beta$。

证法二 $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$，

, $\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\tan\beta}{2 + 3\tan^2\beta}$，

$2\tan\alpha - \tan\beta + 3\tan\alpha\tan^2\beta - 3\tan^3\beta = \tan\beta + \tan\alpha\tan^2\beta$，

, $2\tan\alpha(1 + \tan^2\beta) = 3\tan\beta(1 + \tan^2\beta)$，

, $2\tan\alpha = 3\tan\beta$。

说明 证法一是用求 $\tan\alpha$ 的值的方法证明等式成立，等式 $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$ 化成等式 $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\beta}{2 + 3\tan^2\beta}$ 后，对计算式 $\dfrac{\tan(\alpha - \beta) + \tan\beta}{1 - \tan(\alpha - \beta)\tan\beta}$ 起消元作用。

在证法二中，$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$ 被化成关于 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 的等式，并看成关于 $\tan\alpha$ 的方程，解出 $\tan\alpha$ 即证得等式成立。

例 10 已知 $\dfrac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan\alpha} + \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\alpha} = 1$，求证：$\tan^2 x = \tan\alpha\tan\beta$。

分析 先将等式 $\dfrac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan\alpha} + \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\alpha} = 1$ 看成关于 $\sin^2 x$ 的方程，解出 $\sin^2 x$，再求出 $\tan^2 x$ 即证得等式成立。

证明 $\dfrac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan\alpha} + \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\alpha} = 1$，

$$, \quad \sin^2 x = \sin^2\alpha\left[1 - \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan\alpha}\right]$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha[\tan\alpha - \tan(\alpha - \beta)]$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\tan\beta[1 + \tan\alpha\tan(\alpha - \beta)]$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\tan\beta \frac{\cos\alpha\cos(\alpha - \beta) + \sin\alpha(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)},$$

, $$\cos^2 x = 1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha - \beta)},$$

, $$1 + \tan^2 x = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\tan^2 x = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} - 1$$

$$= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= \tan\alpha\tan\beta。$$

讨论三角函数的性质，常需要对函数解析式作等价变形，这种三角函数解析式的等价变形就是对函数解析式进行化简，化简成较为熟悉的形式。这种化简同样需要有消元的思想意识。

例 11 **已知** $f(x) = 1 - \dfrac{\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$

(1) 将 $f(x)$ **表示成** $\cos x$ **的多项式；**

(2) 求 $f(x)$ **的最小值。**

分析　本例(1)明确指出将函数化成关于 $\cos x$ **函数，这就为函数解析式的变形指明了目标。**

解 (1) $f(x)=1-\dfrac{\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=-\frac{2\cos\frac{3x}{2}\sin x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=-\frac{4\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=-4\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$=-2(\cos 2x+\cos x)$$

$$-2(2\cos^2 x+\cos x-1)。$$

(2) $f(x)=-4\left(\cos x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$,

, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\cos x\leqslant 0$,

, **当** $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$**时,函数** $f(x)$ **的最小值**$\sqrt{2}$。

例 12 **已知** $\sin x=\dfrac{1-a}{1+a}$,$\cos x=\dfrac{3a-1}{a+1}$,**若** x **是第二象限角,求实数** a **的取值。**

分析　可将题设中的等式组 $\begin{cases}\sin x=\dfrac{1-a}{1+a},\\ \cos x=\dfrac{3a-1}{a+1}\end{cases}$。**看成关于** x、a **的方程组求解。**

解　$\begin{cases}\sin x=\dfrac{1-a}{1+a},\\ \cos x=\dfrac{3a-1}{a+1}\end{cases}$。

,　$\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^2+\left(\dfrac{3a-1}{a+1}\right)^2=1$,

$(1-a)^2+(3a-1)^2=(1+a)^2$,

$9a^2-10a+1=0$,

,　$a=\dfrac{1}{9}$ **或** $a=1$。

若　$a=\dfrac{1}{9}$,

则　$\sin x=\dfrac{4}{5}$, $\cos x=-\dfrac{3}{5}$,

,　**由** x **是第二象限角知**, $a=\dfrac{1}{9}$ **可取**;

若　$a=1$,

则　$\sin x=0$, $\cos x=1$,

,　$a=1$ **不可取。**

综上所述, $a=\dfrac{1}{9}$。

例 13　**已知** $\alpha、\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$, $3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$。

求证:　$\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$。

分析　本例只要将题设中的等式组看成方程组,利用方程组

变形的方法得 $\sin(\alpha+2\beta)=1$ 或 $\cos(\alpha+2\beta)=0$ 或 $\sin\alpha=\cos^2\beta$ 或 $\tan\alpha=\cot 2\beta$ 即可得 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$。

证法一 $\begin{cases}3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1, \\ 3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0。\end{cases}$

, $\begin{cases}3\sin^2\alpha=\cos 2\beta, & (1) \\ 3\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\beta。 & (2)\end{cases}$

(1)、(2)两式平方相四得 $9\sin^2\alpha=1$。

$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,

, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$,

, $$\begin{aligned}\sin(\alpha+2\beta)&=\sin\alpha\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta\\&=3\sin 3\alpha+3\sin\alpha\cos^2\alpha\\&=3\sin\alpha\\&=1。\end{aligned}$$

α、$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,

, $0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$,

, $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$。

证法二

$\begin{cases}3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1, \\ 3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0。\end{cases}$

, $\begin{cases}3\sin^2\alpha=\cos 2\beta, \\ 3\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\beta。\end{cases}$

, $$\begin{aligned}\cos(\alpha+2\beta)&=\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta\\&=\cos\alpha\cdot 3\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot 3\sin\alpha\cos\alpha\\&=0。\end{aligned}$$

$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,

, $\alpha+2\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$,

, $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$。

证法三 $\begin{cases}3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1,\\ 3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0\end{cases}$。

, $\begin{cases}3\sin^2\alpha=\cos2\beta,\\ 3\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\beta\end{cases}$。

由证法一得,$\sin\alpha=\frac{1}{3}$,

, $\cos2\beta=3\sin^2\alpha=3\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$,

, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)=\sin\alpha$,

$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

, $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-2\beta<\frac{\pi}{2}$,$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

, $\frac{\pi}{2}-2\beta=\alpha$,**即** $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$。

证法四 $\begin{cases}3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1,\\ 3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0\end{cases}$。

, $\begin{cases}3\sin\alpha=\cos2\beta, & (1)\\ 3\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\beta\text{。} & (2)\end{cases}$

$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

, $3\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\beta\neq0$,

(1)、(2)**两式相比可得**,$\tan\alpha=\operatorname{ctan}2\beta$,

即 $\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)$,

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-2\beta<\frac{\pi}{2}$,

, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-2\beta$，即 $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$。

例 14　在△ABC 中，若$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\cos A+\cos C}{\cos A+\cos B}$，试判断△ABC 的形状。

解法一　$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\cos A+\cos C}{\cos A+\cos B}$，

, $$\frac{2\sin\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}=\frac{2\cos\dfrac{A+C}{2}\cdot\cos\dfrac{A-C}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}},$$

$$A+B+C=\pi,$$

, $$\frac{A+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2},$$

, $$\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2}\neq 0,\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2},$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A+C}{2}\neq 0,\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2},$$

, $$\frac{\sin\dfrac{A+C}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\frac{\cos\dfrac{A-C}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}},$$

, $$\sin\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\cdot$$

$$\cos\frac{A-C}{2}=0,$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(A-\frac{B-C}{2}\right)+\sin\frac{B+C}{2}\right.$$

$$\left.-\sin\left(A+\frac{B-C}{2}\right)-\sin\frac{B+C}{2}\right]=0,$$

, $$\sin\left(A-\frac{B-C}{2}\right)-\sin\left(A+\frac{B-C}{2}\right)=0,$$

$$-2\cos A\cdot\sin\frac{B-C}{2}=0,$$

, $\cos A$ 或 $\sin \frac{B-C}{2}=0$。

$$0<A<\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{2},$$

, $A=90°$ 或 $B=C$,

, $\triangle ABC$ 为直角三角形或等腰三角形。

解法二 $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\cos A+\cos C}{\cos A+\cos B}$,

由正弦定理和余弦定理可得

$$\frac{b}{c}=\frac{\frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}},$$

, $\frac{b}{c}=\frac{a(b^2+c^2-a^2)+c(a^2+b^2-c^2)}{a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)}$,

, $ab(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)=$

$ac(b^2+c^2-b^2)+c^2+(a^2+b^2-c^2)=0$

, $a(b-c)(b^2+c^2-a^2)+[b^2(a^2+c^2-b^2)-$
$c^2(a^2+b^2-c^2)]=0$,

, $a(b-c)(b^2+c^2-a^2)+[(a^2b^2-a^2c^2)-$
$(b^4-c^4)]=0$

$a(b-c)(b^2+c^2-a^2)+(b^2-c^2)$
$(a^2-b^2-c^2)=0$,

, $(b-c)(b^2+c^2-a^2)(a-b-c)=0$,

$$a-b-c\neq 0,$$

, $(b-c)(b^2+c^2-a^2)=0$,

, $b-c=0$ 或 $b^2+c^2-a^2=0$,

, $b=c$ 或 $b^2+c^2=a^2$,

, $\triangle ABC$ 等腰三角形或直角三角形。

说明 判断三角形的形状,一般是将题设等式化成角的三角函数关系等式或化成边的关系等式,转化的依据为正弦定理或余

弦定理。

在以上两种解法中,我们都采用了将等式化成若干个因式的积等于零的方法,这是将等式看成方程并将方程变形的基本方法,这种变形结果能显示原等式蕴含的实质。

练 习 题

1. 化简 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$。

2. 化简 $\cos2\alpha+6\sin^2\frac{\alpha}{2}-8\sin^4\frac{\alpha}{2}$。

3. 求证:$\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha=\cos^2 2\alpha$。

4. 已知$\triangle ABC$中,$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$,求证:$4+4\cos A\cos C=5(\cos A+\cos C)$。

5. 已知 $\sin(2\alpha+\beta)+2\sin\beta=0$ 且 $\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\neq0$,求证:$\tan\alpha=3\tan(\alpha+\beta)$。

6. 已知 $5\tan(\beta-\alpha)+3\tan\alpha=0$,求证:$\sin2\alpha+\sin2(\alpha-\beta)=4\sin2\beta$。

7. 求函数 $y=\sin x\cos x-2\sin^3x\cos x$ 的最小正周期。

8. 讨论函数 $y=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1$ 的奇偶性、周期性、单调性。

9. 在$\triangle ABC$中,若$\dfrac{\cos B-\cos C}{2\sin^2\frac{A}{2}}=\dfrac{c-b}{a}$,试判断$\triangle ABC$的形状。

10. 设 $\sin\theta,\cos\theta$ 是方程 $4x^2-4mx+2m-1=0$ 两个根,且$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$,求 m 和角 θ 的值。

五、反三角函数式表示角

反三角函数是相应的三角函数在特定的区间上的反函数,反

三角函数的形式总表示这个特定区间上的一个角，因此在解反三解函数问题时，必须有将反三角函数形式看作特定区间上的一个角的意识。

例1　求 $\tan\left[\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)-\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$ 的值。

分析　$\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$ 和 $\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)$ 都表示角，因此，本例就是求这两个角的差角的正切值。

解　设 $\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)=\alpha$，$\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)=\beta$，

则　$\sin\alpha=-\frac{4}{5}\quad\left(\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right)$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}\quad\left(\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)$。

$$\tan\alpha=-\frac{4}{3}，\tan\beta=-\frac{12}{5}，$$

$$原式=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{4}{3}-\left(-\frac{12}{5}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{12}{5}\right)}=\frac{16}{63}。$$

例2　求 $\arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7}-\operatorname{arcot}\frac{3\sqrt{3}}{13}$ 的值。

分析　本例从形式上看是求反三角函数表达式的值，实质上是求角的大小。求角的大小一般必须给出这个角的某个三角函数值及这个角的范围。

解　设 $\alpha=\arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7}$，则 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$。$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，从而 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$；

设 $\beta=\arctan\frac{3\sqrt{3}}{13}$，则 $\tan\beta=\frac{3\sqrt{3}}{13}$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，从而 $\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos\beta=\frac{13}{14}$。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{13}{14}-\frac{1}{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}, \quad , \quad \alpha-\beta=\frac{\pi}{3},$$

$$\arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7}-\arctan\frac{3\sqrt{3}}{13}=\frac{\pi}{3}。$$

说明　本例不宜求 $\cos(\alpha-\beta)$ **的值，因为求出** $\cos(\alpha-\beta)$ **的值后，还必须进一步比较** α、β **的大小后才能得出结果。**

例 3　**求** $\arcsin[\cos(-4)]$ **的值。**

分析　本例是求在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ **内的一个角。**

解

$$\begin{aligned}&\arcsin[\cos(-4)]\\&=\arcsin[\sin(4-\frac{3\pi}{2})]\\&=4-\frac{3\pi}{2}。\end{aligned}$$

例 4　**求证** $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$。

分析　本例是要证明角 $\arccos(-x)$ **和** $\pi-\arccos x$ **相等。证明两角相等，必须证明这两角的同名函数值相等，同时必须证明这两角在该函数的同一个一一对应的区间内。**

证明　$\cos[\arccos(-x)]=x$，$\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x$

, $\quad\cos[\arccos(-x)]=\cos(\pi-\arccos x)$

又　$\arccos(-x)$，$\arccos x\in[0,\pi]$，

，$\pi - \arccos x \in [0,\pi]$，

由函数 $y = \cos x$ **在** $[0,\pi]$ **上为单调减函数可知，**$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$。

例 5　求证 $\arccos\frac{4}{5} + \arctan\frac{3}{5} = \arctan\frac{27}{11}$。

证明　$\tan\left(\arccos\frac{4}{5} + \arctan\frac{3}{5}\right) = \tan\left(\arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{3}{5}\right)$

$$= \frac{\tan\left(\arctan\frac{3}{4}\right) + \tan\left(\arctan\frac{3}{5}\right)}{1 - \tan\left(\arctan\frac{3}{4}\right)\cdot\tan\left(\arctan\frac{3}{5}\right)} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{27}{11},$$

$\tan\left(\arctan\frac{27}{11}\right) = \frac{27}{11}$，

，$\tan\left(\arccos\frac{4}{5} + \arctan\frac{3}{5}\right) = \tan\left(\arctan\frac{27}{11}\right)$。

$$\arccos\frac{4}{5} \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\arctan\frac{3}{5} \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right), \arctan\frac{27}{11} \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

，$\arccos\frac{4}{5} + \arctan\frac{3}{5} \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

由函数 $y = \tan x$ **在** $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **上为单调增函数可知，**$\arccos\frac{4}{5} + \arctan\frac{3}{5} = \arctan\frac{27}{11}$。

说明　本例也可以由 $\tan\left(\arccos\frac{4}{5} + \arctan\frac{3}{5}\right) = \frac{27}{11}$ **且** $\arccos\frac{3}{5} + \arctan\frac{4}{5} \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **直接得** $\arccos\frac{4}{5} + \arctan\frac{3}{5} = \arctan\frac{27}{11}$。

例 6　已知 $\arccos x + \arccos y + \arccos z = \pi$，**求证：**$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$。

分析　题设等式表示两角相等,则必有这两角的同名函数值相等。

证明　　$\arccos x+\arccos y+\arccos z=\pi$,

,　$\arccos x+\arccos y=\pi-\arccos z$,

,　$\cos(\arccos x+\arccos y)=\cos(\pi-\arccos z)$,

$\cos(\arccos x)\cos(\arccos y)-\sin(\arccos x)\sin(\arcsin y)=-\cos(\arccos z)$,

$$xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=-z,$$

$$xy+z=\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},$$

$$(xy+zx)^2=(1-x^2)(1-y^2),$$

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1。$$

例 7　**比较** $\arcsin\frac{1}{4}$**,**$\arccos\frac{3}{4}$**和** $\arctan\sqrt{2}$**的大小。**

分析　**本例实质上是比较三个角的大小。**

解法一　　$\arcsin\frac{1}{4}<\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$,

$$\frac{\pi}{6}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}<\arccos\frac{3}{4}<\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$\arctan\sqrt{2}>\arctan 1=\frac{\pi}{4},$$

,　$\arcsin\frac{1}{4}<\arccos\frac{3}{4}<\arctan\sqrt{2}$。

解法二　　$\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$,

$$\sin\left(\arccos\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\sin(\arctan\sqrt{2})=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

,　$\sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)<\sin\left(\arccos\frac{3}{4}\right)<\sin(\arctan\sqrt{2})$

又　$\arcsin\frac{1}{4}$，$\arccos\frac{3}{4}$，$\arctan\sqrt{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$

由 $y=\sin x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$上为单调增函数可知，$\arcsin\frac{1}{4}<\arccos\frac{3}{4}<\arctan\sqrt{2}$。

解法三　$\arccos\frac{3}{4}=\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\arctan\sqrt{2}=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$，

,　由 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上为单调增函数可知，

$\arcsin\frac{1}{4}<\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}<\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $\arcsin\frac{1}{4}<\arccos\frac{3}{4}<\arctan\sqrt{2}$。

解法四　$\arcsin\frac{1}{4}$即正弦值为$\frac{1}{4}$的角，$\arccos\frac{3}{4}$即余弦为$\frac{3}{4}$的角，$\arctan\sqrt{2}$即正切值为$\sqrt{2}$的角，且它们都在$(0,\frac{\pi}{2})$内。在单位圆分别给出表示这三个角的终边。

由图 2-15 可知，$\arcsin\frac{1}{4}<\arccos\frac{3}{4}<\arctan\sqrt{2}$。

例 8　证明函数 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上为减函数。

证明　设 $x_1,x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，

则　$\cos(\arccos x_1)=x_1$，$\cos(\arccos x_2)=x_2$。

由 $x_1<x_2$ 知，$\cos(\arccos x_1)<\cos(\arccos x_2)$

又　$\arccos x_1$，$\arccos x_2\in[0,\pi]$，

,　由 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上为单调函数可知，

$\arccos x_1>\arccos x_2$，

,　函数 $y=\arccos x_2$ 在$[-1,1]$上为单调减函数。

说明　本例本质上是证明角 $\arccos x_1$，arccosx2 的大小关系。

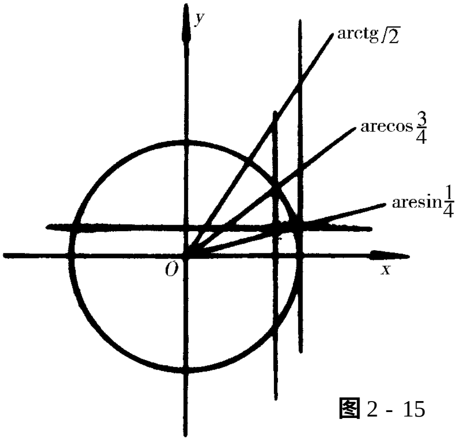


图 2 - 15

练 习 题

1. 求 $\cos\left(2\operatorname{arccot}\frac{1}{2}\right)+\tan\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$的值。

2. 求 $2\arctan(-2-\sqrt{5})-\operatorname{arccot}\frac{1}{3}$的值。

3. 求证:$\arctan(3+2\sqrt{2})-\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$。

4. 试比较 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$与 $\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{2}\right)$的大小。

5. 若 $\arctan(1+x)+\arctan(1-x)=\frac{\pi}{4}$,求 $\arccos\frac{x}{2}$的值。

第三章　不 等 式

一、不等式的证明

不等式证明的基本方法是比较法、综合法、分析法。另外还有几种常见的方法：放缩法、换元法、反证法、判别式法等。

（一）比较法一般采用"作差"、"作商"两种形式，其中以作差比较法更为广泛。

作差后，差式变形目标一般为因式分解化积、配方化成若干个非负因式的和，然后与 0 比较；作商后，商式的变形目标一般为分子，分母化积约简，然后与 1 比较。

例 1　设 $a、b \in R$，求证：$a^2 + b^2 + ab + 1 > a + b$。

证法一　$(a^2 + b^2 + ab + 1) - (a + b)$

$$= (a + \frac{b}{2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}(b - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3} > 0,$$

∴ $a^2 + b^2 + ab + 1 > a + b$。

证法二　$(a^2 + b^2 + ab + 1) - (a + b)$

$$= a^2 + (b - 1)a + b^2 - b + 1$$

将 $a^2 + (b - 1)a + b^2 - b + 1$ 看成关于 a 的二次三项式，

$$\Delta = (b - 1)^2 - 4(b^2 - b + 1)$$

$$= -3b^2 + 2b - 3 = -3(b - 1/3)^2 - 8/3 < 0,$$

故　$a^2 + (b - 1)a + b^2 - b + 1 > 0$，

∴ $a^2 + b^2 + ab + 1 > a + b$。

例 2　设 $a > 0, b > 0$，

求证：$(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}} + (\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}} \geqslant a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$。

证法一　$$\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}-\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}-\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}-1\right)$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\geqslant 0,$$

当且仅当 $a=b$ **时等号成立。**

, $$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}。$$

证法二　**左边** >0**，右边** >0**，**

又　$$\frac{\text{左边}}{\text{右边}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$=\frac{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geqslant\frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$$

$$=1$$

, $$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$

说明证法一的本质是作差后，将差式采用多项式因式分解的分组分解方法化积，本例还可以采用其它的分组形式分解化积。

证法二是在作商后，将商式的分子、分母化积约简，并用基本不等式放缩后与 1 **作比较。**

（二）综合法是利用已经证明过的不等式（如基本不等式）作为基础，再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式。

综合法的本质是：由因导果，即从“已知”推“可知”。

用综合法证明不等式的基本形式是将一个不等式化成若干个不等式“相加”或化成若干个不等式“相乘”。特别要注意到，选用基本不等式时，要分析被证不等式与基本不等式之间形式上的联系。

例 3　**设** $a、b、c \in R^{+}$，

求证：$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geqslant 6abc$。

证法一　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$=(a^2b+bc^2)+(b^2c+ca^2)+(c^2a+ab^2)。$$

$$a^2b+bc^2 \geqslant 2abc,$$

$$b^2c+ca^2 \geqslant 2abc,$$

$$c^2a+ab^2 \geqslant 2abc,$$

, $(a^2b+bc^2)+(b^2c+ca^2)+(c^2a+ab^2) \geqslant 6abc$，

, **原不等式成立。**

证法二　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$=(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2),$$

$$a^2b+b^2c+c^2a \geqslant 3abc,$$

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 3abc,$$

, $(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2) \geqslant 6abc$，

, **原不等式成立。**

例 4　**已知** $a、b、c \in R^{+}$，$a+b+c=1$，

求证：$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geqslant 8。$$

证明　$a、b、c \in R^{+}$，$a+b+c=1$，

, $$\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$$

$$=\frac{b+c}{a}$$

$$\geqslant \frac{2\sqrt{bc}}{a},$$

即
$$\frac{1}{a}-1 \geqslant \frac{2\sqrt{bc}}{a} > 0。$$

同理可证：$\frac{1}{b}-1 \geqslant \frac{2\sqrt{ca}}{b} > 0$，$\frac{1}{c}-1 \geqslant \frac{2\sqrt{ab}}{c} > 0$，

，
$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$$

$$\geqslant \frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{bc}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8。$$

例 5　**求证下列不等式：**

（1）$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geqslant \sqrt{2}(a+b+c)$；

（2）若 $a+b+c=1$，a、b、$c \in R^+$，则 $\sqrt{13a+1}+\sqrt{13b+1}+\sqrt{13c+1} \leqslant 4\sqrt{3}$。

分析　用基本不等式证明不等式时，要分析被证不等式不等号两边的式子与基本不等式之间形式上的联系，以便选用适当的基本不等式。

题（1）中，不等式的左边 $\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 不能看成与算术平均值相关的形式（即三个非负数的和的形式），而只能将每个根式看成与平方平均值相关的形式。

题（2）中，不等式的左边 $\sqrt{13a+1}+\sqrt{13b+1}+\sqrt{13c+1}$ 则是整体看成与算术平均值相关的形式。

证明（1）

$$\sqrt{a^2+b^2} \geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{b^2+c^2} \geqslant \frac{b+c}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{c^2+a^2} \geqslant \frac{c+a}{\sqrt{2}},$$

, $$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

$$\geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}}+\frac{b+c}{\sqrt{2}}+\frac{c+a}{\sqrt{2}},$$

即 $$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

$$\geqslant \sqrt{2}(a+b+c)$$

证明(2)

a、b、$c \in R^+$,

, $\sqrt{13a+1}$、$\sqrt{13b+1}$、$\sqrt{13c+1} \in R^+$,

$$\sqrt{13a+1}+\sqrt{13b+1}+\sqrt{13c+1} \leqslant 3$$

$$\sqrt{\frac{12a+1+13b+1+13c+1}{3}},$$

$$\sqrt{13a+1}+\sqrt{13b+1}+\sqrt{13c+1} \leqslant 3$$

$$\sqrt{\frac{13(a+b+c)+3}{3}},$$

$$a+b+c=1,$$

, $$\sqrt{13a+1}+\sqrt{13b+1}+\sqrt{13c+1} \leqslant 4\sqrt{3}$$

例 6 **若** $a>b>0$,**求证**:$a+\frac{1}{(a-b)b} \geqslant 3$。

分析 不等式左边的代数式的原始形式 $a+\frac{1}{(a-b)b}$ **与基本不等式之间很难给出形式上的联系,但考虑到不等式的右边是** 3,**可以将左边的代数式拆成** $(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)b}$,**然后看成与三个正数的算术平均值相关的形式。**

证明 左边可化为 $(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)b}$。

$$a>b>0,$$

, $$a-b>0, \frac{1}{(a-b)b}>0,$$

, $$左边 = (a-b)+b+\frac{1}{(a-b)b}$$

$$\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{(a-b)\cdot b\cdot\frac{1}{(a-b)b}}$$

$$=3。$$

, 原不等式成立。

(三)分析法的本质是:执果索因,即从“未知”找“需知”,就是从求证的不等式出发,分析使这个不等式成立的充分条件,即把证明不等式转化为判定这些条件是否具备的问题,如果肯定这些条件已经具备,那么可以断定原不等式成立。

例7 已知 $a>0,b>0,2c>a+b$,求证:

(1) $$c^2>ab;$$

(2) $$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}。$$

证明(1)

$$a>0,b>0,2c>a+b,$$

, $$c>\frac{a+b}{2}>0。$$

要证明 $c^2>ab$,只要证明 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$,即只要证明 $(a-b)^2\geqslant 0$。

$$(a-b)^2\geqslant 0 \text{ 成立},$$

, $$c^2\geqslant ab。$$

证明(2)

要证明 $$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab},$$

只要证明 $$-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab},$$

即 $$|a-c|<\sqrt{c^2-ab},$$

只要证明 $$(a-c)^2<c^2-ab,$$

即 $$a^2-2ac<-ab,$$

只要证明 $$2ac>a(a+b)。$$

$$2c > a + b, a > 0,$$

, $2ac > a(a + b)$ 成立。

, 原不等式成立。

说明　题(1)用综合法证明较用分析法证明简洁,事实上:

$a > 0, b > 0, 2c > a + b,$

, $2c > a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$

即 $c > \sqrt{ab},$

, $c^2 > ab$。

例8　已知 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}, a \neq b,$

求证: $|f(a) - f(b)| < |a - b|$。

证明 $f(x) = \sqrt{1 + x^2},$

, $f(a) = \sqrt{1 + a^2}, f(b) = \sqrt{1 + b^2}$。

要证 $|f(a) - f(b)| < |a - b|,$

即只要证明 $|\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2}| < |a - b|,$

, 只要证明 $|\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2}|^2 < |a - b|^2,$

即只要证明 $\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)} > 1 + ab$。

若 $1 + ab \leqslant 0,$

则由 $\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)} \geqslant 1$ 可知, $\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)} > 1 + ab$ 成立;

若 $1 + ab > 0,$

则只要证明 $(1 + a^2)(1 + b^2) > (1 + ab)^2,$

即只要证明 $(a - b)^2 > 0,$

$a \neq b,$

, $(a - b)^2 > 0$ 成立,

, $\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)} > 1 + a$ 成立。

综上所述,原不等式成立。

(四)放缩法证明不等式主要是进行不等变换,并依据不等式

的传递性证明不等式成立。即在证明不等式 $A>B$ 时,可以构造 C,使 $A>C$,且 $C>B$,则 $A>B$ 得证,其中 C 是将 A 缩小或是将 B 放大则得到,将 A 缩小或将 B 放大的依据常为

(1) 不等式的性质;

(2) 基本不等式;

(3) 函数的单调性。

放、缩的常见方式有:整体放缩、局部放缩。特别要注意的是,要掌握放缩的度。

例 9 已知 $a、b、c\geqslant 0$,

求证: $\sqrt{a^2+ab+b}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\geqslant a+b+c$。

证明 $a、b、c\geqslant 0$,

, $$\sqrt{a^2+ab+b^2}=\sqrt{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2}$$

$$\geqslant\sqrt{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$=a+\frac{b}{2},$$

同理可得 $\sqrt{b^2+bc+c^2}\geqslant\frac{b}{2}+c$,

, $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\geqslant\left(a+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{b}{2}+c\right)$,

即 $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\geqslant a+b+c$。

说明 本例是用把一个不等式化成两个不等式的和证明不等式成立,其中不等式 $\sqrt{a^2+ab+b^2}\geqslant a+\frac{b}{2}$,$\sqrt{b^2+bc+c^2}\geqslant\frac{b}{2}+c$ 是依据函数 $y=\sqrt{x}$ 单调递增的性质用缩的方法证明它们成立。

例 10 已知 $x、y\in R^+$,$x+y=1$,

求证 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$。

证法一 $x、y\in R^+$,$x+y=1$,

, $1 \geqslant 2\sqrt{xy}$, $\frac{1}{xy} \geqslant 4$,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$$

$$\geqslant \frac{\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)^2}{2}$$

$$=\frac{\left(x+y+\frac{x+y}{xy}\right)^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(1+4)^2$$

$$=\frac{25}{2}\text{。}$$

证法二 x、$y \in R^{+}$，$x+y=1$，

, $1 \geqslant 2\sqrt{xy}$，即 $0 < xy \leqslant \frac{1}{4}$。

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$$

$$\geqslant 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$$

$$=2\left[\left(xy+\frac{1}{xy}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\right]\text{。}$$

$$\frac{y}{x}\text{、}\frac{x}{y} \in R^{+},$$

, $\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \geqslant 2$，（当且仅当 $x=y\frac{1}{2}$ 时等号成立。）

, $xy+\frac{1}{xy}$ 关于 xy 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ 单调递减，

, $xy+\frac{1}{xy} \geqslant \frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{1}{4}}=\frac{17}{4}$，（当且仅当 $xy=\frac{1}{4}$ 等号成立。）

, $$2\left[\left(xy+\frac{1}{xy}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$\geqslant 2\left(\frac{17}{4}+2\right)\text{（当且仅当 } xy=\frac{1}{4}\text{ 时等号成立。）}$$

$$=\frac{25}{2}。$$

, 原不等式成立。

证法三　由证法二可知,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geqslant 2\left[\left(xy+\frac{1}{xy}\right)+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right]$$

$$=2\left[\left(xy+\frac{1}{16xy}\right)+\frac{15}{16xy}+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\right]。$$

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$,（当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时等号成立。）

$xy+\frac{1}{16xy}\geqslant 2\sqrt{xy\cdot\frac{1}{16xy}}=\frac{1}{2}$,（当且仅当 $xy=\frac{1}{4}$ 时等号成立。）

由 $\frac{15}{16xy}$ 关于 xy 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上单调递减可知, $\frac{15}{16xy}\geqslant\frac{15}{4}$。

$$2\left[\left(xy+\frac{1}{16xy}\right)+\frac{15}{16xy}+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$\geqslant 2\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{2}+2\right)=\frac{25}{2},$$

（当且仅当 $xy=\frac{1}{4}$ 时等号成立。）

, 原不等式成立。

说明　在证法一中,首先利用基本不等式 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$,将 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$ 缩小为 $\frac{\left(x+\frac{1}{2}+y+\frac{1}{y}\right)^2}{2}$,即 $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2$,再利用函数 $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2$ 关于 $\frac{1}{xy}$ 在 $[4,+\quad)$ 上单调递增的性质将其

缩小为$\frac{25}{2}$。

在证法二中，首先利用基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，将$(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2$缩小为 $2(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})$，即 $2[(xy+\frac{1}{xy})+(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})]$，再利用基本不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，将$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$缩小为 2，利用函数 $x+\frac{1}{x}$关于 x 在$(0,\frac{1}{4}]$上单调递减的性质，将 $xy+\frac{1}{xy}$缩小为$\frac{17}{4}$。

必须注意到，若利用基本不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，将 $xy+\frac{1}{xy}$缩小为 $2\sqrt{xy\cdot\frac{1}{xy}}$，即 2，则这样缩小就不适度，事实上，在不等式 $xy+\frac{1}{xy}\geqslant 2$ 中，等号不成立。

由此可知，利用函数的单调性放、缩，是掌握放缩的度的有效方法。

在证法三中，我们拆出了“$xy+\frac{1}{16xy}$”并缩小为$\frac{1}{2}$，这样就保证了在 $xy=\frac{1}{4}$时等号成立，这就是说，在利用基本不等式放缩时，保证等号成立，是掌握放、缩的度的又一有效方法。

例 11　已知 $f(x)=x^2-x+13$，实数 x、y 满足$|x-a|<1$，求证：$|f(x)-f(a)|<2(|a|+1)$。

证法一　　$f(x)=x^2-x+13$，

,　　$|f(x)-f(a)|$

$=|(x^2-x+13)-(a^2-a+13)|$

$=|(x-a)(x+a-1)|$

$=|x-a|\cdot|x+a-1|$。

$|x-a|<1$,

, $|x|-|a|\leqslant|x-a|<1$,

, $|x|<|a|+1$,

, $|x-a|\cdot|x+a+1|$

$<|x+a+1|$

$\leqslant|x|+|a|+1$

$<|a|+1+|a|+1$

$=2(|a|+1)$。

证法二 $f(x)=x^2-x+13$,

, $|f(x)-f(a)|$

$=|(x^2-x+13)-(a^2-a+13)|$

$=|x-a|\cdot|x+a-1|$

$<|x+a+1|$。($|x-a|<1$)

$|x+a|<1$,

, $a-1<x<a+1$,

$2a-a<x+a-1<2a$,

$|x+a-1|<|2a|\leqslant 2|a|<2(|a|+1)$,

$|x+a-1|<|2a-2|\leqslant 2|a|+2|=2(|a|+1)$,

, $|x+a-1|<2|a|+1$,

, **原不等式成立。**

例 12 **求证**:$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}$。

分析 用放、缩的方法证明不等式,掌握放、缩的度是极其关键的,尽量减少放、缩的项也是掌握放、缩的度的有效的方法。

证法一 $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$ $(k\geqslant 2)$,

, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$<1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\right.$

$$\cdots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})$$

$$=1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$$

$$<\frac{7}{4}。$$

证法二 $\quad \frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k} \quad (k\geqslant 2)$,

, $\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$$<1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n})$$

$$=1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{1}{n}$$

$$<\frac{7}{4}。$$

说明　在证法二中,将 1 **和** $\frac{1}{2^2}$ **这两项固定,这就是用减少放的项的方法掌握放的度。若将** $\frac{1}{2^2}$ **也放为** $\frac{1}{1\times 2}$**,即** $1-\frac{1}{2}$**,则左边** $<1+(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$**,就不能证得不等式成立。**

(五)换元是对所证不等式中的字母作适当的代换,以达到化难为易的目的。

换元常用的方法有:三角换元,均值换元,增值换元等。换元

有时只起形式化简的作用,有时则起问题转化的作用,后者是对问题的一种本质转化。

例 13　**设** $x \in R$,

求证: $(x^2+4x+5)(x^2+4x+2)+2x^2+8x+1 \geqslant -9$。

证明　**令** $x^2+4x+2=t$,**则由** $x \in R$ **知**,$t \geqslant -2$,

$$\text{左边} = (t+s)t+2t-3$$

$$= t^2+5t-3$$

$$= (t+\frac{5}{2})^2-\frac{37}{4}。$$

$t \geqslant -2$,

, $(t+\frac{5}{2})^2-\frac{37}{4} \geqslant -9$,

, **原不等式成立。**

说明　**本例的换元仅是形式换元,即使被证不等式化为** $t^2+5t-3 \geqslant -9$,$(t \geqslant -2)$。

例 14　**已知** $x、y \in R^+$ **且** $x+y=1$,

求证: $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) \geqslant 9$。

证法一　**设** $x=\cos^2,\theta,y=\sin^2\theta$　　$(\theta \in (0,\frac{\pi}{2}))$

则　　$\text{左边} = (1+\frac{1}{\cos^{\theta}2})(1+\frac{1}{\sin\theta^2})$

$$= 1+\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= 1+\frac{2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= 1+\frac{8}{\sin^2 2\theta}。$$

$$\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

, $$1+\frac{8}{\sin^2 2\theta}\geqslant 9,$$

, **原不等式成立。**

证法二　设 $x=\frac{1}{2}+t$，$y=\frac{1}{2}-t$，$-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$，

则　　　左边 $=\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{2}+t}\right)\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{2}-t}\right)$

$$=1+\frac{2}{\frac{1}{4}-t^2}。$$

$$-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2},$$

, $$1+\frac{2}{\frac{1}{4}-t^2}\geqslant 9,$$

, **原不等式成立。**

说明　本例仅给出了三角换元和均值换元两种证明方法，这两种方法有一共同之处，即换元之后化为求函数的值域问题证明不等式成立，这时，换元起着转化问题的作用。

证法一中，化为函数 $f(\theta)=1+\dfrac{8}{\sin^2 2\theta}$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$**；证法二中，化为函数** $f(t)=1+\dfrac{2}{\frac{1}{4}-t^2}$　$\left(-\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{1}{2}\right)$。

必须注意到，换元之后必须给出新变元的确切取值范围，这时新变元的取值范围就成为函数的定义域。

例 15　**设** $a>b>c$，**求证：**$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{4}{c-a}\geqslant 0$。

证法一　设 $a-b=m>0$，$b-c=n>0$，**则** $a-c=m+n$。

, 左边 $= \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{4}{m+n}$

$$= \frac{(m+n)^2 - 4mn}{mn(m+n)}$$

$$= \frac{(m-n)^2}{mn(m+n)} \geqslant 0,$$

, 原不等式成立。

证法二 设 $a-b=m>0$,$b-c=n>0$,则 $a-c=m+n$。

, 要证原不等式成立,只要证不等式 $(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})(m+n)\geqslant 4$ 成立。

$$m>0, n>0,$$

, $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}>0$,$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{mn}}>0$,(当且仅当 $m=n$ 时等号成立。)

, $(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})(m+m)\geqslant 2\sqrt{mn}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{mn}}=4$。

, 原不等式成立。

说明 本例采用增值换元的方法化简了被证不等式的形式,这时,换元仅起着形式化简的作用。必须知道的是,当不等式中的变量间存在大小关系时,常可用增值换元的方法证明不等式成立。

(六)反证法是证明不等式的常用方法,当在一个不等式直接证明有困难时,可试用反证法。

例 16 若 $p>0$,$q>0$,且 $p^3+q^3=2$,

求证: $p+q\geqslant 2$

证法二: 假设 $p+q>2$,

$$p>0, q>0,$$

, $p+q>0$,

, $2=p^3+q^3$

$$=(p+q)[(p+q)^2-3pq]$$

$$\geqslant (p+q)\left[(p+q)^2 - 3\cdot\left(\frac{p+q}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}(p+q)^3$$

$$> \frac{1}{4}\cdot 8$$

$$= 2,$$

即 $2>2$,**矛盾,**

, $p+q\leqslant 2$ **成立。**

证法二　假设 $p+q>2$,**则** $q>2-p$,

,
$$\begin{aligned} 2 &= p^3+q^3 \\ &> p^3+(2-p)^3 \\ &= 6(p-1)^2+2 \geqslant 2, \end{aligned}$$

即 $2>2$,**矛盾,**

, **原不等式成立。**

说明　在反证法证明中,“假设”在推出矛盾的过程中是作为条件用的。

(七)不等式的证明灵活多变,实际证明不等式时,往往是多种证明方法综合运用的结果,只有对各种证明方法比较熟悉,在证明不等式时,方法的选择和应用才能得心应手。

例 17　**已知** $x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,

求证:
$$\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)\geqslant x\sqrt{y}+y\sqrt{x}。$$

证法一
$$\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)$$

$$= (x+y)\left[\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{4}\right]$$

$$= (x+y)\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}\right)\right]。$$

$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,

, $$\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{x},\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{y},$$

, $$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}\right)\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})\geqslant 0。$$

又 $$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant 0,$$

, $$(x+y)\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$\geqslant 2\sqrt{xy}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$$

即 $$(x+y)\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$\geqslant\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$$

, **原不等式成立。**

证法二 $$x\geqslant 0,y\geqslant 0,$$

, $$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}。$$

, **左边 - 右边**

$$=\frac{x+y}{2}\left[(x+y)+\frac{1}{2}\right]-\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$\geqslant\sqrt{xy}\left[(x+y)+\frac{1}{2}-(\sqrt{x}+\sqrt{y})\right]$$

$$=\sqrt{xy}\left[\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$\geqslant 0。$$

, **原不等式成立**

例 18 **已知** $0<x<1$,a、$b\in R$,

求证: $$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}\geqslant(a+b)^2。$$

证法一 $$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}-(a+b)^2$$

$$=\frac{a^2(1-x)+b^2x-(a+b)^2x+(a+b)^2x^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{(a+b)^2x^2 - 2a(a+b)x + a^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{[(a+b)x - a]^2}{x(1-x)},$$

$0 < x < 1$,

, $x(1-x) > 0$,

, $\dfrac{[(a+b)x-a]^2}{x(1-x)} \geqslant 0$,

, **原不等式成立。**

证法二 $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{1-x}$

$$= [x + (1-x)]\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}\right)$$

$$= a^2 + b^2 + \frac{(1-x)a^2}{x} + \frac{xb^2}{1-x}$$

$$\geqslant a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{(1-x)a^2}{x} \cdot \frac{xb^2}{1-x}}$$

$(\quad 0 < x < 1,,\ 0 < 1 - x < 1)$

$$= a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2}$$

$$\geqslant a^2 + b^2 + 2ab$$

$$= (a+b)^2。$$

证法三 **由** $0 < x < 1$ **可设** $x = \cos^2\theta$, $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, **则** $1 - x = \sin^2\theta$。

, $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{1-x}$

$$= \frac{a^2}{\cos^2\theta} + \frac{b^2}{\sin^2\theta}$$

$$= a^2\sec^2\theta + b^2\csc^2\theta$$

$$= a^2(1 + \tan^2\theta) + b^2(1 + \tan^2\theta)$$

$$= a^2 + b^2 + a^2\tan^2\theta + b^2\tan^2\theta$$

$$\geqslant a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2\tan^2\theta \cdot b^2\tan^2\theta}$$
$$= a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2}$$
$$\geqslant a^2 + b^2 + 2ab$$
$$= (a+b)^2。$$

练 习 题

1. 已知 $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求证,$1 - \cos\theta < \sin\theta$。

2. 若 a、$b \in R^+$,$a+b=1$,求证:$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}} \leqslant 2$。

3. 设 a、b、$c \in R^+$,求证:$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c$。

4. 若 a、$b \in R^+$,$a+b=1$,求证:$a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$。

5. 设 a、$b \in R^+$,求证:$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} \geqslant \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$。

6. 已知 a、b、x、$y \in R^+$,$ax+by=a+b$,求证:$\frac{a}{x}+\frac{b}{y} \geqslant a+b$。

7. 已知 $|a|<1$,$|b|<1$,求证:$|a+b|+|a-b|<2$。

二、解不等式

解不等式的过程就是对不等式不断进行同解变形的过程,其基本思想是将超越不等式转化为代数不等式、无理不等式转化为有理不等式、分式不等式转化为整式不等式、高次不等式转化为低次不等式。

由于不等式的解集通常是若干个区间的并集,对其不易检验,因此,解不等式时,必须从一开始就注意其中未知数的变化范围,使它既不扩大、也不缩小。

(一)有理不等式包括整式不等式和分式不等式,分式不等式

一般转化为整式不等式求解。

若分式不等式为$\frac{f(x)}{g(x)}>0$，$\frac{f(x)}{g(x)}<0$，则分别转化为 $f(x)g(x)>$，$f(x)g(x)<0$ 若分式不等式为$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0$，$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0$，则分别转化为 $f(x)g(x)\geqslant 0$，且 $g(x)\neq 0$，$f(x)g(x)\leqslant 0$ 且 $g(x)\neq 0$，也可以转化为 $f(x)g(x)>0$ 或 $f(x)=0$，$f(x)g(x)<0$ 或 $f(x)=0$。

高次不等式一般变形为若干个一次因式的幂的积与零的大小关系式，并去掉偶次非负因式，然后用序轴法求解。

设不等式为$(x-a)^n f(x)>0$，$(x-a)^n f(x)<0$（n 为正偶数），则分别转化为 $f(x)>0$ 且 $x\neq a$，$f(x)<0$ 且 $x\neq a$；设不等式为$(x-a)^n f(x)\geqslant 0$，$(x-a)^n f(x)\leqslant 0$（n 为正偶数），则分别转化为 $f(x)\geqslant 0$ 或 $x=a$，$f(x)\leqslant 0$ 或 $x=a$。

例 1　解不等式$\frac{(x-3)^2(x+1)(x+2)}{x+4}\leqslant 0$。

解　如图 3 - 1 所示，不等式可以转化为

$$\begin{cases}(x-3)^2(x+1)(x-2)(x+4)\leqslant 0,\\ x\neq 4。\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+1)(x-2)(x+4)\leqslant 0 \text{ 或 } x=3,\\ x\neq -4。\end{cases}$$

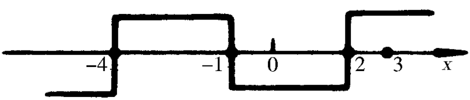


图 3 - 1

原不等式的解集为 $\{x \mid x<-4$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 或 $x=3\}$。

例 2　解不等式$\frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{x^2+2x-3}>0$。

解　如图 3 - 2 所示，不等式可以化为

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+3)}>0,$$

, $\quad (x-1)^2(x-2)(x-3)(x+3)>0,$

, $\quad \begin{cases}(x-2)(x-3)(x+3)>0,\\ x\neq 1,\end{cases}$

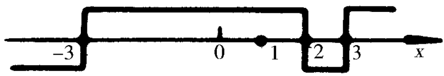


图 3 - 2

, **原不等式的解集为** $\{x|-3<x<1$ **或** $1<x<2$ **或** $x>3\}$。

（二）无理不等式一般化为有理不等式（组）求解，其中一般含有使不等式两边的无理式有意义的条件不等式，等式两边乘方去根号必需的条件不等式，即同解变形的条件不等式，保持大小关系的不等式。

例 3　**解不等式** $\sqrt{4-x^2}<x+1$。

解　原不等式可以化为 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0,\\ 4-x^2<(x+1)^2。\end{cases}$

, $\quad \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x\geqslant -1,\\ x<-\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\text{ 或 }x>\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}。\end{cases}$

, $\quad \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x\leqslant 2$。

, **原不等式的解集为** $\left\{x\middle|\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x\leqslant 2\right\}$。

说明　不等式 $4-x^2\geqslant 0$**，**$x+1\geqslant 0$ **分别仅保证无理式** $\sqrt{4-x^2}$ **有意义，不等式两边平方必需的条件，所以列出同解变形的不等式**

组时,不需要考虑取不取等于号。

例 4 解关于 x 的不等式 $\sqrt{\log x_a - 1} > 3 - \log x_a$。

解 原不等式可以化为

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\log x_a - 1 \geqslant 0, & (1)\\ 3 - \log x_a < 0; & (2)\end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases}\log x_a - 1 \geqslant 0, & (3)\\ 3 - \log x_a \geqslant 0, & (4)\\ \log x_a - 1 > (3 - \log xa)^2。 & (5)\end{cases}$$

$$, \quad \begin{cases}\log x_a \geqslant 1,\\ \log x_a > 3;\end{cases} \text{或} \begin{cases}\log x_a \leqslant 3,\\ (\log x_a - 2)(\log x_a - 5) < 0。\end{cases}$$

$$, \qquad \log x_a > 3 \text{ 或 } 2\log x_a \leqslant 3,$$

$$, \qquad \log x_a > 2。$$

若 $a > 1$,则 $x > a^2$;若 $0 < a < 1$,则 $0 < x < a^2$。

, 当 $a > 1$ 时,原不等式的解集为 $\{x \mid x > a^2\}$;当 $0 < a < 1$ 时,原不等式的解集为 $\{x \mid 0 < x < a^2\}$。

说明 本例的求解过程中,是把 $\log x_a$ 看作一个未知数。

在原不等式化成的不等式组(Ⅰ)中,在不等式(2)的条件下,原不等式的两边不能平方,也不需要平方,只要原不等式的左边的根式有意义,原不等式即成立,在不等式组(Ⅱ)中,在不等式(5)的条件下,不等式的两边可以平方,也需要平方,并且在不等式(4)和(5)的条件下,不等式(3)自然成立,故可将不等式(3)从不等式组(Ⅱ)中舍去,从而可化简不等式组(Ⅱ)。

例 5 解不等式 $(x - 1)\sqrt{x + 2} \geqslant 0$。

解 不等式可以化为 $\begin{cases}x + 2 \geqslant 0,\\ x - 1 \geqslant 0,\end{cases}$ 或 $x = -2$。

$$, \qquad \begin{cases}x \geqslant -2,\\ x \geqslant 1\end{cases} \text{ 或 } x = -2。$$

$$, \qquad x \geqslant 1 \text{ 或 } x = -2。$$

, 原不等式的解集为 $\{x \mid x \geqslant 1 \text{ 或 } x = -2\}$。

例 6 解不等式 $x\sqrt{1 + x^2} + 1 > x^2$。

解法一 若 $x \geqslant 0$,则原不等式可以化为 $\sqrt{x^2(x + x^2)} > x^2 - 1$,

(1)若 $x^2-1<0$,即 $0\leqslant x<1$,则不等式显然成立,

, $0\leqslant x<1$ 是原不等式的解。

(2)若 $x^2-1\geqslant0$,即 $x\geqslant1$,则不等式可以化为 $x^2(1+x^2)>(x^2-1)^2$,即 $3x^2>1$,

, $$x>\frac{\sqrt{3}}{3},$$

, $x\geqslant1$ 是原不等式的解。

若 $x<0$,则原不等式可以化为 $-\sqrt{x^2(1+x^2)}>x^2-1$,即 $\sqrt{x^2(1+x^2)}<1-x^2$,

, $$\begin{cases}1-x^2\geqslant0,\\ x^2(1+x^2)<(1-x^2)^2。\end{cases}$$

, $$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant1,\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}<x\frac{\sqrt{3}}{3}。\end{cases}$$

, $$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3},$$

, $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<0$ 是原不等式的解。

综上所述,原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x>-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$。

解法二　原不等式可以化为 $x(\sqrt{1+x^2}-x)+1>0$,

, $$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}+1>0,$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{\sqrt{1+x^2}+x}>0,(*)$$

$$\sqrt{1+x^2}>|x|\geqslant-x,$$

, $$\sqrt{1+x^2}+x>0,$$

, 不等式(*)可以化为 $\sqrt{1+x^2}+2x>0$,即 $\sqrt{1+x^2}>-2x$。

若 $x>0$,则不等式显然成立,

, $x>0$ 是原不等式的解;

若 $x\leqslant 0$,则不等式可以化为 $1+x^2>4x^2$,

, $3x^2<1$,

, $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$,

, $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x\leqslant 0$ 是原不等式解。

综上所述,原不等式的解集为 $\{x|x>-\frac{\sqrt{3}}{3}\}$。

解法三 令 $x=\tan\theta$,$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$则原不等式可以化为 $\tan\theta\cdot\sec\theta+1>\tan^2\theta$,

, $2\sin^2\theta-\sin\theta-1<0$,

$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$,

, $-\frac{1}{2}<\sin\theta<1$,

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$,

, $\tan\theta>-\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 $x>-\frac{\sqrt{3}}{3}$。

, 原不等式的解集为 $\{x|x>-\frac{\sqrt{3}}{3}\}$。

说明 由本例可知,熟练、合理地对不等式进行等价变形是求解不等式的关键,三角换元也是化去无理形式的一种方法。

(三)指数不等式与对数不等式都是超越不等式,它们都是化成代数不等式求解,转化的依据为指数函数与对数函数的单调性。

例 7 解不等式 $4^{x(x+2)}-8.32^x>0$。

解 原不等式可以化为 $2^{2x(x+2)}>2^{5x+3}$,

$2>1$,

, $2x(x+2)>5x+3$,

即 $2x^2-x-3>0$,

, $x<-1$,或 $x>3/2$,

, 原不等式的解集为 $\{x \mid x<-1, \text{或 } x>3/2\}$。

例 8 解不等式 $\log_{x+4}(x^2-3x-4)<\log_{x+4}(5-3x)$。

解 若 $x+4>1$,即 $x>-3$,

则原不等式可以化为 $\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ 5-3x>0, \\ x^2-3x-4<5-3x。\end{cases}$

, $\begin{cases} x>-3, \\ x^2-3x-4>0, \\ x^2-3x-4<5-3x。\end{cases}$

, $\begin{cases} x>-3, \\ x<-1 \text{ 或 } x>4, \\ -3<x<3。\end{cases}$

, $-3<x-1$。

若 $0<x+4<1$,即 $-4<x<-3$,

则原不等式可以化为 $\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ 5-3x>0, \\ x^2-3x-4>5-3x。\end{cases}$

, $\begin{cases} -4<x<-3, \\ 5-3x>0, \\ x^2-3x-4>5-3x。\end{cases}$

, $\begin{cases} -4<x<-3, \\ x<\dfrac{5}{3}, \\ x<-3 \text{ 或 } x<3。\end{cases}$

, $-4<x<-3$,

, 原不等式的解集为 $\{x \mid -4<x<-3 \text{ 或 } -3<x<-1\}$。

说明 在解不等式过程中列出不等式组后,可以根据不等式组中不等式间的制约关系舍去制约关系下一定成立的不等式,从而化简不等式组。

例 9　**解不等式** $x^{\log_2 x-1}>\frac{16}{x}$。

分析　**在** $x>0$ **的条件下,不等式左右两边的值都大于零,因此,两边取** 2 **为底的对数,不等式可以化为关于** $\log_2 x$ **的不等式求解。**

解　**显然** $x>0$**,这时** $x^{\log_2 x-1}>0$, $\frac{16}{x}>0$,

在不等式两边取 2 **为底的对数可得,** $\log_2 x(\log_2 x-1)>4-\log_2 x$,

即　$\log_2^2 x>4$,

,　$\log_2 x<-2$ **或** $\log_2 x>2$,

,　$0<x<\frac{1}{4}$**或** $x>4$。

,　**原不等式的解集为** $\{x|0<x<1/4$ **或** $x>4\}$。

(四)解含有绝对值符号的不等式的关键是去绝对值符号,一般常以绝对值的定义、不等式两边平方、绝对值的几何意义为依据去绝对值符号。

例 10　**解不等式** $|x^2+x-2|<x^2-4$。

解法一　**若** $x^2+x-2\geqslant 0$**,即** $x\leqslant -2$ **或** $x\geqslant 1$**,则原不等式可以化为** $x^2+x-2<x^2-4$,

,　$x<-2$,

,　$x<-2$ **是原不等式的解。**

若 $x^2+x-2<0$**,即** $-2<x<1$**,则原不等式可以化为** $-(x^2+x-2)<x^2-4$,

,　$2x^2+x-6>0$,

　$(2x-3)(x+2)>0$,

,　$x<-2$**,或** $x>3/2$,

,　**这时,原不等式无解。**

综上所述,原不等式的解集为 $\{x|x<-2\}$。

解法二　**原不等式可以化为** $\begin{cases} x^2-4\geqslant 0, \\ -(x^2-4)<x^2+x-2<x^2-4。\end{cases}$

$$,\quad \begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 2 > -(x^2 - 4), \\ x^2 + x - 2 < x^2 - 4。 \end{cases}$$

$$,\quad \begin{cases} x \leqslant -2 \text{ 或 } x \geqslant 2, \\ x < -2 \text{ 或 } x > \dfrac{3}{2}, \\ x < -2。 \end{cases}$$

, $x < -2$,

, 原不等式的解集为 $\{x | x < -2\}$。

解法三　原不等式可以化为$\begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0, \\ (x^2 + x - 2)^2 < (x^2 - 4)^2。 \end{cases}$

$$,\quad \begin{cases} x \leqslant -2 \text{ 或 } x \geqslant 2, \\ (x + 2)^2 (2x - 3) < 0。 \end{cases}$$

$$,\quad \begin{cases} x \leqslant -2 \text{ 或 } x \geqslant 2。 \\ 2x - 3 < 0 \text{ 且 } x \neq -2。 \end{cases}$$

, $x < -2$,

, 原不等式的解集为 $\{x | x < -2\}$。

例 11　解不等式$\dfrac{1}{x^2 - 2} \leqslant \dfrac{1}{|x|}$。

解法一　若 $x^2 - 2 < 0$,即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$,考虑到 $x \neq 0$,则原不等式在 $-\sqrt{2} < x < 0$ 或 $0 < x < \sqrt{2}$时显然成立,

, $-\sqrt{2} < x < 0$ 或 $0 < x < \sqrt{2}$,是原不等式的解

则原不等式可以化为 $x^2 - 2 \geqslant |x| > 0$,若 $x^2 - 2 > 0$,即 $|x| > \sqrt{2}$,

解不等式$|x|^2 - 2 \geqslant |x|$得$|x| \geqslant 2$,

, $|x|^2 \geqslant 2$

, $x \leqslant -2$ **或** $x \geqslant 2$ **是原不等式的解。**

综上所述,原不等式的解集为 $\{x \mid x \leqslant -2$ **或** $-\sqrt{2} < x < 0$ **或** $0 < x < \sqrt{2}$ **或** $x \geqslant 2\}$。

解法二　原不等式可以化为 $\dfrac{1}{|x|^2 - 2} \leqslant \dfrac{1}{|x|}$,

$$, \quad \frac{1}{|x|^2 - 2} - \frac{1}{|x|} \leqslant 0,$$

$$\frac{|x| - |x|^2 + 2}{|x|(|x|^2 - 2)} \leqslant 0,$$

$$\frac{(|x| + 1)(|x| - 2)}{|x|(|x| + \sqrt{2})(|x| - \sqrt{2})} \geqslant 0,$$

$$, \quad \frac{|x| - 2}{|x|(|x| - \sqrt{2})} \geqslant 0,$$

, $|x|(|x| - \sqrt{2})(|x| - 2) > 0$ **或** $|x| = 2$,

, $0 < |x| < \sqrt{2}$ **或** $|x| \geqslant 2$,

, **原不等式的解集为** $\{x \mid x \leqslant -2$ **或** $-\sqrt{2} < x < 0$ **或** $0 < x < \sqrt{2}$ **或** $x \geqslant 2\}$。

说明　在解法二中,是将不等式化为关于 $|x|$ **的不等式求解。**

(五)含有参数的不等式一般用分类讨论的方法求解,一般当对不等式的同解变形不能统一进行时,则必须分类变形。必须注意到,分类必须有明确的分类标准,分类标准必须满足不重、不漏的原则。

例 12　**解关于** x **的不等式** $\dfrac{a(x-1)}{x-2} > 1$。

解　原不等式可以化为 $\dfrac{(a-1)x - (a-2)}{x-2} > 0$,

若 $a-1=0$,即 $a=1$,则不等式为 $\frac{1}{x-2}>0$,故 $x>2$。

若 $a-1>0$,即 $a>1$,则不等式为 $\frac{x-\frac{a-2}{a-1}}{x-2}>0$,

若 $a-1<1$,即 $a<1$,则不等式为 $\frac{x-\frac{a-2}{a-1}}{x-2}<0$,

(1)若 $\frac{a-2}{a-1}>2$,则 $0<a<1$,这时不等式为 $\frac{x-\frac{a-2}{a-1}}{x-2}<0$,

, 原不等式的解为 $2<x<\frac{a-2}{a-1}$。

(2)若 $\frac{a-2}{a-1}=2$,则 $a=0$,这时不等式为 $(x-2)^2<0$,

, 原不等式无解。

(3)若 $\frac{a-2}{a-1}<2$,则 $a<0$ 或 $a>1$。

当 $a<0$ 时,不等式为 $\frac{x-\frac{a-2}{a-1}}{x-2}<0$,故原不等式的解为 $\frac{a-2}{a-1}<x<2$;

当 $a>1$ 时,不等式为 $\frac{x-\frac{a-2}{a-1}}{x-2}>0$,故原不等式的解为 $x<\frac{a-2}{a-1}$或 $x>2$。

综上所述,当 $a<0$ 时,原不等式的解为 $\frac{a-}{a-1}<x<2$;当 $0<a<1$ 时,原不等式的解为 $2<x<\frac{a-2}{a-1}$;当 $a=1$ 时,原不等式的解为 $x>2$;当 $a>1$ 时,则原不等式的解为 $x<\frac{a-2}{a-1}$或 $x>2$。

说明　本例分类的标准是 $a-1$ 的取值,当 $a-1=0$ 时,在不

等式$\frac{(a-1)x-(a-2)}{x-2}>0$,两边不能除以 $a-1$,也不需要除以 $a-1$ 当 $a-1\neq 0$ 时,在不等式$\frac{(a-1)x-(a-2)}{x-2}>0$ 的两边可以除以 $a-1$,但必须分成 $a-1>0$,$a-1<0$ 两类情况,以确定不等号的方向要不要改变。

例 13　**解关于 x 的不等式** $\sqrt{a^2-x^2}>2x-a$。

解　**原不等式可以化为**

$$(\mathrm{I})\begin{cases}2x-a<0,\\ a^2-x^2>0;\end{cases}\qquad 或(\mathrm{II})\begin{cases}2x-a\geqslant 0,\\ a^2-x^2\geqslant 0,\\ a^2-x^2>(2x-a)^2。\end{cases}$$

, $$(\mathrm{I})\begin{cases}x<\frac{a}{2},\\ x^2\leqslant a^2;\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\begin{cases}x\geqslant\frac{a}{2},\\ x\left(x-\frac{4}{5}a\right)<0。\end{cases}$$

若 $a=0$,

则不等式组(Ⅰ)和(Ⅱ)都无解,故原不等式无解;

若 $a>0$,

则 $$(\mathrm{I})\begin{cases}x<\frac{a}{2},\\ -a\leqslant x\leqslant a;\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\begin{cases}x\geqslant\frac{a}{2},\\ 0<x<\frac{4}{5}a。\end{cases}$$

, $-a\leqslant x<\frac{a}{2}$或$\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{4}{5}a$,

, 原不等式的解为 $-a\leqslant x<\frac{4}{5}a$

若 $a<0$。

则 $$(\mathrm{I})\begin{cases}x<\frac{a}{2},\\ a\leqslant x\leqslant -a;\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\begin{cases}x\geqslant\frac{a}{2},\\ \frac{4}{5}a<x<0。\end{cases}$$

,　　$a \leqslant x < \frac{a}{2}$ 或 $\frac{a}{2} \leqslant x < 0$，

,　　$a \leqslant x < 0$。

综上所述，当 $a < 0$ 时，原不等式的解为 $a \leqslant x < 0$；当 $a = 0$ 时，原不等式无解；当 $a > 0$ 时，原不等式的解为 $-a \leqslant x < \frac{4}{5}a$。

（六）不等式也可以利用函数的图像求解。不等式 $f(x) > g(x)$ 的解集就是函数 $y = f(x)$ 的图像在函数 $y = g(x)$ 的图像上的方的点的横坐标的集合；不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集就是函数 $y = f(x)$ 的图像在函数 $y = g(x)$ 的图像下方的点的横坐标的集合，这样，我们就给不等式的解赋予了几何意义，这就是用数形结合的方法解不等式的依据。

例 14　解不等式 $\sqrt{x+3} > 3 - x$。

解　令 $y_2 = \sqrt{x+3}$，$y_2 = 3 - x$，则不等式 $\sqrt{x+3} > 3 - x$ 的解集就是函数 $y_1 = \sqrt{x+3}$ 的图像在函数 $y_2 = 3 - x$ 的图像上方的点的横坐标的集合。

由图 3 - 3 可知，原不等式的解集为 $\{x \mid x > 1\}$

例 15　解不等式 $|x^2 + x - 2| < x^2 - 4$。

解　令 $y_1 = |x^2 + x - 2|$，$y_2 = x^2 - 4$，则不等式 $|x^2 + x - 2| < x^2 - 4$ 的解就是函数 $y_1 = |x^2 + x - 2|$ 的图像在函数 $y_2 = x^2 - 4$ 的图像下方的点的横坐标的集合。

由图 3 - 4 可，原不等式的解集为 $\{x < -2\}$

练　习　题

1. **解下列不等式：**

(1) $(x+1)^2(x-1)(x-4)^3 > 0$；

(2) $\frac{3x^2 - 14x + 14}{x^2 - 6x + 8} \geqslant 1$；

(3) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$；

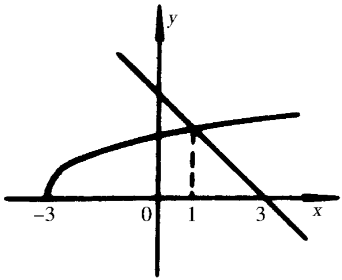


图 3 - 3

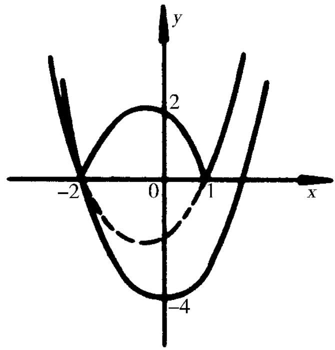


图 3 - 4

(4) $(x-4)\sqrt{x^2-3x-4}\geqslant 0$；

(5) $\log(2-x)_8+\log(x+1)_{64}\geqslant \log x_4$。

2. 解下列关于 x 的不等式：

(1) $\log(1-\frac{1}{x})_a>1$；

(2) $x^{\log x_a}>\frac{x^4\sqrt{x}}{a^4}$。

3. 设 $a>0$，解关于 x 的不等式 $\sqrt{2ax-a^2}>1-x$。

4. 解关于 x 的不等式 $\log_2[2x^2+(2a+6)x+9]>2\log_a(3+x)$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)。

三、不等式的应用

(一) 基本不等式在最值问题中的应用

求函数的最大值或最小值是数学中的一个极广泛的问题，当函数为高次函数或多元函数时，常应用基本不等式求其最大值或最小值。

由于函数的最大值或最小值一定是函数值，因此，在应用基本不等式求函数的最大值或最小值时，特别必须注意‘等号’成立的条件，以保证最大值或最小值是函数的值。

例 1　**若** $0<x<\frac{5}{2}$**,求函数** $y=x(5-2x)^2$ **的最大值。**

解法一　　$0<x<\frac{5}{2}$,

,　　$5-2x>0$,

,　　$y=x(5-2x)^3$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4x\cdot(5-2x)\cdot(5-2x)$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{4x+(5-2x)+(5-2x)}{3}\right]^3$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{10}{3}\right)^3$$

$$=\frac{250}{27}。$$

(当且仅当 $4x=5-2x$**,即** $x=\frac{5}{6}\in\left(0,\frac{5}{2}\right)$ **时,等号成立)**

,　**函数的最大值为** $\frac{250}{27}$

解法二　　2‖

$0<x<\frac{5}{2}$,

,　　$\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x>0$,

,　　$y=x(5-2x)^2$

$$=16\cdot x\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x\right)$$

$$\leqslant 16\cdot\left[\frac{x+\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x\right)}{3}\right]^3$$

$$=16\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$=\frac{250}{27}。$$

（当且仅当 $x=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x$，即 $x=\frac{5}{6}\in(0,\frac{5}{2})$ 时，等号成立。）

, 函数的最大值为$\frac{250}{27}$。

说明　用基本不等式求积式的函数的最大值中，将积式各因式的和凑成常数是函数解析式变形的目标。

例 2　若正数 x、y 满足 $xy^2=4$，求 $x+2y$ 的最小值。

解法一　令 $m=x+2y$，

则

$$m=x+y+y$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{xy^2}$$
$$=3\sqrt[3]{4}。$$

（当且仅当 $x=y=\sqrt[3]{4}>0$ 时，等号成立。）

, 函数的最小值为 $3\sqrt[3]{4}$。

解法二　令 $m=x+2y$，

$$xy^2=4，$$

,

$$x=\frac{4}{y^2}，$$

,

$$m=\frac{4}{y^2}+2y$$
$$=\frac{4}{y^2}+y+y$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{4}{y^2}\cdot y\cdot y}$$
$$=3\sqrt[3]{4}。$$

（当且仅当 $y=\frac{4}{y^2}$，即 $y=\sqrt[3]{4}>0$ 时，等号成立。）

, 函数的最小值为 $3\sqrt[3]{4}$。

解法三

$$xy^2=4$$

, $4 = xy^2 = x \cdot y \cdot y \leqslant \left(\frac{x+y+y}{3}\right)^3 = \frac{(x+2y)^2}{27}$,即$(x+2y)^3 \geqslant 27.4$。

(当且仅当 $x = y = \sqrt[3]{4} > 0$ 时,等号成立。)

, $$x + 2y \geqslant 3\sqrt[3]{4},$$

, 函数的最小值为 $3\sqrt[3]{4}$。

说明 在条件最值问题中,题设中的条件等式一般在最值求解过程中起提供定值的作用(本例解法一),消元作用(本例解法二),也可以利用基本不等式将条件等式转换成关于解析表达式的不等式,再解这个不等式求最值(本例解法三)。

例 3 若 x、$y \in R^+$,且 $xy - (x+y) = 1$,

求 $x + y$ 的最小值。

解法一 $xy - (x+y) = 1$,

, $$y = \frac{x+1}{x-1} \text{且} (x-1)(y-1) = 2,$$

x、$y \in R^+$,

, $x - 1 > 0$,且 $y - 1 > 0$,

, $$\begin{aligned} x + y &= (x-1) + (y-1) + 2 \\ &\geqslant 2\sqrt{(x-1)(y-1)} + 2 \\ &= 2\sqrt{2} + 2. \end{aligned}$$

(当且仅当 $x - 1 = y - 1$,即 $x = y = \sqrt{2} + 1$ 时,等号成立。)

, 函数 $x + y$ 的最小值为 $2\sqrt{2} + 2$。

解法二 令 $m = x + y$,

$xy - (x+y) = 1$,

, $(x-1)y = x + 1$,

显然 $x \neq 1$,故 $y = \frac{x+1}{x-1}$,

, $$m = x + \frac{x+1}{x-1}$$

$$=x+1+\frac{2}{x-1}$$

$$=(x-1)+\frac{2}{x-1}+2。$$

$x>0$，$y>0$，

，　$\frac{x+1}{x-1}>0$，

，　$x-1>0$，

$x>1$。

，　$(x-1)+\frac{2}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{2}+2$

（当且仅当 $x-1=\frac{2}{x-1}$，即 $x=\sqrt{2}+1$ 时，等号成立。）

，　$y\geqslant 2\sqrt{2}+2$，

，　函数 $x+y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+2$。

解法三　$x，y\in R^{+}$

，$(x+y)+1=xy\leqslant(\frac{x+y}{2})^{2}$，（当且仅当 $x=y$ 时，等号成立。）

即　$(x+y)^{2}-4(x+y)-4\geqslant 0$，

，　$x+y\geqslant 2\sqrt{2}+2$。

，　$x+y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+2$。

解法四　令 $m=x+y$，则 m 为直线 $x+y-m=0$ 在 y 轴上的截距。

由 $xy-(x+y)=1$ 得，$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$，故方程 $xy-(x+y)=1$ 表示双曲线在第一象限的部分。

m 的取值即为直线 $x+y=m$ 与函数 $y=\frac{x+1}{x-1}(x>0，y>0)$ 有分共点时，直线在 y 轴上的截距，其最小为 $2\sqrt{2}+2$，

，　函数 $x+y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+2$。

说明 在解法一中,首先建立了函数 $m=x+y$,并变形为 $m=(x-1)(y-1)+2$,将条件等式变形为$(x-1)(y-1)=2$,再利用基本不等式将解析式缩为关于$(x-1)(y-1)$的表达式,然后由条件等式$(x-1)(y-1)=2$ 提供定值 2,得函数的最小值。

在解法二中,也建立了函数 $m=x+y$,并利用题设中的条件等式将函数消元为一元函数,然后利用基本不等式求得函数的最小值。

在解法三中,是利用基本不等式将题设中的条件等式转换成关于 $x+y$ 的不等式,然后用解不等式的方法求得函数的最小值。

在解法四中,分别给题设中的条件等式 $xy-(x+y)=1$,建立的函数 $m=x+y$ 及 m 赋以几何意义,然后借助于几何曲线的关系求得 m 的最小值,即求得 $x+y$ 的最小值。

在本例的前三种解法中,都利用基本不等式进行了放缩,这时必须重视等号成立的条件,以保证最小值是函数值。

例 4 已知正常数 a、b 和正变数 x、y 满足 $a+b=10$,$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,$x+y$ 的最小值为 18,求 a、b 的值。

分析 从代数角度看,要求两个未知数 a、b 的值,必须建立两个未知数的方程组求解,题设中已给出了一个方程 $a+b=10$,显然必须利用“$x+y$ 的最小值为 18”这一等量关系再建立一个关于 a、b 的方程。

解法一 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,

, $\frac{b}{y}=1-\frac{a}{x}$,

$y=\frac{bx}{x-a}$,

, $x+y=x+\frac{bx}{x-a}$。

$x,y,a,b\in R^+$

, $$\frac{bx}{x-a}>0,$$

$$x>a,$$

, $$x+y=x+\frac{bx}{x-a}(x>a)$$

$$=(x-a)+\frac{ab}{x-a}+a+b$$

$$\geqslant 2\sqrt{ab}+a+b。$$

(当且仅当 $x-a=\frac{ab}{x-a}$,即 $x=a+\sqrt{ab}$时,等号成立。)

, $x+y$ 的最小值为 $2\sqrt{ab}+a+b$,由题设可知,$2\sqrt{ab}+a+b=18$。

, $$\begin{cases}a+b=10,\\2\sqrt{ab}+a+b=18。\end{cases}$$

, $$\begin{cases}a+b=10,\\ab=16。\end{cases}$$

, $a=2,b=8$,或 $a=8,b=2$。

解法二 令$\frac{a}{x}=\cos^2\theta,\frac{b}{y}=\sin^2\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

则 $x=a\sec^2\theta,y=b\csc^2\theta$,

, $$x+y=a\sec^2\theta+b\csc^2\theta$$

$$=a+b+a\tan^2\theta+b\cot^2\theta$$

$$\geqslant a+b+2\sqrt{ab}。$$

(当且仅当 $a\tan^2\theta=b\cot\theta$,即 $\tan\theta=\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$时,等号成立。)

, $x+y$ 的最小值为 $a+b+2\sqrt{ab}$,由题设可知,$a+b+2\sqrt{ab}=18$。

以下同解法一。

解法三 $$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,$$

，
$$x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$$
$$=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}$$
$$\geqslant a+b+2\sqrt{ab}。$$

（当且仅当$\frac{ay}{x}=\frac{bx}{y}$，即$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{a}{b}}$时，等号成立。）

，　$x+y$ 的最小值 $a+b+2\sqrt{ab}$，由题设可知，$a+b+2\sqrt{ab}=18$。

以下同解法一。

说明　本例的解法一和解法二中，条件等式$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$ 在求解过程 中函数 $x+y$ 都起了消元作用。在解法一中，是把一个变元用另一个变元表示的方法消元 ;在解法二中，是用三角换元的方法消元，即解析式中的两个变元都用第三个变元表示。

例 5　求函数 $y=(1+\cos x)(1+\sin x)$ 的最大值。

解法一
$$y=(1+\cos x)(1+\sin x)$$
$$=1+(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x$$
$$=1+(\mathrm{sixx}+\cos x)+\frac{(\mathrm{sixx}+\mathrm{cocx})^2-1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2+(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}$$

令　$\sin x+\cos x=t$，则 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

，
$$y=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2},$$

，
$$y_{max}=y_{t=\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}。$$

解法二　$1+\sin x\geqslant 0$，$1+\cos x\geqslant 0$，

，
$$(1+\cos x)(1+\sin x)$$
$$\leqslant\left(\frac{1+\sin x+1+\cos x}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2+\sin x+\cos x}{2}\right)^2。$$

（当且仅当 $1+\sin x=1+\cos x$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z)$ 时，等号成立。）

$$\left(\frac{2\sin x+\cos x}{2}\right)^2$$

$$=\left[\frac{2+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right]^2$$

$$\leqslant\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}。$$

（当且仅当 $x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z)$ 时，等号成立。）

综上所述，$(1+\cos x)(1+\sin x)\leqslant\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ （当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z)$ 时，等号成立。）

, $(1+\cos x)(1+\sin x)$ 的最大值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$。

解法三 $1+\sin x\geqslant 0$，$1+\cos x\geqslant 0$，

, $(1+\cos x)(1+\sin x)$

$$\leqslant\frac{(1+\cos x)^2+(1+\sin x)^2}{2}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{4}。$$

（当且仅当 $1+\cos x=1+\sin x$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z)$ 时，等号成

立。)

$$\frac{3+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\leqslant\frac{3+2\sqrt{2}}{2}。$$

(当且仅当 $x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z)$ 时,等号成立。)

综上所述,$(1+\cos x)(1+\sin x)\leqslant\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$,(当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z)$ 时,等号成立。)

, $(1+\cos x)(1+\sin x)$ 的最大值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$。

说明　解法一是将函数化成关于 $\sin x+\cos x$ 的一元二次函数求解。

解法二和解法三的实质相同,都是用基本不等式转换成熟悉的三角函数求最大值,特别要注意到,整个过程中对解析式共放了二次,且这二次放成的结果有共同的等号成立的条件,这就保证了 $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ 是函数值。

用基本不等式求函数的最值,在实际问题中有着广泛的应用,其求解的基本步骤为,先给出目标函数,再求出函数的最值。

例 6　甲、乙两地相距 skm,汽车从甲地匀速行使到乙地,速度不得超过 ckm/h,已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成,可变部分与速度 v(km/h)的平方成正比,比例系数为 b,固定部分为 a 元。

(Ⅰ)把全程运输成本 y(元)表示为速度 v 的函数,并指出这个函数的定义域:

(Ⅱ)为了使运输成本最小,汽车应以多大的速度行驶:?

分析　题(Ⅰ)是建立目标函数,题(Ⅰ)是求函数的最小值时自变量的取值。

解 （Ⅰ）由题设可知，$y=(a+bv^2)\frac{s}{v}$，即 $y=s(bv+\frac{a}{v})$，$v\in(0,c]$。

（Ⅱ）(1) 当 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时，

$y\geqslant s\cdot 2\sqrt{bv\cdot\frac{a}{v}}=2s\sqrt{ab}$（当且仅当 $bv=\frac{a}{v}$，即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$（$\sqrt{\frac{a}{b}}\in(0,c]$）时，等号成立。）

, 汽车运输成本最小时，汽车应以速度 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ km/h 行驶。

(2) 当 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时，

$y=sb(v+\frac{b}{v})$，函数在 $(0,c]$，（$(0,c]\subset(0,\sqrt{\frac{a}{b}}]$）上关于 v 单调递减应按定义给以证明，

, 当 $v=c$ 时，函数取最小值 $s(bc+\frac{a}{c})$，

, 汽车运输成本最小时，汽车应以速度 c km/h 行驶。

综上所述，当 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时，汽车以速度 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ km/h 行驶，运输成本最小；当 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时，汽车以速度 c 千米/时行驶，运输成本最小。

说明 在题（Ⅱ）求解中，当 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时，因为基本不等式中等号成立的条件满足，所以可以用基本不等式求最值；当 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时，因为基本不等式中等号成立的条件不满足，所以用函数的单调性求最值。

例 7 已知 P 为以 AB 为直径的圆周上任意一点，在 AB 上任取一点 Q，使 AP = AQ，当 P 在圆周上移动时，求△APQ 面积的最

大值(见图 3 - 5**)。**

分析　本例求解,首先必须建立目标函数,建立目标函数时,选择适当的自变量是关键。一般选择描写整个图形变化的元素的量为自变量,并且给出这个变量变化的范围作为函数的定义域

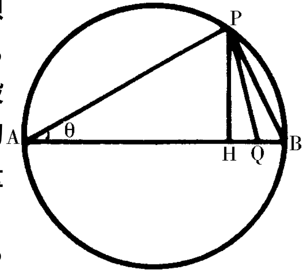


图 3 - 5

解法一　连接 PB**,并过点** P **做** $PH \perp AB$**,垂足为** H**,则由** AB **为直径知,**$\triangle APB$ **为直角三角形,**

$$,\quad PH^2 = AH \cdot HB = AH(AB - AH),$$

$$,\quad PH = \sqrt{AH(AB - AH)},$$

$$AQ^2 = AP^2 = AH \cdot AB,$$

$$,\quad AQ = \sqrt{AB \cdot AB},$$

$$
\begin{aligned}
,S_{\triangle APQ} &= \frac{1}{2} AQ \cdot PH \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{AH \cdot AB} \cdot \sqrt{AH(AB - AH)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{AB \cdot AH^2 \cdot (AB - AH)} \qquad AH \in (0, AB) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{AB \cdot AH \cdot AH(2AB - 2AH)} \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{AB \cdot \left(\frac{AH + AH + 2AB - 2AH}{3}\right)^3} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{AB \cdot \left(\frac{2AB}{3}\right)^3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9} AB^2。
\end{aligned}
$$

(当且仅当 $AH = 2AB - 2AH$**,即** $AH = \frac{2}{3}AB$ **时,等号成立。)**

,　　$\triangle APQ$ 的面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{9}AB^2$。

解法二　连接 PB,则$\triangle APQ$ 为直角三角形。

设$\angle PAB=\theta$,则在 $Rt\triangle APQ$ 中,$AP=AB\cos\theta$,故

$$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}AP^2\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}AB^2\cos^2\theta\cdot\sin\theta\qquad\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}AB^2\cos^2\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}AB^2\sqrt{\cos^4\theta(1-\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}AB^2\sqrt{\cos^2\theta\cdot\cos^2\theta(2-2\cos^2\theta)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}AB^2\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta+\cos^2\theta+2-2\cos^2\theta}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}AB^2\cdot$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}AB^2。$$

(当且仅当 $\cos^2\theta=2-2\cos^2\theta$,即 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\theta=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$($\arccos$

$\frac{\sqrt{6}}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$))时,等号成立。)

,　　$\triangle APQ$ 的面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{9}AB^2$。

说明　题设中的图形随着点 P 的变化而变化,并由图形的对称性可设点 P 在上半圆周上运动。由 AH、$\angle PAB$ 都能描写点 P 的运动变化,故分别选择 AH、$\angle PAB$ 为自变量建立目标函数。

（二）恒不等式的问题

恒不等式问题是不等式中一类广泛问题，处理恒不等式问题时，必须弄清楚不等式是关于哪一个变量，在哪一个范围内的恒不等式。

例 8　已知 $x \in R$，$f(x) = x^2\log_2 \dfrac{4(a+1)}{a} + 2x\log_2 \dfrac{2a}{a+1} + \log_2 \dfrac{(a+1)^2}{4a^2}$**恒为正，求实数 a 的取值范围。**

解法一　令 $\log_2 \dfrac{a+1}{a} = m$，

则 $f(x) = (m+2)x^2 + 2(1-m)x + 2m - 2$，

由题设可知，关于 x 的不等式$(m+2)x^2 + 2(1-m)x + 2m - 2 > 0$ **在 R 上恒成立。**

若 $m = -2$，**则不等式为** $6x - 6 > 0$，**这时，不等式在 R 上不恒成立，故** $m = -2$ **不可取。**

若 $m \neq -2$，

则
$$\begin{cases} m+2>0 \\ \triangle = 4(1-m)^2 - 8(m+2)(m-1) < 0 \end{cases}$$

解得 $m > 1$。

, $\log_2 \dfrac{a+1}{a} > 1$，

, $0 < a < 1$。

, **当** $0 < a < 1$ **时，$f(x)$ 在 R 上恒为正。**

解法二　令 $\log_2 \dfrac{a+1}{a} = m$，

则　$f(x) = (m+2)x^2 + 2(1-m)x + 2m - 2$，

由题设可知，关于 x 的不等式$(m+2)x^2 + 2(1-m)x + 2m - 2 > 0$ **在 R 上恒成立。**

, $(x^2 - 2x + 2)m > -2(x^2 + x - 1)$，

$x^2 - 2x + 2 > 0$，

, $$m > -\frac{2(x^2+x-1)}{x^2-2x+2}。$$

令 $$y = -\frac{2(x^2+x-1)}{x^2-2x+2},$$

则 $$y = -2-\frac{6(x-1)}{x^2-2x+2},$$

若 $x=1$,则 $y=-2$;

若 $x \neq 1$,则 $y = -2-\dfrac{6}{x-1+\dfrac{1}{x-1}}$,

, $$|y+2| = \frac{6}{|x-1|+\dfrac{1}{|x-1|}} \leqslant 3,$$

$$-3 \leqslant y+2 \leqslant 3,$$

, $$-5 \leqslant y \leqslant 1,$$

综上所述,函数 $y = -\dfrac{2(x^2+x-1)}{x^2-2x+2}$ 的最大值为 1,

, $$m > 1,$$

, $$\log_2 \frac{a+1}{a} > 1,$$

, $$0 < a < 1。$$

, 当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 在 R 上恒为正。

说明 解法一是化为关于 x 在 R 上的一元二次形式的恒不等式问题求解;解法二是化为求函数 $y=\dfrac{2(x^2+x-1)}{x^2-2x+2}$ 的最大值问题求解。

例 9 设 $x>y>2$,求使 $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-z} \geqslant \dfrac{n}{x-z}$ 成立的常数 n 的取值范围。

解法一 令 $x-y=a>0$,$y-z=b>0$,则 $x-z=a+b>0$。

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z} \geqslant \frac{n}{x-z},$$

, $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{n}{a+b},$$

$$a^2+(2-n)ab+b^2\geqslant 0,$$

, $$\left(\frac{a}{b}\right)^2+(2-n)\frac{a}{b}+1\geqslant 0。$$

由题设可知 $\frac{a}{b}\in R^+$

(1) 若 $\Delta=(2-n)^2-4\leqslant 0$,即 $0\leqslant n\leqslant 4$,则不等式成立。

(2) 若 $\Delta=(2-n)^2-4>0$ 即 $n<0$ 或 $n>4$,

令 $f\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^2+(2-n)\frac{a}{b}+1$,

则 $$\begin{cases} f(0)>0, \\ \frac{n-2}{2}<0。\end{cases}$$

解得 $n<2$,

, $n<0$。

综上所述,$n\leqslant 4$。

解法二 令 $x-y=a>0$,$y-z=b>0$,则 $x-z=a+b>0$。

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{y-z}\geqslant\frac{n}{x-z},$$

, $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{n}{a+b},$$

, $$n\leqslant\frac{(a+b)^2}{ab}。$$

$$a>0,b>0,$$

, $$\frac{(a+b)^2}{ab}\geqslant\frac{(a+b)^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=4,$$

, $$n\leqslant 4。$$

说明 解法一是化为关于 $\frac{a}{b}$ 在 R^+ 的恒不等式求解;解法二是化为求函数 $\frac{(a+b)^2}{ab}$ 的最小值问题求解。

例 10 对于满足 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的实数 p,求使 $x^2+px>4x+p-3$

恒成立的 x **的取值范围。**

解法一 $x^2 + px > 4x + p - 3$，

, $(x - 1)p + x^2 - 4x + 3 > 0$

由题设可知，不等式$(x - 1)p + x^2 - 4x + 3 > 0$ **为关于** p **在**$[0, 4]$**上的恒不等式。**

令 $f(p) = (x -)p + x^2 - 4x + 3$，

则 $\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(4) > 0, \end{cases}$ **即**$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 1 > 0。 \end{cases}$

解得 $x < -1$ **或** $x > 3$。

, **使不等式** $x^2 + px > 4x + p - 3$ **恒成立**$(0 \leqslant p \leqslant 4)$**的** x **的取值范围为** $x < -1$ **或** $x > 3$。

解法二 $x^2 + px > 4x + p - 3$，

, $(x - 1)p > -(x - 1)(x - 3)$

(1) **若** $x > 1$**，则** $p > -(x - 3)$，

由题设可知，$-(x - 3) < 0$**，即** $x > 3$，

, $x > 3$；

(2) **若** $x < 1$**，则** $p < -(x - 3)$，

由题设可知，$-(x - 3) > 4$**，即** $x < -1$，

, $x < -1$；

若 $x = 1$**，则不等式不成立。**

综上所述，使不等式 $x^2 + px > 4x + p - 3$ **恒成立**$(0 \leqslant p \leqslant 4)$**的** x **的取值范围为** $x < -1$ **或** $x > 3$。

说明　解法一是化为关于 p **在**$[0, 4]$**上的一元一次形式的恒不等式求解；解法二是化为求函数的最值问题求解。**

（三）基本不等式在求函数值域中应用

例 11　求函数 $y = \dfrac{x^2 - x + 3}{x}(x > 0)$**的值域。**

分析　求函数 $y = \dfrac{x^2 - x + 3}{x}(x > 0)$**的值域的方法较多，本例用基本不等式求其值域。**

解 $x>0$，

, $y=\dfrac{x^2-x+3}{x}$

$=x+\dfrac{3}{x}-1$

$\geqslant 2\sqrt{3}-1$。

（当且仅当 $x=\sqrt{3}$时，等号成立。）

, 函数的值域为$[2\sqrt{3}-1,\ )$。

例 12 已知关于 x 的方程 $\log_a(x-3)=1+\log_a(x+2)+\log_a(x-1)$有实根，求实数 a 的取值范围。

解 设方程的实根为 t，则 $t>3$ 且 $\log_a(t-3)=1+\log_a(t+2)+\log_a(t-1)$。

, $a(t+2)(t-1)=t-3 \quad (t>3)$

, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{(t+2)(t-1)}{t-3}$

$=(t-3)+\dfrac{10}{t-3}+7$

$\geqslant 2\sqrt{10}+7$，

, $0<a\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{10}+7}=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$，

, 实数 a 的取值范围为$\left(0,\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}\right]$。

说明 本例将问题转化为求函数$\dfrac{1}{a}=\dfrac{(t+2)(t-1)}{t-3}$的值域，并通过式的变形，利用基本不等式求解。

练 习 题

1. 已知 x、$y\in R^+$，且 $x+2y=1$，求函数$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$的最小值。

2. 设点 $P(x,y)$ 在直线 $x+3y-2=0$ 上移动，求函数 $f(x)=3^{x}+27^{y}+3$ 的最小值。

3. 求函数 $y=\sin x(1+\cos x)(0<x<\pi)$ 的最小值。

4. 已知 $A(0,\sqrt{3}a)$，$B(-a,0)$ $C(a,0)$ 是等边 $\triangle ABC$ 的顶点，点 M、N 分别在 AB、BC 上，且 MN 将 $\triangle ABC$ 的面积两等分，证点 N 的横坐标为 x，$|MN|=y$，

(1) 求 $y=f(x)$ 的表达式；

(2) 求 $y=f(x)$ 的最小值。

5. 设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^{x}+4^{x}\cdot a}{3}$，若当 $x\in(-\quad,1]$ 时，$f(x)$ 有意义，求 a 的取值范围。

6. 求使不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}(x>0,y>0)$ 恒成立的 a 的最小值。

7. 若关于 x 的方程 $9^{x}+(4+a)3^{x}+4=0$ 有解，求实数 a 的取值范围。

8. 已知函数 $f(x)=\log_{x+a}(2ax)$，总存在 $x\in(1,2]$，使 $f(x)<1$，求实数 a 的取值范围。

第四章　数列、极限、数学归纳法

一、数列是函数

数列可以看作定义在自然数集 N 或 N 的有限子集上的一种特殊函数，其通项公式相当于函数的解析式。因此，把研究函数的方法，以及函数的有关性质用于研究数列，将对数列的定义、通项公式、等差数列、等比数列的单调性，数列的最值等概念会理解得更深刻。

例 1　写出数列的一个通项公式，使它们的前 4 项分别是下列各数：

（1）　$1,-\frac{4}{3},\frac{9}{5},-\frac{16}{7},\cdots$

（2）　$11,103,1005,10007$；

分析　求数列的通项公式，就是要观察数列的项（函数值）与项数（自变量）之间的函数关系，可以按‘先分析部分，再考察整体’的方法进行归纳。

解（1）　各项的符号、分子、分母与自然数 n 的关系分别为 $(-1)^{n+1}$、n^2、$2n-1$，故 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2n-1}$。

（2）　数列的各项可以表示为 $10+1,100+3,1000+5,10000+7,\cdots$，即 $10+(2\times1-1),10^2+(2\times2-1),10^3+(2\times3-1),10^4+(2\times4-1),\cdots$，故 $a_n=10^n+(2n-1)$。

例 2　求等差数列 $8,5,2,\cdots$的第 20 项。

分析　由题设可以求得数列的通项公式，通项公式相当于函数的解析式，求第 20 项就相当于求自变量为 20 时的函数值。

解　由题设可知，$a_1=8,d=-3$，故 $a_n=8+(n-1)\cdot(-3)$

$= -3n+11$,

, $a_{20} = -3 \cdot 20 + 11 = -49$。

例 3　**等差数列** $-5, -9, -13, \cdots$**的第几项是** -401。

分析　**本例相当于求‘ 函数值为** -401 **时,自变量** n **的取值。**

解　**由题设可知,**$a_1 = -5$,$d = -4$,**故** $a_n = -5 + (n-1) \cdot (-4) = -4n-1$,

令 $-4n-1 = -401$,**则** $n = 100$,

, -401 **是这个数列的第** 100 **项。**

例 4　**已知等差数列** 110,116,122,128,…

(1**)该数列有多少项在** 450 **到** 600 **之间?**

(2**)在题(**1**)中的项有哪些项能被** 5 **整除?**

分析　**题(**1**)相当于函数问题中‘ 已知函数值的取值范围,求相应自变量的取值范围 ”。**

题(2**)相当于函数问题中‘ 求满足某种条件的函数值 ”。**

解　**由题设可知,**$a_1 = 100$,$d = 6$,**故** $a_n = 110 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 104$。

(1)　**令** $450 < 6n + 104 < 600$,

则　$346 < 6n < 496$,$57\frac{2}{3} < n < 82\frac{2}{3}$,

, $n \in N$,

, $58 \leqslant n \leqslant 82$,

, **该数列有** $82 - 58 + 1$,**即有** 25 **项在** 450 **到** 600 **之间。**

(2)**方法一**　$6n + 104 = 5n + 105 + (n-1)$,

, $n - 1 = 5(k-1)$　$(k \in N)$,$n = 5k - 4$,

, **数列中能被** 5 **整除的项为** $6(5k-4) + 104 = 30k + 80$。

令　$450 < 30k + 80 < 600$,

则　$370 < 30k < 520$,$12\frac{1}{3} < k < 17\frac{1}{3}$。

$k \in N$,

, $13 \leqslant k \leqslant 17$,

,　　所求的能被 5 整除的项有 $17-13+1$,即 5 项,它们为:470,500,530,560,590。

方法二　令 $58\leqslant 5k-4\leqslant 82$,

则　$62\leqslant 5k\leqslant 86$,$12\frac{2}{5}\leqslant k\leqslant 17\frac{1}{5}$。

　　$k\in N$,

,　　$13\leqslant k\leqslant 17$,

,　　所求的能被 5 整除的项有 $17-13+1$,即 5 项,它们为 470,500,530,560,590。

例 5　若在等差数列 2,5,8,…的每相邻两项中间插入 3 项,使它们构成一个新的等差数列,

(1) 原数列的第 10 项是新数列中的第几项?

(2) 新数列的第 29 项是原数列中的项吗?如果是,求出它在原数列中的项数,如果不是,试说明理由。

分析　本例中的两小题的实质都相当于函数问题中‘已知函数值,求自变量的取值’的问题。

解法一　设原数列为 $\{a_n\}$,新数列为 $\{b_n\}$,由题设可知,$a_1=2$,$d=3$,故 $a_n=3n-1$;$b_1=2$,$b_5=5$,$d=\frac{5-2}{5-1}=\frac{3}{4}$,故 $b_n=\frac{3}{4}n+\frac{5}{4}$。

(1) 原数列 $\{a_n\}$ 中的第 10 项 $a_{10}=3\cdot 10-1=29$,

设 29 为新数列 $\{b_n\}$ 中的第 k 项。

则 $\frac{3}{4}k+\frac{5}{4}=29$,

,　　$k=37$,即原数列中的经 10 项是新数列中的第 37 项。

(2) 新数列 $\{b_n\}$ 中的第 29 项 $b_{39}=\frac{3}{4}\cdot 29+\frac{5}{4}=23$,

设 23 为原数列 $\{a_n\}$ 中的第 n 项,

则　$3n-1=23$,

,　　$n=8$,即新数列中的第 29 项是原数列中的第 8 项。

分析 **由题设可知,若原数列中的项是新数列中的项,则这样的项在原数列中的项数** n **与新数列中的项数** k **之间存在着函数关系。**

解法二 **设原数列** $\{a_n\}$ **中的第** n **项是新数列中的第** k **项,由题设可知,**$k=4n-3(k\in N)$,

令 $n=10$,**则** $k=37$;

令 $k=29$,**则** $n=8$。

, **原数列中的第** 10 **项是新数列中的牝** 37 **项,新数列中的第** 29 **项是原数列中的第** 8 **项。**

例 6 **已知** $\{a_n\}$ **为等差数列**$(d\neq0)$,$\{a_n\}$ **中的部分项组成的数列** $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}$ **恰为等比数列,且** $k_1=1$,$k_2=5$,$k_3=17$,**求** $k_1+k_2+\cdots+k_n$。

分析 k_n **与自然数** n **之间存在着函数关系,即** $\{k_n\}$ **也构成一个数列,要求其前** n **项的和必须给出其通项公式。**

解法一 **设等差数列** $\{a_n\}$ **的公差为** d。

a_1,a_5,a_{17} **成等比数列,**

, $a_5^2=a_1\cdot a_{17}$,**即**$(a_1+4d)^2=a_1(a_1+16d)$,

, $a_1=2d$。

设数列 $\{a_{k_n}\}$ **的公比为** q,

则 $$q=\frac{a_5}{a_1}=\frac{a_1+4d}{a_1}=\frac{6d}{2d}=3,$$

, $$a_{k_n}=a_{k_1}q^{n-1}=a_1\cdot3^{n-1},$$

又 $$a_{k_n}=a_1+(k_n-1)d,$$

, $$a_1\cdot3^{n-1}=a_1+(k_n-1)d,$$

$$2d\cdot3^{n-1}=2d+(k_n-1)d,$$

, $$k_n=2\cdot3^{n-1}-1。$$

, $$\begin{aligned}k_1+k_2+\cdots+k_n&=2+2\cdot2+2\cdot3^2+\cdots+2\cdot3^{n-1}-n\\&=2\cdot(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-n\\&=2\cdot\frac{1-3^n}{1-3}-n\end{aligned}$$

$$=3^n-n-1。$$

解法二　同解法一知 $a_1=2d$。

, $$\frac{a_{k_n}}{a_{k_{n-1}}}=\frac{a_1(k_n-1)d}{a_1+(k_{n-1}-1)d}$$

$$=\frac{2d+(k_n-1)d}{2d+(k_{n-1}-1)d}$$

$$=\frac{k_n+1}{k_{n-1}+1}$$

$$=\frac{5+1}{1+1}$$

$$=3,$$

, $\{k_n+1\}$ **是以** 2 **为首项，**3 = **为公比的等比数列，**

, $k_n+1=2\cdot3^{n-1}$**，即有** $k_n=2\cdot3^{n-1}-1$，

同解法一知，$k_1+k_2+\cdots+k_n=3^n-n-1$。

例 7　**已知数列** $\{a_n\}$ **的通项** $a_n=na^{2n}(0<a<1)$**，如果对任何自然数** n**，有** $a_{n+1}<a_n$**，求** a **的取值范围。**

分析　由题设可知，数列(a_n)**为自然数集上的减函数。**

解　$a_{n+1}<a_n$**，即**$(n+1)a^{2(n+1)}<na^{2n}$，

, $a^2<\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$。

$n\in N$，

, $0<\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\leqslant1-\frac{1}{n+1}<1$，

, $a^2<\frac{1}{2}$，

$0<a<1$，

, $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$。

例 8　**首项为正数** a **的等差数列的前** 17 **项的和等于前** 9 **项的和，则此数列的前多少项的和最大？**

解法一　由题设知 $S_{17}=S_9$**，即**$\frac{17}{2}(2a+16d)=\frac{9}{2}(2a+8d)$**，**

,　　$d=-\frac{2}{25}a$。

,　　$S_n=na+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\left(-\frac{2}{25}a\right)$

$$=\left(-\frac{1}{25}a\right)n^2+\frac{26}{25}an。$$

$-\frac{1}{25}a<0$，

,　**当** $n=-\dfrac{\frac{26}{25}a}{-\frac{2}{25}a}=13$ **时，**S_n **有最大值。**

解法二　由解法一知，$d=-\frac{2}{25}a<0$，

,　**数列** $\{a_n\}$ **为首项为正数单调递减数列，故必存在** n**，使** $a_n\geqslant 0$ **且** $a_{n+1}\leqslant 0$**，这时前** n **项的和最大。**

令
$$\begin{cases}a_n=a+(n-1)\cdot\left(-\frac{2}{25}a\right)\geqslant 0,\\ a_{n+1}=a+n\cdot\left(-\frac{2}{25}a\right)\leqslant 0,\end{cases}$$

,　$n\leqslant 13.5$ **且** $n\geqslant 12.5$，

$n\in N$，

,　$n=3$ **时，**S_{13}**取最大值。**

解法二　　$S_{17}=S_9$

,　　$a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{16}+a_{17}=0$

$a_{17}+a_{16}+\cdots+a_{11}+a_{10}=0$

,　**相加可得，**$a_{13}+a_{14}=0$。

数列 $\{a_n\}$ **的首项为正数，公差** $d<0$，

,　**数列** $\{a_n\}$ **单调递减，**

,　$a_{13}>0$，$a_{14}<0$，

，　数列的前 13 项的和最大。

练 习 题

1. 在两个等差数列：2，5，8，…，197 和 2，7，12，…，197 中，

（1）有多少相同的项；

（2）求这些相同项之和。

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$，

（1）求公差 d 的取值范围；

（2）指出 S_1，S_2，…，S_{12} 中哪个值最大，并说明理由。

3. 在公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中，已知：$a_1=1$，$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_8=b_3$，

（1）求等差数列的公差 d 和等比数列的公式 q；

（2）是否存在常数 a、b，使得对一切自然 n 都有 $a_n=\log_n b_n+b$ 成立？若存在，求常数 a、b 的值；若不存在，说明理由。

二、等差数列和等比数列

等差数列和等比数列是两个基本数列，数列问题常直接运用函数的观点求解或转化为等差数列、等比数列求解。

等差数列 $\{a_n\}$ 有下列基本性质：

（1）$a_n=a_m+(n-m)d$；

（2）$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$，公差 d 的几何意义就是表示等差数列的点所在直线的斜率。

（3）若 m、n、p、$q\in N$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；

（4）$\{a_{pn+q}\}$ 也为等差数列（其中 $p\in N$，q 为非负整数）；

（5）设 $A_1=S_n$，$A_2=S_{2n}-S_n$，$A_3=S_{3n}-S_{2n}$，…则 $\{A_n\}$ 也为等差数列，

等比数列 $\{a_n\}$ 有下列基本性质：

（1）$a_n=a_mq^{n-m}$；

（2）若 $n-m$ 为奇数，则 $q=\sqrt[n-m]{\dfrac{a_n}{a_m}}$，若 $n-m$ 为偶数，则 $q=\pm\sqrt[n-m]{\dfrac{a_n}{a_m}}(n>m)$；

（3）若 $m、n、p、q\in N$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；

（4）$\{a_{pn+q}\}$ 也为等比数列（其中 $p\in N$，q 为非负整数）；

（5）设 $A_1=S_n$，$A_2=S_{2n}-S_n$，$A_3=S_{3n}-S_{2n}$，…，则 $\{A_n\}$ 也为等比数列。

列方程（组）是解等差数列、等比数列问题常用的方法，合理运用等差数列、等比数列的性质可以简化求解过程。

例 1　已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_r=s$，$a_s=r$，求 a_{r+s}。

解法一　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则

由题设可得，$\begin{cases}a_1+(r-1)d=s,\\ a_1+(s-1)d=r。\end{cases}$

解得 $d=-1$，$a_1=r+s-1$，

, $a_n=r+s-1+(n-1)(-1)=-n+r+s$，

, $a_{r+s}=-(r+s)+r+s)=0$。

解法二　$a_r=s$，$a_s=r$，

, $d=\dfrac{s-r}{r-s}=-1$，

, $a_n=a_r+(n-r)(-1)$，

, $a_{r+s}=s+s(-1)=0$。

解法三　由等差数列的几何意义可知，点 (r,s)，(s,r) 是直线 $y=-x+(r+s)$ 上的两点（见图 4-1），当 $x=r+s$ 时，$y=0$

, $a_{r+s}=0$。

说明　解法一是先列出关于等差数列的首项 a_1 和公差 d 的方程组，解得 a_1 和 d 数列的通项公式，这是数列问题中求解未知量的常用方法。

解法二是利用等差数列公差的几何意义（直线的斜率）直接给出公差，再直接利用等差数列的性质给出通项公式。

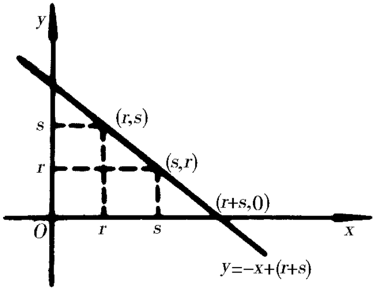


图 4 - 1

表示等差数列各项的点(n,a_n)都在同一条直线上,其公差即为这条直线的斜率。解法三是直接利用等差数列的几何意义求解。

例 2　已知等差数列$\{a_n\}$中,$S_m=S_n(m\neq n)$,求S_{m+n}。

解法一　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则

由$S_m=S_n$得,$ma_1+\frac{1}{2}m(m-1)d=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$,即

$$(m-n)a_1+\frac{1}{2}(m-n)(m+n-1)d=0,$$

$m\neq n$,

, $a_1+\frac{1}{2}(m+n-1)d=0$。

, $S_{m+n}=(m+n)a_1+\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)d$

$=(m+n)[a_1+\frac{1}{2}(m+n-1)d]$

$=0$。

解法二　$S_m=S_n$(不妨设$m<n$)

, $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=0$,

$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{m+1}=0$,

由等差数列的性质可知,$(n-m)(a_{m+1}+a_n)=0$,

$n-m\neq0$,

，$$a_{m+1}+a_n=0,$$

，$$S_{m+n}=\frac{1}{2}(m+n)(a_1+a_{m+n})$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)(a_{m+1}+a_n)$$

$$=0。$$

解法三　数列的各项可以用数轴上的点表示，由等差数列($d\neq0$)**的单调性可知，表示等差数列的各项必依次排列在数轴上。**

$S_m=S_n$(**不妨设** $m<n$)，

，　$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=0$。

若 $m+n+1$ **为偶数，则** $a_{\frac{m+n+1}{2}}$**为** $a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_n$ **的中间项，且** $a_{\frac{m+n+1}{2}}=0$，**即原点与项** $a_{\frac{m+n+1}{2}}$**对应。这时，**$a_{\frac{m+n+1}{2}}$**也为数列** $a_1,a_2,\cdots,a_{m+n}$**的中间项，表示其余各项的点成对关于原点对称，即分别互为相反数**(**见图** 4 - 2)，**故** $S_{m+n}=0$；

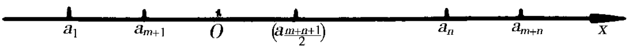


图 4 - 2

若 $m+n+1$ **为奇数，则** $a_{\frac{m+n}{2}},a_{\frac{m+n}{2}+1}$**为** $a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_n$ **的中间两项，且** $a_{\frac{m+n}{2}}+a_{\frac{m+n}{2}+1}=0$，**表示** $a_{\frac{m+n}{2}},a_{\frac{m+n}{2}+1}$**的两点位于原点两侧，且到原点的距离相等。这时，**$a_{\frac{m+n}{2}},a_{\frac{m+n}{2}+1}$**也为数列** $a_1,a_2,\cdots,a_{m+n}$**的中间两项，表示其余各项的点成对关于原点对称，即分别互为相反数**(**见图** 4 - 3)**故** $S_{m+n}=0$。

图 4 - 3

说明　在解法一中，由 $S_m=S_n$ **推得的等式** $a_1+\frac{1}{2}(m+n-1)d=0$ **对** S_{m+n}**的计算表达式起消元作用**;**解法二和解法三分别运用**

了等差数列的性质‘若 $m、n、p、q \in N, m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p=a_q$’的代数形式和几何形式。

例 3 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{15}=10, a_{45}=90$，

(1) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，求 a_{60}；

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，求 a_{60}。

分析 用列出 a_1 和 d，a_1 和 q 的方程组的方法求解，运算较繁。

(1) **解法一** $a_{15}=10, a_{45}=90$，

, $d=\dfrac{90-10}{45-15}=\dfrac{8}{3}$，

, $a_{60}=a_{45}+15d=90+15\times\dfrac{8}{3}=130$。

解法二 $\{a_n\}$ 为等差数列，

, $a_{15}, a_{30}, a_{45}, a_{60}$ 也成等差数列。

$a_{15}=10, a_{45}=90$，

, $a_{30}=\dfrac{1}{2}(a_{15}+a_{45})=50$

, $a_{60}=2a_{45}-a_{30}=2\times 90-50=130$。

(2) **解法一** $a_{15}=10, a_{45}=90$，

, $q=\pm\sqrt[30]{9}=\pm\sqrt[15]{3}$，

, $a_{60}=a_{45}\cdot q^{15}=90\times(\pm\sqrt[15]{3})^{15}=\pm 270$。

解法二 $\{a_n\}$ 为等比数列，

, $a_{15}, a_{30}, a_{45}, a_{60}$ 也成等比数列。

$a_{15}=10, a_{45}=90$，

, $a_{30}=\pm\sqrt{900}=\pm 30$，

, $a_{60}=\dfrac{a_{45}^2}{a_{30}}=\dfrac{8100}{\pm 30}=\pm 270$。

例 4 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_4=1, S_8=4$，求 $a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}$。

分析 本例可将条件组 $\begin{cases} S_4=1 \\ S_8=4 \end{cases}$ 转换成关于等差数列的首项 a_1 和公差 d 的方程组，但运算较繁。

解 令 $A_1=S_4$，$A_2=S_8-S_4$，$A_3=S_{12}-S_8$，…，则 $a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=A_5$。

$\{a_n\}$ 为等差数列，

, $\{A_n\}$ 也为等差数列且 $A_1=1$，公差 $D=2$，

, $A_5=A_1+4D=1+4\times2=9$。

例 5 一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2^{-5}$，它的前 11 项的几何平均数为 2^5，若前 11 项中抽去一项后的几何平均数为 2^4，求抽去的一项的项数。

解 设抽去的一项为 a_n，则题设可得，

$$\begin{cases} a_1=2^{-5}, \\ a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}a_na_{n+1}\cdots a_{11}=2^{55}, \\ a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}a_{n+1}\cdots a_{11}=2^{40}。\end{cases}$$

, $$\begin{cases} a_1=2^{-5}, \\ a_6=2^5, \\ a_n=2^{15}。\end{cases}$$

, $$q=\sqrt[5]{\frac{2^5}{2^{-5}}}=4,$$

, $$2^{-5}\cdot4^{n-1}=2^{15},$$

, $n=11$，即抽去的是第 11 项。

例 6 由 7 个实数组成的数列中，奇数项成等差数列，偶数项成等比数列，且奇数项的和与偶数项的积的差为 42，又首末两项与中间项的和为 27，求此中间项。

解法一 由题意可设 7 个实数为 $a-3d$，$\frac{b}{q}$，$a-d$，b，$a+d$，bq，$a+3d$。

由题设得

$$\begin{cases}(a+3d)+(a+d)+(a-d)+(a-3d)-\dfrac{b}{q}\cdot b\cdot bq=42,\\(a+3d)+(a-3d)+b=27。\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}4a-b^3=42,\\2a+b=27。\end{cases}$$

, $b_3+2b-12=0$,$(b-2)(b^2+2b+6)=0$,

$b^2+2b+6\neq0$,

, $b=2$,即所求中间项为 2。

解法二 设 7 个数为 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$,

则由题设可得,$\begin{cases}(a_1+a_3+a_5+a_7)-a_2a_4a_6=42,\\a_1+a_7+a_4=27。\end{cases}$

, $$\begin{cases}2(a_1+a_7)-a_4^3=42,\\a_1+a_7+a_4=27。\end{cases}$$

, $a_4^3+2a_4-12=0$,$(a_4-2)(a_4^2+2a_4+6)=0$,

$a_4^2+2a_4+6\neq0$,

, $a_4=2$,即所求中间项为 2。

练 习 题

1. 若 $x\neq y$,且两个数列 x,a_1,a_2,y 和 x,b_1,b_2,b_3 各成等差数列,求$\dfrac{a_2-a_1}{b_2-b_1}$的值。

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1a_9=64$,$a_3+a_7=20$,求 a_{11}

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1>0$,$S_4=S_9$,求 S_n 取得最大值时 n 的取值。

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1+a_2=30$,$a_3+a_4=60$,求 a_7+a_8

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 共 15 项,第 8 项是 3,求该数列奇数项之和。

6. 在 $1/n$ 和 $n+1$ 之间插入 n 个正数,使这 $n+2$ 个数成等比数例,求插入的 n 个数的积。

三、数列求和

数列求和是数列的一个重要内容,一般是将数列转化为等差数列或等比数列等基本数列求解,或用拆项法求解。

例 1 求数列 $1\frac{1}{2},3\frac{1}{4},5\frac{1}{8},\cdots$ 的前 n 项的和 S_n。

分析 数列的通项公式为 $a_n=(2n-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^n$,其中 $\{2n-1\}$ 为等差数列, $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 为等比数列,因此,题设数列前 n 项的和就是一个等差数列和一个等比数列前 n 项和的和。这种求和方法称作分解法。

解 $S_n=1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+\cdots+\left[(2n-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right.$

+

$\left.\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$=n^2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$。

例 2 求数列 $1,1+a,1+a+a^2,\cdots1+a+a^2+\cdots+a^n,\cdots$ 的前 n 项的和 S_n。

解 若 $a=1$,则 $a_n=n$,

则 $S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

若 $a\neq1$,则 $a_n=\frac{1}{1-a}(1-a^n)$,

, $S_n=\frac{1}{1-a}\left[n-\frac{a(1-a^n)}{1-a}\right]$。

说明 在等比数列求和中,必须弄清楚:公比是否为 1;首项;项数。

例 3 **已知数列** $\{a_n\}$ **的通项为** $a_n=(-1)^n(5n-3)$**,求** S_n。

解法一　若 n **为偶数,则**

$$S_n=(-2+7)+(-12+17)+(-22+7)+\cdots$$
$$+[-(5n-8)+(5n-3)]$$
$$=5+5+5+\cdots+5$$
$$=\frac{5n}{2}。$$

若 n **为奇数,则** $n-1$ **为偶数,**

$$S_n=S_{n-1}-(5n-3)$$
$$=\frac{5(n-1)}{2}-(5n-3)$$
$$=\frac{-5n+1}{2}。$$

,

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{5n}{2},n\text{ 为偶数}\\[2ex]\dfrac{-5n+1}{2}n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

解法二

, $$S_n=-2+7-12+17-22+27-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}(5n-8)+(-1)^n(5n-3)$$

, $$-S_n=2-7+12-17+22-\cdots+(-1)^{n-1}(5n-13)$$
$$+(-1)^n(5n-8)+(-1)^{n+1}(5n-3)$$

两式相减,得

$$2S_n=-2+[5-5+5-5+5-\cdots+(-1)^n\cdot 5]$$
$$+(-1)^n(5n-3)$$
$$=-2+\frac{5[1-(-1)^{n-1}]}{1-(-1)}+(-1)^n(5n-3)$$
$$=-2+\frac{5}{2}+(-1)^n\frac{5}{2}+(-1)^n(5n-3)$$
$$=\frac{1}{2}+(-1)^n\left(5n-\frac{1}{2}\right),$$

$\therefore \quad S_n=\frac{1}{4}+(-1)^n\left(\frac{5n}{2}-\frac{1}{4}\right)$。

说明　在解法一中，n 为奇数时的求解，应用了 n 为偶数时的结果，从而简化了 n 为奇数时的运算。

解法二中，将数列 $\{(-1)^n(5n-3)\}$ 看成一个等比数列 $\{(-1)^n\}$ 与一个等差数列 $\{5n-3\}$ 相应项的积构成的数列，故用错位相减的方法转化成等比数列求和。这种求和方法称作错位法。

例 4　求数列 $\frac{2^2+1}{2^2-1},\frac{3^2+1}{3^2-1},\frac{4^2+1}{4^2-1},\cdots$ 的前 n 项的和。

分析　多项求和问题常用拆项相消的方法求解，这种方法也适用于数列求和。

解　由题设 $a_n=\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1}=1+\frac{2}{(n+1)^2-1}=1+\frac{2}{n(n+2)}$

$$\therefore \quad S_n=n+2\left[\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}\right]$$

$$=n+\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=n+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=n+\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}。$$

例 5　求数列 $1,2^2,3^2,\cdots,n^2,\cdots$ 的前 n 项的和 S_n。

解法一

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1\ (n\in N)$$

$$1^3=3\times1^2-3\times1+1,$$

$$2^3-1^3=3\times2^2-3\times2+1,$$

$$3^3-2^3=3\times3^2-3\times3+1,$$

$$4^3-3^3=3\times4^2-3\times4+1,$$

$$\cdots$$

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1,$$

以上等式两边相加,得

$$n^3=3S_n-3(1+2+3+\cdots+n)+n,$$

$$n^3=3S_n-\frac{3n(n+1)}{2}+n,$$

, $$S_n=\frac{1}{3}[n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n]$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

解法二 $a_n=n^2=n(n+1)-n$。

令 $f(n)=n(n+1)(n+2)$,

则 $n(n+1)=\frac{1}{3}[f(n)-f(n-1)]$。

, $$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$$

$$=\frac{1}{3}\{[f(1)-f(0)]+[f(2)-f(1)]$$

$$+[f(3)-f(2)]+\cdots+[f(n)-f(n-1)]\}$$

$$=\frac{1}{3}f(n)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

, $$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)[2(n+2)-3]$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

例 6 **已知数列** $\{a_n\}$ **的前** n **项和** $S_n=10n-n^2$,$(n\in N)$,**又** b_n

$=|a_n|$，$(n\in N)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n。

解　　$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=10n-n^2$，

，　$a_1=9$，$n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-2n+11$，

，　$a_n=-2n+11$。

易知，$a_1=1$，$a_6=-1$，由等差数列的单调递减性可知，$n\leqslant 5$ 时，$b_n=a_n$，当 $n\geqslant 6$ 时，$b_n=-a_n$。

，　当 $n\leqslant 5$ 时，$T_n=S_n=10n-n^2$。

当 $n>5$ 时，$T_n=S_n=2S_5-S_n=2\times 25-(10n-n^2)=n^2-10n+50$。

综上所述，$T_n=\begin{cases}10n-n^2 & n\leqslant 5,\\ n^2-10n+50n & n>5\end{cases}$

例 7　已知数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\begin{cases}6n-5, & n\text{ 为奇数},\\ 4^n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$求 S_n。

解法一　若 n 为偶数，

则　$S_n=\{1+13+\cdots+[6(n-1)-5]\}+(4^2+4^4+\cdots+4^n)$

$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 12+\frac{16\left(1-16^{\frac{n}{2}}\right)}{1-16}$$

$$=\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+\frac{16}{15}(4^n-1)。$$

若 n 为奇数，

则 $S_n=S_{n-1}+a_n$

$$=\frac{3}{2}(n-1)^2-\frac{5}{2}(n-1)+\frac{16}{15}(4^{n-1}-1)+6n-5$$

$$=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1+\frac{16}{15}(4^{n-1}-1)。$$

解法二　右 $n=2m$，$(m\in N)$

则　$S_{2m}=\{1+3+15+\cdots+[6(2m-1)-5]\}$

$$+(4^2+4^4+\cdots+4^{2m})$$

$$=6m^2-5m+\frac{16(4^{2m}-1)}{15},$$

$$S_n=6\left(\frac{n}{2}\right)^2-5\cdot\frac{n}{2}+\frac{16\left(4^n-1\right)}{15}$$

$$=\frac{1}{2}\left(3n^2-5n\right)+\frac{16}{15}\left(4^n-1\right)。$$

若　$n=2m-1\quad m\in N$，

则　$S_{2m-1}=S_{2(m-1)}+a_{2m-1}$

$$=6\left(m-1\right)^2-5\left(m-1\right)+\frac{16\left[4^{2(m-1)}-1\right]}{15}$$

$$+6\left(2m-1\right)-5$$

$$=6^2m-5m+\frac{16\left[4^{2(m-1)}-1\right]}{15}。$$

，　$S_n=6\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-5\cdot\frac{n+1}{2}+\frac{16\left(4^{n-1}-1\right)}{15}$

$$=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1+\frac{16}{15}\left(4^{n-1}-1\right)。$$

说明　本例的解法二运用了函数的换元思想。

练 习 题

1. **求数列**$\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\frac{5}{8},-\frac{7}{16},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},\cdots$**的前** n **项的和** S_n。

2. **已知数列**$\{a_n\}$**的前** n **项和** $S_n=2^n-1$，**求** $a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2$。

3. **数列**$\{a_n\}$**中**，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+(-3)^{n-1}$，**求** a_n。

4. **首项为** 1 **的等差数列，其前** n **项之和与其后** $2n$ **项之和的比值对任何** n **都取定值，求公差** d **及这个定值。**

四、数列的极限

（一）数列$\{a_n\}$**的极限是** A，**是指当** n **无限增大时**，a_n **无限趋近于常数** A。a_n **无限趋近于常数** A **的意义，从数的角度理解就是，当** n **无限增大时**，$|a_n-A|$**无限趋近于零；从形的角度理解就是，当**

n 无限增大时，在数轴上表示 a_n 的点与表示数 A 的点之间的距离无限趋近于零。在运用“$\varepsilon - N$”定义证明数列的极限时，对于给定的任意小的正数 ε 通过对不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 的放缩，找到 N，使 $n > N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$ 总成立，因此，$n > N$ 是 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立的充分条件，放缩的方式不同，找到的 N 也会不同，故 N 的选取具有较大的灵活性。

例 1　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2 - n + 10}{2n^2} = \dfrac{3}{2}$。

证明　设 ε 为任意小的正数。

要使 $\left|\dfrac{3n^2 - n + 10}{2n^2} - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$，

只要使 $\left|\dfrac{n - 10}{2n^2}\right| < \varepsilon$，

只要使 $\dfrac{12n}{2n^2} < \varepsilon$，即 $\dfrac{6}{n} < \varepsilon$，

只要使 $n > \dfrac{6}{\varepsilon}$。

取 $N = \left[\dfrac{6}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时，$\left|\dfrac{3n^2 - n + 10}{2n^2} - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$ 恒成立，

，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2 - n + 10}{2n^2} = \dfrac{3}{2}$。

（二）求数列的极限是一种运算，即应用极限的运算法则，将较复杂的数列极限求解问题，转化为简单的数列极限求解问题。

极限的运算法则在“有限个”与“都有极限”的条件下适合。

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{n^k} = 0$（$c$、$k$ 为常数，$k > 0$），$\lim\limits_{n\to\infty}q^n = 0$（$|q| < 1$），$\lim\limits_{n\to\infty}c = c$（$c$ 为常数）是常见的几个简单数列的极限。

若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $|q| < 1$，则 $S = \lim\limits_{n\to\infty}S_n = \dfrac{a_1}{1 - q}$。

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1}(-2)^{n+1}}$。

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n}\cdot\dfrac{1}{3}}{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$。

说明　本例是转化成求数列 $\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n}\right\}$ **的极限求解。**

例 3　**求** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{3\times7}+\dfrac{1}{7\times11}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}\right]$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{4n-1}-\dfrac{1}{4n+3}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4n+3}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{12}$。

例 4　**求** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7^2}+\dfrac{1}{7^3}+\dfrac{2}{7^4}+\cdots+\dfrac{1}{7^{2n-1}}+\dfrac{2}{7^{2n}}\right)$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots+\dfrac{1}{7^{2n-1}}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{7^2}+\dfrac{2}{7^4}+\cdots\dfrac{2}{7^{2n}}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{1}{7}}{1-\dfrac{1}{7^2}}+\dfrac{\dfrac{2}{7^2}}{1-\dfrac{1}{7^2}}$

$=\dfrac{3}{16}$。

说明　随着 n **的增大,项数也增加的和式的极限,一般可将和式化成有限项的形式求解或运用无究递缩等比数列的求和公式求解。**

例 5　**求** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$。

解　原式 $= \lim\limits_{n\to} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$$= \lim_{n\to} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{2}{1+1}$$

$= 1$。

说明　应用有理化的方法,将无理式变形,也是求极限常用的方法。

例 6　**若** $\lim\limits_{n\to} \dfrac{(n^2+n)a-n^2b+3-3n^2}{2bn+1}=2$**,求常数** a、b **的值。**

分析　等式 $\lim\limits_{n\to} \dfrac{(n^2+n)a-n^2b+3-3n^2}{2bn+1}=2$ **蕴含着两层意义:**

(1)变量 $\dfrac{(n^2+n)a-n^2b+3-3n^2}{2bn+1}$ **有极限;**

(2)极限为 2。

解　$\lim\limits_{n\to} \dfrac{(n^2+n)a-n^2b+3-3n^2}{2bn+1}=2$,

,　$\lim\limits_{n\to} \dfrac{(a-b-3)n^2+an+3}{2bn+1}=2$,

,　$\begin{cases} a-b-3=0, \\ \dfrac{a}{2b}=2。\end{cases}$　**解得** $a=4$,$b=1$。

(三)极限法,是指用极限观念去分析问题、解决问题的一种思想方法,通常从两个方面去研究:一是研究有限量向无限量的转化;二是研究从近似到精确的转化。应用问题一般化为无穷数列求和,更常见的是化为无穷等比数列求和。

例 7　**如图** 4-4 **所示,在** Rt△ABC **中,有一系列正方形,其面积为** S_1,S_2,…,S_n,…,**已知** $AC=a$,**且所有正方形面积之和为**

$\triangle ABC$ **面积的一半,试求** AB **和** $\angle B$。

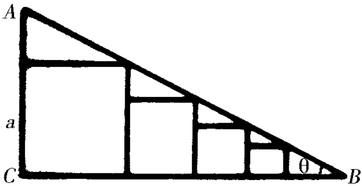


图 4 - 4

解　**设** $\angle B=\theta$,**各正方形边长分别为** $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$。

则　$BC=a\cot\theta$,

$$\frac{a_1}{a\cot\theta}=\frac{a-a_1}{a},\frac{a_{n+1}}{a_n\cot\theta}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}$$

,　$$a_1=\frac{a\cot\theta}{1+\cot\theta},a_{n+1}=\frac{a_n\cot\theta}{1+\cot\theta},$$

,　$$S_1=a_1^2=\frac{a^2\cot^2\theta}{(1+\cot\theta)^2},$$

$$S_{n+1}=a_{n+1}^2=\frac{a_n^2\cot^2\theta}{(1+\cot\theta)^2}=\frac{S_n\cot^3\theta}{(1+\cot\theta)^2},$$

,　$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\cot^2\theta}{(1+\cot\theta)^2},$$

$$\cot\theta>0\quad,\quad\frac{\cot^2\theta}{(1+\cot\theta)^2}<1$$

,　$\{S_n\}$ **是以** $\dfrac{a^2\cot^2\theta}{(1+\cot\theta)^2}$ **为首项,** $\dfrac{\cot^2\theta}{(1+\cot\theta)^2}$ **为公比的等比数列,**

,　**所有正方形面积的和为** $\dfrac{\dfrac{a^2\cot^2\theta}{(1+\cot\theta)^2}}{1-\dfrac{\cot^2\theta}{(1+\cot\theta)^2}}$,**即** $\dfrac{a^2\cot^2\theta}{1+2\cot\theta}$。

由题设可知, $\dfrac{a^2\cot^2\theta}{1+2\cot\theta}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}a^2\cot\theta$

, $\cot\theta=\frac{1}{2}$,

, $\theta=\operatorname{arccot}\frac{1}{2}$, $BC=\frac{1}{2}a$,

, $\angle B=\operatorname{arccot}\frac{1}{2}$, $AB=\frac{\sqrt{5}}{2}a$。

练 习 题

1. 求$\lim\limits_{n\to}\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$。

2. 首项为 1,公比为 $q(q>0)$ 的无穷等比数列的前 n 项和为 S_n,求$\lim\limits_{n\to}\frac{S_n}{S_{n+1}}$。

3. 等腰$\triangle A_1A_2A_3$ 中(见图 4 - 5),顶角 $A^1=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$,$A_1A_2=2$。在 A_1A_3 上取 A_4,使$\angle A_3A_2A_4=\alpha$,在 A_2A_4 上取 A_5,使$\angle A_4A_3A_5=\alpha$,在 A_3A_5 上取 A_6,使$\angle A_5A_4A_6=\alpha$,…,如此继续下去。顺次得到点 A_4,A_5,A_6,…,A_n,…,记 $x_n=A_nA_{n+1}(n\in N)$,求 $x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots$。

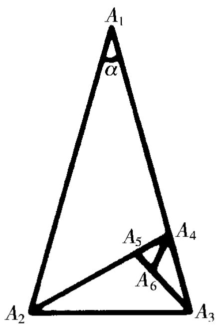


图 4 - 4

五、数学归纳法

数学归纳法是一种证明与自然数有关的命题的重要方法,其步骤是:

(1)是证明命题成立的递推基础;

(2)是证明命题成立的递推依据;

(3)是证明命题成立的实际推理过程。

（一）与自然数 n 相关的命题常可用数学归纳法证明。

例 1　是否存在常数 a、b、c 使得等式

$$1.2^2+2.3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$$ **对一切自然数 n 都成立？并证明你的结论。**

解法一　　$n(n+1)^2=n^3+2n^2+n$

$$S_n=1.2^2+2.3^2+n(n+1)^2$$
$$=(1^3+2^3+\cdots+n^3)$$
$$+2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots n)$$

由于下列等式对一切自然数 n 成立：

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

由此可知，$Sn=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

$$+\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)。$$

综上所述，当 $a=3$，$b=11$，$c=10$ **时，等式对一切自然数都成立。**

证法二　在等式中，

令　$n=1$ **得，**$4=\frac{1}{6}(a+b+c)$，

令　$n=2$ **得，**$22=\frac{1}{2}(4a+2b+c)$，

令　$n=3$ **得，**$70=9a+3b+c$，

经整理得$\begin{cases}a+b+c=24,\\4a+2b+c=44,\\9a+3b+c=70。\end{cases}$

解得，$a=3$，$b=11$，$c=10$。

下面用数学归纳法证明以下等式成立：

$$1.2^2+2.3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)。$$

(1)当 $n=1$ 时，等式显然成立。

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1)$ 时等式成立，即

$$1.2^2+2.3^2+\cdots+k(k+1)^2=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)\text{成立。}$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$1.2^2+2.3+\cdots+k(k+1)^2+(k+1)(k+2)^2$$

$$=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)+(k+1)(k+2)^2$$

$$=\frac{k(k+1)}{12}(k+2)(3k+5)+(k+1)(k+2)^2$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+5k+12k+24)$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10]。$$

, 当 $n=k+1$ 时，等式也成立。

由(1)和(2)可知，对于任意的自然数 n 等式都成立。

, 存在 $a=3$，$b=11$，$c=10$，等式对一切自然数都成立。

(二)用数学归纳法证明命题成立，自然数 n 的初始值不一定取 1。

例 2　已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$，求证：$a_n<\frac{1}{n}$。

证明　先证明 $n=1$ 时，命题正确。

$$a_1^2\leqslant a_1-a_2,$$

, $$a_2\leqslant a_1-a_1^2=a_1(1-a_1),$$

$$a_1>0, a_2>0,$$

, $$a_1(1-a_1)>0, 1-a_1>0, a_1<1,$$

,　　$n=1$ 时命题正确。

下面用数学归纳法证明 $n \geqslant 2$ 时,命题正确。

(1)当 $n=2$ 时,$a_2 \leqslant a_1 - a_1^2$,$(0<a_1<1)$,

由 $a_1 - a_1^2 \leqslant \frac{1}{4}$ 知,$a_2 \leqslant \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$,

,　　$n=2$ 时,命题正确。

(2)假设 $n=k(k \geqslant 2)$ 时,命题正确,即 $a_k < \frac{1}{4}$,

那么,当 $n=k+1$ 时,$a_k^2 < a_k - a_{k+1}$,

,　　$$a_{k+1} \leqslant a_k - a_k^2。$$

$$0<a_k<\frac{1}{k},且\left(0,\frac{1}{k}\right) \subset \left(0,\frac{1}{2}\right],$$

,　　$$a_k - a_k^2 < \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k^2} < \frac{1}{k+1},$$

,　　$$a_{k+1} < \frac{1}{k+1}。$$

,　　当 $n=k+1$ 时,命题正确。

综上所述,对于任意的 $n \in N$ 命题正确。

说明　若取 $n=1$ 为初始值,则由假设 $n=k$ 时命题成立推证 $n=k+1$ 时命题成立的过程,对 $k=1$ 不成立,因此,初始值必须取 $n=2$。

(三)在关于自然数 n 的命题的表达式中,n 是变量。

例 3　用数学归纳法证明 $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)\ (n \in N)$

证明　(1)当 $n=1$ 时,左边 $=1+1=2$,右边 $=2^1 \cdot 1=2$,

,　　$n=1$ 时,等式成立。

(2)假设 $n=k(k \geqslant 1)$ 时,等式成立,

即　$(k+1)(k+2)\cdots(k+k)=2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$,

那么,当 $n=k+1$ 时,

左边 $=[(k+1)+1][(k+1)+2]\cdots$

$[(k+1)+k-1] \cdot [(k+1)+k] \cdot [(k+1)+k+1]$

$= (k+2)(k+3)\cdots(k+k)(2k+1)(2k+2)$

$= [(k+1)(k+2)\cdots(k+k)]\cdot 2(k+1)$

$= 2^k\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-1)\cdot 2(2k+1)$

$= 2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdots[2(k+1)-3][2(k+1)-1]$

= **右边。**

, $n=k+1$ **时,等式成立。**

由(1)**和**(2)**可知,对于任意的** $n\in N$**,等式都成立。**

说明　在被证的等式$(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)$**中,**$n$ **为变量,在证明过程中,**n **必须用相应的取值代入,分别得要证的等式和假设成立的等式。**

(四)用数学归纳法证明命题成立,由假设 $n=k$ **时命题成立推证** $n=k+1$ **时命题成立的过程中必须用归纳假设,否则证明方法就不是数学归纳法,因此在** $n=k+1$ **时,必须凑出一个** $n=k$ **时的归纳假设形式,以便于使用归纳假设。**

例 4　**求证** $1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\cdot(n\in N)$

证明　(1)**当** $n=1$ **时,左边** $=1\cdot 1=1$**,右边** $=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$**,**

, $n=1$ **时,等式成立。**

(2)**假设** $n=k(k\geqslant 1)$**时,等式成立,**

即　$1\cdot k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k\cdot 1=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$**,**

那么,当 $n=k+1$ **时,**

左边 $=1\cdot(k+1)+2[(k+1)-1]$

$+3[(k+1)-2]+\cdots+(k+1)\cdot 1$

$=1\cdot(k+1)+2\cdot k+3(k-1)\cdots(k+1)\cdot 1$

$=1\cdot k+1+2(k-1)+2+3(k-2)+3+\cdots$

$$+k\cdot 1+k+k+1$$

$$=[1\cdot k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k\cdot 1]$$

$$+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]$$

= **右边。**

, **当** $n=k+1$ **时,等式成立,**

由(1)**和**(2)**可知,对于任意的** $n\in N$**,等式都成立。**

说明 **在证明当** $n=k+1$ **时命题成立的过程中,先给左边凑出"一个归纳假设的左边",为用归纳假设创造了条件。**

例 5 **若** $n\in N$**,试证明**$(3n+1)\cdot 7^n-1$ **能被** 9 **整除。**

证明 (1)**当** $n=1$ **时,**$(3\times 1+1)\cdot 7^1-1=27$**,显然能被** 9 **整除。**

, $n=1$ **时,命题成立。**

(2)**假设** $n=k(k\geqslant 1)$**时,命题成立,即**$(3k+1)\cdot 7^k-1$ **能被** 9 **整除,那么,当** $n=k+1$ **时,**

$$[3(k+1)+1]\cdot 7^{k+1}-1$$

$$=[3(k+1)]\cdot 7^k-1)+9(2k+3)\cdot 7^k$$

由归纳假设可知,$(3k+1)\cdot 7^k-1$ **能被** 9 **整除,显然** $9(2k+3)\cdot 7^k$ **能被** 9 **整除,故**$[3(k+1)+1]\cdot 7^{k+1}-1$ **能被** 9 **整除,**

, $n=k+1$ **时,命题成立。**

由(1)**和**(2)**可知,对于任意的** $n\in N$**,**$(3n+1)\cdot 7^n-1$ **能被** 9 **整除。**

例 6 **设** $a_i>0$**,**$i=1$**,**2**,**$\cdots$**,**n **且** $a_1a_2\cdots a_n=1$**,求证:**$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n$**。**

证明 (1)**当** $n=1$ **时,**$a_1=1$**,**

左边 $=1+a_1=1+1=2$,右边 $=2$,

, $n=1$ 时,命题成立。

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1)$ 时,命题成立,

即 $a_1a_2\cdots a_k=1$ 时,$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)\geqslant 2^k$。

当 $n=k+1$ 时,不失一般性,设 $a_k\geqslant 1$,$a_{k+1}\leqslant 1$,

则 $(1-a_k)(1-a_{k+1})\leqslant 0$,即 $1-a_k-a_{k+1}+a_ka_{k+1}\leqslant 0$,

, $a_k+a_{k+1}\geqslant 1+a_ka_{k+1}$,

且 $(1+a_k)(1+a_{k+1})$

$=1+a_ka_{k+1}+a_k+a_{k+1}$

$\geqslant 2(1+a_ka_{k+1})$,

, $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$

$\geqslant 2(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})(1+a_ka_{k+1})$,

$a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_{k+1}=1$,

, $a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_ka_{k+1})=1$,

, $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})(1+a_ka_{k+1})\geqslant 2^k$,

, $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})\geqslant 2\cdot 2^k=2^{k+1}$,

, 当 $n=k+1$ 时,命题成立。

由(1)和(2)可知,对于任意的 $n\in N$,命题都成立。

说明　在证明当 $n=k+1$ 时命题成立的过程中,先将 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})$ 缩为 $2(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})(1+a_ka_{k+1})$,为用归纳假设创造了条件。

(五)用数学归纳法证明命题成立,必须明确第(1)步和第(2)步的证明目标、要求,并且要注意到,两步的思想方法可互相渗透。

例 7　设 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,当 $n\geqslant 2$,$n\in N$ 时,用数学归纳法证明 $n+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=nf(n)$。

证明　(1)当 $n=2$ 时,左边 $=2+f(1)=3$,右边 $=2f(2)=2(1+1/2)=3$,

, 当 $n=2$ 时,等式成立。

(2)假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时,等式成立,

即 $k+f(1)+f(2)+\cdots+f(k-1)=kf(k)$,那么,$n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= k+1+f(1)+f(2)+f(2)+\cdots+f(k)\\
&= [k+f(1)+f(2)+\cdots+f(k-1)]+f(k)+1\\
&= kf(k)+f(k)+1\\
&= (k+1)f(k)+1
\end{aligned}
$$

右边 $=(k+1)f(k+1)$。

下面证明‘左边 = 右边”:

方法(一) 左边 $=(k+1)f(k)+(k+1)\dfrac{1}{k+1}$

$$
\begin{aligned}
&= (k+1)[f(k)+\frac{1}{k+1}]\\
&= (k+1)f(k+1)\\
&= \text{右边。}
\end{aligned}
$$

方法(二) 左边 - 右边

$$
\begin{aligned}
&= [(k+1)f(k)+1]-(k+1)f(k+1)\\
&= 1-(k+1)[f(k+1)-f(k)]\\
&= 1-(k+1)\frac{1}{k+1}\\
&= 0\text{。}
\end{aligned}
$$

, 左边 = 右边

, 当 $n=k+1$ 时,等式成立。

由(1)和(2)可知,对于 $n\geqslant(n\in N)$,等式都成立。

例 8 已知数列 $\{a_n\}$ 中,$0<a_n<1(n\in N)$,设它的前 n 项和 S_n,前 n 项积为 Q_n,求证:当 $n>1$ 时,有 $Q_n>S_n+1-n$。

证明 (1)当 $n=2$ 时,左边 $=Q_2=a_1a_2$,右边 $=S_2+1-2=a_1+a_2-1$,

左边 - 右边

$$
=a_1a_2-(a_1+a_2-1)
$$

$$=(a_1-1)(a_2-1)$$

$$>0,(0<a_1,a_2<1)$$

, 左边 $>$ 右边,故 $n=2$ 时不等式成立。

(2)假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时不等式成立,即 $Q_k>S_k+1-k$,那么,当 $n=k+1$ 时,

$$0<a_p,a_q<1,$$

, $a_pa_q-(a_p+a_q-1)=(a_p-1)(a_q-1)>0$,

, $a_pa_q>a_p+a_q-1$。

$$\begin{aligned}
Q_{k+1}&=Q_ka_{k+1}\\
&>(S_k+1-k)a_{k+1}\\
&=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1}+a_{k+1}-ka_{k-1}\\
&>(a_1+a_{k+1}-1)+(a_2+a_{k+1}-1)+\cdots\\
&\quad+(a_k+a_{k+1}-1)+a_{k+1}-ka_{k+1}\\
&=a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}-k\\
&=S_{k+1}+1-(k+1)。
\end{aligned}$$

, 当 $n=k+1$ 时,不等式也成立。

由(1)和(2)可知,对任意 $n>1(n\in N)$,不等式成立。

说明 用数学归纳法证明命题成立,第(2)步往往处理较难,这时往往第(1)步的推理思想方法对第(2)步会有所启发。本例的第(2)步证明就采用了第(1)步的思想方法。

(六)计算、归纳猜想、证明是获取定理的一种手段。由特殊到一般的归纳并不是逻辑推理,仅是提供了一种可能的结论,必须通过严格的论证才能确认。在计算时,既要观察和分析计算所得“数据”的特征,又要分析获得“数据”的过程的规律,以便为严格论证提供相应的思想方法。

例 9 在正项数列 $\{a_n\}$ 中,$S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n\in N)$,求 S_n。

解 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{a}{a_1}\right)$,$a_1^2=1$,

, $a_1=1$,$S_1=1$,

当 $n=2$ 时，$a_2=S_2-S_1=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)-1$，$a_2^2+2a_2-1=0$，

$$a_2=\sqrt{2}-1,\ S_2=S_1+a_2=\sqrt{2};$$

当 $n=3$ 时，$a_3=S_3-S_2=\frac{1}{2}\left(a_3+\frac{1}{a_3}\right)-\sqrt{2}$，$a_3^2+2\sqrt{2}a_3-1=0$，

$$a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2},\ S_3=S_2+a_3=\sqrt{3};$$

由以上可以猜测 $S_n=\sqrt{n}$。

下面用数学归纳法加以证明：

(1)当 $n=1$ 时，结论显然成立。

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1)$ 时，结论成立，即 $S_k=\sqrt{k}$，那么当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)-\sqrt{k}$$

$$a_{k+1}^2+2\sqrt{k}a_{k+1}-1=0,$$

$$a_{k+1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k},$$

, $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})-\sqrt{k}=\sqrt{k+1}$，

, 当 $n=k+1$ 时，结论成立。

由(1)和(2)可知，对于任意 $n\in N$，结论都成立，

即 $S_n=\sqrt{n}$。

说明　由数学归纳法的证明可以发现，由假设 $n=k$ 时结论成立推证 $n=k+1$ 时结论成立的方式与猜想的计算方式完全相同。这就是说，要注意从猜想的计算过程中寻找递推规律，以便在数学归纳法证明过程中应用。

本例还可以用下列方法求解：

$$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$

, 当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right]\right.$

$$S_n + S_{n-1} = \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$$

$$S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1,$$

$$S_1^2 = 1,$$

，　　$\{S_n^2\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，故 $S_n^2 = n$，

$$S_n = \sqrt{n}。$$

练 习 题

1. 用数学归纳法证明 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$。

2. 用数学归纳法证明 $a^n - nab^{n-1} + (n-1)b^n$ 能被 $(a-b)^2$ 整除。

3. 已知 $0 < a < 1$，数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1 + a$，$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a$ ($\in N$)，求证：$1 < a_n < \frac{1}{1-a}$。

4. 设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列，对于任何自然数 n，a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

第五章　复　　数

一、复数运算的形式选择

复数常用字母 z 表示，复数具有代数、三角等表达形式，并通过这些不同的形式与代数、三角等有关知识建立联系，互相呼应、互相转化。由于复数的各种形式各有所长，因此，根据问题条件的特点，选择复数的形式就为解复数问题的繁简起了定向作用。一般地说，优先考虑就复数 z 的形式求解。若设 $z = x + yi$ (x、$y \in R$) 所得到的关于 x、y 的表达式比较简洁，次数较低，则可选用代数形式求解;若问题与复数的模或辐角有关，或具有三角背景，则可选用三角形式求解。

例 1　设 $z = a + bi$ (a、$b \in R$) ，若 $\dfrac{z}{1+z^2} \in R$ ，则 a、b 应满足什么条件？并说明理由。

解法一　考虑到 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 有意义，$z^2 \neq -1$ ，即 $z \neq \pm i$。

,　　$a = 0$ 时，$b \neq \pm 1$。

$$\begin{aligned}\frac{z}{1+z^2} &= \frac{a+bi}{a^2-b^2+1+2abi}\\ &= \frac{(a+bi)[(a^2-b^2+1)-2abi]}{(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2}\\ &= \frac{a(a^2+b^2+1)-b(a^2+b^2-1)i}{(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2}\end{aligned}$$

又
$$\frac{z}{1+z^2} \in R,$$

,　　$a^2 + b^2 = 1$ 或 $b = 0$。

综上所述,$a^2+b^2=1(a\neq0)$**或** $b=0$。

解法二　考虑到$\frac{a}{1+z^2}$**有意义**,$z^2\neq-1$,**即** $z\neq\pm i$。

$$\frac{z}{1+z^2}\in R,$$

, $$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)},$$

$$z[1+(\bar{z})^2]=\bar{z}(1+z^2)$$

$$(z-\bar{z})-z\bar{z}(z-\bar{z})=0,$$

$$(z-\bar{z})(1-z\bar{z})=0,$$

,　$z=\bar{z}$**或** $z\bar{z}=1$,

,　$z\in R$ **或** $z\bar{z}=1$,

,　$b=0$ **或** $a^2+b^2=1$。

综上所述,$a^2+b^2=1(a\neq0)$**或** $b=0$。

例 2　**已知**$|z|=1$,**且** $z^2+2z+\frac{1}{z}$**是负实数**,**求** z。

解法一　设 $z=a+bi(a、b\in R)$,

$$|z|=1,$$

, $$a^2+b^2=1。$$

$$z^2+2z+\frac{1}{z}$$

$$=(a+bi)^2+2(a+bi)+\frac{1}{a+bi}$$

$$=(a^2-b^2+3a)+(2ab+b)i。$$

$$\begin{cases}2ab+b=0,\\a^2-b^2+3a<0。\end{cases}$$

, $$\begin{cases}a^2+b^2=1,\\2ab+b=0,\\a^2-b^2+3a<0。\end{cases}$$

,　$a=-1$,$b=0$ **或** $a=\frac{-1}{2}$,$b=-\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

, $z=-1$ 或 $z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

解法二 记 $u=z^2+2z+\frac{1}{z}$,由 $u\in R$ 知,$u=\bar{u}$,

, $$z^2+2z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z^2+2z+\frac{1}{z}\right)},$$

$$(z-\bar{z}(z+\bar{z}+1)=0,$$

, $z=\bar{z}$或 $z+\bar{z}=-1$。

若 $z=\bar{z}$,则 $z\in R$。

$|z|=1$,

, $z=\pm1$,

$z^2+2z+\frac{1}{z}<0$,

取 $z=-1$。

若 $z+\bar{z}=-1$,

令 $z=a+bi$,(a、$b\in R$)

则 $2a=-1$,$a=-\frac{1}{2}$,

, $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

, $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z^2+2z+\frac{1}{z}<0$,

, $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 可取。

综上所述,$z=-1$ 或 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

例 3 已知复数 z_1、z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=1$,且 $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$,求 $|z_1-z_2|$ 的值。

解法一 设 $z_1=x_1+y_1i$,$z_2=x_2+y_2i$,(x_1、y_1、x_2、$y_2\in R$)

则 $\begin{cases} x_1{}^2 + y_1{}^2 = 1, \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 = 1, \\ (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 2。 \end{cases}$

, $x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$

, $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2,$

, $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$。

解法二 $|z_1| = 1, |z_2| = 1,$

, $z_1\bar{z} = 1, z_2\bar{z_2} = 1$。

$|z_1 + z_2| = \sqrt{2},$

, $(z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2}) = 2,$

$z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2} + z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 = 2,$

, $z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2 = 0,$

, $(z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2}) - (z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2) = 2,$

, $(z_1 - z_2)(\bar{z_1} - \bar{z_2}) = 2,$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$。

解法三 **设** $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, z_2 = \cos\beta + i\sin\beta,$

, $|z_1 + z_2| = \sqrt{2},$

, $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 2,$

$\cos(\alpha - \beta) = 0$。

, $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2$。

, $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$。

说明 **本例也可以用复数加减运算的几何意义求解。**

例 4 **求满足条件** $z^2 = \bar{z}$**的复数** z。

解法一 **设** $z = x + yi(x, y \in R)$**,则由** $z^2 = \bar{z}$**可得**,$x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$,

由复数相等的定义可得 $\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ 2xy = -y。 \end{cases}$

若 $y = 0$**,则** $x = 0$ **或** $x = 1$**;**

若 $x=-\frac{1}{2}$,则 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

2‖,

$$\begin{cases}x=0,\\y=0;\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=0;\end{cases}\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=\frac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=-\frac{\sqrt{3}}{2}。\end{cases}$$

, $z=0$ 或 $z=1$ 或 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

解法二　设 $z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)(\gamma\geqslant0,\theta\in R)$,则由 $z^2=\bar{z}$可得,

$$\gamma^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=\gamma(\cos\theta-i\sin\theta)$$

由复数相等定义可得, $\begin{cases}\gamma^2\cos2\theta=\gamma\cos\theta,\\\gamma^2\sin2\theta=-\gamma\sin\theta。\end{cases}$

若 $\gamma=0$,则 $z=0$;

若 $\gamma\neq0$,则$\begin{cases}\gamma\cos2\theta=\cos\theta,\\\gamma\sin2\theta=-\sin\theta。\end{cases}$

, $\gamma^2(\cos^22\theta+\sin^22\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$\gamma^2=1$,

, $\gamma>0$,

, $\gamma=1$,

$$\begin{cases}\cos2\theta=\cos\theta,\\\sin2\theta=\sin\theta,\end{cases}即\begin{cases}1-2\sin^2\theta=\cos\theta,\\2\sin\theta c\cos=-\sin\theta。\end{cases}$$

, $\sin\theta=0$ 或 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$。

若 $\sin\theta=0$,则 $\cos0=1$,

, $z=1$,

若 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$,则 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

, $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

综上所述，$z=0$ **或** $z=1$ **或** $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **或** $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

解法三 $z^2=\bar{z}$，

, $|z^2|=|\bar{z}|$，**即** $|z|^2=|z|$，

, $|z|=0$ **或** $|z|=1$。

若 $|z|=0$，**则** $z=0$；

若 $|z|=1$，**则在方程** $z^2=\bar{z}$**的两边都乘以** z **可得**，$z^3=1$，

, $(z-1)(z^2+z+1)=0$

, $z=1$ **或** $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

综上所述，$z=0$ **或** $z=1$ **或** $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **或** $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

解法四 $z^2=\bar{z}$，

, $|z^2|=|\bar{z}|$，**即** $|z^2|=|z|$，

, $|z|=0$ **或** $|I|=1$。

若 $|z|=0$，**则** $z=0$；

若 $|z|=1$，**则可设** $z=\cos\theta+i\sin\theta$，

, $\cos2\theta+i\sin2\theta=\cos\theta-i\sin\theta$。

由复数相等的定义可得 $\begin{cases}\cos2\theta=\cos\theta,\\ \sin2\theta=-\sin\theta。\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\sin\theta=0,\\ \cos\theta=1\end{cases}$；$\begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\theta=-\frac{1}{2}\end{cases}$；$\begin{cases}\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\theta=-\frac{1}{2}\end{cases}$。

, $z=1$ **或** $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **或** $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

综上所述，$z=0$ **或** $z=1$ **或** $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **或** $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

说明　从以上解法可知，用复数的代数形式运算，容易上手，

运算规范,是通法。用复数的三角形式运算,求 ɣ 和 $\cos\theta$,$\sin\theta$ 的值较繁。就复数 z 的形式求解,解题过程简洁利落。

例 5 若 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$,且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$,则在复平面内复数 z_1、z_2、z_3 所对应的点 Z_1、Z_2、Z_3 为一个正三角形的三个顶点。

证法一 由平行四边形的性质可得,$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$,

, $|z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 + z_2|^2)$,

$z_1 + z_2 + z_3 = 0$,

, $z_1 + z_2 = - z_3$,

, $|z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_3|^2$,

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$,

, $|z_1 - z_2|^2 = 3$,

, $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$,即 $|Z_1Z_2| = \sqrt{3}$。

同理可证 $|Z_2Z_3| = \sqrt{3}$,$|Z_3Z_1| = \sqrt{3}$,

, $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为一个正三角形。

证法二 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$,

, $z_1 + z_2 = - z_3$,$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = - \bar{z}_3$,

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_3\bar{z}_3,$$

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_3\bar{z}_3,$$

$|z_1| = |z_2| = |z_3|$,

, $z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$,

, $2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 1$,

, $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = - 1$。

, $|Z_1Z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$

$$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$$

$$= 3。$$

, $|Z_1Z_2| = \sqrt{3}$,

同理可证$|Z_2Z_3|=|Z_3Z_1|=\sqrt{3}$，

, $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为一个正三角形。

证法三　由$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ 可设 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=\cos\beta+i\sin\beta$，$z_3=\cos\gamma+i\sin\gamma$，

$$z_1+z_2+z_3=0，$$

, $$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+i(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0，$$

, $$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0，\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0。\end{cases}$$

, $$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma，\\ \sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma。\end{cases}$$

两式两边平方相加可得，

, $2+2\cos(\alpha-\beta)=1$，$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{2}$，即 $\cos\angle Z_1OZ_2=-\dfrac{1}{2}$，

, $$|Z_1Z_2|^2=|OZ_1|^2+|OZ_2|^2-2|OZ_1||OZ_2|\cdot\cos\angle Z_1OZ_2|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cdot\cos(\alpha-\beta)=3，$$

, $|Z_1Z_2|=\sqrt{3}$，

同理可得，　$|Z_2Z_3|=\sqrt{3}$，$|Z_3Z_1|=\sqrt{3}$，

, $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为一个正三角形。

例 6　复数 z 满足$|z|=1$，求$|2z^2-z+1|$的最大值、最小值。

解法一　　$|z|=1$，

, $$z\bar{z}=1。$$

, $$\begin{aligned}|2z^2-z+1|&=|2z^2-z+z\bar{z}|\\&=|z(2z-1+\bar{z})|\\&=|2z-1+\bar{z}|。\end{aligned}$$

令　$z=x+yi(x,y\in R)$，

则　$x^2+y^2=1$。

, $$|2z-z+1|=|(3x-1)+yi|$$

$$= \sqrt{(3x-1)^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(3x-1)^2+(1-x^2)}$$

$$= \sqrt{8x^2-6x+2}\quad x \in [-1,1]。$$

, $\qquad |2z^2-z+1|_{max} = \sqrt{14}\,(x=-1)$,

$$|2z^2-z+1|_{min} = \frac{\sqrt{14}}{4}\left(x=\frac{3}{8}\right)。$$

解法二 $\qquad |z|=1$,

, $\quad z\bar{z}=1$。

同解法一可得, $\quad |2Z^2-z+1| = |2z-1+\bar{z}|$。

令 $\qquad z = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\theta \in R)$,

则 $\qquad |2z^2-z+1| = |2(\cos\theta+i\sin\theta) - 1 + (\cos\theta - i\sin\theta)|$

$$= |(3\cos\theta-1)+i\sin\theta|$$

$$= \sqrt{(3\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{8\cos^2\theta-6\cos\theta+2}$$

$\cos\theta \in [-1,1]$,

, $\qquad |2z^2-z+1|_{max} = \sqrt{14}\,(\cos\theta=-1)$,

$$|2z^2-z+1|_{min} = \frac{\sqrt{14}}{4}\left(\cos\theta=\frac{3}{8}\right)。$$

说明 **由本例的解法可知,综合应用复数的表示形式可简化解题运算。**

练 习 题

1. **已知** $z=\cos\alpha+i(1-\sin\alpha)$,$u=z^2-2iz$,**求复数** u **在复平面上所对应的点的轨迹。**

2. **若** $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\gamma$,**求** $\left|\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|$ **的值。**

3. 已知$|z_1|=3$,$|z_2|=5$,$|z_1-z_2|=7$,求$\frac{z_1}{z_2}$。

4. 复数z_1,z_2,z_3的辐角分别为α,β,γ,又$|z|_1=1$,$|z_2|=k$,$|z_3|=2-k$,且$z_1+z_2+z_3=0$,问k为何值时,$\cos(\beta-\gamma)$分别取得最大值和最小值,并分别求出最大值和最小值。

二、变复数的代数表示和几何表示

复数是二元数,确定的一个复数($a+bi(a,b\in R)$,$r(\cos\theta+i\sin\theta)(r\geqslant 0)$)有其相应确定的实部a和虚部b或有其相应的模r和辐角θ,其相应的几何表示形式就是复平面上确定的点(a,b)和向量。

变化的复数($x+yi(x,y\in R)$,$r(\cos\theta+i\sin\theta)(r\geqslant 0)$)有其相应变化的实部x和虚部y或有其相应变化的模r和辐角θ,其几何表示形式就是复平面上的动点(x,y)和变化的向量。

必须注意到,变化的复数的代数表示形式有下列几种方式:

(1)复数方程,即$f(z)=0$;

(2)$f(x,y)=0$,即复数的实部和虚部的关系等式;

(3)$f(r,\theta)=0$,即复数的模和辐角的关系等式。

由此可知,复数问题求解可以从代数、三角、几何等方面入手,并且,由变复数的代数表示形式给出的变量关系等式是复数问题求解的基础。

例1 在复平面内,已知等边△ABC的两个顶点A、B表示的复数分别为$1-i$和$3+3i$,求点C所表示的复数。

分析 在题设条件下,点C是确定的(有两解)。

解 由题设可知,向量OA、OB分别表示复数$1-i$和$3+3i$,因此向量AB表示复数$(3+3i)-(1-i)$,即$2+4i$。

由△ABC为等边三角形可知,将向量AB绕A点旋转$\frac{\pi}{3}$得向量AC,

, 向量AC表示的复数为

$(2+4i)(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$或$(2+4i)[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$,

, 点 C 所表示的复数为$1-i+(2+4i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$或$1-i+(2+4i)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$,即$(2-2\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$或$(2+2\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$。

例 2 在复平面上,设 P、Q 两点所表示的复数分别为 z_0 和 $2z_0+3-4i$,当 P 点在以原点为圆心,r 为半径的圆上运动时,求 Q 点的轨迹。

分析 复平面内,动点的轨迹的代数形式常表示为动点表示的变复数 z 的关系式或动点表示的变复数的实部 x 和虚部 y 的关系等式。

解法一 设动点 Q 对应的复数为 z,则 $z=2z_0+3-4i$,

, $2z_0=z-(3-4i)$。

动点 P 在以原点为圆心,r 为半径的圆上,

, $|z_0|=r$

, $|z-(3-4i)|=2r$,

, Q 点的轨迹为以复数 $3-4i$ 对应的点为圆心,2r 为半径的圆。

解法二 设 Q 点表示的复数为 $x+yi(x,y\in R)$,P 点表示的复数为 $x_0+y_0i(x_0,y_0\in R)$,则由题设可知,$x+yi=2(x_0+y_0i)+(3-4i)$,

$$x_0=\frac{x-3}{2},y_0=\frac{y+4}{2}$$

P 点在以原点为圆心,r 为半径的圆上,

, $x_0^2+y_0^2=r^2$,$(\frac{x-3}{2})^2+(\frac{y+4}{2})^2=r^2$,

即 $(x-3)^2+(y+4)^2=(2r)^2$。

, Q 点的轨迹为以点$(3,-4)$为圆心,$2r$为半径的圆。

说明 本例采用的就是解析几何中求轨迹的方法之一——代入法。复数$2z_0+3-4i$的几何意义就是将复数z_0表示的以原点为圆心,r为半径的圆的半径扩大为原来的2倍,再将所得圆向右移3个单位,向下移4个单位所得的圆。

例3 设复数$z=\cos\theta+i\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,$\omega=1+z+z^2$,求:

(1)$|w|$的取值范围;

(2)复数ω的辐角主值$\arg\omega$。

分析 本例中,复数z的辐角θ是变化的,复数ω也是变化的,且其模$|\omega|$ 和辐角$\arg\omega$都是θ的函数。

解 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,$\omega=1+z+z^2$,

, $\omega=(1+\cos\theta+\cos2\theta)+(\sin\theta+\sin2\theta)i$

$=(1+2\cos\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$。

(1)$|\omega|=|1+2\cos\theta|$,

$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,, $0\leqslant|\omega|\leqslant3$。

(2)$\omega=(1+2\cos\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$,

① 若$1+2\cos\theta>0$,即$0\leqslant\theta<\dfrac{2\pi}{3}$,则$\arg\omega=\theta$;

② 若$1+2\cos\theta=0$,即$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$,则$\arg\omega$可取$[0,2\pi)$内的任意值;

③ 若$1+2\cos\theta<0$,即$\dfrac{2\pi}{3}<\theta\leqslant\pi$,

则 $\omega=-(1+2\cos\theta)[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$,

若$\dfrac{2\pi}{3}<\theta<\pi$,则$\arg\omega=\pi+\theta$;

若$\theta=\pi$,则$\arg\omega=0$。

例4 已知复数z_1和z_2满足下列两个条件:(1)$z_1+z_2+3=0$;(2)$|z_1|$、2、$|z_2|$成等差数列,试问$\cos(\arg z_1+\arg z_2)$是否有最大值?如果有,把它求出来,如果没有,试说明理由。

分析 本例中,复数z_1和z_2都是变化的,题设中的两个条件

即给出了这两个复数的模和辐角的制约关系,由此建立 $\cos(\arg z_1+\arg z_2)$ 的目标函数,即可讨论其最值情况。

解 设 $|z_1|=r$,则由题设知 $|z_2|=4-r$,$(0\leqslant r\leqslant 4)$,设 $\arg z_1=\theta_1$,$\arg z_2=\theta_2$,则 $z_1=r(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,$z_2=(4-r)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$。

$$z_1+z_2+3=0,$$

, $$r(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+(4-r)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)+3=0$$

$$\begin{cases} r\cos\theta_1+(4-r)\cos\theta_2=-3, \\ r\sin\theta_1+(4-r)\sin\theta_2=0。\end{cases}$$ 平方相加可得,

$$\cos(\theta_1-\theta_2)=\frac{2r^2-8r+7}{2r(r-4)}$$

$$=1+\frac{7}{2(r-2)^2-8},$$

$$|\cos(\theta_1-\theta_2)|\leqslant 1,, \quad \frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{7}{2}。$$

, 当 $r=2$ 时,$\cos(\theta_1-\theta_2)$ 取最大值 $\frac{1}{8}$,即 $\cos(\arg z_1+\arg z_2)$ 在 $r=2$ 时有最大值 $\frac{1}{8}$。

例 5 复平面内两点 A、B 分别对应复数 α、β,且 $\beta+(1+i)\alpha=0$,$|\alpha-2+i|=1$,求 $\triangle AOB$ 的面积的最大值和最小值。

分析 本例中,复数 α、β 是变化的。等式 $|\alpha-2+i|=1$ 是关于变复数 α 的一个方程,其表示的变复数 α 对应的点的轨迹是一个以 $(2,-1)$ 为圆心,1 为半径的圆,等式 $\beta+(1+i)\alpha=0$ 给出了两个变复数的制约关系:表示复数 β 的向量可以由表示复数 α 的向量逆时针旋转 $\frac{5\pi}{4}$(或顺时针旋转 $\frac{3\pi}{4}$)并将模扩大为 $\sqrt{2}$ 倍而得到(见图 5-1)。

解 $$|\alpha-2+i|=1,$$

, 点 A 为以 $(2,-1)$ 为圆心,1 为半径的圆上的动点,

$$|OA|_{max}=\sqrt{5}+1, \ |OA|_{max}=\sqrt{5}-1。$$

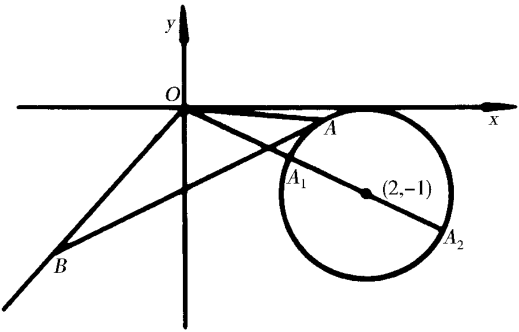


图 5 - 1

$$\beta+(1+i)\alpha=0,|OB|=\sqrt{2}|OA|,\angle AOB=\frac{3\pi}{4},$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}|OA|^2。$$

, $\triangle AOB$ 的面积的最大值和最小值分别为

$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)^2,\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)^2$,即 $3+\sqrt{5}$,$3-\sqrt{5}$。

例 6 已知复数 z 满足$\frac{z-2}{z^2+1}\in R$,且 $\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}$,求 z。

分析 题设给出了两个复数 z 的方程,因此,本例就是要求两个方程组成的方程组的解。同解实数方程组一样,将方程变形化简是解方程组的基本方法,复数方程的变形常可就复数 z 的形式变形,或用实数化的方法变形,也可以揭示方程表示的轨迹(曲线),用数形结合的方法求解。

解
$$\frac{z-2}{z^2+1}\in R,$$

$$\frac{z-2}{z^2+1}=\left(\overline{\frac{z-2}{z^2+1}}\right),$$

$$(z-2)[(\bar{z})^2+1]=(\bar{z}-2)(z^2+1),$$

$$(z-\bar{z})[z\bar{z}-2(z+\bar{z})-1]=0,$$

$$z-\bar{z}=0 \text{ 或 } z\bar{z}-2(z+\bar{z})-1=0。$$

$$(1)\begin{cases}z-\bar{z}=0,\\ \arg(z+1)=\dfrac{\pi}{4};\end{cases} \text{或}(2)\begin{cases}z\bar{z}-2(z+\bar{z})-1=0,\\ \arg(z+1)=\dfrac{\pi}{4}。\end{cases}$$

方法一　设 $z=x+yi$　　$(x,y\in R)$，

则方程组(1)化为$\begin{cases}y=0,\\ x+1=y\quad(x\geqslant -1)。\end{cases}$

,　　　　　　$x=-1,y=0$。,　　$z=-1$。

方程组(2)化为$\begin{cases}x^2+y^2-4x-1=0\\ x+1=y\quad(x\geqslant -1)\end{cases}$

$\begin{cases}x=0,\\ y=1;\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\ y=2。\end{cases}$

,　　$z=i$(经检验舍去)或 $z=1+2i$。

综上所述，$z=-1$ 或 $z=1+2i$。

方法二　由 $\arg(z+1)=\dfrac{\pi}{4}$可设 $z+1=k(1+i)$($k=0$ 或 $k\in R^+$)，即 $z=(k-1)+ki$。

则方程组(1)化为 $k=0$,,　$z=-1$。

方程组(2)化为$(k-1)^2+k^2-4(k-1)-1=0$，即 $k^2-3k+2=0$

,　　$k=1$ 或 $k=2$，

,　　$z=i$(经检验舍去)或 $z=1+2i$

综上所述，$z=-1$ 或 $z=1+2i$。

方法三　方程组可以化为$\begin{cases}z=\bar{z}\text{或}|z-2|=\sqrt{5},\\ \arg(z+1)=\dfrac{\pi}{4}。\end{cases}$

方程 $z=\bar{z}$表示实轴，方程$|z-2|=\sqrt{5}$表示以$(2,0)$为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆，方程 $\arg(z+1)=\dfrac{\pi}{4}$表示以点$(-1,0)$为端点，实轴

正方向到其的角为$\frac{\pi}{4}$的射线(见图 5 - 2)。

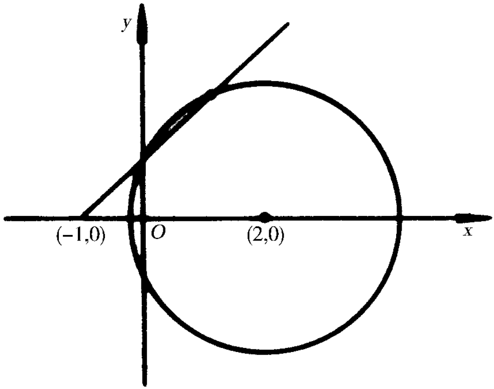


图 5 - 2

,　　所求的复数 z 为实轴(y = 0),圆($(x-2)^2+y^2=5$)与射线($y=x+1(x\geqslant-1)$)的交点对应的复数。

交点对应的复数为 - 1,i 和 1 + 2i,

经检验知,所求复数为 z = - 1 或 z = 1 + 2i。

说明　方法三实际上对方法一和二作出了几何解释,求曲线交点的坐标还需由方程组求解。

练 习 题

1. 已知复数 $z_1=\sqrt{3}+i$,$|z_2|=2$,且 $z_1\cdot z_2^2$ 是虚部为正数的纯虚数,求复数 z_2。

2. 已知复数 z 满足 $|z+\sqrt{3}-i|=1$,求:

(1) $|z|$ 的最大值及相应 z 的取值;

(2) $\arg z$ 的最小值及相应 z 的取值。

3. 设 $\arg(z-4)=\frac{5\pi}{6}$,求 $|z|$ 的最小值。

4. 满足 $z+\frac{5}{z}$是实数,且 z + 3 的辐角主值是$\frac{3\pi}{4}$的虚数 2 是否

存在？若存在，求出虚数 z，若不存在，说明理由。

5. **已知动点 P 在复平面上对应的复数为 $z=t+3+3\sqrt{3}i$，其中 t 是使 $\frac{t+3}{t-3}$ 为纯虚数的复数，求动点 P 在复平面上轨迹。**

第六章　排列、组合、二项式定理

一、两个基本原理是解排列、组合问题的依据

两个基本原理是在人们大量的实践经验基础上归纳抽象出来的基本规律,它是解排列、组合问题的基本依据。在解排列、组合问题时,必须首先弄清题设要完成的事,然后综合运用两个基本原理设计出恰当的完成这件事的程序。两个上基本原理是解排列、组合问题的灵魂。

例 1　3 封不同的信,有 4 个不同的信箱可供投递,共有多少种不同的投信方法?

分析　题设中要完成的事是:将 3 封不同的信投入 4 个不同的信箱。

第一种完成这件事的程序:第一步:投第一封信,第二步:投第二封信,第三步:投第三封信。

第二种完成这件事的程序:第一步:将三封信分堆,第二步:将信按堆投入信箱。

解法一　投第一封信有 4 种不同的投法,投第二封信有 4 种不同的投法,投第三封信也有 4 种不同的投法。

根据乘法原理,投信的方法共有:$4\times4\times4=64$(种)。

解法二　若将 3 封信分成一堆,则共有 1 种分堆方法,再将这堆信投入信箱有 P_4^1,即 4 种不同的方法;

若将 3 封信分成两堆,则有 C_3^2,即 3 种不同的分堆方法,再将这两堆信投入信箱有 P_4^2,即 12 种不同的方法,根据乘法原理共有 3×12,即 36 种不同的投法;

若将 3 封信分成三堆,则只有 1 种分堆的方法,再将这三堆信

投入信箱有 P_4^3，即 24 种不同的方法，根据乘法原理共有 1×24，即 24 种不同的投法。

再根据加法原理，投信的方法共有 $4+36+24$，即 64 种。

例 2　7 人排成一排，若其中 A 与 B，A 与 C 都不能相邻，有多少种不同的排法？

分析　题设中要完成的事是：将 7 人排成一排，要求 B、C 都不与 A 相邻。

第一种完成这件事的程序：优先安排 A，再安排 B、C，最后安排其余 4 人。注意到，由于 A 的安排方法不同，会影响到 B、C 相应的安排也不同，所以必须分类安排 A。

第二种完成这件事的程序：先安排除 B、C 外的 5 个人，再按题设要求将 B 插入空档，最后按题设要求将 C 插入空档。

第三种完成这件事的程序：先安排除 B、C 外 5 个人，再将 B、C 按题设要求分开插入空档，或相邻插入空档。

本题也可以用排除法求完成这件事的方法种数。

解法一　若先将 A 排在首末两个位置中的 1 个，有 P_2^1 种方法，则安排 B、C 的位置只有 5 个，因而有 P_5^2 种排法，最后安排剩余的 4 人有 P_4^4 种不同的排法，根据乘法原理共有 $P_2^1P_5^2P_4^4$ 种不同的排法；

若将 A 排在除前末两个位置外的 5 个位置中的 1 个，有 P_5^1 种方法，则安排 B、C 的位置只有 4 个，因而有 P_4^2 种排法，最后安排剩余的 4 人有 P_4^4 种不同的排法，根据乘法原理共有 $P_5^1P_4^2P_4^4$ 种不同的排法。

根据加法原理可知，共有 $P_2^1P_5^2P_4^4+P_5^1P_4^2P_4^4$）种不同的排法，即 2400 种不同的排法。

解法二　先将除 B、C 外的 5 个人进行排列，有 P_5^5 种排法；然后在除 A 旁的两个空档位外的 4 个空档位上安排 B，有 P_4^1 种排法；再在除 A 旁的两个空档位外的 5 个空档上排 C，有 P_5^1 种排法。

根据乘法原理可知，共有 $P_5^5P_4^1P_5^1$ **种不同的排法，即** 2400 **种不同的排法。**

解法三　先将除 B、C **外的** 5 **个人进行排列，有** P_5^5 **种排法，下面分两类不同的方法安排** B、C、**，若** B、C **相邻，则在除** A **旁的两个空档位外的** 4 **个档位上排** B、C，**并考虑到** B、C **的自排，有** $P_4^1P_2^2$ **种不同的排法；若** B、C **不相邻，则在除** A **旁的两个空档位外的** 4 **个空档位上排** B、C **有** P_4^2 **种排法，则根据加法原理安排** B、C **的排法有**（$P_4^1P_2^2+P_4^2$）**种不同的排法。**

根据乘法原理可知，共有 P_5^5（$P_4^1P_2^2+P_4^2$）**种不同的排法，即** 2400 **种不同的排法。**

例 3　8 **名学生站成前后两排，每排** 4 **人，其中要求甲、乙两人在后排，丙在前排，有多少种不同的排法。**

分析　题设中要完成的事是：将 8 **名学生平均地排成前后两排，要求甲、乙排在后排，丙排在前排。**

第一种完成这件事的程序：先安排甲、乙两名学生，再安排学生丙，最后安排其余 5 **名学生；**

第二种完成这件事的程序：先组成包括甲、乙在内的排在后排的 4 **名学生，再排包括丙在内的前排的** 4 **名学生。**

解法一　先安排甲、乙两名学生在后排的 4 **个位置中的** 2 **个位置上，有** P_4^2 **种不同的排法，再将学生丙安排在前排的** 4 **个位置中的** 1 **个位置上，有** P_4^1 **种不同的排法，最后安排其余的** 5 **名学生有** P_5^5 **种不同的排法。**

根据乘法原理可知，共有 $P_4^2P_4^1P_5^5$ **种不同的排法，即** 5760 **种不同的排法。**

解法二　先组成包括甲、乙在内的排在后排的 4 **名学生，有** C_5^2（**在** $C_5^2C_2^2$ **中省去** C_2^2）**种不同的组成方法，再将这** 4 **名学生排在后排，有** P_4^4 **种不同的排法，最后将包括丙在内的** 4 **名学生排在前排也有** P_4^4 **种不同的排法。**

根据乘法原理可知，共有 $C_5^2P_4^4P_4^4$ **种不同的排法，即有** 5760

种不同的排法。

例 4 今有 3 个成人和 2 个小孩，乘船游玩，A 船可乘 3 人，B 船可乘 2 人，C 船只能乘 1 人，乘坐的船只数没有限制，但小孩不能单独乘坐 1 只船，问有多少种不同的分乘方法。

分析 完成题设中要做的事的程序的编制方法有三处：(1) 从船只的使用出发编制；(2) 从小孩的分乘安排出发编制；(3) 从成人的分乘安排出发编制。

解法一 由题设可知，船只的使用方式只有两种：(1) 只用 A 船、B 船；(2) 三船都用。若只用 A 船、B 船，则先安排 A 船，再安排 B 船。若 2 个小孩都安排在 A 船上，则安排 A 船的不同方法有 $C_2^2C_3^1$ 种，安排 B 船的方法只有 C_2^2 种，根据乘法原理可知，共有 $C_2^2C_3^1C_2^2$ 种不同的安排方法，即有 3 种不同的安排方法；若 2 个小孩分乘 A 船、B 船，则安排 A 船的不同方法有 $C_2^1C_3^2$ 种，安排 B 船的方法只有 1 种，根据乘法原理可知，共有 $C_2^1C_3^2$ 种不同的安排方法，即有 6 种不同的安排方法。

故只用 A、B 两船的不同分乘方法有 $(3+6)$ 种，即 9 种。

若三船都用，则先安排 C 船，有 C_3^1 种不同的安排方法，下面再安排 A 船和 B 船：若 2 个小孩都安排在 A 船上，则安排 A 船的不同方法有 $C_2^2C_2^1$ 种，安排 B 船的方法只有 1 种；若 2 个小孩分别安排到 A、B 船上，则安排 A 船的不同方法有 $C_2^1C_2^1$ 种。安排 B 船的方法只有 1 种。

故三船都用的不同分乘方法有 $C_3^1(C_2^2C_2^1+C_2^1C_2^1)$ 即 18 种不同的分乘方法。

由加法原理可知，共有 $(9+18)$ 种，即 27 种不同的分乘方法。

解法二 由题设可知，2 个小孩只能是一起乘 A 船或分乘 A 船、B 船。若 2 个小孩一起乘 A 船，则必须安排 1 个成人坐 A 船，则安排 A 船的不同方法有 C_3^1 种，这时剩下的 2 个成人的不同方法有 C_2^2（2 个成人都在 B 船上）或 P_2^2（2 个成人分乘 A、B 两船）种。

故根据加法原理和乘法原理可知，2 **个小孩一起乘** A **船时，共有** $C_3^1(C_2^2+P_2^2)$ **种，即** 9 **种不同的分乘方法。**

若 2 **个小孩分乘** A **船和** B **船，则安排两个小孩的不同方法有** P_2^2 **种，这时安排成人的不同方法有** C_3^2**（**2 **个成人在** A **船上，**1 **个成人在** B **船上）或** P_3^3**（**3 **个成人分乘在** A、B、C **三船上）**

故根据加法原理和乘法原理可知，2 **个小孩分乘** A **船、**B **船时，共有** $P_2^2(C_3^2+P_3^3)$ **种，即** 18 **种不同的分乘方法。**

根据加法原理可知，共有（9 + 18**）种，即** 27 **种不同的分乘方法。**

解法三　由题设可知，3 **个成人可以只分乘** A **船、**B **船或分乘** A **船、**B **船、**C **船。**

若 3 **个成人只分乘** A **船、**B **船，这时可** 2 **个成人乘坐** A **船，**1 **个成人乘坐** B **船或** 1 **个成人乘坐** A **船，**2 **个成人乘坐** B **船。若** 2 **个成人乘坐** A **船，**1 **个成人乘坐** B **船，则** 2 **个小孩必须分乘** A **船、**B **船，共有** $C_3^2P_2^2$ **种，即** 6 **种不同的分乘方法；若** 1 **个成人乘坐** A **船，**2 **个成人乘坐** B **船，则** 2 **个小孩只能乘坐** A **船，共有** $C_3^1C_2^2$ **种，即** 3 **种不同的分乘方法。**

故 3 **个成人只分乘** A **船、**B **船时的不同分乘方法有（**6 + 3**）种，即** 9 **种。**

若 3 **个成人分乘** A **船、**B **船、**C **船，则安排成人的不同乘坐方法有** P_3^3 **种，这时，**2 **个小孩可只乘坐** A **船或分别乘坐** A **船、**B **船，共有（**$C_2^2+P_2^2$**）种不同的乘坐方法。**

故 3 **个成人分乘** A **船、**B **船、**C **船时的不同分乘方法有** $P_3^3(C_2^2+P_2^2)$ **种，即** 18 **种。**

根据加法定理可知，共有（9 + 18**）种，即** 27 **种不同的分乘方法。**

练 习 题

1. 若集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,$B=\{b_1,b_2,b_3\}$,则从集合 A 到 B 可建立多少个不同的映射?从集合 B 到 A 可建立多少个不同的映射?

2. 8 张椅子排成一排,有 4 人就坐,每人一个座位,其中恰有 3 个连续空位,有多少种不同的坐法?

3. 从 6 名男生,4 名女生中各选出 3 名,男女相间站成一排,共有多少种不同的站法?

4. 有翻译 8 人,其中 3 人只会翻英语,2 人只会翻日语,其余 3 人既会翻英语又会翻日语,现从中选 6 人,安排 3 人翻译英语,3 人翻译日语,则不同的安排方法有多少种?

5. 从五对老搭档相声演员中选四人参加演出,其任何两人都不是原来的老搭档,共有多少种不同的选法?

二、解排列、组合问题的基本方法

一般的排列、组合问题对元素的取舍、排列的位置并无特殊要求,这类问题可直接用排列、组合数计算公式给出结果。但是,更多的排列组合问题常常会对某些元素的取舍、排列位置给出某些限制,这样就不能简单地应用公式直接给出结论了,这类问题称作有附加条件的排列组合问题。

常见的有附加条件的排列组合问题有:

(1)“在与不在”的排列问题,即特定的元素在或不在特定位置上的排列问题;

(2)“邻与不邻”的排列问题,即特定的若干元素相邻或不相邻的排列问题;

(3)“顺与不顺”的排列问题,即特定的若干元素是不是按一定的顺序要求排列的问题;

(4)“在与不在”的组合问题,即特定的元素被或不被选在内

的组合问题；

(5)“分组、分配”的排列组合问题。

解决排列问题的基本方法有：

(1)优先安排特殊元素法，即从安排元素出发编制完成排列问题的程序，一般常先安排特殊元素，再安排其它元素；

(2)优先安排特殊位置法，即从安排位置出发编制完成排列问题的程序，一般常先安排特殊位置，再安排其它位置；

(3)间接法，也称排除法，即先求出没有附加条件的排列数，然后减去不符合附加条件的排列数，得符合附加条件的排列数。即转化成问题的反面求解。

例 1　用数字 0、1、2、3、4 能排成多少个数字不重复的五位数？

分析　题设中要完成的事是：将数字 0、1、2、3、4 五个数字排成数字不重复的五位数。

第一种完成这件事的程序：优先安排数字 0，再安排其它 4 个数字。

第二种完成这件事的程序：优先安排首位，再安排其它的 4 个数位。

本题也可以用排除法，即从 5 个数字的任意排列的排列数中减去数字 0 排在首位的排列的排列数。

解法一　优先安排数字 0，将数字 0 安排除首位以外的 4 个数位上，有 P_4^1 种不同的排法，再安排其它的 4 个数字，有 P_4^4 种不同的排法，由乘法原理可知，共有 $P_4^1P_4^4$ 种不同的排法，即可排成 $P_4^1P_4^4$ 数字不重复的五位数。

解法二　优先安排首位，将 1、2、3、4 这 4 个数字中的一个排在首位，有 P_4^1 种不同的排法，再用剩下的包括数字 0 在内的 4 个数字去安排其它的 4 个数位，有 P_4^4 种不同的排法，由乘法原理可知，共有 $P_4^1P_4^4$ 种不同的排法，即可排成 $P_4^1P_4^4$ 个数字不重复的五位数。

解法三　5 个数字的任意排列有 P_5^5 种，其中数字 0 排在首

位的排列有 P_4^4 种,因此,是五位数的排列方法有($P_5^5 - P_4^4$)种,即可排成($P_5^5 - P_4^4$)个数字不重复的五位数。

说明 :在解法一和解法二中,虽然得出的结果的表达形式是相同的,但是其中的 P_4^1、P_4^4 的含义是各不相同的。

例 2 用数字 0、1、2、3、4、5 能排成多少个数字不重复的五位数?

分析 题设中要完成的事是 :从 0、1、2、3、4、5 这个数字中任意抽出 5 个数字排成数字不重复的五位数。

第一种完成这件数的程序 :若数字 0 不参加排列,则直接将其它的 5 个数字排成数字不重复的五位数 ;若数字 0 参加排列,则优先安排数字 0,再安排其它的数字。

第二种完成这件事的程序 :优先安排首位,再安排其它的 4 个数位。

本题也可以用排除法,即从 6 个数字中任意抽出 5 个数字的排列的排列数中,减去数字 0 一定排在首位的 5 个数字的排列的排列数。

解法一 若数字 0 不参加排列,即其它的 5 个数字的排列有 P_5^5 种不同的排法 ;若数字 0 参加排列,则优先安排数字 0,有 P_4^1 种不同的排法,再从其它的 5 个数字中抽出 4 个排在其它的 4 个数位上,有 P_5^4 种不同的排法,根据乘法原理可知,数字 0 参加排列的不同排法有 $P_4^1P_5^4$ 种。

由加法原理可知,共有($P_5^5 + P_4^1P_5^4$)种不同的排法,即可排成($P_5^5 + P_4^1P_5^4$)个数字不重复的五位数。

解法二 优先安排首位,将 1、2、3、4、5 这 5 个数字中的一个排在首位,有 P_5^1 种不同的排法,再用剩下的包括数字 0 在内的 5 个数字选出 4 个去安排其它的 4 个数位,有 P_5^4 种不同的排法,由乘法原理可知,共有 $P_5^1P_5^4$ 种不同的排法,即可排成 $P_5^1P_5^4$ 个数字不重复的五位数。

解法三 6 个数字中任意选出 5 个数字的排列有 P_6^5 种不同

的排法,其中数字 0 排在首位的排列有 P_5^4 种不同的排法,因此,是五位数的排列有($P_6^5 - P_5^4$)种,即可排成($P_6^5 - P_5^4$)个数字不重复的五位数。

说明:由解法一可知,若用优先安排特殊元素的方法,则存在着特殊元素参加不参加排列,从而存在着特殊元素要不要优先安排的问题,这时需作分类讨论。

例 3　6 个学生站成一排,要求学生甲不站在排头且学生乙不站在排尾有多少种不同的站法?

分析　题设中要完成的事是:安排 6 个学生站成一排,要求学生甲不站在排头且学生乙不站在排尾。

第一种完成这件事的程序:先安排甲、再安排乙,最后安排其他 4 位学生;

第二种完成这件事的程序:先安排甲、乙两位学生,再安排其他 4 位学生;

第三种完成这件事的程序:先安排排头、再安排排尾,最后安排其它 4 个位置;

第四种完成这件事的程序:先安排排头、排尾,再安排其它四个位置。

本题也可以用排除法。

解法一　由于甲的安排会影响到乙的安排,因此,应从对甲的安排作分类讨论。

若甲安排在排尾,则乙与其它 4 个学生一样可以任意安排,因此,这时有 P_5^5 种不同的安排方法;

若甲安排在除排头、排尾以外的 4 个位置中的一个位置,有 P_4^1 种不同的安排方法,则可安排乙的位置有 4 个,即有 P_4^1 种不同的安排方法,最后,安排其他 4 个学生有 P_4^4 种不同的安排方法,根据乘法原理,共有 $P_4^1P_4^1P_4^4$ 种不同的排法。

根据加法原理可知,共有($P_5^5 + P_4^1P_4^1P_4^4$)种不同的站法。

解法二　若甲、乙都不安排在排头和排尾,则安排甲、乙有 P_4^2 种不同的排法,安排其他 4 个学生有 P_4^4 种不同的排法,根据

乘法原理,有 $P_4^2P_4^4$ 种不同的站法;

若甲、乙都分别安排在排尾、排头,则安排其他 4 个学生有 P_4^4 种不同的排法;

若甲安排在排尾,乙安排在中间 4 个位置中的 1 个,则安排乙有 P_4^1 种不同的排法,安排其他 4 个学生有 P_4^4 种不同的排法,根据乘法原理,有 $P_4^1P_4^4$ 种不同的排法;

若乙安排在排头,甲安排在中间 4 个位置中的 1 个,同理有 $P_4^1P_4^4$ 种不同的排法。

根据加法原理可知,共有$(P_4^2P_4^4+P_4^4+P_4^1P_4^4+P_4^1P_4^4)$种不同的站法。

解法三　由于排头的安排会影响到排尾的安排,因此,应从对排头的安排作分类讨论。

若排头用乙安排,则排尾与其它的 4 个位置一样可以任意安排,这时有 P_5^5 种不同的安排方法;

若排头用除甲、乙以外的其它 4 个学生安排,有 P_4^1 种不同的安排方法,则排尾可用包括甲在内的 4 个学生安排,有 P_4^1 种不同的安排方法,最后,安排其它 4 个位置有 P_4^4 种不同的方法,根据乘法原理,共有 $P_4^1P_4^1P_4^4$ 种不同的排法。

根据加法原理可知,共有$(P_5^5+P_4^1P_4^1P_4^4)$种不同的站法

解法四　若排头、排尾都不安排甲、乙,则安排排头、排尾的不同方法有 P_4^2 种,安排其它 4 个位置的方法有 P_4^4 种不同的方法;

若排头安排乙,排尾安排甲,则中间 4 个位置的安排有 P_4^4 种不同的方法;

若排头安排乙,排尾安排除甲以外的 4 个学生中的一个,有 P_4^1 种不同的安排方法,则安排中间的 4 个位置有 P_4^4 种不同的方法,根据乘法原理,有 $P_4^1P_4^4$ 种不同的排法;

若排尾安排甲,排头安排除乙以外的 4 个学生中的一个,同理有 $P_4^1P_4^4$ 种不同的排法。

根据加法原理,共有$(P_4^2P_4^4+P_4^4+P_4^1P_4^4+P_4^1P_4^4)$种不同

的站法。

解法五 6 个学生的任意站法有 P_6^6 种,甲站在排头的不同排法有 P_5^5 种,乙站在排尾的不同排法有 P_5^5 种,甲站在排头且乙站在排尾的不同排法有 P_4^4 种,因此,满足要求的不同站法共有 $(P_6^6 - P_5^5 - P_5^5 + P_4^4)$ 种。

解法六 6 个学生的任意站法有 P_6^6 种,甲站在排头的不同排法有 P_5^5 种,甲不站在排头、乙站在排尾的不同排法有 $P_4^1P_4^4$ 种,因此,满足要求的不同站法有 $(P_6^6 - P_5^5 - P_4^1P_4^4)$ 种。

解法七 学生甲不站在排头的不同排法有 $P_5^1P_5^5$ 种,学生甲不站在排头、学生乙站在排尾的不同排法有 $P_4^1P_4^4$ 种,则学生甲不站在排头且学生乙不站在排尾的不同排法有 $(P_5^1P_5^5 - P_4^1P_4^4)$ 种。

例 4 从 5 个男生、4 个女生中选 5 人,站成一排,要求男生必须在奇数序号位置上,有多少种不同的排法?

解法一 选出的男生人数可以为 1、2、3。

若选出的男生为 1 人,则选出男生的不同方法有 C_5^1 种,排这个男生的不同方法有 P_3^1 种,再将 4 个女生排在剩下的 4 个位置上,有 P_4^4 种不同的方法,根据乘法原理,共有 $C_5^1P_3^1P_4^4$ 种不同的排法;

若选出的男生为 2 人,则选出的不同方法有 C_5^2 种,排这 2 个男生的不同方法有 P_3^2 种,再选出 3 个女生排在剩下的 3 个位置上,有 P_4^3 种不同的方法,根据乘法原理,共有 $C_5^2P_3^2P_4^3$ 种不同的排法;

若选出的男生为 3 人,则选出 3 个男生并排这 3 个男生的不同方法有 P_5^3 种,再选出 2 个女生排在剩下的 2 个位置上,有 P_4^2 种不同的方法,根据乘法原理,共有 $P_5^3P_4^2$ 种不同的排法。

根据加法原理可知,共有 $(C_5^1P_3^1P_4^4 + C_5^2P_3^2P_4^3 + P_5^3P_4^2)$ 种不同的排法。

解法二 先从 4 个女生中选出 2 个女生排在 2 个偶数序号

上,有 P_4^2 种不同的方法,再从剩下的 7 人中选出 3 人排在剩下的 3 个序号上,有 P_7^3 种不同的方法,根据乘法原理可知,共有 $P_4^2P_7^3$ 种不同的排法。

说明　解法一中,将选出的男生先安排在奇数序号位上,就是优先安排特殊元素。

解法二中,用女生先安排偶数序号位,就是优先安排特殊位置。

例 5　从 0、1、2、3、…、9 中选出 3 个奇数字和两个偶数字,组成没有重复数字的五位数,共有多少个?

分析　这是一个先选数字,再排数字的问题。在选数字时,存在着数字一定不被选在内和一定被选在内两种不同的情况,这就是组合问题中的' 在与不在 "的问题,在排数字时,若数字 0 被选在内,则数字 0 就是特殊元素,相应地首位就是特殊位置。

解法一　若数字 0 一定被选在内,则按题设要求选数字的方法就有 $C_5^3C_4^1$ 种,这时排数字的方法就有 $P_4^1P_4^4$ 种,根据乘法原理可知,这样排成的五位数有 $C_5^3C_4^1P_4^1P_4^4$ 个;

若数字 0 一定不被选在内,则按题设要求选数字的方法就有 $C_5^3C_4^2$ 种,这时排数字的方法就有 P_5^5 种,根据乘法原理可知,这样排成的五位数有 $C_5^3C_4^2P_5^5$ 个。

根据加法原理可知,排成的五位数共有($C_5^3C_4^1P_4^1P_4^4+C_5^3C_4^2P_5^5$)个。

解法二　任意选出 3 个奇数字和两个偶数字进行排列有 $C_5^3C_5^2P_5^5$ 种不同的方法,其中数字 0 被选在内且被排在首位的排法有 $C_5^3C_4^1P_4^4$ 种不同的方法,因此,排成的五位数共有($C_5^3C_5^2P_5^5-C_5^3C_4^1P_4^4$)个。

例 6　有甲、乙、丙 3 项任务,其中甲需 2 人承担,乙、丙各需 1 人承担。现从 10 人中选派 4 人承担这 3 项任务,则不同的选派方法有多少种?

分析　这是一个排列组合问题中的分组、分配问题,完成这类

事情的一般程序为：先选人，再分组，最后以组为元素进行分配。也可以免去分组。

解法一　先从 10 **人中选出** 4 **人，有** C_{10}^{4} **种不同的选法，再将** 4 **人分成** 2 **人、**1 **人、**1 **人** 3 **组，有** C_{4}^{2} **种不同的分法，由于** 2 **人的** 1 **组只能承担任务甲，因此分配的方法只有** P_{2}^{2} **种。**

根据乘法原理可知，不同的选派方法有 $C_{10}^{4}C_{4}^{2}P_{2}^{2}$ **种。**

解法二　先从 10 **人中选出** 4 **人，有** C_{10}^{4} **种不同的选法，再从选出的** 4 **人中再选出** 2 **人分别承担乙、丙两项任务，剩下的** 2 **人承担任务甲，有** P_{4}^{2} **种不同的方法，根据乘法原理可知，共有** $C_{10}^{4}P_{4}^{2}$ **种不同的选派方法。**

解法三　先从 10 **人中选出** 2 **人承担任务甲，有** C_{10}^{2} **种不同的选派方法，再从剩下的** 8 **人中选出** 2 **人分别承担任务乙、丙，有** P_{8}^{2} **种不同的分派方法，根据乘法原理可知，共有** $C_{10}^{2}P_{8}^{2}$ **种不同的分派方法。**

说明　从三种解法中可以看到，每一种解法都蕴含着优先安排特殊位置的思想方法。

例 7　**书架上原有** 6 **本不同的书排成一排，现将另外** 4 **本同的书摆上书架与原** 6 **本不同的书排成一排，要求原** 6 **本书摆放的顺序不变，有多少种不同的摆放方法？**

解法一　先将全部 10 **本书作全排列，有** P_{10}^{10} **种不同的排法，再将原来的** 6 **本不同的书恢复成原来的顺序，则不同的摆放方法有** $\dfrac{P_{10}^{10}}{P_{6}^{6}}$ **种。**

解法二　将 4 **本不同的书相邻摆上书架，有** $P_{7}^{1}P_{4}^{4}$ **种不同的摆放方法；**

将 4 **本不同的书分成** 1 **本，**3 **本两份分别不相邻地摆上书架，有** $C_{4}^{1}P_{7}^{2}P_{3}^{3}$ **种不同的方法，将** 4 **本不同的书分成** 2 **本，**2 **本两份分别不相邻地摆上书架，有** $\dfrac{C_{4}^{2}C_{2}^{2}}{P_{2}^{2}}P_{7}^{2}P_{2}^{2}P_{2}^{2}$**，即** $C_{4}^{2}P_{7}^{2}P_{2}^{2}$ **种不同**

的方法；

将 4 本不同的书分成 1 本、1 本、2 本三份分别不相邻地摆上书架，有 $C_4^2P_7^3P_2^2$ 种不同的方法；

将 4 本不同的书，任何 2 本不相邻地摆上书架，有 P_7^4 种不同的方法。

由加法原理可知，共有 $P_7^1P_4^4 + C_4^1P_7^2P_3^3 + C_4^2P_7^2P_2^2 + C_4^2P_7^3P_2^2 + P_7^4$ 种不同的摆放方法。

解法三　先将第一本书摆上书架，有 P_7^1 种不同的方法，将第二本书摆上书架，有 P_8^1 种不同的方法，将第三本书摆上书架，有 P_9^1 种不同的方法，最后，将第四本书摆上书架，有 P_{10}^1 种不同的方法。

由乘法原理可知，有 $P_7^1P_8^1P_9^1P_{10}^1$ 种不同的摆放方法。

练 习 题

1. 用 1、2、3、4、5 这五个数字，可以组成多少个比 20000 大，并且百位数不是 3 的没有重复数字的五位数？

2. 有 3n 个学生坐 3 排，每排 n 个人，但学生甲必须坐在第三排，学生乙不坐第二排，有多少种不同的坐法？

3. 用 0、1、2、3、4、5 这六个数字组成无重复数字的六位数，其中个位上的数字不是 1，且十位上的数字不是 2，这样的六位数共有多少个？

4. 有 8 名儿童分成两行，每行 4 人，面对面地坐下，其中有两名儿童既不相邻，又不能面对面，有多少种不同的坐法？

5. 把 4 名男生和 4 名女生各分成两组，每组 2 人，分配到 4 辆不同的汽车上参加义务劳动，每车一组，共有多少种不同的分配方法？

6. 从 5 个学校中选出 8 名学生组成代表团，要求每校至少有 1 人，有多少种不同的选法？

三、二项展开等式是恒等式

以恒等式的观点看待等式是一个很重要的数学意识。二项式定理是以等式的形式给出出的,因此,二项展开等式是一个恒等式,在解题中常给字母 a,b 赋以特定的值,进而得到所要求的结论。必须注意到,展开等式都可以看作恒等式。

例 1 求 $(1-5x+2x^2)^5(2-x)^7$ 展开后各项系数的和。

解 设 $(2-5x+2x^2)^5(2-x)^7=a_0+a_1x+$

$$a_2x^2+\cdots+a_{17}x^{17}。$$

令 $x=1$,则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{17}=-1$。即各项系数和为 -1。

说明 在解题过程中,等式 $(2-5x+2x^2)^5(2-x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{17}x^{17}$ 被看成关于 x 的恒等式。

例 2 求 $(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$ 的展开式中 x 的整数次幂的各项系数的和。

解

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+2)^{2n+1}=\ &C_{2n+1}^{0}(\sqrt{x})^{2n+1}+C_{2n+1}^{2}(\sqrt{x})^{2n}\cdot 2+\\&C_{2n+1}^{2}(\sqrt{x})^{2n-1}\cdot 2^2+C_{2n+1}^{3}(\sqrt{x})^{2n-2}\cdot\\&2^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n-3}(\sqrt{x})^{4}\cdot 2^{2n-3}+\\&C_{2n+1}^{2n-1}(\sqrt{x})^{3}\cdot 2^{2n-2}+C_{2n+1}^{2n-1}(\sqrt{x})^{2}\cdot\\&2^{n-1}+C_{2n+1}^{2n}(\sqrt{x})^{1}\cdot 2^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}\cdot 2^{2n+1}。\end{aligned}$$

由此可知,$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$ 的展开式中 x 的整数次幂的各项系数的和就是其展开式中偶数项各项系数的和,即 $(x+2)^{2n+1}$ 展开式中偶数项系数的和。

$$\begin{aligned}(x+2)^{2n+1}=\ &a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+a_2x^{2n-1}+\cdots+\\&a_{2n-1}x^2+a_{2n}x+a_{2n+1}\qquad(*)\end{aligned}$$

在式 $(*)$ 中令 $x=1$ 得

$$3^{2n+1}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}+a_{2n+1},$$

在式(*)中令 $x=-1$ 得

$$1=-a_0+a_1-a_2+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}+a_{2n+1},$$

(1)+(2)得

$$2(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n+1})=3^{2n+1}+1。$$

, $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n+1}=\frac{1}{2}(3^{2n+1}+1)$,即 $(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$ 展开式中 x 的整数次幂的各项系数的和为 $\frac{1}{2}(3^{2n+1}+1)$。

例 3 求 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{2n}$ $(n\in N)$ 展开式中含 x^h 的系数。

解法一 在二项式 $1+x,(1+x)^2,(1+x)^3,\cdots,(1+x)^{n-1}$ 的展开式中都不含有 x^n 项,在二项式 $(1+x)^n,(1+x)^{n+1},\cdots,(1+x)^{2n}$ 的展开式中都含有 x^n 项,它们的系数分别为 $C_n^n,C_{n+1}^n,C_{n+2}^n,\cdots,C_{2n}^n$,故展开式中含 x^n 项的系数为 $C_n{}^n+C_{n+1}{}^n+C_{n+2}{}^{n+\cdots+}C_{2n}{}^n$,即 C_{2n+1}^{n+1}。

解法二 题设中的多项式可以看作是以 $1+x$ 为首项,$1+x$ 为公比,项数为 $2n$ 的等比数列的和,因此,原式 $=\frac{(1+x)[(1+x)^{2n}-1]}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{2n+1}-(1+x)}{x}$,

由此可知,只需求得二项式 $(1+x)^{2n+1}$ 展开式中含 x^{n+1} 项的系数既可。

在 $(1+x)^{2n+1}$ 展开式中含 x^{n+1} 项的系数为 C_{2n+1}^{n+1},故原式的展开式中含 x^n 项的系数为 C_{2n+1}^{n+1}。

说明 在解法二中,我们将 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{2n}=\frac{(1+x)^{2n+1}-(1+x)}{x}$ 看成关于 x 的恒等式。

例 4 求证:$1+7C_n^1+7^2C_n^2+7^3C_m^3+\cdots+7^nC_n^n=8n$。

证明 $(1+x)^n=1+C_n^1x+C^2n_x{}^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$,

令 $x=7$，则 $1+C^1n_7+C_n^2 7^2+C_n^3 7^3+\cdots+C_n^n 7^n=8^n$，

即 $1+7C_n^1+7^2C_n^2+7^3C_n^3+\cdots+7^nC_n^n=8^n$。

说明　在解题过程中，我们将 $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$ 看作关于 x 的恒等式。

例 5　求证：$C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+C_n^2C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}C_n^n=C_{2n}^{n+1}$。

分析　考虑到 C_{2n}^{n+1} 可以看作是二项式 $(1+x)^{2n}$ 展开式中含 x^{n+1} 的系数，将 $(1+x)^{2n}$ 恒等变形为 $(x+1)^n(1+x)^n$，同样求其展开式中含 x^{n+1} 的系数，将 $(1+x)^{2n}=(x+1)^n(1+x)^n$ 看成关于 x 的恒等式即可知题设等式成立。

证明　二项式 $(1+x)^{2n}$ 展开式中 x^{n+1} 项的系数为 C_{2n}^{n+1}

$$(x+1)^n(1+x)^n=(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^n)(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n),$$

,　$(x+1)^n(1+x)^n$ 展开式中 x^{n+1} 项的系数为

$$C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+C_n^2C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}C_n^n,$$

由 $(1+x)^{2n}=(x+1)^n(1+x)^n$ 知，等式两边展开式中对应项的系数相等，

,　$$C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+C_n^2C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}C_n^n=C_{2n}^{n+1}。$$

例 6　求证：$3^{2n}-8n-1\,(n\in N)$ 能被 64 整除。

证明　若 $n=1$，则 $3^2-8-1=0$，则结论显然成立。

若 $n\geqslant 2$，

则 $$\begin{aligned}3^{2n}-8n-1&=(1+8)^n-8n-1\\&=(1+8n+C_n^28^2+C_n^38^3+\cdots+C_n^n8^n)-8n-1\\&=C_n^28^2+C_n^38^3+\cdots+C_n^n8^n,\end{aligned}$$

,　$3^{2n}-8n-1\,(n\in N)$ 能被 64 整除。

综上所述，结论成立。

练 习 题

1. 若$(2-x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$。

求：(1) $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8$的值；

(2) $a_1+a_3+a_5+a_7$的值。

2. 求多项式$(x^2+x-1)^2(2x+1)^4$展开式中 x 的奇数项的系数之和。

3. 求证：$4^n-4^{n-1}C_n^1+4^{n-2}C_n^2-4^{n-3}C_n^3+\cdots+4(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^nC_n^n=3^n(n\in N)$。

4. 求证：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n(n\in N)$。

立 体 几 何

第七章　直线和平面

一、“点在线上”的证明及其应用

在立体几何中，证明“点 P 在直线 l 上”，一般可证明点 P 是两个平面 α，β 的公共点，而直线 l 是这两个平面的公共线（即交线），由公理 2（如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线）可知，点 P 在直线 l 上。

在立体几何中，证明点共线，可先由其中两点确定一条直线，再证明其它的点也在这一条直线上；也可以证明所有的点都在同一条特定的直线（如两个平面的交线）上。

在立体几何中，证明直线共点，可先由其中两条直线交于一点，再证明其它的直线也经过这一点；也可以证明所有的直线都经过一个特定的点。

由此可知，点共线的问题、线共点的问题，都可以归结为“点在直线上”的问题处理。

例 1　已知点 E、F、G、H 分别在空间四边形 ABCD 的四边 AB、BC、CD、DA 上，且 $EH \cap FG = P$，求证：点 P 在直线 BD 上。

证明：如图 7 - 1 所示，

$E \in AB$，$H \in AD$，显然 AB、$AD \subset$ 平面 ABD，

，　$EH \subset$ 平面 ABD，

同理 $FG \subset$ 平面 CBD。

$EH \cap FG = P$，

, $P \in PH$ 且 $P \in FG$,

, $P \in$ 平面 ABD 且 $P \in$ 平面 CBD,即点 P 为平面 ABD 与平面 CBD 的公共点。

显然 BD 为平面 ABD 与平面 CBD 的交线,

, 点 P 在直线 BD 上。

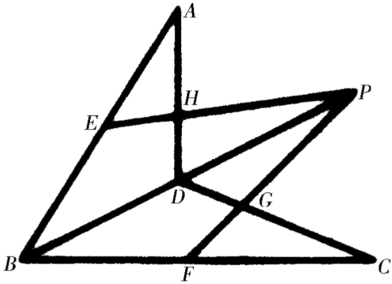


图 7-1

例 2 在正方体 $A_1B_1C_1D_1$ - ABCD 中,对角线 A_1C 与截面 BC_1D 交于点 P,底面正方形 ABCD 的中心为 0,求证,点 P 在 OC_1 上。

证明 如图 7-2 所示,连接 A_1C^1、AC,由点 0 为正方形 ABCD 的中心知,$AC \cap BD = 0$

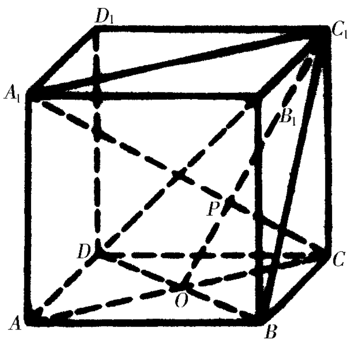


图 7-2

, $0 \in AC$ 且 $0 \in BD$,

, $0 \in$ 平面 A_1C_1CA,$0 \in$ 平面 BC_1D,

显然 $C_1 \in$ 平面 A_1C_1CA,$C_1 \in$ 平面 BC_1D,因此,$0C_1$ 为平面 A_1C_1CA 与平面 BC_1D 的交线。

对角线 A_1C 与截面 BC_1D 交于点 P,

, $P \in A_1C$ 且 $P \in$ 截面 BC_1D。

显然 $A_1C \subset$ **平面** A_1C_1CA**,**

, $P \in$ **平面** A_1C_1CA**,**

, **点** P **为平面** A_1C_1CA **与平面** BC_1D **的公共点。**

, $P \in 0C_1$ **,即点** P **在** $0C_1$ **上。**

例 3 **已知** $\triangle ABC$ **与** $\triangle A'B'C'$ **不在同一个平面内,直线** AA'、BB'、CC' **两两相交。**

(1**) 求证 :三条直线** AA'、BB'、CC' **相交于同一点 ;**

(2**) 若直线** AB **与** A'B'、BC **与** B'C'、CA **与** C'A' **分别交于点** P、Q、R**,求证 :**P、Q、R **三点共线。**

证明(1**) 如图** 7 - 3 **所示,设** $AA' \cap BB' = 0$**,则** $0 \in AA'$ **且**

$0 \in BB'$

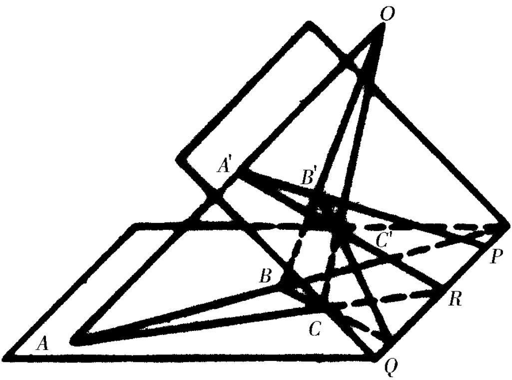


图 7 - 3

由 BB' **与** CC'、CC' **与** AA' **相交可设** BB'、CC' **确定平面** α**,**CC'、AA' **确定平面** β**,即有** $BB' \subset \alpha$**,**$AA' \subset \beta$**,**

, $0 \in \alpha$ **且** $0 \in \beta$**,即点** 0 **为平面** α、β **的公共点。**

$CC' \subset \alpha$ **且** $CC' \subset \beta$**,**

, CC' **为平面** α、β **的交线。**

, $0 \in CC'$ **,即三条直线** AA'、BB'、CC' **相交于点** 0**。**

(2**) 设平面** $ABC \cap$ **平面** $A'B'C' = 1$**,**

$AB \cap A'B' = P$

,　　$P \in AB$ 且 $P \in A'B'$，

显然 $AB \subset$ 平面 ABC，$A'B' \subset$ 平面 $A'B'C'$，

由此可知，$P \in$ 平面 ABC 且 $P \in$ 平面 $A'B'C'$

,　　$P \in 1$

同理可证，Q、$R \in 1$。

,　　点 P、Q、R 三点共线。

例 4　线段 AB 与平面 α 不平行，空间任取一点 P，AP、BP 或它们的延长线交平面 α 于点 A'、B'，那么，无论 P 的位置如何，直线 $A'B'$ 总通过一个定点。

证明　如图 7 - 4 所示，设线段 AB 所在直线与平面 α 相交于点 S，则 $S \in AB$，$S \in \alpha$。

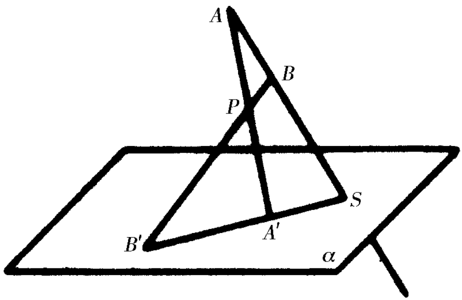


图 7 - 4

$AA' \cap BB' = P$

,　　AA' 与 BB' 确定平面 β。

显然 $AB \subset \beta$，由此可知，$S \in \beta$，

,　　S 为平面 α 与 β 的公共点。

显然 $\alpha \cap \beta = A'B'$

,　　$S \in A'B'$，即 $A'B'$ 经过定点 S。

由点 P 的任意性可知，无论 P 的位置如何，直线 $A'B'$ 总通过一个定点。

例 5　求证：四面体各顶点与对面三角形重心的连线相交于一点。

证明 如图7-5所示,设四面体 $ABCD$ 中,$\triangle BCD$ 的重心为 G_1,$\triangle ACD$ 的重心为 G_2,棱 CD 的中点为 M,由 G_1 在 BM 上,G_2 在 AM 上知,BG_2、AG_1 共面且相交,设 $BG_2 \cap AG_1 = 0$。

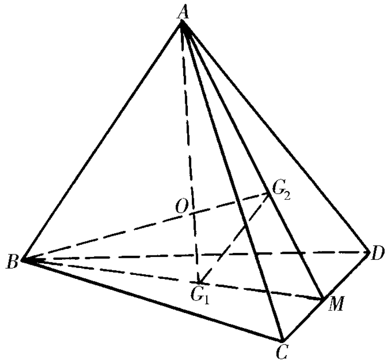


图7-5

$$\frac{AM}{G_2M} = \frac{BM}{G_1M} = 3,$$

, $G_2G_1 \parallel AB$,且 $G_2G_1 = \frac{1}{3}AB$,

由 $\triangle AOB \backsim \triangle G_1OG_2$ 知,$AO : OG_1 = AB : G_1G_2 = 3:1$,

, 点 O 为按定比 $\lambda = 3$ 分 AG_1 的分点,即 BG_2 经过分 AG_1 为 $3:1$ 的分点 0。

同理可证,若 $\triangle ABD$ 的重心为 G_3,$\triangle ABC$ 的重心为 G_4,则 CG_3、DG_4 也经过点 O,

, AG_1、BG_2、CG_3、DG_4 交于一点。

说明 本例是用直线都经过特定点的方法证明若干条直线共点。直线经过点即点在直线上,本例并没有用点是两个平面的公共点,线是这两个平面的交线证明点在直线上,因此,本例的证明方法与前面的几个例有所不同。

练 习 题

1. 在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，设 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于点 Q，求证：B、Q、D_1 共线。

2. 四边形 ABCD 中，已知 AB∥DC，AB、BC、CD、DA（或延长线）分别与平面 α 相交于 E、G、F、H，求证：E、F、G、H 必在同一直线上。

3. 三个平面两两相交，有三条交线，其中两条交于一点，证明第三条交线也经过这一点。

4. 设 E、F、G、H 分别是空间四边形 ABCD 的边 AB、BC、CD、DA 的中点，P、Q 是对角线 BD、AC 的中点，求证：EG、FH、PQ 相交于同一点。

二、画　图

（一）简单的空间图形的直观图（空间元素位置关系图）

1. 画图中的几个意识

（1）规范意识。通常画平行四边形表示平面，当平面水平放置时，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成等于邻边的两倍；当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮住部分的线段画成虚线或不画。

（2）位置特征意识。通常用平面衬托两直线的位置关系；直线与平面平行或垂直时，要求直线与表示平面的平行四边形的一组对边平行或垂直；两个平面平行或垂直时，要求表示平面的平行四边形的对边分别平行或垂直。

（3）画两个相交平面，通常从下列各图中选择（见图 7-6）。

（4）画在水平放置的平面内的图形必须是水平放置的直观图。

2. 画空间元素位置关系图的一般方法

画空间元素位置关系图，一般采用先画“大件”（即平面），再摆“小件”（即点、线）的方法。

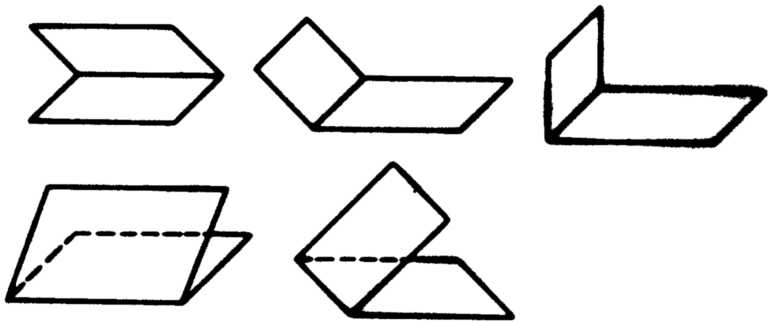


图 7 - 6

例 1　按下面给出的语句画图形：

平面 α 过相交直线 a 和 b，平面 β 过直线 a 和平面 α 外一点 A。

分析　由语句可知，$\alpha \cap \beta = a$，直线 $b \subset \alpha$ 且直线 b 与直线 a 相交，点 $A \in \beta$，但 $A \notin \alpha$。

解　先画出相交于直线 a 的平面 α、β，再分别在平面 α、β 内画出直线 b 和点 A（见图 7 - 7）。

例 2　按下面给出的语句画图。

直线 a、b 异面，直线 $c /\!/ a$，直线 b、c 不相交。

分析　语句中没有给出平面，为体现直线之间的位置关系，必须给出相应的平面，我们称这样的平面为"衬托平面"。由于直线 $c /\!/ a$，因此可以先在"衬托平面"α 内画出平行直线 c、a，再画出直线 b（见图 7 - 8）。

（二）平面与平面的交线

由公理 2 可知，两个平面的公共点一定在两个平面的交线上，由此可知，经过两个平面的两个公共点的直线就是两个平面的交线。

例 3　点 M、N 分别是正方体 $A_1B_1C_1D_1$ - ABCD 的棱 AA_1、CC_1 上的点，试画出由点 B_1、M、N 确定的平面与平面 ABCD 的交线。

解　在平面 A_1ABB_1 内，作直线 B_1M，设 $B_1M \cap AB = P$，

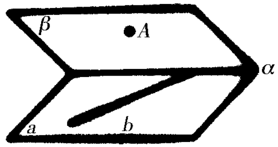


图 7 - 7

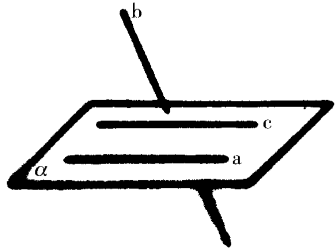


图 7 - 8

在平面 B_1BCC_1 **内,作直线** B_1N**,设** $B_1N \cap BC = Q$**,**

显然点 P、Q **为由点** B_1、M、N **确定的平面与平面** ABCD **的公共点。**

作直线 PQ,PQ **即为由点** B_1、M、N **确定的平面与平面** ABCD **的交线(见图** 7 - 9**)。**

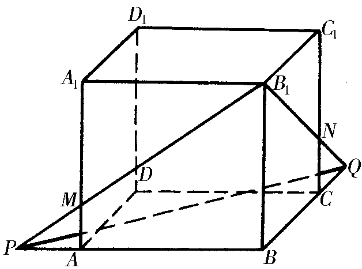


图 7 - 9

(三)直线与平面的交点

已知直线与已知平面的交点一定在过已知直线的一个平面与已知平面的交线上,因此,画已知直线与已知平面的交点,只要作一个过已知直线的平面,并给出其与已知平面的交线,在这个平面内,交线与已知直线的交点就是已知直线与已知平面的交点。

由此可知,画已知直线与已知平面的交点问题被转化成在过已知直线的平面内画直线与直线的交点的问题。

例 4　**已知**△ABC**,边** $AB \cap$ **平面** $\alpha = P$**,边** $BC \cap$ **平面** $\alpha = Q$**,边** AC **所在直线也与平面** α **相交(见图** 7 - 10**)。试画出直线** AC **与平**

面 α 的交点 M。

解　由题设可知，平面 $ABC\cap$ 平面 $\alpha=PQ$，在平面 ABC 内，延长 AC 与直线 PQ 交于点 M，点 M 即为直线 AC 与平面 α 的交点。

事实上，　$AC\cap PQ=M$，

,　$M\in AC$ 且 $M\in PQ$。

$PQ\subset\alpha$，

,　$M\in\alpha$，

,　点 M 为直线 AC 与平面 α 的交点(见图 7 - 10)。

例 5　四面体 ABCD 中，点 E 在棱 CD 上，点 M 在侧面 ABC 内，试画出 DM 与截面 ABE 的交点 H。

分析　只要经过 DM 作一个平面，并给出这个平面与截面 ABE 的交线，则这条交线与 DM 的交点就是 DM 与截面 ABE 的交点。

解　在侧面 ABC 内作直线 AM 交棱 BC 于 N，连接 DN，与 BE 交于 G，则平面 AND 就是经过 DM 的一个平面，平面 AND 与截面 ABE 的交线为 AG，在平面 AND 内，DM 与 AG 的交点就是 DM 与截面 AEB 的交点 H(见图 7 - 11)。

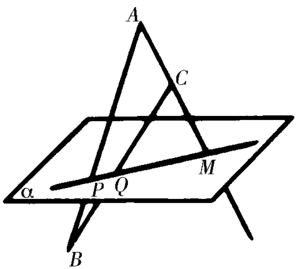


图 7 - 10

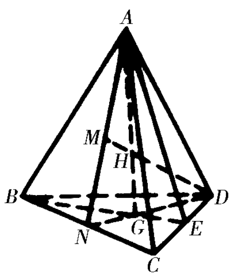


图 7 - 11

(四)水平放置的平面图形的直观图

(1)要画空间图形的直观图，首先要学会画水平放置的平面图形的直观图的画法。

水平放置的平面图形是由点组成的，因此，画水平放置的平面

图形的直观图实质上就是画点的直观图。特别地，水平放置的多边形的直观图可以归结为画多边形的顶点的直观图。

(2)点的直观图的画法：

设点 P **在坐标系** xOy **中的坐标为**(a,b)，**作** $PM \perp x$ **轴**，$PN \perp y$ **轴，垂足分别为** M、N，**则** OM = a，ON = b。

画水平放置的斜坐标系 x'O'y，**在** x' **轴上，取** O'M' = a，**在** y' **轴上取** O'N' = b/2。**过点** M' **作** y' **轴的平行线，过点** N' **作** x' **轴的平行线，它们的交点** P' **就是点** P **在水平放置的平面上的直观图(见图** 7 - 12)。

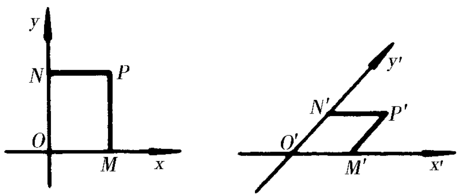


图 7 - 12

(3)在画水平放置的平面图形的直观图时，要注意到，在原图中建立直角坐标系 xOy **后，已知图形中平行于** x **轴或在** x **轴上的线段的直观图，在斜坐标系中平行于** x' **轴或在** x' **轴上，且长度保持原长度不变；已知图形中平行于** y **轴或在** y **轴上的线段的直观图，在斜坐标系中平行于** y' **轴或在** y' **轴上，且长度为原长度的一半。**

如果点 P **在坐标系** xOy **的坐标轴上，那么，点** P **的直观图** P' **也在斜坐标系** x'O'y' **的相应的坐标轴上。**

由此也可知，在原图中建立直角坐标系 xOy **时，我们应让原图中的点在坐标轴上越多越好，让原图中的线段与坐标轴平行或在坐标轴上越多越好。**

例 6　**画出下列各图形的水平放置的直观图(见图** 7 - 13)。

解　**如图** 7 - 14 **所示。**

说明　**正三角形、正方形、直角三角形的水平放置的直观图是最常用的水平放置的多边形的直观图。**

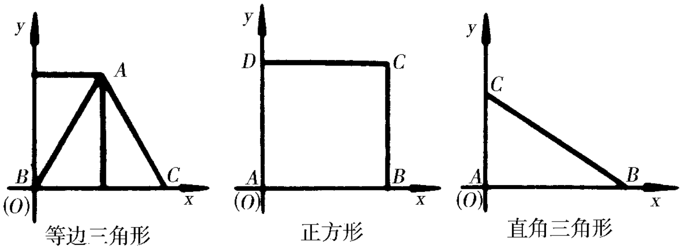


图 7 - 13

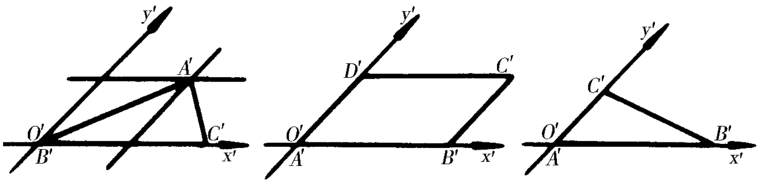


图 7 - 14

练 习 题

1. 按下列语句画出图形

(1) 相交直线 a、b 在平面 α 内,平行直线 b、c 在平面 β 内;

(2) 直线 a、b 相交于点 M,点 N 不在直线 a、b 上,点 N 分别与直线 a、b 确定平面 α、β。

2. 已知点 P、Q、R 分别为正方体 $A_1B_1C_1D_1$ - ABCD 的棱 DD_1、AA_1、BC 上的点,试画出由点 P、Q、R 确定的平面与平面 ABCD 的交线(见图 7 - 15)。

3. 在四面体 ABCD 中,点 M、N、P 分别在棱 AD、BD、CD 上,点 S 在平面 ABC 内,试画出线段 SD 与过 M、N、P 的截面的交点 G(见图 7 - 16)。

4. 画出下列各图形的水平放置的直观图(见图 7 - 17)。

三、共 面 问 题

证明空间的若干个点和若干条直线都在同一个平面内的问题

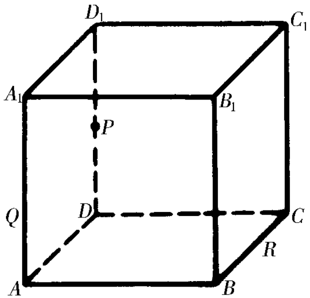


图 7 - 15

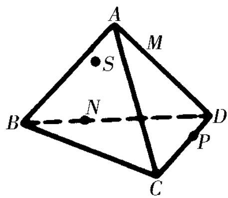


图 7 - 16

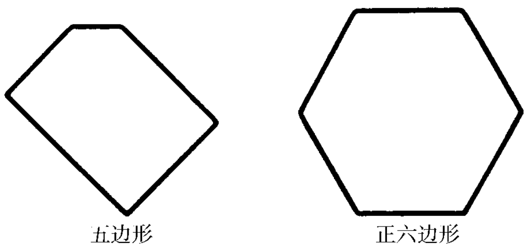


图 7 - 17

称作共面问题。

共面问题的证明，一般先确定平面，然后再证明空间元素（点、直线）在这个确定的平面内。确定平面时，确定平面的元素必须满足公理 3（经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平

面)或其三个推论的条件,证明元素在确定的平面内,常依据公理1,或用反证法或用平面重合的方法。

当共面的元素具有同一性质时,常用‘ 任一 ’代表‘ 任意 ’的思想方法。

例 1　已知一直线 a 分别与两条平行直线 b、c 相交,求证 :直、b、c 共面。

证法一　如图 7 - 18 所示,

b∥c,

,　b、c 确定一个平面,设为 α,则有 b⊂α,c⊂α。

设 a 与 b、c 的交点分别为 B、C,则 B∈b,C∈c,

,　B、C∈α,

,　BC⊂α,即 a⊂α,

,　a、b、c 共面。

说明　本证法中,用平行直线 b、c 确定平面,用公理 1 证明直线 a 在平面 α 内。

证法二　如图 7 - 19 所示,

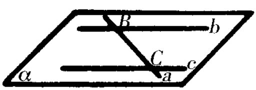


图 7 - 18

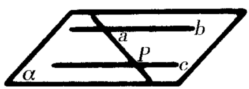


图 7 - 19

b∥c,

,　b、c 确定一个平面 α;

a、b 是相交直线,

,　a、b 确定一个平面 β。

设 a∩c = P,则点 P∈a 且点 P∈c,

,　P∈α 且 P∈β,

b⊂α,b⊂β,

又　P∈b,

,　平面 α、β 都是由点 P 和直线 b 确定的,

,　平面 α、β 重合,

故 a、b、c 共面。

说明　本证法中,是用平面重合的方法证明直线共面。

证法三　　a、b 是相交直线,

,　a、b 确定一个平面 α。

设 $a \cap c = P$,在平面 α 内过点 P 作 $c' \parallel b$,

　$c \parallel b$,

,　$c' \parallel c$。

　c' 和 c 有公共点 P,

,　c' 和 c 重合。

由 $c' \subset \alpha$ 知 $c \subset \alpha$,

,　a、b、c 共面。

说明　本证法中,用同一法证明直线 c 在确定的平面 α 内。

证法四　　a、b 是相交直线,

,　a、b 确定一个平面 α。

设 $a \cap c = P$,假设直线 c 不在平面 α 内,在平面 α 内过点 P 作 $c' \parallel b$,

　$c \parallel b$,

,　$c' \parallel c$,这就与 c' 和 c 有公共点 P 矛盾,

,　$c \subset \alpha$,

故 a、b、c 共面。

说明　本证法是用反证法证明直线 c 在确定的平面 α 内。

例 2　已知点 $P \in$ 直线 l,求证 过点 P 且与直线 l 相交的直线共面。

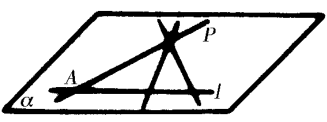


图 7 - 20

分析　本例中共面的元素是直线,且具有同一性质 :过点 P 且与直线 l 相交,因此,可用‘ 任一 ’代表‘ 任意 ’的思想方法。

证明　　　**点** $P \notin$ **直线** l，

,　　**点** P **和直线** l **确定平面** α。

设直线 PA **为任意一条过点** P **且与直线** l **相交的直线，设交点为** A，**则** $A \in l$，

,　　$A \in \alpha$，

,　　$PA \subset \alpha$

由直线 PA **的任意性可知，过点** P **且与直线** l **相交的直线都在平面** α **内，即它们共面。**

例 3　**证明：两两相交而不过同一点的四条直线** a、b、c、d **必在同一平面内。**

分析　**由四条直线两两相交可知，任取四条直线中的两条，可以确定一个平面，故只须证其它两条直线在这个确定的平面内即可得四条直线共面。**

证明　**设直线** $a \cap b = P$，**则直线** a、b **确定平面** α，**即有** a、$b \subset \alpha$。

由题设可知，直线 a、d **中至少有一条不过点** P **且与直线** a、b **都相交，不妨设直线** c **不过点** P，$c \cap a = R$，$c \cap b = Q$，

,　　$R \in a$，$Q \in b$，

,　　R、$Q \in \alpha$。

　　R、$Q \in c$，

,　　$c \subset \alpha$。

若 $P \notin d$，**则同理可证** $d \subset \alpha$。

这样，a、b、c、d **都在平面** α **内，即它们共面。**

若 $P \in d$，

设 $c \cap d = S$，**则** S **必不与点** P **重合**，$S \in c$，

,　　$S \in \alpha$，

由 $P \in \alpha$ **知**，$PS \subset \alpha$，**即** $d \subset \alpha$，

这样，也得 a、b、c、d **都在平面** α **内，即它们共面。**

说明　**本例是用公理** 1 **证明直线在平面内，即证明该直线上有两点在平面内，即知这条直线在平面内。**

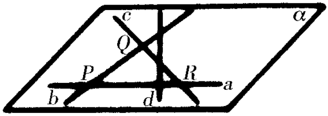


图 7 - 21

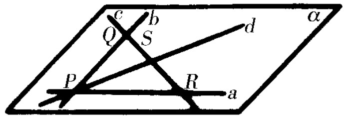


图 7 - 22

练 习 题

1. 已知直线 $a // b // c$,直线 d 和直线 a、b、c 分别相交于点 A、B、C,求证:直线 a、b、c、d 共面。

2. 在正方体 $A_1B_1C_1D_1$ - ABCD 中,点 E、F、G、H、P、Q 分别是所在棱的中点,求证:这六点共面。

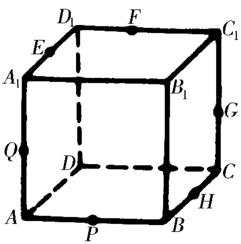


图 7 - 23

四、异面直线的判定与证明

异面直线的判定常依据定理:过平面外一点与平面内一点的直线,和平面内不经过平面内那一点的直线是异面直线。图 7 - 24 是定理的常规图形,若 $a \subset \alpha$,$A \notin \alpha$,$B \in \alpha$,A、$B \in b$,$B \notin a$,则 a、b 为异面直线。

必须注意到,在异面直线问题中,图 7 - 24 常以变式形式出现。

异面直线的证明常依据定义,并常用反证法。

例 1　如图 7 - 25 所示,A、B、C、D 不在同一平面内,E、G 在

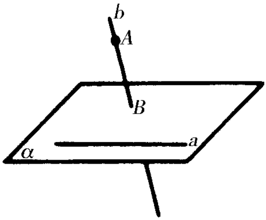


图 7 - 24

AD 上,F、H 分别在 BD、CD 上,则 EF、GH 能平行吗?

解　EF、GH 不能平行,而是异面直线。

事实上,EF ⊂ 平面 ABD,G ∈ 平面 ABD,H ∉ 平面 ABD,G ∉ EF,故 EF 和 GH 为异面直线。

说明　平面 ABD 相当于常规图 7 - 25 中的平面 α。

例 2　在空间四边形 ABCD 中,E、G 是 AD 上的点,F、H 是 BC 上的点,试判定图 7 - 26 中有多少对异面直线?

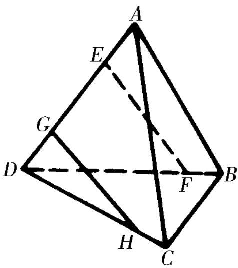


图 7 - 25

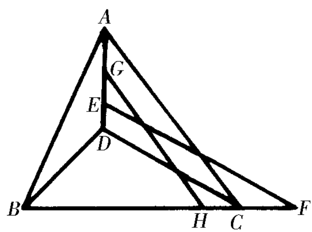


图 7 - 26

分析　空间四边形 ABCD 是我们熟悉的空间图形,我们将图中的直线分成两个集合:{AB,BC,CD,DA,AC,BD} 和 {EF,GH},只要分别求得两集合中的直线间异面直线的对数和两集合间异面直线的对数,即可求得图形中异面直线的对数。

解　设空间四边形 ABCD 的边和对角线所在直线组成集合 M = {AB,BC,CD,DA,AC,BD},直线 EF、GH 组成集合 {EF,GH}。

在集合 M 中,直线间有 3 对异面直线,在集合 N 中,直线间有

1 对异面直线，集合 N 中的直线与集合 M 中的直线间有 8 对异面直线。由此可知，图形中共有 12 对异面直线。

说明 本例用集合的方法将一个复杂的图形问题转化为熟悉的简单的图形问题，这种化繁为简的思想是教学中的重要思想。

例 3 正方体的六个面内共有 12 条对角线，它们中共有多少对异面直线？

分析 由于 12 条面对角线中的每一条在空间处于同等的位置关系之中，因此，我们可以采用从个体看整体的思想方法解本题。

解 正方体的一条面对角线与其余 11 条面对角线间共有 5 对异面直线，考虑到相对关系，12 条面对角线间共有 $\frac{5\times 12}{2}$，即 30 对异面直线。

例 4 如图 7 - 27 所示，已知直线 a、b、c 不共面，且都经过同一点 O，点 M、P 是直线 a 上的两点，点 N 是直线 b 上一点，点 Q 是直线 c 上一点，求证：直线 MN 和 PQ 是异面直线。

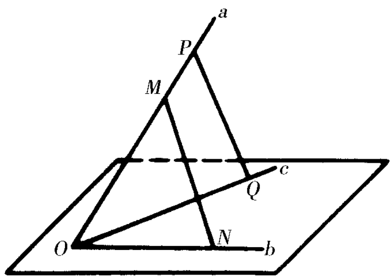


图 7 - 27

证明 假设直线 MN、PQ 不是异面直线，则它们必在同一平面内，设 $MN\subset\alpha$，$PQ\subset\alpha$，

, $M,P\in\alpha$,

$M、P\in a$,

, $a\subset\alpha$,

$0\in a$,

, $0\in\alpha$,

$N\in\alpha$ 且 $N\in b$，$0\in b$，

, $b\subset\alpha$,

同理 $c\subset\alpha$。

这样,三条直线 a、b、c 都在平面 α 内,这就与已知条件 a、b、c 三条直线不共面矛盾。

, 直线 MN 和 PQ 是异面直线。

说明　由本例可知,用反证法证明两条直线异面实质上是把异面问题转化为共面问题处理。

例 5　如图 7 - 28 所示,已知平面 α、β 相交于直线 a,直线 b 在 α 内且与直线 a 相交于点 A,直线 c 在平面 β 内且与直线 a 平行,求证:直线 b、c 异面。

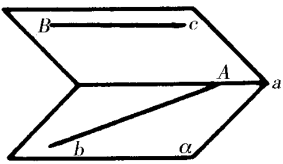


图 7 - 28

证法一　假设直线 b、c 不异面,则直线 b、c 在同一平面内。

若 $b /\!/ c$,则由 $a /\!/ c$ 知,$a /\!/ b$,这就与 $a\cap b = A$ 矛盾;

若 b、c 相交,

设 $b\cap c = B$,则由 $c\subset\beta$,知 $B\in\beta$,

$b\cap a = A$ 且 $a\subset\beta$,

, $A\in\beta$,

, $AB\subset\beta$,即 $b\subset\beta$。

又　$b\subset\alpha$,

, $\alpha\cap\beta = b$,这就与 $\alpha\cap\beta = a$ 矛盾,

, b、c 异面。

证法二　假设直线 b、c 不异面,则直线 b、c 在同一平面内,设 b、$c\subset\gamma$。

显然,$A\in\gamma$,$A\notin c$,

, 平面 γ 就是由点 A 和直线 c 确定的平面,

又　$A\in\beta$,$c\subset\beta$,

,　　平面 β 也是由点 A 和直线 c 确定的平面。

,　　平面 ɣ 与平面 β 重合,由 $b \subset \gamma$ 知,$b \subset \beta$,

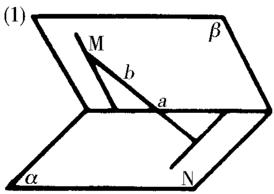
又　　$b \subset \alpha$,

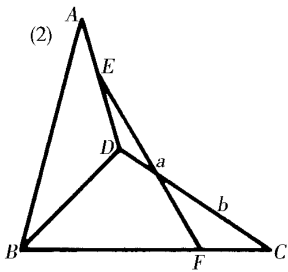
,　　$a \cap \beta = b$,这就与 $\alpha \cap \beta = a$ 矛盾

,　　b、c 异面。

练 习 题

1. 判定图 7 - 29 和图 7 - 30 中的直线 a、b 是否为异面直线?





(四边形ABCD为空间四边形)

图 7 - 29　　　　　　图 7 - 30 (四边形 ABCD 为空间四边形)

2. 正方体的 12 条棱所在直线中有多少对异面直线?

3. 求证:分别和两条异面直线相交于不同点的两条直线是异面直线。

4. 如图 7 - 31 所示,已知平面 α 与平面 β 相交于直线 CD,点 A、B 在直线 CD 上,又直线 $AE \subset \alpha$,直线 $BF \subset \beta$,求证:直线 AE 和 BF 是异面直线。

五、立体几何中添加辅助线的问题

证、解几何问题的过程,就是从条件到结论的转化过程,这种转化过程大都要依赖于几何图形。许多问题从题设给出的原始几何图形还不能将已知条件与结论直接沟通起来,这就需要添加辅

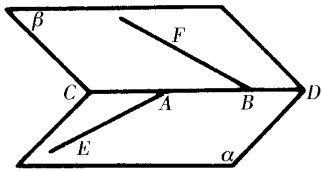


图 7 - 31

助线。

几何图形的性质是通过隐含其中的基本几何图形的性质来体现的，当几何图形中的基本图形不完整时，就很难揭示问题的性质，这时，就必须在几何图形中构造基本图形，从而借助于基本图形的性质解决问题。由此不难看出，辅助线的作用是辅助几何图形中基本图形的形成。

这里所讲的基本图形是指直接描写几何定义、公理、定理的几何图形。

平面图形是构成空间图形的基础，因此，在立体几何中，辅助线只有落实在具体的平面内，才能真正起到辅助作用，体现其出现的价值。

在立体几何中，可以作辅助平面与已知平面的交线而作出辅助线，这时，两个平面的交线，显然在辅助平面内。也可以首先作出辅助线所在的平面，再在这个平面内作出辅助线。这就是说，在立体几何中作辅助线应有‘ 作线先作面的意识 ”。

例 1　如果一条直线与一个平面平行，那么过这个平面内的一点，与这条直线平行的直线必在这个平面内（见图 7 - 32）。

已知　直线 $a /\!/$ 平面 α，$P \in \alpha$，$P \in b$，$b /\!/ a$，求证：$b \subset \alpha$。

证明　由 $b /\!/ a$ 可知，可经过直线 a 和 b 作一个平面，设为 β。

$P \in b$，

, $P \in \beta$，

又 $P \in \alpha$，

, 点 P 为平面 α、β 的一个公共点，

由此可知，平面 α、β 相交于经过点 P 的一条直线，设为 b'。

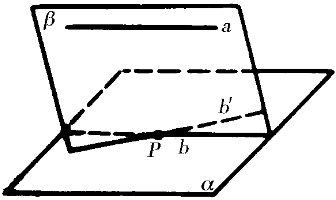


图 7 - 32

$a \parallel \alpha$，

, $b' \parallel a$。

在平面 β 内，$b \parallel a$，$b' \parallel a$，且 b 和 b' 都经过点 P。

, b 和 b' 重合，

由 $b' \subset \alpha$ 可知，$b \subset \alpha$。

说明　在证明过程中，直线 b' 是由作辅助平面 β 产生的，并由此形成一个证明直线 a 与 b' 平行的基本几何图形（见图 7 - 33）和在平面 β 内形成了一个证明直线 b' 与 b 重合的基本几何图形（见图 7 - 34）。

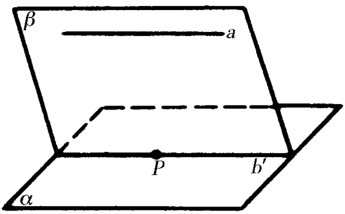


图 7 - 33

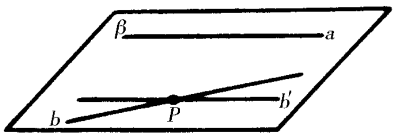


图 7 - 34

例 2　求证 如果两条平行直线中的一条和一个平面相交，那么另一条也和这个平面相交。

分析　证明一条直线和一个平面相交，必须证明直线不在平面内且不与平面平行或证明直线和平面有公共点且直线不在平面内。

已知　直线 $a \parallel b$，$a \cap \alpha = P$，

求证　直线 b 也和平面 α 相交。

证法一　假设直线 b 与平面 α 不相交，则 $b \subset \alpha$ 或 $b \parallel \alpha$。

若 $b \subset \alpha$，

$a \cap \alpha = P$，

, $a \not\subset \alpha$，

$a \parallel b$，

, $a /\!/ \alpha$,这就与 $a \cap \alpha = P$ 矛盾。

若 $b /\!/ \alpha$,

则过直线 b 和平面 α 内一点 A 作一个平面 β,交平面 α 于直线 a',由线面平行的性质可知,$b /\!/ a'$。

$a /\!/ b$,

, $a /\!/ a'$,

$a \not\subset \alpha$,这就与 $a \cap \alpha = P$ 矛盾。

, b 与平面 α 相交。

证法二 $a /\!/ b$,

, $a \cap \alpha = P$,

, $P \in a$ 且 $P \in \alpha$,

, $P \in \beta$,

, 平面 α 和 β 相交于经过点 P 的一条直线 c。

在平面 β 内,$a /\!/ b$,$a \cap c = P$,

, b 和 c 相交。

设 $b \cap c = Q$,则由 $c \subset \alpha$ 知 $Q \in \alpha$,即直线 b 与平面 α 有公共点 Q。

假设 $b \subset \alpha$,

$a \cap \alpha = P$,

, $a \not\subset \alpha$,

$a /\!/ b$,

, $a /\!/ \alpha$,这就与 $a \cap \alpha = P$ 矛盾,

, $b \not\subset \alpha$。

, b 与平面 α 相交。

例 3 如图 7 - 35 所示要空间四形 ABCD 中,各边长都为 a,且对角线 AC、BD 的长也为 a,点 M、N 分别为 BC、AD 的中点,求异面直线 CN、DM 所成角的余弦值。

分析 在求异面直线所成的角时,首先要正确找到表示异面直线所成角的两条相交直线所成的角,这时必须平行移动直线,必须注意到 移动后的直线一定在被移动的直线和移动后的直线所

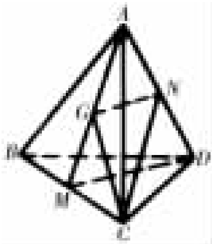


图 7 - 35

经过的一个特定的点所确定的平面内，这就是说，作平行线应首先按上述方法先给出这条平行线所在的平面。

解法一

连接 AM，**取** AM **的中点** G，**连接** GN。

N **为** AD **的中点，**

, GN∥DM，

, **相交直线** GN、CN **所成的角就是异面直线** DM、CN **所成的角。**

连接 CG，

设正四面体的棱长为 a，**则** $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，$CN = \frac{\sqrt{3}}{2}a$。

在△ADM **中，** N、G **分别是** AD、AM **的中点，**

, $GN = \frac{\sqrt{3}}{4}a$。

在直角△MGC **中，** $GN = \frac{\sqrt{3}}{4}a$，$CM = \frac{1}{2}a$，

, $GC = \sqrt{GM^2 + CM^2} = \sqrt{\frac{3}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}a$

在△CNG **中，**

$$\cos\angle CNG = \frac{CN^2 + GN^2 - GC^2}{2CN \cdot GN}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{16}a^2 - \frac{7}{16}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a}$$

$$= \frac{2}{3}$$

即异面直线 DM、CN 所成角的余弦值为$\frac{2}{3}$。

说明 在本解法中，过点 N 与直线 DM 平行的直线 GN 一定在由点 N 和直线 DM 所确定的平面 ADM 内，因此，在解答过程中，首先给出平面 ADM，再在这个平面内给出过点 N 且与直线 DM 平行的直线 NG。

解法二 延长 BD 到 G，使 DG = BD，连接 CG（见图 7 - 36）。

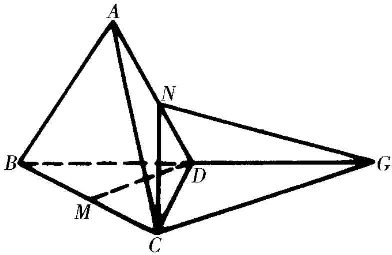


图 7 - 36

M 为 BC 的中点，

, CG∥DM，

, 相交直线 CG、CN 所成的角就是异面直线 DM、CN 所成的角。

连接 GN，

设正四面体的棱长为 a，则

$$DM = \frac{\sqrt{3}}{2}a，CN = \frac{\sqrt{3}}{2}a。$$

在△BCG 中，

M、D 分别为 BC、BG 的中点，

, $CG = \sqrt{3}a$。

在△DNG 中，

$$DN = \frac{1}{2}a，DG = a，\angle NDG = 180° - \angle ADB = 120°，$$

, $GN^2 = DG^2 + DN^2 - 2DG \cdot DN\cos\angle NDG$

$$= a^2 + \frac{1}{4}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}a^2,$$

在$\triangle NCG$中，

$$\cos\angle NCG = \frac{CN^2 + CG^2 - GN^2}{2 \cdot CN \cdot CG}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + 3a^2 - \frac{7}{4}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \sqrt{3a}}$$

$$= \frac{2}{3},$$

即异面直线 DM、CN 所成角的余弦值为$\frac{2}{3}$。

说明　在本解法中，过点 C 与直线 DM 平行的直线 CG 一定在由点 C 和直线 DM 所确定的平面内，这个平面就是平面 BCD，因此，在解答过程中，是在平面 BCD 内，利用三角形中位线的性质给出过点 C 且与直线 DM 平行的直线 CG。

解法三　连接 BN，取 BN 的中点 G，连接 GM（见图 7 - 37）。

M 为 BC 的中点，

, $GM /\!/ CN$，

, 相交直线 GM 与 DM 所成的角就是异面直线 DM、CN 所成的角。

连接 DG，

设正四面体的棱长为 a，则

$$DM = \frac{\sqrt{3}}{2}a, CN = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

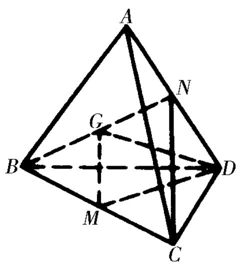


图 7 - 37

在$\triangle BCN$中，

M、G 分别为 BC、BN 的中点，

, $$GM = \frac{\sqrt{3}}{4}a。$$

在直角△GND 中，

$$GN = \frac{\sqrt{3}}{4}a，DN = \frac{1}{2}a，$$

, $$GD = \sqrt{GN^2 + DN^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{4}a。$$

在△DMG 中，

$$\cos\angle DMG = \frac{DM^2 + GM^2 - GD^2}{2 \cdot DM \cdot GM} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{16}a^2 - \frac{7}{16}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a}$$

$$= \frac{2}{3}，$$

即异面直线 DM、CN 所成角的余弦值为$\frac{2}{3}$。

说明　在本解法中，过点 M 与直线 CN 平行的直线 MG 一定在由点 M 和直线 CN 所确定的平面 BCN 内，因此，在解答过程中，首先给出平面 BCN，再在这个平面内给出过点 M 且与直线 CN 平行的直线 MG。

解法四　延长 AC 到 G，使 CG = AC，连接 DG（见图 7 - 38）。

N 为 AD 的中点，

, DG∥CN，

, 相交直线 DG、DM 所成的角就是异面直线 DM、CN 所成的角。

连接 GM，

设正四面体的棱长为 a，

则 $$DM = \frac{\sqrt{3}}{2}a，CN = \frac{\sqrt{3}}{2}a，$$

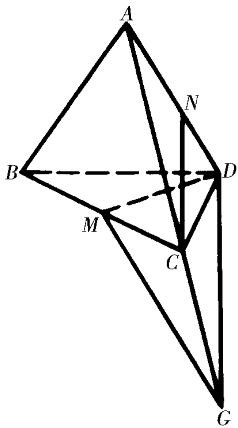


图 7 - 38

在△ADG 中，

N、C 分别为 AD、AG 的中点，

, DG = $\sqrt{3}$a。

在△CMG 中，

$$CM = \frac{1}{2}a, CG = a,$$

$$\angle MCG = 180° - \angle ACB = 120°$$

$$GM^2 = CG^2 + CM^2 - 2 \cdot CG \cdot CM \cdot \cos\angle MCG$$

$$= a^2 + \frac{1}{4}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{4}a^2,$$

在△MDG 中，

$$\cos\angle MDG = \frac{DM^2 + DG^2 - GM^2}{2 \cdot DM \cdot DG}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + 3a^2 - \frac{7}{4}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \sqrt{3}a}$$

$$= \frac{2}{3},$$

即异面直线 DM、CN 所成角的余弦值为$\frac{2}{3}$。

说明 在本解法中，过点 D 与直线 CN 平行的直线 DG 一定在由点 D 和直线 CN 所确定的平面内，这个平面就是平面 ACD，因此在解答过程中，是在平面 ACD 内，利用三角形中位线的性质给出过点 D 且与直线 CN 平行的直线 DG。

例 4 在正四面体 PABC 中，点 D 为棱 PC 的中点，求：DB 与平面 ABC 所成角的正弦值（见图 7 - 39）。

分析 本例中，给出 BD 与平面 ABC 所成的角，计算 BD 与平面 ABC 所成的角的关键是给出点 D 到平面 ABC 的垂线段，并计算这条垂线段的长。必须注意到，这条垂线段必须作在平面内，显

然,这条垂线段一定在过点 D 且与平面 ABC 垂直的平面内。

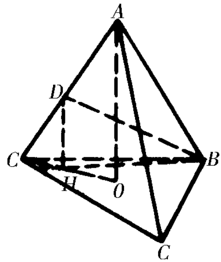


图 7 - 39

解法一 过点 P 作 PO⊥平面 ABC,垂足为 O,由四面体 PABC 为正四面体,点 O 为正三角形 ABC 的中心。

连接 OC,则平面 PCO⊥平面 ABC。

在平面 PCO 内,过点 D 作 DH⊥OC,垂足为 H,则 DH⊥平面 ABC。

连接 HB,则 HB 就是 DB 在平面 ABC 上的射影,∠DBH 就是 DB 与平面 ABC 所成的角。

PO⊥平面 ABC,DH⊥平面 ABC,

, DH∥PO。

点 D 为 PC 的中点,

, 点 H 为 OC 的中点。

设正四面体的棱长为 a,则在△PBC 中,$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,在△ABC 中,$OC=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,

, 在 Rt△PCO 中,$PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

, $$DH=\frac{\sqrt{6}}{6}a。$$

在 Rt△DBH 中,$\sin\angle DBH=\frac{DH}{BD}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

即 DB 与平面 ABC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$。

说明 在本解法中,我们先给出过点 D 且与平面 ABC 垂直的平面 PCO,然后在平面 PCO 内给出点 D 到平面 ABC 的垂线段

DH，即将点 D 到平面 ABC 的垂线段 DH 落实在平面 PCO 内，为计算垂线段 DH 的长度创造了条件。

解法二 过点 P 作 PO⊥平面 ABC，垂足为 O，由四面体 PABC 为正四面体知，点 O 为正三角形 ABC 的中心。

连接 OC，则平面 PCO⊥平面 ABC。

过点 D 作 DH⊥平面 ABC，垂足为 H，

D∈平面 PCO，

, DH⊂平面 PCO 且 H∈OC。

连接 HB，则 HB 就是 DB 在平面 ABC 上的射影，∠DBH 就是 DB 与平面 ABC 所成的角。

余下解法同解法一。

说明 在本解法中，我们仍是先给出过点 D 且与平面 ABC 垂直的平面 PCO，然后给出点 D 到平面 ABC 的垂线段 DH，并利用面面垂直的性质证明垂线段 DH 在平面 PCO 内，即同样将垂线段 DH 落实在平面 PCO 内，为计算垂线段 DH 的长度创造了条件。

例 5 如图 7 - 40 所示，已知直角△ABC 中，∠C = 90°，AC = BC = 4，点 D、E 分别是边 AB、AC 的中点，点 F 在边 BC 上，且 CF = 1，沿 DE 把△ABC 折成 60°的二面角，求点 F 到平面 ABD 的距离。

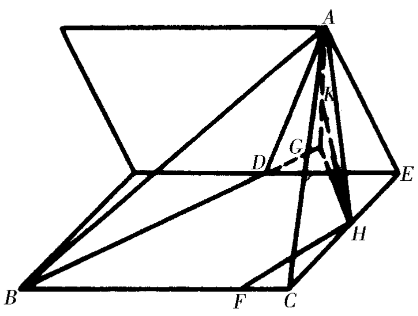


图 7 - 40

分析 表示点到面的距离的垂线段一定在过该点且与这个平

面垂直的平面内。注意到二面角的平面角所在的平面一般与二面角的面垂直,因此,若能过该点作出已知面为一个面的二面角的一个平面角,则我们可以在这个二面角的平面角所在平面内作出表示点到面的距离的垂线段。

解　　点 D、E 分别为 AB、AC 的中点,

,　$DE \parallel BC$。

　$\angle C = 90°$,

,　$DE \perp AE$,$DE \perp CE$,

,　$\angle AEC$ 为沿 DE 把 $\triangle ABC$ 折成的 60°的二面角的一个平面角,且 $\angle AEC = 60°$,平面 $AEC \perp$ 平面 BCED。

　$AE = EC$,

,　$\triangle AEC$ 为等边三角形,

在平面 AEC 内,过点 A 作 $AH \perp$ 平面 BCED,则点 H 为 CE 的中点,

　$AC = 4$,

,　$AH = \sqrt{3}$,$CH = 1$。

　$BC = 4$,$CF = 1$,

,　　　　$FH \parallel BD$,

,　$FH \parallel$ 平面 ABD,

,　点 H 到平面 ABD 的距离就是点 F 到平面 ABD 的距离。

在平面 BCED 内,过点 H 作 $HG \perp BD$,垂足为 G,连结 AG,则 $BD \perp AG$,

,　$BD \perp$ 平面 AHG,

,　$BD \subset$ 平面 ABD,

,　平面 $AHG \perp$ 平面 ABD。

在平面 AHG 内,过点 H 作 $HK \perp AG$,垂足为 K,

,　$HK \perp$ 平面 ABD,

,　线段 HK 的长就是点 H 到平面 ABD 的距离。

在 $Rt\triangle ABC$ 中知,$HG = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

由在 Rt△AGH 中，$AH=\sqrt{3}$，

，$$AG=\sqrt{\frac{15}{2}},$$

，$$HK=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{15}{2}}}=\frac{3\sqrt{5}}{5},$$

，　点 H 到平面 ABD 的距离为$\frac{3\sqrt{5}}{5}$，即点 F 到平面 ABD 的距离为$\frac{3\sqrt{5}}{5}$。

说明　在解答中，我们实质上是在二面角 A - BD - C 的平面角∠AGH 所在平面 AHG 内给出了表示点 H 到平面 ABD 的距离的垂线段 HK。

练 习 题

1. 如果一条直线和两个相交平面都平行，那么这条直线与这两个相交平面的交线平行。

2. 已知平面 α、β 都垂直于平面 γ，交线分别为 a、b，如果 $a\parallel b$，求证：$\alpha\parallel\beta$。

3. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 $AA_1=5$，$AB=12$，求直线 B_1C_1 与平面 A_1BCD_1 的距离。

4. 如图 7 - 41 所示，已知 ABCD 是矩形，$AB=3$，$AD=4$，$PA\perp$ 平面 ABCD，$PA=4$，Q 是 PA 的中点，

(1) 求点 Q 到 BD 的距离；

(2) 求 P 到平面 BDQ 的距离。

六、空间元素的位置关系

讨论空间元素（点、直线、平面）的位置关系是立体几何中的

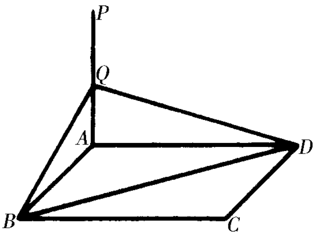


图 7 - 41

重要内容。讨论空间元素的位置关系一般采用这样的方法：先让部分空间的元素根据题设条件相对固定，然后让另一部分元素根据题设条件运动变化，这时空间元素间的各种位置关系将呈现出来，这样，我们就可以根据元素运动变化的规律讨论给出结论。

这就是说，我们在讨论空间元素的位置关系时必须有元素运动变化的意识。

例 1　分别和两条异面直线都相交的两条直线的位置关系是（　　）

A. 相交　B. 异面　C. 平行　D. 相交或异面。

分析　设两条异面直线为 a、b，与 a、b 都相交的两条直线为 c、d。设直线 c 与异面直线 a、b 分别交于点 A、B，并让它们的位置关系相对固定，再让直线 d 与异面直线 a、b 的交点分别在 a、b 上作移动，可以发现，d 与 c 的位置关系可以是相交（交点就是 A 或 B）或异面（见图 7 - 42）。

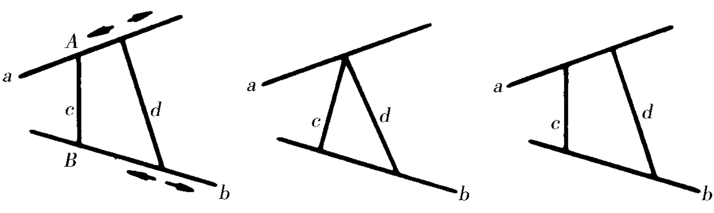


图 7 - 42

解　直线 c、d 的位置关系可以为相交或异面。

,　**选 D。**

例 2　已知异面直线 a、b 分别在平面 α、β 内，$\alpha \cap \beta = c$，那么直线 c 与直线 a、b 的位置关系是(　　)。

A c **一定同时与 a、b 都相交**　　B. c **至少与 a、b 中的一条相交 D，以上答案都不正确。**

C. c **至多与 a、b 中的一条相交**　D. **以上答案都不正确。**

解　由 $\alpha \cap \beta = c$ 可知，可以让平面 α、β 和直线 c 相对固定，然后让直线 a、b 分别在平面 α、β 内运动变化，注意到直线 a、c，直线 b、c 分别在平面 α、β 内，因此，它们分别平行或相交，又注意到 a、b 必须异面，因此，a、b 不能都与 c 平行。由此，我们可以得下列各图（见图 7 - 43）。

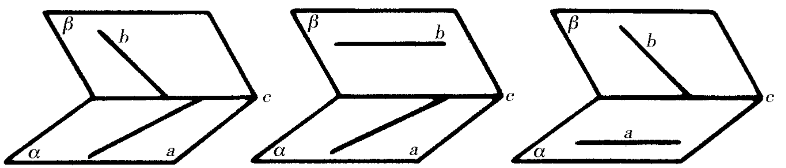


图 7 - 43

c **至少与 a、b 中的一条相交，**

,　**选 C。**

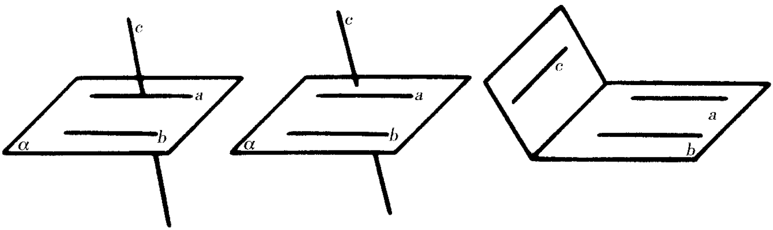
例 3　回答下列问题

直线 a∥b，直线 b、c 异面，则直线 a、c 的位置关系如何？

分析　空间元素在运动变化过程中，要注意：(1) 不能与题设条件矛盾；(2) 要有规律。两条直线的空间位置关系只有：相交；平行；异面，因此，在探寻两条直线的空间位置关系时，应该以两条直线的三种空间关系的可能性为目标。

解　由于直线 a∥b，因此，我们可以让直线 a、b 相对固定在平面 α 内，然后，让直线 c 在空间作运动变化。考虑到直线 b、c 异面，因此，直线 c 在空间的变化运动方式相对于平面 α 只有两种：

(1)保持直线 c 与平面 α 相交;(2)保持直线 c 与平面 α 平行。由此,可以得知直线 a、c 的位置关系为相交或异面(见图 7 - 44)。



a、c相交　　a、c异面　　a、c异面

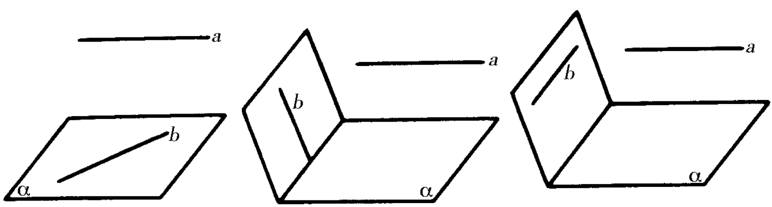
图 7 - 44

说明　直线 a、c 还不可能平行。事实上,若 a∥c,则由 a∥b 有 b∥c,这就与 b、c 异面矛盾。

例 4　若 a、b 是异面直线,且 a∥平面 α,则直线 b 与平面 α 的位置关系如何?

分析　直线与平面的位置关系有:直线在平面内或直线在平面外,直线在平面外又分为直线与平面平行或直线与平面相交,在探寻直线 b 与平面 α 的位置关系时,必须考虑到这些位置关系的可能性。

解　由直线 a∥平面 α,可以让直线 a 与平面 α 相对固定,然后让直线 b 在空间运动变化,直线 b 在运动变化中必须保持与直线 a 异面。由此,我们可以得到下列各图(见图 7 - 45)。



b⊂α　　b与a相交　　b∥a

图 7 - 45

,　**直线 b 与平面 α 的位置关系为:b⊂α 或 b 与 α 相交或 b**

$/\!/\alpha$。

例 5　已知射线 OA、OB 所成角的大小为锐角 θ，试求这个角在一个平面上的射影角（即射线 OA、OB 的射影所成的角）的取值范围（见图 7-46）。

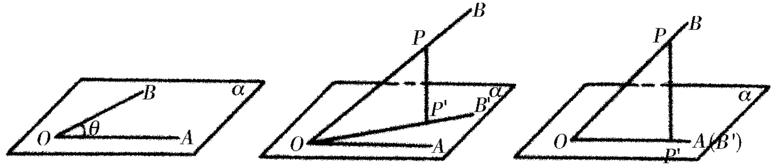


图 7-46

分析　我们可以用 $\angle AOB$ **在空间作运动变化的方式来获得** $\angle AOB$ **的射影角的取值范围。**

解　首先让射线 OA、OB 都在平面 α 内。

若射线 OA 在平面 α 内不动，让 $\angle AOB$ **绕射线 OA 作转动，则可以知道射影角的取值范围为** $[0,\theta]$；

在射线 OA、OB 上分别取点 P、Q，让 $\angle AOB$ **绕 PQ 作转动，则可以知道射影角的取值范围为** $[\theta,\pi]$ **（见图 7-47）。**

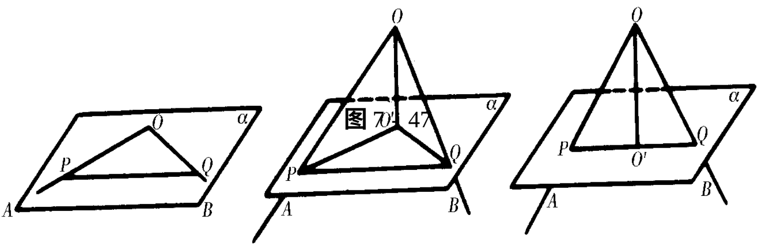


图 7-47

综上所述， $\angle AOB$ **在平面上的射影角的取值范围为** $[0,\pi]$。

说明　用同样的方法可以讨论 $\angle AOB$ **为直角或** $\angle AOB$ **为钝角的情况，且结论仍相同。**

例 6　如果直线 a、b 为异面直线，点 P 不在直线 a、b 上，那么过点 P 且与 a、b 都相交的直线有几条？

解　如图 7-48 所示，由于点 $P\notin a$ **且** $P\notin b$**，因此点 P 和直线**

a、点 P 和直线 b 分别确定平面 α、β，且平面 α、β 相交于经过点 P 的一条直线，设为 l。

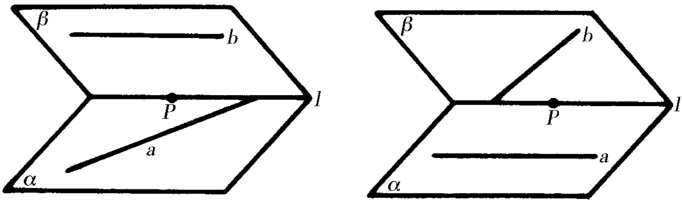


图 7 - 48

显然，直线 a、b 不可能同时与直线 l 平行，事实上，若 $a \parallel l$ 且 $b \parallel l$，则 $a \parallel b$，这就与直线 a、b 为异面直线矛盾。

若 $a \parallel l$、$b \nparallel l$ 或 $b \parallel l$、$a \nparallel l$，则过点 P 且与直线 a、b 都相交的直线不存在。事实上，这时 $a \parallel \alpha$ 或 $b \parallel \alpha$。

或 $a \nparallel l$ 且 $b \nparallel l$，则直线 l 就是过点 P 且与 a、b 都相交的直线。

综上所述，在题设条件下，过点 P 且与直线 a、b 都相交的直线最多只有一条（见图 7 - 49）

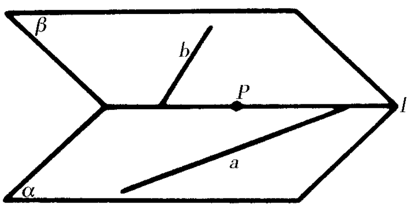


图 7 - 49

说明　严密的逻辑推理是讨论空间元素位置关系的基本方法。

由本例，我们可以得出一般的结论：若点 P 在经过其中一条直线且与另一条直线平行的平面内，则过点 P 且与异面直线 a、b 都相交的直线不存在；若点 P 不在经过其中一条直线且与另一条直线平行的平面内，则过点 P 且与异面直线 a、b 都相交的直线存

在且只有一条。

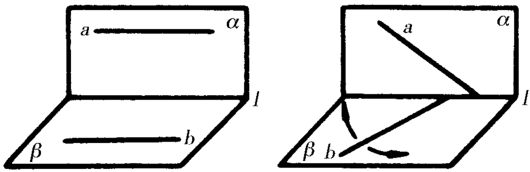
例 7　已知直二面角 α - l - β，直线 a $\subset\alpha$，直线 b$\subset\beta$，且 a 与 l 不垂直，b 与 l 不垂直，那么（　　）。

A a 与 b 可能垂直，但不平行　B. a 与 b 可能垂直，也可能平行

C. a 与 b 不垂直，但可能平行　D. a 与 b 不垂直，也不平行。

解　由于直线 a 和直线 l 都在平面 α 内，因此，直线 a 与直线 l 的位置关系为：a $/\!/$ l 或 a 与 l 相交（但不垂直）。

若 a $/\!/$ l，这时在平面 β 内，让 b $/\!/$ l，就有 a $/\!/$ b，因此直线 a、b 平行是可能的（如图 7 - 50（a）所示）。



（a）　　　　（b）

图 7 - 50

若 a 和 l 相交（但不垂直），这时由 $\alpha\perp\beta$ 可知，直线 a 在平面 β 上的射影就是直线 l，让直线 b 在平面 β 内作运动变化（如图 7 - 50（b）所示）可知，只有当直线 b $\perp$ l 时，b $\perp$ a，因此在题设条件下，直线 a、b 不可能垂直。

，　选 C。

练 习 题

1. 若直线 a、b 相交，直线 b、c 异面，则直线 a、c 的位置关系如何？

2. 若直线 a $\perp$ 平面 α，直线 a $\perp$ 直线 b，则直线 b 与平面 α 的位置关系如何？

3. 已知三条直线 a、b、c 中，任意两条都是异面直线，那么与

a、b、c 都相交的直线有多少条？

4. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 不是直二面角，直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$，且 a 与 l 不垂直，b 与 l 不垂直，那么（　　）。

A a 与 b 可能垂直，但不可能平行　B. a 与 b 可能垂直，也可能平行

C. a 与 b 不可能垂直，但可能平行　D. a 与 b 不可能垂直，也不可能平行。

七、空间元素量及空间元素位置关系量的计算

空间元素量通常是根据已知的若干空间元素量或空间元素位置关系量推求；空间元素位置关系量通常先转化为空间元素量，再进行推求。

空间最基本的几何元素量是：线段和角。空间元素的位置关系通常是用线段和角精确刻划。例如，空间两条异面直线的位置关系是用异面直线的距离（即异面直线的公垂线段的长）和异面直线所成的角来刻划的。

由上述可知，空间元素及空间元素量位置关系量的计算可归结为根据已知的线段和角推求未知的线段和角。为此，必须运用由线段和角构成的关系式建立以线段和角为求知量的多元方程，而这些多元方程的建立常常要借助于三角形的边角关系（锐角或钝角的三角函数、正弦定理、余弦定理等）。因此，将线段和角看成三角形的元素，借助于解三角形的方法是推求线段和角这两个基本几何元素量的基本方法，建立方程（组）是其中的基本思想。

（一）空间基本几何元素量的计算

例 1　正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 8cm，点 M、N、P 分别是 A_1B_1、AD、BB_1 的中点。设过 M、N、P 三点的平面与 BC 交于 Q，求线段 PQ 的长。

解　在平面 A_1ABB_1 内，连接 MP 并延长交 AB 的延长线于点 R，连结 NR，交 BC 于 Q，则点 Q 就是过 M、N、P 三点的平面与 BC

的交点(见图 7 - 51)。

在平面 A_1ABB_1 内,

点 M、P 为棱 A_1B_1、BB_1 的中点,棱长为 8cm,

, PB = 4cm,BR = 4cm。

在平面 ABCD 内,

N 为 AD 的中点,

, AN = 4cm。

$BQ /\!/ AN$,

, $\dfrac{BQ}{AN} = \dfrac{BR}{AR}$,

$\dfrac{BQ}{4} = \dfrac{4}{12}$,

, $BQ = \dfrac{4}{3}$。

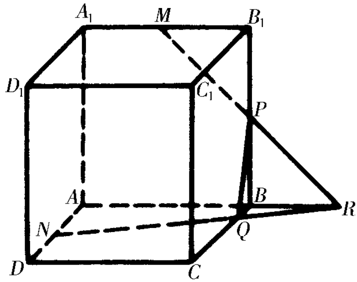


图 7 - 51

在 Rt△PQB 中,

$$PQ = \sqrt{BQ^2 + PB^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}(\text{cm})。$$

说明 在解题过程中,我们将线段 PQ 置于直角△PQB 中求得其长。

例 2 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M 为 BB_1 的中点,点 N 为 AB 的中点,点 O 为 BC_1、B_1C 的交点,一直线过点 O 且与直线 AM、CN 分别交于点 P、Q,设正方体的棱长为 1,求 PQ 的长。

分析 解立体几何计算题,一般应由“作图、证明、计算”三个部分组成。首先应作出必要的辅助平面或辅助线;然后通过推理、论证在后继计算中相关的几何元素的特征;最后进行计算。这三个部分是一个整体。

直线 AM 和 CN 是异面直线,直线 PQ 就是过点 O 与异面直线 AM、CN 都相交的直线,直线 PQ 一定在点 O 和直线 AM 所确定的平面内,这个平面就是平行直线 OM、AD 所确定的平面。直线 CN

与这个平面的交点就是直线 CN **与直线** AD **的交点，这个交点就是** Q**，连接** OQ**，**OQ **与** AM **的交点就是** P**。在直线** OM**、**AD **所确定的平面内，即可求得线段** PQ **的长。这样，我们就将被计算的线段置于一个适当的平面内，为计算这条线段的长创造了条件。**

解　**连接** OM**，**

M **为棱** BB_1 **的中点，**

, 　OM$/\!/$BC**，**

BC$/\!/$AD**，**

, 　OM **和** AD **确定一个平面。**

在平面 ABCD **内，直线** CN **与** AD **相交，在** OM **和** AD **确定的平面内，过这个交点和点** O **作直线与** AM **相交，这条直线就是过点** O **与直线** AM**、**CN **都相交的直线，直线** CN **与** AD **的交点就是点** Q**，这条直线与** AM **的交点就是点** P**（见图** 7 - 52**）。**

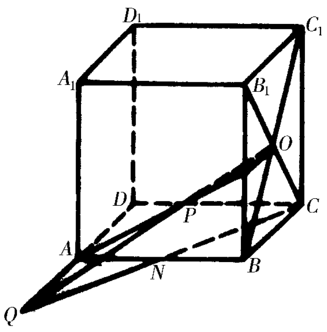


图 7 - 52

在平面 ABCD **内，**

N **为棱** AB **的中点，**

, 　AQ = 1。

点 M **为棱** BB_1 **的中点，**

, 　Rt△ABM **中，**

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}。$$

$$OM = \frac{1}{2}，AQ = 1，$$

$$,AP = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{5}}{3}。$$

在 Rt△APQ **中，**

$$PQ = \sqrt{AQ^2 + AP^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3}。$$

例 3　**异面直线** a**、**b **所成的角为** 60°**，**A**、**B **是直线** a **上两点，**

$AB=c$,$AA'\perp b$,$BB'\perp b$,A'、B'为垂足,求线段$A'B'$的长。

解法一 设异面直线 a、b 的公垂线段为 MN,则 $MN\perp a$ 且 $MN\perp b$。

过点 N 作直线 $a'\parallel a$,则相交直线 a'、b 所成的角就是异面直线 a、b 所成的角,由题设可知为 $60°$。

在平行直线 a' 和 a 确定的平面内,分别过点 A、B 作 $AA''\parallel MN$,$BB''\parallel MN$ 交直线 a' 于点 A''、B'',由 $MN\perp a$,$NM\perp b$ 知,$AA''\perp a'$,$AA''\perp b$,$BB''\perp a$,$BB''\perp b$(见图 7-53)。

, AA''、BB''都垂直于相交直线 a'、b 所确定的平面。

连接 $A'A''$,$B'B''$,

$AA'\perp b$,$BB'\perp b$,

, $A'A''\perp b$,$B'B''\perp b$,

显然,四边形 $AA''B''B$ 为矩形,

$AB=c$,

, $A''B''=c$。

过点 A''作 $A''C\parallel b$ 交 $B'B''$于 C,则四边形 $A''A'B'C$ 为矩形,$\angle B''A''C=60°$,

, $A'B'=A''C$,

在 $Rt\triangle A''B''C$ 中, $A''C=A''B''\cos 60°$

$$=\frac{1}{2}c。$$

, $$A'B'=\frac{1}{2}c。$$

解法二 过点 A 作 $b'\parallel b$,过点 B' 作 $B'C\parallel AA'$ 交 b' 于 C,则四边形 $AA'B'C$ 为平行四边形(见图 7-54)。

$AA'\perp b$,

, 四边形 $AA'B'C$ 为矩形,

, $b'\perp B'C$。

$b\perp BB'$,$b'\parallel b$,

, $b'\perp BB'$,

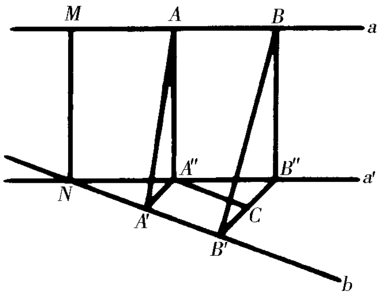


图 7 - 53

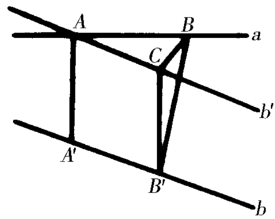


图 7 - 54

,　　$b' \perp$ 平面 BCB'，

,　　$b' \perp BC$，

,　　$\angle ACB = 90°$。

　　异面直线 a、b 所成角为 60°，

,　　$\angle BAC = 60°$。

在 $Rt\triangle ABC$ 中，,　　$AB = c$，

,　　$AC = AB\cos 60° = \frac{1}{2}c$，

,　　$A'B' = \frac{1}{2}c$。

说明　本例的两种解法中，线段 $A'B'$ 的长都是在直角三角形中，求出相应线段的长完成的。

例 4　把正方形 ABCD 沿对角线 AC 折成直二面角 B - AC - D，点 E、F 分别为 AD、BC 的中点，点 O 是正方形的中心，求折起后的 $\angle EOF$ 的大小。

解法一　在平面 ACD 内，过点 E 作 $EE_1 \perp AC$，在平面 ABC 内，过点 F 作 $FF_1 \perp AC$，垂足分别为 E_1、F_1。

　　二面角 B - AC - D 为直二面角，

,　　$EE_1 \perp$ 平面 ABC，

,　　$EE_1 \perp FF_1$，

,　　EE_1、FF_1 为互相垂直的两条异面直线，E_1F_1 为公垂线

段,

, 线段 EF 的长就是异面直线 EE_1、FF_1 上两点的距离。

设正方形 ABCD 的边长为 a,

, 在△ACD 中,$EE_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}a$,

在△ABC 中,$FF_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}a$,

,
$$E_1F_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

,
$$\begin{aligned} EF^2 &= E_1F_1{}^2 + EE_1{}^2 + FF_1{}^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{8}a^2 \\ &= \frac{3}{4}a^2。\end{aligned}$$

点 O 为正方形的中心,

, $OE = OF = \frac{1}{2}a$,

在△EOF 中,

$$\begin{aligned} \cos\angle EOF &= \frac{OE^2 + OF^2 - EF^2}{2 \cdot OE \cdot OF} \\ &= \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} \\ &= -\frac{1}{2}。\end{aligned}$$

由 $0° < \angle EOF < 180°$知,$\angle EOF = 120°$。

解法二　如图 7 - 56 所示,在平面 ACD 内,过点 E 作 $EH \perp AC$,垂足为 H。

二面角 B - AC - D 为直二面角,

, $EH \perp$ 平面 ABC。

连接 HF,则 $EH \perp HF$。

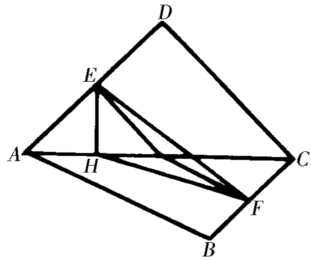


图 7 - 56

设正方形 ABCD 的边长为 a，

E 为 AD 有中点，

, $EH = \frac{\sqrt{2}}{4}a$，$AH = \frac{\sqrt{2}}{4}a$，

,$CH = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$。

F 为 BC 的中点，

, $CF = \frac{1}{2}a$，

在△HCF 中，

$\angle HCF = 45°$，

, $$HF^2 = CH^2 + CF^2 - 2CH \cdot CF \cdot \cos 45°,$$

$$= \frac{9}{8}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{5}{8}a^2。$$

在 Rt△EHF 中， $EF^2 = HE^2 + HF^2$

$$= \frac{1}{8}a^2 + \frac{5}{8}a^2$$

$$= \frac{3}{4}a^2。$$

点 O 为正方形 ABCD 的中心，

, $OE = OF = \frac{1}{2}a$，

在△EOF 中，

$$\cos\angle EOF = \frac{OE^2 + OF^2 - EF^2}{2 \cdot OE \cdot OF}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a}$$

$$= -\frac{1}{2}。$$

由 $0° < \angle EOF < 180°$ 知，$\angle EOF = 120°$。

解法三 在平面 ACD 内，过点 E 作 $EE_1 \perp AC$，垂足为 E_1，在平面 ABC 内，过点 F 作 $FF_1 \perp AC$，垂足为 F_1。

在平面 ABC 内，分别过点 E_1、F 作 FF_1、AC 的平行线交于点 G，则四边形 E_1F_1FG 为矩形（见图 7 - 57）。

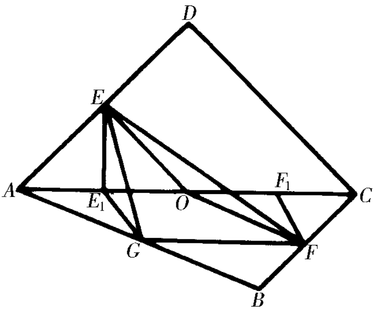


图 7 - 57

, $E_1G \perp AC$，

, $AC \perp$ 平面 EE_1G，

由 $FG /\!/ AC$ 知，$FG \perp$ 平面 EE_1G。

, $EG \perp FG$，

, $\triangle EGF$ 为直角三角形。

二面角 B - AC - D 为直二面角，

, $EE_1 \perp$ 平面 ABC，

, $EE_1 \perp E_1G$。

设正方形 ABCD 的边长为 a，

点 E、F 分别为 AD、BC 的中点，

, $$EE_1 = FF_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}a，E_1F_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a，$$

, $$E_1G = \frac{\sqrt{2}}{4}a。$$

在 $Rt\triangle EE_1G$ **中，**
$$EG^2 = EE_1^{\ 2} + E_1G^2 = \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{4}a^2。$$

在 $Rt\triangle EFG$ **中，**
$$EF^2 = EG^2 + GF^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{4}a^2。$$

点 O **为正方形** ABCD **的中心，**

,
$$OE = OF = \frac{1}{2}a。$$

在 $Rt\triangle EOF$ **中，**
$$\cos\angle EOF = \frac{OE^2 + OF^2 - EF^2}{2\cdot OE\cdot OF} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a} = -\frac{1}{2}。$$

由 $0° < \angle EOF < 180°$**知，**$\angle EOF = 120°$。

说明　本例实际就是求夹在二面角 B - AC - D **内的线段** EF **的长，然后在**$\triangle EOF$ **中求**$\angle EOF$ **的大小。本例中求线段** EF **的长应用了下面三种方法：**

（1）把问题转化为求分别在二面角的两个面内的且以二面角的棱为公垂线的异面直线上两点的距离；

（2）利用二面角 B - AC - D **为直二面角，直接将线段** EF **置于直角**$\triangle EHF$ **中求其长；**

（3）在二面角的一个面内添加矩形，以此将线段 EF **置于直角**$\triangle EGF$ **中求其长。**

以上三种方法有一个共同的实质,即要求一条线段的长,可将这条线段置于一个三角形中,借助于解三角形的方法求解。

例 5　如图 7 - 58 所示,设平面 AC 和平面 BD 相交于 BC,它

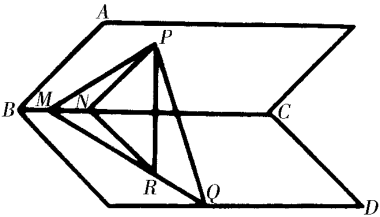


图 7 - 58

们所成的二面角为 45°,点 P、Q 分别是平面 AC、BD 内的点,直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 上的射影,点 M 在棱 BC 上,PQ 与平面 BD 所成角为 β,$\angle CMQ = \alpha$,PM = a,求线段 PQ 的长。

解　过点 P 作 $PR \perp$ 平面 BD,垂足为 R。

PQ 在平面 BD 上的射影为 MQ,

,　$R \in MQ$。

在平面 BD 内,过点 R 作 $RN \perp BC$,垂足为 N,连接 PN,则 $PN \perp BC$,

,　$\angle PNR$ 为二面角 P - BC - Q 的一个平面角,由题设可知,$\angle PNR = 45°$。

直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 上的射影,

,　$\angle PQR$ 就是 PQ 与平面 BD 所成的角,由题设可知,$\angle PQR = \beta$。

设 PQ = x,

在 $Rt\triangle PRQ$ 中,$PR = PQ\sin\angle PQR = x\sin\beta$。

在 $Rt\triangle PRN$ 中,

$\angle PNR = 45°$,

,　$RN = PR = x\sin\beta$,$PN = \sqrt{2}x\sin\beta$。

在 $Rt\triangle PNM$ 中,

$PM = a$,

,　$MN^2 = PM^2 - PN^2$,

$$= a^2 - 2x^2\sin^2\beta。$$

在 Rt△RNM 中,

$$\angle NMR = \alpha,$$

, $MN = RN\text{ctg}\alpha = x\sin\beta\text{ctg}\alpha$,

, $x^2\sin^2\beta\text{ctg}^2\alpha = a^2 - 2x^2\sin^2\beta$,

$$x^2 = \frac{a^2}{\sin^2\beta(2 + \text{ctg}^2\alpha)}$$

$$= \frac{a^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta(1 + \sin^2\alpha)}。$$

, $x = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin\beta\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$,即 $PQ = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin\beta\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$。

说明　在本例的解题过程中,我们在用直角三角形中利用勾股定理列出了未知量 x(即线段 PQ 的长)的方程 $x^2\sin^2\beta\text{ctg}^2\alpha = a^2 - 2x^2\sin^2\beta$,解这个方程得未知量 x 的值,这是求未知量取值的常用方法。必须注意到,在 Rt△PNM 中,等量关系 $PM^2 = MN^2 + PN^2$ 是方程的原始形式。

(二)空间的角

两条异面直线所成的角,直线与平面所成的角,平面与平面所成的二面角是三种空间的角,它们的求法,一般是化为求两条相交直线的角,然后将其看成三角形的元素,再解三角形求解。

设 a、b 是异面直线,经过空间任意一点 o,分别引直线 $a' \parallel a$,$b' \parallel b$,把 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角。由此可知,求异面直线所成角的大小,必须平行移动直线,使求异面直线所成角的大小转化为求相交直线所成角的大小。必须注意到,移动后的直线必在被移动的直线和移动后的直线所经过的点所确定的平面内。这时,常常要借助于三角形的中位线性质或平行四边形的对边平行等性质。

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角,叫做这条斜线和这个平面所成的角 若一条直线垂直于平面,则称它们所成的角为直角 若一条直线和平面平行或在平面内,则称它们所成的

角为 0°的角。

求斜线与平面所成的角是转化为求斜线和它在平面上的射影所成角,斜线在平面上的射影就是过斜足和斜线上一点(除斜足)在平面上的射影的一条直线,寻找点在平面上的射影必须过这一点作平面的垂线,这条垂线必在过这一点与平面垂直的平面内。

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角。以二面角的棱上任意一点为端点,在两个面内分别作垂直于棱的两条射线,这两条射线所成的角叫做二面角的平面角。二面角的大小,可以用它的平面角的大小来度量,寻找二面角的平面角常用以下几种方法:

(1) 自二面角的棱上一点分别在二面角的两个面内作垂直于棱的两条射线或作棱的垂面得垂面与二面角的两个面的两条交线(射线),两条射线所成的角就是二面角的平面角。

(2) 当自二面角的一个面内一点存在或可作另一个面的垂线,这时可借助于三垂线定理或其逆定理作出二面角的平面角。必须注意到自二面角的一个面内一点到另一个面的垂线必在面的垂面内。

例 1　在空间四边形 ABCD 中,对角线 $AC = 10$,$BD = 6$,点 M、N 分别为 AB、CD 的中点,且 $MN = 7$,求异面直线 AC 和 BD 所成角的大小。

分析　由点 M、N 分别为棱 AB、CD 的中点知,可利用三角形的中位线性质平行移动直线,将异面直线所成的角转化为相交直线所成的角。

解　取 AD 的中点 P,连接 MP、NP,则由 M、N 为 AB、CD 的中点知,$MP \parallel BD$,$NP \parallel AC$,

,　相交直线 MP、NP 所成的角就是异面直线 AC 和 BD 所成的角(见图 7 - 59)。

在 $\triangle ABD$ 中,$MP = \frac{1}{2}BD$,

$BD = 6$,

∴ $MP = 3$。

在△ACD 中,$NP = \frac{1}{2}AC$,

$AC = 10$,

∴ $NP = 5$。

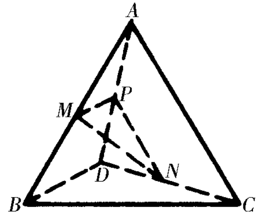


图 7 - 59

在△MNP 中,

$MN = 7$,

∴ $$\cos\angle MPN = \frac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2 \cdot MP \cdot NP}$$

$$= \frac{9 + 25 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$= -\frac{1}{2}。$$

∴ $\angle MPN = 120°$。

∴ 异面直线 AC、BD 所成的角为 60°

说明　本例也可以取 BC 的中点,利用三角形的中位线性质将异面直线所成的角转化为相交直线所成的角。

必须注意到,∠MPN 不是异面直线 AC、BD 所成的角,其补角才是异面直线 AC、BD 所成的角。

例 2　在正方形 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别是 BB_1、CD 的中点,求 AE 与 D_1F 所成的角。

解　取 AB 的中点 G,连接 A_1G、FG(见图 7 - 60)。

F 是 CD 的中点,

∴ GF、AD 平行且相等,

A_1D_1、AD 平行且相等,

∴ GF、A_1D_1 平行且相等,

∴ 四边形 GFD_1A_1 是平行四边形,

∴ $A_1G /\!/ D_1F$。

∴ 相交直线 A_1G 与 AE 所成的角就是异面直线 AE、D_1F 所成的角。

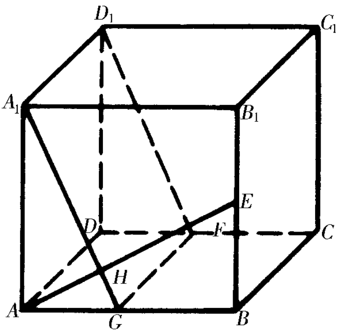


图 7 - 60

设　$A_1G \cap AE = H$,

E 是 BB_1 的中点,

,　$Rt\triangle A_1AG \cong \triangle ABE$

,　$\angle GA_1A = \angle GAH$,

,　$\angle AHA_1 = 90°$,

,　直线 AE 与 D_1F 所成的角为直角。

说明　若两条异面直线互相垂直,则求异面直线所成角问题就被转化为证明两条直线互相垂直的问题。

例 3　在正四面体 $ABCD$ 中,M 是 AC 的中点,N 是面 BCD 的中心,DE 是 $\triangle ABD$ 的高,求 MN 与 DE 所成的角的余弦值。

分析　过点 N 作 DE 的平行线,一定在点 N 和 DE 所确定的平面内。

解　连接 DN,并延长线交 BC 于 F(见图 7 - 61)。

$\triangle BCD$ 为正三角形,点 N 为 $\triangle BCD$ 的中心,

,　点 F 为 BC 边的中点。

连接 EF,则 EF 为 $\triangle ABC$ 的中位线。

在平面 DEF 内,过点 N 作 $NG /\!/ DE$,交 EF 于 G,则相交直线 MN 与 NG 所成的角就是异面直线 MN 与 DE 所成的角。

连接 MF,则 MF 为 $\triangle ABC$ 的中位线。

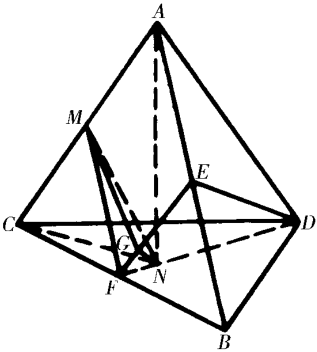


图 7 - 61

连接 MG。

设正四面体的棱长为 1，

在△MFG 中，

$$MF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2},FG=\frac{1}{3}EF=\frac{1}{6},\angle MFG=60^\circ$$

，

$$MG^2=MF^2+FG^2-2\cdot MF\cdot FG\cdot\cos\angle MFG$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{36}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\cos60^\circ$$

$$=\frac{7}{36}。$$

在△DEF 中，

$$GN=\frac{1}{3}DE=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

连接 AN，则 AN⊥平面 BCD，连接 CN，则在△CAN 中，MN 为直角△ACN 的斜边上的中线，

，

$$MN=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}。$$

在△MNG 中，

$$\cos\angle MNG=\frac{MN^2+GN^2-MG^2}{2\cdot MN\cdot GN}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{36}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{18}。$$

说明　**在本例的解法中,先给出点** N **和** DE **所确定的平面** DEF **,然后在平面** DEF **内作出过点** N **且与** DE **平行的直线得表示异面直线** MN **与** DE **所成角的相交直线** MN **与** GN **所成的角。**

例 4　**已知正方体** ABCD - EFGH **的棱长为** a **,点** P **在** AC **上,点** Q **在** BG **中,** AP = BQ = a **,求直线** PQ **与平面** ABCD **所成角的正切值(见图** 7 - 62 **)。**

分析　**由平面** BCGF ⊥ **平面** ABCD **可知,过点** Q **作平面** ABCD **的垂线一定在平面** BCGF **内,点** Q **在平面** ABCD **上的射影一定在两垂直平面的交线上。**

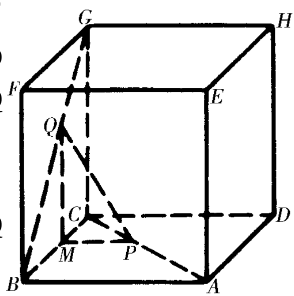


图 7 - 62

解　**在平面** BCGF **内,过点** Q **作** $QM\perp BC$**,垂足为** M。

$GC\perp BC$,

, $QM/\!/GC$,

$GC\perp$ **平面** ABCD,

, $QM\perp$ **平面** ABCD,

连结 PM**,则** PM **为直线** PQ **在平面** ABCD **上的射影,**

, $\angle QPM$ **就是** PQ **与平面** ABCD **所成的角。**

$QM/\!/GC$,

, $\frac{BQ}{BG}=\frac{BM}{BC}$

, $AP=BQ, BG=AC$

, $\frac{AP}{AC}=\frac{BM}{BC}$

$PM/\!/AB$

正方体的棱长为 a，AP = BQ = a，

， $\frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{QM}{a}$，$\frac{\sqrt{2}a - a}{\sqrt{2}a} = \frac{PM}{a}$，

， $QM = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，$PM = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a$。

在 Rt△PQM 中，$\tan\angle QPM = \frac{QM}{PM} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$，

即 PQ 与平面 ABCD 所成角的正切值为$\sqrt{2}+1$。

例 5 在 120°的二面角 P - a - Q 的两个面 P 和 Q 内，分别有点 A 和点 B，已知点 A、点 B 到棱 a 的距离分别为 2 和 4，且线段 AB = 10。

(1) 求直线 AB 与棱 a 所成的角；

(2) 求直线 AB 与平面 Q 所成的角。

解 (1) 设 A、B 在棱 a 上的射影分别为 C、D，则线段 AC、BD 的长分别为点 A、点 B 到棱 a 的距离，由题设可知，AC = 2，BD = 4。

在平面 Q 内，分别过点 C、点 B 作 CE∥BD，BE∥a 相交于点 E，则四边形 BDCE 为矩形，相交直线 AB、BE 所成的角就是异面直线 AB 与棱 a 所成的角（见图 7 - 63）。

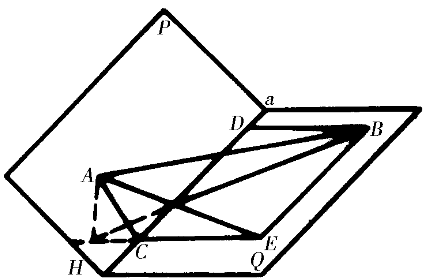


图 7 - 63

AC⊥a，CE⊥a，

， ∠ACE 就是二面角 P - a - Q 的一个平面角，由题设可

知,$\angle ACE = 120°$。

在$\triangle ACE$中, $AC = 2, CE = 4$,

, $AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2 \cdot AC \cdot CE \cdot \cos\angle ACE$

$= 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos 120°$

$= 28$,

, $AE = 2\sqrt{7}$。

$a \perp AC, a \perp CE$,

, $a \perp$ 平面 ACE,

$BE /\!/ a$,

, $BE \perp$ 平面 ACE,

, $BE \perp AE$,

, 在 $Rt\triangle ABE$ 中,$\sin\angle ABE = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$,

即直线 AB 与棱 a 所成的角为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{5}$。

(2) 由(1)可知,平面 $ACE \perp$ 平面 Q。

在平面 ACE 内,过点 A 作 $AH \perp EC$ 的延长线上一点 H,则 $AH \perp$ 平面 Q,

连结 BH,则 BH 为 AB 在平面 Q 上的射影,

, $\angle ABH$ 就是直线 AB 与平面 Q 所成的角。

$\angle ACE = 120°$,

, $\angle ACH = 60°$。

在 $Rt\triangle ACH$ 中, $AC = 2$,

, $AH = \sqrt{3}$。

在 $Rt\triangle ABH$ 中, $AB = 10$,

, $\sin\angle ABH = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$,即 AB 与平面 Q 所成的角为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{10}$。

说明 为了简便,一般可选择异面直线中一条直线上一点作

另一条直线的平行线得表示异面直线所成角的相交直线所成的角,所作的这条平行直线一定在一条异面直线上一点和另一条异面直线所确定的平面内。在本例中,过点 B **与直线** a **平行的直线一定在由点** B **和直线** a **确定的平面** Q **内。同理,也可以在平面** P **内,过点** A **作与棱** a **平行的直线而得表示异面直线所成角的相交直线所成的角。**

必须注意到,在过点 A **作平面** Q **的垂线时,是将垂线作在过点** A **且与平面** Q **垂直的平面** ACE **内,这就为求** AH **的长度奠定了基础。**

例 6　**在二面角** M - l - N **中,**Rt△ABC **在面** M **内,斜边** AB **在棱** l **上,两直角边** AC、BC **与面** N **所成角分别为** α、β**,二面角** M - l - N **的大小为** θ**,求证:**$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\theta$**。**

分析　**在证明过程中,必须有将** AC、BC **与面** N **所成的角** α、β**,及二面角的平面角置于三角形中(直角三角形尤好)的意识,以便于用三角函数的定义给出它们的三角函数表达形式。**

由于被证的是等式,因此在证明过程中必须给出相应的等量关系式,以便于转换成三角函数关系等式。

解　**如图** 7 - 64 **所示,过点** C **作** CH⊥**平面** N**,垂足为** H**,在平面** N **内,过点** H **作** HO⊥l**,垂足为** O**,连接** CO**,则** CO⊥l**,**

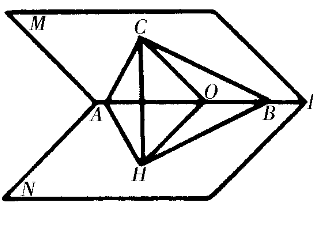


图 7 - 64

,　　∠COH **就是二面角** M - l - N **的一个平面角,由题设可知,**∠COH = θ**。**

连接 AH、BH**,则** AH、BH **分别为** AC、BC **在平面** N **上的射影,**

,　　∠CAH、∠CBH **分别为** AC、BC **与平面** N **所成的角,由题**

设可知，$\angle CAH=\alpha$**，**$\angle CBH=\beta$。

在 Rt△ABC **中，** AB **为斜边，**

， $$AC^2+BC^2=AB^2,$$

， $$\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{AB^2}{AC^2\cdot BC^2}=\frac{1}{\left(\frac{AC\cdot BC}{AB}\right)^2}。$$

$$CO\perp AB,$$

， $$AC\cdot BC=AB\cdot CO,$$

$$CO=\frac{AC\cdot BC}{AB}$$

， $$\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{CO^2},$$

， $$\left(\frac{AH}{AC}\right)^2+\left(\frac{AH}{BC}\right)^2=\left(\frac{AH}{CO}\right)^2。$$

在 Rt△AHC **中，**$\frac{CH}{AC}=\sin\alpha$**，**

在 Rt△BHC **中，**$\frac{CH}{BC}=\sin\beta$**，**

在 Rt△CHO **中，**$\frac{CH}{CO}=\sin\theta$**，**

， $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\theta$。

例 7　**已知正方形** ABCD **的边长为** a**，以对角线** BD **为折痕折成直角二面角** A - BD - C **连接** AC**，求：**

（1**）面** ABC **与面** ADC **所成二面角的大小；**

（2**）面** ABC **与面** BCD **所成二面角的大小。**

分析　**考虑到**△ABC、△ADC **都是等腰三角形，可用定义法给出二面角** B - AC - D **的平面角；**

考虑到 AC⊥BD**，可以过** BD **作二面角** B - AC - D **的棱** AC **的垂面给出其平面角。**

解　**（**1**）解法一如图** 7 - 65 **所示，取** AC **的中点** E**，连接** BE、DE。

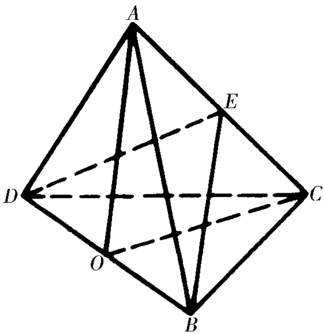


图 7 - 65

$AB=BC$，$AD=DC$，

, $BE\perp AC$，$DE\perp AC$，

, $\angle BED$ 就是面 ABC 与面 ADC 所成二面角的一个平面角。

取 BD 的中点 O，连接 AO、CO，则由正方形的性质可知，$AO\perp BD$，$CO\perp BD$，

, $\angle AOC$ 就是直二面角 A - BD - C 的一个平面角，

, $\angle AOC=90°$。

在 Rt$\triangle AOC$ 中， $AO=CO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

, $AC=a$，

, $\triangle ABC$，$\triangle ADC$ 都是等边三角形，

, 在$\triangle ABC$ 中，$BE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

在$\triangle ADC$ 中，$DE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

在$\triangle BED$ 中， $BD=\sqrt{2}a$，

$$,\qquad \cos\angle BED=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=-\frac{1}{3},$$

$$,\qquad \angle BED=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right),$$

即面 ABC **与面** ADC **所成二面角为** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$。

解法二　由解法一知,$BD\perp$ **平面** AOC,

, 　$AC\perp BD$。

如图 7 - 66 **所示,过** BD **作平面** $BDE\perp AC$,**交** AC **于** E,**则** $AC\perp BE$,$AC\perp DE$,

, 　$\angle BED$ **就是面** ABC **与面** ADC **所成二面角的一个平面角。**

同解法一,可得 $\angle BED=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$,**即面** ABC **与面** ADC **所成二面角为** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$。

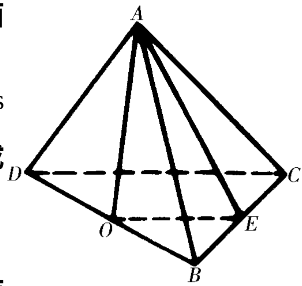


图 7 - 66

分析　考虑到面 ABD **与面** BCD **垂直,可在面** ABD **内,过面** ABC **内一点** A **作面** BCD **的垂线,因此,可以用三垂线定理或其逆定理给出面** ABC **与面** BCD **所成二面角的平面角。**

解　(2)**在面** ABD **内,过点** A **作** $AO\perp BD$,**垂足为** O,**则由** $AB=AD$ **知**,O **为** BD **的中点。**

　二面角 A - BD - C **为直二面角,**

, 　**面** $ABD\perp$ **面** BCD,

, 　$AO\perp$ **面** BCD。

在面 BCD **内,取** BC **的中点** E,**连接** OE,**则** $OE\parallel CD$,

, 　$OE\perp BC$。

连接 AE，则 $AE \perp BC$，

,　　$\angle AEO$ 为面 ABC 与面 BCD 所成二面角的一个平面角。

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{2}a, OE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a,$$

在 $Rt\triangle AEO$ 中，$\tan\angle AEO = \frac{AO}{OE} = \sqrt{2}$，

,　　$\angle AEO = \arctan\sqrt{2}$，即面 ABC 与面 BCD 所成的二面角为 $\arctan\sqrt{2}$。

例 8　一条长为 2 的线段 AB 夹在互相垂直的两个平面 α、β 之间，AB 与 α 所成角为 $45°$，与 β 所成角为 $30°$，且 $\alpha\cap\beta = l$，$AC\perp l$，$BD\perp l$，C、D 为垂足，求：

(1) 线段 CD 的长；

(2) AB 与 CD 所成的角；

(3) 平面 ABD 与平面 ABC 所成二面角的正弦值。

解(1)　如图 7 - 67 所示，连接 AD。

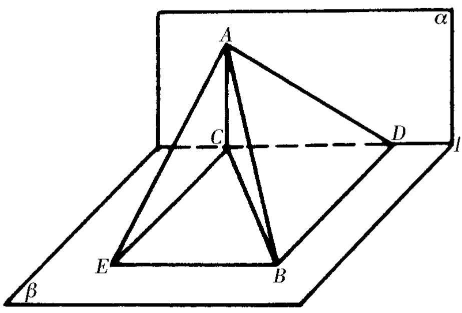


图 7 - 67

$\alpha\perp\beta$，$BD\perp l$，

,　　$BD\perp\alpha$，

,　　AD 就是 AB 在平面 α 上的射影，

,　　$\angle BAD$ 就是 AB 与平面 α 所成的角，由题设可知，$\angle BAD = 45°$。

连接 BC。

$\alpha\perp\beta$，$AC\perp l$，

，　$AC\perp\beta$，

，　BC 就是 AB 在平面 β 上的射影，

，　$\angle ABC$ 就是 AB 与平面 β 所成的角，由题设可知，$\angle ABC=30°$。

在 Rt$\triangle ABD$ 中，　$AB=2$，$\angle BAD=45°$，

，　$AD=\sqrt{2}$，

在 Rt$\triangle ABC$ 中，　$AB=2$，$\angle ABC=30°$，

，　$AC=1$，

，　在 Rt$\triangle ACD$ 中，$CD^2=AD^2-AC^2$，$CD=1$。

解(2)　如图 7 - 68 所示，在平面 β 内，过点 B、C 分别作 l、BD 的平行线，它们相交于点 E，连接 AE，则 $EC\perp l$，相交直线 AB、BE 所成的角就是异面直线 AB 与 CD 所成的角。

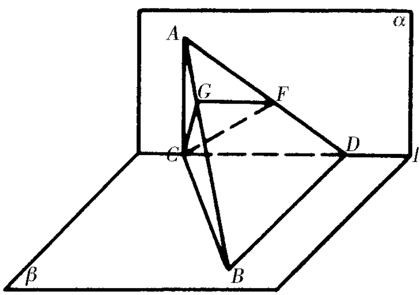


图 7 - 68

$EC\perp l$，$AC\perp l$，

，　$l\perp$ 平面 ACE，

，　$BE\perp$ 平面 ACE，

，　$BE\perp AE$。

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$AB=2$，$BE=CD=1$，

，　$\angle ABE=60°$，即异面直线 AB 与 CD 所成的角为 60°。

解(3)　解法一　在 Rt$\triangle ABC$ 中，过点 C 作 $CG\perp AB$，

$AB=2$，$\angle ABC=30°$，

, $AC=1$。

, 在 $Rt\triangle ACG$ 中，$CG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AG=\frac{1}{2}$

在 $Rt\triangle ABD$ 中，过点 G 作 $GF\perp AB$ 交 AD 与 F，则 $\angle CGF$ 就是面 ABD 与面 ABC 所成二面角的一个平面角。

在 $Rt\triangle AGF$ 中，　$AG=1/2$，$\angle BAD=45°$，

, $GF=\frac{1}{2}$，$AF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $AD=\sqrt{2}$知，点 F 为 AD 的中点。

连接 CF，则 $CF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

, $\triangle CGF$ 为直角三角形，其中 $\angle CFG=90°$，

, 在 $Rt\triangle CGF$ 中，$\sin\angle CGF=\frac{CF}{CG}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即面 ABD 与面 ABC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$。

解法二　$\alpha\perp\beta$，$AC\perp l$，

, $AC\perp\beta$。

$AC\subset$平面 ABC，

, 平面 $ABC\perp\beta$。

如图 7 - 69 所示，在平面β内，过点 D 作 $DH\perp BC$，垂足为 H，则 $DH\perp$平面 ABC，

在平面 ABC 内，过点 H 作 $HG\perp AB$，垂足为 G，连接 DG，则由三垂线定理可知，$DG\perp AB$，

, $\angle DGH$ 就是面 ABC 与面 ABD 所成二面角的一个平面角。

在 $Rt\triangle BCD$ 中，　$CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，

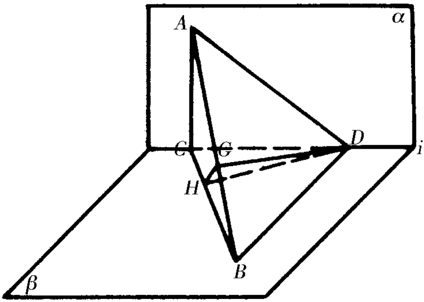


图 7 - 69

, $BC=\sqrt{3}$,

在 Rt△BCD 中,由 DH⊥BC 知,

$$DH=\frac{CD\cdot BD}{BC}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

在 Rt△ABD 中, $AB=BD=\sqrt{2}$,$DG\perp AB$,

, $DG=1$。

在 Rt△DGH 中,$\sin\angle DGH=\frac{DH}{DG}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,即面 ABD 与面 ABC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$。

解法三 $\alpha\perp\beta$,$AC\perp l$,

, $AC\perp\beta$,

$AC\subset$平面 ABC,

, 平面 $ABC\perp\beta$。

如图 7 - 70 所示,在平面β内,过点 D 作 $DH\perp BC$,垂足为 H,则 $DH\perp$平面 ABC,则点 H 为点 D 在平面 ABC 上的射影,

连接 AH,则△ABH 就是△ABD 在平面 ABC 上的射影。

在 Rt△BCD 中, $CD=1$,$BD=\sqrt{2}$,

, $BC=\sqrt{3}$

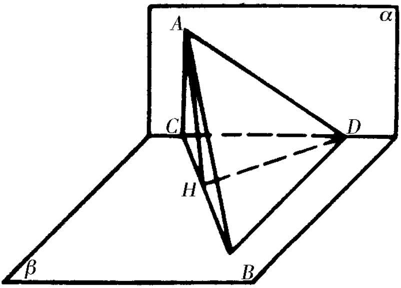


图 7 - 70

在 Rt△BCD 中,由 DH⊥BC 可知,$BH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AC\perp BC$ 且 $AC=1$,

, $S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}BH\cdot AC=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

在 Rt△ABD 中, $AD=BD=\sqrt{2}$,

, $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD=1$。

设面 ABC 与面 ABD 所成的角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

, $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,即面 ABD 与面 ABC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$。

说明 本例的题(3)给出了三种解法,其中解法二是最常用的方法,即当题设中存在一个面与二面角的一个面垂直时,就可以在这个垂面内给出二面角的一个面内一点到另一个面的一条垂线,这时,就可以用三垂线定理或其逆定理给出二面角的平面角。

例 9 已知直角△ABC 的两条直角边 AC = 2,BC = 3,P 为斜边上的一点,现沿 CP 将此直角三角形折成直二面角 A - PC - B,当 $AB=\sqrt{7}$时,求二面角 P - AC - B 的大小(见图 7 - 71)。

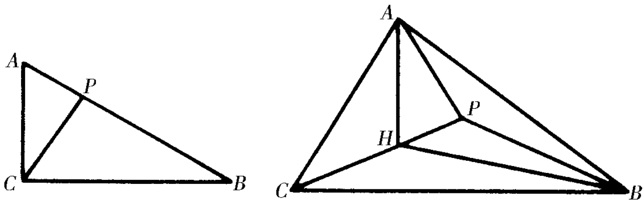


图 7 - 71

分析 题设中并未指出点 P 确定的位置，因此，必须首先指明点 P 的位置。

由题设可知，面 BCP ⊥ 面 ACP，即题设中存在一个平面 BCP 与二面角 P - AC - B 的一个面 ACP 垂直，因此，我们可以在平面 BCP 内给出二面角 P - AC - B 的一个面 ABC 内一点 B 到另一个面 ACP 的一条垂线，然后用三垂线定理或其逆定理给出二面角 P - AC - B 的一个平面角。

解 设 $\angle ACP = \theta$，则 $\angle BCP = 90° - \theta$。

在面 ACP 内，过点 A 作 $AH \perp CP$，垂足为 H，

面 ACP ⊥ 面 BCP，

, AH ⊥ 面 BCP，

, $AH \perp BH$。

在 Rt△ACH 中， $AC = 2$，

, $AH = 2\sin\theta$，$CH = 2\cos\theta$。

在△BCP 中， $BC = 3$，

$$, \quad BH^2 = BC^2 + CH^2 - 2 \cdot BC \cdot CH\cos\angle PCB$$
$$= 9 + 4\cos^2\theta - 2 \cdot 3 \cdot 2\cos\theta \cdot \cos(90° - \theta)$$
$$= 9 + 4\cos^2\theta - 6\sin2\theta,$$

在 Rt△AHB 中， $AH^2 + BH^2 = AB^2$，$AB^2 = 7$，

$$, \quad 4\sin^2\theta + 9 + 4\cos^2\theta - 6\sin2\theta = 7,$$
$$\sin2\theta = 1,$$

, $\theta = 45°$，即点 P 为 ∠C 的平分线与斜边 AB 的交点。

如图 7 - 72 所示，在面 BCP 内，过点 B 作 $BH \perp CP$，垂足为 H。

面 BCP ⊥ 面 ACP，

，　BH ⊥ 面 ACP。

在面 ACP 内，过点 H 作 HG ⊥ AC，连接 BG，则 BG ⊥ AC，

，　∠BGH 就是二面角 P - AC - B 的一个平面角。

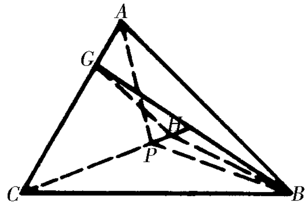


图 7 - 72

在 Rt△BCH 中，　BC = 3，∠BCH = 45°，

，　$BH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$CH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。

在 Rt△CHG 中，　∠HCG = 45°，

，　$HG = \dfrac{3}{2}$。

在 Rt△BHG 中，∠BHG = 90°，

，　$\tan\angle BGH = \dfrac{BH}{HG} = \sqrt{2}$，

，　$\angle BGH = \arctan\sqrt{2}$，即二面角 P - AC - B 为 $\arctan\sqrt{2}$。

例 10　已知矩形 ABCD 中，AM = MB = DN = NC = 1（如图 7 - 73 所示），把矩形 ABCD 沿 MN 折成 120°的二面角，在 MN 上取一点 P，使∠NPA = ∠NPB = ∠APB，求：

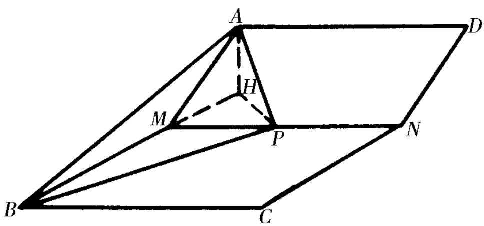


图 7 - 73

（1）PM 的长；

（2）PA 与平面 BN 所成的角的正弦值；

(3)二面角 $A-PB-M$ 的大小。

解(1) $AM\perp MN$,$BM\perp MN$,

, $\angle AMB$ 为把矩形 $ABCD$ 沿 MN 折成的 $120°$ 的二面角的平面角,由题设可知,$\angle AMB=120°$。

在 $\triangle AMB$ 中, $AM=MB=1$,

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM\cdot MB\cdot \cos\angle AMB$$

, $$= 1^2 + 1^2 - 2\times 1\times 1\times \cos 120°$$

$$= 3$$

设 $PM=x$,

在 $Rt\triangle AMP$ 中,$AP=\sqrt{1+x^2}$,

$$\cos\angle APM = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

, $$\cos\angle APB = \cos\angle NPA = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

在 $\triangle APB$ 中, $AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP\cdot BP\cdot \cos\angle APB$,

, $$3 = (1+x^2) + (1+x^2) - 2(1+x^2)\left(-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

, $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,即 $PM=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。

解(2) $MN\perp$ 平面 AMB,

, 平面 $AMB\perp$ 平面 BN。

在平面 AMB 内,过点 A 作 $AH\perp BM$,垂足 H 在 BM 的延长线上,则 $AH\perp$ 平面 BN。

连接 PH,则 PH 为 AP 在平面 BN 上的射影,

, $\angle APH$ 为 PA 与平面 BN 所成的角。

在 $Rt\triangle AHM$ 中, $\angle AMH=60°$,

, $AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

在 $Rt\triangle AHP$ 中,

$$AP=\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

,　$\sin\angle APH=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,即 PA 与平面 BN 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

解(3)　如图 7 - 74 所示,在平面 BN 内,过点 H 作 $HG\perp BP$,垂足为 G,连接 AG,则 $AG\perp BP$。

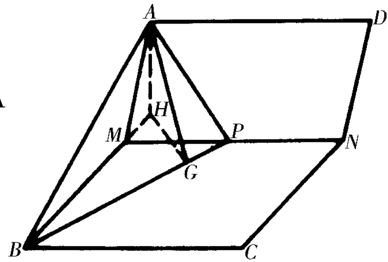


图 7 - 74

,　$\angle AGH$ 就是二面角 A - BP - M 的一个平面角。

在 $Rt\triangle AGP$ 中,

$$\cos\angle APG=\cos\angle APB=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{3},$$

,　$\sin\angle APG=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$AP=\sqrt{1+x^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$,

$AG=AP\cdot\sin\angle APG=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=1$,

在 $Rt\triangle AHG$ 中,$\sin\angle AGH=\dfrac{AH}{AG}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

,　$\angle AGH=60°$,即二面角 A - BP - M 为 60°。

说明　在题(2)中,给出 PA 在平面 BN 上的射影需要过点 A 作平面 BN 的垂线,必须注意到,垂线是作在过点 A 且与平面 BN 垂直的平面 AMB 内。这条垂线 AH 也就是从二面角 A - BP - M 的面 ABP 内一点 A 到另一个面 BN 的一条垂线,这就为题(3)利

用三垂线定理或其逆定理给出二面角 A - BP - M 的平面角奠定了基础。

（三）空间距离

空间的各种距离，包括两点间的距离、点到直线的距离、点到平面的距离、两平行直线间的距离、两异面直线的距离、直线与平面的距离、两平行平面间的距离，其中两点间的距离、点到直线的距离、两平行直线的距离是共面元素的距离。

这些距离中，主要是点到直线的距离和点到平面的距离，其它的距离都可以转化成这两种类型的距离问题求解。

这些距离都是通过垂线段或公垂线段的长度定义的，因此，求这些距离一般都要给出相应的表示距离的线段。必须注意到，表示距离的线段必须落实在平面内，并看作三角形的元素解三角形求解。如表示点到平面的距离的线段一般在平面的垂面内找或作。

例 1　AB 为平面 α 内一已知线段，其长度为 a，AC、BD 是长度同为 b 的两条线段，线段 $AC \perp \alpha$，线段 $BD \perp AB$ 且和平面 α 成 30°的角，C、D 在平面 α 的同侧，求 C、D 两点间的距离。

解　如图 7 - 75 所示，过点 D 作 $DH \perp$ 平面 α，垂足为 H，连接

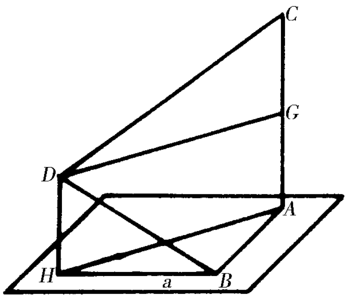


图 7 - 75

BH，则 BH 为 BD 在平面 α 上的射影，

，　$\angle DBH$ 为 BD 与平面 α 所成的角，由题设可知，$\angle DBH = 30°$，$AB \perp BH$。

在 Rt△DBH 中，　　BD = b，

,　　$BH = \frac{\sqrt{3}}{2}b$，$DH = \frac{1}{2}b$。

在 Rt△ABH 中，　　AB = a，

,　　$AH = \sqrt{AB^2 + BH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3}{4}b^2}$。

$AC \perp \alpha$，

,　　$DH \parallel AC$，

在梯形 ACDH 中，过点 D 作 $DG \perp AC$，垂足为 G，则 $DG = AH = \sqrt{a^2 + \frac{3}{4}b^2}$，

在 Rt△CDG 中，

$$CG = b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b,$$

,　　$$CD = \sqrt{DG^2 + CG^2} = \sqrt{\left(a^2 + \frac{3}{4}b^2\right) + \left(\frac{1}{2}b\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}。$$

说明　在本例的解题过程中，我们是将表示 C、D 两点的距离的线段 CD 置于直角梯形 ACDH 中求解。本例也可以看作以 AB 为公垂线段的异面直线 AC、BD 上两点 C、D 间的距离求解。

例 2　在长方体 $A_1B_1C_1D_1$ - ABCD 中，AB = a，$BB_1 = BC = b$，求点 A 到 CD_1 的距离。

分析　求点到直线的距离常需要利用三垂线定理或其逆定理给出表示点到直线的距离的垂线段，这时，需要给出一条点到面的垂线，必须注意到，这条垂线应在平面的垂面内找或作。

解　如图 7 - 76 所示，在平面 CC_1D_1D 内，过点 D 作 $DH \perp CD_1$，垂足为 H，连接 AH，

$AD \perp$ 平面 CC_1D_1D，

,　　$AH \perp CD_1$，

,　　线段 AH 的长就是点 A 到直线 CD_1 的距离。

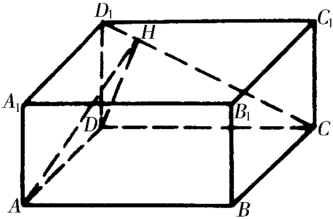


图 7 - 76

在 Rt△CDD_1 中，

$$DH \perp CD_1, CD = AB = a, DD_1 = BB_1 = b,$$

, $$DH = \frac{CD \cdot DD_1}{CD_1} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

在 Rt△ADH 中，

$$AD = b,$$

, $$AH = \sqrt{AD^2 + DH^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}} = b \cdot \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{a^2 + b^2}}。$$

例 3 在正方体 $A_1B_1C_1D_1$ - $ABCD$ 中，棱长为 a，E、F 分别是棱 B_1C_1、C_1D_1 的中点，求点 A_1 到截面 $BDFE$ 的距离。

分析 求点到平面的距离常需要给出表示点到平面的距离的垂线段必须注意到，垂线段必在经过已知点且与已知平面垂直的平面内。

解 如图 7 - 77 所示，连接 AC、A_1C_1，设 $AC \cap BD = 0$，$A_1C_1 \cap EF = G$，则平面 $ACC_1A_1 \cap$ 平面 $BDFE = OG$。

$AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$，

, $AA_1 \perp BD$，

又 $BD \perp AC$，

, $BD \perp$ 平面 AA_1C_1C，

, 平面 $BDFE \perp$ 平面 AA_1C_1C。

在平面 AA_1C_1C 内，过点 A_1 作 $A_1H \perp OG$，垂足为 H，则 $A_1H \perp$

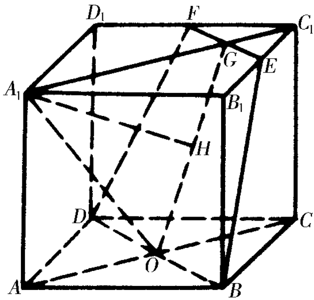


图 7 - 77

平面 BDFE，

, 线段 A_1H 的长就是点 A_1 到平面 BDFE 的距离。

在矩形 AA_1C_1C 中，连结 A_1O。

在 $\triangle A_1OG$ 中，

$A_1G=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$，点 O 到 A_1G 的距离为 a，

, $$2S_{\triangle A_1OG}=\frac{3\sqrt{2}}{4}a\cdot a=\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$$

又 $$OG=\sqrt{CG^2+(OC-GC_1)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{4}a,$$

, $$A_1H=\frac{2S_{\triangle A_1OG}}{OG}=$$

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2}{\frac{3\sqrt{2}}{4}a}$$

$$=a。$$

例 4　**已知** ABCD **为边长为** 4 **的正方形，**E、F **分别是** AB、AD **的中点，**GC **垂直于** ABCD **所在平面，且** GC = 2 **，求点** B **到平面** GEF **的距离。**

解　**如图** 7 - 78 **所示，连接** AC、BD，**设** $AC \cap BD = O$，

E、F **分别为** AB、AD **的中点，**

,　$EF /\!/ BD$，

,　$BD /\!/$ **平面** GEF，

,　**点** B **到平面** GEF **的距离就是** BD **到平面** GEF **的距离。**

$O \in BD$，

,　**点** O **到平面** GEF **的距离就是** BD **到平面** GEF **的距离，即点** B **到平面** GEF **的距离。**

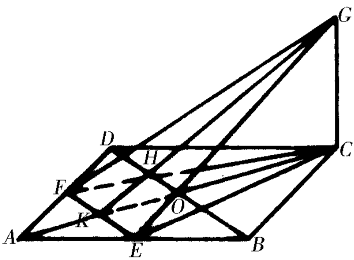


图 7 - 78

设 $AC \cap EF = K$，**连接** GK。

$GC \perp$ **平面** ABCD，

,　$BD \perp GC$，

四边形 ABCD **为正方形，**

,　$BD \perp AC$，

,　$BD \perp$ **平面** GCK。

$EF /\!/ BD$，

,　$EF \perp$ **平面** GCK，

$EF \subset$ **平面** GEF，

,　**平面** $GCK \perp$ **平面** GEF。

在平面 GCK **内，过点** O **作** $OH \perp GK$，H **为垂足，则** $OH \perp$ **平面** GEF，

,　**线段** OH **的长就是点** O **到平面** GEF **的距离。**

在正方形 ABCD **中，**

边长为 4，

,　$KC = 3\sqrt{2}$，$OK = \sqrt{2}$。

在 $Rt\triangle GKC$ **中，**

$GC = 2$,

, $OK = \sqrt{22}$,

, $\sin\angle GKC = \dfrac{2}{\sqrt{22}} = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$。

在 $Rt\triangle OHK$ 中,

$OK = \sqrt{2}$,

, $OH = OK\sin\angle GKC = \sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{22}}{11} = \dfrac{2\sqrt{11}}{11}$,即点 B 到平面 GEF 的距离为$\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$。

说明　因为 BD∥平面 GEF,所以在解题过程中,我们将点 B 到平面 GEF 的距离转化成点 O 到平面 GEF 的距离,又因为点 O 在平面 GEF 的垂直平面 GCK 内,所以又将点 O 到平面 GEF 的距离转化成点 O 到直线 GK 的距离。这种转化的思想方法是处理空间距离问题的常用的思想方法。

例 5　已知线段 AB 与平面 α 平行,平面 α 的斜线 AA_1、BB_1 与平面 α 所成的角分别是 30°、60°,且 $\angle A_1AB = \angle B_1BA = 90°$,$AB = a$,$A_1B_1 = b(b > a)$,求 AB 与平面 α 的距离。

分析　设点 A、B 在平面 α 上的射影分别为 C、D,则 AB 与平面 α 的距离就是线段 AC(或 BD)的长。由题设可知,A_1、B_1 可能在 CD 的同侧,也可能在 CD 的两侧,因此,要根据位置关系分析讨论。

解　如图 7 - 79 所示,分别过点 A、B 作 $AC\perp$平面 α,$BD\perp$平面 α,垂足分别为 C、D,

AA_1、BB_1 为平面 α 的斜线,

, CA_1、DB_1 分别为 AA_1、BB_1 在平面 α 上的射影,

, $\angle AA_1C$、$\angle BB_1D$ 分别为斜线 AA_1、BB_1 与平面 α 所成的角,由题设可知,$\angle AA_1C = 30°$,$\angle BB_1D = 60°$,

$AB\parallel\alpha$,

, AC、BD 的长就是 AB 与平面 α 的距离,CD 就是 AB 在平面 α 上射影,且 $AB\parallel CD$。

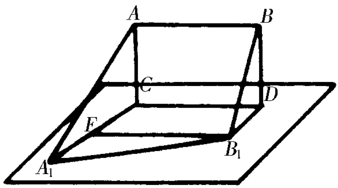


图 7 - 79

$AB = a$，

, $CD = AB = a$。

设 $AC = BD = x$，

则在 $\triangle ACA_1$ 中，$CA_1 = \sqrt{3}x$，

在 $\triangle BDB_1$ 中，$DB_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$。

$\angle A_1AB = 90°$，

, $AB \perp AA_1$，

, $CD \perp AA_1$，

, $CD \perp CA_1$，同理 $CD \perp DB_1$。

, $CA_1 \parallel DB_1$。

下面分 A_1、B_1 在 CD 同侧和在 CD 异侧两种情况讨论。

(1)若 A_1、B_1 在 CD 同侧时，在平面 α 内作 $B_1E \perp CA_1$，垂足为 E，

在 $Rt\triangle A_1EB_1$ 中，$A_1E = \sqrt{b^2 - a^2}$，又 $A_1E = \sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$，

, $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{b^2 - a^2}$，

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$。

(2)若 A_1、B_1 在 CD 异侧时，如图 7 - 80 所示，在平面 α 内作 $A_1E \perp DB$，交 B_1D 的延长线于 E，

在 $Rt\triangle A_1EB_1$ 中，$A_1E = \sqrt{b^2 - a^2}$，又 $A_1E = \sqrt{3}x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}x$，

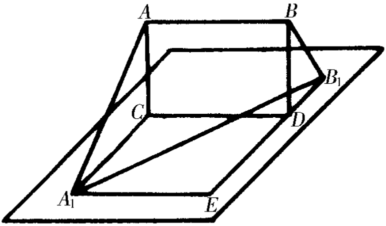


图 7 - 80

，
$$\frac{4\sqrt{3}}{3}x=\sqrt{b^2-a^2},$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2-a^2}。$$

综上所述，AB **与平面** α **的距离为**$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b^2-a^2}$**或**$\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2-a^2}$**。**

例 6　**已知四边形** ABCD **为菱形，边长为** a**，**$\angle ABC=60°$**，**$PC\perp$**平面** ABCD**，**PC = a**，点** E **为** PA **的中点。**

（1）**求证：平面** $EDB\perp$ **平面** ABC**；**

（2）**求点** E **到平面** PBC **的距离；**

（3）**求二面角** A - BE - D **的平面角的正切值。**

证明（1）　**如图** 7 - 81 **所示，连接** AC**，设** $AC\cap BD=0$**，**

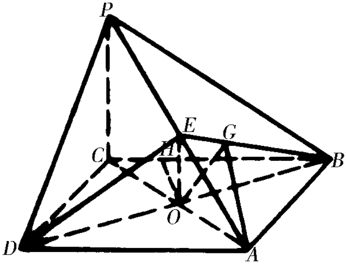


图 7 - 81

则 O 为 AC 的中点，连接 OE，

E 为 PA 的中点，

, $OE /\!/ PC$。

$PC \perp$ 平面 ABCD，

, $OE \perp$ 平面 ABCD，

$OE \subset$ 平面 EDB，

, 平面 $EDB \perp$ 平面 ABCD，即平面 $EDB \perp$ 平面 ABC。

解(2) $OE /\!/ PC$，

, $OE /\!/$ 平面 PBC，

, 点 E 到平面 PBC 的距离就是 OE 到平面 PBC 的距离，

显然 $O \in OE$，

, 点 O 到平面 PBC 的距离就是 OE 到平面 PBC 的距离。

在平面 ABC 内，过点 O 作 $OH \perp BC$，垂足为 H，

$PC \perp$ 平面 ABC，

, 平面 $ABC \perp$ 平面 PBC，

, $OH \perp$ 平面 PBC，

, 线段 OH 的长就是点 O 到平面 PBC 的距离。

在菱形 ABCD 中，

边长为 a，$\angle ABC = 60°$，

, $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，即点 E 到平面 PBC 的距为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$。

解(3) 在平面 EDB 内，过点 O 作 $OG \perp BE$，垂足为 G，连接 AG，

平面 $ABCD \perp$ 平面 EDB，

$AO \perp BD$，

, $AO \perp$ 平面 EDB，

, $AG \perp BE$，

, $\angle OGA$ 就是二面角 A - BE - D 的一个平面角。

在菱形 ABCD 中，$AO = \dfrac{1}{2}a$，

在 Rt△OEB **中，**

$$OE=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{2}a,$$

$OB=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

,　　$BE=a$，

,　　$OG=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，

在 Rt△AOG **中，** $\tan\angle OGA=\frac{OA}{OG}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{4}a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

说明　在题(2)的解题过程中，平面 ABC⊥**平面** PBC **是给出表示点** O **到平面** PBC **的距离的垂线段的基础。在题(3)的解题过程中，平面** ABCD⊥**平面** EDB **是在平面** ABD **内给出二面角** A-BE-D **的一个面** ABE **内一点** A **到另一个面** DBE **的一条垂线的基础，即是给出二面角** A-BE-D **的一个平面角的基础。这就是说，在平面的垂直平面内找平面的垂线是一个很重要的意识。**

练 习 题

1. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4cm，点 M、N 分别是 A_1B_1 和 CD_1 的中点，设过点 D、M、N 三点的平面与棱 B_1C_1 交于点 P，求 $PM+PN$ 的值。

2. 在空间四边形 ABCD 中，对角线 $AC=0$，$BD=6$，点 M、N 分别为 AB、CD 的中点，异面直线 AC 和 BD 所成的角为 60°，求线段 MN 的长。

3. 空间四边形 ABCD 中，已知 $AD=BC=\sqrt{3}$，对角线 $BD=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 AC 和 BD 所成的角。

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是棱 AD 的中点，求二面角 $A-B_1D-P$ 的大小。

5. 在 ABCD 中，$AB=AC=CD=a$，$\angle ACD=90°$，将它沿对角线 AC 折成 60°的二面角。

(1) 求 B、D 间的距离；

(2) 求 D 到 AB 的距离。

6. 已知二面角 $M-l-N$ 的大小为 30°，l 上有两点 A、B，在半平面 M 内，过 A、B 各作一条射线相交于 C，且 $\angle CAB=45°$，$\angle CBA=60°$。

(1) 求直线 AC、BC 与平面 N 所成角的正弦；

(2) 若 $AB=4$，求点 C 到平面 N 的距离。

7. 长为 8cm 的线段 AB 夹在二面角 $\alpha-l-\beta$ 内，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，A、B 到棱的距离都等于 4，AB 与 l 成 60°的角。

(1) 求二面角 $\alpha-l-\beta$ 的度数；

(2) 求 AB 与 β 所成角的正弦。

8. 如图 7-82 所示，二面角 $\alpha-BC-\beta$ 为 45°，$P\in\alpha$，$Q\in\beta$，直线 MQ 是直线 PQ 在平面 β 上的射影，$M\in BC$，且 PQ 与平面 β 成 60°角，若 $\angle CMQ=30°$，$PM=a$，求 PQ 的长。

9. 如图 7-83 所示，二面角 $\alpha-PQ-\beta$ 为 60°，点 A、B 分别在

α、ACP = BCP = 30°，CA = CB = a。

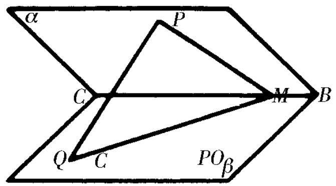


图 7 - 82

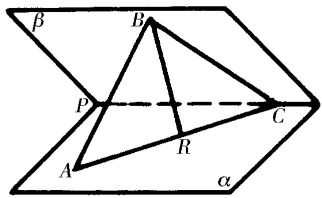


图 7 - 83

（1）求证：$AB \perp PQ$；

（2）求点 B 到平面 α 的距离；

（3）设点 R 是线段 AC 上一点，直线 BR 与平面 α 所成的角为 45°，求线段 CR 的长。

八、平行与垂直

在空间元素的位置关系中，平行与垂直是两种常见的重要关系，正确判断空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行或垂直的关系，并合理运用具有平行或垂直关系的直线和平面的性质，是解决有关平行或垂直问题的两个重要方面。

（一）平行

空间两条直线平行，直线与平面平行及两个平面平行，三种平行关系有密切的联系，它们相互依赖、互相转换。线面平行的关系是通过线线平行的关系判定的，反过来，线面平行也可以推出线线平行的结论；面面平行要用线线平行、线面平行来判定，反过来，平面与平面平行的性质定理又可以看作线线平行、线面平行的判定定理。这样，在一定条件下，线线平行、线面平行、面面平行就可以相互转化。

例 1　已知平面 $\alpha \cap \beta = l$，直线 $a /\!/ \alpha$ 且 $\alpha /\!/ \beta$，求证 $a /\!/ l$。

证法一　如图 7 - 84 所示，在平面 α 内取一点 P，过点 P 和直线 a 作平面 ɣ，则平面 ɣ 与平面 α 相交于过点 P 的一条直线，设 ɣ $\cap \alpha = m$；

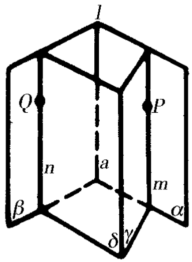


图 7 - 84

在平面β内取一点 Q,过点 Q 和直线 a 作平面δ,则平面δ与平面β相交于过点 Q 的一条直线,设$\delta\cap\beta=n$。

$a/\!/\alpha$,$a/\!/\beta$,

, $a/\!/m$,$a/\!/n$,

, $m/\!/n$。

$m\subset\alpha$,$n\not\subset\alpha$,

, $n/\!/\alpha$。

$n\subset\beta$,$\beta\cap\alpha=l$,

, $n/\!/l$,

, $a/\!/l$。

证法二 在平面α、β的交线上取一点 G,过点 G 和直线 a 作平面 ɣ。

$G\in l$,$\alpha\cap\beta=l$,

, $G\in\alpha$ 且 $G\in\beta$,

, 平面 ɣ 与平面α、β分别都相交于过点 G 的一条直线。

设 $ɣ\cap\alpha=l'$,$\gamma\cap\beta=l'$,

$a/\!/\alpha$,$a/\!/\beta$,

, $a/\!/l'$,$a/\!/l''$,这就是说,在平面γ内,l'和l''都经过点 G 且都与直线 a 平行,

, l'和l''重合。

设重合直线为l',则$l''\subset\alpha$,且$l'\subset\beta$,

, l'与为平面α、β的交线,

, l'与 1 重合,由$a/\!/l'$知$a/\!/l$。

说明 若直线与平面平行,则要在平面内给出一条与这条直线平行的直线,这时可以用辅助平面间接地给出这条直线。

在本例的解题过程中,我们是在平面 ɣ 内利用平几知识证明直线l'和l''重合。

例 2 两个全等的正方形 ABCD 和 ABEF 不在同一平面内,点 M、N 分别在它们的对角线 AC、BF 上,且 CM = BN,求证:MN∥平

面 BCE。

分析 证明直线与平面平行的关键是在平面内寻找一条与已知直线平行的直线。这时，可以在图形中寻找过已知直线且与已知平面相交的平面与已知平面的交线或在图形中过已知直线作与已知平面相交的平面，并给出与已知平面的交线。这条交线就是已知平面内与已知直线平行的直线。

特别要注意到，过已知直线的平面一般是由已知直线和与已知平面有公共点的直线确定的。

证法一 如图 7 - 85 所示，在平面 ABCD 内，过点 M 作 MM'

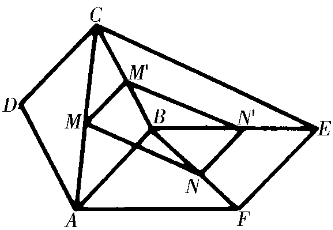


图 7 - 85

$/\!/ AB$，交 BC 于 M'，在平面 ABEF 内，过点 N 作 $NN' /\!/ AB$，交 BE 于 N'，则 $MM' /\!/ NN'$，$\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{MM'}{AB}$，$\dfrac{BN}{BF}=\dfrac{NN'}{EF}$。

正方形 ABCD，ABEF 全等，

, $AB = EF$，$AC = BF$，

又 $CM = BN$，

, $MM' = NN'$，

, 四边形 $MM'NN'$ 为平行四边形，

, $MN /\!/ M'N'$。

$M'N' \subset$ 平面 BCE，$MN \not\subset$ 平面 BCE，

, $MN /\!/$ 平面 BCE。

证法二 如图 7 - 86 所示，连接 AN 并延长交 BE 的延长线于 G，

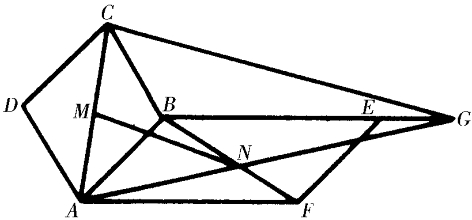


图 7 - 86

$AF /\!/ BE$，

, $\dfrac{BN}{NF}=\dfrac{GN}{NA}$

正方形 ABCD、ABEF 全等，

, $AC = BF$。

$CM = BN$，

, $MA = NF$，

, $\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{GN}{NA}$,

, $MN /\!/ CG$。

$CG \subset$ 平面 BCE，$MN \not\subset$ 平面 BCE，

, $MN /\!/$ 平面 BCE。

说明　以上用两种方法在平面内给出一条与已知直线平行的直线，但它们的实质相同，即根据题设条件经过已知直线作了一个与已知平面相交的平面，所得交线就是在已知平面内与已知直线平行的直线。

解法三　如图 7 - 87 所示，在平面 ABCD 内，过点 M 作 $MG /\!/ BC$，交 AB 于 G，连接 NG，则$\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{BG}{AB}$。

正方形 ABCE、ABEF 全等，

, $AC = BF$，

又　$CM = BN$，

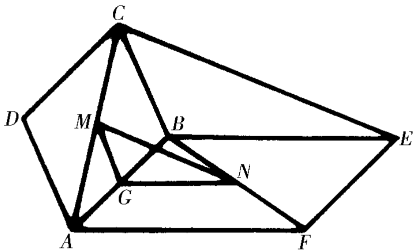


图 7 - 87

, $\frac{BN}{BF}=\frac{BG}{AB}$,

, $NG /\!/ BE$,

$BC \subset$ 平面 BCE,$MG \not\subset$ 平面 BCE,

, $MG /\!/$ 平面 BCE,同理 $NG /\!/$ 平面 BCE,

显然 MG、$NG \subset$ 平面 MNG,$MG \cap NG = G$,

, 平面 $MNG /\!/$ 平面 BCE。

显然 $MN \subset$ 平面 MNG,

, $MN /\!/$ 平面 BCE。

说明　解法三是运用面面平行的性质证明线面平行。

例 3　如图 7 - 88 所示,A、B、C、D 四点在相交平面 M 和 N 之外,它们在平面 M 上的射影为 A_1、B_1、C_1、D_1,在平面 N 上的射影为 A_2、B_2、C_2、D_2,A_1、B_1、C_1、D_1 在同一直线上,四形 $A_2B_2C_2D_2$ 为平行四边形,求证 :四边形 ABCD 为平行四边形。

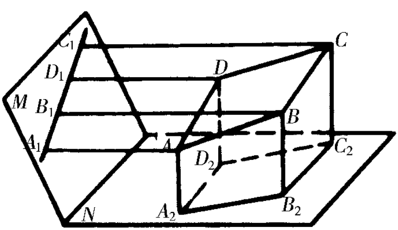


图 7 - 88

分析 必须首先证明四边形 ABCD 是平面四边形。

证明 $AA_1 \perp$ 平面 M,$CC_1 \perp$ 平面 M,

, $AA_1 /\!/ CC_1$,

, AA_1、CC_1 确定一个平面 AA_1C_1C,

且平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 M。

由题设知,$B_1 \in A_1C_1$,

, $B_1 \in$ 平面 AA_1C_1C,

$BB_1 \perp$ 平面 M,

, $BB_1 \subset AA_1C_1C$,即有 $B \in$ 平面 AA_1C_1C,

同理 $D \in$ 平面 AA_1C_1C,

, 四边形 ABCD 为平面四边形。

下面证明四边形 ABCD 为平行四边形。

$AA_2 \perp$ 平面 N,$BB_2 \perp$ 平面 N,

, $AA_2 /\!/ BB_2$,

, AA_2,BB_2 确定一个平面 AA_2B_2B,同理 CC_2,DD_2 确定一个平面 CC_2D_2D,

$AA_2 /\!/ DD_2$,

显然 $AA_2 \subset$ 平同 AA_2B_2B,$DD_2 \not\subset$ 平面 AA_2B_2B,

, $DD_2 /\!/$ 平面 AA_2B_2B,

由 $C_2D_2 /\!/ A_2B_2$,同理知,$C_2D_2 /\!/$ 平面 AA_2B_2B,

, 平面 $AA_2B_2B /\!/$ 平面 CC_2D_2D,

平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $AA_2B_2B = AB$,

平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $CC_2D_2D = CD$,

, $AB /\!/ CD$,同理 $BC /\!/ AD$,

, 四边形 ABCD 为平行四边形。

说明 其中证明四边形 ABCD 为平行四边形的实质是运用面面平行的性质证明线线平行。

例 4 已知平面 $\alpha /\!/$ 平面 β,AB、CD 是夹在平面 α、β 间的异面线段,点 M、N 分别为 AB、CD 的中点,求证:$MN /\!/ \beta$。

证法一 如图 7 - 89 所示,连接 AN 并延长交平面 β 于 E,连

接 AC、DE、BE**，则相交于点** N **的直线** CD、AE **确定的平面与平面** α、β **交于** AC、DE**，**

$\alpha /\!/ \beta$**，**

,　　AC $/\!/$ DE。

N **为** CD **的中点，**

,　　N **为** AE **的中点。**

M **为** AB **的中点，**

,　　MN $/\!/$ BE。

,　　MN $\not\subset$ **平面** β**，**BE $\subset$ **平面** β**，**

,　　MN $/\!/$ **平面** β。

证法二　如图 7 - 90 **所示，连接** AD**，取** AD **的中点** G**，连接** MG、BD、NG、AC**，**

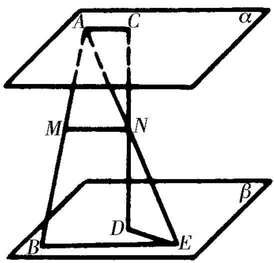


图 7 - 89

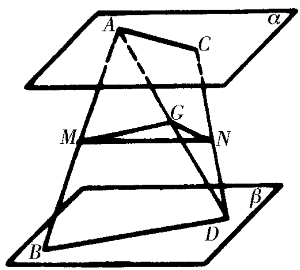


图 7 - 90

M **为** AB **的中点，**

,　　MG $/\!/$ BD**，**

显然 MG $\not\subset \beta$**，**BD $\subset \beta$**，**

,　　MG $/\!/ \beta$。

同理，NG $/\!/$ AC**，**

,　　NG $/\!/ \alpha$。

设 NG、AC **确定的平面与平面** β **的交线为** l**，则** AC $/\!/$ l**，**

,　　NG $/\!/$ l**，**

,　　NG $/\!/ \beta$。

　　　　AB、CD 为异面直线，

，　　MG、NG 为相交直线，

，　　平面 $MNG // $ 平面 β，

显然 $MN \subset$ 平面 MNG，

，　　$MN // \beta$。

证法三　如图 7 - 91 所示，过点 A 作 $AE // CD$ 交平面 β 于点 E，则 AE、CD 确定的平面与平面 α、β 的交线分别为 AC、ED，

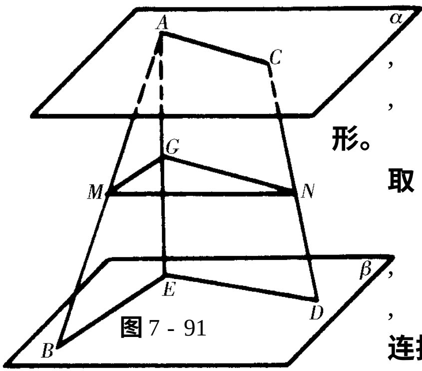


图 7 - 91

　　　　$\alpha // \beta$，

，　　$AC // ED$，

，　　四边形 $AEDC$ 是平行四边形。

取 AE 的中点 G，连接 GN，

　　　　N 为 CD 的中点，

，　　$GN // DE$，

，　　$GN // \beta$。

连接 GM、BE，

　　　　M 为 AB 的中点，

，　　$GM // BE$，

，　　$GM // \beta$。

　　　　AB、CD 为异面直线，

，　　GM、GN 为相交直线，

，　　平面 $MNG // $ 平面 β，

显然 $MN \subset$ 平面 MNG，

，　　$MN // \beta$。

说明　证法一中，经过 MN 作出辅助平面 ABE，与平面 β 交于 BE，BE 就是平面 β 内与 MN 平行的直线。证法二和证法三都是运用面面平行的性质证明线面平行。

（二）垂直

空间两条直线垂直，直线与平面垂直及两个平面垂直，三种垂直关系也有密切的联系，它们也是互相依赖、互相转换。

例 1　已知 a、b **是异面直线，**a **上两点** A、B **的距离为** 8，b **上两点** C、D **的距离为** 6，AD、BC **中点分别为** M、N，**且** $MN = 5$，**求证：直线** a、b **垂直。**

分析　两条直线互相垂直就是两条直线所成的角为 90°，**题设用数量的方式描述直线** a、b **的位置关系，因此，可以考虑用求异面直线所成角为直角的方法证明两条直线互相垂直。**

证明　如图 7 - 92 **所示，连接** AC，**取** AC **的中点** G，**连接** MG、NG。

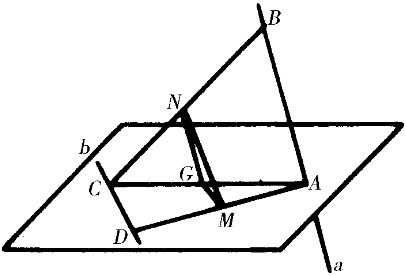


图 7 - 92

在 △ABC **中，**

　　N **为** BC **的中点，**$AB = 8$，

,　　$NG = 4$，$NG \parallel a$。

在 △ACD **中，**

　　M **为** AD **的中点，**$CD = 6$，

,　　$MG = 3$，$MG \parallel b$。

在 △MNG **中，**

　　$MN = 5$，

,　　$MN^2 = MG^2 + NG^2$，

,　　$MG \perp NG$，

,　　$a \perp b$。

例 2　在正方体 $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$，**点** P **为棱** BB_1 **的中点，点** Q **为棱** AB **的中点，求证：**$DP \perp A_1Q$。

证法一　如图 7 - 93 **所示，连接** AP。

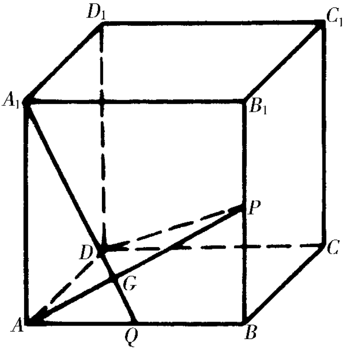


图 7 - 93

$AD \perp$ **平面** AA_1B_1B**,显然** $A_1Q \subset$ **平面** AA_1B_1B**,**

, $AD \perp A_1Q_1$ **,即** $A_1Q \perp AD$。

在正方形 AA_1B_1B **中,**

P **为** BB_1 **的中点,**Q **为** AB **的中点,**

, $Rt\triangle AA_1Q \cong Rt\triangle BRA$,

, $\angle AA_1Q = \angle PAB$。

设 $AP \cap A_1Q = G$**,则**$\angle AGQ = \angle A_1AQ = 90°$**,**

, $A_1Q \perp AP$。

显然 AD、$AP \subset$ **平面** ADP **,且** $AD \cap AP = A$,

, $A_1Q \perp$ **平面** ADP **,**

, $A_1Q \perp DP$ **,即** $DP \perp A_1Q$。

证法二　连接 AP。

$AD \perp$ **平面** AA_1B_1B**,**

, AP **为** DP **在平面** AA_1B_1B **上的射影。**

在正方形 AA_1B_1B **中,**

P **为** BB_1 **的中点,**

Q **为** AB **的中点,**

$Rt\triangle AA_1Q \cong Rt\triangle BPA$,

, $\angle AA_1Q = \angle PAB$**,**

设 $AP \cap A_1Q = G$,则 $\angle AGQ = \angle A_1AQ = 90°$,

, $A_1Q \perp AP$,

由三垂线定理可知,$A_1Q \perp DP$。

说明　方法一是将其中一条直线置于一个能与另一条直线垂直的平面内,通过线面垂直证明线线垂直。方法二是用三垂线定理证明两条直线互相垂直。

例 3　在正方体 $A_1B_1C_1D_1$ - $ABCD$ 中,

(1) 如图 7 - 94 所示,点 M 为棱 AA_1 的中点,点 N 在 A_1B_1 上,$A_1N = \frac{1}{3}NB_1$,求证:$MN \perp MC$;

(2) 如图 7 - 95 所示,点 M 为棱 AA_1 的中点,点 P 为底面正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心,求证:$MP \perp B_1C$。

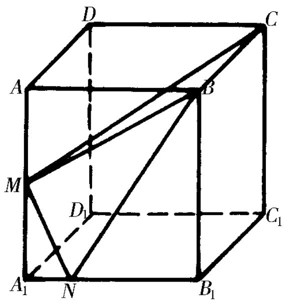


图 7 - 94

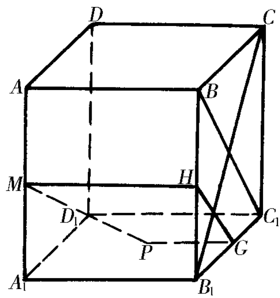


图 7 - 95

分析　三垂线定理及其逆定理是立体几何中用途最广泛且非常重要的定理,从表现上看,它说的是三条直线互相垂直的关系问题,但实质是把线面垂直的判定定理和线面垂直的定义作为性质定理联合使用,且用定理的形式固定下来。因此,凡是能用三垂线定理及其逆定理证明的"线线垂直"必定可通过"线面垂直"证得,只不过前者更为简捷。

用三垂线定理证明两条直线互相垂直的方式是:将其中一条直线置于一个平面内,将另一条直线看成这个平面的斜线,并给出其在这个平面上的射影,证得平面内的直线与射影垂直即可知两

条直线互相垂直。

若两条直线在同一平面内,则可以用三垂线定理的逆定理证明这两条直线互相垂直,其使用方式是 将两条直线置于一个平面内,将其中一条看成一条斜线在这个平面上的射影,并给出相应的斜线,证得另一条直线与斜线垂直即可知平面内的两条直线垂直。

证明(1)　连接 MB,NB。

设正方体的棱长为 a,

在正方形 AA_1B_1B 中,

M 为 AA_1 的中点,$A_1N=\frac{1}{3}NB_1$,

, $BM^2=\frac{5}{4}a^2$,$MN^2=\frac{5}{16}a^2$,$BN=\frac{25}{16}a^2$,

, $BN^2=MN^2+BM^2$,

, $MN\perp BM$。

BM 为 MC 在平面 AA_1B_1B 上的射影,

由三垂线定理可知,$MN\perp MC$。

证明(2)　取 BB_1 的中点 H,B_1C_1 的中点 G,连接 MH,PG,

M 为 AA_1 的中点,P 为底面正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心,

, $MH/\!/A_1B_1$,$PG/\!/A_1B_1$,

$A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C,

, $MH\perp$ 平面 BB_1C_1C,$PG\perp$ 平面 BB_1C_1C,

, HG 为 MP 在平面 BB_1C_1C 上的射影。

连接 BC_1,

H 为 BB_1 的中点,G 为 B_1C_1 的中点,

, $HG/\!/BC_1$,

$B_1C\perp BC_1$,

, $B_1C\perp HG$。

由三垂线定理知,$B_1C\perp MP$,即 $MG\perp B_1C$。

说明　本例的两小题都是用三垂线定理证明两条直线互相垂直。在题(1)的证明中,将 MN 置于平面 AA_1B_1B 内,MC 看成平面

AA_1B_1B 的斜线,其射影为 BM,证得 $MN \perp BM$ 由三垂线定理即知,$MN \perp MC$。在题(2)的证明中,将 B_1C 置于平面 BB_1C_1C 内,MP 看成平面 BB_1C_1C 的斜线,其射影为 HG,证得 $B_1C \perp HG$ 由三垂线定理即知,$B_1C \perp MP$。

例 4 在四面体 ABCD 中,$AD \perp BC$,$AC \perp BD$,求证:$AB \perp CD$。

证明 如图 7 - 96 所示,过点 A 作 $AH \perp$ 平面 BCD,垂足为 H,连接 DH,并延长交 BC 于 E,

$BC \perp AD$,

, $BC \perp DH$,即 $BC \perp DE$,

连接 CH,并延长交 BD 于 F,则 CH 为 AC 在平面 BCD 上的射影,同理可证:$BD \perp CF$。

, 点 H 为△BCD 的垂心。

连接 BH,并延长交 CD 于 G,则 $BG \perp CD$,且 BH 为 AB 在平面 BCD 的射影,

, $CD \perp AB$,即 $AB \perp CD$。

说明 本例先用三垂线定理的逆定理证明点 A 在平面 BCD 上的射影为△BCD 的垂心,然后再用三垂线定理证明 $AB \perp CD$。

例 5 如图 7 - 97 所示,设 a、b 为异面直线,$l \perp a$,$l \perp b$,$a \parallel \alpha$,$b \parallel \alpha$,求证:$l \perp \alpha$。

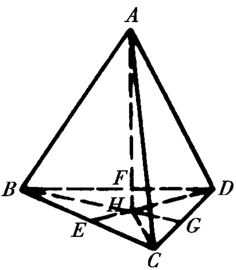


图 7 - 96

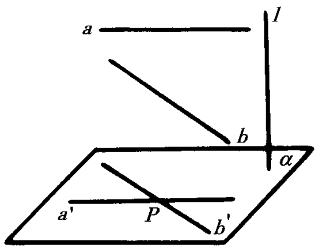


图 7 - 97

分析 证明直线与平面垂直,可以在平面给出两条与已知直线垂直的相交直线。

证明 在平面 α 内任取一点 P,设直线 a 和点 P 所确定的平

面与平面 α 的交线为 a'，直线 b 和点 P 所确定的平面与平面 α 的交线为 b'。

$a /\!/ \alpha, b /\!/ \alpha$，

, $a /\!/ \alpha', b /\!/ b'$。

$l \perp a, l \perp b$，

, $l \perp a', l \perp b'$。

a、b 为异面直线，

, a'、b' 为不同的两条相交直线，

, $l \perp \alpha$。

例 6　已知 $\alpha \cap \beta = l, \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$，求证，$l \perp \gamma$。

分析　证明直线与平面垂直常用下面四种方法：

(1) $a \perp m, a \perp n$，m、n 相交，$m、n \subset \alpha \Rightarrow a \perp \alpha$；

(2) $a /\!/ b, a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$；

(3) $\alpha /\!/ \beta, a \perp \alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta$；

(4) $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = b, a \subset \alpha, a \perp b \Rightarrow \alpha \perp \beta$。

此外，证明直线与平面垂直还可以用同一法或反证法。

证法一　设 $\alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b$，

在平面 γ 内取一点 P，并过点 P 分别作直线 $m \perp a, n \perp b$（见图 7 - 98）。

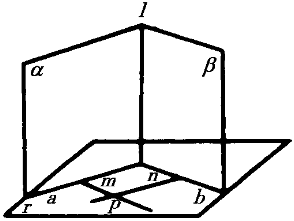


图 7 - 98

$\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$，

, $m \perp \alpha, n \perp \beta$。

$\alpha \cap \beta = l$，

, $l \cap \alpha$ 且 $l \subset \beta$，

, $m \perp l$ 且 $n \perp l$，即 $l \perp m$ 且 $l \perp n$。

又　$m \cap n = P$（事实上，若 m、n 为同一条直线，则由 $m \perp \alpha$、$n \perp \beta$ 知 $\alpha /\!/ \beta$，这就与 $\alpha \cap \beta = l$（矛盾），

, $l \perp \gamma$。

证法二 设 $\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$，

在平面 α **内，作一直线** $m \perp a$，**在平面** β **内，作直线** $n \perp b$（**见图** 7 - 99）。

$\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，

, $m \perp \gamma$，$n \perp \gamma$，

, $m /\!/ n$。

, $m \subset \alpha$，$n \not\subset \alpha$，

, $n /\!/ \alpha$。

$\beta \cap \alpha = l$，$n \subset \beta$，

, $n /\!/ l$。

$n \perp \gamma$，

, $l \perp \gamma$。

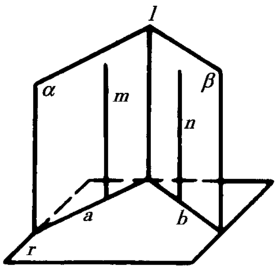


图 7 - 99

证法三 **在直线** l **上取点** P，**过点** P **作** $l' \perp \gamma$（**见图** 9 - 100）。

$\alpha \cap \beta = l$，

, $l \subset \alpha$ **且** $l \subset \beta$，

, $P \in \alpha$ **且** $P \in \beta$，

$\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，

, $l' \subset \alpha$ **且** $l' \subset \beta$，**即** l' **为平面** α、β **有公共线**，

, l' **与** l **重合，由** $l' \perp \gamma$ **知**，$l'\ \gamma$。

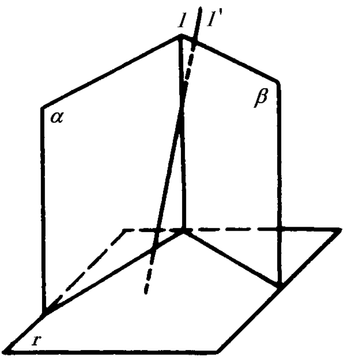


图 7 - 100

证法四 设 $\alpha \cap \beta = a$，$\beta \cap \gamma = b$。

假设直线 l **与平面** γ **不垂直**，

在直线 l **上取一点** P，**在平面** α **内，过点** P **作直线** $l_1 \perp a$，**在平面** β **内，过点** P **作直线** $l_2 \perp b$（**见图** 7 - 101）。

$\alpha \perp \beta$，$\beta \perp \gamma$，

, $l_1 \perp \gamma$，$l_2 \perp \gamma$，**这就是说，过点** P **有两条直线** l_1 **和** l_2 **与平面** γ **垂直，这就与过一点到一个平面的垂线有且只有一条矛盾。**

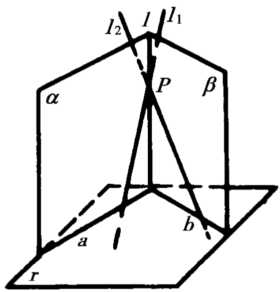


图 7 - 101

,　　$l \perp \gamma$。

例 7　**在棱长为** a **的四面体** ABCD **中**,G、F、M **分别是棱** BC、AB、AC **的中点**,**过** FG **的平面与平面** ACD **相交于** EH,**求证**:**平面** BMD⊥**平面** EFGH。

分析　**证明两个平面互相垂直**,**只要证明其中一个平面经过另一个平面的一条垂线**,**垂线的给定是证明的关键。由于** BM⊥FG,BM⊂**平面** BDM,FG⊂**平面** EFGH,**因此**,**垂线可在** BM、FG **中选取**(**见图** 7 - 102)。

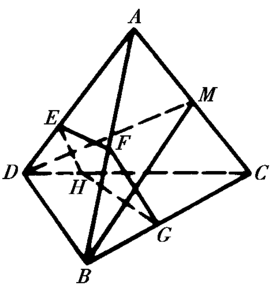


图 7 - 102

证明:　　**四面体** ABCD **为正四面体**,**点** M **为棱** AC **的中点**,

,　　AC⊥BM,AC⊥DM,

,　　AC⊥**平面** BMD。

　　F、G **分别为** AB、BC **的中点**,

,　　FG∥AC,

,　　FG⊥**平面** BMD。

　　FG⊂**平面** EFGH,

,　　**平面** BMD⊥**平面** EFGH。

例 8　**已知** PA⊥**平面** ABCD,ABCD **为矩形**,M、N **分别是** AB、PC **的中点**,

(1)**求证**:MN⊥AB;

(2)**若平面** PDC **与平面** ABCD **成** 45°**角**,**求证**:**平面** MND⊥**平面** PDC。

证明(1)　**如图** 7 - 103 **所示**,**连接** AC、BD,**设** AC∩BD = 0,**则** O **为底面正方形的中心**,**连接** ON, N 为 PC 的中点，

, ON∥PA。

PA⊥平面 ABCD，

, ON⊥平面 ABCD，

, OM 为 MN 在平面 ABCD 上的射影。

M 为 AB 的中点，

, AB⊥OM。

由三垂线定理知，AB⊥MN，即 MN⊥AB。

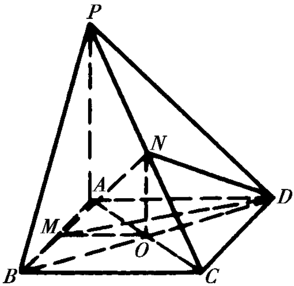


图 7 - 103

(2) 证法一 PA⊥平面 ABCD，

, AD 是 PD 在平面 ABCD 上的射影。

ABCD 为矩形，

, CD⊥AD，

, CD⊥PD，

, ∠PDA 为平面 PDC 与平面 ABCD 所成二面角的平面角，由题设可知，∠PDA = 45°。

设矩形 ABCD 中，AD = a，CD = b，则 PA = a，

在 Rt△MON 中，$MN^2 = ON^2 + OM^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$，

在 Rt△AMD 中，$MD^2 = AM^2 + AD^2 = \frac{1}{4}b^2 + a^2$，

在 Rt△PCD 中，$PC^2 = PD^2 + CD^2 = 2a^2 + b^2$，

, $ND^2 = \frac{1}{4}PC^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}b^2$，

, $MD^2 = MN^2 + ND^2$，

, MN⊥ND。

MN⊥AB，CD∥AB，

, MN⊥CD。

显然 ND、CD⊂平面 POC，且 ND∩CD = D，

, $MN \perp$ 平面 PDC。

显然 $MN \subset$ 平面 MND，

, 平面 MND $\perp$ 平面 PDC。

证法二 $PA \perp$ 平面 ABCD，

, AD 为 PD 在平面 ABCD 上的射影，

ABCD 为矩形，

, $CD \perp AD$，

, $CD \perp PD$，

, $\angle PDA$ 为平面 PDC 与平面 ABCD 所成二面角的平面角，由题设可知，$\angle PDA = 45°$。

设矩形 ABCD 中，$AD = a$，$CD = b$，则 $PA = a$，如图 7 - 104 所示，

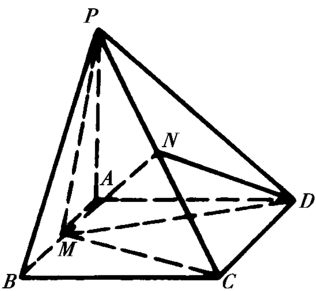


图 7 - 104

连接 PM、CM，

在 Rt△PAM 中，$PM^2 = PA^2 + AM^2 = a + \frac{1}{4}b^2$，

在 Rt△CBM 中，$CM^2 = BC^2 + BM^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2$，

, $PM^2 = CM^2$，

, $PM = CM$。

N 为 PC 的中点，

, $MN \perp PC$。

$MN \perp AB$，$CD // AB$，

,　　$MN \perp CD$。

显然 PC、$CD \subset$ **平面** PDC，**且** $PC \cap CD = C$，

,　　$MN \perp$ **平面** PDC。

显然 $MN \subset$ **平面** MND，

,　　**平面** $MND \perp$ **平面** PDC。

例 9　**已知直线** a **不在平面** α **内**，$a \perp b$，$b \perp \alpha$，**求证**：$a // \alpha$。

分析　**在平面** α **内，给出一条与直线** a **平行的直线是证明直线** a **与平面** α **平行的关键。**

证法一　**在直线** b **上取一点** P，**并过点** P **作直线** $c // a$（**若** a **与** b **相交亦可行**）。

$a \perp b$，

,　　$c \perp b$。

过直线 b **和** c **作一个平面** β（**见图** 7 - 105），**设** $\beta \cap \alpha = a'$，

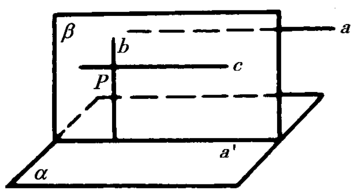


图 7 - 105

$b \perp \alpha$，

,　　$b \perp a'$，

在平面 β **内**，

$b \perp c$，$b \perp a'$，

,　　$c // a'$，

,　　$a // a'$。

$a' \subset \alpha$，$a \not\subset \alpha$，

,　　$a // \alpha$。

证法二

如图 7 - 106 **所示，若直线** a **和** b **相交，则过直线** a **和** b **作一平面** β，**设** $\beta \cap \alpha = a'$，

$b \perp \alpha$，

,　　$b \perp a'$。

在平面 β **内**，

$b \perp a$，$b \perp a'$，

,　　$a // a'$。

$a' \subset \alpha$，$a \not\subset \alpha$，

,　　$a /\!/ \alpha$。

如图 7 - 107 所示，若直线 a 和 b 不相交，设 $b \cap \alpha = P$，则过点 P 和直线 a 作一个平面 β，且 b 与 β 不垂直（事实上，若 $b \perp \beta$，则由 $b \perp \alpha$ 知，$\alpha /\!/ \beta$，这就与 α、β 有公共点 P 矛盾）。

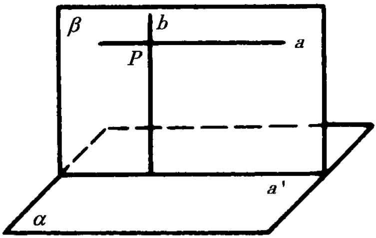


图 7 - 106

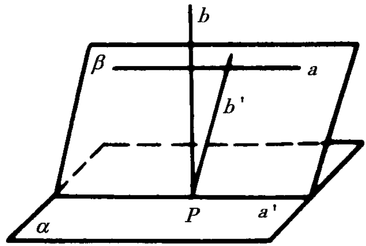


图 7 - 107

设 $\beta \cap \alpha = a'$，b 在平面 β 上的射影为 b'，

$a \perp b$，$a \subset \beta$，

,　　$a \perp b'$。

$b \perp \alpha$，

,　　$b \perp a'$，即 $a' \perp b$。

,　　$a' \perp b'$。

在平面 β 内，由 $a \perp b'$，$a' \perp b'$ 可知，$a /\!/ a'$。

$a' \subset \alpha$，$a \not\subset \alpha$，

,　　$a /\!/ \alpha$。

说明　在两种证法中，都是在同一平面 β 内运用平几知识证得直线 $a /\!/ a'$。

在证法二中，巧妙地运用了三垂线定理的逆定理。

例 10　在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N、P 分别为棱 CC_1、B_1C_1、C_1D_1 的中点，

（1）求证：$AP \perp$ 平面 D_1MN；

（2）求 D_1C_1 与平面 D_1MN 所成角的正切值。

证明（1）　如图 7 - 108 所示，连接 A_1P，

$AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

, A_1P 为 AP 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的射影。

在正方体形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，

N、P 为 B_1C_1、C_1D_1 的中点，

, $D_1N \perp A_1P$，

, $D_1N \perp AP$，即 $AP \perp D_1N$，

连接 DP，同理可证，$AP \perp D_1M$，

显然 D_1M、$D_1N \subset$ 平面 D_1MN，且 $D_1M \cap D_1N = D_1$，

, $AP \perp$ 平面 D_1MN。

解(2)　解法一．如图 7 - 109 所示，取 MN 的中点 G，连接 D_1G、C_1G。

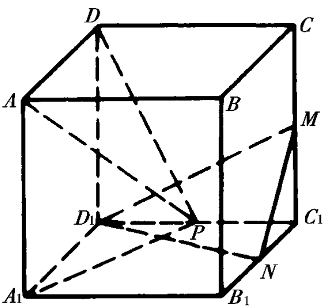


图 7 - 108

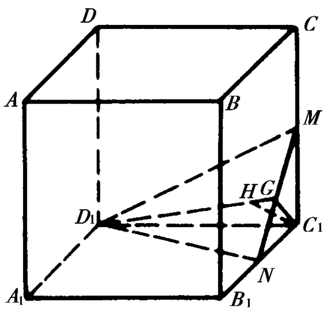


图 7 - 109

M、N 分别为 CC_1、B_1C_1 的中点

, $D_1M = D_1N$，$C_1M = C_1N$，

, $D_1G \perp MN$，$C_1G \perp MN$，

, $MN \perp$ 平面 C_1D_1G，

, 平面 $C_1D_1G \perp$ 平面 D_1MN。

在平面 C_1D_1G 内，过 C_1 作 $C_1H \perp D_1G$，则 $C_1H \perp$ 平面 D_1MN，

, $\angle C_1D_1H$，即 $\angle C_1D_1G$ 就是 D_1C_1 与平面 D_1MN 所成的角。

$C_1D_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C，

, $D_1C_1 \perp C_1G$。

设正方体的棱长为 a**,则** $C_1G=\frac{\sqrt{2}}{4}a$**,**

, $D_1G=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$。

在 $Rt\triangle C_1D_1G$ **中,**$C_1H=\frac{D_1C_1\cdot C_1G}{D_1G}=\frac{a\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{3\sqrt{2}}{4}a}=\frac{1}{3}a$。

在 $Rt\triangle D_1C_1H$ **中,**$\sin\angle C_1D_1H=\frac{C_1H}{D_1C_1}=\frac{1}{3}$。

, $\tan\angle C_1D_1H=\frac{\sqrt{2}}{4}$**,即** D_1C_1 **与平面** D_1MN **所成角的正切值为**$\frac{\sqrt{2}}{4}$。

解法二　在平面 $A_1B_1C_1D_1$ **内,过点** C_1 **作** $C_1G\perp D_1N$**,垂足为** G**,连接** MG。

$MC_1\perp$ **平面** $A_1B_1C_1D_1$**,**

, C_1G **就是** MG **在平面** $A_1B_1C_1D_1$ **上的射影,**

, $D_1N\perp MG$**,**

, $D_1N\perp$ **平面** C_1GM**,**

, **平面** $C_1GM\perp$ **平面** D_1MN。

如图 7 - 110 **所示,在平面** C_1GM **内,过点** C_1 **作** $C_1H\perp GM$**,则** $C_1H\perp$ **平面** D_1MN**,**

连接 D_1H**,则** D_1H **就是** D_1C_1 **在平面** D_1MN **上的射影,**

, $\angle C_1D_1H$ **就是** D_1C_1 **与平面** D_1MN **所成的角。**

设正方体的棱长为 a**,**

在 $Rt\triangle C_1D_1N$ **中,**$C_1G=\frac{D_1C_1\cdot C_1N}{D_1N}=\frac{a\cdot\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}a$。

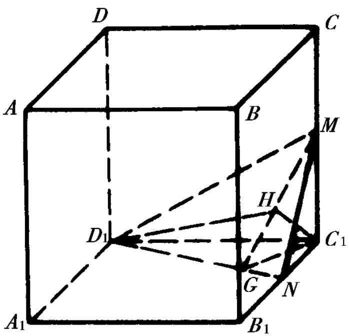


图 7 - 110

在 Rt$\triangle C_1MG$ 中,$GM=\sqrt{C_1M^2+C_1G^2}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{5}a^2}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ a,

$$C_1H=\frac{C_1M\cdot C_1G^2}{GM}=\frac{\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}a}{\frac{3\sqrt{5}}{10}a}=\frac{1}{3}a。$$

在 Rt$\triangle C_1D_1H$ 中,$\sin\angle C_1D_1H=\frac{C_1H}{D_1C_1}=\frac{1}{3}$,

, $\tan\angle C_1D_1H=\frac{\sqrt{2}}{4}$,即 D_1C_1 与平面 D_1MN 所成角的正切值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$。

说明　在(1)的证明中,采用了将线面垂直的问题转化成线线垂直的问题的方法,并且用三垂线定理证明线线垂直。

在(2)的两种解题过程中,都采用了先给出过点 C 并且与平面 D_1MN 垂直的平面,然后在这个垂面内给出过点 C_1 到平面 D_1MN 的垂线段,再给出 D_1C_1 在平面 D_1MN 上的射影,得表示 D_1C_1 与平面 D_1MN 所成的角,这样就将所求角落实在具体的平面内,便于后续的计算。

练 习 题

1. 如图 7 - 111 所示，在梯形 ABCD 中，AB∥CD，点 E、F 分别为 BC、AD 的中点，现将平面 CDEF 折起，使 CD 至 C′D′的位置，G、H 分别为 AD′、BC′的中点，求证：四边形 EFGH 为平行四边形。

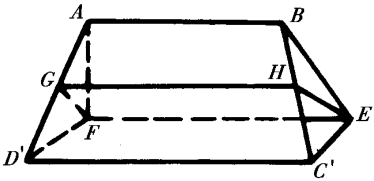


图 7 - 111

2. 如图 7 - 112 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 DD_1 的中点，求证：DB_1∥平面 A_1C_1E。

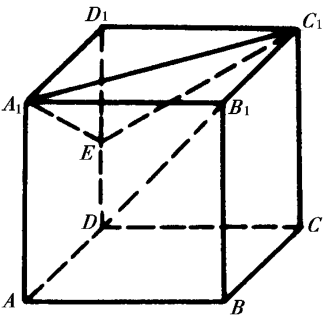


图 7 - 112

3. 在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，点 P 为棱 AD 的中点，点 M 为棱 A_1B_1 上任意一点，点 N 为棱 CC_1 的中点，求证：$D_1P\perp MN$。

4. 在直角三角形 ABC 中，AD 为斜边 BC 上的高，将图形沿 AD 对折成大小为 θ 的二面角，点 D 在平面 ABC 上的射影为 H。问：H 能否为△ABC 的垂心？若不能，给出证明；若能，求出 θ 的值。

5. 四边形 ABCD 中，AD∥BC，AD = AB，∠BCD = 45°，∠BAD

$=90°$，将$\triangle ABD$沿对角线 BD 折起，记折起后点 A 的位置为 P，且使平面 $PBD\perp$平面 BCD。

（1）求证：平面 $PBC\perp$平面 PDC；

（2）求二面角 $P-BC-D$ 的大小。

6. 已知点 V 为平面 ABC 外一点，VA、VC、VB、VC 的长分别为 a、b、c，$\angle BVC=\alpha$，$\angle CVA=\beta$，$\angle AVB=\gamma$，且 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，$\cos\alpha+\cos\beta=1+\cos\gamma$。

（1）求证：平面 VAB、VBC、VCA 中必有一个与平面 ABC 垂直；

（2）设 VA 的中点为 M，V 在平面 ABC 上的射影为 O，O 在 AC 上的射影为 N，求证：平面 $OMN/\!/$平面 VBC。

第八章　多面体和旋转体

一、几何体中的空间元素

几何体是空间元素的载体。

几何体的性质是以直线和平面的理论为基础，由几何体的定义推导出来的。因此，研究几何体就是以几何体的概念、性质，以及空间直线和平面的有关知识为基础，进行几何体元素量、元素位置关系量的计算，几何体空间元素位置关系的讨论。研究几何体，既要从几何体的概念出发，整体考察分析几何体的性质，又要从平面几何的角度、空间元素位置关系的基本图形的角度，局部考察、分析几何体的性质，以揭示几何体问题的实质。

例1　如图8-1所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，棱长为a，M、N分别为A_1B、AC上的点，

（1）若$A_1M=AN=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，求证：$MN\parallel$平面$BB_1C_1C$；

（2）若$BP=AQ=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，求证：$PQ\perp A_1B$且$PQ\perp AC$。

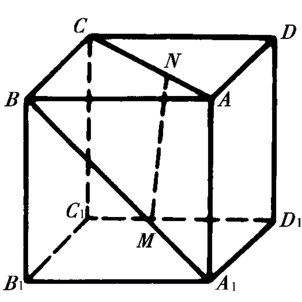


图8-1

分析 正方体是特殊的四棱柱。考虑到 AC、A_1B 与 MN 相交且与平面 BB_1C_1C 相交，故在平面 BB_1C_1C 内给出与 MN 平行的直线可以过 MN、AC 作平面或过 MN、A_1B 作平面而得到；也可以借助于平行四边形的性质在平面 BB_1C_1C 内给出与 MN 平行的直线，由此根据线面平行的判定定理证得 MN 与平面 BB_1C_1C 平行；也可以将直线 MN 置于可以证明与平面 BB_1C_1C 平行的平面内，证明 MN 与平面 BB_1C_1C 平行。

证明两直线垂直，常可将一条直线置于一个平面内，将另一条直线看作这个平面的斜线，这时，只要证明平面内的这条直线与斜线在平面上的射影垂直，根据三垂线定理，即可证得两条直线垂直。由于在正方体中具有丰富的面面垂直关系，故给出斜线在平面上的射影极为便利。

证明(1)

证法一 如图 8-2 所示，在平面 AA_1B_1B 内，连接 AM 并延长交 BB_1 的延长线于 E，连接 CE。

正方体的棱长 a，$A_1M=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$，$AN=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$，

, $$\frac{A_1M}{MB}=\frac{1}{2},\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2},$$

$$AA_1 \parallel BB_1,$$

, $$\frac{AM}{ME}=\frac{A_1M}{MB}=\frac{1}{2},$$

, $$\frac{AM}{ME}=\frac{AN}{NC},$$

, $$MN \parallel CE。$$

$CE\subset$ 平面 BB_1C_1C，$MN\not\subset$ 平面 BB_1C_1C，

, $MN\parallel$ 平面 BB_1C_1C。

证法二 如图 8-3 所示，在平面 ACC_1A_1 内，连接 A_1N 并延长交 C_1C 的延长线于 E，连接 BE。

正方体的棱长为 a，$A_1M=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$，$AN=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$，

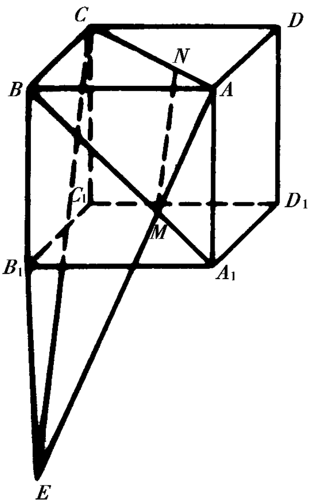


图 8 - 2

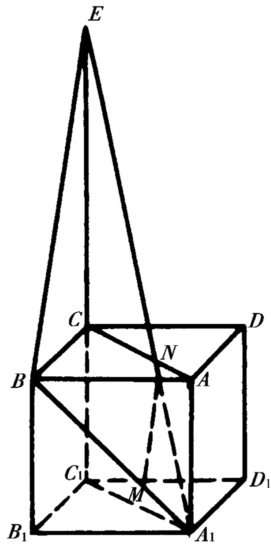


图 8 - 3

,

$$\frac{A_1M}{MB}=\frac{1}{2},\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2},$$

$$AA_1 \parallel CC_1,$$

,

$$\frac{A_1N}{NE}=\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2},$$

,

$$\frac{A_1M}{MB}=\frac{A_1N}{NE},$$

,

$$MN \parallel BE。$$

$BE \subset$ 平面 BB_1C_1C，$MN \not\subset$ 平面 BB_1C_1C，

, $MN \parallel$ 平面 BB_1C_1C。

证明三 如图 8 - 4 所示，在平面 AA_1B_1B 内，过点 M 作 $ME \parallel A_1B_1$，交 BB_1 于 E，在平面 ABCD 内，过点 N 作 $NF \parallel AB$，交 BC 于 F，连接 EF。

$$AB \parallel A_1B_1,$$

, $ME \parallel NF$，

, **四边形** MNFE **为平面四边形。**

正方体的棱长为 a，$A_1M=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，$AN=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，

, $$\frac{A_1M}{MB}=\frac{1}{2},\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2},$$

, $$\frac{ME}{A_1B_1}=\frac{2}{3},\frac{NF}{AB}=\frac{2}{3},$$

, $$ME=\frac{2}{3}a,NF=\frac{2}{3}a,$$

, $$ME=NF,$$

, **四边形** MNFE **为平行四边形，**

, $$MN \parallel EF。$$

$EF\subset$ **平面** BB_1C_1C，$MN\not\subset$ **平面** BB_1C_1C，

, $MN\parallel$ **平面** BB_1C_1C。

证明四　如图 8 - 5 **所示，在平面** ABCD **内，过点** N **作** $NG\parallel BC$，**交** AB **于** G，**连接** MG，

, $NG\parallel$ **平面** BB_1C_1C。

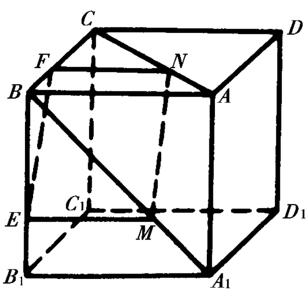


图 8 - 4

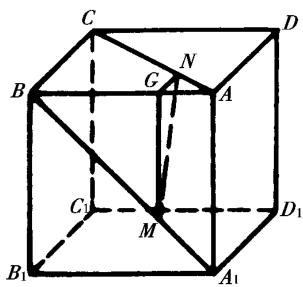


图 8 - 5

正方体的棱长为 a，$AM=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，$AN=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，

, $$\frac{A_1M}{MB}=\frac{1}{2},\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2},$$

, $$\frac{AG}{GB}=\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2},$$

, $$\frac{AG}{GB}=\frac{A_1M}{MB},$$

, $$MG \parallel AA_1。$$

$$BB_1 \parallel AA_1,$$

, $$MG \parallel BB_1,$$

, $MG\parallel$平面 BB_1C_1C。

又显然 $MG\cap NG=G$,MG、$NG\subset$平面 MNG,

, 平面 $MNG\parallel$平面 BB_1C_1C,

$MN\subset$平面 MNG,

, $MN\parallel$平面 BB_1C_1C。

证明(2) 如图 8 - 6 所示,连接 BD,由四边形 ABCD 为正方形知,$AC\perp BD$。

在平面 AA_1B_1B 内,过点 P 作 $PH\perp AB$,垂足为 H,由平面 $AA_1B_1B\perp$平面 ABCD 知,$PH\perp$平面 ABCD,连接 HQ,则 HQ 为 PQ 在平面 ABCD 上的射影。

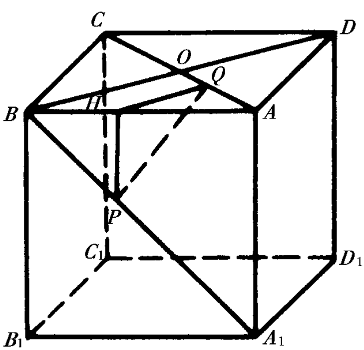


图 8 - 6

正方体的棱长为 a，$BP=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，$AQ=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，

, $$\frac{BP}{PA_1}=\frac{1}{2},\frac{AQ}{QC}=\frac{1}{2},$$

, $$\frac{BH}{HA}=\frac{1}{2},\frac{OQ}{QA}=\frac{1}{2},$$

, $$\frac{BH}{HA}=\frac{OQ}{OA},$$

, $$HQ\parallel BD,$$

, $AC\perp HQ$

, $AC\perp PQ$，即 $PQ\perp AC$。

同理 $PQ\perp A_1B$。

例 2 如图 8 - 7 所示，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M 为 AC 的中点，

（1）求证：$AB_1\parallel$ 平面 MBC_1；

（2）若 $AB_1\perp BC_1$，求二面角 $M-BC_1-C$ 的度数。

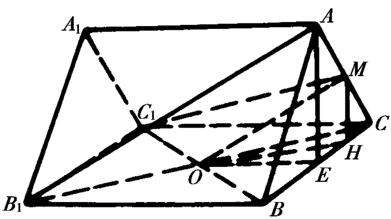


图 8 - 7

分析 要证直线 $AB_1\parallel$ 平面 MBC_1，可在平面 MBC_1 内给出一条与直线 AB_1 平行的直线证得。平面 MBC_1 内与直线 AB_1 平行的直线一般是经过直线 AB_1 的平面与平面 MBC_1 的交线，且这个经过直线 AB_1 的平面一般由直线 AB_1 及与直线 AB_1 相交且与平面 MBC_1 有公共点的直线确定。

计算二面角的度数，一般先给出二面角的一个平面角，然后计算二面角的平面角的度数而得。当存在一个平面与二面角的一个

面垂直时,则可在这个垂面内给出一条经过二面角的一个面内一点到另一个面的一条直线,然后用三垂线定理或逆定理给出二面角的一个平面角。

证明(1)　连接 B_1C**,设** $B_1C \cap BC_1 = 0$**,连接** OM**(见图** 8 - 7**)。**

在$\triangle AB_1C$ **中,**

点 O **为** BC_1 **的中点,点** M **为** AC **的中点,**

, $OM \parallel AB_1$,

, $OM \subset$ **平面** MBC_1,$AB \not\subset$ **平面** MBC_1,

, $AB_1 \parallel$ **平面** MBC_1。

解(2)　在平面 ABC **内,过点** M **作** $MH \perp BC$**,垂足为** H**,**

平面 $ABC \perp$ **平面** BCC_1B_1,

, $MH \perp$ **平面** BCC_1B_1。

连接 OH**,则** OH **为** OM **在平面** BCC_1B_1 **上的射影。**

$AB_1 \perp BC_1$,$OM \parallel AB_1$,

, $OM \perp BC_1$,

故由三垂线定理逆定理可知:$OH \perp BC_1$,

, $\angle MOH$ **就是二面角** $M - BC_1 - C$ **的一个平面角。**

在平面 BCC_1B_1 **内,取** BC **的中点** E**,连接** OE**,则** $OE \perp BC$。

设正三棱柱的底面边长为 $4a$**,则** $HE = a$,$HB = 3a$,

在 $Rt\triangle BOH$ **中,**$OH^2 = HE \cdot HB = 3a^2$,

, $OH = \sqrt{3}a$,

又　在$\triangle ABC$ **中,**$MH = \dfrac{1}{2}AE = \sqrt{3}a$,

, **在** $Rt\triangle MOH$ **中,**$\angle MOH = 45°$**,即二面角** $M - BC_1 - C$ **为** 45°

例 3　**如图** 8 - 8 **所示,斜三棱柱** $ABC - A'B'C'$ **的底面 为一等腰直角三角形,直角 边** $AB = AC = 2cm$**,侧棱与底面成** 60°**角,**$B'C' \perp AC$,$BC' = 2\sqrt{6}cm$**,求** BC' **与底面** ABC **所成的角。**

分析　由题设可知,$AC \perp AB$,$AC \perp BC'$**,故** $AC \perp$ **平面** ABC'**,由此可知,给出侧棱** CC' **与平面** ABC **所成的角,斜线** BC' **与平面** ABC

所成的角时,过点 C' 作平面 ABC 的垂线一定在平面 ABC' 内(见图 8 - 8)。

解法一　　底面 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,且 $AB = AC$,

, $AC \perp BC$,

又 $AC \perp BC'$,

, $AC \perp$ 平面 ABC',

, 平面 $ABC' \perp$ 平面 ABC。

在平面 ABC' 内,过点 C' 作 $C'H \perp$ 直线 AB,垂足为 H,连接 CH ,

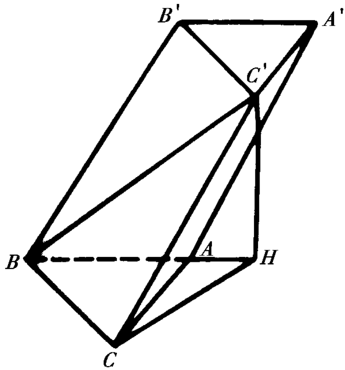


图 8 - 8

则 $C'H \perp$ 平面 ABC,

, CH、BH 分别为斜线 CC'、BC' 在平面 ABC 上的射影,

, $\angle C'CH$、$\angle C'BH$ 分别为 CC'、BC' 与平面 ABC 所成的角,由题设可知,$\angle C'CH = 60°$。

设 $AH = x$,

则在 $Rt\triangle C'BH$ 中,由 $BC'^2 = BH^2 + C'H^2$ 知,$C'H^2 = 24 - (2 + x)^2$,

在 $Rt\triangle ACH$ 中,由 $CH^2 = AC^2 + AH^2$ 知,$CH^2 = 4 + x^2$,

在 $Rt\triangle C'CH$ 中,由 $C'H^2 = 3CH^2$ 知,$C'H^2 = 3(4 + x^2)$,

, $24 - (2 + x)^2 = 3(4 + x)^2$,即 $x^2 + x - 2 = 0$,

, $x = 1$ 或 $x = -2$

若　$x = 1$,则点 H 在 BA 的延长线上,

在 $Rt\triangle C'BH$ 中,$\cos\angle C'BH = \dfrac{BH}{BC'} = \dfrac{3}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$,

, $\angle C'BH = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,即 BC' 与底面 ABC 所成的角为 arc-

$\cos\dfrac{\sqrt{6}}{4}$。

或 $x=-2$**，则点** H **与点** B **重合，这时直线** BC' **与底面** ABC **垂直，即** BC' **与底面** ABC **所成角为直角（经检验适合）。**

解法二　　底面$\triangle ABC$ **为等腰直角三角形，且** $AB=AC$，

, $AC\perp AB$，

又 $AC\perp BC'$，

, $AC\perp$ **平面** ABC'，

, **平面** $ABC'\perp$ **平面** ABC。

在平面 ABC' **内，过点** C' **作** $C'H\perp$ **直线** AB，，**垂足为** H，**连接** CH，

则 $C'H\perp$ **平面** ABC，

, CH、BH **分别为斜线** CC'、BC' **在平面** ABC **上的射影，**

, $\angle C'CH$、$\angle C'BH$ **分别为** CC'、BC' **与平面** ABC **所成的角，由题设可知，**$\angle C'CH=60°$，**设**$\angle C'BH=\theta$，

则在 $\triangle C'BH$ **中，**$C'H=2\sqrt{6}\sin\theta$，$BH=2\sqrt{6}\cos\theta$，

$$AB=2,$$

$$, \quad AH=|2\sqrt{6}\cos\theta-2|$$

在 $Rt\triangle ACH$ **中，**$CH^2=(2\sqrt{6}\cos\theta-2)^2+4$，

在 $Rt\triangle C'CH$ **中，**

$$C'H=\sqrt{3}CH,$$

$$, \quad (2\sqrt{6}\sin\theta)^2=3[(2\sqrt{6}\cos\theta-2)^2+4],$$

解得　$\cos\theta=0$ **或** $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

, $\theta=90°$**或** $\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，**即** BC' **与底面** BC **所成角为** $90°$**或** $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}$。

说明　在推理论证后，分别在两种解法中建立了关于未知量

的方程，这是求解未知量取值的常用思想方法。

例4 已知正四棱锥 P - ABCD 的高为 h，侧面等腰三角形的顶角为 2θ，求棱锥的侧面积。

解法一 过正四棱锥 P - ABCD 的顶点 P 作 PO⊥底面 ABCD，垂足为 O，则点 O 为正方形 ABCD 的中心，在底面 ABCD 内，过点 O 作 OE⊥BC，垂足为 E，则 E 为 BC 的中点，连接 PE，则 PE⊥BC(见图 8 - 9)。

设斜高 PE = x，

在 Rt△PBE 中，

$\angle BPE = \theta$，

, $BE = x\tan\theta$。

连接 OB，在 Rt△OBE 中，

$\angle OBE = 45°$，

OE $= BE = x\tan\theta$。

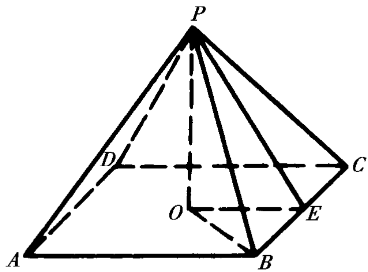


图 8 - 9

在 Rt△POE 中，由勾股定理得，$x^2 = h^2 + x^2\tan^2\theta$，

$$, \quad x^2 = \frac{h^2}{1 - \tan^2\theta}。$$

$$S_{\triangle PBC} = BE \cdot PE = x^2\tan\theta = \frac{h^2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta},$$

$$, \quad S_{侧} = \frac{4h^2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = 2h^2\tan2\theta。$$

解法二 (同解法一作图)

设斜高 PE = x，

在 Rt△PBE 中，

$$\angle BPE = \theta$$

$$, \quad PB = \frac{x}{\cos\theta}, BE = x\tan\theta。$$

连接 OB，在 Rt△OBE 中，

$$\angle OBE = 45°,$$

, $$OE = BE = x\tan\theta。$$

在 Rt△POE 中,由勾股定理得,$x^2 = h^2 + x^2\tan^2\theta$,

, $$x^2 = \frac{h^2}{1 - \tan^2\theta}。$$

, $$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}PB^2\sin2\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\theta}\right)^2\sin2\theta$$

$$= \frac{h^2\sin2\theta}{2\cos^2\theta(1 - \tan^2\theta)}$$

$$= \frac{h^2\sin2\theta}{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}h^2\tan\theta,$$

, $$S_{侧} = 2h^2\tan2\theta。$$

说明 在正棱锥中有四个直角三角形,如本例中的 Rt△POB、Rt△POE、Rt△OEB、Rt△PEB,它们把正棱锥的底面边长、外接圆半径、边心距、侧棱长、高、斜高、侧棱与底面所成的角、侧面与底面所成的角等元素联系在一起,掌握它们间的数量关系,是解决正棱锥计算问题的关键。

例 5 四棱锥 P - ABCD 的底面 ABCD 是矩形,PA⊥平面 ABCD,点 E、F 分别是 AB、PD 的中点,

(1) 求证:AF∥平面 PEC;

(2) 若 $AD = 2$,$CD = 2\sqrt{2}$,二面角 P - CD - B 为 45°,求点 F 到平面 PEC 的距离。

证明 (1) 证法一 如图 8 - 10 所示,在底面 ABCD 内,延长 DA、CE 相交于 G,连接 PG。

点 E 为 AB 的中点,

, $$AE = \frac{1}{2}CD,$$

又 AE∥CD,

, 点 A 为 GD 的中点,

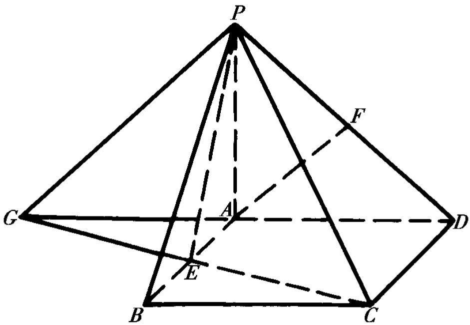


图 8 - 10

F 为 PD 的中点，

, $AF \parallel PG$。

$AF \not\subset$ 平面 PEC，$PG \subset$ 平面 PEC，

, $AF \parallel$ 平面 PEC。

证法二　如图 8 - 11 所示，取 PC 的中点，连接 EG、FG。

F 为 PD 的中点，E 为 AB 的中点，

, $GF \parallel CD$，$GF = \frac{1}{2}CD$，$AE = \frac{1}{2}CD$，

, $GF = AE$，

, 四边形 AEGF 为平行四边形，

, $AF \parallel EG$。

, $AF \not\subset$ 平面 PEC，$BG \subset$ 平面 PEC，

, $AF \parallel$ 平面 PEC。

证法三　如图 8 - 12 所示，取 CD 的中点 G，连接 FG、AG。

E 为 AB 的中点，F 为 PD 的中点，

, $FG \parallel PC$，$AG \parallel EC$，

, $FG \parallel$ 平面 PEC，$AG \parallel$ 平面 PEC，

, 平面 $AFG \parallel$ 平面 PEC，

显然 $AF \subset$ 平面 AFG，故 $AF \parallel$ 平面 PEC。

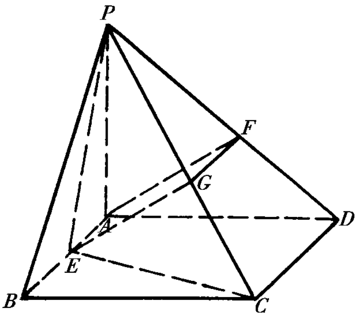


图 8 - 11

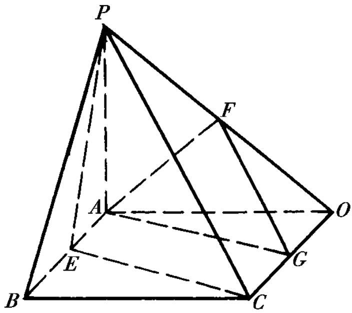


图 8 - 12

解(2)　　$PA \perp$ 平面 ABCD,

,　平面 $PAD \perp$ 平面 ABCD,

$CD \perp AD$,

,　$CD \perp$ 平面 PAD,

,　$AD \perp CD$, $PD \perp CD$,

,　$\angle PDA$ 为二面角 P - CD - B 的 一个平面角,由题可知,$\angle PDA = 45°$。

在 Rt$\triangle PAD$ 中,

F 为 PD 的中点,

,　$AF \perp PD$,

又　$CD \perp AF$,

,　$AF \perp$ 平面 PCD。

如图 8 - 13 所示,取 PC 的中点 G,连接 EG,由(1)的证法二可知,$EG \parallel AF$,

,　$EG \perp$ 平面 PCD,

$EG \subset$ 平面 PEC,

,　平面 $PEC \perp$ 平面 PCD。

在平面 PCD 内,过点 F 作 $FH \perp PC$,则 $FH \perp$ 平面 PEC,

,　线段 FH 的长就是点 F 到平面 PEC 的距离。

在等腰直角$\triangle PAD$ 中,

$AD = 2$，

，　$PD = 2\sqrt{2}$，

在 Rt△PAD 中，

$CD = 2\sqrt{2}$，

，　$\angle CPD = 45°$，

在 Rt△PHF 中，

$PF = \sqrt{2}$，

，　$FH = 1$，即点 F 到平面 PEC 的距离为 1。

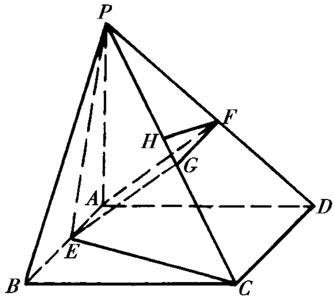


图 8 - 13

例 6　四棱锥 S - ABCD 的底面是矩形，$BC = a$，$AB = \sqrt{2}a$，高 $SO = \frac{1}{2}a$（O 为底面矩形对角线的交点），过底面对角线 BD 作截面 BDE∥SA，交 SC 于 E，求截面 BDE 的面积。

分析　求截面 BDE 的面积的关键是给出△BDE 的边 BD 上的高，考虑到平面 SAC⊥底面 ABCD 可知，可用三垂线定理给出边 BD 上的高。

解　如图 8 - 14 所示，连接 AC，则平面 SAC∩平面 BDE = OE。

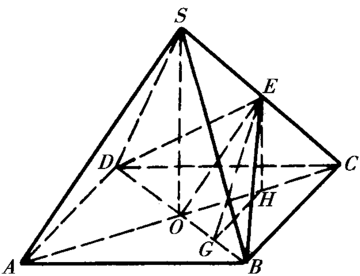


图 8 - 14

SA∥截面 BDE，

，　SA∥OE，

点 O 为 AC 的中点，

, **点** E **为** SC **的中点。**

, SO $\perp$ **平面** ABCD**，**SO $\subset$ **平面** SAC**，**

, **平面** SAC $\perp$ **平面** ABCD**。**

在平面 SAC **内，过点** E **作** EH $\perp$ AC**，垂足为** H**，则** EH $\perp$ **平面** ABCD**（见图** 8 - 14**）。**

, $$EH \perp SO，$$

, **点** H **为** OC **的中点。**

在平面 ABCD **内，过点** H **作** HG $\perp$ BD**，垂足为** G**，连接** EG**，则** HG **为** EG **在平面** ABCD **上的射影，由三垂线定理可知，**EG $\perp$ BD**，即** EG **为边** BD **上的高（见图** 8 - 14**）。**

在矩形 ABCD **中，**

$$AB = \sqrt{2}a，BC = a，$$

$$BD = \sqrt{3}a。$$

在 △SOC **中，**

$$SO = \frac{1}{2}a，$$

, $$EH = \frac{1}{4}a。$$

在 △BCD **中，点** C **到** BD **的距离为** $\frac{\sqrt{2}a \cdot a}{\sqrt{3}a}$**，即** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$**，**

, $$HG = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a。$$

在 Rt△EHG **中，**$EG = \sqrt{EH^2 + HG^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{12}a$。

, $$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}BD \cdot EG$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{\sqrt{33}}{12}a$$

$$=\frac{\sqrt{11}}{8}a^2。$$

例 7　已知正三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 的上、下底面的边长分别为 a、$b(a<b)$，侧棱与下底面成 $45°$ 角，求被截去的小棱锥和此正三棱台的侧面积。

分析　分析题意可知，求得棱台的侧面积即可求得被截去的小棱锥的侧面积，求棱台的侧面积的关键是求斜高。

解　设正三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 是由正三棱锥 $V-ABC$ 截得的。

如图 8-15 所示，取 AB 的中点 D，连接 VD，交 A_1B_1 于 D_1，则点 D_1 为 A_1B_1 的中点。

设 $\triangle ABC$ 的中心为 O，连接 VO，交 C_1D_1 于 O_1，则点 O_1 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，$VO\perp$ 平面 ABC，则 $\angle VCO$，即 $\angle C_1CO$ 就是侧棱与底面所成的角，由题设可知，$\angle C_1CO=45°$。

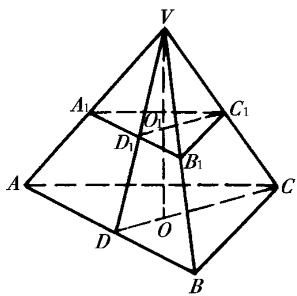


图 8-15

在正 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle ABC$ 中，

$A_1B_1=a$，$AB=b$，

，　$O_1C_1=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

$$O_1D_1=\frac{\sqrt{3}}{6}a,$$

$$OC=\frac{\sqrt{3}}{3}b,\ OD=\frac{\sqrt{3}}{6}b。$$

，　在直角梯形 O_1OCC_1 中，$OO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(b-a)$，

，　在直角梯形 O_1ODD_1 中，

$$D_1D=\sqrt{\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(b-a)\right]^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)\right]^2}=\frac{\sqrt{15}}{6}(b-a)。$$

,　　正三棱台的侧面积 $S_{台侧}=\frac{1}{2}(3a+3b)\cdot\frac{\sqrt{15}}{6}(b-a)=\frac{\sqrt{15}}{4}(b^2-a^2)$。

设截得棱台时被截去的小棱锥的侧面积为 S'，则 $\frac{S'}{S'+S_{台侧}}=\frac{a^2}{b^2}$。

,　　$$\frac{S'}{S_{台侧}}=\frac{a^2}{b^2-a^2},$$

,　　$$S'=\frac{a^2}{b^2-a^2}S_{台侧}$$

$$=\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}(b^2-a^2)$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{4}a^2。$$

说明　与正棱锥一样，在正棱台中有三个直角梯形，如本例中 O_1OCC_1、O_1ODD_1、D_1DBB_1，两个直角三角形，如本例中的 $\triangle O_1B_1D_1$、$\triangle OBD$，它们把正棱台的各种元素联系在一起，掌握它们的数量关系，是解决正棱台计算问题的关键。

例 8　已知正四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的下底面边长和侧棱长分别为 a、b，且其对角线 DB_1 与侧棱 BB_1 垂直。

(1) 求上底面的边长；

(2) 求侧面积；

(3) 求对角线的交点到下底面的距离。

解　如图 8-16 所示，设正棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 上、下底面的中心分别为 O_1、O，连接 O_1O，则 $O_1O\perp$ 底面，连接 B_1D_1、BD，则 B_1D_1、BD 分别经过点 O_1、O，故平面 $B_1BDD_1\perp$ 底面。

(1)　　下底面边长为 a，

,　　$$OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

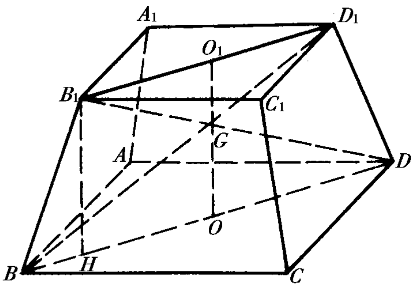


图 8 - 16

在梯形 D_1DBB_1 **中,过点** B_1 **作** $B_1H \perp BD$**,垂足为** H**,**

又 $DB_1 \perp BB_1$,$BB_1 = b$,

, $$BH = \frac{BB_1^2}{BD} = \frac{b^2}{\sqrt{2}a},$$

, $$O_1B_1 = OH = OB - BH = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{b^2}{\sqrt{2}a} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2}a},$$

, **上底面边长为**$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2}a} \cdot \sqrt{2}$**,即**$\frac{a^2 - b^2}{a}$。

(2)**在梯形** A_1ABB_1 **中,**

上、下底边的长分别为$\frac{a^2 - b^2}{a}$**和** a**,腰长为** b**,**

, **其高为**$\sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2}A - \frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2}$**,**

即 $\frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$**,**

, $$S_{\text{梯形},A_1ABB_1} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 - b^2}{a}\right) \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$$

$$= \frac{b(2a^2 - b^2)\sqrt{4a^2 - b^2}}{4a^2},$$

, $$S_{台侧}=\frac{b(2a^2-b^2)\sqrt{4a^2-b^2}}{a^2}。$$

(3)设对角线的交点为 G,则点 G 在 O_1O 上,

, **线段 GO 的长就是点 G 到下底面的距离。**

在 $Rt\triangle B_1BH$ **中,**$B_1H=\sqrt{b^2-\frac{b^4}{2a^2}}=\sqrt{\frac{b^2(2a^2-b^2)}{2a^2}}$,

$$GO\,/\!/\,B_1H,$$

, $$\frac{GO}{B_1H}=\frac{DO}{DH},$$

, $$GO=\frac{DO}{DH}\cdot B_1H=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a-\frac{b^2}{\sqrt{2}a}}\cdot\sqrt{\frac{b^2(2a^2-b^2)}{2a^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}ab}{2\sqrt{2a^2-b^2}}=\frac{ab\sqrt{2(2a^2-b^2)}}{2(2a^2-b^2)}。$$

说明　本例求解中,元素量的计算集中棱台的对角面 BB_1D_1D **中,这种在局部平面图形中处理问题的方法是处理几何体中的问题的常用方法 。**

例 9　**如图** 8 - 17 **所示,**$AA'B'B$ **是圆柱的轴截面,**C **是底面圆周上一点,**

(1)证明 :平面 $A'AC\perp$ **平面** $A'BC$**;**

(2)设二面角 $A-A'B-C$ **为** α**,**$\angle CAB=\beta$**,**$\angle CA'B=\gamma$**,求证:** $\sin\alpha\cos\gamma=\cos\beta$。

证明(1)　$AA'B'B$ **是圆柱的轴截面,**

, AA' **为圆柱的母线,**AB **为底面圆的直径,**

, $AA'\perp$ **底面,**$\angle ACB=90°$**,**

, $$BC\perp AA',BC\perp AC,$$

, $BC\perp$ **平面** $A'AC$**,**

, **平面** $A'BC\perp$ **平面** $A'AC$。

(2)在底面内,过点 C 作 $CH\perp AB$**,垂足为 H,由底面** $\perp$ **截面**

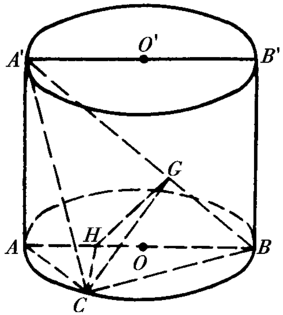


图 8 - 17

$AA'B'B$ 知，$CH \perp$ 截面 $AA'B'B$，

在截面 $AA'B'B$ 内，过点 H 作 $HG \perp A'B$，垂足为 G，连接 CG，则 $CG \perp A'B$，

, $\angle CGH$ 就是二面角 $A - A'B - C$ 的一个平面角，由题设可知，$\angle CGH = \alpha$。

在 $Rt\triangle CGH$ 中，$\sin\alpha = \dfrac{CH}{CG}$；

在 $Rt\triangle CGB$ 中，

$$\angle CA'B = \gamma,$$

, $$\angle CBG = 90° - \gamma,$$

, $$\cos\gamma = \sin(90° - \gamma) = \sin\angle CBG = \frac{CG}{BC};$$

在 $Rt\triangle BCH$ 中，

$$\angle CAB = \beta,$$

, $$\angle CBH = 90° - \beta,$$

, $$\cos\beta = \sin(90° - \beta) = \sin\angle CBH = \frac{CH}{BC};$$

, $$\sin\alpha \cdot \cos\gamma = \cos\beta。$$

说明由本例，我们可以又一次看到，当存在一个平面垂直于二面角的一个面时，从二面角的一个面内一点作到另一个面的一条垂线就在这个垂面内，这时，可以用三垂线定理或其逆定理给出二

面角的一个平面角。

例 10　**如图** 8 - 18 **所示,圆锥的顶点为** V,AB **为底面的直径,且** AB = 2,**半径** OC ⊥ AB,VA ⊥ VB,

(1) **求异面直线** AC ⊥ VB **所成的角;**

(2) **求二面角** B - VA - C **的正切值。**

解(1)　**在底面内,延长** CD **交圆周于点** C',**连接** BC',**则** $BC' \parallel AC$,

,　**相交直线** VB **与** BC' **所成的角就是异面直线** AC **与** VB **所成的角。**

$OC \perp AB, AB = 2$,

,　$BC' = \sqrt{2}$,

$VA \perp VB, AB = 2$,

,　$VC' = VB = \sqrt{2}$,

,　$\triangle VBC'$ **为正三角形,**

,　$\angle VBC' = 60°$,

,　**异面直线** AC **与** VB **所成的角为** 60°。

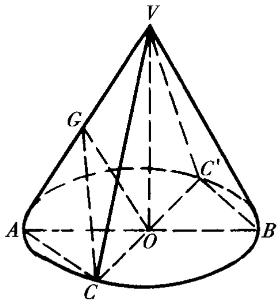


图 8 - 18

(2) **在轴截面内,过点** O **作** OG ⊥ VA,**垂足为** G,**连接** CG,

平面 VAB ⊥ **底面,**

,　OC ⊥ **平面** VAB,

,　$CG \perp VA$,

,　∠CGO **就是二面角** B - VA - C **的一个平面角。**

在 Rt△CGO **中**,$OC = 1, OG = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$, \quad \tan\angle CGO = \frac{OC}{OG} = \sqrt{2}。$$

例 11　**过半径为** R **的球面上一点** P,**作三条两两互相垂直的弦** PA、PB、PC,

求证: $PA^2 + PB^2 + PC^2$ **为定值。**

证明　**如图** 8 - 19 **所示,设相交于点** P **的弦** PB、PC **确定的平面截球** O **得球的小圆** K,**连接** BC,

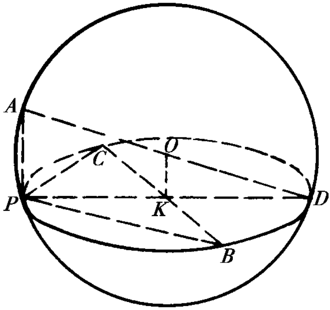


图 8 - 19

$$PB \perp PC,$$

, BC 为圆 K 的直径。

作圆 K 的直径 PD,则 $PD = BC$,连接 OK、AD,则 OK 与圆 K 所在平面垂直,

$$PA \perp PB, PA \perp PC,$$

, PA 与圆 K 所在平面垂直,

, 平面 APD 与圆 K 所在平面垂直,

, $OK \subset$ 平面 APD,即平面 APD 截球 O 得球的大圆 O,

$$PA \perp PD,$$

, AD 为球 O 的直径,即球心 O 在 AD 上。

在 $Rt\triangle APD$ 中,$AD^2 = PA^2 + PD^2$,

在 $Rt\triangle PBC$ 中,$BC^2 = PB^2 + PC^2$,

, $$AD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2,$$

球 O 的半径为 R,

, $$AD = 2R,$$

, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 4R^2$,即 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 为定值。

说明　本例的关键是证明 AD 为球 O 的直径,而证明 AD 为球 O 的直径的关键是证明点 O 在截面 APD 内,本例是应用面面垂直的性质证明点 O 在截面 APD 内。

由以上的例题可知,空间元素量、空间元素位置关系量的计算

方法,空间元素位置关系的讨论方法在几何体中是普遍适用的,且有着广泛的应用。

练 习 题

1. 如图 8 - 20 所示,在三棱柱 $A_1B_1C_1$ - ABC 中,$AA_1 = BC = AC = a$,$AB = \sqrt{2}a$,A_1 在底面 ABC 上的射影 O 在 AC 上。

(1) 求 AB 与侧面 AC_1 所成的角;

(2) 若 O 恰是 AC 的中点,求此三棱柱的侧面积。

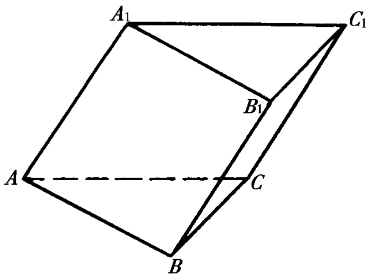


图 8 - 20

2. 在直三棱柱 ABC - $A_1B_1C_1$ 中,$BC_1 \perp AB_1$,$BC_1 \perp A_1C$,求证:$\triangle ABC$ 是等腰三角形。

3. 如图 8 - 21 所示,在四棱锥 A - $BCDE$ 中,底面 $BCDE$ 是等

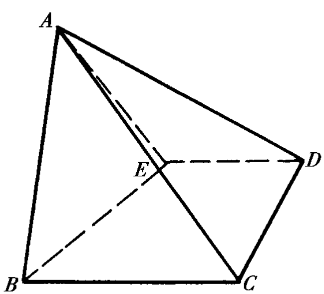


图 8 - 21

腰梯形，其中 $BC \parallel DE$，$\angle BCD = \angle CDE = 90°$，$DE = CD = \frac{1}{2}BC$，又 $AB = AE = \frac{1}{2}BC$，$AC = AD$。

（1）求证：平面 $ABE \perp$ 平面 $BCDE$；

（2）求 AC 与平面 $BCDE$ 所成的角。

4. 如图 8 - 22 所示，已知四棱台 $A_1B_1C_1D_1 - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形，侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$，$BC_1 \perp CC_1$。

（1）求证：$CC_1 \perp$ 平面 BC_1D；

（2）若二面角 $B - C_1C - D$ 为 $120°$，求棱台的上底面边长。

5. 如图 8 - 23 所示，已知 O、O_1 分别为圆台上、下底面的中心，母线 $AA_1 = 4$，$\angle A_1O_1C_1 = 90°$，$S_{圆台侧} = 24\pi$，圆台侧面展开图的圆心角 $\theta = \pi$，求异面直线 AC_1 和 O_1A_1 所成角的正切值。

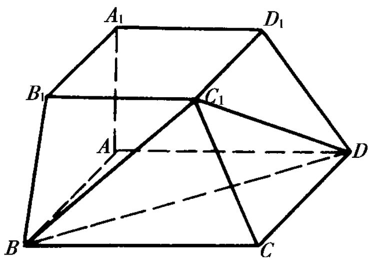


图 8 - 22

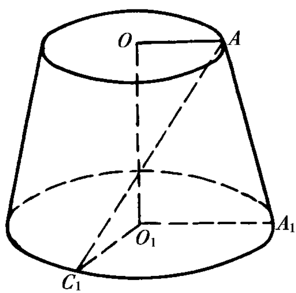


图 8 - 23

6. 已知正四面体 $ABCD$ 内接于半径为 R 的球 O，求这个正四面体的棱长。

二、多面体和旋转体的体积

（一）多面体和旋转体的体积计算本质上是多面体和旋转体的元素量的计算。

例 1 已知正三棱台 $A_1B_1C_1 - ABC$ 的高是 6cm，下底面边长 $AB = 16$cm，截面 ABC_1 和底面成 $30°$ 的二面角，求这个正三棱台的

体积。

分析　本例的关键是求正三棱台的上底面边长。

解　如图 8 - 24 所示，取 AB 的中点 D，连接 CD、C_1D。

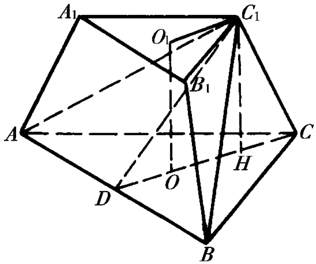


图 8 - 24

$A_1B_1C_1 - ABC$ 为正三棱台，

, $$C_1C = C_1C, \angle ACC_1 = BCC_1, AC = BC,$$

, $$\triangle ACC_1 \cong \triangle BCC_1,$$

, $$AC_1 = BC_1,$$

, $$CD \perp AB, C_1D \perp AB,$$

, $\angle C_1DC$ 就是截面 ABC_1 与底面 ABC 所成二面角的平面角，由题设可知，$\angle C_1DC = 30°$，$AB \perp$ 平面 C_1DC，

, 平面 $C_1DC \perp$ 平面 ABC。

在平面 C_1DC 内，过点 C_1 作 $C_1H \perp CD$，垂足为 H，则 $C_1H \perp$ 平面 ABC，C_1H 就是三棱台的高，由题设可知，$C_1H = 6$，

在 $Rt\triangle C_1DH$ 中，$DH = C_1H \cdot \text{ctan}30° = 6\sqrt{3}$。

设棱台上、下底面的中心分别为 O_1、O，则 O 在 CD 上，连接 O_1O，则 $O_1O \perp$ 平面 ABC，连接 O_1C_1，

下底面边长 $AB = 16$，

, $$OD = 16 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

, $$OH = DH - OD = 6\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3},$$

,
$$O_1C_1=\frac{10\sqrt{3}}{3},$$

$$A_1B_1=10。$$

,
$$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2=25\sqrt{3},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16^2=64\sqrt{3},$$

,
$$V_{台}=\frac{1}{3}h(S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot S_{\triangle ABC}}+S_{\triangle ABC})$$
$$=\frac{1}{3}\times 6\times(15\sqrt{3}+40\sqrt{3}+64\sqrt{3})$$
$$=258\sqrt{3}。$$

, **正三棱台的体积为** $258\sqrt{3}(cm^3)$

例 2 **如图** 8 - 25 **所示,在边长为** a **的正方形** ABCD **内,以点** A **为圆心画一个扇形,再画一个圆** O **与边** BC、CD、**扇形的弧相切,切 点分别为** M、N、K,**把扇形围成圆锥的侧面,圆** O **为圆锥的底面,求这个圆锥的体积。**

分析 由平面图形围成几何体,必须清楚平面几何图形的元素量与围成的几何体的元素量间的关系。

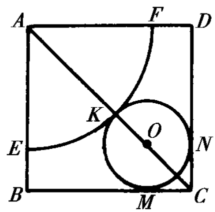


图 8 - 25

解 设扇形的半径为 l,**即** AE = AK = AF = l,**圆** O **的半径** R,

即 $OM=ON=OK=R$,**则** $OC=\sqrt{2}R$,

由题设可知,A、K、O、C **共线,于是**,$AK+KO+OC=AC$,

即 $l+(\sqrt{2}+1)R=\sqrt{2}a$ ①

为使扇形和圆 O **能围成一个圆锥,必须有扇形的弧度等于圆** O **的周长,**

即 $\frac{\pi}{2}l=2\pi R$ ②

由①和②得 $R=\frac{\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}a$，

又　　圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{(4R)^2-R^2}=\sqrt{15}R$，

，　　$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{\sqrt{15}}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{15}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}\right)^3\pi a^3$。

说明　本例的实质是用列方程组的方法求解几何体的元素量。

（二）三棱锥在多面体的体积计算问题中具有特殊的地位和作用，三棱锥的任何一个面都可以看作它的底面，因此三棱锥的体积计算特别灵活，但是底 面的选择必须有利于底面面积的计算和相应高的计算。

“割补”的思想、“等积交换”的思想是处理几何体体积问题常用的思想。

例 3　如图 8 - 26 所示，已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱和底面的边长都是 a，截面 AB_1C 和截面 A_1BC_1 相交于 DE，求四面体 BB_1DE 的体积。

分析　四面体 BB_1DE 的任何一个面都可以看作底面求其体积，分析可知，选择面 BB_1D 或面 BB_1E 为底面等价，选择面 BDE 或面 B_1DE 为底面等价，并且比较可以发现，选择面 BB_1D 或面 BB_1E 为底面较好。

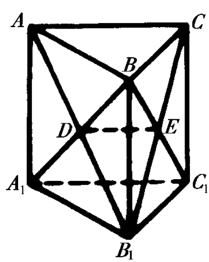


图 8 - 26

若取 BB_1 的中点 F（见图 8 - 27）作出四面体 BB_1DE 的截面 DEF，分析可知，三棱锥 $B-DEF$ 的体积是四面体 BB_1DE 体积的一半，且截面 EDF ∥ 平面 $A_1B_1C_1$，从而可知，三棱锥 $B-DEF$ 的体积是三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 体积的 $\frac{1}{8}$。

考虑到三棱锥 B_1-BDE（即四面体 BB_1DE）与三棱锥 B_1-

A_1BC_1（即三棱锥 $B-A_1B_1C_1$）有同一顶点，底面共面面积之比为 $\frac{1}{4}$可知，三棱锥 B_1-BDE 的体积为三棱锥 $B_1-A_1BC_1$ 的$\frac{1}{4}$。

解法一 四面体 BB_1DE 即三棱锥 $E-BB_1D$。

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都是 a，

, $S_{\triangle BB_1D}=\frac{1}{4}a^2$，点 C_1 到平面 ABB_1A_1 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

, 点 E 到底面 BB_1D 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}a$，

, $V_{四面体BB_1DE}=V_{三棱锥E-BB_1D}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{48}a^3。$$

解法二 如图 8-27 所示，取 BB_1 的中点 F，连接 DF、EF。

D、E 分别为 BA_1、BC_1 的中点，

, 面 DEF 为三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 的中截面，

, $V_{B-DEF}=\frac{1}{8}V_{B-A_1B_1C_1}$，$V_{B-DEF}=\frac{1}{2}V_{四面体BB_1DE}$，

, $V_{四面体BB_1DE}=\frac{1}{4}V_{B-A_1B_1C_1}$，

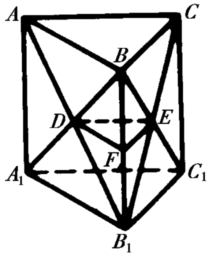


图 8-27

, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都是 a，

, $$V_{B-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot BB_1$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot a$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3，$$

, $$V_{\text{四面体}BB_1DE} = \frac{1}{4}V_{B-A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{48}a^3。$$

解法三 **三棱锥** B_1-BDE、**三棱锥** $B_1-A_1B_1C_1$ **有同一顶点，底面** BDE、**底面** A_1BC_1 **在同一平面内，**

又 D、E **分别为** BA_1、BC_1 **的中点，**

, $$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{4}S_{\triangle A_1BC_1},$$

, $$V_{B_1-BDE} = \frac{1}{4}V_{B_1-A_1BC_1},$$

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ **的各条棱长都是** a**，**

, $$V_{B_1-A_1BC_1} = V_{B-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot BB_1$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot a$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3,$$

, $$V_{\text{四面体}BB_1DE} = V_{B_1-BDE}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{48}a^3。$$

例 4　**已知点** E、F、G **是四面体** $ABCD$ **的棱** BC、BD、AD **的中点，过** E、F、G **的截面** $EFGH$ **将四面体** $ABCD$ **分成两部分，求证这两部分的体积相等。**

证明 E、F **是** BC、BD **的中点，**

, $$EF \parallel CD,$$

又 $EF\subset$ **平面** $EFGH$**，**$CD\not\subset$ **平面** $EFGH$**，**

, $CD\parallel$ **平面** $EFGH$**，**

CD ⊂ 平面 ACD，平面 ACD ∩ 平面 EFGH = GH，

， CD // GH。

G 是 AD 的中点，

， H 为 AC 的中点。

如图 8 - 28 所示，连接 AE、AF、DE、DH，

四棱锥 A - EFGH 与四棱锥 D - EFGH 有公共的底面，且顶点 A、D 到底面的距离相等，

， $V_{A-EFGH} = V_{D-EFGH}$。

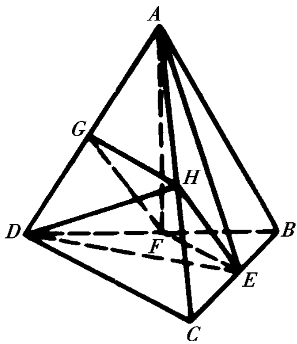


图 8 - 28

E、F 为 BC、BD 的中点，

， $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BCD}$，$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{4}S_{\triangle BCD}$，

， $S_{\triangle CDE} = 2S_{\triangle BEF}$，

H 为 AC 的中点，

， 点 H 到面 BCD 的距离是点 A 到面 BCD 距离的一半，即三棱锥 H - CDE 的高是三棱锥 A - BEF 的高的一半，

， $V_{H-CDE} = V_{A-BEF}$，

， $V_{A-EFGH} + V_{A-BEF} = V_{D-EFGH} + V_{H-CDE}$，

即截面 EFGH 将四面体 ABCD 分成的两部分的体积相等。

说明　证明两个几何体的体积相等，一般有两种处理方法：一是分别求出它们的体积，并证明相等；二是运用等积变换与割补的思想分别找出两个几何体中体积对应相等的部分，从而证明它们的体积相等。本例采用的是方法二。

（三）锥体的体积计算都离不开高，即垂线段的长，因此，体积与距离通过垂线段形成了比较密切的联系，即点到平面的距离可以看作一个以点为顶点，平面内的一个面为底面的锥体的高。

求点到面的距离常采用以下两种方法：

（1）先给出表示点到面的距离的垂线段，然后求这条垂线段

的长。垂线段一般在过已知点并且与已知平面垂直的平面内给出，并且将垂线段置于三角形中，解三角形求其长；

（2）把求点到面的距离转化为求一个锥体的高。

例 5　已知正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ **的棱长为** a**，点** P **为棱** D_1D **的中点，求点** A_1 **到平面** PAC **的距离。**

解法一　连接 A_1C_1**、**B_1D_1**，设** $A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$**，连接** AC**、**BD**，设** $AC\cap BD=O$**，连接** OP**（见图 8 - 29）。**

四边形 AA_1C_1C **为矩形，**

, $A_1C_1\parallel AC$，

, $A_1C_1\not\subset$ **平面** PAC，$AC\subset$ **平面** PAC，

, $A_1C_1\parallel$ **平面** PAC，

, **点** A_1 **到平面** PAC **的距离就是直线** A_1C_1 **到平面** PAC **的距离，**

$$O_1\in A_1C_1,$$

, **点** O_1 **到平面** PAC **的距离就是直线** A_1C_1 **到平面** PAC **的距离。**

$$AC\perp BD, AC\perp BB_1$$

, $AC\perp$ **平面** BB_1D_1D，

, **平面** $BB_1D_1D\perp$ **平面** PAC，

在平面 BB_1D_1D **内，过点** O_1 **作** $O_1H\perp OP$**，垂足为** H**，则线段** O_1H **的长就是点** O_1 **到平面** PAC **的距离（见图 8 - 30）。**

正方形的棱长为 a**，**

, **在矩形** BB_1D_1D **中，**

$$OP=\frac{\sqrt{3}}{2}a, S_{\triangle O_1OP}=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2,$$

, $$\frac{1}{2}\cdot OP\cdot O_1H=S_{\triangle O_1OP},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot O_1H=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2。$$

, $O_1H=\frac{\sqrt{6}}{3}a$**，即点** A_1 **到平面** PAC **的距离为** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$**。**

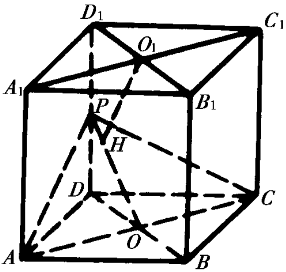


图 8 - 29

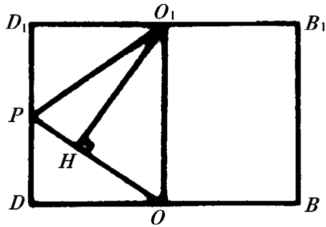


图 8 - 30

解法二　**连接** A_1P、A_1C,**则点** A_1 **到平面** PAC **的距离就是棱锥** A_1-PAC **的高。连接** BD,**设** $AC\cap BD=O$,**连接** OP,**则** $OP\perp AC$(**见图** 8 - 31)。

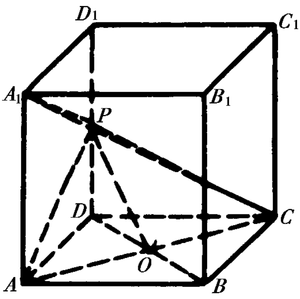


图 8 - 31

P **为** D_1D **的中点**,

, $$PD=\frac{1}{2}a。$$

在 $Rt\triangle POD$ **中**,$OP=\sqrt{PD^2+OD^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

, $$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}AC\cdot OP=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a^2。$$

$$S_{\triangle PA_1A} = \frac{1}{2}a^2$$,点 C 到平面 PA_1A 的距离 a,

, $$V_{C-PA_1A} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3。$$

设点 A_1 到平面 PAC 的距离为 h,则棱锥 $A_1 - PAC$ 的高为 h,

, $$V_{A_1-PAC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PAC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}a^2h。$$

$$V_{A_1-PAC} = V_{C-PA_1A},$$

, $$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}a^2h = \frac{1}{6}a^3,$$

, $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$,即点 A_1 到平面 PAC 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$。

例 6 **已知正方体** $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ **的棱长为 a,点 E 为棱 BC 的中点,点 F 在棱 AA_1 上,且 $A_1F:FA = 1:2$,求点 B 到平面 B_1EF 的距离。**

解法一 在平面 AA_1B_1B 内,延长 B_1F、BA 相交于点 G,在平面 ABCD 内,连接 GE,并过点 B 作 $BP \perp GE$,垂足为 P,连接 B_1P(见图 8 - 32)。

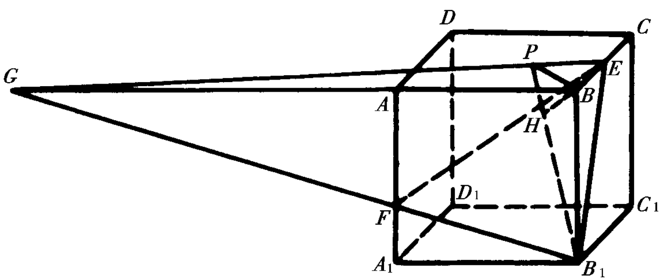


图 8 - 32

$BB_1 \perp$ 平面 ABCD,

, $BB_1 \perp GE$,

, $GE \perp$ 平面 BB_1P,

, 平面 $BB_1P \perp$ 平面 B_1EF。

在平面 BB_1P 内,过点 B 作 $BH \perp B_1P$,垂足为 H,则 $BH \perp$ 平面 B_1EF,

线段 BH 的长就是点 B 到平面 B_1EF 的距离。

点 F 在棱 AA_1 上,且 $A_1F:FA=1:2$,

,
$$FA=\frac{2}{3}a。$$

在 $\triangle BB_1G$ 中,$AF:BB_1=2:3$,则 $GA:GB=2:3$,

,
$$GB:AB=3:1,$$

,
$$GB=3a。$$

在 $Rt\triangle BEG$ 中,由点 E 为 BC 的中点知,$BE=\frac{1}{2}a$,

,
$$GE=\sqrt{GB^2+BE^2}=\sqrt{(3a)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}a。$$

,
$$BP=\frac{GB\cdot BE}{GE}=\frac{3a\cdot\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{37}}{2}a}=\frac{3}{\sqrt{37}}a。$$

在 $Rt\triangle BB_1P$ 中,

$$B_1P=\sqrt{BB_1^2+BP^2}=\sqrt{a^2+\frac{9}{37}a^2}=\sqrt{\frac{46}{37}}a,$$

,
$$BH=\frac{BB_1\cdot BP}{B_1P}=\frac{a\cdot\frac{3}{\sqrt{37}}a}{\sqrt{\frac{46}{37}}a}=\frac{3\sqrt{46}}{46}a,$$

即点 B 到平面 B_1EF 的距离为$\frac{3\sqrt{46}}{46}a$。

解法二　　正方体的棱长为 a,点 E 为棱 BC 的中点,

,
$$BF=\frac{\sqrt{5}}{2}a。$$

点 F 在棱 AA_1 上,且 $A_1F:FA=1:2$,

,
$$B_1F=\frac{\sqrt{10}}{3}a,AF=\frac{2}{3}a,$$

如图 8 - 33 所示，连接 AE，则 $\triangle AEF$ 为直角三角形，$AE=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

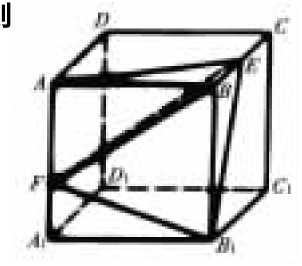


图 8 - 33

， $EF=\sqrt{AE^2+AF^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{21}}{3}a\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{61}}{6}a$。

在 $\triangle B_1EF$ 中，

$\cos\angle EB_1F=\frac{B_1E^2+B_1F^2-EF^2}{2\cdot B_1E\cdot B_1F}$

$=\frac{\sqrt{2}}{5}$，

， $\sin\angle EB_1F=\frac{\sqrt{23}}{5}$，

， $S_{\triangle B_1EF}=\frac{1}{2}B_1E\cdot B_1F\cdot\sin\angle EB_1F$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{23}}{5}=\frac{\sqrt{46}}{12}a^2$，

设点 B 到平面 B_1EF 的距离为 h，即三棱锥 $B-B_1EF$ 的高为 h，

把三棱锥 $B-B_1EF$ 看成顶点为 F 的三棱锥 $F-BB_1E$，则三棱锥 $F-BB_1E$ 的高为 a，底面 BB_1E 的面积为$\frac{1}{4}a^2$。

， $V_{F-BB_1E}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot a=\frac{1}{12}a^3$，

由 $V_{B-B_1EF}=V_{F-BB_1E}$知，$\frac{\sqrt{46}}{36}a^2h=\frac{1}{12}a^3$，

， $h=\frac{3\sqrt{46}}{46}a$，即点 B_1 到平面 B_1EF 的距离为$\frac{3\sqrt{46}}{46}a$。

解法三　　正方体的棱长为 a，点 E 为棱 BC 的中点，

$$B_1E=\frac{\sqrt{5}}{2}a。$$

如图 8 - 34 所示，在平面 A_1B_1BA 内，过点 F 作 $FH\perp BB_1$，垂足为 H，由平面 $A_1B_1BA\perp$ 平面 B_1C_1CB 知，$FH\perp$ 平面 B_1C_1CB；

在平面 B_1C_1CB 内，过点 H 作 $HG\perp B_1E$，垂足为 G，连接 FG，则 $FG\perp B_1E$。

由点 F 在棱 AA_1 上，且 $A_1F: FA=1: 2$ 知，$A_1F=\frac{1}{3}a$，

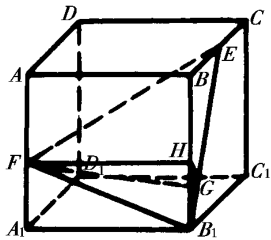


图 8 - 34

$$B_1H=\frac{1}{3}a,$$

在 $Rt\triangle BB_1E$ 中，

$$\sin\angle BB_1E=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

在 $\triangle B_1HG$ 中，$HG=B_1H\cdot\sin\angle BB_1E=\frac{1}{3}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{15}a$，

在 $Rt\triangle FHG$ 中，$FG=\sqrt{FH^2+HG^2}=\sqrt{a^2+\frac{1}{45}a^2}=\frac{\sqrt{46}}{3\sqrt{5}}a$。

$$S_{\triangle B_1EF}=\frac{1}{2}\cdot B_1E\cdot FG=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{46}}{3\sqrt{5}}a$$

$$=\frac{\sqrt{46}}{12}a^2。$$

以下同解法二。

练　习　题

1. 如图 8 - 35 所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已

知 $AB=5$,$AD=4$,$AA_1=3$,$AB\perp AD$,$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$,求这个平行六面体的体积。

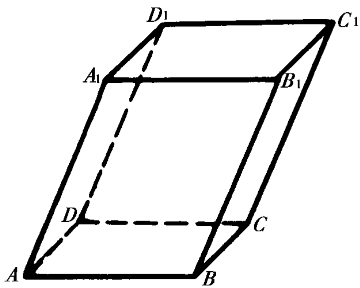


图 8 - 35

2. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱长分别为 a、b、c,每两条侧棱的夹角都为 60°,求这个三棱锥的体积。

3. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,E、F 分别为棱 AA_1 与 CC_1 的中点,求四棱锥 A_1-EBFD_1 的体积。

4. 已知四面体 ABCD 的体积为 $24cm^3$,点 P 为 AB 的中点,点 Q 分 DA 为 1∶2,点 D 到截面 PQC 的距离为 1cm,求截面 PQC 的面积(见图 8 - 36)。

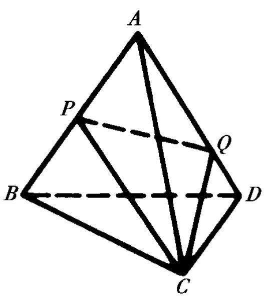


图 8 - 36

5. 已知直角△ABC 中,∠C = 90°,AC = BC = 4,点 D、E 分别是 AB、AC 的中点,点 F 在 BC 上且 CF = 1,沿 DE 把△ABC 折成 60°

的二面角，求点 F 到平面 ABD 的距离（用体积法）。

解 析 几 何

第九章　直　线

一、坐 标 系

解析几何是用代数方法来研究几何问题的一门数学学科。

数形结合的思想是解析几何的主导思想。在解析几何中，数和形是通过坐标系来联系的，坐标系的建立，使得数和形之间建立了对应关系，坐标系的建立，使得几何问题可以转化为代数问题求解。数轴是最简单的坐标系。

坐标系建立得"适当"，可以使求解过程中的运算简化。也就是说，代数运算简便是衡量坐标系建立得是否"适当"的标准，一般常采取下列方法建立"适当"的坐标系。

(1) 使尽可能多的点在坐标轴上；

(2) 利用图形中的基本图形的性质（互相垂直的两条直线、轴对称性质等）。

例 1　已知 A、B、C、D 是同一条直线上的四个点，不论它们的位置如何，试证明：$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$。

证法一　$AB \cdot CD + BC \cdot AD$

$$= (AC + CB)CD + BC(AC + CD)$$
$$= AC \cdot CD + CB \cdot CD + BC \cdot AC + BC \cdot CD$$
$$= AC(BC + CD) + (BC \cdot CD - BC \cdot CD)$$
$$= AC \cdot BD。$$

证法二　以点 A、B、C、D 四点所在直线为数轴建立一个直线坐标系，并设 A、B、C、D 四的坐标分别为 a、b、c、d，

则 $AB \cdot CD + BC \cdot AD$

$$= (b-a)(d-c)+(c-b)(d-a)$$

$$= bd-da-bc+ac+cd-bd-ac+ab$$

$$= ab-bc+cd-da,$$

$$AC \cdot BD$$

$$= (c-a)(d-b)$$

$$= ab-bc+cd-da$$

, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$。

证法三 以点 A 为数轴的原点,以点 A、B、C、D 所在直线建立一个直线坐标系,则点 A 的坐标为 0。

设点 B、C、D 的坐标分别为 b、c、d,

则 $AB \cdot CD + BC \cdot AD$

$$= b(d-c)+(c-b)\cdot d$$

$$= bd-bc+cd-bd$$

$$= c(d-b),$$

$$AC \cdot BD$$

$$= c(d-b),$$

, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$。

说明 在证法一中,由于没有建立坐标系,因此,证明过程中的运算很盲目,在证法二和证法三中,由于建立了直线坐标系,使得有向线段的数量等量关系问题被转化为代数式的值相等的代数问题。

在证法三中,由于以点 A 为原点建立直线坐标系,所以代数运算较证法二的代数运算简单,这就是说,证法三中建立的坐标系较证法二的‘ 适当 ”。

例 2 如图 9 - 1 所示,在△ABC 中,AD 是 BC 边上的中线,求证:$|AB|^2+|AC|^2=2(|AD|^2+|DC|^2)$。

证法一 设△ABC 的顶点 A、B、C 的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3),则 BC 边的中点 D 的坐标为$\frac{x_2+x_3}{2}$,$\frac{y_2+y_3}{2}$,可得:

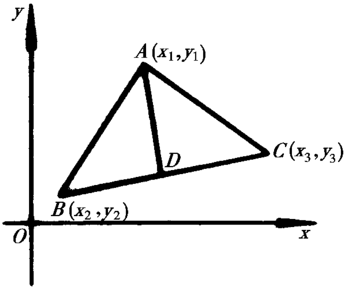


图 9 - 1

$$|AB|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$
$$|AC|^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2,$$
$$|AD|^2 = (x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2})^2 + (y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2})^2,$$
$$|DC|^2 = (\frac{x_2 + x_3}{2} - x_3)^2 + (\frac{y_2 + y_3}{2} - y_3),$$

, $|AB|^2 + |AC|^2$

$$= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2,$$

$|AD|^2 + |DC|^2$

$$= (x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2})^2 + (y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2})^2 + (\frac{x_2 + y_3}{2} - x_3) + (\frac{y_2 + y_3}{2} - y_3)^2$$

$$= (x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2})^2 + (y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2}) + (\frac{x_2 - x_3}{2})^2 + (\frac{y_2 - y_3}{2})^2$$

$$= x_1^2 - x_1(x_2 + x_3) + \frac{(x_2 + x_3)^2}{4} + y_1^2 - y_1(y_2 + y_3) + \frac{(y_2 + y_3)^2}{4} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{4} + \frac{(y_2 - y_3)^2}{4}$$

$$= x_1^2 - x_1(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + y_1^2 -$$

$$y_1(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2) +$$

$$\frac{1}{2}(y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2)$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2]。$$

, $|AB|^2 + |AC|^2 = 2(|AD|^2 + |DC|^2)$。

证法二　如图 9 - 2 **所示,以点** B **为原点,**BC **边所在直线为** x **轴,建立直角坐标系,则点** B **的坐标为**(0,0)**,设点** A、C **的坐标分别为**(a,b)、(2c,0)**,则** BC **的中点** D **的坐标为**(c,0)**,可得:**

$$|AB|^2 = a^2 + b^2,$$

$$|AC|^2 = (a - 2c)^2 + b^2,$$

$$|AD|^2 = (a - c)^2 + b^2,$$

$$|DC|^2 = c^2,$$

, $|AB|^2 + |AC|^2 = a^2 + b^2 + (a - 2c)^2 + b^2$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 4ac,$$

$$|AD|^2 + |DC|^2 = (a - c)^2 + b^2 + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2c^2 - 2ac,$$

, $|AB|^2 + |AC|^2 = 2(|AD|^2 + |DC|^2)$

证法三　如图 9 - 3 **所示,取** BC **边的中点为原点,**BC **边所在直线为** x **轴,建立直角坐标系,则点** D **的坐标为**(0,0)。

设点 A **的坐标为**(b,c)**,点** C **的坐标为**(a,0)**,则点** B **的坐标为**(- a,0)**,可得:**

$$|AB|^2 = (a + b)^2 + c^2,$$

$$|AC|^2 = (a - b)^2 + c^2,$$

$$|AD|^2 = b^2 + c^2,$$

$$|DC|^2 = a^2,$$

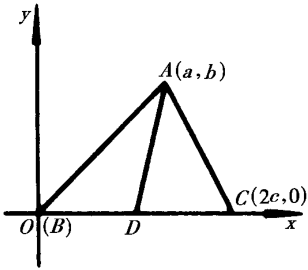


图 9 - 2

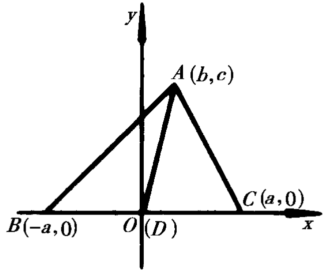


图 9 - 3

$|AB|^2+|AC|^2$

$(a+b)^2+c^2+(a-b)^2+c^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)$，

$|AD|^2+|DC|^2$

$=a^2+b^2+c^2$

，　$|AB|^2+|AC|^2=2(|AD|^2+|DC|^2)$。

说明　由以上三种证明方法可知，建立适当的坐标系是简化代数运算的关键。

练 习 题

1. 已知 A、B、C 是同一直线上三点，点 P 是这条直线上任意一点，证明：$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0$。

2. 设 A、B、C、D 是同一直线上的四个点，且$\frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0$，

求证：$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$。

3. 在△ABC 中，已知点 D 是 BC 的中点，点 E 是 AD 的中点，直线 BE 交 AC 于 F，用解析法证明：$|CF|=2|FA|$。

二、有向线段的定比分点

点 P 分有向线段$\overline{P_1P_2}$的分比是有向线段$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$的数量比，

点 P 在直向线段$\overline{P_1P_2}$所在直线上的位置确定了点 P 分有向线段$\overline{P_1P_2}$的分比值;反之,点 P 分有向线段$\overline{P_1P_2}$的分比值又确定了点 P 在有向线段$\overline{P_1P_2}$所在直线上的位置。

求点分有向线段的分比常用下面的三种方法:

(1)几何法　先求点 P 分有向线段$\overline{P_1P_2}$所得有向线段$\overline{P_1P}$、$\overline{PP_2}$的长度比,再由分点 P 为有向线段$\overline{P_1P_2}$的内分点、外分点分别确定分比值的正、负;

(2)公式法　把有向线段$\overline{P_1P_2}$的端点坐标(x_1,y_1)、(x_2,y_2)和分点 P 的坐标(x,y)代入公式 $\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$或 $\lambda=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$求得;

(3)方程法　分比是一个量,因此,分比可以由题设中所给有向线段的数量关系等式转化成与分比相关的有向线段数量的比的方程,再解方程求得。

求分点的坐标系常采用下面的两种方法:

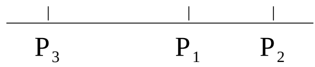
(1)公式法　用公式 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$,$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$求得;

(2)方程式有向线段的定比分点坐标公式 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$,$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$是由数轴上的有向线段的数量比转换成坐标等式 $\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$,$\lambda=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$再变形而得到的,它们的形式不同,但它们都体现着一条直线上同一组点的横坐标、纵坐标的关系,由此,我们可以将有向线段的数量关系等式转换成相应的横坐标、纵坐标的方程组解得分点的坐标。

建立关于未知量的方程(组),解方程(组)是求未知量取值的常用的思想方法。

例 1　已知点 P_1、P_2、P_3 在同一直线上,且$\dfrac{P_1P_3}{P_3P_2}=-\dfrac{2}{3}$,求$\dfrac{P_2P_1}{P_1P_3}$。

解法一　由$\frac{P_1P_3}{P_3P_2}=-\frac{2}{3}$,可作出下面的图形:



其中,$\frac{|P_2P_1|}{|P_1P_3|}=\frac{1}{2}$

又　$\overline{P_2P_1}$、$\overline{P_1P_3}$的方向相同(点 P_1 为$\overline{P_2P_3}$的内分点),

$$\frac{P_2P_1}{P_1P_2}=\frac{1}{2}。$$

解法二　$\frac{P_1P_3}{P_3P_2}=-\frac{2}{3}$,

, $$\frac{P_1P_3}{P_3P_1+P_1P_2}=-\frac{2}{3},$$

, $$\frac{1}{-1-\frac{P_2P_1}{P_1P_3}}=-\frac{2}{3},$$

, $$\frac{P_2P_1}{P_1P_3}=\frac{1}{2}。$$

例 2　已知点 $M(2,3)$,$N(8,4)$,点 P 内分有向线段$\overline{MN}$,且$\frac{MP}{PN}=\frac{PN}{MN}$,求点 P 分$\overline{MN}$的分比和点 P 的坐标。

解　先求点 P 分$\overline{MN}$的分比 $\lambda=\frac{MP}{PN}$。

$$\frac{MP}{PN}=\frac{PN}{MN},$$

, $$\frac{MP}{PN}=\frac{PN}{MP+PN},$$

$$\frac{MP}{PN}=\frac{1}{\frac{MP}{PN}+1}。$$

, $$\lambda=\frac{1}{\lambda+1},$$

, $$\lambda^2+\lambda-1=0,$$

, $$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}。$$

点 P **内分** $\overline{MN}$**，**

, $$\lambda>0,$$

, **只能取** $\lambda=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$**，即点** P **分** $\overline{MN}$ **的分比为** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

再求分点 P **的坐标**

方法一

$$\frac{MP}{PN}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},M(2,3),N(8,4),$$

, $$X_p=\frac{2+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot 8}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=11-3\sqrt{5},$$

$$Y_p=\frac{3+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot 4}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{9-\sqrt{5}}{2},$$

, **点** P **的坐标为** $\left(11-3\sqrt{5},\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)$。

方法二

设点 P **的坐标为** (x,y)

$M(2,3),N(8,4)$**，且** $\frac{MP}{PN}=\frac{PN}{MN}$，

, $$\begin{cases}\frac{x-2}{8-x}=\frac{8-x}{6}\\ \frac{y-3}{4-y}=\frac{4-y}{1}\end{cases}。$$

解得　$x=11\pm3\sqrt{5},y=\frac{9\pm\sqrt{5}}{2}$。

点 P 为 $\overline{MN}$ 的内分点，

$x \in (2,8)$，$y \in (3,4)$，

∴　取 $x = 11 - 3\sqrt{5}$，$y = \frac{9 - \sqrt{5}}{2}$，

∴　点 P 的坐标为 $(11 - 3\sqrt{5}, \frac{9 - \sqrt{5}}{2})$。

说明　由题设中提供的等量关系是建立关于未知量的方程的基础。在例 1 中，我们利用等式 $\frac{P_1P_3}{P_3P_2} = -\frac{2}{3}$ 建立了关于 $\frac{P_2P_1}{P_1P_3}$ 的方程 $\frac{1}{-1 - \frac{P_2P_1}{P_1P_3}} = -\frac{2}{3}$；在例 2 中，我们利用等式 $\frac{MP}{PN} = \frac{PN}{MN}$ 建立了关于 $\frac{MP}{PN}$ 的方程 $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{\frac{MP}{PN} + 1}$ 和关于 x、y 的方程组：

$$\begin{cases} \frac{x - 2}{8 - x} = \frac{8 - x}{6}, \\ \frac{y - 3}{4 - y} = \frac{4 - y}{1}。\end{cases}$$

练　习　题

1. 已知 $A(3,4)$，$B(1,2)$，直线 AB 上的点 P 满足 $\left|\frac{AP}{AB}\right| = \frac{1}{3}$，求点 P 的坐标。

2. 已知点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 $-\frac{1}{3}$，求点 P_1 分有向线段 $\overline{P_2P}$ 所成的比。

3. 若点 $A(-2,1)$，$B(1,4)$，$C(4,-3)$，点 D 在直线 AB 上，且 $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$，延长 CD 到 E，使 $\left|\frac{DE}{EC}\right| = \frac{1}{4}$，求 E 点的坐标。

4. 在$\triangle ABC$中，已知顶点$A(6,6)$及其重心$G\left(\frac{16}{3},\frac{8}{3}\right)$，且边$CA$的中点为$M(7,4)$，求边$BC$的长。

三、求直线方程

在解析几何中，研究直线必须依赖于直线方程，求直线方程一般采用待定系数法，求待定量的值常用下面的两种方法：

(1) 直接法　即根据题设条件直接求出待定量的值；

(2) 方程(组)法　即建立关于待定量的方程或方程组，再解方程或方程组求出。

例1　已知直线l过点$P(2,1)$，且与两坐标轴围成等腰直角三角形，求直线l的方程。

解　由题设可知直线l的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，

,　直线l的斜率为1或-1，

,　直线l的方程为$y-1=x-2$或$y-1=-1\cdot(x-2)$，

即$x-y-1=0$或$x+y-3=0$。

例2　已知直线l过直线$x-2y-3=0$与$2-3y-2=0$的交点，且与两坐标轴所围成的三角形的面积为5，求直线l的方程。

解法一　解方程组$\begin{cases}x-2y-3=0,\\2x-3y-2=0。\end{cases}$

得$x=-5$，$y=-4$，

,　两直线的交点坐标为$(-5,-4)$。

由题设可知所求直线l的斜率存在且不为0，设为$k(k\neq0)$，则直线l的方程为$y=k(x+5)-4$，

令$x=0$，则$y=5k-4$，

令$y=0$，则$x=\frac{-5k+4}{k}$，

由题设可知，$|5k-4|\cdot\left|\frac{-5k+4}{k}\right|=10$，

解得 $k=\frac{2}{5}$ 或 $k=\frac{8}{5}$，

, 所求直线 l 的方程为 $y=\frac{2}{5}(x+5)-4$ 或 $y=\frac{8}{5}(x+5)-4$，

即 $2x-5y-10=0$ 或 $8x-5y+20=0$。

解法二　由题设可知直线 l 在两坐标轴上的截距离都存在且都不为 0，设直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a、b，则直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

直线 l 过点 $P(-5,-4)$，

, $$\frac{-5}{a}+\frac{-4}{b}=1。$$

直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 5，

, $$\frac{1}{2}|a|\cdot|b|=5,$$

, $$|ab|=10,$$

, $$\begin{cases}\frac{-5}{a}+\frac{-4}{b}=1,\\ |ab|=10。\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{5}{2}$，$b=4$ 或 $a=5$，$b=-2$，

, 直线 l 的方程为 $\frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{4}=1$ 或 $\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$，

即 $8x-5y+20=0$ 或 $2x-5y-10=0$。

解法三　直线 $2x-3y-2=0$ 不为所求直线，故可设所求直线 l 的方程为 $(x-2y-3)+\lambda(2x-3y-2)=0$，即 $(1+2\lambda)x-(2+3\lambda)y-2\lambda-3=0$，

令 $x=0$，则 $y=-\frac{2\lambda+3}{3\lambda+2}$，

令 $y=0$,则 $x=\frac{2\lambda+3}{2\lambda+1}$,

由题设可知$\left|-\frac{2\lambda+3}{3\lambda+2}\right|\cdot\left|\frac{2\lambda+3}{2\lambda+1}\right|=10$,

解得 $\lambda=-\frac{1}{4}$或 $\lambda=-\frac{11}{4}$。

, 所求直线方程为$(x-2y-3)-\frac{1}{4}(2x-2y-2)=$或$(x-2y-3)-\frac{11}{4}(2x-3y-2)=0$,即 $2x-5y-10=0$ 或 $8x-5y+20=0$。

说明 一般地说,直线系就是具有某种共同性质的直线的集合,用来表示直线系中的直线的方程称作直线系方程。

在直线系方程中,待定变量称为参变数,简称参数,参数的变化表示了直线在坐标平面内的运动变化,一般常根据题设建立关于参数的方程为求参数值。

在解法一中,方程 $y=k(x+5)-4$ 表示了经过点$(-5,-4)$且斜率存在的直线系,解法中根据‘直线 l 与两坐标围成的三角形的面积为 5’建立了关于斜率 k 的方程。

在解法二中,我们借助于‘直线 l 过点 $P(-5,-4)$’这一几何条件和‘直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 5’这一等量关系建立了关于直线在两坐标轴上的截距 a、b 的方程组。

在解法三中,方程$(x-2y-3)+\lambda(2x-3y-2)=0$ 表示了过直线 $x-2y-3=0$ 和 $2x-3y-2=0$ 的交点的直线系(不包括直线 $2x-3y-2=0$),解法中,同样根据‘直线 l 与两坐标轴成的三角形的面积为 5’建立了关于参数 λ 的方程。

练 习 题

1. 直线 l 的斜率为 -2,它在 x 轴与 y 轴上的截距之和为 12,求直线 l 的方程。

2. 一直线经过点 $P(4,3)$，分别交 x 轴与 y 轴于点 A、B，且使 $\frac{AP}{PB}=\frac{5}{3}$，求这条直线的方程。

3. 已知点 $A(4,6)$ 和直线 $y=2x$，过点 A 作直线 l 分别与直线 $y=2x$ 和 y 轴交于点 B、C，且 $|AB|=2|BC|$，求直线 l 的方程。

四、两条直线的夹角

由直线 l_1 到直线 l_2 的角是指直线 l_1 依逆时针方向旋转到首次与 l_2 重合时所转的角，它的范围为 $(0,\pi)$。

直线 l_1 与 l_2 的夹角是指直线 l_1 与 l_2 相交所成的四个角中最小的正角，它的范围为 $(0,\frac{\pi}{2}]$，并规定，两直线重合时，夹角为 0。

设直线 l_1 到直线 l_2 的角为 θ，则 $\tan\theta=\frac{k_2-k_2}{1+k_2k_1}$，设直线 l_1 与直线 l_2 的夹角为 θ，则 $\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_2}{1+k_2k_1}\right|$，必须注意到，“到角”、“夹角”计算公式是根据题设中与“到角”、“夹角”相关的条件建立关于待定量的方程的基础。

例 1　如图 9 - 4 所示，已知直线 $l:5x-12y+25=0$ 与 x 轴交于点 A，过点 $P(1,1)$ 作一直线 l' 分别交 x 轴、直线 l 于点 B、C，且 $|AB|=|AC|$，求直线 l' 的方程。

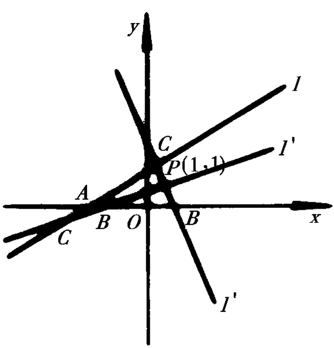


图 9 - 4

解　由$|AB|=|AC|$知,l'与 l 及 x 轴夹角相等,显见 l' 斜率存在,

设直线的 l' 斜率为 k,

则 $$\left|\frac{\frac{5}{12}-k}{1+\frac{5}{12k}}\right|=|k|,$$

,　$5k^2+24k-5=0$ 或 $5k^2=-5$(无实数解),

,　$k=-5$ 或 $k=\frac{1}{5}$,

,　所求直线 l' 的方程为 $y=-5(x-1)+1$ 或 $y=\frac{1}{5}(x-1)$,

即　$5x+6-6=0$ 或 $x-5y-1=0$。

例 2　已知直线 l 过点 $M(2,3)$,且被两平行直线 $3x+4y-7=0$ 与 $3x+4y+8=0$ 截得的线段长为 $3\sqrt{2}$,求直线 l 的方程。

解　两平行直线 $3x+4y-7=0$、$3x+4y+8=0$ 间的距离 $\frac{|8-(-7)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$。

直线 l 被两平等直线截得的线段长为 $3\sqrt{2}$,

,　直线 l 与两平行直线的夹角为 $45°$。

易见直线 l 的斜率存在,设直线 l 的斜率为 k,

则 $$\left|\frac{k+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}k}\right|=1,$$

解得 $k=\frac{1}{7}$或 $k=-7$。

,　所求直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{7}(x-2)+3$ 或 $y=-7(x-2)+3$,

即 $x-7y+19=0$ 或 $7x+y-14=0$。

练 习 题

1. 已知直线 $l_1: x-2y-2=0$，$l_1: x+y-1=0$，求过点$(-2,0)$且与直线 l_1、l_2 围成等腰三角形的直线 l 的方程。

2. 等腰直角$\triangle ABC$ 的直角顶点 C 和顶点 B 都在直线 $2x+3y-6=0$ 上，顶点 A 的坐标是$(1,2)$，求边 AB、AC 所在直线的方程。

3. 已知直线 l 过点 $P(-4,3)$，与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，且$|AP|:|PB|=5:3$，求直线 l 的方程。

五、点 的 坐 标

点是平面内的基本几何元素，点的坐标是点的代数形式，它确定了点在坐标平面内的位置，求点的坐标常采用下面两种方法：

(1)按题设给出关于点的横坐标和纵坐标的两个方程组成方程组，解方程组即得点的坐标。

(2)把点看成两条直线的交点，解两条直线的方程组成的方程组即得交点的坐标。

这两种方法形式不同，但有相同的实质，即求点的坐标就是建立方程组求方程组的解。

例 1　已知直线 l 过点 $P(0,1)$，且被直线 $l_1: x-3y+10=0$ 和 $l_2: 2x+y-8=0$ 所截得的线段的中点恰是点 P，求直线 l 的方程。

解法一　由题设可知所求直线 l 的斜率存在，设为 k。

直线 l 过点 $P(0,1)$，故可设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，

设直线 l 与直线 l_1、l_2 的交点分别为 A、B，

则由方程组$\begin{cases} y=kx+1, \\ x-3y+10=0, \end{cases}$

得　$x_A=\dfrac{7}{3k-1}$，

由方程组$\begin{cases} y=kx+1, \\ x+y-8=0, \end{cases}$

得　$x_B = \frac{7}{k+2}$。

点 P(0,1)为线段 AB 的中点,

,　$x_B + x_B = 2 \cdot x_P$,

,　$x_A + x_B = 0$,即$\frac{7}{3k-1} + \frac{7}{k+2} = 0$。

解得　$k = -\frac{1}{4}$,

,　所求直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{4}x + 1$,即 $x + 4y - 4 = 0$。

解法二　设直线 l 与直线 l_1、l_2 的交点分别为 A、B,设点 A 的坐标为(a,b),则由点 P(0,1)为 AB 的中点可知点 B 的坐标为(-2,2-b)。

由点 A、B 分别在直线 l_1、l_2 上可知,$a - 3b + 10 = 0$,$2(-a) + (2-b) - 8 = 0$

,　$$\begin{cases} a - 3b + 10 = 0, \\ 2a + b + 6 = 0, \end{cases}$$

解得　$a = 4$,$b = 2$。

,　A(-4,2),

,　直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{4}$,

,　直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{4}x + 1$,即 $x + 4y - 4 = 0$。

说明　解法一中,依据点 P(0,1)为线段 AB 的中点建立了原始等量关系 $x_A + x_B = 2 \cdot x_P$,并将其转换成关于直线 l 的斜率 k 的方程。

解法二中,是根据题设条件建立了直线 l 与 l_1 的交点的坐标的方程组,然后解方程求得交点的坐标。

例 2　已知△ABC 的一条内角平分线的方程是 $2x + y - 1 = 0$,两顶点是 A(1,2),B(-1,-1),求第三个顶点 C 的坐标。

解法一　由题设可知,点 C 在角平分线 $2x + y - 1 = 0$ 上。

设顶点 C 的坐标为(a,b),则 $2a+b-1=0$,

由题设可知,直线 BC 到直线 CD 的角与直线 CD 到直线 AC 的角相等。

, $$\frac{k_{CD}-k_{BC}}{1+k_{CD}\cdot k_{BC}}=\frac{k_{AC}-k_{CD}}{1+k_{AC}\cdot k_{CD}}。$$

$$k_{AC}=\frac{b-2}{a-1},k_{BC}=\frac{b+1}{a+1},k_{CD}=-2,$$

, $$\frac{-2-\frac{b+1}{a+1}}{1-2\cdot\frac{b+1}{a+1}}=\frac{\frac{b-2}{a-1}+2}{1-2\cdot\frac{b-2}{a-1}},$$

即 $$\frac{-2a-b-3}{a-2b-1}=\frac{2a+b-4}{a-2b+3}。$$

$$2a+b=1,$$

, $$\frac{-4}{a-2b-1}=\frac{-3}{a-2b+3},$$

, $$a-2b+15=0,$$

, $$\begin{cases}2a+b=1,\\ a-2b=-15。\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{13}{5},b=\frac{13}{5}$,

, 点 C 的坐标为$\left(-\frac{13}{5},\frac{13}{5}\right)$。

解法二 由题设可知,点 C 在角平分线 $2x+y-1=0$ 上。

由平面几何知识可知,点 $B(-1,-1)$ 关于角平分线 $2x+y-1=0$ 的对称点 B' 必在边 AC 所在直线上。

设 $B'(a,b)$,则 BB' 与 $2x+y-1=0$ 垂直,且线段 BB' 中点在 $2x+y-1=0$ 上

, $$\begin{cases}\frac{b+1}{a+1}=\frac{1}{2},\\ 2\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{b-1}{2}-1=0。\end{cases}$$

,

$$\begin{cases} a = \dfrac{11}{5} \\ b = \dfrac{3}{5}。\end{cases}$$

,　　AC 边所在直线的方程为 $7x + 6y - 19 = 0$。

显然,点 C 为角平分线 $2x + y - 1 = 0$ 和 AC 边所在直线 $7x + 6y - 19 = 0$ 的交点,

,

$$\begin{cases} 7x + 6y - 9 = 0, \\ 2x + y - 1 = 0。\end{cases}$$

解得　$x = -\dfrac{13}{5}, y = \dfrac{31}{5}$,

,　　所求点 C 的坐标为$\left(-\dfrac{13}{5}, \dfrac{31}{5}\right)$。

例 2　求点 P(2,3)关于直线 l : $2x - y - 4 = 0$ 的对称点 Q。

解法一　设点 Q 的坐标为(a,b),

由平面几何知识可知,直线 PQ 与直线 l 垂直,且线段 PQ 的中点在直线 l 上。

,

$$\begin{cases} \dfrac{b - 3}{a - 2} = -\dfrac{1}{2} \\ 2 \cdot \dfrac{a + 2}{2} - \dfrac{b + 3}{2} - 4 = 0。\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a + 2b - 8 = 0, \\ 2a - b - 7 = 0。\end{cases}$$

解得　$a = \dfrac{22}{5}, b = \dfrac{9}{5}$,

,　　点 Q 的坐标为$\left(\dfrac{22}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$。

解法二　设直线 l' 为与点 P 在直线 l 异侧,与直线 l 平行且与直线 l 的距离就是点 P 到直线 l 的距离的一条直线。

由题设可知,直线 l' 的方程为 $2x - y - 7 = 0$,

由平面几何知识可知,直线 PQ 与直线 l 垂直,由题设可知,直

线 PQ 的方程为 $x+2y-8=0$；

由平面几何知识可知，点 Q 为直线 l' 与直线 PQ 的交点。

,
$$\begin{cases} 2x-y-7=0, \\ x+2y-8=0。\end{cases}$$

解得 $x=\frac{22}{5}, y=\frac{9}{5}$，

, 点 Q 的坐标为$\left(\frac{22}{5},\frac{9}{5}\right)$。

练 习 题

1. 已知△ABC 的两条中线所在直线的方程分别为 $3x-2y+2=0$ 与 $3x+5y-12=0$，顶点 A 的坐标是 $A(-4,2)$，求 BC 边所在直线的方程。

2. 在直线 $l: x+y-8=0$ 上求一点 M，使点 M 与两定点 $A(-4,0)$，$B(4,0)$的距离之和最短，并求出这个距离。

3. 在△ABC 中，两条高所在直线方程为 $2x-3y+1=0$ 和 $x+y=0$，且它的一个顶点是 $A(1,2)$，求 BC 边所在直线方程。

4. 在△ABC 中，已知高 AN、BM 所在直线方程分别为 $x+5y-3=0$、$x+y-1=0$，边 AB 所在直线方程为 $x+3y-1=0$，试求△ABC 的顶点及垂心的坐标。

六、平面几何知识在解析几何中的应用

平面解析几何研究的两个主要问题之一，是用代数方法(即通过方程)来研究平面曲线的性质，平面几何知识在解析几何中可以而且应当使用，并且平面几何知识的应用可以帮助并引导我们寻找到简洁的解题方法，特别地可以减少解题过程中的运算量。

例 1　已知直线 l 过点 $P(1,2)$，并且点 $A(2,3)$和点 $B(4,-5)$到直线 l 的距离相等，求直线 l 的方程。

解法一　若直线 l 的斜率不存在，则 l 的方程为 $x=1$，可求得

点 A、点 B 到直线 l 的距离分别为 1、3，由此可知直线 l 的斜率存在，设为 k，则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)+2$，即 $kx-y-k+2=0$。

点 A(2，3)和点 B(4，-5)到直线 l 的距离相等，

, $\frac{|2k-3\ \ -k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|4k+5-k+2|}{\sqrt{1+k^2}}$，即 $|k-1|=|3k+7|$，

解得 $k=-4$ 或 $k=-\frac{3}{2}$。

, 所求直线 l 的方程为 $y=-4(x-1)+2$ 或 $y=-\frac{3}{2}(x-1)+2$，即 $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$。

解法二　由平几知识可知所求直线 l 为经过点 P 且与直线 AB 平行的直线或经过点 P 和线段 AB 的中点的直线。

(1)直线 l 为经过点 P 且与直线 AB 平行的直线，

由点 A(2，3)、B(4，-5)知直线 l 的斜率为 -4，

, 所求直线 l 的方程为 $y=4(x-1)+2$，即 $4x+y-6=0$。

(2)直线 l 为经过点 P 和线段 AB 的中点的直线，

由点 A(2，3)、B(-4，5)知线段 AB 的中点为(3，-1)，故直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{2}$，

, 所求直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{2}(x-1)+2$，即 $3x+2y-7=0$。

分析　显然解法二较解法一简洁。必须注意到，为了避免失解，可以让直线 l 绕点 P 旋转一周，寻找满足题设条件的直线及其特征。

例 2　一直线 l 被两平行直线 $x+2y--1=0$ 和 $x+2y-3=0$ 所截得的线段的中点 P 在直线 $x-y-1=0$ 上，并且直线 l 与两平行直线的夹角为 45°，求直线 l 的方程。

解法一　由题设可知所求直线 l 的斜率存在，设为 k，则由直

线 l 与两平行直线的夹角为 45°可知，$\left|\dfrac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}k}\right|=1$，

解得　$k=-3$ 或 $k=\dfrac{1}{3}$。

设直线 l 与两平行直线的交点分别为 A、B，

若 $k=-3$，

设直线 l 的方程为 $y=-3x+b$，

解方程组$\begin{cases}y=-3x+b,\\x+2y-1=0,\end{cases}$

得　$x=\dfrac{2b-1}{5}$，$y=\dfrac{-b+3}{5}$，

,　　$A(\dfrac{2b-1}{5},\dfrac{-b+3}{5})$。

解方程组$\begin{cases}y=-3x=b,\\x+2y-3=0,\end{cases}$

得　$x=\dfrac{2b-1}{5}$，$y=\dfrac{-b+3}{5}$

,　　$B(\dfrac{2b-3}{5},\dfrac{-b+9}{5})$。

,　　线段 AB 的中点 P 的坐标为$(\dfrac{2b-2}{5},\dfrac{-b+6}{5})$。

点 P 在直线 $x-y-1=0$ 上，

,　　$\dfrac{2b-2}{5}-\dfrac{-b+6}{5}-1=0$，

解得　$b=\dfrac{13}{3}$，

,　　直线 l 的方程 $y=-3x+\dfrac{13}{3}$，即 $9x+3y-13=0$。

若　$k=\dfrac{1}{3}$，

设直线 l **的方程为** $y=\frac{1}{3}x+b'$ **,同理可以求得直线** l **的方程为** $3x-9y-1=0$ **。**

综上所述,所求直线 l **的方程为** $9x+3y-13=0$ **或** $3x-9y-1=0$**。**

解法二　由题设可知所求直线 l **的斜率存在,设为** k**,则由直线** l **与平行直线的夹角为** $45°$**可知,** $\left|\frac{k+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}k}\right|=1$**,**

解得　$k=-3$ **或** $k=\frac{1}{3}$**。**

设两平行直线与直线 $x-y-1=0$ **的交点分别为** M、N**,**

解方程组 $\begin{cases}x+2y-1=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$

得　$x=1,y=0,$

,　$M(1,0),$

解方程组 $\begin{cases}x+2y-3=0\\x-y-1=0\end{cases}$**,**

得　$x=\frac{5}{3},y=\frac{2}{3},$

,　$N\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$**。**

由题设可知点 P **为线段** MN **的中点,且** P **的坐标为** $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$**,**

,　**所求直线** l **的方程为** $y=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}$ **或** $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}$**,即** $9x+3y-13=0$ **或** $3x-9y-1=0$**。**

解法三　由题设可知所求直线 l **的斜率存在,设为** k**,则由直**

线 l 与两条平行直线的夹角为 $45°$ 可知，$\left|\dfrac{k+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}k}\right|=1$，

解得 $k=-3$ 或 $k=\dfrac{1}{3}$。

由题设可知点 P 是夹在两条平行直线之间，与两条平行直线平行且与两条平行直线距离相等的直线（设为 l'）与直线 $x-y-1=0$ 的交点，

由题设可知直线 l' 的方程为 $x+2y-2=0$，

解方程组 $\begin{cases}x+2y-2=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$

得　$x=\dfrac{4}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$，

, $P\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$。

,　所求直线 l 的方程为 $y=-3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$ 或 $y=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$，即 $9x+3y-13=0$ 或 $3x-9y-1=0$。

说明　解法一是直接按题设叙述求解，其中利用‘点 P 在直线 $x-y-1=0$ 上‘建立了直线 l 在 y 轴上的截距 $b(b')$ 的方程，即直接将题设中的几何条件转换成代数形式（方程）求解。

在解法二和解法三中将题设中的几何条件引用平面几何知识作了转换。在解法二中，将‘点 P 为直线 l 被两平行直线截得的线段的中点’转化成‘直线 $x-y-1=0$ 被两条平行直线截得的线段的中点‘在解法三中，则转化成‘夹在两条平行直线之间，与两条平行直线平行且与两条平行直线距离相等的直线 l' 与直线 $x-y-1=0$ 的交点”，使待定字母的运算转化成具体数值的运算，显然降低了运算的难度。

练 习 题

1. 已知点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 分别在直线 $x+y-7=0$ 和 $x+y-5=0$ 上，求线段 AB 的中点 M 到原点的距离的最小值。

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知顶点 A 的坐标是 $A(1,4)$，$\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线所在直线的方程分别为 $x-2y=0$ 与 $x+y-1=0$，求直线 BC 的方程。

3. 两平行直线 l_1 与 l_2 的距离$\sqrt{5}$，又直线 l_1 与 l_2 分别过原点与点 $(1,3)$，求直线 l_1 和 l_2 的方程。

七、直线方程与变量

（一）直线方程是直线上的点的横坐标 x 与纵坐标 y 的关系式，因此，方程的建立从代数角度看，就是建立了两个变量 x、y 之间的关系等式。

这个关系等式可以看作方程，也可以转换成函数解析式，从而我们可以从方程或函数的角度去处理与直线相关的问题。

（二）在直角坐标平面内，点、直线的运动变化的代数体现就是点的坐标和直线方程中的参变量的变化，当点和直线在题设的特定条件下变化时，我们即可获得参变量的关系式，而参变量的变化关系式常以等式的形式出现，从而我们也可以从方程或函数的角度处理与等式相关的问题。

例 1　如图 9-5 所示，已知直线 l 过点 $M(-1,2)$，且与以点 $P(-2,-3)$、$Q(4,0)$ 为端点的线段 PQ 相交，求直线 l 的斜率 k 的取值范围。

解法一

$$M(-1,2)、P(-2,-3)、Q(4,0),$$

，

$$k_{MP}=4,P_{MQ}=-\frac{2}{5},$$

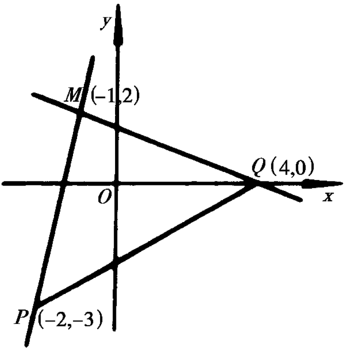


图 9 - 5

, $k \leqslant -\frac{2}{5}$ 或 $k \geqslant 5$。

解法二 设点 $N(x,y)$ 是线段 PQ 上任意一点,则由直线 PQ 的方程可知线段 PQ 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x-4)$,$-2\leqslant x\leqslant 4$。

由题设可设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)+2$,

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}(x-4), & -2\leqslant x\leqslant 4 \\ y=k(x+1)+2, & \end{cases}$ 可知,

方程 $(2k-1)x=-(2k+8)$ 在 $x\in[-2,4]$ 有解,

, $x=-\frac{2k+8}{2k-1}$,

由 $x\in[-2,4]$ 可知,$-2\leqslant\frac{2k+8}{2k-1}\leqslant 4$,解得 $k\leqslant-\frac{2}{5}$ 或 $k\geqslant 5$。

解法三 设点 $N(x,y)$ 是线段 PQ 上的任意一点,则由直线 PQ 的方程可知线段 PQ 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x-4)$,$-2\leqslant x\leqslant 4$。

由题设可知直线 l 的斜率 $k=\frac{y-2}{x+1}$,

, $\begin{cases} k=\dfrac{y-2}{x+1}, \\ y=\dfrac{1}{2}(x-4),(-2\leqslant x\leqslant 4) \end{cases}$

, $k=\dfrac{y-2}{x+1}=\dfrac{\frac{1}{2}(x-4)-2}{x+1}=\dfrac{x-8}{2(x+1)},(-2\leqslant x\leqslant 4)$

求函数 $k=\dfrac{x-8}{2(x+1)},(-2\leqslant x\leqslant 4)$ 的值域可知 $k\leqslant -\dfrac{2}{5}$ 或 $k\geqslant 5$。

说明　在解解析几何问题中，常把几何曲线的性质转换成代数形式，然后以代数的观点去观察、分析所给出的代数形式，从而获得解决问题的方法。

在解法二中，我们将线段 PQ 的方程 $y=\dfrac{1}{2}(x-4)\quad(-2\leqslant x\leqslant 4)$ 与直线 l 的方程 $y=k(x+1)+2$ 组成关于 x、y 的方程组，从几何角度看，要求直线 l 与线段 PQ 有公共点，从代数角度看，即要求方程组有解，消元得到方程 $(2k-1)x=-(2k+8)$，要求方程在 $[-2,4]$ 上有解，得出关于 k 的不等式，据此，确定变量 k 的取值范围。

在解法三中，我们将线段 PQ 的方程 $y=\dfrac{1}{2}(x-4),(-2\leqslant x\leqslant 4)$ 与直线 l 的方程 $y=k(x+1)+2$ 组成关于 x、y 的方程组，消元并转换成函数 $k=\dfrac{x-8}{2(x+1)}\quad x\in[-2,4]$，再求函数的值域得变量 k 的取值范围。

这就是说，我们是将由直线方程给出的变量关系等式看成方程或转换成函数去求变量的取值范围，这是求变量取值范围常用的方法。

例 2　已知直线 l 过点 P(0,1)，且被直线 l_1：$x-3y+10=0$ 和 l_1：$2x+y-8=0$ 所截得的线段的中点恰是点 P，求直线 l 的方程。

解 设直线 l 与直线 l_1、l_2 的交点分别为 A、B,

由直线 l_1 的方程为 $x-3y+10=0$ 可设点 A 的坐标为 $(3a-10, a)$。

点 $P(0,1)$ 为线段 AB 的中点,

, 点 B 的坐标为 $(10-3a, 2-a)$。

点 B 在直线 l_2 上,

, $2(10-3a)+(2-a)-8=0$,

, $a=2$,

, 点 A 的坐标为 $(-4,2)$。

由直线 l 经过点 $P(0,1)$ 和 $A(-4,2)$ 可知直线 l 的方程为 $x+4y-4=0$。

例 3 已知 $\triangle ABC$ 的一条内角平分线的方程是 $2x+y-1=0$,两顶点是 $A(1,2)$、$B(-1,-1)$,求第三个顶点 C 的坐标。

解 设 $\angle C$ 的平分线为 CD。

点 C 在直线 $2x+y-1=0$ 上,故可设点 C 的坐标为 $(t,-2t+1)$,

,
$$k_{AC}=\frac{-2t+1-2}{t-1}=\frac{-2t-1}{t-1},$$

$$k_{BC}=\frac{-2t+1+1}{t+1}=\frac{-2t+2}{t+1},$$

$$k_{CD}=-2。$$

由题设可知,BC 到 CD 的角与 CD 到 AC 的角相等,

即
$$\frac{k_{CD}-k_{BC}}{1+k_{CD}\cdot k_{BC}}=\frac{k_{AC}-k_{CD}}{1+k_{AC}\cdot k_{CD}}。$$

,
$$\frac{-4}{5t-3}=\frac{-3}{5t+1},$$

解得 $t=-\dfrac{13}{5}$,

, 点 C 的坐标为 $\left(-\dfrac{13}{5},\dfrac{31}{5}\right)$。

说明 在例 2 和例 3 的解法中,题设中定直线上的点的坐标

都用一元形式表示,实质上直线方程起了消元的作用。

例 4 已知直线 l 过点 P(3,2),且与 x 轴正半轴、y 轴正半轴分别交于点 A、B,求△AOB 面积的最小值及此时直线 l 的方程(O 为坐标原点)。

解 设 A(a,0)、B(0,b),且 a > 0,b > 0,则直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab$。

直线 l 过点 P(3,2),

, $$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1,$$

, $$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab,\ \frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1。$$

方法一 由 $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$ 可知 $b=\frac{2a}{a-3}$,

$a>0,b>0$,

, $\frac{2a}{a-3}>0$,则 $a>3$,

, $$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2a}{a-3}=\frac{a^2}{a-3}$$
$$=\frac{(a^2-9)+9}{a-3}=(a+3)+\frac{9}{a-3}$$
$$=(a-3)+\frac{9}{a-3}+6$$
$$\geqslant 2\sqrt{(a-3)\cdot\frac{9}{a-3}}+6=12。$$

当 $a-3=\frac{9}{a-3}$,即 $a=6,b=4$ 时,取等号。

, △AOB 的面积的最小值为 12,此时直线 l 的方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$,即 $2x+3y-12=0$。

方法二 令$\frac{3}{a}=\cos^2\theta$，$\frac{2}{b}=\sin^2\theta$，则 $a=3\sec^2\theta=3\tan^2\theta+3$，$b=2\csc^2\theta=2\cot^2\theta+2$。

, $$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab$$
$$=\frac{1}{2}(3\tan^2\theta+3)(2\cot^2\theta+2)$$
$$=3(\tan^2\theta+1)(\cot^2\theta+1)$$
$$=3(\tan^2\theta+\cot^2\theta)+6$$
$$\geqslant 3\cdot 2\sqrt{\tan^2\theta\cdot\cot^2\theta}+6=12。$$

当 $\tan^2\theta=\cot^2\theta$，$\tan^2\theta=1$ 时，取等号，

, $$\sec^2\theta=2，\csc^2\theta=2，$$

, $$a=6，b=4，$$

, $\triangle AOB$ 的面积的最小值为 12，此时值线 l 的方程$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$，即 $2x+3y-12=0$。

方法三 由$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$ 可得 $1=\frac{3}{b}+\frac{2}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{a}\cdot\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{6}{ab}}$（当且仅当$\frac{3}{a}=\frac{2}{b}$，即 $a=6$，$b=4$ 时，取等号。）

, $$ab\geqslant 24，$$

, $$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab\geqslant 12，$$

, $\triangle AOB$ 的面积的最小值为 12，此时直线 l 的方程为$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$，即 $2x+3y-12=0$。

方法四 $$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1，$$

, $$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab$$

$$=\frac{3}{\frac{3}{a}\cdot\frac{2}{b}}$$

$$\geqslant\frac{3}{\left(\frac{\frac{3}{a}+\frac{2}{b}}{2}\right)^2}=12。$$

（当且仅当$\frac{3}{a}=\frac{2}{b}$**，即** $a=6$**，**$b=4$ **时，取等号。）**

,　　$\triangle AOB$ **的面积的最小值为** 12**，此时直线** l **的方程为**$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$**，即** $2x+3y-12=0$。

方法五　　$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$**，**$S=\frac{1}{2}ab$**，**

,　　$a^2-sa+3S=0$**，**

$a\in R$**，**

,　　$\triangle=S^2-12S\geqslant 0$**，**

$S>0$**，**

,　　$S\geqslant 12$**，**

当 $S=12$ **时，**$a=6$**，**$b=4$**，**

,　　$S=12$ **可取，**

,　　$\triangle AOB$ **的面积的最小值为** 12**，此时直线** l **的方程为**$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$**，即** $2x+3y-12=0$。

说明　在前四个方法中，$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab$ **是函数解析式，等式**$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$ **是限制条件。在方法一和方法二中，等式**$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$ **起了消元作用，使二元函数被化为一元函数；在方法三中，等式**$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$ **被转换成关于** ab **的不等式，然后用解不等式的方法求得了函**

数的最值;在方法四中,等式$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$为用最值定理求最值提供了代数式$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$的定值1;在方法五中,我们将等式$S=\frac{1}{2}ab$看成方程并用等式$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$消元成关于a的一元方程,再由方程有实数解求得S的取值,特别必须指出的是,由于a的取值受到制约,因此,必须验证S为12这一值的可取性,否则不能认定为S的最小值。

最后,必须指出,是由直线经过点P(3,2),并借助于直线的方程给出了等量关系式$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$。这就是说,直线方程是建立变量之间等量关系式的基础。

例5　如图9-6所示,已知直线l的方程是$y=4x$,点P的坐标是(6,4),在直线l上求一点Q,使直线PQ、l与x轴在第一象限内所围成的三角形的面积最小。

解法一　　直线l的方程为$y=4x$,点Q在直线l上,故可设点Q的坐标为$(m,4m)$,且由题设可知$m>1$,

,　直线PQ的方程为$(4m-4)(x-6)=(m-6)(y-4)$。

令$y=0$,则$x=\frac{5m}{m-1}$,

, $$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\frac{5m}{m-1}\cdot 4m\right|=\frac{10m^2}{m-1}(m>1),$$

, $$\frac{S_{\triangle}}{10}=\frac{m^2}{m-1}=(m-1)+\frac{1}{m-1}+2$$

$$\geqslant 2\sqrt{(m-1)\cdot\frac{1}{m-1}}+2=4。$$

当且仅当$m-1=\frac{1}{m-1}$,即$m=2$时,取等号。

,　$S_{\triangle\min}=40$,这时$m=2$,

,　所求点Q的坐标为(2,8)。

解法二 **如图** 9 - 7 **所示，设直线** PQ **与** x **轴的交点为** R(a，0)，(a > 0)

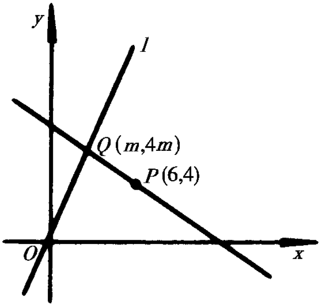


图 9 - 6

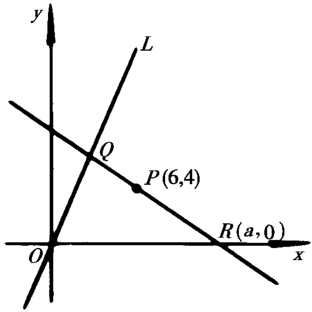


图 9 - 7

P(6，4)，

, **直线** PQ **的方程为** $y=\frac{4}{6-a}(x-a)$。

解方程组 $\begin{cases} y=4x, \\ y=\frac{4}{6-a}(x-a), \end{cases}$

得 $x=\frac{a}{a-5}, y=\frac{4a}{a-5}$,

即 $Q(\frac{a}{a-5},\frac{4a}{a-5})$

, $$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|a|\cdot\left|\frac{4a}{a-5}\right|=\frac{2a^2}{a-5},$$

, $$\frac{S}{2}=\frac{a^2}{a-5}=(a-5)+\frac{25}{a-5}+10$$

$$\geqslant 2\sqrt{(a-5)\cdot\frac{2}{a-5}}+10=20。$$

当且仅当 $a-5=\frac{25}{a-5}$，**即** $a=10$ **时，取等号。**

, $S_{min}=40$，**这时** $a=10$，

, **所求点** Q **的坐标为**(2，8)。

解法三 如图 9 - 8 所示，若直线 PQ 的斜率不存在，则直线 PQ、l 与 x 轴在第一象 限内所围成的三角形的面积为 72 ;若直线 PQ 的斜率存在，设为 k，则直线 PQ 的方程为 $y = k(x - 6) + 4$，$k \in (-\quad, 0) \cup (4, +\quad)$。

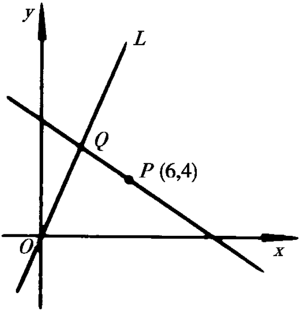


图 9 - 8

令 $y = 0$，则 $x = \frac{-4}{k} + 6 = \frac{6k - 4}{k}$，

解方程组 $\begin{cases} y = 4x, \\ y = k(x - 6) + 4, \end{cases}$

得 $x = \frac{6k - 4}{k - 4}$，$y = \frac{4(6k - 4)}{k - 4}$。

， $Q\left(\frac{6k - 4}{k - 4}, \frac{4(6k - 4)}{k - 4}\right)$，

， $S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\frac{6k - 4}{k}\right| \cdot \left|\frac{4(6k - 4)}{k - 4}\right| = \frac{2(6k - 4)^2}{k(k - 4)}$

$= 8 \cdot \frac{(3k - 2)^2}{k(k - 4)}$。

令 $u = \frac{(3k - 2)^2}{k(k - 4)}$，则 $(u - 9)k^2 - (4u - 12)k - 4 = 0$，

若 $u - 9 = 0$，即 $u = 9$ 时，$S = 72$，此时 $k = -\frac{1}{6} \in (-\quad, 0) \cup (4, +\quad)$，

若 $u - 9 \neq 0$，即 $u \neq 9$ 时，

由 $\Delta=(4u-12)^2+16(u-9)\geqslant 0$ 得 $u(u-5)\geqslant 0$，

$u>0$，

, $u\geqslant 5$，且 $u\neq 9$。

当 $u=5$ 时，$k=-1\in(-\quad,0)\cup(4,+\quad)$

, 综上所述，$S_{min}=40$，这时 $k=-1$，

, 所求点 Q 的坐标为(2,8)。

说明　在题设条件下，直线 PQ 是绕着定点 P 转动的，直线 PQ、l 与 x 轴在第一象限内围成的三角形的面积是随直线 PQ 的位置变化而变化的，也就是说，这个三角形的面积是由确定直线 PQ 的位置的变量确定的，因此，当我们建立这个三角形的面积的函数时，这个变量就成为三角形面积函数的自变量。

在解法一中，我们选择了直线 l 上的点来确定直线 PQ 的位置，从而表示直线 l 上的点变化的变量 m 就成为三角形面积函数的自变量；

在解法二中，我们选择了 x 轴上的点来确定直线 PQ 的位置，从而表示 x 轴上的点变化的变量 a 就成为三角形面积函数的自变量；

实质上，在题设条件下，直线 l 与 x 轴处于同等地位，解 法一与解法二为同一种思想，都是用表示直线上的点变化的变量为函数的自变量。

在解法三中，我们选择了表示直线 PQ 绕点 P 旋转变化的变量 k 为自变量。

练 习 题

1. 设点在直线 $x+3y=0$ 上，且点 P 到原点和直线 $x+3y-2=0$ 的距离相等，求点 P 的坐标。

2. 若直线 $ax+by+c=0$ 与过两点 $P_1(x_1,y_2)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的直线相交（P_2 不是交点），求这条直线分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比。）

3. 若点 $P(x,y)$ 在直线 $x+y+1=0$ 上，求

$\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}$**的最小值及相应点** P **的坐标。**

4\. **已知两点** $A(3,0)$ **和** $B(0,4)$**,动点** $P(x,y)$ **在线段** AB **上运动,求** xy **的最大值。**

5\. **已知直线** l **过点** $P(2,3)$**,且与** x **轴的正半轴、**y **轴的正半轴分别交于** A、B **两点,求直线** l **在两轴上的截距之和的最小值及相应直线** l **的方程。**

6\. **点** $A(-1,1)$ **和** $B(1,1)$ **是直线** $x-y-2=0$ **外的两个定点,试在已知直线上找一点,使** $\angle APB$ **最大,并求这个最大值。**

第十章　圆锥曲线

一、曲线和方程

在平面上建立直角坐标系后，平面上的点（M）与实数对（x，y）就建立了一一对应的关系，点的运动就形成曲线 c，与之对应的变化的实数对中的实数 x、y 的制约关系就表现为方程 $f(x,y)=0$。当曲线 c 上的点组成的集合与方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点组成的集合为同一点集时，曲线 c 称作方程 $f(x,y)=0$ 的曲线，方程 $f(x,y)=0$ 称作曲线 c 的方程。

曲线与方程建立了严格的对应关系以后，两者就成为同一关系的两种不同的表现形式，这时，曲线的性质完全地反映在它的方程上，方程的性质完全地反映在它的曲线上。因此，我们就可以通过讨论方程来研究曲线，通过曲线来讨论方程，也就是说，可以把形的问题转化为数的问题来研究，把数的问题转化成形的问题来研究，这就是解析几何处理问题的基本思想和基本方法。

由曲线（轨迹）求方程和由方程画曲线并研究曲线的性质，是解析几何的两个主要问题。

（一）求曲线的方程

求曲线的方程，从形式上看就是求曲线上点的横坐标与纵坐标的关系等式。求曲线的方程的方法可分为两类：一类是“待定系数法”，另一类是“轨迹法”。当我们已知曲线的类型及其标准

方程的形式时,可由动点所满足的条件建立待定未知数的方程(组),并求解确定待定未知数的值,从而求得曲线的方程。当我们尚不明确曲线的类型及其方程的标准形式时,常把曲线看成具有一定运动规律的动点的轨迹,由动点所满足的条件用轨迹法导出方程。轨迹法又可分为:直接法(即直接将动点满足的等量关系式转化成动点的横坐标和纵坐标的关系等式)和间接法(参数法,代入法等)。

例 1 **已知圆** C: $x^2+y^2=1$ **与点** A(3,0),**点** B **在** C **上运动,点** M **在线段** AB **上,且** $|AM|=\frac{1}{3}|AB|$,**求点** M **的轨迹。**

解法一 **如图** 10.1 **所示,连接** OB,**过点** M **作** MO' // OB,**交**

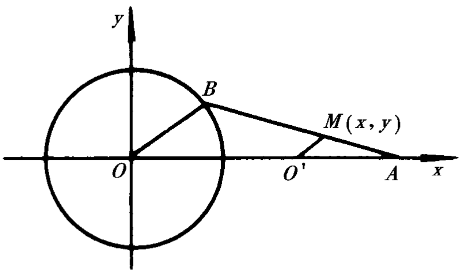


图 10 - 1

OA **于** O',**则**

$$\frac{|MO'|}{|OB|}=\frac{|AO'|}{|AO|}=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{1}{3}$$

$$|OB|=1,$$

, $$|MO'|=\frac{1}{3}。$$

又 $$|AO|=3,$$

, $$|O'A|=1,$$

, $$O'(2,0)。$$

, **点** M **的轨迹为圆,其方程为** $(x-2)^2+y^2=\frac{1}{9}$。

解法二 设 $M(x,y)$ 为轨迹上的任意一点,$B(x_0,y_0)$,

点 M 在 AB 上,且 $|AM|=\frac{1}{3}|AB|$,

, $$AM=\frac{1}{3}AB,$$

又 $A(3,0)$,

, $$x-3=\frac{1}{3}(x_0-3),y-0=\frac{1}{3}(y_0-0),$$

, $$x_0=3x-6,y_0=3y。$$

点 B 在圆 $x^2+y^2=1$ 上,

, $$x_0^2+y_0^2=1,$$

, $(3x-6)^2+(3y)^2=1$,即 $(x-2)^2+y^2=\frac{1}{9}$,所求轨迹为圆。

说明 解法一是"待定系数法",即利用动点的几何特征可以明确推知动点的轨迹为圆,求出圆心坐标和半径,即可写出圆的方程。解法二是"代入法"。一般地,平面上有两个相关联的动点 $P(x_0,y_0)$ 和 $M(x,y)$,其中 P 在已知曲线 c 上运动,通过分析几何图形的特征,找出两个动点 P 和 M 坐标之间的关系 $\begin{cases}x_0=f(x,y),\\ y_0=g(x,y),\end{cases}$ 因为点 P 在曲线 c 上,故将上述关系式代入曲线 c 的方程,即得动点 M 的轨迹方程(动点 M 的横坐标 x 和纵坐标 y 的关系等式)。

例 2 $\triangle ABC$ 的顶点 A 固定,其对边 BC 为定长 $2a$,当 BC 沿一定直线移动时,求 $\triangle ABC$ 的外心的轨迹方程。

解法一 如图 10 - 2 所示,以 BC 所在直线为 x 轴,过点 A 垂直于 BC 的直线为 y 轴建立直角坐标系。设点 A 的坐标为 $(0,b)$,b 为常数,$\triangle ABC$ 的外心 M 的坐标为 (x,y)。

由平面几何知识知,M 是 AB、AC 的垂直平分线的交点,故 $|AM|=|BM|$。

设 BC 的垂直平分线 MN 交 x 轴于 N,则由 $|BC|=2a$ 知,$|BN|=a$。

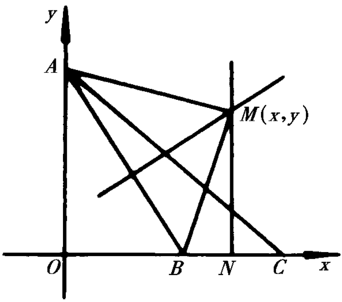


图 10 - 2

在 Rt△ABN 中,$|BM| = \sqrt{a^2 + y^2}$,

又 $|AM| = \sqrt{x^2 + (y - b)^2}$,

$\sqrt{x^2 + (y - b)^2} = \sqrt{a^2 + y^2}$,化简后得所求方程为 $x^2 - 2by + b^2 - a^2 = 0$。

解法二 以 BC 所在直线为 x 轴,过点 A 垂直于 BC 的直线为 y 轴建立直角坐标系。设点 A 的坐标为(0,b)(b 为常数),△ABC 的外心 M 的坐标为(x,y)。

设 B 点的坐标为(m,0)($m \in R$),则 BC 的中点 N 的坐标为(a + m,0)。

由平面几何知识知,点 M 是 AB、BC 的垂直平分线的交点,

边 BC 的垂直平分线的方程为 $x = m + a$,边 AB 的垂直平分线的方程为

$$\sqrt{x^2 + (y - b)^2} = \sqrt{(x - m)^2 + y^2},$$

,
$$\begin{cases} x = m + a, \\ \sqrt{x^2 + (y - b)^2} = \sqrt{(x - m)^2 + y^2} \end{cases}。$$

消去 m,得

$$\sqrt{(x^2 + (y - b)^2} = \sqrt{a^2 + y^2}$$

化简后得所求方程为

$$x^2 - 2by + b^2 - a^2 = 0。$$

说明 解法一是直接法，即直接将题设中的等量关系$|AM|=|BM|$转化为动点$M(x,y)$的横坐标x和纵坐标y的关系等式，即轨迹方程。解法二是参数法（间接法），其中m为参数。解法二中将动点M看作$\triangle ABC$的边AB、BC的垂直平分线这两条动直线的交点，因此，这一方法又可以称作交轨法。

（二）由方程作曲线

已知方程画出方程的曲线的基本方法是描点法。为了较准确地画出方程的曲线，必须根据对方程的讨论，分析曲线的特征（曲线在坐标轴上的截距、对称性、范围等）。若方程的形式较复杂，则必须首先对方程作等价变形。

例 3 画出下列方程的曲线：

(1) $x=-\sqrt{y}$；(2) $y=\sqrt{4x-x^2}$。

解(1) 方程$x=-\sqrt{y}$可以化为$y=x^2(x\leqslant 0)$。

, 方程的曲线为抛物线$y=x^2$在第二象限的部分（见图 10-3）。

解(2) 方程$y=\sqrt{4x-x^2}$可以化为$(x-2)^2+y^2=4(y\geqslant 0)$，

, 方程的曲线为圆$(x-2)^2+y^2=4$在x轴上方的半圆（包括端点）（见图 10-4）。

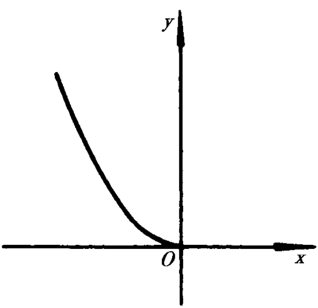


图 10-3

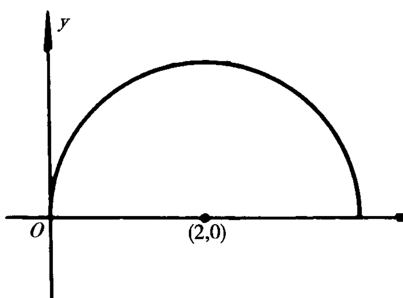


图 10-4

说明 由(2)可知，可以用画方程的曲线的方法画函数的图像。

(三)曲线的交点

由曲线方程的定义可知,两曲线有交点的充要条件就是由它们的方程所组成的方程组有实数解,实数解的个数就是交点的个数。因此,求曲线交点的几何问题,就可以转化为求方程组的解的代数问题,这充分体现了解析几何利用代数方法解决几何问题的思想。

例 4 已知抛物线 $C:y=-x^2+mx-1$,点 $A(3,0)$,$B(0,3)$,抛物线 C 与线段 AB 有两个不同的交点,求 m 的取值范围。

解法一 $A(3,0)$,$B(0,3)$,

, 线段 AB 的方程为 $x+y=3(0\leqslant x\leqslant 3)$,

由题设可知,方程组 $\begin{cases}x+y=3,\\ y=-x^2+mx-1,\end{cases}(0\leqslant x\leqslant 3)$ 有两组不同的解,

, 方程 $x^2-(m+1)x+4=0(0\leqslant x\leqslant 3)$ 有两个不同的根。

令 $f(x)=x^2-(m+1)x+4$,则 $f(x)$ 的图像与 x 轴在 $[0,3]$ 内有两个不同的交点,

,
$$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-16>0,\\ 0<\dfrac{m+1}{2}<3,\\ f(3)=-3m+10\geqslant 0,\\ f(0)=4\geqslant 0。\end{cases}$$

,
$$3<m\leqslant\frac{10}{3}。$$

解法二 由解法一知,方程 $x^2-(m+1)x+4=0$,即 $x^2+4=(m+1)x(0\leqslant x\leqslant 3)$ 有两个不同的根。

令 $y=x^2+4$,$y(m+1)x$,则函数 $y=x^2+4$ 与 $y=(m+1)x$ 的图像在 $[0,3]$ 内有两个不同的交点,如图 10 - 5 所示,经过原点的直线 $y=(m+1)x$ 与抛物线 $y=x^2+4$ 相切开始,旋转到过抛物线上的点 $(3,13)$ 时为此(切点处除外),$m+1$ 即为直线的斜率。

, $3<m\leqslant\frac{10}{3}$。

例 5 若直线 $y=x+k$ 与曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 恰有一个公共点，求 k 的取值范围。

解法一 由题设可知，方程组 $\begin{cases} y=x+k, \\ x=\sqrt{1-y^2} \end{cases}$ 恰有一组解，

，方程 $x=\sqrt{1-(x+k)^2}$，即 $2x^2+2kx+k^2-1=0\ (x\geqslant 0)$ 恰有一个根。

若 $\Delta=4k^2-8(k^2-1)=0$，则 $k=\pm\sqrt{2}$。

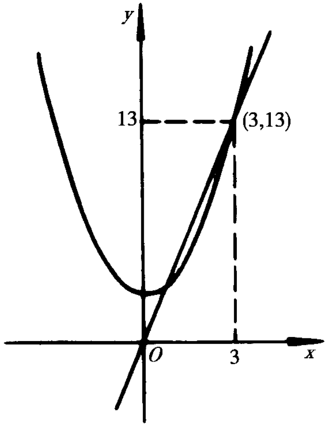


图 10 - 5

当 $k=\sqrt{2}$ 时，方程的根为 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$，故 $k=\sqrt{2}$ 不可取；当 $k=-\sqrt{2}$ 时，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $k=-\sqrt{2}$ 可取。

若 $\Delta=4k^2-8(k^2-1)>0$，则 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，

（1）当 $x=0$ 为根，则 $k=\pm 1$；

当 $k=1$ 时，另一根为 $x=-1$，故 $k=1$ 可取；当 $k=-1$ 时，另一根为 $x=1$，故 $k=-1$ 不可取。

（2）若 $x=0$ 不为根，则 $k^2-1<0$，即 $-1<k<1$。

综上所述，$k=-\sqrt{2}$ 或 $-1<k\leqslant 1$。

解法二 由题设可知，方程组 $\begin{cases} y=x+k, \\ x=\sqrt{1-y^2}, \end{cases}$ 恰有一组解，

方程组可以化为 $\begin{cases} y=x+k, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}(x\geqslant 0)$ 故从几何的角度看方程组可知，直线 $y=x+k$ 与半圆 $x^2+y^2=1\ (x\geqslant 0)$ 恰有一个公共点，k 为直线在 y 轴上的截距（见图 10 - 6）。

，$k=-\sqrt{2}$ 或 $-1<k\leqslant 1$。

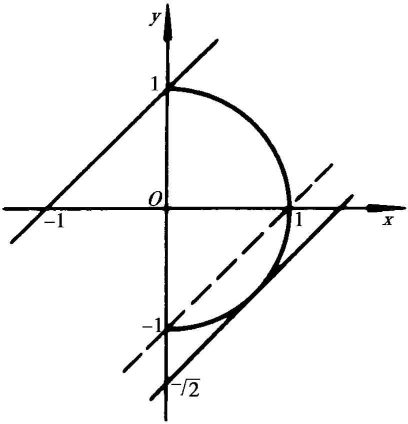


图 10 - 6

例 6 **已知直线** $x+2y-3=0$ **交圆** $x^2+y^2+x-6y+F=0$ **于点** P、Q，O **为原点，问** F **为何值时**，$OP\perp OQ$？

解 **由方程组** $\begin{cases} x+2y-3=0, \\ x^2+y^2+x-6y+F=0, \end{cases}$

得

$$5x^2+10x+4F-27=0 \qquad (*),$$

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，**则**

$$x_1+x_2=-2, x_1x_2=\frac{4F-27}{5},$$

，

$$\begin{aligned} y_1y_2 &= \frac{1}{2}(3-x_1)\cdot\frac{1}{2}(3-x_2) \\ &= \frac{1}{4}[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{4F-27}{5}-3\times(-2)+9\right] \\ &= \frac{12+F}{5}. \end{aligned}$$

由 $OP\perp OQ$ **得**，$x_1x_2+y_1y_2=0$，

，

$$\frac{4F-27}{5}+\frac{12+F}{5}=0, F=3.$$

当 $F=3$ 时,方程(∗)为 $x^2+2x-3=0$,其有解,故 $F=3$ 可取。

说明　在解题过程中,我们将 $OP\perp OQ$ 的几何条件转化成 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 的代数条件,并转化成关于 F 的方程,求得 F 的取值。这种揭示等量关系并转化成方程求知量的取值是解求值问题的常用方法。

由本例可知,曲线的交点问题并不一定要求出交点的坐标求解,这种‘设而不求’的方法是处理曲线交点问题的常用方法。

例 7　设 a、$b\in R$,抛物线 C:$y=(t^2+t+1)x^2-2(a+t)^2x+t^2+3at+b$,若抛物线 C 对任何 $t\in R$ 都过点(1,0)。

(1)求 a、b 的值;

(2)t 为何值时,抛物线 C 在 x 轴上截得的弦长取最大值;

(3)设抛物线与 x 轴的交点为 $Q(m,0)$,求 m 的取值范围。

解(1)　抛物线 C 对任何 $t\in R$ 都过点(1,0),

, $t^2+t+1-2(a+t)^2+t^2+3at+b=0$,即

$$(1-a)t-2a^2+b+1=0,$$

,
$$\begin{cases}1-a=0,\\-2a^2+b+1=0,\end{cases}$$

解得　$a=1$,$b=1$。

(2)由(1)可知,抛物线 C 的方程为

$$y=(t^2+t+1)x^2-2(t+1)^2x+t^2+3t+1。$$

令 $y=0$,则

$$(t^2+t+1)x^2-2(t+1)^2x+t^2+3t+1=0,$$

设抛物线 C 与 x 轴的两个交点的横坐标为 x_1、x_2,则

$$x_1+x_2=\frac{2(t+1)^2}{t^2+t+1},x_1x_2=\frac{t^2+3t+1}{t^2+t+1}。$$

设抛物线 C 在 x 轴上截得的弦长为 d,则

$$d^2=|x_1-x_2|^2$$
$$=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$= \frac{4(t+1)^4}{(t^2+t+1)^2} - \frac{4(t^2+3t+1)}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{4t^2}{(t^2+t+1)^2}$$

，
$$d = \frac{2|t|}{t^2+t+1}。$$

若 $t=0$，则 $d=0$；

若 $t>0$，则

$$d = \frac{2t}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{2}{t+\frac{1}{t}+1}$$

$$\leqslant \frac{2}{3}；$$

（当且仅当 $t=1$ 时，等号成立。）

若 $t<0$，则

$$d = \frac{-2t}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{2}{(-t)+\frac{1}{-t}-1}$$

$$\leqslant 2；$$

（当且仅当 $t=-1$ 时，等号成立。）

综上所述，$d_{max}=2$（这时 $t=-1$）。

（3） $Q(m,0)$ 为抛物线 C 与 x 轴的交点，

， $(t^2+t+1)m^2-2(t+1)^2m+t^2+3t+1=0$，

$(m^2-2m+1)t^2+(m^2-4m+3)t+m^2-2m+1=0$。

若 $m=1$，则等式成立，故 $m=1$ 可取；

若 $m\neq1$，则 $(m-1)t^2+(m-3)t+m-1=0$

， $\Delta=(m-3)^2-4(m-1)^2\geqslant0$，

$$即\ 3m^2 - 2m - 5 \leqslant 0$$

, $$-1 \leqslant m \leqslant \frac{5}{3}$$

综上所述,$-1 \leqslant m \leqslant \frac{5}{3}$。

说明　在解(1)中,我们将等式$(1-a)t-2a^2+b-1=0$看作关于 t 建立在 R 上的恒等式,故有$1-a=0$且$-2a^2+b+1=0$;在解(2)中,我们利用数轴上的弦长公式,建立了弦长 d 关于 t 的函数,再求解 d 的最大值;在解(3)中,我们建立关于 t 的方程$(m^2-2m+1)t^2+(m^2-4m+3)t+m^2-2m+1=0$,并利用其有解求 m 的取值范围。总之,本例是将几何问题转化成代数问题求解。

例 8　设抛物线$y=x^2+3x-1$上存在关于直线$x+y=0$对称的相异两点,求这两点的坐标。

解法一　设$P(x_0,y_0)$是抛物线上的一点,其关于直线$x+y=0$的对称且也在抛物线上的点为$Q(-y_0,-x_0)$,

则
$$\begin{cases} y_0 = x_0^2 + 3x_0 - 1 & (1) \\ -x_0 = y_0^2 - 3y_0 - 1 & (2) \end{cases}$$

(1)-(2)得

$$y_0 + x_0 = x_0^2 - y_0^2 + 3(x_0 + y_0)。$$

,　P、Q 是抛物线上相异两点,

, $$x_0 + y_0 \neq 0$$

, $$x_0 - y_0 + 2 = 0, \qquad (3)$$

将式(3)代入式(1),解得$\begin{cases} x_0 = -3, \\ y_0 = -1。\end{cases}$或$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 3。\end{cases}$

,　所求两点坐标为$(-3,-1)$,$(1,3)$。

解法二　设 P、Q 为所求关于直线$x+y=0$的两个对称点,则可设直线 PQ 的方程为$y=x+m$。

由方程组$\begin{cases} y = x + m, \\ y = x^2 + 3x + 1, \end{cases}$得

$$x^2 + 2x - 1 - m = 0。$$

设 PQ 的中点为 $M(x_0,y_0)$，$x_0=-1$，$y_0=x_0+m=m-1$，

点 M 在直线 $x+y=0$ 上，

$$\therefore \quad -1+m-1=0, m=2。$$

将 $m=2$ 代入 $x^2+2x-1-m=0$，得

$$x^2+2x-3=0,$$

$$\therefore \quad x=1 \text{ 或 } x=-3。$$

若 $x=1$，则 $y=3$；若 $x=-3$，则 $y=-1$。

∴ 所求两点坐标为 $(-3,-1)$，$(1,3)$。

说明 解法一是直接建立对称点坐标的方程组求解；解法二是先求出对称点所在直线的方程，再建立方程组求解，由解法二可知，借助几何图形的性质可以简化求解运算。

练 习 题

1. 已知在 Rt△ABC 中，AB = 3，AC = 4，斜边 BC 的两个端点 B、C 分别在 x、y 两轴上移动，顶点 A 和原点分别在 BC 的两侧（如图 10 - 7 所示），求点 A 的轨迹方程。

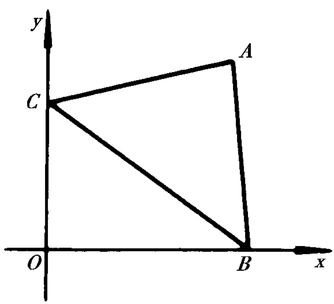


图 10 - 7

2. 过定点 $A(a,b)$ 任作互相垂直的两直线 l_1、l_2 分别与 x 轴、y 轴交于点 M、N，求 MN 的中点的轨迹方程。

3. 说明方程 $\sqrt{x^2+y^2}=|y|+1$ 所表示的曲线，并作出曲线图形。

4. 设直线 $y=kx$ 与曲线 $y=\frac{|x|-1}{|x-1|}$ 无公共点，求实数 k 的取值范围。

5. 若抛物线 $y=ax^2-1$ 上总存在关于直线 $x+y=0$ 对称的两点，求 a 的取值范围。

二、圆的方程及应用

(一) 求圆的方程

确定一个圆，包括确定圆的位置和大小，圆的位置由圆心确定，圆的大小由半径确定。

在圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 中有三个参数 a、b 和 r，在圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 中，也有三个参数 D、E 和 F，这就是说，从几何角度看，圆由三个互相独立的条件确定，从代数角度看，三个参数应由三个独立的方程确定。

求圆的方程一般采用待定系数法，即根据题设条件建立待定量的方程(组)，解方程(组)求得待定量的值。由于在平面几何中对圆的性质作了深刻的讨论，因此，在解析几何中充分利用圆的平面几何性质解题，往往可以使解题过程简化。这就是说，在求圆的方程中，要有方程的意识和充分利用圆的平面几何性质的意识。

例 1　已知圆 C 和 y 轴相切，圆心在直线 $x-3y=0$，且被直线 $y=x$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$，求圆 C 的方程。

解法一　设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。

圆 C 和 y 轴相切，

,
$$\left|-\frac{D}{2}\right|=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2};$$

圆心 C 在直线 $x-3y=0$ 上，

, $$-\frac{D}{2}-3\cdot\left(-\frac{E}{2}\right)=0;$$

圆 C 被直线 $y=x$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$，

, $$\left(\frac{\left|-\frac{D}{2}+\left(-\frac{E}{2}\right)\right|}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{7})^2=\left|-\frac{D}{2}\right|^2。$$

, $$\begin{cases}\left|-\frac{D}{2}\right|=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2},\\ -\frac{D}{2}-3\cdot\left(-\frac{E}{2}\right)=0,\\ \left(\frac{\left|-\frac{D}{2}+\left(-\frac{E}{2}\right)\right|}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{7})^2=\left|-\frac{D}{2}\right|^2。\end{cases}$$

解方程组得，$D=6$，$E=2$，$F=1$ 或 $D=-6$，$E=-2$，$F=1$。

, 所求圆的方程为 $x^2+y^2+6x+2y+1=0$ 或 $x^2+y^2-6x-2y+1=0$。

解法二　设圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$。

圆 C 和 y 轴相切，

$$|a|=r;$$

圆心参直线 $x-3y=0$ 上，

$$a-3b=0;$$

圆 C 被直线 $y=x$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$，

, $$\left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{7})^2=r^2。$$

, $$\begin{cases}|a|=r,\\ a-3b=0,\\ \left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{7})^2=r^2。\end{cases}$$

解方程组得，$a=3$，$b=1$，$r=3$ 或 $a=-3$，$b=-1$，$r=3$，

, 所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 或 $(x+3)^2+(y$

$+1)^2=9$。

说明 在求圆的方程时,若条件与圆心相关,则用圆的标准方程求解较易;若条件与圆上的点相关,则用圆的一般方程求解较易。本例的两种解法中,解法二所列出的方程组求解较易,即本例选用圆的标准方程求解适当。

例 2 求过点 $A(4,-1)$ 且与直线 $y=2x$ 切于点 $P(1,2)$ 的圆的方程。

解法一 设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

点 $A(4,-1)$ 和点 $P(1,2)$ 都在圆上,

$$\begin{cases}4D-E+F+17=0,\\ D+2E+F+5=0。\end{cases}$$

解得 $D=E-4$,$F=-3E-1$,

, 圆方程为 $x^2+y^2+(E-4)x+Ey-(3E+1)=0$。

圆与直线 $y=2x$ 相切,

, 将 $y=2x$ 代入圆方程可得 $5x^2+(3E-4)x-(3E+1)=0$,

$$\Delta=(3E-4)^2+20(3E+1)=0,$$

, $$E=-2,$$

, 所求圆方程为 $x^2+y^2-6x-2y+5=0$。

解法二 由题设可知,所求圆的圆心在已知弦 PA 的垂直平分线上,又在过点 P 且与切线 $y=2x$ 垂直的直线上。

$P(1,2)$,$A(4,-1)$,

, 弦 PA 的垂直平分线的方程为 $x-y-2=0$,过点 P 且与直线 $y=2x$ 垂直的直线方程为 $x+2y-5=0$,

由方程组 $$\begin{cases}x-y-2=0,\\ x+2y-5=0,\end{cases}$$

得 $x=3$,$y=1$。

, 圆心的坐标为 $C(3,1)$,圆心的半径 $|CP|=\sqrt{5}$,

, 所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=5$。

说明 解法二充分利用了圆的平面几何性质,解法简捷。两

种解法都应用了列方程(组)求未知量的方程思想。

例 3 求经过两已知圆 $C_1: x^2+y^2-4x+2y=0$ 和 $C_2: x^2+y^2-2y-4=0$ 的交点,且圆心在直线 $l: 2x+4y=1$ 上的圆方程。

分析 若先求两已知圆的交点坐标,再求圆方程,则运算较繁。

解 圆 C_2 的圆心 $(0,1)$ 不在直线 l 上,故圆 C_2 不为所求圆方程,故设所求圆方程为 $(x^2+y^2-4x+2y)+\lambda(x^2+y^2-2y-4)=0$ $(\lambda\neq-1)$,

即 $x^2+y^2-\frac{4}{1+\lambda}x+\frac{2-2\lambda}{1+\lambda}y-\frac{4\lambda}{1+\lambda}=0$,圆心为 $\left(\frac{2}{1+\lambda},\frac{\lambda-1}{1+\lambda}\right)$。

所求圆的圆心在直线 l 上,

,
$$2\cdot\frac{2}{1+\lambda}+4\cdot\frac{\lambda-1}{1+\lambda}=1,$$

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$,

, 所求圆方程为 $(x^2+y^2-4x+2y)+\frac{1}{3}(x^2+y^2-2y-4)=0$,

即 $x^2+y^2-3x+y-1=0$。

说明 由本例的解法可知,过已知两圆交点的圆方程常用圆系方程求解。在解题过程中,建立未知量 λ 的方程并解方程求其值是本例求解的基本思想,而圆心在直线 l 上是建立方程的基础。

例 4 设圆满足:(1)截 y 轴所得弦长为 2;(2)被 x 轴分成两段圆弧,其弧长比为 3∶1。在满足条件(1)和(2)的所有圆中,求圆心到直线 $l: x-2y=0$ 的距离最小的圆的方程。

解 设所求圆的圆心的坐标为 (a,b),半径为 r,圆心到直线 l

的距离为 d,则由题设可知$\begin{cases} r^2 = a^2 + 1, \\ r^2 = 2b^2, \\ d = \dfrac{|a - 2b|}{\sqrt{5}}, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2b^2 - a^2 = 1 & (1) \\ d = \dfrac{|a - 2b|}{\sqrt{5}} & (2) \end{cases}$

方法一 由式(2),$5d^2 = a^2 + 4b^2 - 2ab \geqslant a^2 + 4b^2 - 2(a^2 + b^2) = 2b^2 - a^2 = 1$(当且仅当 $a = b$ 时,等号成立),

当$\begin{cases} 2b^2 - a^2 = 1, \\ a = b, \end{cases}$即 $a = b = 1$ 或 $a = b = -1$ 时,$d_{min} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

, $r^2 = 2$,

, 所求圆方程为$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 或$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$。

方法二 由式(2)$a = 2b \pm \sqrt{5}d$,由式(1)$a^2 = 2b^2 - 1$,

故 $$2b^2 \pm 4\sqrt{5}db + 5d^2 + 1 = 0,$$

$$b \in R,$$

, $$\Delta = 80d^2 - 8(5d^2 + 1) \geqslant 0, d^2 \geqslant \frac{1}{5},$$

, $$d_{min} = \frac{\sqrt{5}}{5}。$$

令 $$\begin{cases} 2b^2 - a^2 = 1, \\ \dfrac{|a - 2b|}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}, \end{cases}$$

则 $a = b = 1$ 或 $a = b = -1$,

, $r^2 = 2$,

, 所求圆方程为$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 或$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$。

方法三 令 $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sec\theta, a = \tan\theta$,

则 $d=\frac{|\tan\theta-\sqrt{2}\sec\theta|}{\sqrt{5}}$，$\sqrt{5}d=|\tan\theta-\sqrt{2}\sec\theta|=|\frac{\sin\theta-\sqrt{2}}{\cos\theta}|$，

这就是说，$\sqrt{5}d$ 为点$(0,\sqrt{2})$与单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的点的连线的斜率的绝对值。

, $$d_{min}=\frac{\sqrt{5}}{5}，这时\ \theta=\frac{\pi}{4}\ 或\ \theta=\frac{3\pi}{4}，$$

, $$a=b=1\ 或\ a=b=-1，$$

, $$r^2=2，$$

, 所求圆方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$。

说明　如何处理变量关系等式组 $\begin{cases}2b^2-a^2=1，\\ d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}\end{cases}$ 是本例求解的关键。

在方法一中，将等式(2)变形成 $5d^2$ 关于 a、b 的函数，利用基本不等式求解，其中限制条件 $2b^2-a=1$ 既为求最小值求最值提供 $2b^2-a^2$ 的常量 1，也成为求未知量 a、b 的一个方程。

在解法二中，将等式(2)看成方程，利用方程有解求最值，等式(1)对等式(2)起消元作用，并起求未知量 a、b 取值的方程作用。

在解法三中，利用等量关系(2)看成函数解析式，并让等量关系式(1)对其起消元作用(三角消元法)，并从直线斜率的角度对 $\frac{\sin\theta-\sqrt{2}}{\cos\theta}$ 赋以几何意义，求函数 $\sqrt{5}d=|\frac{\sin\theta-\sqrt{2}}{\cos\theta}|$ 的最值。

由本例可以看到，解题过程中出现的代数形式，若能从各种不同的角度去观察分析，才能获得各种解题方法，本例是从函数、方程的角度看待变量的等量关系式。

(二)直线与圆

在平面几何中，已对直线与圆的位置关系作了详尽透彻的讨论，在解析几何中，这些内容可以代数的形式出现，因此，充分利用

直线与圆的几何性质并转换成代数形式是解决直线与圆的问题的关键,也是解决直线与圆的问题的基本思想。

例 1　**求以点** $P(3,1)$ **为中点的圆** $x^2+y^2-4x-5=0$ **的弦** AB **所在直线的方程。**

解法一　**设圆心为** C**,则** $C(2,0)$。

连接 CP**,则** $AB\perp CP$**(见图** 10 - 8**),**

$$k_{CP}=1,$$

, $$k_{AB}=-1,$$

,　AB **所在直线方程为** $y=-(x-3)+1$,

即　$x+y-4=0$。

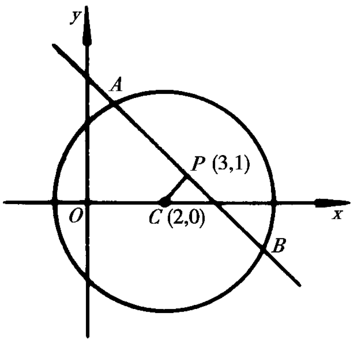


图 10 - 8

解法二　**设所在直线** AB **的斜率为** k**,则直线** AB **的方程为** $y=k(x-3)+1$。

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由方程组 $\begin{cases} y=k(x-3)+1, \\ x^2+y^2-4x-5=0, \end{cases}$ **消去** y **得**

$$(1+k^2)x^2-[2k(3k-1)+4]x+(3k-1)^2-5=0。$$

由 $x_1+x_2=6$ **知,** $\dfrac{2k(3k-1)+4}{1+k^2}=6$**,解得** $k=-1$,

,　**直线** AB **的方程为** $y=-(x-3)+1$**,即** $x+y-4=0$。

解法三　**设** $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则
$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2-4x_1-5=0, \\ x_2^2+y_2^2-4x_2-5=0, \end{cases}$$

两式相减得 $(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)-4(x_1-x_2)=0$。

$$x_1+x_2=6, y_1+y_2=2,$$

, $$6(x_1-x_2)+2(y_1-y_2)-4(x_1-x_2)=0,$$

即 $(x_1-x_2)+(y_1-y_2)=0$,

, $$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$$,即直线 AB 的斜率为 -1,

, 直线 AB 的方程为 $y=-(x-3)+1$,即 $x+y-4=0$。

解法四　设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则由点 $P(3,1)$ 为弦 AB 的中点可知,$x_2=6-x_1$,$y_2=2-y_1$,

, $$\begin{cases} x_1^2+y_1^2-4x_1-5=0, \\ (6-x_1)^2+(2-y_1)^2-4(6-x_1)-5=0。\end{cases}$$

两式相减得 $x_1+y_1-4=0$,这就是说点 $A(x_1,y_1)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上,

点 $P(3,1)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上,

, 直线 AB 的方程为 $x+y-4=0$。

说明　解法一利用了圆的‘圆心与弦的中点连线与弦垂直”的平面几何性质,故解法简单明了。解法二中建立了未知量 k 的方程,用方程的思想求解。解法三和解法四都设 A、B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),但过程中都没有求出具体坐标,这种方法称作‘设而不求”,这是解析几何中经常用到的简化运算过程的方法。

本例的四种解法在二次曲线的中点弦问题中有广泛的应用。

例 2　直线 l 经过点 $P(5,5)$ 且和圆 C:$x^2+y^2=25$ 相交,截得的弦长为 $4\sqrt{5}$,求直线 l 的方程。

分析　求直线方程常用待定系数法,建立待定量的方程求解是求待定量的值的基本思想方法,本例中的条件‘弦长为 $4\sqrt{5}$”是建立未知量的方程的基础。

解法一 由题设可知,直线 l 的斜率存在,设为 k,则直线 l 的方程为 $y=k(x-5)+5$。

由方程组 $\begin{cases} y=k(x-5)+5, \\ x^2+y^2=25, \end{cases}$ 消去 y 得

$$(k^2+1)x^2+10k(1-k)x+25k(k-2)=0。$$

设弦的两个端点坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),

则 $x_1+x_2=\dfrac{10k(k-1)}{k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{25k(k-2)}{k^2+1}$,

由弦长公式得

$$\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left[\frac{10k(k-1)}{k^2+1}\right]^2-4\cdot\frac{25k(k-2)}{k^2+1}}=4\sqrt{5},$$

两边平方整理可得 $2k^2-5k+2=0$,

, $$k=\frac{1}{2}\text{或 }k=2,$$

, 直线 l 的方程为 $x-2y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$。

解法二 由题设可知,直线 l 的斜率存在,设为 k,则直线 l 的方程为 $y=k(x-5)+5$。

由题设可知,圆心到直线 l 的距离为 $\sqrt{5}$,故 $\dfrac{|5(1-k)|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{5}$,解得 $k=\dfrac{1}{2}$ 或 $k=2$,

, 直线 l 的方程为 $x-2y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$。

说明 由于解法二应用了圆的平面几何性质,故按题设条件列出的未知量 k 的方程也简单,从而解法二简捷。

例 3 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上,被 x 轴反射,其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切,求光线 l 所在直线的方程。

解法一 如图 10-9 所示,已知圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$,其关于 x 轴的对称圆的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$。

设光线 l 所在直线方程为 $y=k(x+3)+3$(由题设可知 k 存在

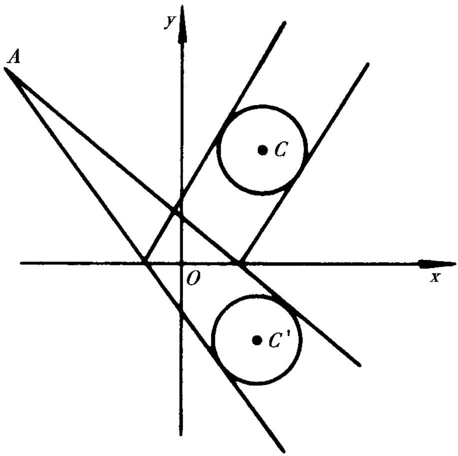


图 10 - 9

且 $k \neq 0$),由题设可知,圆$(x-2)^2+(y+2)^2=1$ 的圆心$(2,-2)$到直线 l 的距离为 1,即有$\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,整理得,$12k^2+25k+12=0$,解得 $k=-\frac{3}{4}$或 $k=-\frac{4}{3}$,

, $y=-\frac{3}{4}(x+3)+3$ 或 $y=-\frac{4}{3}(x+3)+3$,

即 $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$。

解法二　已知圆的标准方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=1$。

设光线 l 所在直线方程为 $y=k(x+3)+3$(由题设可知 k 存在且 $k \neq 0$)。

令 $y=0$,则 $x=-\frac{3(k+1)}{k}$,故光线 l 的反射点的坐标是$\left(-\frac{3(k+1)}{k},0\right)$,

由光线的入射角和反射角相等可知,反射光线所在直线的方程是 $y=-k\left(x+\frac{3(k+1)}{k}\right)$,即 $kx+y+3(1+k)=0$。

由题设可知,$\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,整理得 $12k^2+25k+12=0$,解得

$$k=-\frac{3}{4} \text{ 或 } k=-\frac{4}{3},$$

, 所求直线的方程为 $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$。

(三)圆方程的应用

1. 圆的方程是变量 x,y 的关系等式

例 1　若实数 x,y 满足 $x^2+y^2-2x+4y=0$,求 $x-2y$ 的最大值。

解法一　将实数 x,y 的关系等式可以看作圆的方程,其化为标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$。

令 $m=x-2y$,$x=1+\sqrt{5}\cos\theta$,$y=-2+\sqrt{5}\sin\theta$ $(\theta\in R)$,

则

$$\begin{aligned} m &= (1+\sqrt{5}\cos\theta)-2(-2+\sqrt{5}\sin\theta) \\ &= 5-(2\sqrt{5}\sin\theta-\sqrt{5}\cos\theta) \\ &= 5-5\sin(\theta-\varphi) \ \left(\text{其中 } \sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5},\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left.\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)。\end{aligned}$$

, $x-2y$ 的最大值为 10。

解法二　将实数 x,y 的关系等式可以看作圆的方程,其圆心坐标为 $(1,-2)$,半径为 $\sqrt{5}$。

设 $m=x-2y$,则可将其看成直线 l 的方程。

由题设可知,圆心到直线的距离不大于圆的半径,即 $\frac{|1-2(-2)-m|}{\sqrt{5}}\leqslant\sqrt{5}$,

, $|m-5|\leqslant 5$,$0\leqslant m\leqslant 10$,

, $x-2y$ 的最大值为 10。

例 2　若关于 x 的方程 $x^2-2(1+i)x+\frac{1}{2}ab-(a-b)i=0$ $(a、b\in R)$ 至少有一个实根,求方程实根的最大值和最小值。

解　设方程的实根为 m**,则** $m^2-2(1+i)m+\frac{1}{2}ab-(a-b)i=0$**,即**

$$(m^2-2m+\frac{1}{2}ab)+(-2m-a+b)i=0,$$

由零复数的定义可得 $\begin{cases} m^2-2m+\frac{1}{2}ab=0, \\ -2m-a+b=0 \end{cases}$ (*)

方法一　将 $b=2m+a$ **代入** $m^2-2m+\frac{1}{2}ab=0$ **可得,**$a^2+2ma+2m^2-4m=0$,

$a\in R$（**关于** a **的方程有解**）,

, $\Delta=4m^2-4(2m^2-4m)\geqslant 0$**,即** $m^2-4m\leqslant 0$,

, $0\leqslant m\leqslant 4$**,即实根的最大值为** 4**,最小值为** 0。

方法二　条件组(*)可以化为 $\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2=8, \\ m=\frac{1}{2}(b-a)。 \end{cases}$

令 $a=-2+2\sqrt{2}\cos\theta$,$b=2+2\sqrt{2}\sin\theta(\theta\in R)$,

则
$$m=\frac{1}{2}(b-a)=2\sqrt{2}(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$=2+2\sin(\theta-\frac{\pi}{4})。$$

, $0\leqslant m\leqslant 4$**,即实根的最大值为** 4**,最小值为** 0。

方法三　条件组(*)可以化为 $\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2=8, \\ m=\frac{1}{2}(b-a)。 \end{cases}$

把 a,b **看成变量,则方程**$(a+2)^2+(b-2)^2=8$ **可看成圆的方程,方程** $a-b+2m=0$ **可看成直线系方程,则由题设可知,圆心到直线的距离不大于半径,即**

$$\frac{|-2-2+2m|}{\sqrt{2}}\leqslant 2\sqrt{2}\text{,即}|m-2|\leqslant 2。$$

, $0\leqslant m\leqslant 4$，即实根的最大值为 4，最小值为 0。

说明 三种方法对条件组中的等式从各种不同的角度分析，从而获得不同的求解方法。

方法一中，将条件组看成关于 a、b 方程组求解；方法二中，将条件组看成函数解析式和对变量的限制条件求解；方法三中，将条件组中的等式看成圆方程和直线系方程，利用直线与圆的位置关系求解。

例 3 圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$的点共有多少个？

解法一 圆方程可以化为$(x+1)^2+(y+2)^2=8$，其圆心坐标为$(-1,-2)$，半径为 $2\sqrt{2}$。

圆心到直线 $x+y+1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$。

, 圆上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$的点有 3 个。

解法二 设点$(-1+2\sqrt{2}\cos\theta,-2+2\sqrt{2}\sin\theta)$为圆上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$的任意一点，则$\dfrac{|-2+2\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

, $$\left|4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2\right|=2,$$

, $$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ 或 } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

, $$\theta+\frac{\pi}{4}=k\pi \text{ 或 } \theta+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)，\text{即}$$

$$\theta=2n\pi-\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \theta=2n\pi+\frac{3\pi}{4} \text{ 或 } \theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}\ (n\in Z)。$$

, 圆上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$的点有 3 个。

2\. 圆系方程可以看作关于参变数的恒等式

例 4 已知圆系 $x^2+y^2-ax-4ay+\frac{9}{2}a^2=0\ (a\neq 0)$，试求该圆系的公切线方程。

分析　圆系的公切线即与圆系中每一个圆都相切的直线，圆系中每一个圆到公切线的距离都等于其半径。

解　已知圆系方程可以化为 $(x-a)^2+(y-2a)^2=\frac{1}{2}a^2$，其圆心坐标为 $(a, 2a)$，半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}|a|$，

设公切线方程为 $y=kx+b$（k 存在），

则
$$\frac{|ka-2a+b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|a|,$$

即 $\left[(k-2)^2-\frac{1}{2}(k^2+1)\right]a^2+2(k-2)ba+b^2=0$　（$*$）

由题设可知，式（$*$）对于一切实数 a（$a\neq0$）都成立，

,
$$\begin{cases}(k-2)^2-\frac{1}{2}(k^2+1)=0,\\ 2(k-2)b=0,\\ b^2=0。\end{cases}$$

,　$b=0$，$k=1$ 或 $k=7$，

,　圆系的公切线方程为 $y=x$ 或 $y=7x$。

说明　本例也可以先给 a 赋予两个特殊值，得圆系中的两个圆，并给出它们的公切线，然后加以一般性证明求解。

3. 圆方程在解析法证明中的应用

例 5　如图 10－10 所示，已知 $\triangle ABC$ 的内切圆为圆 O，切底边 BC 于 D 点，DH 是圆 O 的直径，直线 AH 交 BC 于点 E，求证：$BE=CD$。

证明　取 BC 所在直线为 x 轴，切点 D 为原点建立直角坐标系，设 $B(b,0)$，$C(a,0)$，$O(0,r)$，则圆 O 的方程为 $x^2+(y-r)^2=r^2$，$H(0,2r)$。

AB、AC 为圆 O 的切线，

,　AB、AC 所在直线的方程分别为

$$(r^2-b^2)y-2brx+2b^2r=0,$$

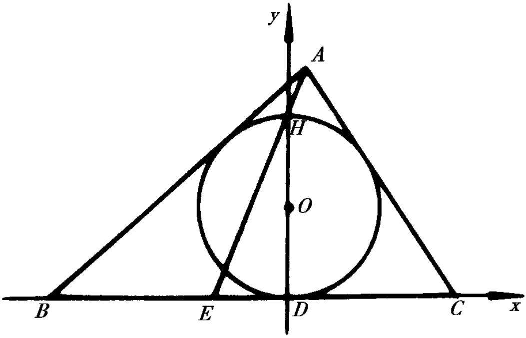


图 10 - 10

$$(r^2 - a^2)y - 2arx + 2a^2r = 0。$$

设直线 AE 的方程为

$$[(r^2 - a^2)y - 2arx + 2a^2r] +$$
$$\lambda[(r^2 - b^2)y - 2brx + 2b^2r] = 0,$$

AE 过点 $H(0,2r)$,

, $\lambda = -1$,

, 直线 AE 的方程为 $(a^2 - b^2)y + 2r(a - b)x - 2r(a^2 - b^2) = 0$。

当 $a = b$ 时,点 E 与点 D 重合,结论显然成立:

当 $a \neq b$ 时,AE 的方程为 $(a + b)y + 2rx - 2r(a + b) = 0$,

令 $y = 0$,则 $x = a + b$,

, $|BE| = |(a + b) - b| = |a|$,$|CD| = |a|$,

, $$|BE| = |CD|。$$

练 习 题

1. 一个圆经过点 $(2, -1)$ 与直线 $x - y - 1 = 0$ 相切,且圆心在直线 $y = -2x$ 上,求该圆的方程。

2. 求与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 外切且与直线 $x + \sqrt{3}y = 0$ 切于点 $(3, -\sqrt{3})$ 的圆方程。

3. 已知圆 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$，过原点的圆的切线为 OP、OQ，切点分别为 P、Q，求直线 PQ 的方程。

4. 已知 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2},y\neq 0\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+b\}$，$M\cap N\neq\varphi$ 求 b 的取值范围。

5. 自圆上一点 D 向直径 AB 作垂线 DE 交 AB 于 E，过 A、D 的切线相交于点 C，则 BC 二等分 DE。

三、求二次曲线的方程

求二次曲线的方程常用待定系数法，即根据题设条件设定二次曲线的方程，再根据题设条件给出待定未知量的方程或方程组，通过解方程或方程组即可求得待定未知量的值。

必须注意到，揭示题设中蕴含的等量关系是建立待定未知量的方程或方程组的依据。

例 1　求过点 $(-1,3)$，且和双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 有共同渐近线的双曲线方程。

解法一　双曲 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x$。

(1) 若所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$，

则
$$\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2},\\[2mm]\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1。\end{cases}$$

由方程组无解知这种情况不可能。

(2) 若所求双曲线方程为 $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad(a>0,b>0)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}, \\ -\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{9}{a^2}=1,\end{cases}$ 解得 $a^2=\dfrac{27}{4}$,$b^2=3$。

, 所求双曲线方程为 $-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{\frac{27}{4}}=1$。

解法二 设所求双曲线方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=\lambda$ ($\lambda\neq0$)

双曲线过点(-1,3),

$$, \quad \frac{1}{4}-1=\lambda,$$

$$\lambda=-\frac{3}{4},$$

, 所求双曲线方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-\dfrac{3}{4}$,即 $-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{\frac{27}{4}}=1$。

分析 在解法一中,待定未知数量为 a、b,并且根据双曲线的渐近线方程和双曲线过点(-1,3)给出了关于 a、b 的方程组,并分两种情形讨论。

在解法二中,待定未知量为 λ,并且根据双曲线过点(-1,3)给出了关于 λ 的方程,这个方程称作与双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 有共同渐进线的双曲线方程。

例 2 已知中心在原点,焦点在坐标轴上的椭圆与直线 $x+y=1$ 的交点为 A、B,且 $|AB|=2\sqrt{2}$,AB 的中点 C 与椭圆中心的连线的斜率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,求椭圆的方程。

分析 题设中没有告知椭圆的焦点确定在哪一条坐标轴上,为避免讨论两种情况,可设椭圆的方程为 $mx^2+ny^2=1$($m>0$,$n>0$),其中 m、n 为待定未知量。

解法一 设所求椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1$($m>0$,$n>0$)。

由方程组$\begin{cases} x+y=1, \\ mx^2+ny^2=1, \end{cases}$消去 y 整理可得

$$(m+n)x^2-2nx+(n-1)=0。$$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $$x_1+x_2=\frac{2n}{m+n}, x_1x_2=\frac{n-1}{m+n}。$$

, $$x_c=\frac{n}{m+n},$$

$$y_c=1-x_c=1-\frac{n}{m+n}=\frac{m}{m+n}。$$

$$k_{oc}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

, $$\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

$$|AB|=2\sqrt{2},$$

, $$\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2n}{m+n}\right)^2-4\cdot\frac{n-1}{m+n}}=2\sqrt{2},$$

$$\frac{\sqrt{m+n-mn}}{m+n}=1,$$

, $$\begin{cases} \dfrac{m}{n}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \dfrac{\sqrt{m+n-mn}}{m+n}=1, \end{cases}$$

解得 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{\sqrt{2}}{3}$。

所求椭圆方程为$\frac{1}{3}x^2+\frac{\sqrt{2}}{3}y^2=1$。

解法二　设所求椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1$ $(m>0,n>0)$。

直线 OC 的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

,　　直线 OC 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$。

由方程组 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2}x, \\ x+y=1, \end{cases}$ 解得 $x=2-\sqrt{2}, y=\sqrt{2}-1$

,　　$c(2-\sqrt{2},\sqrt{2}-1)$。

点 C 为线段 AB 的中点(见图 10 - 11),

$$|AB|=2\sqrt{2},$$

, $$\begin{cases} x_c - x_A = 1, \\ y_c - y_A = -1。 \end{cases} \quad \begin{cases} x_c - x_B = -1, \\ y_c - y_B = 1。 \end{cases}$$

, $$\begin{cases} x_A = 1-\sqrt{2}, \\ y_A = \sqrt{2}。 \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = 3-\sqrt{2}, \\ y_B = \sqrt{2}-2。 \end{cases}$$

$$A(1-\sqrt{2},\sqrt{2}), B(3-\sqrt{2},\sqrt{2}-2)。$$

, $$\begin{cases} (1-\sqrt{2})^2 m + (\sqrt{2})^2 n = 1, \\ (3-\sqrt{2})^2 m + (\sqrt{2}-2)^2 n = 1, \end{cases}$$

解得 $m=\frac{1}{3}, n=\frac{\sqrt{2}}{3}$。

,　　所求椭圆方程为 $\frac{1}{3}x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}y^2=1$。

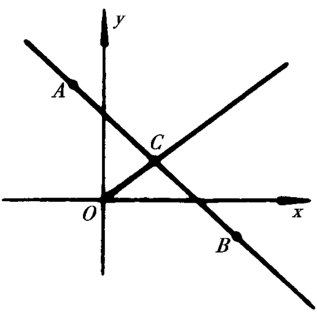


图 10 - 11

说明 在解法一中，把题设中的几何条件：(1) $|AB|=2\sqrt{2}$，(2)直线 OC 的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$分别转换成关于待定未知量 m、n 的两个方程组成的方程组，解方程组得 m、n 的取值。

在解法二中，求得椭圆上两点 A、B 的坐标，并代入待定椭圆方程得关于待定未知量 m、n 的两个方程组成的方程组，解方程组得 m、n 的取值。

例 3 双曲线的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，过双曲线的右焦点且斜率为$\sqrt{\frac{3}{5}}$的直线交双曲线于 P、Q，若 $OP\perp OQ$，$|PQ|=4$，求双曲线的方程。

分析 按题设所求双曲线方程可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$，其中 a、b 为待定未知量。题设中的几何条件 $OP\perp OQ$，$|PQ|=4$ 可分别转换成关于待定未知量 a、b 的两个方程，组成方程组并解方程组即可求得待定未知量 a、b 的值。

解 设所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$。

由题设可知，直线 PQ 的方程为 $y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-3)$ $(c=\sqrt{a^2+b^2})$，

由方程组$\begin{cases} y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c), \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$，消去 y 整理可得

$$(5b^2-3a^2)x^2+6a^2cx-(3a^2c^2+5a^2b^2)=0。$$

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则以 PQ 为直径的圆方程为$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$。

原点 O 在圆上，

，$$x_1x_2+y_1y_2=0。$$

$$y_1=\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c),y_2=\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c),$$

，$$x_1x_2+\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)=0,$$

$$x_1x_2+\frac{3}{5}(x_1-c)(x_2-c)=0,$$

即 $$5x_1x_2+3(x_1-c)(x_2-c)=0,$$

，$$8x_1x_2-3c(x_1+x_2)+3c^2=0。$$

$$x_1+x_2=\frac{6a^2c}{3a^2-5b^2},x_1x_2=\frac{3a^2c^2+5a^2b^2}{3a^2-5b^2},$$

，$$8\cdot\frac{3a^2c^2+5a^2b^2}{3a^2-5b^2}-3c\frac{6a^2c}{3a^2-5b^2}+3c^2=0,$$

$$8[3a^2(a^2+b^2)+5a^2b^2]-18a^2(a^2+b^2)+$$
$$3(a^2+b^2)(3a^2-5b^2)=0,$$

，$$3a^4+8a^2b^2-3b^4=0,$$

$$(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0。$$

$$a^2+3b^2\neq 0,$$

，$3a^2-b^2=0$，即 $b^2=3a^2$，

，$$c=2a。$$

又 $$|PQ|=4,$$

$$\sqrt{\frac{8}{5}}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4,$$

$$\sqrt{\frac{8}{5}}\cdot\sqrt{\left(\frac{6a^2c}{3a^2-5b^2}\right)^2-4\frac{3a^2c^2+5a^2b^2}{3a^2-5b^2}}=4,$$

$$\sqrt{\frac{8}{5}}\cdot\sqrt{a^2+9a^2}=4,$$

，$$a^2=1,b^2=3,$$

，所求双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$。

例 4　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$ **的两个焦点为** F_1、F_2，**又** F_2 **是抛物线** $y^2=2px$ **的焦点，抛物线和椭圆交于** M、N **两点，如果** $\angle MF_1F_2=\beta$，$\angle MF_2F_1=\alpha$，**且** $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{7}$，**又知点** M **到椭圆的中心的距离为** $\frac{4\sqrt{7}}{3}$，**求椭圆和抛物线的方程。**

分析　题设中给出了待定椭圆和抛物线的三个几何条件：(1)椭圆与抛物线有同一个焦点 F_2；(2) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{7}$；(3) **点** M **到椭圆的中心的距离为** $\frac{4\sqrt{7}}{3}$。**我们必须将这三个几何条件中的等量关系转换成关于待定未知量** a、b、c、p **的方程组，解方程组即可得待定量** a、b、p **的值。**

解　如图 10 - 12 **所示，设抛物线和椭圆的交点** M **的坐标为** (x_0,y_0)。

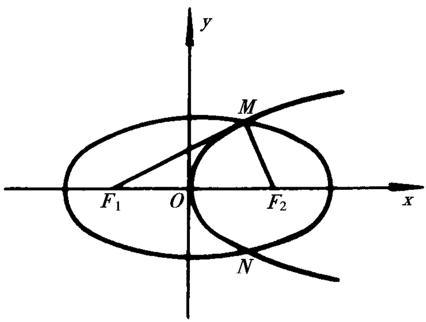


图 10 - 12

点 F_2 **是椭圆的右焦点，又是抛物线的焦点。**

由椭圆的定义和抛物线的定义可知，

$$c=\frac{p}{2}，\text{即}\quad p=2c。$$

$$|MF_1| = a + \frac{c}{a}x_0,$$

$$|MF_2| = a - \frac{c}{a}x_0, \quad |MF_2| = \frac{p}{2} + x_0,$$

, $$\frac{p}{2} + x_0 = a - \frac{c}{a}x_0,$$

$$c + x_0 = a - \frac{c}{a}x_0,$$

$$x_0 = \frac{a(a-c)}{a+c}。$$

$$\angle MF_2F_1 = \alpha, \angle MF_1F_2 = \beta, \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{7},$$

, $$\frac{c + x_0}{a + \frac{c}{a}x_0} \cdot \frac{c - x_0}{a - \frac{c}{a}x_0} = \frac{1}{7},$$

$$\frac{c + \frac{a(a-c)}{a+c}}{a + \frac{c}{a} \cdot \frac{a(a-c)}{a+c}} \cdot \frac{c - \frac{a(a-c)}{a+c}}{a - \frac{c}{a} \cdot \frac{a(a-c)}{a+c}} = \frac{1}{7},$$

$$\frac{c^2 + 2ac - a^2}{a^2 + 2ac - c^2} = \frac{1}{7},$$

, $$2c^2 + 3ac - 2a^2 = 0,$$

$$(2c - a)(c + 2a) = 0,$$

, $$a = 2c。$$

, $$x_0 = \frac{2c}{3},$$

$$y_0^2 = 2px_0 = 4c \cdot \frac{2c}{3} = \frac{8c^2}{3}。$$

$$|OM| = \frac{4\sqrt{7}}{3},$$

, $$\left(\frac{2c}{3}\right)^2 + \frac{8c^2}{3} = \left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2,$$

, $c=2$,

, $a=4, b^2=12, p=4$。

, **所求椭圆方程为**$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$**,抛物线方程为** $y^2=8x$。

说明　在解题过程中,从椭圆与抛物线有同一个焦点 F_2**,推出了两个结果;**(1) $c=\frac{p}{2}$**;**(2) $\frac{p}{2}+x_0=a-\frac{c}{a}x_0$**,从而解得点** M **的横坐标** $x_0=\frac{a(a-c)}{a+c}$**,这种求点** M **的横坐标** x_0 **的方法比下面用解由椭圆和抛物线的方程组成的方程组的方法简洁。**

由方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y^2=2px\end{cases}$**,消去** y **整理可得**

$$b^2x^2+2a^2px-a^2b^2=0。$$

$$p=2c, b^2=a^2-c^2,$$

, $$(a^2-c^2)x^2+4a^2cx-a^2(a^2-c^2)=0,$$

$$[(a+c)x-a(a-c)]\cdot$$
$$[(a-c)x+a(a+c)]=0,$$

, $$(a+c)x-a(a-c)=0,$$

, $$x=\frac{a(a-c)}{a+c}, \text{即 } x_0=\frac{a(a-c)}{a+c}$$

从解题过程还可知,解得 $x_0=\frac{a(a-c)}{a+c}$ **是将几何条件:** $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{7}$**,**$|OM|=\frac{4\sqrt{7}}{3}$**转换成关于** a、c **的等量关系式的基础,因此,解出** x_0 **是解题过程中的关键计算。**

例 5　(1) **已知双曲线的焦点到其相应准线的距离为**$\frac{9}{5}$**,实轴长是** 8**,求双曲线的标准方程。**

(2) **已知双曲线的对称轴为坐标轴,一条准线与一条渐进近线的交点是**$(\frac{16}{5},\frac{12}{5})$**,求双曲线的方程。**

(1)解法一　若双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$，

则由题设可知$\begin{cases}\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{9}{5},\\2a=8,\end{cases}$**解得** $a=4,b=3$，

,　**双曲线的方程为**$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$。

若双曲线的方程为 $-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\quad(a>0,b>0)$，

同理可得双曲线的方程为 $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$。

综上所述,所求双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ **或** $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$。

解法二　设双曲线实半轴长、虚半轴长、焦半径长分别为 a、b、c，

由题意$\begin{cases}p=\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{9}{5},\\2a=8。\end{cases}$**由** $a^2+b^2=c^2$

,　$\begin{cases}a=4,\\b=3。\end{cases}$

,　**所求双曲线**$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ **或**$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$。

(2)解　若双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$，

则由一条准线与一条渐近线的交点$\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{12}{5}\right)$**可知**$\begin{cases}\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{16}{5},\\\dfrac{b}{a}=\dfrac{\frac{12}{5}}{\frac{16}{5}}。\end{cases}$

解得 $a=4,b=3$，

,　**所求双曲线方程为**$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$。

若双曲线方程为 $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$,

则由一条准线与一条渐近线的交点是 $\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$,可知

$$\begin{cases}\frac{a^2}{c}=\frac{12}{5}, \\ \frac{a}{b}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{16}{5}}。\end{cases}$$

解得 $a=4, b=\frac{16}{3}$,

, 所求双曲线方程为 $-\frac{x^2}{\frac{256}{9}}+\frac{y^2}{16}=1$。

综上所述,所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 或 $-\frac{x^2}{\frac{256}{9}}+\frac{y^2}{16}=1$。

分析 由例 5 的两小题的结果可知,所得二次曲线的方程的待定未知量的取值不唯一,即在题设条件下所求二次曲线的方程可以不唯一。

练 习 题

1. 已知椭圆的中心在原点 O,一条准线的方程是 $x=1$,过椭圆的左焦点 F 且倾斜角为 45°的直线 l 交椭圆于 A、B 两点,M 为线段 AB 的中点,直线 AB 与 OM 的夹角 θ 满足 $\tan\theta=2$,求椭圆的方程。

2. 设直线 l ∶5x - 7y - 1 = 0 交以坐标轴为对称轴的双曲线 C 于 A、B 两点,若定点 P(5,14)与 A、B 构成都市以 AB 为斜边的等腰直角三角形,求双曲线 C 的方程。

3. 已知抛物线的顶点为原点,对称轴为 x 轴,开口向右,焦点是斜边长等于 6 的等腰直角三角形的直角顶点,求过这个三角形

的另外两个顶点的抛物线的方程。

4. **双曲线**$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **的右焦点** F**,一条渐近线** l **的方程为** $y=\frac{b}{a}x$**,**l **与右准线交于点** A**,直线** FA **与左准线交于** B**,与双曲线的另一支交于** D**,若** B **为** AD **的中点,右焦点到右准线的距离为**$\frac{2\sqrt{5}}{5}$**,求双曲线的方程。**

四、二次曲线中的几何元素特性问题

在直角坐标平面内,几何元素(量)在运动中变化,它们在运动变化中互相联系、互相制约。在它们的运动变化中还存在着“不变”,即运动中的某一几何元素具有不变的位置特性,或运动中的几何元素间具有不变的相对位置关系,或运动中的几何元素具有不变的数量特性。

几何元素在运动中的不变的位置特性相应表现为坐标或方程的性质。这时,用动态元素相应的变量建立该元素的坐标或方程,并讨论坐标或方程的性质,就能探寻该几何元素在运动中的不变特性。

几何元素在运动中不变的位置关系或数量关系相应表现为其特征量的性质。这时,用动态元素相应的变量表示特征量,就能探寻几何元素在运动中不变的位置关系或数量关系。

例 1　**已知椭圆**$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ **上三点** $A(x_1,y_1)$,$B(4,y_2)$,$C(x_3,y_3)$**与焦点** $F(4,0)$**的距离依次成等差数列,点** D **为线段** AC **的中点,求证:**

(1)直线 $BD//y$ 轴;

(2)线段 AC 的垂直平分线过定点。

分析 (1)按题设,点 A、点 C 在椭圆上运动变化,因而线段 AC 的中点 D 也是运动变化的。要证明直线 $BD//y$ 轴,就必须证明点 B、点 D 有相同的横坐标,即必须证明点 D 在运动变化中保持横坐标为 4 的特性,因为 $x_D=\frac{x_1+x_3}{2}$,所以必须证明 $x_1+x_3=8$。

(2)线段 AC 的垂直平分线是随着线段 AC 的运动变化而变化,因而线段 AC 的垂直平分线的方程必须用动点 A、C 相应的动坐标 (x_1,y_1),(x_3,y_3) 表示,求得方程,分析方程的性质就能得知线段 AC 的垂直平分线过定点。

证明:(1) $A(x_1,y_1)$,$B(4,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,

, 由椭圆的第二定义可知,$|AF|=a-ex_1$,$|BF|=a-ex_2$,$|CF|=a-ex_3$。

$|AF|$,$|BF|$,$|CF|$ 成等差数列,即 $a-ex_1$,$a-ex_2$,$a-ex_3$ 成等差数列。

, $(a-ex_1)+(a-ex_3)=2(a-ex_2)$,

, $x_1+x_3=2x_2$,

, x_1,4,x_3 也成等差数列,

, $x_1+x_3=8$。

点 D 为线段 AC 的中点,

, 点 D 的横坐标 $x_D=\frac{x_1+x_3}{2}=4$,由点 B 的横坐标为 4 可知,直线 $BD//y$ 轴。

(2)由(1)可知,点 D 的坐标为 $\left(4,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,由线段 AC 的斜率为 $\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$ 知,线段 AC 的垂直平分线的斜率为 $-\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}$。

, 线段 AC 的垂直平分线的方程为 $y=-\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}(x-4)+$

$\frac{y_1+y_2}{2}$。

点 $A(x_1,y_1)$，点 $C(x_3,y_3)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上，

， $$\begin{cases} 9x_1^2+25y_1^2=225, \\ 9x_3^2+25y_3^2=225。\end{cases}$$

两式相减可得　$9(x_1^2-x_3^2)+25(y_1^2-y_3^2)=0$，

，　$9(x_1-x_3)(x_1+x_3)+25(y_1-y_3)(y_1+y_3)=0$。

$$x_1+x_3=8,$$

， $$-\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}=\frac{25}{72}(y_1+y_3),$$

，　线段 AC 的垂直平分线的方程为

$$y=\frac{25}{72}(y_1+y_2)(x-4)+\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$=\frac{25(y_1+y_2)}{72}\cdot\left(x-\frac{64}{25}\right)。$$

显见 $x=\frac{64}{25}$ 时，$y=0$，

，　线段 AC 的垂直平分线过定点。

说明　由题(2)的解题过程可知，给出线段 AC 的垂直平分线的方程

$$y=-\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}(x-4)+\frac{y_1+y_3}{2}$$

后，必须将其消元化简为

$$y=\frac{25(y_1+y_2)}{72}\cdot\left(x-\frac{64}{25}\right)$$

我们才能观察、分析得知其经过的定点坐标。

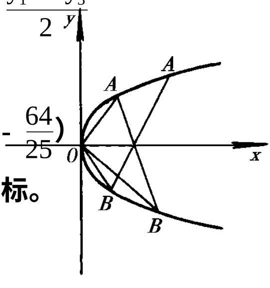


图 10 - 13

例 2　设 A、B 是抛物线 $y^2=2px$ 上的点，且满足 $\angle AOB=90°$（O 为坐标原点）。

求证：直线 AB 过定点，并求此定

点。

分析 点 A、B 是抛物线 $y^2=2px$ 上的动点，因此，直线 AB 的方程可以用直线 AB 的斜率或点 A、B 的动坐标表示。由 $\angle AOB=90°$ 可知，点 A、B 在运动中互相联系，互相制约，因而它们的坐标之间也存在着制约关系，利用制约关系化简直线 AB 的方程即可观察、分析方程的性质（见图 10 - 13）。

为配合分析方程的性质，求知动直线 AB 所经过的定点，我们可以给出直线 AB 在运动中的特殊位置相应的直线，并求出它们的交点，从而使对动态直线方程的观察、分析有明确的目标。

取 OA、OB 的方程分别为

$$y=\sqrt{3}x,\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

分别得 $A\left(\frac{2p}{3},\frac{2\sqrt{3}p}{3}\right)$，$B(6p,-2\sqrt{3}p)$，

这时，直线 AB 的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-6p)-2\sqrt{3}p。$$

取 OA、OB 的方程分别为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\quad y=-\sqrt{3}x,$$

分别得 $A(6p,2\sqrt{3}p)$，$B\left(\frac{2p}{3},-\frac{2\sqrt{3}p}{3}\right)$，

这时，直线 AB 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-6p)+2\sqrt{3}p,$$

解方程组 $\begin{cases} y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-6p)-2\sqrt{3}p, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-6p)+2\sqrt{3}p。\end{cases}$

解得 $x=2p$，$y=0$，

因此，可以估计，运动的直线 AB 所经过的定点必为 x 轴上的定点$(2p,0)$。

证法一　由题设可知，直线 OA、OB 的斜率都存在且都不为零。

设直线 OA 的斜率为 K，则直线 OB 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$，

,　**直线 OA、OB 的方程分别为** $y=kx$，$y=-\dfrac{1}{k}x$，

解方程组 $\begin{cases} y=kx, \\ y^2=2px, \end{cases}$

得　$x=\dfrac{2p}{k^2}$，$y=\dfrac{2p}{k}$，

,　$A\left(\dfrac{2p}{k^2},\dfrac{2p}{k}\right)$。

同理可得 $B(2pk^2,-2pk)$。

若 $k\neq\pm1$，**则直线 AB 的斜率为** $\dfrac{k}{1-k^2}$，

,　**直线 AB 的方程为**

$$y=\frac{k}{1-k^2}(x-2pk^2)-2pk=\frac{k}{1-k^2}(x-2p)。$$

令 $x=2p$，**则** $y=0$，

,　**直线 AB 过定点**$(2p,0)$。

若 $k=\pm1$，**则直线 AB 的方程为** $x=2p$，

,　**这时直线 AB 也过定点**$(2p,0)$。

综上所述，直线 AB 过定点，定点为$(2p,0)$。

证法二　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ **则** $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$。

若 $x_1=x_2$，**则直线 AB 的方程为** $x=x_1$，

由方程组 $\begin{cases} x=x_1, \\ y^2=2px, \end{cases}$

得　$y=\pm\sqrt{2px_1}$。

$$\angle AOB = 90°, x_1 = \sqrt{2px_1},$$

, $$x_1 = 2p,$$

, 　直线 AB 的方程为 $x = 2p$。

若 $x_1 \neq x_2$,则直线 AB 的方程为 $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) + y_1$,

以线段 AB 为直径的圆方程为

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0,$$

$$\angle AOB = 90°,$$

, 　原点 O 在以线段 AB 为直径的圆上,

, $$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0。$$

由 $y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2$ 知,$y_1^2 y_2^2 = 4p^2 x_1 x_2$,

, $$y_1 y_2 = -4p^2,$$

由 $y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2$ 知,$y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2)$

, $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2},$$

, 　直线 AB 的方程为

$$y = \frac{2p}{y_1 + y_2}(x - x_1) + y_1,$$

即 $$(y_1 + y_2)y = 2px - 2px_1 + y_1^2 + y_1 y_2,$$

, $$(y_1 + y_2)y = 2px + y_1 y_2 + (y_1^2 - 2px_1),$$

$$(y_1 + y_2)y = 2px - 4p^2,$$

, 　直线 AB 过定点,定点为$(2p,0)$。

证法三　设 $A(2pt_1^2, 2pt_1), B(2pt_2^2, 2pt_2), (t_1, t_2 \neq 0)$。

若 $t_1 + t_2 = 0$,则直线 AB 的方程为 $x = 2pt_1^2$,

$$\angle AOB = 90°,$$

, $$|2pt_1^2| = |2pt_1|,$$

, $$|t_1| = 1,$$

, 　直线 AB 的方程为 $x = 2p$。

若 $t_1 + t_2 \neq 0$,则直线的斜率为$\frac{2pt_1 - 2pt_2}{2pt_1^2 - 2pt_2^2}$,即$\frac{1}{t_1 + t_2}$,

, 直线 AB 的方程为

$$y = \frac{1}{t_1 + t_2}(x - 2pt_1^2) + 2pt_1。$$

$$\angle AOB = 90°,$$

, $$2pt_1^2 \cdot 2pt_2^2 + 2pt_1 \cdot 2pt_2 = 0,$$

, $$t_1 t_2 = -1,$$

, 直线 AB 的方程为

$$(t_1 + t_2)y = x - 2pt_1^2 + 2pt_1(t_1 + t_2),$$

即 $$(t_1 + t_2)y = x + 2pt_1 t_2,$$

$$(t_1 + t_2)y = x - 2p。$$

令 $x = 2p$,则 $y = 0$,

, 直线 AB 过定点,定点为$(2p,0)$。

说明 在证法一中,以动直线 OA 的斜率 k 给出直线 AB 的动态方程 $y = \frac{k}{1-k^2}(x - 2pk^2) - 2pk$,并化简为 $y = \frac{k}{1-k^2}(x - 2p)$,从而观察、分析这个方程知直线 AB 过定点$(2p,0)$。

在证法二中,以动点 A、B 的坐标(x_1,y_1),(x_2,y_2)给出直线 AB 的动态方程 $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - x_2) + y_1$,由点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$在抛物线 $y^2 = 2px$ 上,$\angle AOB = 90°$得坐标间的等量关系式:$y_1 y_2 = -4p^2$,$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$,利用这些等量关系式将直线 AB 的动态方程化简为 $y = \frac{2p}{y_1 + y_2}(x - 2p)$,从而观察、分析这个方程知直线 AB 过定点$(2p,0)$。

在证法三中,以动点 A、B 的坐标$(2pt_1^2,2pt_1)$,$(2pt_2^2,2pt_2)$,给出直线 AB 的动态方程 $y = \frac{1}{t_1 + t_2}(x - 2pt_1^2) + 2pt_1$,由$\angle AOB = 90°$得坐标间的等量关系式:$t_1 t_2 = -1$,利用这一等量关系式将直线 AB 的动态方程化简为 $y = \frac{1}{t_1 + t_2}(x - 2p)$,从而观察、分析这个方

程知直线 AB 过定点$(2p,0)$。

例 3 如图 10 - 14 所示,已知 PQ 为过抛物线的焦点的一条弦,过点 P 及顶点 O 的弦所在直线交准线 l 于 M,求证:直线 MQ 与抛物线的轴平行。

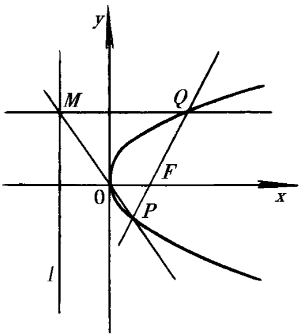


图 10 - 14

分析 弦 PQ 为过抛物线的焦点的动弦,在直角坐标平面内相关的几何元素都可以用动弦的斜率或动弦的端点 P、Q 的动坐标表示,即点 M、点 Q 的坐标可以用动弦的斜率或动弦的端点坐标表示。

因为 PQ 为过抛物线的焦点的动弦,因而弦 PQ 的端点间存在着制约关系,利用制约关系可以揭示动点 M、Q 的动态坐标的性质,从而得知直线 MQ 与抛物线的轴平行。

证法一 设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$。

若直线 PQ 的斜率不存在,则直线 PQ 的方程为 $x=\frac{p}{2}$,

由方程组$\begin{cases} x=\frac{p}{2}, \\ y^2=2px, \end{cases}$

得 $x=\frac{p}{2}$,$y=\pm p$。

不妨设 $P(\frac{p}{2},p)$，$Q(\frac{p}{2},-p)$，

，　直线 OP 的方程为 $y=2x$，

由方程组 $\begin{cases} x=-\frac{p}{2}, \\ y=2x, \end{cases}$

得　$x=-\frac{p}{2}$，$y=-p$，

$$M(-\frac{p}{2},-p)。$$

，　直线 MQ 与抛物线的轴平行。

若直线 PQ 的斜率存在，设为 k，则直线 PQ 的方程为

$$y=k(x-\frac{p}{2}),(k\neq 0)$$

由方程组 $\begin{cases} y=k(x-\frac{p}{2}), \\ y^2=2px, \end{cases}$

得　$k^2x^2-p(k^2+2)x+\frac{k^2p^2}{4}=0$，

，　$$x=\frac{p(k^2+2)\pm 2\sqrt{1+k^2}p}{2k^2}$$

$$=\frac{k^2+2\pm 2\sqrt{1+k^2}}{2k^2}p,$$

，　$$y=k(\frac{k^2+2\pm 2\sqrt{1+k^2}}{2k^2}p-\frac{p}{2})$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{1+k^2}}{k}p。$$

不妨设 $P(\frac{k^2+2+2\sqrt{1+k^2}}{2k^2}p,\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}p)$，$Q(\frac{k^2+2-2\sqrt{1+k^2}}{2k^2}p,\frac{1-\sqrt{1+k^2}}{k}p)$，

, 直线 OP 的方程为

$$y=\frac{2k(1+\sqrt{1+k^2})}{k^2+2+2\sqrt{1+k^2}}x。$$

令 $$x=-\frac{p}{2},$$

则 $$y_M=\frac{2k(1+\sqrt{1+k^2})}{k^2+2+2\sqrt{1+k^2}}\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)$$

$$=\frac{-k(1+\sqrt{1+k^2})}{(1+\sqrt{1+k^2})^2}p$$

$$=-\frac{k}{1+\sqrt{1+k^2}}p$$

$$=\frac{1-\sqrt{1+k^2}}{k}p。$$

显然 $$y_M=y_Q,$$

, 直线 MQ 与抛物线的轴平行。

证法二　设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由证法一中的方程 $k^2x^2-p(k^2+2)x+\frac{k^2p^2}{4}=0$ 知,$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$。

$$y_1^2=2px_1,y_2^2=2px_2,$$

, $$(y_1y_2)^2=4p^2x_1x_2=p^4,$$

, $$y_1y_2=-p^2。$$

直线 OP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$,

, 直线 OP 的方程为 $y=\frac{2p}{y_1}x$,即 $y=-\frac{2y_2}{p}x$。

令 $x=-\frac{p}{2}$,

则 $y_M=-\frac{2y_2}{p}\left(-\frac{p}{2}\right)=y_2$,

, 直线 MQ 与抛物线的轴平行。

证法三 过 Q 作 x 轴的平行线交直线 PO 于 M′,

由$\begin{cases} y = y_2, \\ y = \dfrac{y_1}{x_1}x, \end{cases}$ 消去 y 得 $y_2 = \dfrac{y_1}{x_1}x$,

, $x = \dfrac{x_1 y_2}{y_1}$。

, $x_{M'} = \dfrac{x_1 y_2}{y_1} = \dfrac{y_1^2}{2p} \cdot \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{y_1 y_2}{2p} = \dfrac{-p^2}{2p} = -\dfrac{p}{2}$,

, M′在准线上,而直线 PO 与准线交点只有一个,

, M′与 M 重合。

M′Q 与 x 轴平行,

, 直线 MQ 与抛物线的轴平行。

证法四 设 $P(2pt_1^2, 2pt_1)$,$Q(2pt_2^2, 2pt_2)$,

$2pt_1 \cdot 2pt_2 = -p^2$,(由证法二可知)

, $t_1 t_2 = -\dfrac{1}{4}$,

, $P\left(\dfrac{2p}{16t_2^2}, -\dfrac{2p}{4t_2}\right)$,

, 直线 OP 的方程为 $y = -4t_2 x$。

令 $x = -\dfrac{p}{2}$,

则 $y_M = -4t_2 \cdot \left(-\dfrac{p}{2}\right) = 2pt_2$,

显见 $y_M = y_Q$,

, 直线 MQ 与抛物线的轴平行。

例 4 如图 10 - 15 所示,设点 M 是过抛物线的焦点 F 的弦 PQ 的中点,若过点 M 作 PQ 的垂线交抛物线的对称轴于 N,试证明:$|MN|^2 = |PF| \cdot |QF|$。

分析 这是一个运动中的线段长度等量关系证明问题。在等式中,线段 MN、PF、QF 的长度在运动中是变化的,它们可以用过焦点的动弦 PQ 的斜率或动弦 PQ 的端点坐标表示。

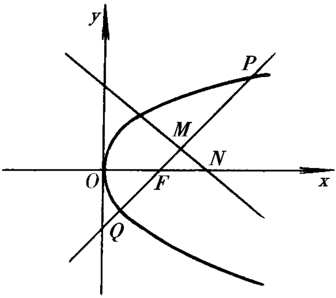


图 10 - 15

证法一 **设抛物线方程为** $y^2=2px,(p>0)$

由题设可知,PQ **的斜率存在且不为零**,**设为** k,**则直线** PQ **的方程为** $y=k(x-\frac{p}{2})$。

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

由方程组 $\begin{cases} y=k(x-\frac{p}{2}), \\ y^2=2px, \end{cases}$

得
$$k^2x^2-p(k^2+2)x+\frac{k^2p^2}{4}=0,$$

,
$$x_1+x_2=\frac{k^2+2}{k^2}p, x_1x_2=\frac{p^2}{4}。$$

由抛物线的定义可知 $|PF|=x_1+\frac{p}{2},|QF|=x_2+\frac{p}{2}$,

,
$$\begin{aligned} &|PF|\cdot|QF| \\ &=(x_1+\frac{p}{2})(x_2+\frac{p}{2}) \\ &=x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4} \\ &=\frac{p^2}{2}+\frac{p}{2}\cdot\frac{k^2+2}{k^2}p \end{aligned}$$

$$=\frac{k^2+1}{k^2}p^2。$$

由平几知识知，$|FM|=\frac{\|PF|-|QF\|}{2}$**，**

，$$|MN|^2=|FM|^2\cdot|k|^2$$

$$=\left(\frac{\|PF|-|QF\|}{2}|k|\right)^2$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^2}{4}k^2$$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{4}k^2$$

$$=\frac{\left(\frac{k^2+2}{k^2}p\right)^2-p^2}{4}k^2$$

$$=\frac{(k^2+2)^2-k^4}{4k^2}p^2$$

$$=\frac{k^2+1}{k^2}p^2，$$

，$$|MN|^2=|PF|\cdot|QF|。$$

证法二　设抛物线方程为 $y^{=}2px(p>0)$

设 $P(x_1,y_1)$**，**$Q(x_2,y_2)$

则由抛物线的定义可知，$|PF|=x_1+\frac{p}{2}$**，**$|QF|=x_2+\frac{p}{2}$**，**

$$|PF|\cdot|QF|=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)$$

$$=x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4}。$$

由 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$**知，**$|PF|\cdot|QF|=\frac{p^2}{2}+\frac{p}{2}(x_1+x_2)$**，**

由平几知识知，$|FM|=\frac{\|PF|-|QF\|}{2}$**，**

，$$|MN|^2=|FM|^2\cdot|k|^2$$

$$= \left(\frac{\|PF| - |QF\|}{2}|k|^2\right)^2$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)^2}{4}k^2$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} \cdot \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2$$

$$= \frac{(y_1 - y_2)^2}{4}$$

$$= \frac{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2}{4},$$

由 $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$, $y_1y_2 = -p^2$ 知,

$$|MN|^2 = \frac{2px_1 + 2px_2 + 2p^2}{4} = \frac{p^2}{2} + \frac{p}{2}(x_1 + x_2),$$

, $$|MN|^2 = |PF| \cdot |QF|。$$

练 习 题

1. 在双曲线 $-\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的一支上的三点 $A(x_1, y_1)$、$B(\sqrt{26}, 6)$、$C(x_3, y_3)$ 与焦点 $F(0, 5)$ 的距离成等差数列,点 D 为线段 AC 的中点,求证:

(1) 直线 $BD /\!/ x$ 轴;

(2) 线段 AC 的垂直平分线经过一定点。

2. 点 P 为椭圆上一定点,过点 P 作椭圆的四条弦 PA、PB、PC、PD,这四条弦所在直线与长轴依次交于点 A'、B'、C'、D',若 $|PA'| = |PD'|$, $|PB'| = |PC'|$,求证:$AD /\!/ BC$。

3. 已知 A 为抛物线 $y^2 = 2px$ 上的一点,BC 是垂直于 x 轴的一条弦,直线 AC 交抛物线的对称轴于 E 点,直线 AB 交抛物线的对称轴于 D 点,求证:抛物线的顶点平分线段 DE。

4. 一椭圆的中心为 O,点 P 为椭圆上一点,连接 OP,过长轴的一个端点 A 作直线平行于 OP 交椭圆于点 Q,交短轴所在直线

于 R**,求证:**$|AQ|\cdot|AR|=2|OP|^2$。

5. **已知直线** l **和双曲线** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$ **及其渐近线依次交于** A、B、C、D **四点。**

求证:$|AB|=|CD|$

6. **已知** F **是抛物线** $y^2=4ax(a>0)$ **的焦点,线段** AB **为过抛物线的焦点的弦,过弦** AB **的中点** M **作** x **轴的平行线交抛物线于点** P**,求证:**

(1) $|AB|=4|PF|$;

(2) $|AM|^2=4|PF|\cdot|PM|$。

五、二次曲线中的求值问题

(一)在直角坐标系中,几何元素之间互相联系、互相制约。若几何元素处于确定的状态之中,则这种定态可表现为已知量与未知量间的等量关系。如果把等量关系式看成未知量的方程(组),那么解这个方程(组)即可求得未知量的取值。

例 1　**已知直线** $y=x+b$ **与双曲线** $2x^2-y^2=2$ **相交于** A、B **两点,若以** AB **为直径的圆过原点,求** b **的值。**

分析　**设** A、B **两点的坐标分别为** (x_1,y_1),(x_2,y_2)**,则由几何条件"以** AB **为直径的圆过原点"可得等量关系** $x_1x_2+y_1y_2=0$**,转换成关于** b **的方程即可得** b **的取值**

解　**设** A、B **两点的坐标分别为** (x_1,y_1),(x_2,y_2)**,则以** AB **为直径的圆的方程为** $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$。

圆过原点,

,

$$x_1x_2+y_1y_2=0。$$

$$y_1=x_1+b,y_2=x_2+b,$$

，$$x_1x_2+(x_1+b)(x_2+b)=0,$$

即 $$2x_1x_2+b(x_1+x_2)+b^2=0。$$

由方程组 $\begin{cases} y=x+b, \\ 2x^2-y^2=2, \end{cases}$

可得 $2x^2-(x+b)^2=2$，

整理可得 $x^2-2bx-b^2-2=0$，

，$$x_1+x_2=2b, x_1x_2=-b^2-2,$$

，$$2(-b^2-2)+b\cdot 2b+b^2=0,$$

即 $$b^2-4=0,$$

，$$b=\pm 2。$$

经检验可知，$b=\pm 2$ 可取。

例 2 已知抛物线 $y^2=2x$，直线 l：$y=x-4$，是否存在矩形 ABCD，它的一条对角线 AC 在直线 l 上，顶点 B、D 在抛物线上，且 AC 与 BD 的夹角等于 arctan3？若存在，求出这个矩形的面积；若不存在，说明理由。

分析 由直线 AC 与 BD 的夹角为 arctan3，直线 AC 的斜率为 1，可求得直线 BD 的斜率为 -2 或 $-\frac{1}{2}$。由此，问题就转化为：是否存在斜率为 -2 或 $-\frac{1}{2}$ 且被抛物线截得的线段的中点恰在直线 l 上的直线？设直线在 y 轴上的截距为 b，则可得到关于 b 的方程。

解 设直线 BD 的斜率为 k。

直线 AC、BD 的夹角为 arctan3，直线 AC 的斜率为 1，

，$\left|\frac{k-1}{1+k}\right|=3$，

解得 $k=-2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$。

(1) 若 $k=-2$，则直线 BD 的方程为 $y=-2x+b$。

由方程组 $\begin{cases} y=-2x+b, \\ y^2=2x, \end{cases}$

可得 $(-2x+b)^2=2x$，

整理可得 $4x^2-2(2b+1)x+b^2=0$。

设 AC 与 BD 的交点为 M，

则 $$x_M=\frac{2b+1}{4},$$

$$y_M=-2\cdot\frac{2b+1}{4}+b=-\frac{1}{2},$$

, $$M\left(\frac{2b+1}{4},\frac{1}{2}\right)。$$

点 M 在直线 l 上。

, $$-\frac{1}{2}=\frac{2b+1}{4}-4,$$

$$b=\frac{13}{2}。$$

将 $b=\frac{13}{2}$ 代入方程 $4x^2-2(2b+1)x+b^2=0$，可得 $16x^2-112x+169=0$，

$$\Delta=112^2-4\cdot16\cdot169=64\cdot27>0。$$

, $$|BD|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(\frac{112}{16}\right)^2-4\cdot\frac{169}{16}}=\frac{3\sqrt{15}}{2},$$

, $$S_{\text{矩形}ABCD}=\frac{1}{2}|BD|^2\sin\angle AMB$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\times15}{4}\times\frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$=\frac{81\sqrt{10}}{16}。$$

(2) 若 $k=-\frac{1}{2}$，则直线 BD 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+b$。

由方程组 $$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+b,\\y^2=2x,\end{cases}$$

可得　$\left(-\frac{1}{2}x+b\right)^2=2x$，

整理可得　$x^2-4(b+2)x+4b^2=0$。

设 AC 与 BD 的交点为 M，

则 $M(2b+4,-2)$。

点 M 在直线 l 上，

, $-2=2b+4-4$，

, $b=-1$。

将 $b=-1$ 代入方程 $x^2-4(b+2)x+4b^2=0$，则 $\Delta=0$，

, 直线 BD 与抛物线只有一个公共点，

$k=-\frac{1}{2}$时，不存在满足题设的矩形。

综上所述，存在满足题设的矩形，且其面积为$\frac{81\sqrt{10}}{16}$。

例3　已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 相交，A、B 是它们在 x 轴上方的交点，若线段 AB 的中点 M 在直线 $y=x$ 上，求 p 的值。

分析　由题设可知，抛物线 $y^2=2px$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 的交点 A、B 为端点的线段的中点 M 的坐标可用未知量 p 表示，由点 M 在直线 $y=x$ 上可得关于 p 的方程，解这个方程即可得未知量 p 的值。

解　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$(y_1>0,y_2>0)$。

由方程组$\begin{cases}y^2=2px,\\(x-2)^2+y^2=3,\end{cases}$

可得$(x-2)^2+2px=3$，

整理可得　$x^2-(4-2p)x+1=0$，

, $x_1+x_2=4-2p$，$x_1x_2=1$。

设 $M(x_0,y_0)$，

则　$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2-p,$$

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2p}}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$$
$$=\frac{\sqrt{2p}}{2}\sqrt{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2})}$$
$$=\frac{\sqrt{2p}}{2}\sqrt{4-2p+2}$$
$$=\sqrt{p(3-p)}。$$

点 M **在直线** $y=x$ **上，**

$\sqrt{p(3-p)}=2-p$ **整理得** $2p^2-7p+4=0$，

, $p=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$，

经检验知，$p=\frac{7-\sqrt{17}}{4}$**符合要求。**

例 4 **如图** 10 - 16 **所示，已知正方形的一条边** AB **在直线** $y=x+4$ **上，顶点** C、D **在抛物线** $y^2=x$ **上，求正方形的边长。**

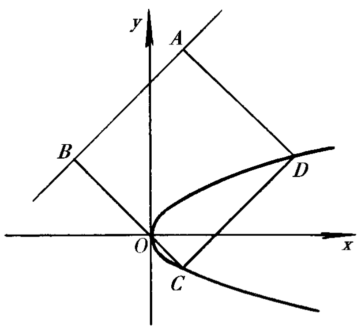


图 10 - 16

分析 **只要建立正方形的边长** d **的方程，即可求得正方形的边长。**

解 **设正方形的边长为** d。

AB 边所在的直线方程为 $y=x+4$，

, CD 边所在的直线方程为 $y=x+4-\sqrt{2}d$。

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

由方程组 $\begin{cases} y=x+4-\sqrt{2}d, \\ y^2=x, \end{cases}$

可得 $(x+4-\sqrt{2}d)^2=x$，

整理得 $x^2+(7-2\sqrt{2}d)x+(4-\sqrt{2}d)^2=0$，

, $x_1+x_2=2\sqrt{2}d-7$，$x_1x_2=(4-\sqrt{2}d)^2$。

, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2\sqrt{2}d-7)^2-4(4-\sqrt{2}d)^2}=d$，

整理得 $d^2-8\sqrt{2}d+30=0$，

$d=3\sqrt{2}$ 或 $d=5\sqrt{2}$，

, 正方形的边长为 $3\sqrt{2}$ 或 $5\sqrt{2}$。

例 5　如图 10 - 17 所示，已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A、B，在第一象限内取双曲线 $C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 P，线段 AP 交椭圆于点 C，PB 的延长线交椭圆于 D，且 C 平分 AP。

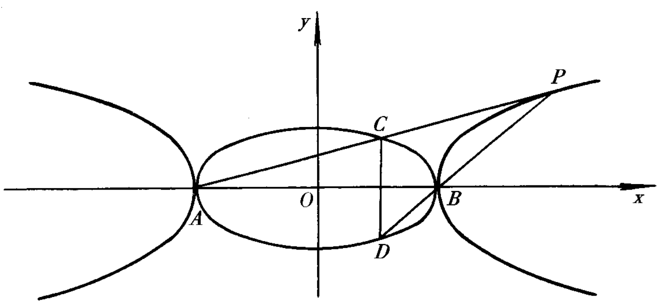


图 10 - 17

（1）求点 P 的坐标；

（2）求直线 PD 的斜率及直线 CD 的倾斜角；

（3）当双曲线 C_2 的离心率 e 为何值时，直线 CD 恰过椭圆 C_1 的右焦点。

分析　按题设，直角坐标平面内的点、直线、曲线（椭圆、双曲线）处于定态之中，因此，它们的坐标、方程都是确定的。

（1）设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则由点 C 为 PA 的中点可知 C $\left(\frac{x_0-a}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，再由点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，点 C 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上可得关于 x_0,y_0 的方程组，解这个方程组即可得点 P 的坐标。

（2）由点 P、点 D 的坐标可求得直线 PD 的斜率及方程，由点 D 为直线 PD 与椭圆的交点可得点 D 的坐标的方程组，解这个方程组即可得点 D 的坐标。由点 C、点 D 的坐标即可知直线 CD 的倾斜角。

（3）由直线 CD 过椭圆 C_2 的右焦点，可建立关于双曲线的参数 a、b、c 的等量关系式，转化成 e 的方程即可解得 e。

解（1）　设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则由点 C 为线段 AP 的中点可知 C 点的坐标为 $\left(\frac{x_0-a}{2},\frac{y_0}{2}\right)$。

点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，点 C 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，

，
$$\begin{cases} b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2, \\ b^2(x_0-a)^2+a^2y_0^2=4a^2b^2, \end{cases}$$

相加可得　$b^2x_0^2+b^2(x_0-a)^2=5a^2b^2$，

整理可得　$x_0^2-ax_0-2a^2=0$，

，　$x_0=2a$　或　$x_0=-a$（舍去）。

将 $x_0=2a$ 代入方程 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$，得 $y_0^2=3b^2$，

即　$y_0=\pm\sqrt{3}b$，

点 P 在第一象限，取 $y_0=\sqrt{3}b$，

, 点 P 的坐标为$(2a,\sqrt{3}b)$。

(2) B 点的坐标为$(a,0)$，

$$k_{PD}=k_{PB}=\frac{\sqrt{3}b}{a},$$

, 直线 PD 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}b}{a}(x-a)$。

点 D 为直线 PD 与椭圆的交点，

, 点 D 的坐标为方程组$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}b}{a}(x-a), \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2, \end{cases}$ 的解。

$$b^2x^2+a^2\cdot\frac{3b^2}{a^2}(x-a)^2=a^2b^2,$$

整理得 $2x^2-3ax+a^2=0$，

$$x_D=\frac{1}{2}a \text{ 或 } x_D=a\text{（舍去）},$$

$$x_C=\frac{x_0-a}{2}=\frac{a}{2},$$

, 直线 CD 与 x 轴垂直，

, 直线 CD 的倾斜角为 90°。

(3) 直线 CD 过椭圆 C_2 的焦点，$\frac{1}{2}a=\sqrt{a^2-b^2}$，

, $$3a^2=4b^2。$$

$$b^2=c^2-a^2,$$

, $$3a^2=4(c^2-a^2),$$

, $$7a^2=4c^2,$$

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，即双曲线 C_2 的离心率为$\frac{\sqrt{7}}{2}$。

从以上例子可知，在定态问题中，若要求与几何元素相关的未知定值，就必须有这样一种意识：首先按题设条件建立等量关系，

再将这等量关系式转换成相关未知定量的方程。

（二）在直角坐标平面内，几何元素之间在运动变化中互相联系、互相制约，并且动态的变化中常存在着“不变”。这种几何元素动态中的互相联系、互相制约可表现为变量间的互相联系、互相制约，相应地，动态中的“不变”则表现为某个未知量的不变，即定值。

1. 若由题设可得变量间的等量关系式，则可以把这个等量关系式转换成关于某个未知量的方程，解这个方程，即可得这个未知量的值。这种求定值的方法称作方程求值法。

2. 若由题设可以建立某个未知量关于若干个变量的函数关系式，及变量间的等量关系式，则可以用变量间的等量关系式对函数关系式进行消元，求得未知量的值，这种求定值的方法称作函数求值法。从操作的角度看，定值是消元的结果。

例 1 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ 的半焦距为 c，直线 l 过 $(a,0)$，$(0,b)$ 两点，已知原点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$，求双曲线的离心率。

分析 由题设“原点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$”可得双曲线的元素量 a、b、c 的关系等式，这个关系等式可以转换成关于离心率 e 的等式，将其看成关于 e 的方程，并解这个方程即可得 e 的取值。

解 直线 l 过 $(a,0)$，$(0,b)$ 两点，

, 直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即 $ax+by-ab=0$。

原点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$，$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$，即 $4ab=\sqrt{3}c^2$，

$$, \quad 16a^2(c^2-a^2)=3c^4,$$

$$3\left(\frac{c}{a}\right)^4-16\left(\frac{c}{a}\right)^2+16=0,$$

,
$$3e^4-16e^2+16=0,$$
$$(e^2-4)(3e^2-4)=0,$$
$$e^2=4\text{ 或 }e^2=\frac{4}{3},$$
$$e=2\text{ 或 }e=\frac{2\sqrt{3}}{3}。$$
$$b>a>0,$$
,
$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}>2,$$
,
$$\text{取 }e=2。$$

说明 在解题过程中,必须有建立等量关系式$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$转换成 e 的等式,并看成关于 e 的方程的意识。

例 2 如图 10-18 所示,在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$中,以 $F_1(-c,0)$为圆心,以 $a-c$ 为半径作圆 F_1,过点 $B_2(0,b)$作圆 F_1 的两条切线,切点为 M、N。若过两切点 M、N 的直线恰好过点 $B_1(0,-b)$时,求此椭圆的离心率。

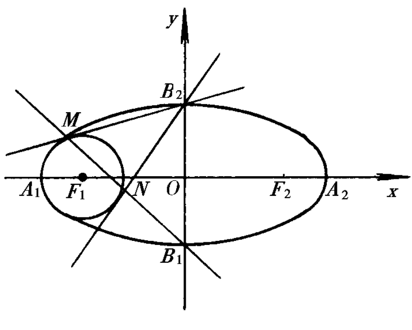


图 10-18

分析 由题设可知,直线 MN 是可以用 a、b、c 表示的,因而,由直线 MN 恰好过点 $B_1(0,-b)$可得 a、b、c 的关系等式,将这个

等式转换成关于 e 的等式,并看成关于 e 的方程,解这个方程即可得离心率 e 的取值。

解 由题设可知,圆 F_1 的方程为 $(x+c)^2+y^2=(a-c)^2$。

B_2M、B_2N 切圆 F_1 于点 M、N,

, 四点 B_2、M、F_1、N 共圆,且 B_2F_1 为圆的直径,

, 过点 B_2、M、F_1、N 四点的圆的方程为

$$\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2+c^2}{4}。$$

由以上两圆方程相减即可求得公共弦 MN 的方程为

$$cx+by+c^2-(a-c)^2=0$$

点 $B_1(0,-b)$ 在直线 MN 上,

,
$$-b^2+c^2-(a-c)^2=0,$$

$$2a^2-2ac-c^2=0,$$

,
$$\left(\frac{c}{a}\right)^2+2\frac{c}{a}-2=0,$$

$$e^2+2e-2=0,$$

$$e=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}。$$

$$0<e<1,$$

,
取 $e=\sqrt{3}-1$。

说明 在解题过程中,必须有寻找关于 a、b、c 的等式,并将这个等式转换成关于 e 的等式和看成关于 e 的方程的意识,有了这种意识,就有了解题的方法,解题操作也就有了目标。

例 3 过抛物线 $y^2=x$ 上一点 $A(4,2)$ 作倾斜角互补的两条直线 AB、AC 交抛物线于 B、C 两点,求直线 BC 的斜率。

分析 由题设可知,直线 AB、AC 在坐标平面内是运动变化的,它们的运动变化可以用 AB 的斜率 k 或用点 B、C 的坐标来量化,从而,直线 BC 的斜率可以用 AB 的斜率 k 或 B、C 两点的坐标来表示。设法让这些变量消去,即可得直线 BC 的斜率。

解法一 设直线 AB 的斜率为 k,则直线 AC 的斜率为 $-k$。

$A(4,2)$,

, 直线 AB 的方程 $y=k(x-4)+2$。

由方程组$\begin{cases} y=k(x-4)+2, \\ y^2=x, \end{cases}$

可得 $$[k(x-4)+2]^2=x,$$

整理可得 $k^2x^2-(8k^2-4k+1)x+(4k-2)^2=0$,

$$x_B+4=\frac{8k^2-4k+1}{k^2},$$

$$x_B=\frac{4k^2-4k+1}{k^2},$$

$$y_B=k\left(\frac{4k^2-4k+1}{k^2}-4\right)+2=\frac{1-2k}{k},$$

$$B\left(\frac{4k^2-4k+1}{k^2},\frac{1-2k}{k}\right)。$$

同理可得 $$C\left(\frac{4k^2+4k+1}{k^2},\frac{1+2k}{k}\right),$$

, 直线 BC 的斜率为$\dfrac{\dfrac{1-2k}{k}+\dfrac{1+2k}{k}}{\dfrac{4k^2-4k+1}{k^2}-\dfrac{4k^2+4k+1}{k^2}}=-\dfrac{1}{4}$。

解法二 设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

则直线 AB 的斜率为$\dfrac{y_1-2}{x_1-4}$,直线 AC 的斜率为$\dfrac{y_2-2}{x_2-4}$。

$y_1^2=x_1$,$y_2^2=x_2$,

, 直线 AB 的斜率为$\dfrac{y_1-2}{y_1^2-4}$,即$\dfrac{1}{y_1+2}$,直线 AC 的斜率为$\dfrac{y_2-2}{y_2^2-4}=\dfrac{1}{y_2+2}$,

直线 AB、AC 的倾斜角互补,

, $\dfrac{1}{y_1+2}+\dfrac{1}{y_2+2}=0$,

, $y_1+y_2=-4$。

, 直线 BC 的斜率为$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{y_1^2-y_2^2}=\frac{1}{y_1+y_2}=-\frac{1}{4}$。

解法三 设 $B(t_1^2,t_1)$,$C(t_2^2,t_2)$,

则直线 AB 的斜率为$\frac{t_1-2}{t_1^2-4}$,即$\frac{1}{t_1+2}$,直线 AC 的斜率为$\frac{t_2-2}{t_2^2-4}$,即$\frac{1}{t_2+2}$。

直线 AB、AC 的倾斜角互补,

, $$\frac{1}{t_1+2}+\frac{1}{t_2+2}=0,$$

$$t_1+t_2=-4,$$

, 直线 BC 的斜率为$\frac{t_1-t_2}{t_1^2-t_2^2}=\frac{1}{t_1+t_2}=-\frac{1}{4}$。

说明 在三种解法中,分别用直线 AB 的斜率 k 和点 B、C 的坐标建立了直线 BC 的斜率的函数,然后,用消元的方法求得了直线 BC 的斜率的值,因此,我们是用函数求值法求得了直线 BC 的斜率。

例 4 已知圆 C 过定点 $A(p,0)$,其中 $p>0$,圆心 C 在抛物线 $y^2=2px$ 上运动,MN 为圆 C 在 y 轴上所截得的弦,试问 $|MN|$ 是否随圆心 C 的运动而变化?证明你的结论。

分析 由题设可知,圆 C 在坐标平面内是变化的,其形状大小、位置可以用点 C 的坐标来量化。从而,线段 MN 的长度也可以用点 C 的坐标来表示。若线段 MN 的长度的函数表达式中变量消去,则线段 MN 的长度不随圆心 C 的运动而变化;若线段 MN 的长度的函数表达式中变量不消去,则线段 MN 的长度随圆心 C 的运动而变化。

解法一 设点 C 的坐标为(x_0,y_0),则 $y_0^2=2px_0$。

, 圆 C 的方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_0-p)^2+y_0^2$。

令 $x=0$,则 $y^2-2y_0y+2px_0-p^2=0$,

设 M、N 两点的坐标分别为$(0,y_1)$,$(0,y_2)$,则 $y_1+y_2=2y_0$,$y_1y_2=2px_0-p^2$,

, $|MN|^2=|y_1-y_2|^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$

$=4y_0^2-4(2px_0-p^2)$

$=4(y_0^2-2px_0)+4p^2$

$=4p^2$,

, $|MN|=2p$。

, 当 C 点在抛物线 $y^2=2px$ 上运动时,$|MN|$不变。

解法二　设点 C 的坐标为$(2pt^2,2pt)$,则由题设可知,圆 C 的方程为$(x-2pt^2)^2+(y-2pt)^2=(2pt^2-p)^2+(2pt)^2$。

令 $x=0$,则 $y^2-4pty+4p^2t^2-p^2=0$,

设 M、N 两点的坐标分别为$(0,y_1)$,$(0,y_2)$,则 $y_1+y_2=4pt$,$y_1y_2=4p^2t^2-p^2$,

, $|MN|^2=|y_1-y_2|^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$

$=(4pt)^2-4(4p^2t^2-p^2)=4p^2$,

, $|MN|=2p$。

, 当 C 点在抛物线 $y^2=2px$ 上运动时,$|MN|$不变。

说明　在两种解法中,分别用点 C 的不同坐标形式建立了线段$|MN|$的长度关于点 C 的坐标的函数。在解法一中,点 C 的坐标是二元形式,因此,在求值中用 $y_0^2=2px_0$ 进行消元而得定值;在解法二中,点 C 的坐标是一元形式,因此,在求值中自然消元而得定值。

例 5　如图 10 - 19 所示,抛物线 $y^2=4ax(a>0)$的焦点为 A,以 $B(a+4,0)$为圆心,$|AB|$为半径在 x 轴上方作半圆交抛物线于不同的两点 M、N,P 为线段 MN 的中点。

(1)求$|AM|+|AN|$的值;

(2)是否存在这样的 a,使$|AM|+|AN|=2|AP|$,并证明你的结论。

分析　抛物线 $y^2=4ax(a>0)$是变化的,它的变化可以用 a

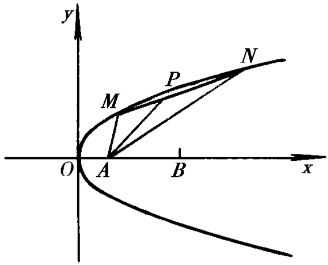


图 10 - 19

来量化，从而$|AM|+|AN|$可以用 a 来表示，若表达式与变量 a 无关，则$|AM|+|AN|$的值为定值。

解(1) 由题设可知，半圆 B 的方程为$[x-(a+4)]^2+y^2=16$，$(y>0)$

由方程组$\begin{cases} y^2=4ax, \\ [x-(a+4)]^2+y^2=16, \end{cases}$

可得 $[x-(a+4)]^2+4ax=16$，

整理可得 $x^2-(8-2a)x+a(a+8)=0$。

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=8-2a$。

由抛物线的定义可知$|AM|=a+x_1$，$|AN|=a+x_2$，

, $|AM|+|AN|=(a+x_1)+(a+x_2)$

$=2a+(x_1+x_2)$

$=2a+(8-2a)$

$=8$。

(2) 点 A 为抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点，

, 由题(1)可知，点 M、N 到准线的距离和为 8，

点 P 为线段 MN 的中点，

, 点 P 到准线的距离为 4。

$|AM|+|AN|=2|AP|$，

, $|AP|=4$。

∴ 点 P 在抛物线上,这就与点 P 不在抛物线上矛盾,

∴ 不存在 a,使 $|AM| + |AN| = 2|AP|$。

例 6 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上有两点 P、Q、O 是原点,若 OP、OQ 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$,求证:$|OP|^2 + |OQ|^2$ 为定值。

分析 由题设可知,点 P、Q 在椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 是运动变化的,但受到 OP、OQ 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$ 的制约。点 P、Q 的运动变化可以用 OP、OQ 的斜率来量化,也可以用点 P、点 Q 的坐标来量化,从而 $|OP|$、$|OQ|$ 的值也可以用 OP、OQ 的斜率来表示或用点 P、点 Q 的坐标来表示,若 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 的表达式的值为定值,则结论得证。

证法一 设 OP 的斜率为 k,则由题设可知,OQ 的斜率为 $-\frac{1}{4k}$,

由方程组 $\begin{cases} y = kx, \\ x^2 + 4y^2 = 16, \end{cases}$,

可得
$$x_P^2 = \frac{16}{1+4k^2}, y_P^2 = \frac{16k^2}{1+4k^2}。$$

由方程组 $\begin{cases} y = -\frac{1}{4k}x, \\ x^2 + 4y^2 = 16, \end{cases}$,

可得
$$x_Q^2 = \frac{64k^2}{1+k^2}, y_Q^2 = \frac{4}{1+4k^2}。$$

$$|QP|^2 + |OQ|^2 = \left(\frac{16}{1+4k^2} + \frac{16k^2}{1+4k^2}\right) + \left(\frac{64k^2}{1+4k^2} + \frac{4}{1+4k^2}\right) = \frac{20(1+4k^2)}{1+4k^2}$$

$$=20$$

为定值。

证法二　设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,**则** $x_1^2+4y_1^2=16$,$x_2^2+4y_2^2=16$。

OP、OQ **的斜率之积为** $-\frac{1}{4}$,

, $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{4}$,

, $x_1^2\cdot x_2^2-16y_1^2y_2^2=0$,

, $(16-4y_1^2)(16-4y_2^2)-16y_1^2y_2^2=0$,

$$(4-y_1^2)(4-y_2^2)-y_1^2y_2^2=0,$$

, $y_1^2+y_2^2=4$。

, $$\begin{aligned}|OP|^2+|OQ|^2&=(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)\\&=(16-3y_1^2)+(16-3y_2^2)\\&=32-3(y_1^2+y_2^2)\\&=32-12\\&=20\end{aligned}$$

为定值。

证法三　设 $P(4\cos\alpha,2\sin\alpha)$,$Q(4\cos\beta,2\sin\beta)$。

OP、OQ **的斜率之积为** $-\frac{1}{4}$,

, $\frac{2\sin\alpha}{4\cos\alpha}\cdot\frac{2\sin\beta}{4\cos\beta}=-\frac{1}{4}$,

, $\cos(\alpha-\beta)=0$,

$$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}+\beta。\quad \in Z$$

, $$\begin{aligned}|OP|^2+|OQ|^2&=(16\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha)\\&\quad+(16\cos^2\beta+4\sin^2\beta)\\&=8+12(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)\end{aligned}$$

$$= 8 + 12\left[\cos^2\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \beta\right) + \cos^2\beta\right]$$
$$= 8 + 12\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right)$$
$$= 8 + 12$$
$$= 20$$

为定值。

从以上的例我们可知，在动态问题中，若要求与动态中“不变”相应的未知定值，我们必须有这样两种意识：

(1)方程的意识，即首先建立动态中的变量间的等量关系，再将这等量关系式转换成未知定值的方程；

(2)函数的意识，即首先建立动态中的不变定值与相关变量的函数关系，再利用变量间的等量关系式对函数关系式进行消元。

练 习 题

1. 已知直线 $y = x - 1$ 和椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m-1} = 1\ (m > 1)$ 交于点 A、B，若以 AB 为直径的圆过椭圆的左焦点 F，求实数 m 的值。

2. 已知 F 是抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点，一条倾斜角为 $\pi/4$ 的弦 AB 的长为 $8\sqrt{5}$，求△FAB 的面积和 $\sin\angle AFB$ 的值。

3. 设抛物线 $y^2 = x$ 的弦 PQ 被直线 $l: x + y - 2 = 0$ 垂直平分，求△OPQ 的面积(O 为原点)。

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F，一条渐近线 l 的方程为 $y = \frac{b}{a}x$，l 与右准线交于点 A，直线 FA 与左准线交于点 B，与双曲线的左支交于点 C，若点 B 是线段 AC 的中点，求双曲线的离心率。

5. 已知直线 l 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 的焦点 F 与椭圆交于 A、B 两点，试证明：$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|}$ 为定值。

六、二次曲线中的变量取值范围问题

在平面直角坐标系中，平面几何元素（点、直线、曲线）在运动变化中互相联系、互相制约，可表现为相应变量的互相联系、互相制约，这种变量间的互相联系、互相制约的表现形式为变量间的等量关系式或不等量关系式。

这时，若将变量间的等量关系看成函数关系，则可以将等量关系式转换成函数解析式，然后用求函数值域的方法求变量的取值范围；若将等量关系式看成关于某个变量的方程，则可以利用方程根的性质求另一变量的取值范围；变量间的不等量关系式可以看成关于某个变量的不等式，而变量间的关系等式则可对其起消元作用，解这个不等式，即可得这个变量的取值范围。

这就是说，我们必须用函数的观点，方程的观点，不等式的观点去分析、看待变量间的等量关系式和不等量关系式，获得处理变量关系的方法。下面给出几类由变量关系式组求变量取值范围的方法：

不妨设 x、y 为两个变量。

（1）已知 $f(x,y)=0$，$x\in A$，求 y 的取值范围。

方法一　将变量关系式 $f(x,y)=0$ 转换成 y 关于 x 的函数解析式 $y=f(x)$，求函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 的值域，即可求得变量 y 的取值范围。

在这种方法中，是以函数的观点来处理变量关系式。

方法二　将变量关系等式 $f(x,y)=0$ 转换成 $x=f^{-1}(y)$，则由 $x\in A$ 可知 $f^{-1}(y)\in A$，从而可以得到关于变量 y 的不等式，解不等式即可求得变量 y 的取值范围。

在这种方法中，变量关系等式对不等式（$x\in A$ 一般可以转换

成关于 x 的不等式)起换元作用。

方法三　将变量关系等式 $f(x,y)=0$ 看成关于 x 的方程,由方程在 A 内有解求得变量 y 的取值范围。

这种方法中,是以方程的观点来处理变量间的关系等式。

(2)已知 $f(x,y)=0$,$g(x,y)\geqslant 0$,求变量 y 的取值范围。

方法一　将变量关系等式 $f(x,y)=0$ 转换成 y 关于 x 的函数解析式 $y=f(x)$,代入不等式 $g(x,y)\geqslant 0$ 可得关于 x 的不等式,解不等式即可得 x 的取值范围(不妨设 $x\in A$),然后,求函数 $y=f(x)$,$x\in A$ 的值域,即可求得变量 y 的取值范围。

在这种方法中,是以函数的观点来处理变量关系式组,等量关系式在其中起了两个作用:(1)被转换成函数解析式;(2)对变量关系不等式起消元作用。

方法二　将变量关系等式 $f(x,y)=0$ 转换成 $x=f^{-1}(y)$,代入变量关系不等式 $g(x,y)\geqslant 0$,可得关于 y 的不等式,解这个不等式,即可得变量 y 的取值范围。

在这种方法中,变量关系式 $f(x,y)=0$ 对变量关系不等式 $g(x,y)\geqslant 0$ 起了消元作用。

(3)已知 $f(x,y)\geqslant 0$,$x\in A$,求 y 的取值范围。

方法一　可以将变量关系不等式 $f(x,y)\geqslant 0$ 看成关于 x 在 A 上的恒不等式,由此求得变量 y 的取值范围。

方法二　可以将变量关系不等式 $f(x,y)\geqslant 0$ 转换 $y\geqslant f(x)$ 或 $y\leqslant f(x)$,前者只要求 $f(x)$ 在 A 上的最大值(设为 P),即可得变量 y 的取值范围($y\geqslant P$),后者只要求 $f(x)$ 在 A 上的最小值(设为 g),即可得变量 y 的取值范围($y\leqslant g$)。

在处理变量关系式组的过程中,只要能以函数的观点、方程的观点、不等式的观点等去分析、看待已获取的变量关系等式和变量关系不等式,就可以得到由变量关系式组求变量的取值范围的各种方法。

另外,必须注意到,以上给出的各类变量关系式组的各种处理方法,必须根据变量关系式的特点选择使用。

例 1　**如图 10 - 20 所示，若椭圆** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$ **上存在一点 P，使** $\angle OPA=90°$**，其中 O 为原点，A 为椭圆的右顶点，求椭圆的离心率的取值范围。**

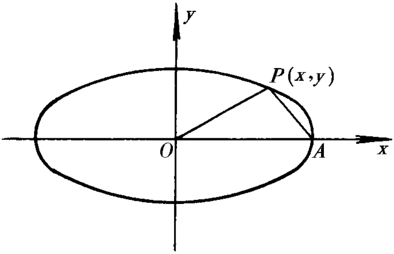


图 10 - 20

分析　**在直角坐标平面内，点 A、点 P 都是运动的，其中点 A 在 x 轴的正半轴上运动，点 P 在第一或第四象限内运动。点 A、点 P 的运动必须受到** $\triangle OPA$ **为直角三角形且** $\angle OPA=90°$ **的制约，并且点 P 要受到在椭圆** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **的制约，这两个制约关系都表现为 a、b、c 与点 P 的坐标(x,y)的等量关系，分别为** $x(x-a)+y^2=0$ **和** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**，又注意到点 P 的横坐标 x 受到** $0<x<a$ **的限制，从而得到一组 a、b、c 与点 P 的坐标(x,y)的等量关系式或不等量关系式。消去 x、y 即可得 a、b、c 的不等量关系式，转换成离心率 e 的不等式即可解得 e 的取值范围。**

解　**设点 P 的坐标为(x,y)，则** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

$\angle OPA=90°$，

,　**以 OA 为直径的圆经过点 P，**

,　$$x(x-a)+y^2=0。$$

又　$$0<x<a，$$

， $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x(x-a)+y^2=0, \\ 0<x<a。 \end{cases}$$

， $$\begin{cases} x(x-a)+\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=0, \\ 0<x<a。 \end{cases}$$

， $$\begin{cases} x=\dfrac{ab^2}{a^2-b^2}, \\ 0<x<a。 \end{cases}$$

， $$0<\frac{ab^2}{a^2-b^2}<a,$$

$$a^2>2b^2,$$

$$a^2>2(a^2-c^2),$$

， $$\frac{c^2}{a^2}>\frac{1}{2},$$

， $$\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{2}}{2}，即\ e>\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

$$0<e<1,$$

， $$\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1。$$

说明　在处理等量关系式和不等量关系式的过程中，等式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$起了消元作用，使等式 $x(x-a)+y^2=0$ 消去 y 化为 $x(x-a)+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=0$ 整理即得 $x=\frac{ab^2}{a^2-b^2}$，其又将 $0<x<a$ 化为关于 a、b、c 的不等式。

例 2　如图 10-21 所示，已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$，其长轴两端点分别是 A、B，若椭圆上存在点 Q，使$\angle AQB=120°$，求

椭圆的离心率 e **的变化范围。**

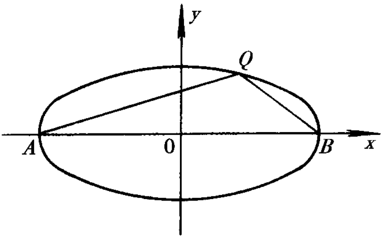


图 10 - 21

分析　在平面直角坐标系内，点 Q **是运动变化的，且点** Q **的运动必须受到两个条件的制约：**(1) **使** $\triangle AQB$ **中，** $\angle AQB=120°$；(2) **点** Q **在椭圆** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **上。这两个制约关系都表现为** a、b、c **与点** Q **的坐标**(x,y)**的等量关系，注意到** $0\leqslant x^2<a^2$，$0<y^2\leqslant b^2$，**我们同样可以得到** a、b、c **与点** Q **的坐标**(x,y)**的等量关系式和不等量关系式组，用例** 1 **的方法同样可以解得离心率** e **的取值范围。**

解法一　设点 Q **的坐标为**(x,y)，**则由点** A、B **为椭圆长轴的端点可知** $A(-a,0)$，$B(a,0)$，

, $$|AQ|^2=(x+a)^2+y^2,$$

$$|BQ|^2=(x-a)^2+y^2,\ |AB|=2a。$$

$$\angle AQB=120°,$$

, $$\cos\angle AQB=-\frac{1}{2},$$

, $$\frac{(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2-(2a)^2}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=-\frac{1}{2},$$

整理可得　$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2(a^2-x^2-y^2)$。

点 Q((x,y) **在椭圆上，**

, $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

, $$\sqrt{(x+a)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}$$

$$\cdot\sqrt{(x-a)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}$$

$$=2\left[a^2-x^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\right],$$

, $$(a+x)\left[(a+x)+\frac{b^2}{a^2}(a-x)\right]$$

$$\cdot(a-x)\left[(a-x)+\frac{b^2}{a^2}(a+x)\right]$$

$$=4\left[(a^2-x^2)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right]^2。$$

$0\leqslant x^2<a^2$,

, $a+x\neq 0$, $a-x\neq 0$,

, $[a^2(a+x)+b^2(a-x)]\cdot$

$[a^2(a-x)+b^2(a+x)]=4(a^2-x^2)(a^2-b^2)^2$,

$[a(a^2+b^2)+x(a^2-b^2)]\cdot$

$[a(a^2+b^2)-x(a^2-b^2)]=4(a^2-x^2)(a^2-b^2)^2$,

, $a^2(a^2+b^2)^2-x^2(a^2-b^2)^2$

$=4(a^2-x^2)(a^2-b^2)^2$,

$a^2(a^2+b^2)^2-x^2(a^2-b^2)^2$

$=4a^2(a^2-b^2)^2-4x^2(a^2-b^2)^2$,

, $3x^2(a^2-b^2)^2$

$=4a^2(a^2-b^2)^2-a^2(a^2+b^2)^2$。

$0\leqslant x^2<a^2$,

, $0\leqslant 4a^2(a^2-b^2)^2-a^2(a^2+b^2)^2<3a^2(a^2-b^2)^2$,

$0\leqslant 4(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2<3(a^2-b^2)^2$。

, $$\begin{cases}4(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2\geqslant 0,\\ 4(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2<3(a^2-b^2)^2。\end{cases}$$

，

$$\begin{cases}2(a^2-b^2)\geqslant a^2+b^2,\\ a^2-b^2<a^2+b^2。\end{cases}$$

$$a^2=b^2+c^2,$$

，

$$\begin{cases}2c^2\geqslant 2a^2-c^2,\\ c^2<2a^2-c^2。\end{cases}$$

，

$$\begin{cases}\dfrac{c^2}{a^2}\geqslant\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{c^2}{a^2}<1。\end{cases}$$

，

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}\geqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3},\\ \dfrac{c}{a}<1。\end{cases}$$

，

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\leqslant\frac{c}{a}<1,$$

即椭圆的离心率取值范围为$\frac{\sqrt{6}}{3}\leqslant e<1$。

解法二 如图 10 - 22 所示，设点 Q 的坐标为(x,y)，过点 Q 作 $QH\perp x$ 轴，垂足为 H，

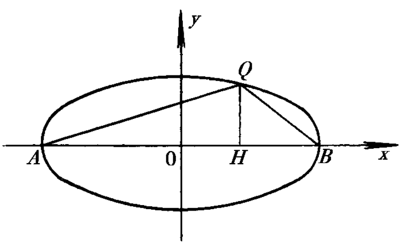


图 10 - 22

则 $|AH|=a+x,|BH|=a-x,|QH|=|y|$。

，

$$\tan\angle AQH=\frac{a+x}{|y|},\tan\angle BQH=\frac{a-x}{|y|},$$

$\tan\angle AQB = \tan 120° = -\sqrt{3}$,

, $\dfrac{\dfrac{a+x}{|y|}+\dfrac{a-x}{|y|}}{1-\dfrac{a+x}{|y|}\cdot\dfrac{a-x}{|y|}} = -\sqrt{3}$,

, $\dfrac{2a|y|}{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{3}$。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

, $a^2-x^2 = \dfrac{a^2y^2}{b^2}$,

, $\dfrac{2ab^2}{(a^2-b^2)|y|} = \sqrt{3}$,

, $|y| = \dfrac{2ab^2}{\sqrt{3}(a^2-b^2)}$。

$0 < |y| \leqslant b$,

, $0 < \dfrac{2ab^2}{\sqrt{3}(a^2-b^2)} \leqslant b$,

, $\sqrt{3}(a^2-b^2) \geqslant 2ab$,

即 $3(a^2-b^2)^2 \geqslant 4a^2b^2$。

$a^2 = b^2+c^2$,

, $3c^4 \geqslant 4a^2(a^2-c^2)$,

$4a^2-4a^2c^2-3c^4 \leqslant 0$,

$(2a^2+c^2)(2a^2-3c^2) \leqslant 0$,

, $2a^2-3c^2 \leqslant 0$,

$\dfrac{c^2}{a^2} \geqslant \dfrac{2}{3}$,

, $\dfrac{c}{a} \geqslant \dfrac{\sqrt{6}}{3}$,即 $e \geqslant \dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

$0 < e < 1$,

, $$\frac{\sqrt{6}}{3} \leqslant e < 1,$$

即椭圆的离心率的取值范围为 $[\frac{6}{3},1)$。

解法三 设点 Q 的坐标为 (x,y)，则由点 A、B 为椭圆长轴的端点可知 $A(-a,0)$、$B(a,0)$，

, $$k_{AQ} = \frac{y}{x+a}, k_{BQ} = \frac{y}{x-a}。$$

$$\angle AQB = 120°$$

, QA 到 QB 的角为 120°（这时点 Q 在 x 轴的上方）或 QB 到 QA 的解为 120°（这时点 Q 在 x 轴的下方），

, $$\frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y}{x-a} \cdot \frac{y}{x+a}} = -\sqrt{3}, (y > 0)$$

或 $$\frac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y}{x+a} \cdot \frac{y}{x-a}} = -\sqrt{3}, (y < 0)$$

, $$2ay = -\sqrt{3}(x^2 + y^2 - a^2)(y > 0),$$

或 $$-2ay = -\sqrt{3}(x^2 + y^2 - a^2)(y < 0),$$

, $$2a|y| = \sqrt{3}(a^2 - x^2 - y^2)。$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

, $$a^2 - x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2},$$

, $$2a|y| = \sqrt{3}(\frac{a^2y^2}{b^2} - y^2),$$

$$2ab^2 = \sqrt{3}(a^2 - b^2)|y|,$$

, $$|y| = \frac{2ab^2}{\sqrt{3}(a^2 - b^2)}。$$

左支，则 $x \leqslant -a$，从而，可以得到 a、b、c 与点 P 的坐标 (x,y) 间的关系等式和不等式组。

解 设点 P 的坐标为 (x,y)，$(x \leqslant -a)$

则 $|PF_1| = -(ex+a)$，$|PF_2| = -(ex+a)$。

$$\frac{|PF_1|}{d} = \frac{|PF_2|}{|PF_1|},$$

，

$$e = \frac{-(ex-a)}{-(ex+a)},$$

即

$$e = \frac{ex-a}{ex+a} \qquad (*)$$

方法一 由式 $(*)$ 可得 $x = -\dfrac{a(e+1)}{e^2-e}$，$e \in (1+\sqrt{2}, +\quad)$

，

$$x = -\frac{a(e+1)}{e^2-e}$$

$$= -\frac{a(e+1)}{(e+1)^2-3(e+1)+2}$$

$$= -\frac{a}{(e+1)+\dfrac{2}{e+1}-3}。$$

令 $e+1=t$，则 $t \in (2+\sqrt{2}, +\quad)$，

，

$$x = -\frac{a}{t+\dfrac{2}{t}-3}。$$

可以证明函数 $x = -\dfrac{a}{t+\dfrac{2}{t}-3}$ 在 $(2+\sqrt{2}, +\quad)$ 上单调增，

，

$$x > \frac{-a}{(2+\sqrt{2})+\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}-3} = -a,$$

这就与 $x \leqslant -a$ 矛盾，所以，在双曲线的左支上不存在满足题设条件的点 P。

方法二 由式 $(*)$ 可得 $x = -\dfrac{a(e+1)}{e^2-e}$，$e \in (1+\sqrt{2}, +\quad)$

令 $$-\frac{a(e+1)}{e^2-e}\leqslant -a$$

则 $$\frac{e+1}{e^2-e}\geqslant 1$$

$$e>1,$$

, $$e^2-e>0,$$

, $$e+1\geqslant e^2-e,$$

$$e^2-2e-1\leqslant 0,$$

, $$1-\sqrt{2}\leqslant e\leqslant 1+\sqrt{2},$$

, $$1<e\leqslant 1+\sqrt{2},$$

这就与 $e>1+\sqrt{2}$ 矛盾。所以,在双曲线的左支上不存在满足题设条件的点 P。

方法三　由式(*)可得 $xe^2+(a-x)e+a=0$,$e\in(1+\sqrt{2},+\ )$

这就是说,关于 e 的方程 $xe^2+(a-x)e+a=0$ 在 $e\in(1+\sqrt{2},+\ )$ 上有解。

$$x\neq 0,$$

, $$e^2+\frac{a-x}{x}e+\frac{a}{x}=0。$$

令 $$f(e)=e^2+\frac{a-x}{x}e+\frac{a}{x},$$

$$e\in(1+\sqrt{2},+\ )$$

则关于 e 的函数 $f(e)=e^2+\frac{a-x}{x}e+\frac{a}{x}$ 与 e 轴在 $(1+\sqrt{2},+\ )$ 上有公共点(见图 10 - 23)。

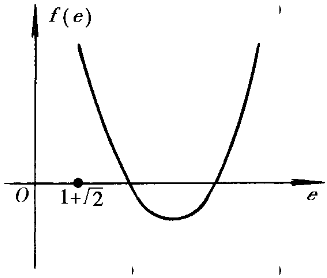


图 10 - 23

① 若 $\begin{cases}\Delta=(a-x)^2-4ax\geqslant 0,\\ f(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^2+\dfrac{a-x}{x}(1+\sqrt{2})+\dfrac{a}{x}>0,\\ -\dfrac{a-x}{2x}>1+\sqrt{2}。\end{cases}$

, $\begin{cases}\dfrac{a}{x}\leqslant 3-2\sqrt{2}\text{ 或 }\dfrac{a}{x}\geqslant 3+2\sqrt{2},\\ \dfrac{a}{x}>-1,\\ \dfrac{a}{x}<-(1+\sqrt{2})。\end{cases}$

, 关于 x 的不等式组无解。

② 若 $f(1+\sqrt{2})=0$,

则 $(1+\sqrt{2})^2+\dfrac{a-x}{x}(1+\sqrt{2})+\dfrac{a}{x}=0$,

, $x=-a$,这时方程为 $e^2-2e-1=0$,

, $e=1+\sqrt{2}\notin(1+\sqrt{2},+\quad)$ 或 $e=1-\sqrt{2}$(舍去)。

, $x=-a$ 不可取。

③ 若 $f(1+\sqrt{2})<0$,

则 $(1+\sqrt{2})^2+\dfrac{a-x}{x}(1+\sqrt{2})+\dfrac{a}{x}<0$,

$$，\quad \frac{a}{x} < -1，$$

$$，\quad -a < x < 0。$$

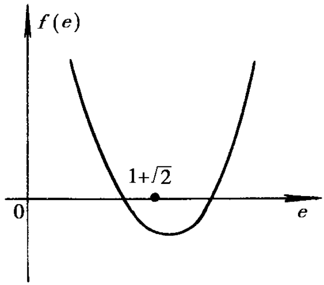


图 10 - 24

综上所述，双曲线的左支上不存在满足题设条件的点 P。

例 4　如图 10.25 所示，已知椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，椭圆的一个顶点为 $A(0,-1)$，且右焦点到直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 的距离为 3。如果有斜率为 k 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 M、N 且满足 $|AM|=|AN|$，这样的直线是否存在？若存在，则求出斜率 k 的取值范围；若不存在，则说明理由。

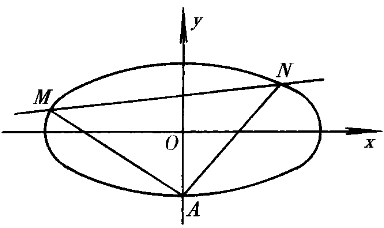


图 10 - 25

分析　由题设可知，椭圆是确定的。由题设可知，直线 l 必须与椭圆相交且有不同的两个交点 M、N，并且点 A 到两交点 M、N 的距离相等。

在坐标平面内，直线 l 可由其斜率 k 及其在 y 轴上的截距 m

定位,因此,直线 l **满足的两个几何条件可以转换成两个变量** k **和** m **的两个制约关系,组成不等量关系式和等量关系式组。**

解法一　设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,$(a>b>0)$

椭圆的一个顶点为 $A(0,-1)$,

, $b=1$。

设椭圆右焦点的坐标为$(c,0)$。

右焦点到直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ **的距离为** 3,

, $$\frac{|c+2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=3,$$

, $$c=\sqrt{2},$$

, $$a=3,$$

, **椭圆的方程为**$\frac{x^2}{3}+y^2=1$。

若直线 l **的斜率** $k=0$,**则与** x **轴平行且与椭圆有两个不同的交点的直线都满足**$|AM|=|AN|$,

, $k=0$ **可取。**

若直线 l **的斜率** $k\neq 0$,**则直线** l **的方程可设为** $y=kx+m$,

由方程组$\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+3y^2=3, \end{cases}$

可得　$x^2+3(kx+m)^2=3$,

即　$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$。

直线 l **与椭有两个不同的交点,**

, $\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)(3m^2-3)>0$,

, $3k^2+1>m^2$。

设点 M、N **的坐标分别为**(x_1,y_1)、(x_2,y_2),

则　$$x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2},k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}。$$

, $$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m$$

$$= k \cdot \left(-\frac{6km}{1+3k^2}\right)+2m$$

$$= \frac{2m}{1+3k^2}。$$

$|AM| = |AN|$，

, $x_1^2+(y_1+1)^2 = x_2^2+(y_2+1)^2$，

$(x_1^2-x_2^2)+[(y_1+1)^2-(y_2+1)^2]=0$，

$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2+2)(y_1-y_2)=0$，

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2+2)\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0，$$

$$-\frac{6km}{1+3k^2}+\left(\frac{2m}{1+3k^2}+2\right)k=0。$$

$k \neq 0$，

, $-\dfrac{6m}{1+3k^2}+\dfrac{2m}{1+3k^2}+2=0$，

, $2m = 1+3k^2$，

, $\begin{cases} 3k^2+1>m^2, \\ 2m=1+3k^2。\end{cases}$

, $3k^2+1>\left(\dfrac{1+3k^2}{2}\right)^2$，

$1+3k^2<4$，

$k^2<1$，

, $-1<k<0$ **或** $0<k<1$。

综上所述 $-1<k<1$。

解法二　设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$，**由解法一可知，椭圆方程为**$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$。

若直线 l **的斜率** $k=0$，**则与** x **轴平行且与椭圆有两个不同交点的直线都满足**$|AM|=|AN|$，

, $k=0$ 可取。

若直线 l 的斜率 $k\neq 0$，则直线 l 的方程可设为 $y=kx+m$，

由方程组 $\begin{cases} y=kx=m, \\ x^2+3y^2=3, \end{cases}$

可得 $x^2+3(kx+m)^2=3$，

即 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

, 直线 l 与椭圆有两个不同的交点，

, $\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)(3m^2-3)>0$，

, $3k^2+1>m^2$。

设点 M、N 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{6km}{1+3k^2}$，

, $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m$

$$=k\left(-\frac{6km}{1+3k^2}\right)+2m$$

$$=\frac{2m}{1+3k^2}。$$

$|AM|=|AN|$，

, 线段 MN 的中点 G 在过点 A 且与 MN 垂直的直线上。

设点 G 的坐标为 (x_0,y_0)，

则 $x_0=-\dfrac{3km}{1+3k^2}$，$y_0=\dfrac{m}{1+3k^2}$。

直线 AG 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x-1$，

$$y_0=-\frac{1}{k}x_0-1,$$

, $\dfrac{m}{1+3k^2}=-\dfrac{1}{k}\left(-\dfrac{3km}{1+3k^2}\right)-1$，

, $1+3k^2=2m$，

, $\begin{cases} 3k^2+1>m^2, \\ 1+3k^2=2m。 \end{cases}$

, $3k^2+1>\left(\frac{1+3k^2}{2}\right)^2$,

$1+3k^2<4$,

$k^2<1$,

, $-1<k<0$ 或 $0<k<1$,

综上所述,$-1<k<1$。

说明 在两种解法中,都是将题设给出的几何元素间的制约关系转换成相应变量间的制约关系,即等量关系和不等量关系。

在解法一中,将 $|AM|=|AN|$ 直接转换成 $x_1^2+(y_1+1)^2=x_2^2+(y_2+1)^2$,再转换成变量 k 与 m 的关系等式:$1+3k^2=2m$;在解法二中,将 $|AM|=|AN|$ 转换成另一种等价的几何形式,即线段 MN 的中点 G 在过点 A 且与 MN 垂直的直线上,即直线 AG 为线段 MN 的中垂线,并将这种几何形式转换成代数形式:$y_0=-\frac{1}{k}x_0-1$,并再转换成变量 k 与 m 的关系等式:$1+3k^2=2m$。

必须注意到,直线 l 与椭圆有两个不同的交点是 $|AM|=|AN|$ 成立的基础,并且也是产生变量 k 和 m 间的不等量关系式的依据。

例 5 如图 10-26 所示,已知直线 l 过定点 $(0,1)$,与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左支交于不同的两点 A、B,过线段 AB 的中点 M 和定点 $P(-2,1)$ 的直线交 y 轴于 $Q(0,b)$ 点,求 b 的取值范围。

分析 在直角坐标系内,直线 l 随着其斜率 k 的变化而运动变化,直线 PM 随着其在 y 轴上的截距 b 的变化而运动变化。直线 l 与直线 PM 在运动变化中相互联系、相互制约,因而,变量 k 与 b 互相联系、互相制约,由点 M 为线段 AB 的中点,可以得到变量 k 与 b 的等量关系;由直线 l 与双曲线的左支交于不同的两点 A、B,可以求得变量 k 的取值范围。

解法一 由题设可知,直线 l 的斜率存在,设为 k。

直线 l 过点 $(0,1)$,

, 直线 l 的方程为 $y=kx+1$,

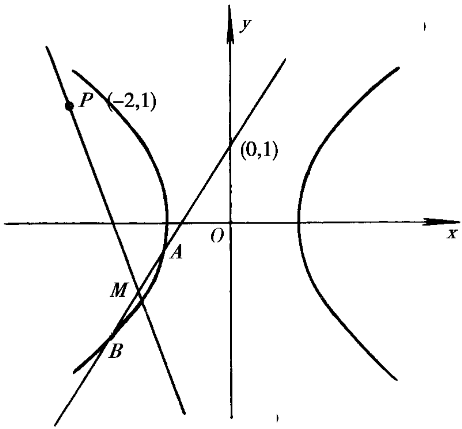


图 10 - 26

由方程组 $\begin{cases} y = kx + 1, \\ x^2 - y^2 = 1, (x < 0) \end{cases}$

可得 $x^2 - (kx + 1)^2 = 1$,

$(1 - k^2)x^2 - 2kx - 2 = 0, (x < 0)$。

, $\begin{cases} \Delta = 4k^2 + 8(1 - k^2) = 8 - 4k^2 > 0, \\ \dfrac{2k}{1 - k^2} < 0, \\ \dfrac{-2}{1 - k^2} > 0。 \end{cases}$

, $1 < k < \sqrt{2}$。

设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$M(x_0, y_0)$,

则 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{k}{1 - k^2}$,

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{k(x_1 + x_2)}{2} + 1$$

$$= \frac{k^2}{1 - k^2} + 1$$

$$= \frac{1}{1-k^2}\text{。}$$

, **直线** PM **的斜率为** $\dfrac{\dfrac{1}{1-k^2}-1}{\dfrac{k}{1-k^2}+2}$,**即** $\dfrac{k^2}{-2k^2+k+2}$,

, **直线** PM **的方程为** $y=\dfrac{k^2}{-2k^2+k+2}(x+2)+1$。

令 $x=0$,

则 $b=\dfrac{k+2}{-2k^2+k+2}$,$k\in(1,\sqrt{2})$

, $$b=\frac{k+2}{-2k^2+k+2}$$

$$=\frac{k+2}{-2(k+2)^2+9(k+2)-8}$$

$$=\frac{1}{-2(k+2)+9-\dfrac{8}{k+2}},$$

, $$-2b=\frac{1}{(k+2)+\dfrac{4}{k+2}-\dfrac{9}{2}}\text{。}$$

令 $k+2=t$,**则** $t\in(3,2+\sqrt{2})$,

, $$-2b=\frac{1}{t+\dfrac{4}{t}-\dfrac{9}{2}}\text{。}$$

函数 $f(t)=t+\dfrac{4}{t}$ **在** $(3,2+\sqrt{2})$ **上单调增**,

, $$t+\frac{4}{t}\in\left(\frac{13}{3},6-\sqrt{2}\right),$$

$$t+\frac{4}{t}-\frac{9}{2}\in\left(-\frac{1}{6},\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right),$$

$$\frac{1}{t+\dfrac{4}{t}-\dfrac{9}{2}}\in(-\quad,-6)\cup(2(3+2\sqrt{2}),+\quad),$$

即 $-2b \in (- \quad, -6) \cup (2(3+2\sqrt{2}), + \quad)$，

, $b \in (- \quad, -3-2\sqrt{2}) \cup (3, + \quad)$。

解法二　由解法一可知

$$b = \frac{k+2}{-2k^2+k+2}, k \in (1, \sqrt{2})$$

, $$b(-2k^2+k+2) = k+2,$$

$$2bk^2 + (1-b)k + 2(1-b) = 0,$$

$$k \in (1, \sqrt{2}),$$

, $$k+2 \neq 0,$$

, $$b \neq 0,$$

, **二次方程** $2bk^2+(1-b)k+2(1-b)=0$ **在** $(1, \sqrt{2})$ **内有解。**

令 $f(k) = k^2 + \frac{1-b}{2b}k + \frac{1-b}{b}$，

则　二次函数 $f(k) = k^2 + \frac{1-b}{2b}k + \frac{1-b}{b}$ **的图像与** k **轴在区间** $(1, \sqrt{2})$ **内有公共点。**

（1）**若二次函数** $f(k)$ **的图像与** k **轴在区间** $(1, \sqrt{2})$ **内有且只有两个公共点，**

则 $$\begin{cases} \Delta > 0, \\ 1 < -\frac{1-b}{4b} < \sqrt{2}, \\ f(1) > 0, \\ f(\sqrt{2}) > 0。 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} (1-b)^2 - 16b(1-b) > 0, \\ 1 < \frac{b-1}{4b} < \sqrt{2}, \\ 1 + \frac{3(1-b)}{2b} > 0, \\ 2 + \frac{(\sqrt{2}+2)(1-b)}{2b} > 0。 \end{cases}$$ **无解**

(2)若二次函数 $f(k)$ 的图像与 k 轴在区间 $(1,\sqrt{2})$ 内有且只有一个公共点,

则 $f(1)\cdot f(\sqrt{2})<0$,即 $[1+\frac{3(1-b)}{2b}][2+\frac{(2+\sqrt{2})(1-b)}{2b}]<0$。

, $(b-3)[b+(3+2\sqrt{2})]>0$,

, $b<-3-2\sqrt{2}$ 或 $b>3$。

(3)若 $f(1)\cdot f(\sqrt{2})=0$,则 $b=3$ 或 $b=-3-2\sqrt{2}$

① $b=3$ 时,$k=1$,$-\frac{2}{3}\notin(1,\sqrt{2})$;

② $b=-3-2\sqrt{2}$ 时,$k=\sqrt{2}$,$-4+2\sqrt{2}\notin(1,\sqrt{2})$;

, $b=3$,$b=-3-2\sqrt{2}$ 不可取。

综上所述,b 的取值范围为 $(-\quad,-2-2\sqrt{2})\cup(3,+\quad)$。

说明　两种解法中,获取变量 k 与 b 的制约关系的方法是相同的,区别在于处理变量关系式组的方法不同。

在解法一中,是把变量 k 与 b 的关系等式看作函数解析式,即变量 b 为变量 k 的函数,然后,求函数的值域得变量 b 的取值范围;

在解法二中,是把变量 k 与 b 的关系等式看作关于未知量 k 的方程,然后,用二次方程的根与二次方程系数的关系借助于二次函数图像解得 b 的取值范围。

例 6　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$ 与直线 $x+y-1=0$ 相交于两点 P、Q,且 $OP\perp OQ$(O 为原点)。

(1)求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的值;

(2)若椭圆的离心率在 $[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上变化时,求椭圆长轴的取值范围。

分析　题(1)实质上为题(2)提供了一个关于 a、b 的等量关系式,椭圆的离心率在$[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}]$上变化,提供了一个关于 a、c 的不等量关系式,从而我们可以得到一个关于 a、b、c 的等量关系式和不等量关系式组。

解(1)　由方程组$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2, \\ x+y-1=0, \end{cases}$消去 y 得 $b^2x^2+a^2(1-x)^2=a^2b^2$,整理得$(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2(1-b^2)=0$。

设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$。

$$OP \perp OQ,$$

, $$x_1x_2+y_1y_2=0。$$

又 $$y_1=1-x_1, y_2=1-x_2,$$

, $$x_1x_2+(1-x_1)(1-x_2)=0,$$

$$2x_1x_2-(x_1+x_2)+1=0。$$

$$x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2+b^2}, x_1x_2=\frac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2},$$

, $$\frac{2a^2(1-b^2)}{a^2+b^2}-\frac{2a^2}{a^2+b^2}+1=0,$$

$$\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}=1,$$

$$a^2+b^2=2a^2b^2,$$

, $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=2。$$

(2)　椭圆的离心率 $e \in [\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2},]$,

, $$\frac{1}{3} \leqslant e^2 \leqslant \frac{1}{2}。$$

$$a^2+b^2=2a^2b^2,$$

, $$2a^2-c^2=2a^2(a^2-c^2),$$

$$2-\frac{c^2}{a^2}=2a^2(1-\frac{c^2}{a^2},$$

, $$2-e^2=2a^2(1-e^2) \qquad (*)$$

方法一　由式(*)可得 $a^2=\dfrac{2-e^2}{2(1-e^2)}$,$e^2\in[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$

, $$a^2=\frac{2-e^2}{2(1-e^2)}$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{1-e^2}),$$

, $$\frac{5}{4}\leqslant a^2\leqslant\frac{3}{2},$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}。$$

,　**长轴的取值范围是**$\sqrt{5}\leqslant 2a\leqslant\sqrt{6}$。

方法二　由式(*)可得 $e^2=\dfrac{2a^2-2}{2a^2-1}$,

$$e^2\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}],$$

, $$\frac{1}{3}\leqslant\frac{2a^2-2}{2a^2-1}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}\leqslant 1-\frac{1}{2a^2-1}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2a^2-1}\leqslant\frac{2}{3},$$

, $$\frac{3}{2}\leqslant 2a^2-1\leqslant 2,$$

$$\frac{5}{4}\leqslant a^2\leqslant\frac{3}{2},$$

, $$\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2},$$

,　**长轴的取值范围为**$\sqrt{5}\leqslant 2a\leqslant\sqrt{6}$。

说明　在题(2)的解法中,将题(1)中得到的等量关系式转换成 $2-e^2=2a^2(1-e^2)$　**(*),在解法一中,将式(*)式转换成关**

于 e^2 的函数解析式 $a^2=\frac{2-e^2}{2(1-e^2)}$，然后，用求函数值域的方法求得长轴 $2a$ 的取值范围。在解法二中，将式（$*$）式看成关于 e^2 的方程，求得 $e^2=\frac{2a^2-2}{2a^2-1}$，并利用其将 $\frac{1}{3}\leqslant e^2\leqslant\frac{1}{2}$ 换成关于 a^2 的不等式 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{2a^2-2}{2a^2-1}\leqslant\frac{1}{2}$，然后，用解不等式的方法求得长轴 $2a$ 的取值范围。

这就是说，等量关系式常可转换成关于某个变量的函数解析式，或把等量关系式看成关于某个变量的方程。

例 7 如图 10-27 所示，设直线 l 过点 $M(2,0)$ 交抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 于 A、B 两点，若以 AB 为直径的圆过抛物线的焦点，试求 p 的取值范围。

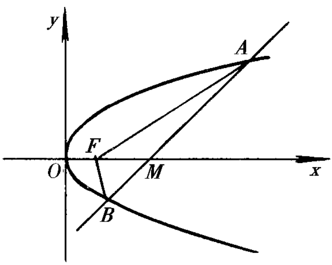


图 10-27

分析 由题设可知，直线 l 必须满足以下两个条件：(1) 直线 l 必须与抛物线有两个不同的交点。(2) 以弦 AB 为直径的圆过抛物线的焦点。这两个几何条件分别可以转换成直线 l 的斜率 k 与焦参数 p 这两个变量的不等量关系式和等量关系式。

解 若直线 l 的斜率不存在，则直线 l 的方程为 $x=2$。

$\triangle ABF$ 为直角三角形，$\angle AFB=90°$，

，$$\left|2-\frac{p}{2}\right|=\sqrt{4p},$$

，$$p^2-24p+16=0,$$

, $$p = 12 \pm 8\sqrt{2}。$$

若直线 l **的斜率存在,设为** k**,则直线** l **的方程为** $y = k(x - 2)$,

由方程组 $\begin{cases} y = k(x-2), \\ y^2 = 2px, \end{cases}$

可得 $k^2(x-2)^2 = 2px$,

整理得 $k^2x^2 - (4k^2 + 2p)x + 4k^2 = 0$。

直线 l **与抛物线** $y^2 = 2px$ **有不同的两个交点** A、B,

, $\begin{cases} k \neq 0, \\ \Delta = (4k^2 + 2p)^2 - 16k^4 = 16k^2p + 4p^2 > 0, \end{cases}$

, $k \neq 0$。

设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = \dfrac{4k^2 + 2p}{k^2}$,$x_1x_2 = 4$。

以 AB **为直径的圆过抛物线的焦点**$(\dfrac{p}{2}, 0)$

, $$(\frac{p}{2} - x_1)(\frac{p}{2} - x_2) + y_1y_2 = 0。$$

$$y_1 = k(x_1 - 2), y_2 = k(x_2 - 2),$$

, $(\dfrac{p}{2} - x_1)(\dfrac{p}{2} - x_2) + k^2(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 0$,

整理得$(1 + k^2)x_1x_2 - (2k^2 + \dfrac{p}{2})(x_1 + x_2) + 4k^2 + \dfrac{p^2}{4} = 0$,

, $(1 + k^2) \times 4 - (2k^2 + \dfrac{p}{2})\dfrac{4k^2 + 2p}{k^2} + 4k^2 + \dfrac{p^2}{4} = 0$,

整理得 $\dfrac{p^2}{k^2} - \dfrac{p^2}{4} + 6p - 4 = 0$,

, $$k^2 = \frac{p^2}{\dfrac{p^2}{4} - 6p + 4}。$$

$$k \neq 0,$$

, $$k^2 > 0,$$

, $\frac{p^2}{4}-6p+4>0$ 即 $p^2-24p+16>0$,

解得 $p<12-8\sqrt{2}$ 或 $p>12+8\sqrt{2}$。

$p>0$,

, $0<p<12-8\sqrt{2}$ 或 $p>12+8\sqrt{2}$。

综上所述,p 的取值范围为 $0<p<12-8\sqrt{2}$ 或 $p>12+8\sqrt{2}$。

例 8 如图 10-28 所示,设椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,过点 $P(0,3)$ 作直线 l 自上而下顺次交椭圆于 A、B 两点,求 $\frac{AP}{PB}$ 的取值范围。

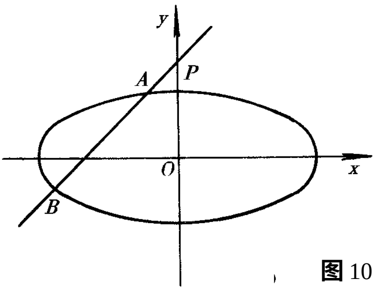


图 10-28

分析 由题设,直线 l 绕着点 P 的转动可以用直线 l 的斜率表示。随着直线 l 的转动,比值 $\frac{AP}{PB}$ 也随着变化,因此,比值 $\frac{AP}{PB}$ 与直线 l 的斜率间互相联系,互相制约,它们之间的关系可以用等量关系式表示。另外,直线 l 必须与椭圆有两个不同的交点,因此,直线 l 的斜率 k 相应受到限制。

解 若直线 l 的斜率不存在,则 $\frac{AP}{PB}=\frac{3-2}{-2-3}=-\frac{1}{5}$,

若直线 l 的斜率存在,设为 k,则直线 l 的方程为 $y=kx+3$。

由方程组 $\begin{cases} y=kx+3, \\ 4x^2+9y^2=36, \end{cases}$

可得 $4x^2+9(kx+3)^2=36$,

整理得 $(9k^2+4)x^2+54kx+45=0$,

直线 l 与椭圆交于不同的两点，

, $\Delta=(54k)^2-180(9k^2+4)>0$，得 $k^2>\frac{5}{9}$。

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{54k}{9k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{45}{9k^2+4}$，

$$\frac{AP}{PB}=\frac{O-x_1}{x_2-O}=-\frac{x_1}{x_2}。$$

令 $\lambda=\frac{x_1}{x_2}$，

则 $(x_1+x_2)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})=\lambda+\frac{1}{\lambda}+2$。

$$(x_1+x_2)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})$$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}$$

$$=\frac{(-\frac{54k}{9k^2+4})^2}{\frac{45}{9k^2+4}}$$

$$=\frac{324k^2}{5(9k^2+4)}，$$

又 $k^2>\frac{5}{9}$，

, $$4<\lambda+\frac{1}{\lambda}+2<\frac{36}{5}。$$

$\lambda=\frac{x_1}{x_2}>0$，($x_1$，$x_2$ 同号)

, $$4\lambda<\lambda^2+2\lambda+1<\frac{36}{5}\lambda，$$

, $\frac{1}{5}<\lambda<5$ 且 $\lambda\neq1$。

$$\lambda = \frac{x_1}{x_2}, x_1, x_2 \text{ 同号,且} |x_1| < |x_2|,$$

, $$0 < \lambda < 1,$$

, $$\frac{1}{5} < \lambda < 1,$$

, $$-1 < \frac{AP}{PB} < -\frac{1}{5}。$$

综上所述,$-1 < \frac{AP}{PB} < -\frac{1}{5}$。

说明　在处理变量关系的过程中,实际上,建立了两个函数:(1)$\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = \frac{324k^2}{5(9k^2+4)}$　$\left(k^2 > \frac{5}{9}\right)$;(2)$\lambda = \frac{x_1}{x_2}$($x_1$、$x_2$ 同号且$|x_2| > |x_1|$),并分别求了函数的值域。

例 9　已知等腰直角三角形 APB 的一条直角边 AP 在 y 轴上,点 A 位于 x 轴下方,点 B 位于 y 轴的右方,斜边 AB 的长为 $3\sqrt{2}$,且 A、B 两点在椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$　$(a > b > 0)$上。

(1)若点 P 的坐标为(0,1),求椭圆的方程;

(2)若点 P 的坐标为(0,t)　(t 为实常数),求使 A、B 两点在椭圆 C 上的 t 的允许值范围。

分析　(1)由题设可以求得点 A、B 的坐标,由点 A、点 B 在椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$　$(a > b > 0)$可得关于 a^2、b^2 的两个方程组成的方程组,解这个方程组就可以求得 a^2、b^2 的值,从而确定椭圆方程。

(2)由题设可知,在坐标平面内,形状、大小确定的等腰直角三角形 PAB 按题设条件运动,从而确定椭圆的形状、大小。相应地,变量 t、a、b 互相联系、互相制约,即可得 t、a、b 的关系等式和不等式。

解　(1)　　△PBA 为等腰直角三角形,$AB = 3\sqrt{2}$,

,　$|PA| = 3, |PB| = 3$。

　$P(0,1)$,

， $A(0,-2)$，$B(3,1)$。

点 A、B **在椭圆** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **上**，

， $$\begin{cases} b=2, \\ \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1。\end{cases}$$

， $a^2=9$，$b^2=4$，

， **所求椭圆方程为** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$。

（2） $\triangle APB$ **为等腰直角三角** $|AB|=3\sqrt{2}$，

， $|PA|=3$，$|PB|=3$，

$P(0,t)$，

， $A(0,t-3)$，$B(3,t)$，

点 A、B **在椭圆** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，**且点** A **为椭圆的下顶点**，

， $$\begin{cases} b=3-t, \\ \frac{9}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1。\end{cases}$$

$$a>b>0,$$

， $$\begin{cases} b=3-t, \frac{9}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1, \\ a>b>0。\end{cases}$$

， $$\begin{cases} b=3-t, \\ a^2=\frac{9(3-t)^2}{-6t+9}, \\ a>b>0。\end{cases}$$

， $$\begin{cases} 3-t>0, \\ \frac{9(3-t)^2}{-6t+9}>(3-t)^2。\end{cases}$$

， $$\begin{cases} t<3, \\ 0<t<\frac{3}{2}。\end{cases}$$

$$, \quad 0 < t < \frac{3}{2}。$$

说明　在处理变量 t、a、b **的关系式组的过程中，等式** $b=3-t$ **对等式** $\frac{9}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1$ **起消元作用，得** $a^2=\frac{9(t-3)^2}{-6t+9}$。**然后利用** $b=3-t$，$a^2=\frac{9(t-3)^2}{-6t+9}$**将不等式** $a>b>0$ **换元成不等式组** $3-t>0$ **且** $\frac{9(3-t)^2}{-6+9}>(3-t)^2$，**从而解得** $0<t<\frac{3}{2}$。

例 10　已知抛物线 $x^2=py(p>0)$ **和双曲线** $\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$，

(1) 当 $k\geqslant 5$ **时，求抛物线与双曲线有公共点时** P **的取值范围；**

(2) 当 $k=5$ **时，设抛物线与双曲线的右支的两个交点为** A、B，**求弦** AB **的斜率的取值范围。**

分析　题(1)中，抛物线与双曲线有公共点的制约关系表现为方程组 $\begin{cases} x^2=py, \\ \frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1, \end{cases}$ **有解，显然又表现为变量** k **与** p **的制约关系。**

题(2)中，抛物线与双曲线的右支有两个公共点 A、B，**可表现为弦** AB **的斜率与变量** P **的制约关系。**

解(1) 由题设可知，方程组 $\begin{cases} x^2=py, \\ \frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1, \end{cases}$ **有解**

, 　**方程** $p(4-k)y+(9-k)y^2=(9-k)(4-k)$ **有解，**

整理得 $(9-k)y^2+(4-k)py-(9-k)(4-k)=0(y\geqslant 0)$，

$$, \quad \begin{cases} \Delta = p^2(4-k)^2+4(9-k)^2(4-k)\geqslant 0 \\ -\frac{(4-k)p}{9-k}\geqslant 0, \\ -\frac{(9-k)^2(4-k)}{9-k}\geqslant 0。 \end{cases}$$

$$k \geqslant 5,$$

, $$5 \leqslant k < 9,$$

, $$\begin{cases} 5 \leqslant k < 9, \\ (4-k)p^2 + 4(9-k)^2 \leqslant 0。 \end{cases} \quad (*)$$

方法一

由式(*)可得 $p^2 \geqslant \dfrac{4(9-k)^2}{k-4}, k \in [5,9)$

, $$\frac{p^2}{4} \geqslant \frac{(k-9)^2}{k-4}$$

$$= \frac{[(k-4)-5]^2}{k-4}$$

$$= (k-4) + \frac{25}{k-4} - 10。$$

$$k \in [5,9),$$

, $$k-4 \in [1,5)。$$

, $(k-4) + \dfrac{25}{k-4}$ **关于**$(k-4)$ **在**$[1,5)$ **上单调减,**

, $$\left[(k-4) + \frac{25}{k-4} - 10\right]_{max} = 1 + 25 - 10 = 16,$$

, $$\frac{p^2}{4} \geqslant 16。$$

$$p > 0,$$

, $$p \geqslant 8。$$

方法二

由式(*)可得 $4k^2 - (72+p^2)k + 324 + 4p^2 \leqslant 0, k \in [5,9)$

令 $f(k) = 4k^2 - (72+p^2)k + 324 + 4p^2$,

则 $$\begin{cases} f(5) \leqslant 0, \\ f(9) < 0。 \end{cases}$$

, $$\begin{cases} 4 \cdot 25 - 5(72+p^2) + 324 + 4p^2 \leqslant 0, \\ 4 \cdot 81 - 9(72+p^2) + 324 + 4p^2 \leqslant 0。 \end{cases}$$

, $$\begin{cases} p^2 \geqslant 64, \\ -5p^2 \leqslant 0。 \end{cases}$$

，$p^2 \geqslant 64$，

，$p \geqslant 8$。

(2)设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

由方程组$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 4, \\ x^2 = py, \end{cases}$

得 $4y^2 - py + 4 = 0$，$(y \geqslant 0)$。

，$$\begin{cases} \Delta = p^2 - 64 > 0, \\ y_1 + y_2 = \dfrac{p}{4} > 0, \\ y_1 y_2 = 1 > 0。 \end{cases}$$

，$p > 8$。

$$x_1^2 = py_1, x_2^2 = py_2,$$

，$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = p(y_1 - y_2)$$

，$$k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{p}$$

$$= \frac{\sqrt{py_1} + \sqrt{py_2}}{p}$$

$$= \frac{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}{\sqrt{p}}$$

$$= \frac{\sqrt{y_1 + y_2 + 2\sqrt{y_1 y_2}}}{\sqrt{p}}。$$

$$y_1 + y_2 = \frac{p}{4}, y_1 y_2 = 1,$$

，$$k_{AB} = \frac{\sqrt{\dfrac{p}{4} + 2}}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8}{p}}, (p > 8)$$

，$$\frac{1}{2} < k_{AB} < \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

例 11 若直线 $y = kx + 1$ $(k \in R)$ 与焦点在 x 轴上的椭圆$\dfrac{x^2}{5} +$

$\frac{y^2}{m}=1$ **总有公共点,求实数** m **的取值范围。**

分析　本题可以用几何画图的方法求解,这里,我们用代数法求解。直线 $y=kx+1$ **与椭圆** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$**" 总有公共点 ",可以化为直线与椭圆的方程组的方程组' 总有解 '的问题。**

解　由方程组 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1, \end{cases}$

可得　$mx^2+5(kx+1)^2=5m$,

即　$(m+5k^2)x^2+10kx+5-5m=0$。

直线与椭圆总有公共点,

,　**方程组** $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1, \end{cases}$ **对于任意的** k **总有解,**

,　**方程** $(m+5k^2)x^2+10kx+5-5m=0$ **对于任意的** k **总有解。**

$m>0$,

,　$m+5k^2>0$,

,　$\Delta=100k^2-4(5-5m)(m+5k^2)\geqslant 0$ **对于任意的** k **恒成立,**

即　$5mk^2+m^2-1\geqslant 0$ **对于任意的** k **恒成立,**

,　$\Delta'=-20m(m^2-1)\leqslant 0$,

,　$m\leqslant -1$ **或** $m\geqslant 1$。

椭圆的焦点在 x **轴上,**

,　$0<m<5$,

,　$1\leqslant m<5$。

说明　在解题过程中,我们建立了变量 k **和** m **的不等式** $5mk^2+m^2-1\geqslant 0$**,并将其看成关于** k **在** R **上的恒不等式,从而又建立了关于变量** m **的不等式,求得变量** m **的取值范围。**

从以上例题可知,解关于二次曲线中变量取值范围的问题,必

须有建立变量关系等式和变量关系不等式的意识,并用函数、方程、不等式的观点去分析,看待这些变量关系等式和不等式,我们就可以用函数的方法、方程的方法、不等式的方法求解变量的取值范围。

练 习 题

1. 双曲线$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k}=1$的离心率 $e\in(1,2)$,求 k 的取值范围。

2. 若直线 $ax+y+2=0$ 平分双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的斜率为 1 的弦,求 a 的取值范围。

3. 若抛物线 $y=ax^2-1$ 上总存在关于直线 $x+y=0$ 对称的两点,求 a 的取值范围。

4. 已知 l_1、l_2 是过点 $P(-\sqrt{2},0)$ 的两条互相垂直的直线,且 l_1、l_2 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点,分别为 A_1、B_1 和 A_2、B_2。求直线 l_1 的斜率 k_1 的取值范围。

七、二次曲线中的最值问题

在直角坐标平面内,几何元素的运动变化可以用变量来刻划,函数或方程则是几何元素在运动变化中互相联系、互相制约的依存关系的数量表现形式。在二次曲线中,可以根据几何元素的运动变化的规律创设变量,建立函数或方程,求得变量的最值。

例 1　求点 $P(0,1)$ 与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上的点的最大距离。

分析　点 P 到椭圆上的点的距离就是连结定点 P 与椭圆上的动点 Q 的动线段 PQ 的长。动点 Q 在椭圆上的运动可以用变坐

标来刻划，这就是说，动线段 PQ 的长是动点 Q 的变坐标的函数。

解法一 设点 Q(x,y) 为椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的任意一点，由点 P 的坐标为(0,1)可知，

$$
\begin{aligned}
|PQ| &= \sqrt{x^2+(y-1)^2} \quad \left(\frac{x^2}{2}+y^2=1\right) \\
&= \sqrt{2-2y^2+(y-1)^2} \\
&= \sqrt{-y^2-2y+3} \\
&= \sqrt{-(y+1)^2+4}, (-1 \leqslant y \leqslant 1)
\end{aligned}
$$

, $|PQ|_{max}=2$，(这时 $y=-1$)

, 点 P(0,1) 到椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的点的最大距离为 2。

解法二 设点 $Q(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的任意一点，由点 P 的坐标为(0,1)可知，

$$
\begin{aligned}
|PQ| &= \sqrt{2\cos^2\theta+(\sin\theta-1)^2} \quad (\theta \in R) \\
&= \sqrt{-\sin^2\theta-2\sin\theta+3} \\
&= \sqrt{-(\sin\theta+1)^2+4},
\end{aligned}
$$

, $|PQ|_{max}=2$，(这时 $\sin\theta=-1$)

, 点 P(0,1) 到椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的点的最大距离为 2。

说明 在解法一中，动点 Q 在椭圆上的运动变化用二个变量 x、y 表示，因此动线段 PQ 的长 |PQ| 建立为变量 x、y 的二元函数。由于点 Q 在椭圆上，因此，变量 x、y 受到椭圆方程的制约，即 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，这个等量关系式在求解过程中对二元函数起消元作用，即将二元函数 $|PQ|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ 消元为一元函数 $|PQ|=\sqrt{-y^2-2y+3}$。

在解法二中，动点 Q 在椭圆上的运动变化用一个变量 θ 表

示,因此动线段 PQ 的长|PQ|的长建立为变量 θ 的一元函数,即三角函数。

例 2 过点 $P(-\sqrt{3},0)$ 作直线 l 与椭圆 $3x^2+4y^2=12$ 相交于 A、B 两点,O 为坐标原点,求△AOB 的面积的最大值及取最大值时直线 l 的方程。

分析 由题设可知,直线 l 绕着点 P 作旋转运动,直线 l 的这种运动变化可以用直线 l 的斜率 k 来刻划。△AOB 随着直线 l 的变化而变化,因此,△AOB 的面积也就随着 k 的变化而变化,从而△ABC 的面积是直线 l 的斜率 k 的函数。

解法一 若直线 l 的斜率不存在,则直线 l 的方程为 $x=-\sqrt{3}$,

由方程组 $\begin{cases} x=-\sqrt{3}, \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 得 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

, $|AB|=\sqrt{3}$,

, $S_{\triangle AOB}=\dfrac{3}{2}$。

若直线 l 的斜率存在,设为 $k(k\neq 0)$,则直线 l 的方程为 $y=k(x+\sqrt{3})$。

由方程组 $\begin{cases} y=k(x+\sqrt{3}), \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 得 $3x^2+4k^2(x+\sqrt{3})^2=12$,

整理得 $(3+4k^2)x^2+8\sqrt{3}k^2x+12k^2-12=0$。

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=-\dfrac{8\sqrt{3}k^2}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{12(k^2-1)}{3+4k^2}$,

$$, \quad |AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(-\frac{8\sqrt{3}k^2}{3+4k^2}\right)^2-4\cdot\frac{12(k^2-1)}{3+4k^2}}$$

$$=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{k^2+3}{(3+4k^2)^2}}$$

原点 O 到直线 l 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}|k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

，$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}$$

$$\sqrt{\frac{k^2+3}{(3+4k^2)^2}}\cdot\frac{\sqrt{3}|k|}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$=6\sqrt{\frac{k^2(k^2+3)}{(3+4k^2)^2}}。$$

令$\dfrac{1}{k}=m$，

则 $$S_{\triangle AOB}=6\sqrt{\frac{3m^2+1}{(3m^2+4)^2}}$$

$$=6\sqrt{\frac{3m^2+1}{[(3m^2+1)+3]^2}}$$

$$=6\sqrt{\frac{1}{(3m^2+1)+\dfrac{9}{3m^2+1}+6}}$$

$$\leqslant 6\sqrt{\frac{1}{12}}$$ （当且仅当 $m=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，

即 $k=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 时取“=”）

$$=\sqrt{3},$$

，△AOB 的面积的最大值为$\sqrt{3}$，这时直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}(x+\sqrt{3})$，

即 $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y+3=0$，$\sqrt{3}x-\sqrt{2}y+3=0$。

解法二 若直线 l 的斜率不存在，同解法一可知 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{3}{2}$（见图 10 - 29）。

若直线 l 的斜率存在，设为 $k(k\neq 0)$，

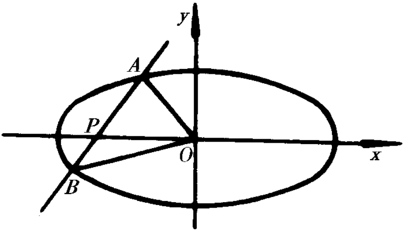


图 10 - 29

则直线 l **的方程为** $y=k(x+\sqrt{3})$。

令 $\frac{1}{k}=m$,**则直线** l **的方程为** $x=my-\sqrt{3}$,

由方程组 $\begin{cases}x=my-\sqrt{3},\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ **得** $3(my-\sqrt{3})^2+4y^2=12$,

整理可得 $(3m^2+4)y^2-6\sqrt{3}my-3=0$。

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,|y_1-y_2|$,

, $y_1+y_2=\frac{6\sqrt{3}m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{3}{3m^2+4}$,

, $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{6\sqrt{3}m}{3m^2+4}\right)^2+\frac{12}{3m^2+4}}$

$$=6\sqrt{\frac{3m^2+1}{(3m^2+4)^2}}$$

$$=6\sqrt{\frac{1}{(3m^2+1)+\frac{9}{3m^2+1}+6}}$$

$\leqslant 6\sqrt{\frac{1}{12}}$ (**当且仅当** $m=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ **时,取**‘ = ”)

$=\sqrt{3}$。

, $\triangle AOB$ **的面积的最大值为** $\sqrt{3}$,**这时直线** l **的方程为** $\sqrt{3}x+$

$\sqrt{2}y+3=0$，$\sqrt{3}x-\sqrt{2}y+3=0$。

说明　在两种解法中，我们都建立了△ABC 的面积关于变量 k 的函数。在解法一中，以 AB 为底，原点 O 到 AB 的距离为高，求△AOB 的面积，建立函数；在解法二中，以 OP 为底，求△AOP、△BOP 的面积和求△AOB 的面积，建立函数。

在两种解法中，建立函数后都是用基本不等式求得函数的最大值。

例 3　如图 10 - 30 所示，已知椭圆 $3x^2+y^2=6$ 中有一个内接三角形 PAB，其中点 $P(1,\sqrt{3})$，若 PA、PB 与 x 轴围成的三角形为等腰三角形，其中点 P 为顶点，

(1) 求直线 AB 的斜率；

(2) 求△PAB 的面积的最大值及此时直线 AB 的方程。

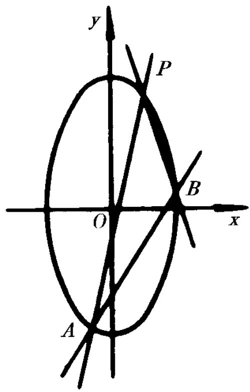


图 10 - 30

分析　由题设可知，直线 PA、PB 的斜率都存在且互为相反数，且制约着△PAB 的变化，从形式上看可以建立△PAB 的面积关于直线 PA、PB 的斜率的函数，但是，由题(1)可知，直线 AB 的斜率为定值，由此可知，直线 AB 的运动变化可以由其在 y 轴上的截距 m 来刻划，这就是说，△PAB 的面积随着直线 AB 在 y 轴上的截距 m 的变化而变化，即△PAB 的面积是直线 AB 在 y 轴上截距 m 的函数。

解(1) 由题设可知，直线 PA、PB 的斜率都存在且互为相反数，因此可设直线 PA、PB 的斜率分别为 k、- k，则直线 PA、PB 的方程分别为

$$y=k(x-1)+\sqrt{3},\quad y=-k(x-1)+\sqrt{3}。$$

由方程组 $\begin{cases}y=k(x-1)+\sqrt{3},\\3x^2+y^2=6,\end{cases}$ 消去 y 得

$$(3+k^2)x^2+2k(\sqrt{3}-k)x+(k^2-2\sqrt{3}k-3)=0。$$

, $$x_P\cdot x_A=\frac{k^2-2\sqrt{3}k-3}{3+k^2},$$

$$x_P=1,$$

, $$x_A=\frac{k^2-2\sqrt{3}k-3}{3+k^2},$$

以 $-k$ 代 k 得 $x_B=\dfrac{k^2+2\sqrt{3}k-3}{3+k^2}$,

, $$x_B-x_A=\frac{4\sqrt{3}k}{3+k^2},$$

, $$\begin{aligned}y_B-y_A&=-k(x_B+x_A)+2k\\&=-k\cdot\frac{2(k^2-3)}{3+k^2}+2k\\&=\frac{12k}{3+k^2},\end{aligned}$$

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\sqrt{3}。$$

(2)设直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}x+m$,代入椭圆方程 $3x^2+y^2=6$ 得

$$6x^2+2\sqrt{3}mx+m^2-6=0。$$

由 $\Delta>0$ 得 $-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$。

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,

则 $$x_1+x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}m,x_1x_2=\frac{m^2-6}{6},$$

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{1+3}|x_1-x_2|\\&=2\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{3}m)^2-\frac{2(m^2-6)}{3}}\\&=2\sqrt{\frac{12-m^2}{3}}。\end{aligned}$$

点 $P(1,\sqrt{3})$ 到直线 AB 的距离为$\frac{|m|}{2}$,

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{12-m^2}{3}}\cdot\frac{|m|}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2(12-m^2)}{3}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 36}\text{（当且仅当 } m=\pm\sqrt{6}\text{ 时,取“}=\text{”）}$$

$$=\sqrt{3}。$$

, $\triangle PAB$ 的面积的最大值为$\sqrt{3}$,此时,直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{6}$。

例 4　已知直线 l 与椭圆 $3x^2+y^2=3$ 相交于 A、B 两点,线段 AB 的中点 M 到椭圆中心的距离为 1,求当弦长 $|AB|$ 取得最大值时直线 l 的方程。

分析　由题设可知,直线 l 的斜率存在。

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,则直线 l 的运动变化可以用变量 k、m 来刻划,由弦长公式可以建立弦长 $|AB|$ 关于变量 k、m 的函数。由线段 AB 的中点 M 到椭圆中心的距离为 1,可以建立变量 k、m 的制约关系,即等量关系。

解　由题设可知,直线 l 的斜率存在。

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,

由方程组$\begin{cases}y=kx+m,\\3x^2+y^2=3,\end{cases}$

得　$3x^2+(kx+m)^2=3$,

整理得　$(3+k^2)x^2+2kmx+m^2-3=0$。

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(x,y)$,

则
$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{km}{3+k^2},$$

$$y=k\left(-\frac{km}{3+k^2}\right)+m=\frac{3m}{3+k^2},$$

$$M\left(-\frac{km}{3+k^2},\frac{3m}{3+k^2}\right)。$$

点 M 到椭圆中心的距离为 1，

$$\left(-\frac{km}{3+k^2}\right)^2+\left(\frac{3m}{3+k^2}\right)^2=1，$$

整理得 $$(k^2+9)m^2=(3+k^2)^2。$$

由弦长公式可得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{-2km}{3+k^2}\right)^2-\frac{4(m^2-3)}{3+k^2}}$，

整理得 $|AB|=2\sqrt{3}\sqrt{\frac{(k^2+1)(k^2+3-m^2)}{(3+k^2)^2}}$。

$$m^2=\frac{(3+k^2)^2}{k^2+9}，$$

$$|AB|=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{(k^2+1)\left[(k^2+3)-\frac{(3+k^2)^2}{k^2+9}\right]}{(3+k^2)^2}}$$

$$=2\sqrt{3}\sqrt{\frac{6(k^2+1)}{(k^2+3)(k^2+9)}}$$

$$=6\sqrt{2}\sqrt{\frac{k^2+1}{k^4+12k^2+27}}$$

$$=6\sqrt{2}\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2(k^2+1)+11(k^2+1)+16}}$$

$$=6\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{k^2+1+\frac{16}{k^2+1}+10}}$$

$$\leqslant 6\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{18}}$$

$$=2。$$

当且仅当 $k^2+1=\frac{16}{k^2+1}$，即 $k=\pm\sqrt{3}$ 时，取“ = ”，这时 $m^2=$

$\frac{[3+(\pm\sqrt{3})^2]^2}{(\pm\sqrt{3})^2+9}=3$,即 $m=\pm\sqrt{3}$。

,　　所求直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}=0$ 或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$ 或 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$ 或 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$。

说明　在解题过程中,建立了弦长 $|AB|$ 关于变量 k、m 的函数,$|AB|=2\sqrt{3}\sqrt{\frac{(k^2+1)(k^2+3-m^2)}{(3+k^2)^2}}$ 及变量 k、m 的等量关系式 $(k^2+9)m^2=(3+k^2)^2$,等量关系式对函数起了消元作用,最后用基本不等式求得函数的最大值,并求得相应变量 k 和 m 的取值。

例 5　如图 10-31 所示,抛物线 $x^2=4y$ 与圆 $x^2+y^2=32$ 相交于 A、B 两点,点 C 是圆与 y 轴的正方向的交点,直线 l 与圆相切,切点在弧 ACB 上,且交抛物线于 M、N 两点,d 是 M、N 两点到抛物线焦点的距离之和,试求 d 的最大值和最小值及相应直线 l 的方程。

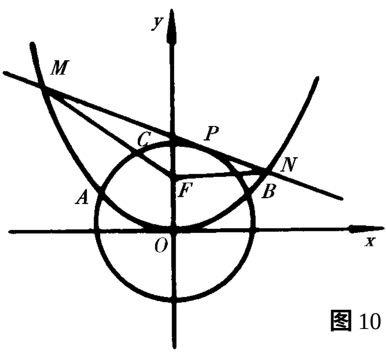


图 10-31

分析　由题设可知,直线 l 由其与圆上的弧 ACB 相切的切点定位,即直线 l 的变化可以用切点的坐标来刻划,从而直线 l 与抛物线的交点 M、N 的坐标也可以用切点的坐标表示。因此,点 M、N 到抛物线焦点的距离之和 d 也可以用切点坐标表示,由此可知,我们可以建立点 M、N 到抛物线焦点的距离之和 d 关于切点坐标的函数。

解　由方程组$\begin{cases}x^2=4y,\\x^2+y^2=32,\end{cases}$**得**$\begin{cases}x=-4,\\y=4,\end{cases}$**或**$\begin{cases}x=4,\\y=4。\end{cases}$

,　　$A(-4,4),B(4,4)$。

由方程组$\begin{cases}x=0(y>0),\\x^2+y^2=32,\end{cases}$**,得**$\begin{cases}x=0,\\y=4\sqrt{2}。\end{cases}$

,　　$C(0,4\sqrt{2})$。

设直线 l **与圆切于点** $P(x_0,y_0)(x_0^2+y_0^2=32,4\leqslant y_0\leqslant 4\sqrt{2})$,

则直线 l **的方程为** $x_0x+y_0y=32$。

由方程组$\begin{cases}x_0x+y_0y=32,\\x^2=4y,\end{cases}$**得** $(\frac{32-y_0y}{x_0})^2=4y$,

整理得　$y_0^2y^2-(64y_0+4x_0^2)y+1024=0$。

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,

则　$$y_1+y_2=\frac{64y_0+4x_0^2}{y_0^2}$$

$$=\frac{64y_0+4(32-y_0^2)}{y_0^2}。$$

由抛物线的定义可知,$d=|MF|+|NF|=(1+y_1)+(1+y_2)$
$=2+(y_1+y_2)$,

,　　$$d=2+\frac{64y_0^2+4(32-y_0^2)}{y_0^2}$$

$$=\frac{-2y_0^2+64y_0+128}{y_0^2}\quad y_0\in[4,4\sqrt{2}]\quad(*)。$$

方法 1　**由式**$(*)$**可得**

$$d=128(\frac{1}{y_0})^2+64\frac{1}{y_0}-2$$

$$=128(\frac{1}{y_0}+\frac{1}{4})^2-10。$$

$$y_0\in[4,4\sqrt{2}],$$

$$\frac{1}{y_0}\in[\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{4}]。$$

由关于$\frac{1}{y_0}$的函数在$[\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{4}]$上为单调增函数可知,当$y_0=4\sqrt{2}$时,$d_{min}=8\sqrt{2}+2$,这时切点的坐标为$(0,4\sqrt{2})$,直线l的方程为$y=4\sqrt{2}$;当$y_0=4$时,$d_{max}=22$,这时切点的坐标为$(-4,4)$或$(4,4)$、直线l的方程为$x-y+8=0$或$x+y-8=0$。

方法(2)　由式(*)可得,$(d+2)y_0^2-64y_0-128=0$　　$y_0\in[4,4\sqrt{2}]$,

令$f(y)=(d+2)y_0^2-64y_0-128$,

则由$d+2>0$,$-128<0$可知$f(4)f(4\sqrt{2})\leqslant 0$,即$(d-22)(d-8\sqrt{2}-2)\leqslant 0$,

,　$8\sqrt{2}+2\leqslant d\leqslant 22$。

$d_{min}=8\sqrt{2}+2$,这时$y_0=4\sqrt{2}$,切点坐标为$(0,4\sqrt{2})$,直线l的方程为$y=4\sqrt{2}$;$d_{max}=22$,这时$y_0=4$,切点坐标为$(-4,4)$或$(4,4)$,直线l的方程为$x-y+8=0$或$x+y-8=0$。

说明　在解答过程中,建立了变量d与y_0的函数关系$d=\frac{-2y_0^2+64y_0+128}{y_0^2}$。在处理方法(1)中,将变量关系等式看成d是关于变量y_0的函数,并转换成关于$\frac{1}{y_0}$的一元二次函数,再利用函数在$[\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{4}]$上为单调增函数求得变量d的最大值和最小值。

在处理方法(2)中,将变量关系等式看成关于变量y_0的方程,然后利用方程在$[4,4\sqrt{2}]$上有解,求得变量d的最大值和最小值。

从以上两种处理变量关系等式的方法可知,我们可以用函数或方程的观点看待变量关系等式,求得变量的最大值或最小值。

例6　如图10-32所示,设P是直线$x-y+9=0$上的一点,过点P的椭圆以双曲线$4x^2-5y^2=20$的焦点为焦点,试求点P在什么位置时,所求椭圆的长轴最短,并写出这个具有最短长轴的椭圆方程。

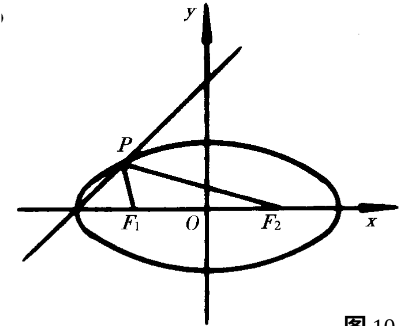


图 10 - 32

分析　由题设可知，椭圆是以双曲线 $4x^2-5y^2=20$ 的焦点 $(-3,0)$，$(3,0)$ 为焦点，并经过直线 $x-y+9=0$ 上一动点 P 的动椭圆，这就是说，椭圆随着点 P 在直线 $x-y+9=0$ 上的运动变化而变化。因此，椭圆的长轴长与动点 P 的坐标存在着互相联系、互相制约的依存关系。

解　由题设可知，椭圆的焦点坐标为 $(-3,0)$，$(3,0)$。

设椭圆的半长轴长为 a，则椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-9}=1$。

设点 P 为直线 $x-y+9=0$ 上一点，则点 P 的坐标可设为 $(x, x+9)$。

点 P 在椭圆上，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(x+9)^2}{a^2-9}=1$，

$$(a^2-9)x^2+a^2(x+9)^2-a^2(a^2-9)=0 \quad (*),$$

整理可得　$(2a^2-9)x^2+18a^2x-a^4+90a^2=0$。

$x\in R$，

,　$\Delta=(18a^2)^2-4(2a^2-9)(-a^4+90a^2)\geqslant 0$，

整理可得　$a^4-54a^2+9\times 45\geqslant 0$，

$(a^2-9)(a^2-45)\geqslant 0$。

$a^2-9>0$，

,　$a^2\geqslant 45$，

,　椭圆长轴长的最小值为 $6\sqrt{5}$，这时椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}$

$=1$。

这时方程（$*$）化为$(x+5)^2=0$，

,　　$x=-5$，

,　　点 P 的坐标为$(-5,4)$。

说明　在解题过程中，我们建立了关于变量 a 与 x 的关系等式（$*$），这一等式刻划了点 P 的运动变化与椭圆变化的关系，然后将等式（$*$）看作关于 x 的方程，并由方程在 R 上有解建立了变量 a 的不等式，再解不等式求得变量 a 的最小值及相应椭圆的方程、点 P 的坐标。

例 7　定长为 3 的线段 AB 的两个端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动，设线段 AB 的中点为 M，求点 M 到 y 轴的最短距离，并求此时点 M 的坐标。

分析　设直线 AB 的方程为 $x=my+a$，则直线 AB 在坐标平面内的运动变化可以用变量 m、a 来刻划，从而线段 AB 的中点 M 的坐标可以用变量 m、a 表示，因此中点 M 到 y 轴的距离也可以用变量 m、a 表示。

由线段 AB 的长$|AB|=3$可知，变量 m、a 之间存在着制约关系，即等量关系$|AB|=3$可以转换成变量 m、a 的关系等式。

解法一　设直线 AB 的方程为 $x=my+a$，

由方程组$\begin{cases}x=my+a,\\ y^2=x,\end{cases}$，可得 $y^2-my-a=0$。

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x,y)$，

则　$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{m}{2}$，

$x=m\cdot\dfrac{m}{2}+a=\dfrac{1}{2}m^2+a$。

$|AB|=3$，

,　$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=9,$$

$$(y_1^2-y_2^2)^2+(y_1-y_2)^2=9,$$

$$(y_1-y_2)^2[(y_1+y_2)^2+1]=9,$$

$$[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2][(y_1+y_2)^2+1]=9。$$

$$y_1+y_2=m, y_1y_2=-a,$$

, $$(m^2+4a)(m^2+1)=9,$$

, $$a=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{m^2+1}-m^2\right),$$

, $$\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}m^2+a\\&=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{4}\left(\frac{9}{m^2+1}-m^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{m^2+1}+m^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{9}{m^2+1}+(m^2+1)\right]-\frac{1}{4}\\&\geqslant\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{\frac{9}{m^2+1}(m^2+1)}-\frac{1}{4}\\&=\frac{5}{4}。\end{aligned}$$

当且仅当$\frac{9}{m^2+1}=m^2+1$，**即** $m=\pm\sqrt{2}$**时，取"="。**

, **点** M **到** y **轴的最短距离为**$\frac{5}{4}$，**这时点** M **的坐标为**$\left(\frac{5}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$**或**$\left(\frac{5}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

解法二　设直线 AB **的方程为** $x=my+a$，

由方程组$\begin{cases}x=my+a,\\y^2=x,\end{cases}$

可得　$y^2-my-a=0$。

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x,y)$，

则 $$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m}{2},$$

$$x=m\cdot\frac{m}{2}+a=\frac{1}{2}m^2+a。$$

$$|AB| = 3,$$

, $$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 9,$$

$$(y_1^2 - y_2^2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 9,$$

$$(y_1 - y_2)^2[(y_1 + y_2)^2 + 1] = 9,$$

$$[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2][(y_1 + y_2)^2 + 1] = 9。$$

$$y_1 + y_2 = m, y_1y_2 = -a,$$

, $$(m^2 + 4a)(m^2 + 1) = 9。$$

$$x = \frac{1}{2}m^2 + a, y = \frac{1}{2}m,$$

, $(4x - 4y^2)(4y^2 + 1) = 9$,**即得线段 AB 的中点 M 的轨迹方程。**

$$\begin{aligned} 4x &= \frac{9}{4y^2 + 1} + 4y^2 \\ &= \frac{9}{4y^2 + 1} + (4y^2 + 1) - 1 \\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{4y^2 + 1}(4y^2 + 1)} - 1 \\ &= 5。 \end{aligned}$$

当且仅当$\frac{9}{4y^2 + 1} = 4y^2 + 1$,**即** $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$**时,取"** = **"。**

$x \geqslant \frac{5}{4}$,

, **点** M **到** y **轴的最短距离为**$\frac{5}{4}$,**这时点** M **的坐标为**$\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$**或**$\left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

解法三　同解法二得线段 AB **的中点** M **的轨迹方程**$(4x - 4y^2)(4y^2 + 1) = 9$,

即　$16y^4 + 4(1 - 4x)y^2 + 9 - 4x = 0$。

令　$y^2 = t, t \geqslant 0$,

则　$16t^2+4(1-4x)t+9-4x=0$。

令　$f(t)=16t^2+4(1-4x)t+9-4x$，

则函数 $f(t)$ **的图像与** t **轴在** $[0,+\ \ )$ **上有公共点，因此**

(1)　$\begin{cases}4x-1\geqslant 0, \\ 9-4x\geqslant 0, \\ \Delta=16(1-4x)^2-64(9-4x)\geqslant 0。\end{cases}$

$\frac{5}{4}\leqslant x\leqslant\frac{9}{4}$。

(2)　$f(0)\leqslant 0$，**即** $9-4x\leqslant 0$，

$x\geqslant\frac{9}{4}$。

综上所述 $x\geqslant\frac{5}{4}$。

，　**点** M **到** y **轴的最短距离为** $\frac{5}{4}$，**这时点** M **的坐标为** $\left(\frac{5}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **或** $\left(\frac{5}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

说明　**在解法一中，建立了点** M **到** y **轴的距离的函数** $x=\frac{1}{2}m^2+a$，**变量** m、a **的关系等式对函数起了消元作用，使二元函数化为关于** m **的一元函数，然后用基本不等式求得点** M **到** y **轴的最短距离。**

在解法二和解法三中，我们建立了线段 AB **的中点** M **的轨迹方程** $(4x-4y^2)(4y^2+1)=9$。

在解法二中，我们将轨迹方程转换成点 M **到** y **轴的距离的函数** $x=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{4y^2+1}+4y^2\right)$，**然后用基本不等式求得点** M **到** y **轴的最短距离。**

在解法三中，我们将轨迹方程看作关于 y^2 **的一元二次方程** $16y^4+4(1-4x)y^2+9-4x=0$，**然后由方程在** $[0,+\ \ )$ **上有解，利用一元二次函数图像的性质，求得点** M **到** y **轴的最短距离。**

例 8　已知椭圆的中心在坐标原点,长轴在 x 轴上,离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,且点 $P\left(0,\frac{3}{2}\right)$到椭圆上的点的最大距离为$\sqrt{7}$,求这个椭圆的方程。

分析　由题设可知,椭圆方程可设为$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**,即椭圆的变化可以用变量 b 来刻划,由此可知,点 P 到椭圆上的点的最大距离可表示为变量 b 的函数。**

由点 P 到椭圆上的点的最大距离为$\sqrt{7}$可知,$\sqrt{7}$为点 P 到椭圆上的点的最大距离函数的函数值,由此可以求得 b 的取值。

解　　椭圆的中心在原点,长轴长在 x 轴上。

,　**可设椭圆的方程为**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$。

离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,　**即**　$a^2=4b^2$,

,　**椭圆方程为**$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

设点 Q(x,y)为椭圆上任意一点,

则点 $P\left(0,\frac{3}{2}\right)$到椭圆上任意一点 Q(x,y)的距离为 $|PQ|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}$。

$$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

,
$$x^2+4y^2=4b^2,$$
$$x^2=4b^2-4y^2。$$

$$|PQ|=\sqrt{4b^2-4y^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{-3y^2 - 3y + 4b^2 + \frac{9}{4}}$$

$$= \sqrt{-3\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 4b^2 + 3} \qquad y \in [-b, b]。$$

(1)若 $-\frac{1}{2} \leqslant -b$**,即** $b \leqslant \frac{1}{2}$**,**

则

$$|PQ|_{max} = \sqrt{-3\left(-b + \frac{1}{2}\right)^2 + 4b^2 + 3}$$

$$= \sqrt{b^2 + 3b + \frac{3}{4}}。$$

令

$$\sqrt{b^2 + 3b + \frac{3}{4}} = \sqrt{7},$$

则

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{34}}{2}。$$

$$b = \frac{-3 - \sqrt{34}}{2} < 0,$$

$$b = \frac{-3 + \sqrt{34}}{2} > \frac{1}{2},$$

, **这种情况不可能。**

(2)若 $-\frac{1}{2} > -b$**,即** $b > \frac{1}{2}$**,**

则 $|PQ|_{max} = \sqrt{4b^2 + 3}$。

令 $\sqrt{4b^2 + 3} = \sqrt{7}$,

则 $b^2 = 1$,

, $a^2 = 4$。

, **所求椭圆圆方程为** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

说明　在解题过程中,我们建立了一个点 $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$**到椭圆上任意一点的距离** $|PQ|$ **关于** b **的函数的最大值函数:**

$$|PQ|_{max}=\begin{cases}\sqrt{b^2+3b+\dfrac{3}{4}} & b\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \sqrt{4b^2+3} & b>\dfrac{1}{2}。\end{cases}$$

然后,求了这个函数在函数值为$\sqrt{7}$时的自变量 b **的取值(**$b=1$**)。**

由以上的例可知,在求变量的最值问题时,必须有创设变量,建立变量的关系等式的意识,并且有以函数、方程的观点看待变量的等量关系式的意识。

最后,必须指出,在二次曲线中求最值,也可以利用几何性质直接求解,下面我们利用这一方法解例 6。

解　由题设可知,所求点 P **就是直线** $x-y+9=0$ **上到两焦点** $F_1(-3,0)$,$F_2(3,0)$ **距离和最小的点,由平几知识可知,点** P **为** $F_1(-3,0)$ **关于直线** $x-y+9=0$ **的对称点** F'_1 **与** $F_2(3,0)$ **的连线与直线** $x-y+9=0$ **的交点。**

设 $F'_1(m,n)$,

则
$$\begin{cases}\dfrac{n}{m+3}=-1,\\ \dfrac{m-3}{2}-\dfrac{n}{2}+9=0,\end{cases}$$

解得　$m=-9$,$n=6$,

,　$F'_1(-9,6)$

,　**直线** $F_2F'_1$ **的方程为** $x+2y-3=0$。

由方程组 $\begin{cases}x-y+9=0,\\ x+2y-3=0,\end{cases}$ **得** $x=-5$,$y=4$。

,　$P(-5,4)$。

点 $P(-5,4)$ **到** $F_1(-3,0)$,$F_2(3,0)$ **的距离和为** $6\sqrt{5}$,

,　$a=3\sqrt{5}$,

$c=3$,

,　$b^2=36$,

∴ 所求椭圆方程为$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$,这时点 P 为$(-5,4)$。

练 习 题

1. 已知一动直线 $y=x+t$ 与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A、B 两点,求$|AB|$的最大值。

2. 已知点 P 在圆 $x^2+(y-4)^2=1$ 上移动,点 Q 在椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上移动,求$|PQ|$的最大值。

3. 已知 ΔAOB 是以原点 O 为直角顶点的抛物线 $x^2=2py(p>0)$的内接直角三角形,求 ΔAOB 面积的最小值。

4. 过点 $P(11,0)$作倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线交抛物线 $y^2=4x$ 于 R、Q 两点,再作与 RQ 平行的直线交抛物线弧 ROQ 于 M、N 两点,求 ΔPMN 面积的最大值。

5. 在直线 $l:x-y+5=0$ 上任取一点 P,过点 P 且以椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点为焦点作椭圆,问点 P 在何位置时,所作椭圆的长轴最短。

6. 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点 F_1 作直线交椭圆于 A、B 两点,求以椭圆的右焦点 F_2 和 A、B 为顶点的 ΔF_2AB 的面积的最大值。

7. 若椭圆的中心在原点,长轴在 x 轴上,离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,点 $F(1,0)$到椭圆上的点的最近距离为$\frac{2}{3}$,求椭圆的方程。

第十一章　坐 标 变 换

一、移轴与移图(曲线)

(一)函数中的移轴与移图

在函数的学习中知道,常用下面的两种方法作出函数 $y=f(x-a)+b$ 的图像:

(1)先在坐标平面内建立一个以点(a,b)为原点,坐标轴的方向和长度单位都不改变的新坐标系,然后在新坐标系中画出函数 $y'=f(x')$ 的图像,即可得在原坐标系中函数 $y=f(x-a)+b$ 的图像。我们称这种方法为移轴法。

(2)先在坐标平面内画出函数 $y=f(x)$ 的图像,再把这个图像向右$(a>0)$或向左$(a<0)$平行移动$|a|$个单位,并向上$(b>0)$或向下$(b<0)$平行移动$|b|$个单位,所得图像即为函数 $y=f(x-a)+b$ 的图像。我们称这种方法为移图法。

例1　作出函数 $y=\dfrac{3x+4}{x+1}$的图像。

解法一　$y=\dfrac{3x+4}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+3$。

(1)在坐标平面 xOy 内以 $O'(1-1,3)$为新原点建立新坐标系 $x'O'y'$。

(2)在新坐标系 $x'O'y'$ 中作出函数 $y'=\dfrac{1}{x'}$的图像,即得原坐标系 xOy 中的函数 $y=\dfrac{3x+4}{x+1}$的图像(见图 11-1)。

解法二　$y=\dfrac{3x+4}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+3$。

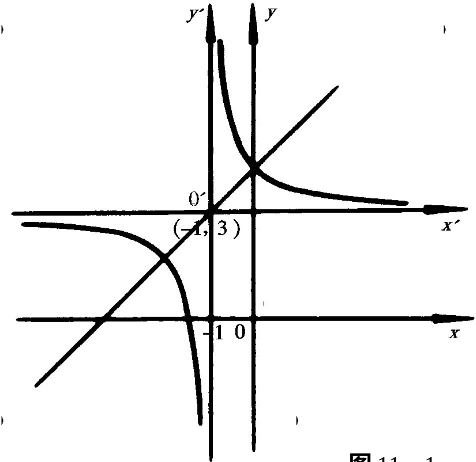


图 11 - 1

(1) 作出函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像，

(2) 将函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像向左平行移动 1 个单位并再向上平行移动 3 个单位，即得函数 $y=\frac{3x+4}{x+1}$ 的图像（见图 11 - 2）。

(二) 移轴、移图与新坐标、新方程

(1) 若在坐标平面 xOy 内建立一个以点 (h，k) 为原点，坐标轴的方向和长度单位都不改变的新坐标系 x'O'y'，这就是移轴，则在原坐标平面 xOy 内的点 P 和曲线 C 在新坐标平面 x'O'y' 内就分别有了新的坐标、新的方程。

设点 P 在原坐标系下的坐标为 (x，y)，在新坐标系下的坐标为 (x'，y')，这时 $x=x'+h$，$y=y'+k$，，$x'=x-h$，$y'=y-k$，即点 P 的新坐标为 $(x-h，y-k)$。

设曲线 C 在原坐标系下的方程为 $f(x,y)=0$，$x=x'+h$，$y=y'+k$，则曲线 C 在新坐标系下的方程为 $f(x'+h，y'+k)=0$。

(2) 若在坐标平面 xOy 内，将点 P 向右 $(h>0)$ 或向左 $(h<0)$ 平行移动 $|h|$ 个单位，并向上 $(k>0)$ 或向下 $(k<0)$ 移动 $|k|$ 个单

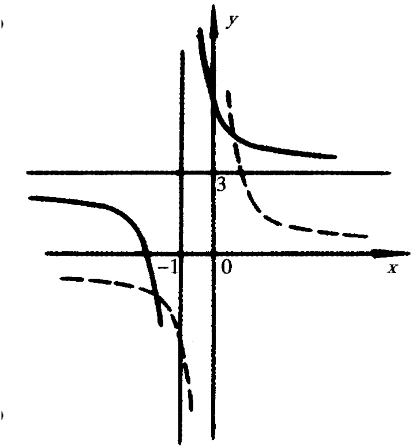


图 11 - 2

位,这就是移点,则在原坐标系下,点 P 就有了新的坐标。设点 P 的原坐标为(x,y),则点 P 在原坐标系下的新坐标为$(x+h,y+k)$。

若在坐标平面 xOy 内,将曲线 C 上任意一点向右$(h>0)$或向左$(h<0)$移动$|h|$个单位,并向上$(k>0)$或向下$(k<0)$移动$|k|$个单位,即将曲线 C 作向右或向左,且作向上或向下的移动,这就是移曲线,则在原坐标下,曲线 C 就有了新的方程。设曲线 C 的原方程为 $f(x,y)=0$,则曲线 C 在原坐标系下的新方程为 $f(x-h,y-k)=0$

即 $f(x,y)=0\ \xrightarrow[\text{向上平移 } k \text{ 个单位}:y\to y-k]{\text{向右平移 } h \text{ 个单位}:x\to x-h}\ f(x-h,y-k)=0$。

例 2 把坐标系的原点移到 $O'(2,1)$,求曲线 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 在新坐标系下的方程。

分析 曲线所在平面内有两个坐标系,在不同的坐标系下曲线有不同的方程,本题是求曲线在新坐标系下的新方程。

解 由题设可知,$x=x'+2,y=y'+1$,代入原方程得

$$(x'+2)^2+(y'+1)^2-4(x'+2)-2(y'+1)=0$$

整理可得 $x'^2+y'^2=5$。

例 3 平移双曲线 $x^2-3y^2+2x-2=0$，把它的中心移到它的右焦点处，求这时双曲线的渐近线方程。

分析 按题设，双曲线在同一坐标系下作了平移，其渐近线也作了同样的平移。这样，双曲线及其渐近线在同一坐标系下有了新的位置，从而双曲线及其渐近线就有了新的方程。

解 双曲线的方程可以化为 $\frac{(x+1)^2}{3}-y^2=1$

, 双曲线的中心坐标为 $(-1,0)$，右焦点的坐标为 $(1,0)$，这就是说，按题设双曲线向右平行移动 2 个单位。

, 双曲线的新方程为 $\frac{[(x-2)+1]^2}{3}-y^2=1$，即 $\frac{(x-1)^2}{3}-y^2=1$。

, 双曲线的渐近线方程为 $\frac{(x-1)^2}{3}-y^2=0$，即 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 或 $x+\sqrt{3}y-1=0$。

例 4 已知直线 $l:3x-4y-5=0$，圆 $C:x^2+y^2+2x-4y+1=0$，则

(1) 直线 l 向左或向右平行移动多少个单位才能与圆相切；

(2) 圆 C 向下或向上平行移动多少个单位才能与直线 l 相切。

分析 这是一个在同一坐标系下移动曲线的问题。

解 (1) 设直线 l 向左或向右平行移动 $|h|$ 个单位才能与圆 C 相切，则直线 l 的方程为 $3(x-h)-4y-5=0$，即 $3x-4y-3h-5=0$。

圆 C 的方程化为 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$，

, $$\frac{|3\times(-1)-4\times2-3h-5|}{5}=2,$$

整理得 $|3h+16|=10$，

, $h=-2$ 或 $h=-\frac{26}{3}$。

, 　直线 l 向左平行移动 2 个或$\frac{26}{3}$个单位才能与圆 C 相切。

(2) 设圆 C 向上或向下平行移动 $|k|$ 个单位才能与直线 l 相切,则圆 C 的方程为 $x^2+(y-k)^2+2x-4(y-k)^2+1=0$,即 $(x+1)^2+[y-(2+k)]^2=4$,

$$\frac{|3\times(-1)-4\times(2+k)-5|}{5}=2,$$

整理得 $|4k+16|=10$,

$K=-\frac{3}{2}$ 或 $k=-\frac{13}{2}$,

, 　圆 C 向下平行移动$\frac{3}{2}$个或$\frac{13}{2}$个单位才能与直线 l 相切。

练 习 题

1. 平移坐标轴,把原点平移到 $O'(-1,2)$,求:

(1) 点 $M(3,4)$ 的新坐标;

(2) 在新坐标系下点 $N(3,4)$ 的原坐标;

(3) 曲线 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 在新坐标系下的方程。

2. 将曲线 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 沿 x 轴向左平移 1 个单位,沿 y 轴向上平移 3 个单位,此时截直线 $2x-y-a=0$ 所得弦长为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$,求 a 的取值。

3. 将抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 沿 x 轴正方向平移 1 个单位,再沿 y 轴负方向平移 3 个单位得抛物线 $y=(c-1)x^2+(b-2)x+(a-3)$,求 a、b、c 的值。

4. 平移坐标轴,使点 $(-2,6)$ 在新坐标系下的坐标为 $(-4,3)$,求新坐标系中方程是 $x'+3y'=0$ 的曲线在原坐标系中的方程。

二、平移坐标轴化简方程及其应用

(一) 平移坐标轴化简方程

平移坐标轴的目的是化简方程，常用的方法有代入法和配方法两种，一般配方法更为简便。

例1 化简方程 $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$。

解法一 （代入法）

将平移公式 $\begin{cases} x=x'+h, \\ y=y'+k, \end{cases}$ 代入原方程，整理得

$4x'^2+9y'^2+8(h+2)x'+18(k-1)y'+4h^2+9k^2+16h-18k-11=0$。

令 $\begin{cases} 8(h+2)=0, \\ 18(k-1)=0。 \end{cases}$

则 $h=-2, k=1$。

, 将原点平移到 $O'(-2,1)$，原方程可以化简为 $4x'^2+9y'^2=36$，即 $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$。

解法二 （配方法）

将原方程配方得 $4(x+2)^2+9(y-1)^2=36$，即 $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$。

令 $\begin{cases} x+2=x', \\ y-1=y'。 \end{cases}$

则 方程化为 $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$。

例2 化简方程 $xy-x+3y-9=0$，并指出方程表示的曲线。

解法一 （代入法）

将平移公式 $\begin{cases} x=x'+h, \\ y=y'+k, \end{cases}$ 代入原方程，整理得，

$(x'+h)(y'+k)-(x'+h)+3(y'+k)-9=0$，

即 $x'y'+(k-1)x'+(h+3)y'=9-hk+h-3k$。

令 $\begin{cases} h+3=0, \\ k-1=0。 \end{cases}$

则　$h=-3, k=1$,

$\therefore$　原方程化简为 $x'y'=6$,即 $y'=\frac{6}{x'}$,

$\therefore$　原方程表示双曲线。

解法二　(配方法)

原方程可以化为$(x+3)(y-1)=6$。

令 $\begin{cases} x+3=x', \\ y-1=y'。\end{cases}$

则方程化为 $x'y'=6$,即 $y'=\frac{6}{x'}$,

$\therefore$　原方程表示双曲线。

(二)平移化简方程的应用

坐标变换的中心问题,就是探讨当坐标系变换时,曲线方程变化的规律。

在坐标系变换时,点的坐标或曲线的方程都发生了变化,但点或曲线本身并不变,即曲线的形状、大小以及与曲线相关的几何元素的相对位置关系与坐标系的选择无关。因此,把一个坐标系变换为另一个适当的坐标系,可以使曲线的方程简化,便于研究曲线的性质。

例 3　过点 $A(5,-2)$的直线 l 交双曲线 $x^2-4y^2-4x-24y-36=0$ 于点 P_1、P_2,A 恰为线段 P_1P_2 的中点,求弦 P_1P_2 的长。

分析　若直接求解,则运算较繁。若在原坐标平面内建立一个恰当的新坐标系,将双曲线方程化成标准方程,则题设中所有几何元素就置于新坐标系之中,且这些几何元素的相对位置关系不变,特别注意到弦 P_1P_2 的长不变。

解法一　由题设可知,直线 l 的斜率存在,设为 k,则直线 l 的方程为 $y=k(x-5)-2$。

由方程组$\begin{cases} y=k(x-5)-2, \\ x^2-4y^2-4x-24y-36=0, \end{cases}$消去 y,整理得,

$(1-4k^2)x^2+[8k(5k+2)-4-24k]x-4(5k+2)^2+$

$$24(5k+2)-36=0,$$

即 $(1-4k^2)x^2+(40k^2-8k-4)x-100k^2+40k-4=0$　(*)

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，

则由点 A 为线段 P_1P_2 的中点可知，$x_1+x_2=10$，

, $$\frac{40k^2-8k-4}{4k^2-1}=10,$$

$$k=\frac{3}{4}。$$

这时方程(*)为 $5x^2-50x+121=0$，

$\Delta=50^2-4\times5\times121=80>0$。

$x_1+x_2=10$，$x_1x_2=\frac{121}{5}$，

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{10^2-4\cdot\frac{121}{5}}=\sqrt{5}。$$

解法二　设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}x_1^2-4y_1^2-4x_1-24y_1-36=0,\\ x_2^2-4y_2^2-4x_2-24y_2-36=0。\end{cases}$

两式相减可得　$(x_1+x_2)(x_1-x_2)-4(y_1+y_2)(y_1-y_2)-4(x_1-x_2)-24(y_1-y_2)=0$。

点 A 为线段 P_1P_2 的中点，

, $x_1+x_2=10$，$y_1+y_2=-4$，

, $10(x_1-x_2)+16(y_1-y_2)-4(x_1-x_2)-24(y_1-y_2)=0$，

即　$6(x_1-x_2)-8(y_1-y_2)=0$，

由题设可知　$x_1\neq x_2$，

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3}{4}$，即直线 l 的斜率为 $\frac{3}{4}$，

, 直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}(x-5)-2$。

由方程组 $\begin{cases}y=\frac{3}{4}(x-5)-2,\\ x^2-4y^2-4x-24y-36=0,\end{cases}$　消去 y，

整理得 $5x^2-50x+121=0$，

$\Delta=50^2-4\times5\times121=80>0$，

$x_1+x_2=10$，$x_1x_2=\dfrac{121}{5}$，

，$|P_1P_2|=\sqrt{1+(\dfrac{3}{4})^2}\cdot\sqrt{10^2-4\cdot\dfrac{121}{5}}$

$=\sqrt{5}$。

下面，在原坐标平面内平移坐标轴建立一个新坐标系，使双曲线方程化简为标准方程，给出类似的两种解法，由此体会到坐标平移在有关问题的解题过程中的作用。

解法三 **双曲线方程化为**$(x-2)^2-4(y+3)^2=4$。

令 $x-2=x'$，$y+3=y'$，**平移坐标系，将原点** O **移到** $O'(2,-3)$，**得** $x'^2-4y'^2=4$。

在新坐标系下点 A **的坐标为**$(3,1)$。

由题设可知，直线 l **的斜率存在，设为** k，**则直线** l **的方程为** $y'=k(x'-3)+1$

由方程组$\begin{cases}y'=k(x'-3)+1,\\x'^2-4y'^2=4,\end{cases}$**消去** y'，

整理得 $5x'^2-30x'+41=0$，

$\Delta=(-30)^2-4\times5\times121=80>0$，

$x_1'+x_2'=6$，$x_1'x_2'=\dfrac{41}{5}$，

，$|P_1P_2|=\sqrt{1+(\dfrac{3}{4})^2}\cdot\sqrt{6^2-4\cdot\dfrac{41}{5}}=\sqrt{5}$。

解法四 **双曲线的方程化为**$(x-2)^2-4(y+3)^2=4$。

令 $x-2=x'$，$y+3=y'$，**平移坐标系将原点** O **移到** $O'(2,-3)$**得** $x'^2-4y'^2=4$。

在新坐标系下点 A **的坐标为**$(3,1)$。

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases} x'^2_1 - 4y'^2_1 = 4, \\ x'^2_2 - 4y'^2_2 = 4, \end{cases}$

两式相减可得 $(x_1' + x_2')(x_1' - x_2') - 4(y_1' + y_2')(y_1' - y_2') = 0$。

点 A 为线段 P_1P_2 的中点,

, $x_1' + x_2' = 6, y_1' + y_2' = 2$,

, $6(x_1' - x_2') - 8(y_1' - y_2') = 0$,

$x_1' \neq x_2'$,

$\frac{y_1' - y_2'}{x_1' - x_2'} = \frac{3}{4}$,即直线 l 的斜率为$\frac{3}{4}$。

, 直线 l 的方程为 $y' = \frac{3}{4}(x' - 3) + 1$,即 $y' = \frac{3}{4}x' - \frac{5}{4}$

由方程组$\begin{cases} y' = \frac{3}{4}x' - \frac{5}{4}, \\ x'^2 - 4y'^2 = 4, \end{cases}$消去 y',

整理得 $5x'^2 - 30x' + 41 = 0$,

$\Delta = (-30)^2 - 4 \times 5 \times 121 = 80 > 0$,

$x_1' + x_2' = 6, x_1'x_2' = \frac{41}{5}$,

$$|P_1P_2| = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{6^2 - 4 \cdot \frac{41}{5}} = \sqrt{5}。$$

说明　在以上解题过程中,关键是确定直线 l 的方程。在以上给出的几种解法中,都用建立关于 k 的方程的思想方法求 k。

例 4　过坐标原点的直线 l 与椭圆$\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相交于 A、B 两点,若以 AB 为直径的圆恰好通过椭圆的左焦点 F,求直线 l 的倾斜角。

分析　本题可以直接求解,也可以平移坐标系求解,特别要注意到,平移坐标系并不改变直线 l 的斜率,即倾斜角不变。

解法一　由题设椭圆方程可知,椭圆的左焦点 F 的坐标为(1,0)。

由题设可知,直线 l 的斜率存在,设为 k,则直线 l 的方程为 $y=kx$,

由方程组 $\begin{cases} y=kx, \\ \dfrac{(x-3)^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 消去 y,

整理得 $(1+3k^2)x^2-6x+3=0$。

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\dfrac{6}{1+3k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{3}{1+3k^2}$。

以 AB 为直径为圆方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$,

又 圆过点 $F(1,0)$,

, $(1-x_1)(1-x_2)+y_1y_2=0$。

$y_1=kx_1$,$y_2=kx_2$,

, $(1-x_1)(1-x_2)+kx_1kx_2=0$,

$(1+k^2)x_1x_2-(x_1+x_2)+1=0$,

$$(1+k^2)\cdot\frac{3}{1+3k^2}-\frac{6}{1+3k^2}+1=0$$

$k^2=\dfrac{1}{3}$,$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$(经检验知可取),

, 直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$。

解法二 由题设椭圆方程可知,椭圆的左焦点 F 的坐标为 $(1,0)$。

设 $x'=x-3$,$y'=y$,平移坐标系将原点 O 移到 $O'(3,0)$,则椭圆的新方程为 $\dfrac{x'^2}{6}+\dfrac{y'^2}{2}=1$。

椭圆的左焦点的新坐标为 $(-2,0)$,原坐标系原点的新坐标为 $(-3,0)$

由题设可知,直线 l 的斜率存在,设为 k,则直线 l 的新方程为 $y'=k(x'+3)$

由方程组$\begin{cases} y'=k(x'+3) \\ \dfrac{x'^2}{6}+\dfrac{y'^2}{2}=1 \end{cases}$消去 y'，

整理得　$(1+3k^2)x'^2+18k^2x'+27k^2-6=0$。

设　$A(x_1',y_1')$，$B(x_2',y_2')$，

则　$x_1'+x_2'=\dfrac{-18k^2}{1+3k^2}$，$x_1'x_2'=\dfrac{27k^2-6}{1+3k^2}$。

以 AB 为直径的圆方程为$(x'-x_1')(x'-x_2')+(y'-y_1')(y'-y_2')=0$，

又　　圆过点 $F(-2,0)$，

，　　$(2+x_1')(2+x_2')+y_1'y_2'=0$，

$y_1'=k(x_1'+3)$，$y_2'=k(x_2'+3)$，

，　　$(2+x_1')(2+x_2')+k^2(x_1'+3)(x_2'+3)=0$，

$$(1+k^2)x_1'x_2'+(2+3k^2)(x_1'+x_2')+(4+9k^2)=0,$$

$$(1+k^2)\frac{27k^2-6}{1+3k^2}+(2+3k^2)\frac{-18k^2}{1+3k^3}+(4+9k^2)=0,$$

$$k^2=\frac{1}{3},$$

$$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$　（经检验知可取）。

直线 l 的倾斜角为$\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$。

说明　比较两种解法可知，解法二并没有因平移坐标系而减少运算量，这就是说，平移坐标系能简化方程，可以将二次曲线问题转化成二次曲线的标准方程形式处理，但并不一定能减少解题过程中的运算量。

例 5　已知抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{5}{2}$，求经过抛物线的焦点的直线被抛物线所截得的线段的中点的轨迹方程。

分析 本题可以在原坐标系下直接求轨迹方程,也可以转换到新坐标系下就抛物线的标准方程求轨迹的新方程,再将轨迹新方程转换成原坐标系下的轨迹方程。

解法一 抛物线的方程可以化为$(x-1)^2=2(y+3)$,

, 抛物线的焦点坐标为$(1,-\frac{5}{2})$。

由题设可知,过抛物线的焦点且与抛物线有两个交点的直线的斜率存在,设为 k,则直线的方程为 $y=k(x-1)-\frac{5}{2}$。

由方程组$\begin{cases} y=k(x-1)-\frac{5}{2}, \\ y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}, \end{cases}$消去 y,

整理得 $x^2-2(k+1)x+2k=0$,

$\Delta=4(k+1)^2-8k=4k^2+4>0$。

设直线与抛物线的两个交点为 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,线段 P_1P_2 的中点为 $P(x,y)$,则 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=k+1$,

, $k=x-1$。

将 $k=x-1$ 代入方程 $y=k(x-1)-\frac{5}{2}$,整理得$(x-1)^2=y+\frac{5}{2}$,即为所求轨迹方程。

解法二 抛物线的方程可以化为$(x-1)^2=2(y+3)$。

令 $x'=x-1$,$y'=y+3$,

则抛物线在新坐标系下的方程为 $x'^2=2y'$,其焦点坐标为$(0,\frac{1}{2})$。

由题设可知,过抛物线的焦点且与抛物线有两个交点的直线的斜率存在,设为 k,则直线的方程为 $y'=kx'+\frac{1}{2}$。

由方程组$\begin{cases} y' = kx' + \dfrac{1}{2}, \\ x'^2 = 2y', \end{cases}$消去 y',

整理得 $x'^2 - 2kx' - 1 = 0$,

$\Delta = 4k^2 + 4 > 0$。

设直线与抛物线的两个交点为 $P_1(x_1', y_1')$,$P_2(x_2', y_2')$,线段 P_1P_2 的中点为 $P(x', y')$,

则 $x' = \dfrac{x_1' + x_2'}{2} = k$

将 $k = x'$ 代入方程 $y' = kx' + \dfrac{1}{2}$,整理得 $y' = x'^2 + \dfrac{1}{2}$。

将 $x' = x - 1$,$y' = y + 3$ 代入方程 $y' = x'^2 + \dfrac{1}{2}$,可得 $y + 3 = (x - 1)^2 + \dfrac{1}{2}$,

$(x - 1)^2 = y + \dfrac{5}{2}$,即为所求轨迹方程。

练 习 题

1. 化简双曲线的方程 $9x^2 - 16y^2 + 54x + 160y - 463 = 0$,并求双曲线的实轴和虚轴的长,中心坐标和焦点坐标。

2. 过抛物线$(y - 1)^2 = x - 2$ 的顶点 O' 作互相垂直的两条弦 $O'A$、$O'B$,

(1)求证:直线 AB 过定点 $M(3,1)$;

(2)求$\triangle AO'B$ 的面积的最小值。

3. 若抛物线$(y - 1)^2 = 2(x + 1)$上存在以直线 $x + y = a$ 为轴的对称点,求 a 的取值范围。

4. 过原点作两条互相垂直的直线交抛物线 $y^2 = 4p(x + p)$($p > 0$)得两条弦 AB、CD,求$|AB| + |CD|$的最小值。

5. 过曲线 $5x^2 - 4y^2 + 10x + 16y - 31 = 0$ 的右焦点作倾斜角为

$\theta=\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$的直线交曲线于 A、B 两点，求 AB 的长。

三、对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线的方程及其几何元素的坐标、方程

（一）对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线的方程

方程$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$，$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$（$a>b>0$）表示中心在（h，k），对称轴平行于坐标轴的椭圆。参数 h，k 的值确定椭圆与坐标轴的相对位置，因此，方程$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$，$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ 分别是将椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 沿 x 轴向右（$h>0$）或向左（$h<0$）平行移动$|h|$个单位，且沿 y 轴向上（$k>0$）或向下（$k<0$）平行移动$|k|$个单位所得椭圆的方程。

由于椭圆的形状、大小与其在坐标平面内的位置无关，因此，平移椭圆不改变其固有的性质，也不改变与椭圆相关的几何元素（焦点、顶点、准线、渐近线等）的相对位置关系，从而表示椭圆固有性质的量（如焦距，离心率等）与表示与椭圆相关的几何元素的相对位置关系的量都是不变量，借助于这些不变量，可以建立关于待定未知量 h、k、a、b 的方程组，求得这些待定未知量的值，即求对称轴平行于坐标轴的椭圆的方程仍用待定系数法。

对于双曲线$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$，$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$（$a>0,b>0$），抛物线$(y-k)^2=2p(x-h)$，$(y-k)^2=-2p(x-h)$，$(x-h)^2=2p(y-k)$，$(x-h)^2=-2p(y-k)$（$p>0$），也有类似的结论。

例 1 已知椭圆的半长轴长是 4，焦点是 $F_1(1,2)$，$F_2(5,2)$，求这个椭圆的方程。

解 由题设可知，椭圆的焦点所在直线与 x 轴平行，故设所求

椭圆方程为$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$。

焦点 $F_1(1,2)$,$F_2(5,2)$,

, **椭圆的中心为**$(3,2)$,**半焦距为** 2,**即** $h=3$,$k=2$,$c=2$。

椭圆的半长轴长为 4,**即** $a=4$,

, $b^2=a^2-c^2=12$,

, **所求椭圆方程为**$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$。

说明 **在解题中,由椭圆的焦点坐标得到三个结果**:(1)**椭圆焦点所在直线与** x **轴平行,从而可给出待定椭圆方程**;(2)**椭圆的中心仍是两焦点为端点的线段的中点,从而可给出中心坐标,求出** h、k;(3)**焦距不变,可求出** c。

例 2 **已知椭圆的两准线方程为** $x=\frac{33}{4}$**和** $x=-\frac{17}{4}$,**一个焦点坐标为**$(6,2)$,**求这个椭圆的方程。**

解 **由题设可知,椭圆的焦点所在直线与** x **轴平行,故可设所求椭圆方程为**$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$。

椭圆的两准线方程为 $x=-\frac{17}{4}$**和** $x=\frac{33}{4}$,

, **椭圆中心的横坐标** $h=\frac{1}{2}\left(-\frac{17}{4}+\frac{33}{4}\right)=2$,**且** $2\times\frac{a^2}{c}=\frac{33}{4}-\left(-\frac{17}{4}\right)=\frac{25}{2}$,

即 $\frac{a^2}{c}=\frac{25}{4}$。

椭圆的一个焦点坐标为$(6,2)$,

, **椭圆中心的纵坐标** $k=2$,**且点**$(6,2)$**与直线** $x=\frac{33}{4}$**是椭圆的一对焦点和准线。**

$$\frac{b^2}{c}=\frac{33}{4}-6=\frac{9}{4}。$$

$$\begin{cases}\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{25}{4},\\ \dfrac{b^2}{c}=\dfrac{9}{4}。\end{cases}$$

, $a^2=25$,$b^2=9$,

, **所求椭圆方程为**$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$。

说明 **在解题中,用不变量**$\dfrac{2a^2}{c^2}$**表示两准线不变的相对位置关系,用**$\dfrac{b^2}{c}$**表示焦点与相应准线不变的相对位置关系,从而建立了待定未知量** a、b **的方程组。**

例 3 **已知双曲线的一个焦点为** F(-16,1),**对应准线方程为** $x=-\dfrac{183}{13}$,**离心率为**$\dfrac{13}{12}$,**求双曲线的方程。**

解 **由题设可知,双曲线的焦点所在直线与** x **轴平行,故可设所求双曲线方程为**$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$。

焦点 F(-16,1)**对应的准线为** $x=-\dfrac{183}{13}$,

$$\frac{b^2}{c}=-\frac{183}{13}-(-16)=\frac{25}{13},k=1。$$

又 **双曲线的离心率为**$\dfrac{13}{12}$,

, $$\frac{c}{a}=\frac{13}{12},$$

, $$\begin{cases}\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{25}{13},\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{13}{12}。\end{cases}$$

, $$a=12,b=5,c=13。$$

$$h-(-16)=13,$$

, $h=-3$。

, 所求双曲线方程为$\frac{(x+3)^2}{144}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$。

说明 在解题中,用不变量$\frac{b^2}{c}$表示焦点相应准线不变的位置关系,结合离心率的取值建立了待定未知量 a、b 的方程组。用不变量 c 表示中心与焦点的不变位置关系建立了关于 h 的方程,解得 h。

例 4 对称轴平行于 y 轴的抛物线,顶点在直线 $x+y=1$ 上,焦点在直线 $x-y-2=0$ 上,且抛物线与 x 轴两交点间的距离为 4,求抛物线的方程。

解 由题设可知,抛物线方程为$(x-h)^2=-2p(y-k)$或$(x-h)^2=2p(y-k)$ $(p>0)$。

(1)若抛物线方程为$(x-h)^2=-2p(y-k)$,则顶点坐标为(h,k),焦点坐标为$(h,k-\frac{p}{2})$。

顶点在直线 $x+y=1$ 上,

, $h+k=1$,

焦点在直线 $x-y-2=0$ 上,

$$h-(k-\frac{p}{2})-2=0。$$

在方程$(x-h)^2=-p(y-k)$中,令 $y=0$,则$(x-h)^2=2pk$,

, $$x=h\pm\sqrt{2pk}\,(k>0),$$

抛物线与 x 轴两交点间的距离为 4,

, $2\sqrt{2pk}=4$,即 $pk=2$,

, $$\begin{cases} h+k=1, \\ h-(k-\frac{p}{2})-2=0,\ (p>0,k>0) \\ pk=2。\end{cases}$$

解得 $h=\frac{1}{2}$,$k=\frac{1}{2}$,$p=4$。

抛物线方程为 $(x-\frac{1}{2})^2=-8(y-\frac{1}{2})$。

(2) 若抛物线方程为$(x-h)^2=2p(y-k)$,

由题设同理可得,

$$\begin{cases} h+k=1, \\ h-(k+\frac{p}{2})-2=0, (p>0, k<0) \\ -pk=2。\end{cases}$$

解得 $h=2, k=-1, p=2$。

, 抛物线的方程为 $(x-2)^2=4(y+1)$。

综上所述,所求抛物线方程为 $(x-\frac{1}{2})^2=-8(y-\frac{1}{2})$或$(x-2)^2=4(y+1)$。

说明 在解题中,由抛物线的顶点与焦点间的距离为不变量$\frac{p}{2}$,且同在对称轴上,从顶点的坐标为(h,k)得焦点为$(h,k-\frac{p}{2})$或$(h,k+\frac{p}{2})$。由顶点在直线 $x-y=1$ 上,焦点在直线 $x-y-2=0$ 上,抛物线与 x 轴两交点间的距离为 4 分别建立了关于 h、k、p 的方程。

(二) 对称轴与坐标轴平行的圆锥曲线的几何量、几何元素的坐标、方程。

通常意义下的 a、b、c、e、p 等,它们确定了圆锥曲线的几何形状,我们称它们为几何量,它们的大小与圆锥曲线在坐标平面内的位置无关,因此,这些量是位置不变量。显然,圆锥曲线给定以后,与圆锥曲线相关的几何元素的相对位置关系不变,因此,表示这些几何元素的相对位置关系的量也是不变量。

圆锥曲线在坐标平面内平行移动时,与圆锥曲线相关的几何元素也作相应的平行移动,求这些几何元素的新的坐标、新的方程常用下面两种方法:

(1) 移轴法 先建立新坐标系,并给出新坐标下的几何元素

的坐标、方程,再利用平移公式求得原坐标系下的几何元素的坐标、方程。

(2)移图法 先求出中心(或顶点)在原点、对称轴为坐标轴的圆锥曲线的相关几何元素的坐标(x_0,y_0),方程$f(x,y)=0$,则中心(或顶点)在(h,k)、对称轴与坐标轴平行的圆锥曲线的相应几何元素的坐标为(x_0+h,y_0+k),方程为$f(x-h,y-k)=0$

例5 求椭圆$4x^2+9y^2+16x-72y+124=0$的长轴长、短轴长、焦距、离心率;中心、焦点、顶点的坐标和准线方程。

解法一 将椭圆方程化为$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$。

令$x'=x+2,y'=y-4$,即$x=x'-2,y=y'+4$,

则方程化为$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$。

$a=3,b=2,c=\sqrt{5}$,

, 椭圆的长轴长为6,短轴长为4,焦距为$2\sqrt{5}$,离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$。

在新坐标下的椭圆中心坐标为$(0,0)$,焦点为$(-\sqrt{5},0)$,$(\sqrt{5},0)$,顶点坐标为$(-3,0)$,$(3,0)$,$(0,-2)$,$(0,2)$,

, 在原坐标系下的中心坐标为$(-2,4)$,焦点坐标为$(-\sqrt{5}-2,4)$,$(\sqrt{5}-2,4)$,顶点坐标为$(-5,4)$,$(1,4)$,$(-2,2)$,$(-2,6)$。

在坐标系下的准线方程为$x'=\frac{9\sqrt{5}}{5}$,$x'=-\frac{9\sqrt{5}}{5}$,

, 在原坐标系下的准线方程为$x+2=\frac{9\sqrt{5}}{5}$,$x+2=-\frac{9\sqrt{5}}{5}$,

即 $x=-2+\frac{9\sqrt{5}}{5}$,$x=-2-\frac{9\sqrt{5}}{5}$。

解法二 将椭圆方程化为$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$。

,　椭圆的中心为(-2,4),即方程是将椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$沿x轴向左平行移动2个单位,且沿y轴向上移动4个单位所得椭圆的方程。

椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的长轴长为6,短轴长为4,焦距为$2\sqrt{5}$,离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$。

,　椭圆$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$的长轴长为6,短轴长为4,焦距为$2\sqrt{5}$,离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$。

椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的中心坐标为(0,0),焦点坐标为$(-\sqrt{5},0)$,$(\sqrt{5},0)$,顶点坐标为(-3,0),(3,0),(0,-2),(0,2),将这些点沿x轴向左平移2个单位,且沿y轴向上平移4个单位,即得椭圆$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$的中心坐标为(-2,4),焦点坐标为$(-\sqrt{5}-2,4)$$(\sqrt{5}-2,4)$,顶点坐标为(-5,4),(1,4),(-2,2),(-2,6)。

椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的准线方程为$x=\frac{9\sqrt{5}}{5}$,$x=-\frac{9\sqrt{5}}{5}$,将其沿x轴向左平移2个单位,即得椭圆$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$的准线方程为即$x=-2+\frac{9\sqrt{5}}{5}$,$x=-2-\frac{9\sqrt{5}}{5}$。

说明　必须注意到,在解法一中引进了新坐标系,在解法二中没有引进新的坐标系。

例6　已知双曲线的两顶点坐标分别为$A_1(-1,-1)$,$A_2(7,-1)$,它的一条准线方程为$x=\frac{31}{5}$,求双曲线的方程,渐近线方程

和另一条准线方程。

解　有题设可知,双曲线的焦点所在直线与 x 轴平行,故可设所求双曲线方程为$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$　$(a>0,b>0)$。

双曲线的顶点坐标为 $A_1(-1,-1)$,$A_2(7,-1)$,

,　双曲线的中心为$(3,-1)$,半实轴长为 4,即 $h=3$,$k=-1$,$a=4$。

双曲线的一条准线方程为 $x=\frac{31}{5}$,由$\frac{31}{5}>3$ 知,这条准线为双曲线的右准线

$$\frac{a^2}{c}=\frac{31}{5}-3=\frac{16}{5},$$

$$\begin{cases}a=4,\\ \frac{a^2}{c}=\frac{16}{5},\end{cases}$$

解得　$c=5$,

,　$b=3$。

,　所求双曲线的方程为$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$。

令　$x'=x-3$,$y'=y+1$,即 $x=x'+3$,$y=y'-1$,

则双曲线的方程为$\frac{x'^2}{16}-\frac{y'^2}{9}=1$。

在新坐标系下,双曲线的渐线方程为 $3x'+4y'=0$,$3x'-4y'=0$,

,　在原坐标系下,双曲线的渐近线方程为 $3(x-3)+4(y+1)=0$,$3(x-3)-4(y+1)=0$,即 $3x+4y-5=0$,$3x-4y-13=0$;

在新坐标系下,双曲线的另一条左准线方程为 $x'=\frac{16}{5}$,

,　在原坐标系下,双曲线的另一条左准线方程为 $x-3=-\frac{16}{5}$,即 $x=-\frac{1}{5}$。

说明　(1)由解题过程可知,双曲线的方程为$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$改为$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=0$,再变形,直接可得双曲线的渐近方程为$3x+4y-5=0$,$3x-4y-13=0$;

(2)若问题只要求在题设条件下求另一条准线方程,则可以将已知准线$x=\frac{31}{5}$沿x轴向左平移$\frac{32}{5}$(即$\frac{2a^2}{c}$)个单位而得到,即$x=\frac{31}{5}-\frac{32}{5}$,$x=-\frac{1}{5}$。

例7　抛物线$(x+2)^2=-4(y-1)$的焦点坐标为________,准线方程为________。

分析　本题为填空题,我们可以用移图的方法求解。

解　抛物线的顶点为$(-2,1)$,对称轴与y轴平行,开口向下,$p=2$,

,　顶点沿y轴方向向下平移1个单位,即为焦点,过顶点且平行于x轴的直线$y=1$向上平移1个单位,即为准线,

,　抛物线的焦点坐标为$(-2,0)$,准线方程为$y=2$。

练 习 题

1. 已知椭圆的对称轴平行于坐标轴,中心为点$(-2,3)$,焦点在直线$y=3$上,长轴长为8,短轴长为6,求它的方程。

2. 已知双曲线两顶点为$(2,-1)$和$(2,5)$,并且它的一条渐近线与直线$4x-3y=0$平行,求此双曲线方程。

3. 已知双曲线过点$(1,1)$,它的渐近线方程为$2x-3y-7=0$和$2x+3y-1=0$,求该双曲线方程。

4. 已知抛物线的顶点在y轴上,它的对称轴平行于x轴,抛物线经过点$(\frac{1}{2},3)$和$(2,4)$,求抛物线方程、焦点方程及准线方程。

5. **已知抛物线的对称轴平行于 y 轴,顶点在直线 $x+y=0$ 上,且经过原点、顶点和原点的距离为 $2\sqrt{2}$,求抛物线的方程。**

6. **已知双曲线的两条对称轴为 $x+3=0$,$y-2=0$,它的一个焦点在 y 轴上,求它的另一个焦点坐标。**

四、中心点不在原点、对称轴与坐标轴平行的圆锥曲线问题

我们在圆锥曲线的标准方程下,用函数、方程、不等式的思想方法讨论了与圆锥曲线相关的未知量的求值问题、变量的取值范围、变量的问题等,下面我们在中心不在原点、对称轴与坐标轴平行的圆锥曲线的方程下用同样的思想方法讨论这几类问题。

例 1　已知正方形 ABCD 的顶点 A、C 在抛物线 $y^2=4(x+4)$ 上,对角线 BD 在直线 $x+2y=0$ 上,求这个正方形的面积。

分析　由题设可知,正方形 ABCD 的对角线 AC 为抛物线的弦且其两个端点 A、C 关于直线 BD 对称,由此可知,直线 AC 与直线 BD 的垂直且线段 AC 的中点在直线 BD 上,由此可以建立关于直线 AC 在 y 轴上的截距 m 的方程,从而求得直线 AC 的方程,再求得直线 AC 被抛物线截得的弦长,即得正方形 ABCD 的对角线的长。

解　由 ABCD 为正方形可知 $AC\perp BD$,设直线 AC 的方程为 $2x-y+m=0$。

由方程组 $\begin{cases}2x-y+m=0,\\ y^2=4(x+4),\end{cases}$ **消去 y,**

整理得 $4x^2+4(m-1)x+m^2-16=0$　　(*)

设 $A(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,对角线交点为 M,

则 $$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{m-1}{2}=\frac{1-m}{2},$$

, $y_M=1$,**故** $M(\frac{1-m}{2},1)$。

点 M 在直线 BD 上,

, $\frac{1-m}{2}+2=0$,

$m=5$。

, 方程(*)为 $4x^2+16x+9=0$,这时 $\Delta=112>0$,知 $m=5$ 可取

, $x_1+x_2=-4$,$x_1x_2=\frac{9}{4}$,

, $|AC|=\sqrt{5}\sqrt{16-4\times\frac{9}{4}}=\sqrt{35}$

, 正方形 ABCD 的面积为$\frac{35}{2}$。

说明 建立关于未知量的方程求解,是求未知量的取值的基本思想方法,在解题过程中,由几何条件‘点 M 在直线 BD 上’建立了关于直线 AC 在 y 轴上的截距 m 的方程,解得 m 的取值,确定了直线 AC 的方程。

例 2 已知椭圆 $x^2+\frac{y^2}{tg^2\alpha}=1$($\alpha$ 为锐角)的焦点在 x 轴上,A 是它的右顶点,这个椭圆与射线 $y=x(x\geqslant0)$的交点是 B,以 A 为焦点,且过 B 点,开口方向向左的抛物线的顶点为$(m,0)$,当椭圆的离心率 e 在$(\frac{\sqrt{6}}{3},1)$中变化时,求 m 的取值范围。

分析 由题设可知,椭圆的方程用参变量 α 表示,抛物线的方程用参变量 m 表示,借助于点 B 为椭圆与抛物线的公共点可以建立参变量 α 与 m 的关系等式。

又由题设可知,椭圆的焦点在 x 轴上,且离心率 e 在$(\frac{\sqrt{6}}{3},1)$中变化,制约着参变量 α 的取值范围;抛物线以点 $A(1,0)$为焦点,$(m,0)$为顶点,且开口方向向左,制约着参变量 m 的取值范围。

解 椭圆的焦点在 x 轴上,

, $tg^2\alpha<1$,

α 为锐角,

, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$。

由椭圆的方程 $x^2 + \frac{y^2}{tg^2\alpha} = 1$ **可知**,$a = 1$,$b = tg\alpha$,

, $$c = \sqrt{1 - tg^2\alpha},$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - tg^2\alpha}。$$

$$e \in (\frac{\sqrt{6}}{3}, 1),$$

, $$\frac{\sqrt{6}}{3} < \sqrt{1 - tg^2\alpha} < 1,$$

$$0 < tg^2\alpha < \frac{1}{3},$$

$$0 < tg\alpha < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{6}。$$

由方程组 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{tg^2\alpha} = 1, \\ y = x \quad (x \geqslant 0), \end{cases}$ **解得** $x = y = \sin\alpha$,

, $B(\sin\alpha, \sin\alpha)$。

由题设可知,抛物线的焦点为 $A(1, 0)$,**顶点为**$(m, 0)$,**开口向左,**

, **抛物线的方程为** $y^2 = -4(m-1)(x-m)$。

抛物线过点 $B(\sin\alpha, \sin\alpha)$,

, $\sin^2\alpha = -4(m-1)(\sin\alpha - m)$,

即 $\sin^2\alpha + 4(m-1)\sin\alpha - 4m(m-1) = 0$。

令 $\sin\alpha = t$,**则** $t \in (0, \frac{1}{2})$。

$t^2 + 4(m-1)t - 4m(m-1) = 0$ **在**$(0, \frac{1}{2})$**内有解。**

令　$f(t)=t^2+4(m-1)t-4m(m-1)$，

则二次函数 $f(t)$ 的图像与 t 轴在 $(0,\frac{1}{2})$ 内有公共点。

$$m>1,$$

, $$-4m(m-1)<0,$$

, 　二次函数 $f(t)$ 的图像与 t 轴的交点在原点的两侧，即与 t 轴在 $(0,\frac{1}{2})$ 内有且只有一个公共点，

, $$f(0)\cdot f(\frac{1}{2})<0,$$

即　$$-4m(m-1)[\frac{1}{4}+2(m-1)-4m(m-1)]<0,$$

, $$16m^2-24m+7<0,$$

$$\frac{3-\sqrt{2}}{4}<m<\frac{3+\sqrt{2}}{4}。$$

又　$$m>1$$

, $$1<m<\frac{3+\sqrt{2}}{4}。$$

说明　在解题中，我们借助于"椭圆与抛物线有公共点 $B(\sin\alpha,\sin\alpha)$"建立了变量 α 与 m 的等量关系式 $\sin^2\alpha+4(m-1)\sin\alpha-4m(m-1)=0$，由于等式中，变量 $\sin\alpha$，m 都含有一次项和二次项，因此不能从等式解出 $\sin\alpha$ 或 m 的函数表达式，也就不能用求函数值域的方法或解不等式的方法求得变量 m 取值范围，因而将等量关系式 $\sin^2\alpha+4(m-1)\sin\alpha-4m(m-1)=0$ 看成关于 $\sin\alpha$ 的一元二次方程，转换成二次方程的根与系数的关系问题，解得变量 m 的取值范围。

例 3　设长轴长为 4，以 y 轴为左准线的椭圆的中心在抛物线 $y^2=x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 上，

(1) 求离心率达到最大时椭圆的方程；

（2）若（1）中的椭圆上有四个不同点，它们中每一个点到点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$和直线 l: $x=-\frac{p}{2}(p>0)$的距离均相等，试求 p 的取值范围。

分析　（1）由题设可知，椭圆的方程可设为 $\frac{(x-h)^2}{4}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$，椭圆的变化可以用变量 h、k 和 b（由于 a 已知，因此也可以用 c）刻划，由于椭圆受"以 y 轴为左准线，中心在抛物线 $y^2=x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$上"的几何制约，所以变量 h、k、b（或 c）存在这两个代数制约关系，其表现形式为等量关系。由变量 h、k、b（或 c）的制约关系等式我们可以求得离心率取最大值（相应表现为 b 取最小值或 c 取最大值）时 h、k、b（或 c）的相应取值，从而求得椭圆的方程。

（2）由题设可知，椭圆上的四个点在以 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$为焦点，直线 $l: x=-\frac{p}{2}$为准线的抛物线 $y^2=2px$ 上，即这四点为椭圆与抛物线的交点。这就是说，椭圆与抛物线有四个不同的交点，转换成代数形式就是椭圆与抛物线的方程组成的方程组有四组不同的解，由此可以求得变量 p 的取值范围。

解（1）　设椭圆的中心为(h,k)，短轴长为 $2b$，则椭圆的方程可设为

$$\frac{(x-h)^2}{4}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1。$$

椭圆的左准线方程为 $x=h-\frac{a^2}{c}$，即 $x=h-\frac{4}{c}$，

又　椭圆的左准线为 y 轴，即 $x=0$，

,　$$h-\frac{4}{c}=0。$$

椭圆的中心(h,k)在抛物线 $y^2=x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$上，

, $$k^2 = h - \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$k^2 = \frac{4}{c} - \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

由 $k^2 \geqslant 0$ 知，$\frac{4}{c} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \geqslant 0$

, $$c \leqslant \sqrt{3}$$

, $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$，这就是说 c 取 $\sqrt{3}$ 时，离心率 e 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

e 取最大值时，$c = \sqrt{3}$，$b = 1$，$h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$，$k = 0$。

, 所求椭圆的方程为 $\frac{\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4} + y^2 = 1$。

(2) 设 $M(x, y)$ 为椭圆上四个不同点中任一点，由于点 M 到定点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 和到定直线 $l: x = -\frac{p}{2}$ 的距离相等，则由抛物线的定义可知点 M 在抛物线 $y^2 = 2px$ 上

, 点 M 的坐标 (x, y) 是方程组 $\begin{cases} \frac{\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4} + y^2 = 1 \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 的解

由方程组消去 y 可得 $3x^2 + (24p - 8\sqrt{3})x + 4 = 0$ （$*$）

由方程组有四组不同的解可知方程（$*$）有两个不同的正根，

$$\begin{cases} \Delta = (24p - 8\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4 > 0, \\ \frac{8\sqrt{3} - 24p}{3} > 0。 \end{cases}$$

在 $p > 0$ 的条件下，解得 $0 < p < \frac{\sqrt{3}}{6}$，

, 所求 p 的取值范围为 $0<p<\frac{\sqrt{3}}{6}$。

例 4 已知抛物线 c_1 的顶点在原点,焦点在 y 轴上,c_1 上的一个点的纵坐标为 -3,且该点与焦点的距离为 4,求抛物线 c_1 的方程;

又若椭圆 c_2 过抛物线 c_1 的焦点,离心率是 $\frac{1}{2}$,且 c_2 的一条准线与 c_1 的准线重合,求椭圆 c_2 的长轴长的最大值。

分析 由题设可知,椭圆的方程可设为 $\frac{(x-m)^2}{3c^2}+\frac{(y-n)^2}{4c^2}=1$,椭圆的变化可以用变量 m、n、c 刻划,由"椭圆有确定的准线和椭圆经过抛物线的焦点"的几何制约,可得变量 m、n、c 的代数制约关系,其表现形式为等量关系式,由变量 m、n、c 的制约关系等式我们可以求得 c 取最大值的 m、n 的相应取值,从而不但可以求得椭圆长轴长的最大值,而且也可以求得相应椭圆的方程。

解法一 由题设可知,抛物线 c_1 的方程可设为 $x^2=-2py$ $(p>0)$,

则由抛物线的定义可知 $\frac{p}{2}+3=4$,

, $p=2$,

, 所求抛物线 c_1 的方程为 $x^2=-4y$。

设椭圆 c_2 的半焦距为 c,由于椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$,则椭圆的半长轴长为 $a=2c$,半短轴长为 $b=\sqrt{3}c$,

设椭圆的中心为 (m,n),则椭圆 c_2 的方程为 $\frac{(x-m)^2}{3c^2}+\frac{(y-n)^2}{4c^2}=1$。

由抛物线方程可知,抛物线 c_1 的准线为 $y=1$,焦点为 $(0,-1)$。

由椭圆 c_2 过抛物线 c_1 的焦点 $(0, -1)$ 可知,直线 $y = 1$ 为椭圆的上方的一条准线。

又　　椭圆 c_2 的上方的一条准线为 $y = n + \frac{a^2}{c}$,即 $y = n + 4c$,

,　　$$n + 4c = 1,$$

,　　$$n = 1 - 4c,$$

,　　椭圆 c_2 的方程为 $\frac{(x - m)^2}{3c^2} + \frac{(y - 1 + 4c)^2}{4c^2} = 1$。

椭圆 c_2 过点 $(0, -1)$,

,　　$$\frac{m^2}{3c^2} + \frac{(4c - 2)^2}{4c^2} = 1,$$

$$\frac{m^2}{3} = c^2 - (2c - 1)^2 \geqslant 0,$$

,　　$$3c^2 - 4c + 1 \leqslant 0,$$

$$\frac{1}{3} \leqslant c \leqslant 1,$$

$$\frac{2}{3} \leqslant a \leqslant 2。$$

,　　椭圆 c_2 的长轴长的最大值为 4。

解法二　同解法一求得抛物线 c_1 的方程为 $x^2 = -4y$,可知抛物线 c_1 的准线为直线 $y = 1$,焦点为 $(0, -1)$。

设椭圆的焦点为 $F(x, y)$,

则由题意可得 $\frac{\sqrt{x^2 + (y + 1)^2}}{2} = \frac{1}{2}$,

,　　$x^2 + (y + 1)^2 = 1$,即椭圆 c_2 的焦点轨迹为以 $(0, -1)$ 为圆心,1 为半径的圆。

,　　焦点 F 到椭圆的上方的准线的距离的最大值为 3。

又　　椭圆的焦点到上方的准线的距离为 $\frac{a^2}{c} - c = \frac{4c^2}{c} - c = 3c$,

,　　c 的最大值为 1,

∴　　$a=2c$ 的最大值为 2，

∴　　椭圆 c_2 的长轴长的最大值为 4。

练 习 题

1. 已知双曲线 c 的一个焦点为原点，与该焦点相应的准线为 $x=1$，直线 l 与双曲线 c 交于 P_1、P_2 两点，且 $|P_1P_2|=2\sqrt{2}$，又线段 P_1P_2 的中垂线方程为 $x+y=0$，求双曲线 c 的方程。

2. 经过点 $A(4,0)$ 是否存在直线 l，使抛物线 $y^2=2(x-2)$ 上总有两点关于直线 l 对称？若存在，求出直线 l 的斜率的取值范围，若不存在，请说明理由。

3. 在以 y 轴为准线，恒过点 $A(2,1)$，离心率 $e=\frac{1}{2}$ 的所有椭圆中，求长轴最长的椭圆的方程和长轴最短的椭圆方程。

4. 已知 A 是双曲线 $\frac{(1-a^2)x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>0)$ 的上支顶点，B 是其上支与直线 $y=x$ 的交点，当某一条渐近线的斜率在区间 $[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{2\sqrt{2}}{3}]$ 上变化时，求过点 B 且以点 A 为焦点，开口向下的抛物线顶点的轨迹。

第十二章　参数方程、极坐标

一、参数、参数方程

参数,也称参变数,参数可以对几何元素的运动变化作定量的刻划。

在含有参数的点的坐标中,参数描写着动点的运动变化。

在含有参数的方程中,参数描写着曲线的运动变化。

在参数方程中,参数起着联系坐标变量 x、y 的桥梁作用,即参数方程就是曲线上的动点的横坐标 x 和纵坐标 y 的简接关系式。在参数方程中,有些参数具有明显的几何意义,这就为利用代数方法解决几何问题创造了良好的条件。

在参数方程中,曲线上任意一点的横坐标 x 和纵坐标 y 都是参数的函数,由函数的定义可知,参数与 x、y 之间的对应关系都具有‘ 对一 ’的性质,即一个参数值唯一地确定曲线上的一个点的坐标,反之,确定曲线上一个点的参数不是唯一的。由此可知,要求曲线上一个点的坐标,只需求得这个点相应的一个参数值。我们知道,求这个参数值的常用方法,是建立关于这个参数的方程。

例 1　已知点 $P(1,-1)$ 和直线 $l:x-2y+1=0$,在直线 l 上求一点 Q,使 $|PQ|=2$。

分析　直线 l 上的点可以用参数坐标 $(2t-1,t)$ 表示,等量关系式 $|PQ|=2$ 可以转化成关于参数 t 的方程。

解　由点 Q 在直线 l 上可知,点 Q 的坐标可设为 $(2t-1,t)$。

$$P(1,-1),\ |PQ|=2,$$

,

$$\sqrt{(2t-2)^2+(t+1)^2}=2,$$

$$5t^2-6t+1=0,$$

$$, \qquad t = 1 \text{ 或 } t = \frac{1}{5},$$

, **所求点** Q **的坐标为** $(1,1)$ **或** $\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$。

例 2 **求曲线** $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sqrt{3}\sin\theta, \end{cases}$ **(**θ **为参数)和直线** $x + y = 1$ **的交点。**

分析　设交点为($\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta$**),只要建立关于参数** θ **的方程,解得** θ**(或** θ **的余弦值和正弦值)即可求得交点坐标。**

解　设曲线和直线的交点为($\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta$**),代入直线方程可得**

$$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 1,$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$, \quad \theta + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \theta + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad k \in z,$$

取 $\theta = 0$ **或** $\theta = \frac{2\pi}{3}$

, **所求交点坐标为** $(1,0)$ **或** $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$。

例 3　**已知方程** $x^2 + (y - b)^2 = 4$**,对于不同的** b **值方程的曲线是什么曲线?这些曲线有什么特点?**

分析　方程 $x^2 + (y - b)^2 = 4$ **是含有参数的曲线的方程,不同的参数取值确定着不同(在坐标系中的位置不同)的曲线。**

解　对于不同的 b **的取值,方程的曲线都是** 2 **为半径的圆,这些圆的圆心都在** y **轴上。**

练 习 题

1. **求曲线** $\begin{cases} x = 2t^2 - t - 1, \\ y = t^2 - 4, \end{cases}$ **(**t **为参数)与两坐标轴的交点。**

2. 求 y 轴上的点 p(0,a)到抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-1$ 上的点的距离的最小值。

3. 已知点 p(6,0),圆 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)求过点 P 的圆的切线的切点坐标。

4. 已知抛物线 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1(m\in R)$,

证明:(1)抛物线的顶点在同一直线 l 上;

(2)若直线 $l'\parallel l$,且 l' 与各抛物线相交,则 l' 被各抛物线所截得的弦长相等。

二、用参数法求轨迹方程

普通方程反映了坐标变量 x 与 y 之间的直接联系,而参数方程是通过参数反映坐标变量 x 与 y 之间的间接联系。

用参数法求动点的轨迹方程的一般步骤是:

(1)建立适当的平面直角坐标系;

(2)设动点坐标(x,y);

(3)选取适当的参数;

(4)给出动点坐标变量 x,y 与参数之间的函数关系式;

(5)证明(4)中所得 x,y 与参数之间的关系式组就是所求轨迹的方程(这一步一般可以省略)。

选择参数是利用参数求轨迹方程的关键一步。若动点的运动变化随时间的变化而变化,则常选择时间 t 为参数;若动点的运动变化随平面内某一几何元素的运动变化而变化,则常选刻划这个元素运动变化的量为参数。

必须注意到,选择的参数必须满足:参数在允许值范围内取某一值时,可唯一地确定坐标变量 x,y 的值。为了满足这一要求,参数必须能唯一地描写相应的几何元素。

例 1　求以点 C(a,b)为圆心,R 为半径的圆的方程。

分析　圆 C 上任意一点 P 随着相应的半径 CP 的变化而变

化，而半径 CP **由以与** x **轴同方向的射线** CQ **为始边，射线** CP **为终边的角** θ **唯一地确定，因此，参数** θ **的值唯一地确定了坐标变量** x，y **的值，所以选** θ **为参数（见图** 12 - 1**）。**

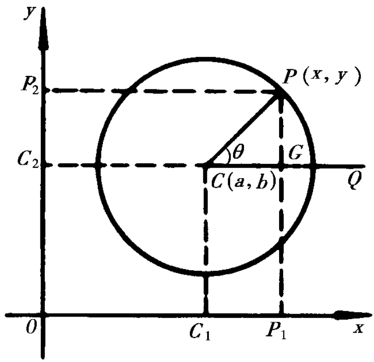


图 12 - 1

解　设点 P（x，y）**为圆** C **上的任意一点，取与** x **轴同方向的射线** CQ **为始边的角** θ **为参数**（$\theta \in R$）**。**

过点 P **作** $PP_1 \perp x$ **轴，**$PP_2 \perp y$ **轴，垂足分别为** P_1、P_2，**则** $x = OP_1$，$y = OP_2$；

过点 C **作** $CC_1 \perp x$ **轴，**$CC_2 \perp y$ **轴，垂足分别为** C_1、C_2，**则** $a = OC_1$，$b = OC_2$。

设 CQ **与** PP_1 **的交点为** G，**则根据三角函数的定义可知，**

$$CG = |CP|\cos\theta = R\cos\theta, GP = |CP|\sin\theta = R\sin\theta,$$

$$, \quad x = OP_1 = OC_1 + C_1P_1 = OC_1 + CG = a + R\cos\theta,$$

$$y = OP_2 = OC_2 + C_2P_2 = OC_2 + GP = b + R\sin\theta,$$

, **所求圆的参数方程为**$\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$ （Q **为参数**）**。**

说明　在建立动点坐标变量 x，y **与参数** θ **之间的函数关系时，是用有向线段的数量作过渡的，也就是说，坐标变量就是有向线段的数量。**

在建立动点坐标数量 x，y **与参数** θ **之间的函数关系时，用了**

三角函数的定义,这里使用的是任意角的三角函数的定义,这就是说,三角函数的定义是沟通有向线段的数量与参数之间的关系的依据。

例 2 过定点 Q(2,4),作直线分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点,求 A、B 中点的轨迹方程。

分析 线段 AB 的中点 M,随着过定点 Q 的直线 AB 的变化而变化,而刻划直线 AB 变化的量可以是直线在 x 轴或 y 轴上截距,也可以是直线 AB 的斜率。必须注意到,直线 AB 在 x 轴或 y 轴上的截距(除去在 x 轴上的截距 2,在 y 轴上的截距 4)或直线 AB 的斜率唯一地确定直线 AB,从而也就唯一地确定动点 M(见图 12 - 2)。

解法一 设点 M(x,y)是轨迹上任意一点,设直线 AB 在 x 轴上的截距为 t(t≠2),即点 A 的坐标为(t,0),取 t 为参数,$k_{AB}=\frac{4}{2-t}$,

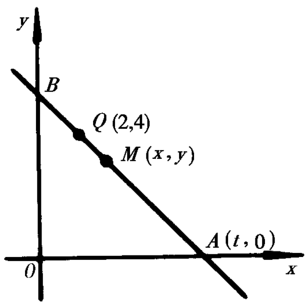


图 12 - 2

, 直线 AB 的方程为

$$y=\frac{4}{2-t}(x-2)+4。$$

令 x = 0,则 $y=\frac{4t}{t-2}$,

, $$B\left(0,\frac{4t}{t-2}\right),$$

, $$x_M=\frac{t}{2},y_M=\frac{2t}{t-2}。$$

, 所求轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{t}{2}\\ y=\dfrac{2t}{t-2}\end{cases}$ (t 为参数)。

消去参数 t,得轨迹方程为 xy - 2x - y = 0。

解法二　设点 $M(x,y)$ 是轨迹上的任意一点，设直线 AB 的斜率为 k，取 k 为参数（$k\neq 0$）。

直线 AB 过定点 $Q(2,4)$，

, 　直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)+4$。

令　$y=0$，则 $x=2-\dfrac{4}{k}$，

, $A\left(2-\dfrac{4}{k},0\right)$。

令 $x=0$，则 $y=-2k+4$，

$B(0,-2k+4)$。

, 　点 $M(x,y)$ 为线段 AB 的中点，

, $\begin{cases} x=1-\dfrac{2}{k} \\ y=-k+2 \end{cases}$　（k 为参数）。

消去参数 k，得轨迹方程为 $xy-2x-y=0$。

例 3　已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(4,5)$，$B(0,0)$，$C(7,0)$，矩形 $DEFG$ 的顶点 E、F 在 BC 上，G 在 AC 上，D 在 AB 上，求内接矩形 $DEFG$ 的中心 M 的轨迹方程。

分析　矩形的中心 M 随着矩形的变化而变化，而矩形的变化又随着矩形的一边 DG 所在直线的变化而变化。由 $DG/\!/BC$ 可知，可取 DG 与 BC 间的距离 t 刻划直线 DG 的变化（见图 12 - 3）。

矩形的变化也可看作随着点 E 的变化而变化，由点 E 在 x 轴上可知，点 E 的变化可用其坐标刻划。

解法一　设点 $M(x,y)$ 为轨迹上任意一点，设矩形 $DEFG$ 的边 DG 与 x 轴间的距离为 t，取 t 为参数（$t\in(0,5)$）。

$A(4,5)$，$B(0,0)$，$C(7,0)$，

, 　直线 AB、AC 的方程分别为 $y=\dfrac{5}{4}x$，$y=-\dfrac{5}{3}(x-7)$。

直线 DG 的方程为 $y=t$，

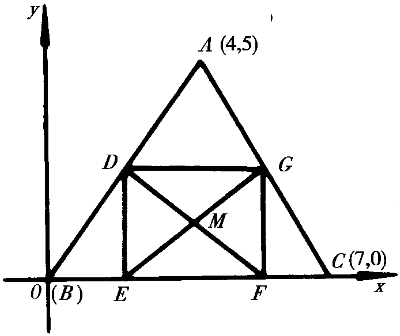


图 12 - 3

解方程组 $\begin{cases} y = t, \\ y = \dfrac{5}{4}x, \end{cases}$

得 $x = \dfrac{4}{5}t, y = t,$

, $D(\dfrac{4}{5}t, t)$。

解方程组 $\begin{cases} y = t, \\ y = -\dfrac{5}{3}(x - 7), \end{cases}$

得 $x = 7 - \dfrac{3}{5}t, y = t,$

, $G(7 - \dfrac{3}{5}t, t),$

$F(7 - \dfrac{3}{5}t, 0)$。

, 点 M 的坐标 $x = \dfrac{1}{2}(\dfrac{4}{5}t + 7 - \dfrac{3}{5}t) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{5}t + 7), y = \dfrac{1}{2}t,$

, 点 M 的轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{5}t + 7) \\ y = \dfrac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参

数，$t\in(0,5)$）。

消去参数 t，得轨迹的方程为 $10x-2y-35=0\quad\left(y\in\left(0,\frac{5}{2}\right)\right)$。

解法二　设点 $M(x,y)$ 为轨迹上任意一点，设矩形 $DEFG$ 的顶点 E 的坐标为 $(t,0)$，取 t 为参数 $t\in(0,4)$。

$A(4,5)$，$B(0,0)$ $C(7,0)$，

, 直线 AB、AC 的方程分别为 $y=\frac{5}{4}x$，$y=-\frac{5}{3}(x-7)$，

解方程组 $$\begin{cases}x=t,\\ y=\frac{5}{4}x,\end{cases}$$

得 $$x=t,y=\frac{5}{4}t,$$

, $$D\left(t,\frac{5}{4}t\right)。$$

解方程组 $$\begin{cases}y=-\frac{5}{3}(x-7),\\ y=\frac{5}{4}t,\end{cases}$$

得 $$x=7-\frac{3}{4}t,y=\frac{5}{4}t,$$

, $$G\left(7-\frac{3}{4}t,\frac{5}{4}t\right),$$

$$F\left(7-\frac{3}{4}t,0\right)。$$

, 点 M 的坐标 $x=\frac{1}{2}\left(t+7-\frac{3}{4}t\right)=\frac{1}{2}\left(7+\frac{1}{4}t\right)$，$y=\frac{5}{8}t$，

, 点 M 为轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(7+\frac{1}{4}t\right)\\ y=\frac{5}{8}t\end{cases}$ （t 为参

数，$t \in (0,4)$)。

消去参数 t，得轨迹的方程为 $10x - 2y - 35 = 0$　　($y \in (0, \frac{5}{2})$)。

例 4　如图 12 - 4 所示，在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上，有一定点 $A(2,0)$ 和两动点 B、C（A、B、C 按逆时针排列），当 B、C 恒使 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 时，求 $\triangle ABC$ 的重心的轨迹。

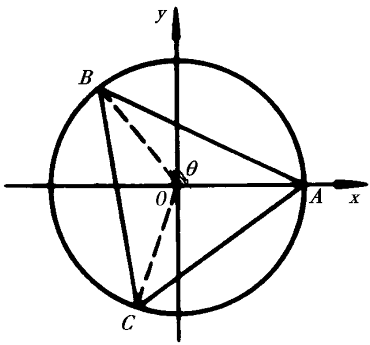


图 12 - 4

分析　由题设可知，三角形的重心随着三角形的变化而变化，三角形随着点 B 的变化而变化，点 B 又随着其相应的半径 OB 的变化而变化，半径 OB 的变化又可以用以 x 轴的正半轴为始边，射线 OB 为终边的角 θ 刻划，也就是说，θ 可以刻划 $\triangle ABC$ 的重心的变化。

解　设 $G(x,y)$ 为轨迹上的任意一点，连接 OB，设以 x 轴的正半轴为始边，射线 OB 为终边的角为 θ，取 θ 为参数。

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3},$$

，
$$\angle BOC = \frac{2\pi}{3},$$

，　连接 OC 以 x 轴的正半轴为始边，射线 OC 为终边的角为

$\theta+\dfrac{2\pi}{3}$。

由任意角的三角函数的定义可知，点 B 的坐标为$(2\cos\theta,2\sin\theta)$，点 C 的坐标为$\left(2\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right),2\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$。

由三角形重心坐标公式得，

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\left[2+2\cos\theta+2\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right], \\ y=\dfrac{1}{3}\left[2\sin\theta+2\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]。 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\left[1+\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\right] \\ y=\dfrac{2}{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \left(\theta\ 为参数, 0\in\left(\theta,\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)。$$

消去参数 θ 得，$\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{9}$。

$$0<0<\dfrac{4\pi}{3},$$

, $-1\leqslant\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{1}{2}$，$-1\leqslant\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant1$，

即 $0<x<1$，$-\dfrac{2}{3}\leqslant y\leqslant\dfrac{2}{3}$。

, 所求轨迹方程为$\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{9}\quad(x\in(0,1))$。

故所求三角形重心的轨迹为以$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$为圆心，$\dfrac{2}{3}$为半径的圆在直线 $x=1$ 左边的一段弧（不包括端点）。

说明由例 3 和例 4 可知，在用参数法求轨迹方程中，选择参数是很关键的，确定参数的取值范围也是很重要的，一般地，可用参数相应的运动变化的几何元素的运动变化的范围来确定参数的变化范围。

在例 3 的解法一中，矩形 DEFG 的边 DG 在 x 轴的上方，且与

x 轴保持平行的状态运动变化，但不能移至点 A 的上方，因此表示 DG 与 x 的距离参数 t 的取值范围为(0，5)；

在例 3 的解法二中，矩形 DEFG 的顶点 E 在 x 轴上运动，但只能在原点与点 A 在 x 轴的射影间运动，因此表示点 E 的横坐标的参数 t 的取值范围为(0，4)；

在例 4 的解法中，点 B 在圆周上运动，受点 A、B、C 按逆时针列的限制，表示点 B 位置的参数 θ 的取值范围为$(0,\frac{4\pi}{3})$。

例 5　求过点 A(1，1) 的椭圆 $x^2+4y^2=16$ 的弦的中点的轨迹方程。

分析　由题设可知，弦的中点随着弦的变化而变化，而弦的变化可以用弦所在直线的斜率 k 来刻划。

解　设点 P(x，y) 为轨迹上任意一点，其所在弦的两个端点分别为 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$。

若弦所在直线的斜率不存在，则弦的中点坐标为(1，0)；若弦所在直线的斜率存在，设为 k，则弦所在直线的方程为 $y=k(x-1)+1$。

由方程组 $$\begin{cases} y=k(x-1)+1, \\ x^2+4y^2=16, \end{cases}$$

消去 y 的得，

$$(4k^2+1)x^2+8k(1-k)x+4(1-k^2)-16=0,$$

，$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k(k-1)}{4k^2+1},$$

$$y=k\left[\frac{4k(k-1)}{4k^2+1}-1\right]+1=\frac{1-k}{4k^2+1}。$$

由 Q(1，1) 在随圆内部可知，$k\in R$

，　所求轨迹的参数方程为$$\begin{cases} x=\dfrac{4k(k-1)}{4k^2+1} \\ y=\dfrac{1-k}{4k^2+1} \end{cases}$$（k 为参数）。

消去参数 k 得,$x^2+4y^2-x-4y=0$。

$x=1,y=0$ 适合方程 $x^2+4y^2-x-4y=0$,

, 所求轨迹的方程为 $x^2+4y^2-x-4y=0$。

说明 轨迹的方程 $x^2+4y^2-x-4y=0$ 也可以用下列方法得到:

将 $x=\dfrac{4k(k-1)}{4k^2+1}$,$y=\dfrac{1-k}{4k^2+1}$两式相比得 $k=-\dfrac{x}{4y}$,又 $k=\dfrac{y-1}{x-1}$,所以可得 $-\dfrac{x}{4y}=\dfrac{y-1}{x-1}$,即 $x^2+4y^2-x-4y=0$,实质就是将 $k=-\dfrac{x}{4y}$ 代入直线方程 $y=k(x-1)+1$ 而得。

这就是说,参数方程在求轨迹普通方程中仅起过渡作用,我们可绕过求参数方程的步骤,得含有参数的方程组 $\begin{cases} f(x,y,t)=0 \\ \varphi(x,y,t)=0 \end{cases}$ 消去参数 t 直接得普通方程。

例 6 一个三角形的底边长一定,高也是定长,求它的垂心的轨迹方程。

分析 $\triangle ABC$ 的垂心随着 $\triangle ABC$ 的变化而变化,$\triangle ABC$ 的变化随顶点 A 的变而变化,由题设可知,顶点 A 的变化可用其横坐标刻划。

解 以 $\triangle ABC$ 的底边所在直线为 x 轴,BC 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系。

设 $|BC|=2a$,$|AD|=h$,则 $B(-a,0)$,$C(a,0)$;

设 $A(t,h)$,取 t 为参数,则直线 AD 的方程为 $x=t$;

设 AC 边上的高为 BE。

则
$$k_{AC}=\frac{h}{t-a},$$
$$k_{BE}=\frac{a-h}{h},$$

, BE 所在直线的方程为 $y=\dfrac{a-h}{h}(x+a)$。

由方程组$\begin{cases} x=t, \\ y=\dfrac{a-t}{h}(x+a) \end{cases}$，消去参数 t 得方程式 $x^2=-h\left(y-\dfrac{a^2}{h}\right)$ 即为△ABC 的垂心的轨迹方程。

说明　在求解过程中，可以先给出轨迹关于 t 的参数方程，再给出普通方程，但是我们绕过了求参数方程的步骤，直接给出了轨迹的普通方程。

练 习 题

1. 一根长为 $2a$ 的刚体棒，两端各在固定的两根互相垂直的杆上滑动，求这棒中点的轨迹参数方程。

2. 在△ABC 中，$A(1,0)$，$B(5,0)$，点 C 在直线 $y=x$ 上，求△ABC 垂心的轨迹方程。

3. 点 P 是定长线段 AB 上的一个动点，$AB=a$，在 AB 同侧以 AP、PB 为边分别作等边△APM 和△BPN，求线段 MN 的中点 Q 的轨迹。

4. P 是以 $A(1,0)$ 为圆心，且过原点 O 的圆上的点。以 x 轴的正半轴为始边，OP 为终边的角为 θ，试以 θ 为参数，求这个圆的参数方程。

5. 在椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ (a>b>0)$ 中，求：

(1) 过右焦点的弦的中点轨迹；

(2) 斜率为 k 的平行弦的中点轨迹。

6. 已知 MN 是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中垂直于长轴的动弦，A、B 是椭圆的长轴两端点，求直线 MA 和 NB 的交点 P 的轨迹方程。

三、参数方程与普通方程的互化

参数方程和普通方程是曲线方程的不同形式，它们都表示曲

线上点的坐标之间的关系。一般情况下,可以通过消去参数方程中的参数,得到直接表示动点坐标变量 x、y 之间关系的普通方程;也可以选择一个参数将普通方程化成参数方程。

将参数方程化成普通方程,可以看成将方程组消元,因此,消参数常用的方法就是解方程组常用的消元方法,即代入消元法,加减(或乘除)消元法,或利用代数或三角中的恒等式消元。

在化参数方程普通方程时,必须注意动点坐标变量 x、y 的取值范围不应扩大或缩小,也就是说,对应曲线上的点不应增加也不应减少,即必须要求参数方程和消去参数所得的普通方程是等价的。

化普通方程为参数方程时,一般先选定函数 $x = f(t)$,然后代入普通方程求出函数 $y = g(t)$,或先选定函数 $y = g(t)$,然而代入普通方程求出函数 $x = f(t)$。必须注意到,在选定 $x = f(t)$ 或 $y = g(t)$ 时,它们的值域与普通方程中 x、y 的取值范围的一致。

例 1　**把下列各参数方程化为普通方程:**

(1) $\begin{cases} x = 2t + 1 & (1) \\ y = t^2 - 1 & (2) \end{cases}$ (t **为参数**)

(2) $\begin{cases} x = t^2 - 2t & (1) \\ y = t^2 + 2 & (2) \end{cases}$ (t **为参数**)

解(1)　　**由**①,**得** $t = \dfrac{x - 1}{2}$,(3)

将(3)**代入**(2),**得** $y = (\dfrac{x - 1}{2})^2 - 1$,**即** $(x - 1)^2 = 4(y + 1)$。

解(2)　　(2) - (1),**得** $t = \dfrac{1}{2}(y - x - 2)$　(3)

将(3)**代入**(4),**得** $y = [\dfrac{1}{2}(y - x - 2)]^2 + 2$,**整理得** $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$。

分析　**解**(1)**用代入消元法消去参数** t;**解**(2)**用加减、代入消元法消去参数** t。

例 2　**把下列各参数方程化为普通方程:**

(1) $\begin{cases} x=\cos 2\theta & (1) \\ y=\cos^2\theta & (2) \end{cases}$ (θ 为参数)

(2) $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数)

解(1)　由(1)得　$x=2\cos^2\theta-1$　(3)

将 $\cos^2\theta=y$ 代入(3)得,$x=2y-1$,即 $x-2y+1=0$,

注意到 $-1\leqslant\cos 2\theta\leqslant 1$,则 $-1\leqslant x\leqslant 1$

,　所求普通方程为 $x-2y+1=0$　$(-1\leqslant x\leqslant 1)$。

解(2)

方法一　将两式平方相加,消去参数 t 得 $x^2+y^2=1$,

由 $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 知 $-1<x\leqslant 1$,

,　所求普通方程为 $x^2+y^2=1$　$(x\neq-1)$。

方法二　令 $t=\tan\dfrac{0}{2}$,

则 $\begin{cases} x=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\cos\theta \\ y=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\sin\theta \end{cases}$　$(0\neq 2k\pi+\pi\quad k\in z)$

两式平方相加可得 $x^2+y^2=1$。

$$\theta\neq 2k\pi+\pi, k\in z。$$

,　$$x\neq-1,$$

,　所求普通方程为 $x^2+y^2=1$　$(x\neq-1)$。

分析　在解(1)中,用代入消元法消去参数 θ,并利用了三角

恒等式 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$ 在解(2)中,利用了代数恒等式 $(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2+(\frac{2t}{1+t^2})^2=1$,三角恒等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,在方法二中应用了三角换元的方法。

在消去参数后,我们注意到了坐标变量 x、y 的取值限制,即保证了方程的等价。

例 3　把下列各参数方程化为普通方程:

(1) $\begin{cases} x=\sin2\theta \\ y=\sin\theta+\cos \end{cases}$　(θ 为参数)　$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$

(2) $\begin{cases} x=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta} \\ y=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \end{cases}$　(θ 为参数)　$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$

解(1)　由(1) $x=2\sin\theta\cos\theta$　(3)

由(2) $y^2=1+2\sin\theta\cos\theta$　(4)

(3) - (4) $x-y^2=-1$,即 $y^2=x+1$。

$-1\leqslant\sin2\theta\leqslant1$,　,　$-1\leqslant x\leqslant1$,

,　所求普通方程为 $y^2=x+1$　$(-1\leqslant x\leqslant1)$。

解(2)　由(2)　$y^2=\dfrac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\dfrac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(3)

(3) + (1) × 2　$y^2+2x=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}=1$,即 $y^2=-2(x-\frac{1}{2})$,

$$x=1-\frac{1}{1+\cos\theta}\quad(-1<\cos\theta<1),$$

,　$x\leqslant\frac{1}{2}$。

$$y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta},$$

, $$\sin\theta - y\cos\theta = y,$$

$$\sqrt{1+y^2}\sin(\theta-\varphi) = y,$$

$$\sin(\theta-\varphi) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

又 $$\theta \in R,$$

, $$\frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant 1,$$

, $$y \in R。$$

, 所求普通方程为 $y^2 = -2\left(x-\frac{1}{2}\right)$。

说明　在解本例的两小题中,都是利用三角恒等式消元。

在消去参数后,我们详细求取了参数方程中两函数的值域,并与所得的求普通方程中变量坐标 x、y 的取值范围作比较,给出相应的限制,保证了方程的等价。

例 4　将下列各普通方程化为参数方程:

(1) $x^2 = 2py$　　$(p > 0)$;(2) $xy + x - y - 2 = 0$。

分析　方程 $x^2 = 2py$ 可以化 y 为关于 x 的函数,即 $y = \frac{1}{2p}x^2$;分程 $xy + x - y - 2 = 0$ 可以化 y 为关于 x 的函数,即 $y = -\frac{x-2}{x-1}$,或可以化 x 为关于 y 的函数 $x = \frac{y+2}{y+1}$。

解(1)　方程 $x^2 = 2py$ 可以化为 $y = \frac{1}{2p}x^2$。

考虑到 $x \in R, y \geqslant 0$,

令 $x = 2pt, t \in R$,

则 $$y = \frac{1}{2p}(2pt)^2 = 2pt^2,$$

$$\begin{cases} x = 2pt \\ y = 2pt^2 \end{cases}$$ (t 为参数)。

解(2)

方法一　方程 $xy+x-y-2=0$ **可以化为** $y=-\dfrac{x-2}{x-1}$。

考虑到 $x\neq 1, y\neq -1$,

令 $x=t$,　　($t\neq 1$),

则
$$y=-\frac{t-2}{t-1},$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=-\dfrac{t-2}{t-1} \end{cases} \quad (t\ \text{为参数})。$$

方法二　方程 $xy+x-y-2=0$ **可以化为** $x=\dfrac{y+2}{y+1}$。

考虑到 $x\neq 1, y\neq -1$,

令 $y=t$,　　($t\neq -1$),

则
$$x=\frac{t+2}{t+1},$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{t+2}{t+1} \\ y=t \end{cases} \quad (t\ \text{为参数})。$$

说明　从以上解法可知,若 y **可以表示为** x **的函数,则先将** x **表示为** t **的函数,**y **也一定可以表示为** t **的函数,反之亦然。必须注意到,在给出** x **关于参数** t **的函数时,必须考虑到** x **的取值范围,以保证所得参数方程与普通方程等价。**

方法三

方程 $xy+x-y-2=0$ **可以化为**$(x-1)(y+1)=1$。

考虑到 $x-1\neq 0, y+1\neq 0$,

令
$$x-1=\tan a, y+1=\cot a,$$

则
$$x=1+\tan a, y=-1+\cot a,$$

$$\begin{cases} x=1+\tan a \\ t=-1+\cot a \end{cases} \quad (a\ \text{为参数})。$$

例 5　化椭圆方程 $x^2+4y^2-16x+12=0$ **为参数方程。**

解法一　方程 $x^2+4y^2-16x+12=0$ **可以化为**

$$y=\pm 2\sqrt{1-(x-2)^2}。$$

令 $x-2=\cos\theta$**,即** $x=2+\cos\theta$**,**$\theta\in[0,\pi]$**,**

则 $$y=\pm 2\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm 2\sin\theta。$$

考虑到函数的单值性,将 θ **的取值范围扩大为** $\theta\in[0,2\pi]$ **或** $\theta\in$ R**,**

则可只取 $y=2+\sin\theta$**,**

$$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}。\quad（\theta \text{ 为参数}）。$$

解法二　方程 $x^2+4y^2-16x+12=0$ **可以化为**

$$y=\pm 2\sqrt{1-(x-2)^2}。$$

令　$x-2=\cos\theta$**,即** $x=2+\cos\theta$**,**

则 $$y=\pm 2\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm 2\sin\theta,$$

, $$\begin{cases}x=2+\cos\theta,\\y=2\sin;\end{cases}\quad \text{或} \quad \begin{cases}x=2+\cos\theta\\y=-2\sin\theta\end{cases}\quad（\theta \text{ 为参数}）。$$

$$\begin{cases}x=2+\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}\quad \text{与} \quad \begin{cases}x=2+\cos\theta\\y=-2\sin\theta\end{cases}\quad \text{等价}$$

取 $$\begin{cases}x=2+\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}\quad（\theta \text{ 为参数}）。$$

分析　参数方程中的两个等式必须保证坐标变量 x、y **是关于参数的函数。**

例 6　**设** $y=tx+2$（t **为参数**）**,求双曲线** $9y^2-4x^2=36$ **的一个参数方程。**

解　将 $y=tx+2$ **代入双曲线方程** $9y^2-4x^2=36$**,得** $9(tx+2)^2-4x^2=36$**,**

整理得　$x[(9t^2-4)x+36t]=0$

,　$x=0$ **或** $x=\dfrac{-36t}{9t^2-4}$**,**

令 $\dfrac{-36t}{9t^2-4}=0$**,则** $t=0$

,　$x=\dfrac{-36t}{9t^2-4}$。

将 $x=-\dfrac{36t}{9t^2-4}$代入 $y=tx+2$,得 $y=\dfrac{-18t^2-8}{9t^2-4}$,

,　$$\begin{cases} x=\dfrac{-36t}{9t^2-4}, \\ y=\dfrac{-18t^2-8}{9t^2-4} \end{cases}$$。

又　$x=0$ 时,应有 $y=-2$,

,　所求双曲线的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{-36t}{9t^2-4} \\ y=\dfrac{-18t^2-8}{9t^2-4} \end{cases}$（$t$ 为参数）;

或　$$\begin{cases} x=0, \\ y=-2。 \end{cases}$$

说明　解题中,实质是将双曲线上的点看成动直线 $y=tx+2$ 与双曲线的交点的轨迹,其中参数 t 就是动直线的斜率,必须注意到动直线与双曲线上的点(除去点(0,2)和(0,-2))具有一一对应的关系,即参数数 t 与双曲线上的点具有一一对应的关系,这是建立曲线参数方程的常用方法。

练 习 题

1. 将下列各参数方程化成普通方程:

(1) $\begin{cases} x=2t^2-1 \\ y=t^2+1 \end{cases}$　（t 为参数,$0\leqslant t\leqslant 1$）;

(2) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$　（t 为参数）;

(3) $\begin{cases} x = 1 + \cos^2\theta \\ y = \sin^2\theta - \sin^4\theta \end{cases}$ （θ 为参数）。

2. 求曲线$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2t \end{cases}$（t 为参数）的准线方程。

3. 将下列各方程化为参数方程：

(1) $x^2 = y - 1$；

(2) $xy = -1$。

4. 设 $y = tx$（t 为参数），求圆 $x^2 + y^2 - 3y = 0$ 的参数方程。

四、直线和圆锥曲线的参数方程的应用

随着参数的选取不同，直线的参数方程有各种不同的形式。常见的有以下两种：

(1) 两点式已知点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则直线 AB（除点 B 外）可以表示为

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad (\lambda \text{ 为参数}, \lambda \neq -1);$$

方程中的参数 λ 的几何意义是点 (x, y) 分线段 $\overline{AB}$ 的分比。

(2) 点斜式

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (t \text{ 为参数})。$$

方程中 (x_0, y_0) 为直线上一定点，当 $a \neq 0$ 时，$\dfrac{b}{a}$ 表示直线的斜率。

当 a、b 分别表示点 M(x、y) 在 x 轴方向与 y 轴方向的分速度时，参数 t 就具有时间 t 的物理意义，相应的 at，bt 则分别表示点 M(x, y) 在 x 轴方向与 y 轴方向上对点 (x_0, y_0) 的位移。

若 $+a^2b^2 = 1$，$b \geqslant 0$ 时，方程称作标准式，这时方程中的参数 t 的几何意义是表示点 (x_0, y_0) 为起点，t 对应的点 (x, y) 为终点的有

向线段的数量，$|t|$表示这条线段的长度。

直线的参数方程有着广泛的应用。

直线参数方程中的参数与直线上的点相对应，参数的性质反映了直线上的点的性质，参数的变化刻画着直线上的点的运动变化，特别地关于参数的方程的根的性质刻画着根相应的点的性质。因此，利用直线的参数方程，从建立参数的方程入手，可以寻找解决与直线相关的问题的方法。

圆锥曲线的参数方程实质上提供了圆锥曲线上的点的一元参数坐标，这就是说，借助于圆锥曲线的参数方程可以对多元问题作消元处理。

例 1　求点 $P(2,3)$ 关于直线 l：$2x-y-4=0$ 的对称点 Q。

分析　只要建立直线 PQ 的参数方程，并找到点 Q 相应的参数就可求得点 Q 的坐标。

解　　直线 l 的斜率为 2，

,　　直线 PQ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$。

,　　直线 PQ 的方程为 $\begin{cases} x=2-2t \\ y=3+t \end{cases}$　　（t 为参数）。

代入直线 l 的方程，整理得 $-5t-3=0$，解得 $t=-\frac{3}{5}$，

,　　点 Q 对应的 t 值为 $-\frac{6}{5}$，代入直线 PQ 的参数方程，得 $x=\frac{22}{5}$，$y=\frac{9}{5}$，

,　　点 Q 的坐标为 $(\frac{22}{5},\frac{9}{5})$。

说明　将直线 PQ 的参数方程代入直线 l 的方程，得参数 t 的方程 $-5t-3=0$，这个方程的根就是直线 PQ 与直线 l 的交点对应的 t 值。

例 2　已知直线 l 过点 $P(-3,-\frac{3}{2})$，与圆 $x^2+y^2=25$ 相交

于 A、B 两点,求弦 AB 的中点 M 的轨迹。

解　设直线 l 的倾斜角为 a,

则直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -3 + t\cos a \\ y = -\dfrac{3}{2} + t\sin a \end{cases}$　(t 为参数),

代入圆方程,整理可得 $t^2 - 3(2\cos a + \sin a)t - \dfrac{55}{4} = 0$。

设方程的两根为 t_1、t_2,

则弦 AB 的中点 M 对应的 t 值为 $\dfrac{t_1 + t_2}{2} = \dfrac{3(2\cos\alpha + \sin\alpha)}{2}$,

,　弦 AB 的中点 M 的轨迹方程为

$$\begin{cases} x = -3 + \dfrac{3\cos a(2\cos\alpha + \sin\alpha)}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha)}{2} \end{cases}$$　(a 为参数)。

点 $P\left(-3, -\dfrac{3}{2}\right)$ 在圆内,

,　$a \in R$。

消去 a,得轨迹方程 $x^2 + y^2 + 3x + \dfrac{3}{2}y = 0$,即轨迹为以点 $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$ 为圆心,$\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ 为半径的圆。

说明　在直线 l 的方程中,参数 t 刻画着直线 l 上的点的运动变化,a 刻画着直线 l 的变化,也就刻画着点 M 的变化,即点 M 对应的 t 值 $-\dfrac{3(2\cos\alpha + \sin\alpha)}{2}$ 具体刻画着点 M 的变化,代入直线参数方程就得 a 为参数的点 M 的轨迹参数方程。

本例也可以用下面的方法求解。

解　设直线 l 的倾斜角为 a,弦 AB 的中点为 M(X,Y),

则 $\tan a = \dfrac{Y + \dfrac{3}{2}}{X + 3}$,

直线 l 的方程为$\begin{cases}x = X + t\cos\alpha \\ y = Y + t\sin\alpha\end{cases}$（t 为参数），

代入圆方程,整理可得 $t^2 + 2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)t + x^2 + y^2 - 25 = 0$。

点 M(X,Y)为弦 AB 的中点，

, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$，

, $\tan a = -\dfrac{X}{Y}$，

, $\dfrac{Y + \dfrac{3}{2}}{X + 3} = -\dfrac{X}{Y}$，

整理可得 $X^2 + Y^2 + 3X + \dfrac{3Y}{2} = 0$。

斜率不存在时,弦 AB 的中点为(-3,0),适合方程 $X^2 + Y^2 + 3X + \dfrac{3}{2}Y = 0$。

, 所求轨迹为圆。

例 3　设抛物线的轴与准线 l 交于点 A,过点 A 作抛物线的割线交于点 B、C,又过焦点 F 作抛物线的割线与直线 ABC 平行,且交抛物线于 Q、R,求证：$|AB||AC| = |FQ||FR|$。

分析　直线 ABC,直线 QFR 都是分别经过定点 A、F 的直线,因此,可以用直线的参数方程证明结论成立。

证明　设抛物线的方程为 $y^2 = 4px(p > 0)$,则点 A 的坐标为(-p,0),焦点 F 的坐标为(p,0)。

设直线 ABC 的倾斜角为 a，

则直线 ABC 的参数方程为$\begin{cases}x = -p + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha\end{cases}$（t 为参数），

代入抛物线方程,整理可得 $\sin^2\alpha t^2 - 4p\cos\alpha + 4p^2 = 0$。

由参数 t 的几何意义可知,这个方程的两个根分别呷为有向线段$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的数量，

$$,\qquad |AB|\cdot|AC|=\frac{4p^2}{\sin^2 a}。$$

同理可得$|FQ|\cdot|FR|=\dfrac{4p^2}{\sin^2 a}$，

$$,\qquad |AB||AC|=|FQ||FR|。$$

说明　过定点的直线问题常用直线的参数方程处理。

例4　如图12-5　所示，过双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$**的右焦点F的直线交双曲线的右支交于M、N两点（MN不垂直于双曲线的实轴），MN的中垂线交双曲线的实轴于Q，求证 2**$a|FQ|=c|MN|(c=\sqrt{a^2+b^2})$。

分析　直线MN是过曲线的右焦点F（定点）的直线，因此，可以用直线的参数方程证明结论成立。

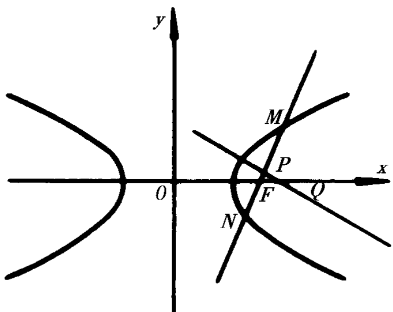


图12-5

证明设直线MN的倾斜角为a，

则其参数方程为$\begin{cases}x=c+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$　（t为参数），

代入双曲线方程，整理可得

$(b^2\cos^2 a-a^2\sin^2 a)t^2+2b^2c\cos at+b^4=0$。

设方程的两个根分别分t_1、t_2，

则
$$t_1+t_2=-\frac{2b^2c\cos a}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha},$$

$$t_1t_2 = \frac{b^4}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha},$$

, $$|MN|| = |t_1 - t_2|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{2b^2c\cos a}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}\right)^2 - \frac{4b^4}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2 a}}$$

$$= \frac{2ab^2}{|b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha|},$$

$$c|MN| = \frac{2ab^2c}{|b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha|}。$$

设 MN **的中垂线交** MN **于点** P，

$$|PF| = \frac{1}{2}|t_1 + t_2|$$

$$= \frac{b^2c|\cos\alpha|}{|b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha|},$$

, $$|FQ| = \frac{|PF|}{|\cos\alpha|}$$

$$= \frac{b^2c}{|b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha|},$$

$$2a|FQ| = \frac{2ab^2c}{|b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha|}。$$

, $$2a|FQ| = C|MN|。$$

例 5　**过点** M(2,1)**作椭圆** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ **的弦** AB，**若** M **恰为弦** AB **的三等分点**，**求直线** AB **的方程。**

解　**设直线** AB **的倾斜角为** a，

则直线 AB **的参数方程为** $\begin{cases} x = 2 + t\cos\alpha \\ y = 1 + t\sin\alpha \end{cases}$ （t **为参数**）。

代入椭圆方程 $x^2 + 4y^2 = 16$，**整理可得**

$(\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha)t^2 + 4(\cos\alpha + 2\sin\alpha)t - 8 = 0$。

设方程的两个根分别为 t_1、t_2，

则 $t_1 + t_2 = -\frac{4(\cos\alpha + 2\sin\alpha)}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$，$t_1t_2 = -\frac{8}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha} < 0$。

点 $M(2,1)$ 为线段 AB 的三等分点，

， 可设 $|t_1| = |2t_2|$，则 $t_1 = -2t_2$。

， $t_2 = \dfrac{4(\cos\alpha + 2\sin\alpha)}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$，$-2t_2^2 = \dfrac{8}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$，

$$-2\left[\frac{4(\cos\alpha + 2\sin\alpha)}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}\right]^2 = -\frac{8}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$$

整理可得 $12\tan^2\alpha + 16\tan\alpha + 3 = 0$，

$$\tan a = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{6}。$$

， 所求直线 AB 的方程为 $y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{7}}{6}(x-2) + 1$。

说明 求直线 AB 的方程的关键是求直线 AB 的倾斜角，在解题过程中，实际上建立了关于 t_1、t_2、a 的方程组，并消去了 t_1、t_2 获得了倾斜角 a 的方程。

例 6 求过点 $P(6,0)$，且与圆 $x^2 + y^2 = 9$ 相切的直线。

分析 所求切线是过定点 P 的直线，因此，可以借助于直线参数方程求解。

涉及到曲线上的点的问题，可设点的参数坐标处理，这种方法不仅适用于直线，而且也适用于圆、椭圆、双曲线、抛物线。

解法一 设所求直线的倾斜角为 a，

则直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 6 + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$ （t 为参数），

代入圆方程，整理可得 $t^2 + 12\cos a t + 27 = 0$。

由直线与圆相切，可知 $\triangle = (12\cos a)^2 - 108 = 0$，整理可得 $\cos^2\alpha = \dfrac{3}{4}$，

， $\tan\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

， 所求直线方程为 $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-6)$，即 $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ 或 $x -$

$\sqrt{3}y-6=0$。

说明 直线参数方程代入圆方程,得关于参数 t 的方程 $t^2+12\cos at+27=0$,这个方程的根就是直线与圆的公共点对应的 t 值,这个方程的根的性质刻画着直线与圆的位置关系,方程有重根,表示直线与圆有两个重合的公共点,即 $\Delta=0$,表示直线与圆相切,由此我们获得了关于直线的倾斜角的方程。

解法二 设所求直线与圆切于点$(3\cos\theta,3\sin\theta)$,

则所求直线方程为 $\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=3$。

直线过点 $P(6,0)$

,
$$6\cos\theta=3,$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

, 所求直线方程为$\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}y=3$,即 $x+\sqrt{3}y-6=0$ 或 $x-\sqrt{3}y-6=0$。

例 7 点 P 为椭圆上的一个定点,过点 P 四条弦 PA、PB、PC、PD,这四条弦所在直线椭圆的长轴分别依次交于点 A'、B'、C'、D',若$|PA'|=|PD'|$,$|PB'|=|PC'|$,求证:AD∥BC。

分析 考虑到弦 PA、PB、PC、PD 所在直线都经过点 P,可用用直线参数方程证明;考虑到点 P、A、B、C、D 在椭圆上,可以用椭圆上的点的参数坐标证明。

证法一 设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$,

设点 P 的坐标为(x_0,y_0),

则 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$。

设直线 PA的倾斜角为 a,则直线 PD 的倾斜角为 $\pi-\alpha$,

, 直线 PA的参数方程为$\begin{cases}x=c_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数);

直线 PD 的参数方程为$\begin{cases}x=x_0-t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数)。

将 $x = x_0 + t\cos a, y = y_0 + t\sin a$ 代入椭圆方程，

整理可得 $(b^2\cos^2 a + a^2\sin^2 a)t^2 + 2(x_0 b^2\cos a + y_0 a^2\sin a)t = 0$，

, $$t_A = -\frac{2(x_0 b_2\cos\alpha + y_0 a^2\sin\alpha)}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha},$$

, $$A\left(x_0 - \frac{2(x_0 b^2\cos\alpha + y_0 a^2\sin\alpha)\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}, y_0 - \frac{2(x_0 b^2\cos\alpha + y_0 a^2\sin\alpha)\sin\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}\right),$$

同理可得

$$D\left(x_0 + \frac{2(-x_0 b^2\cos\alpha + y_0 a^2\sin\alpha)\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}, y_0 - \frac{2(-x_0 b^2\cos\alpha + y_0 a^2\sin\alpha)\sin\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}\right),$$

$$k_{AD} = \frac{\dfrac{4x_0 b^2\sin\alpha\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}{\dfrac{4y_0 a^2\sin\alpha\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}。$$

同理可得 $k_{BC} = \dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$，

$$k_{AD} = k_{BC},$$

, $$AD /\!/ BC。$$

证法二　设椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$ （θ 为参数）。

设 $P(a\cos\theta, b\sin\theta), A(a\cos\alpha, b\sin\alpha), D(a\cos\beta, b\sin\beta)$，

则 $k_{AD} = \dfrac{b(\sin\alpha - \sin\beta)}{a(\cos\alpha - \cos\beta)} = \dfrac{b}{a}\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$。

同理 $k_{PA} = -\dfrac{b}{a}\cot\dfrac{\theta+\alpha}{2}, k_{PD} = -\dfrac{b}{a}\cot\dfrac{\theta+\beta}{2}$。

$$|PA'| = |PD'|,$$

, $$k_{PA} = -k_{PD},$$

, $$-\frac{b}{a}\cot\frac{\theta+\alpha}{2}=\frac{b}{a}\cot\frac{\theta+\beta}{2},$$

$$\cot\frac{\theta+\alpha}{2}=\cot\left(-\frac{\theta+\beta}{2}\right),$$

, $$\frac{\theta+\alpha}{2}k\pi-\frac{\theta+\beta}{2},$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}k\pi-\theta,$$

, $$k_{AD}=-\frac{b}{a}\cot(k\pi-\theta),$$

$$=\frac{b}{a}\cot。$$

同理可得 $k_{BC}=\frac{b}{a}\cot\theta$。

, $k_{AD}=k_{BC}$,

, $AD/\!/BC$。

例 8 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$H 上有两点 P、Q,连接点 A(-a,0)与点 Q 的直线平行于 OP,且与 y 轴交于点 R,求$\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}$的值。

分析 考虑到直线 AQR 经过定点 A,可以用直线参数方程求解 ;考虑到点 P、Q 在椭圆上,可以用椭圆上的点的参数坐标求解。

解法一 设直线的倾斜角为 α,则直线 AQR 的参数方程为

$$\begin{cases}x=-a+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}\quad(t\text{ 为参数}),$$

代入椭圆方程 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$,

整理可得$(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)t^2-2ab^2\cos\alpha\cdot t=0$

, $$t_Q=\frac{2ab^2\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha},$$

, $$|AQ|=\frac{2ab^2|\cos\alpha|}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha},$$

代入直线方程 $x=0$**，得** $-a+t\cos\alpha=0$**，**

, $$t_R=\frac{a}{\cos\alpha},$$

, $$|AR|=\frac{a}{|\cos\alpha|},$$

, $$|AQ|\cdot|AR|=\frac{2ab^2|\cos\alpha|}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}\cdot\frac{a}{|\cos\alpha|}$$

$$=\frac{2a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}。$$

$$AQ\parallel OP,$$

, **直线** OP **的参数方程为** $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$ **（**t **为参数），**

代入椭圆方程 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$**，整理可得（**$b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha$**）**$t^2=a^2b^2$**，**

, $$t_p^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha},$$

, $$|OP|^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha},$$

, $$\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}=\frac{\dfrac{2a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}{\dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}$$

$$=2$$

解法二　设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$**，**$Q(a\cos\varphi,b\sin\varphi)$**。**

$$AQ\parallel OP,$$

, $$\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi+a}=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta},$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1}\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\tan\theta,$$

, $$\varphi=2k\pi+2\theta,k\in z,$$

，$$Q(a\cos 2\theta, b\sin 2\theta),$$

，**直线** AQ **的方程为** $y = \frac{b}{a}\tan\theta(x + a)$。

令 $x = 0$，**则** $y_R = b\tan\theta$，

，$$|AQ| = \sqrt{(a\cos 2\theta + a)^2 + (b\sin 2\theta)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2\cos^4\theta + 4b^2\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= 2|\cos\theta|\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta},$$

$$|AR| = \sqrt{(-a)^2 + (b\tan\theta)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}{|\cos\theta|}$$

，$$|AQ|\cdot|AR| = 2|\cos\theta|\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}{|\cos\theta|}$$

$$= 2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta),$$

$$|OP|^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta,$$

，$$\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2} = \frac{2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

$$= 2。$$

说明　在解法二中，$\frac{|AQ|\cdot|AR|}{|OP|^2}$**实质上是用角** θ、φ **的三角函数形式表示的，是二元表达式，我们由几何条件** AQ∥OP **得到了** $\varphi = 2k\pi + 2\theta$，**其在求值过程中起到了消元作用。**

例 9　**直线** l：$\sqrt{3}x + 2y - 6 = 0$ **与抛物线** $y^2 = 2\sqrt{3}x$ **相交于** A、B **两点，求**∠AOB。

解　将抛物线方程化为参数方程

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t^2 \\ y = 2\sqrt{3}t \end{cases} \quad (t\text{ 为参数}),$$

将它代入直线 l 的方程,整理可得 $3t^2 + 2\sqrt{3}t - 3 = 0$

设方程的两根分别为 t_1、t_2,则 $t_1 t_2 = -1$。

由 t 的几何意义可知 $\frac{1}{k_{OA}} \cdot \frac{1}{k_{OB}} = -1$,即 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -1$,

, $\angle AOB = 90°$。

例 10　已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,,直线 $x + 2y + 18 = 0$,试在椭圆上求一点 P,使点 P 到直线的距离最小。

解　设点 P 的坐标为 $(3\cos\theta, 2\sin\theta)$,则点 P 到直线的距离。

$$d = \frac{|3\cos\theta + 4\sin\theta + 18|}{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{3}{5}\cos\theta + \frac{4}{5}\sin\theta\right) + \frac{18}{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5}\sin(\theta + \varphi) + \frac{18}{\sqrt{5}},$$

其中 $\sin\varphi = \frac{3}{5}$,$\cos\varphi = \frac{4}{5}$

, **当 $\sin(\theta + \varphi) = -1$,即 $\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi$,$(k \in z)$ 时,d 取最小值。**

这时 $\cos\theta = \cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\sin\varphi = -\frac{3}{5}$,

$$\sin\theta = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\cos\varphi = -\frac{4}{5}。$$

, **点 P 的坐标为 $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$。**

说明　在上面的解题过程中,我们利用椭圆的参数方程将椭

圆上的点的坐标设成参数形式，将问题转化成三角函数的最值问题，使问题很容易得到解决。

练 习 题

1. 已知直线$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = -3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（t 为参数）与圆 $x^2 + y^2 = 16$ 交于 A、B 两点，求弦 AB 的中点。

2. 已知椭圆$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一点 P，P 与两焦点 F_1、F_2 的连线互相垂直，求点 P 的坐标。

3. 直线 l：$\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = -1 + t\sin\alpha \end{cases}$（t 为参数），截双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 所得弦长为 $2\sqrt{5}$，求直线 l 的倾斜角。

4. 抛物线方程为 $x = \frac{1}{4}y^2$，过点(0，-2)的直线与抛物线相交于不同的两点 P、Q，求以 OP、OQ 为邻边的平行四边形的第四个顶点 M 的轨迹，并说明它表示什么曲线。

5. 已知抛物线 $y^2 = 4aX(a > 0)$，AB 为过其焦点 F 的弦，$|AB| = l$，O 为坐标原点，ΔAOB 的面积为 S，当 AB 变化时，求证：$\frac{S^2}{l}$为定值。

6. 双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 的左准线交实轴于 D，过 D 引直线和双曲线交于 M、N 两点，又过右焦点 F 引与 MN 的垂直的直线与双曲线交于 P、Q 两点，求证：$|FP| \cdot |FQ| = 2|DM| \cdot |DN|$。

7. 已知四边形 ABCD 内接于椭圆$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$，其中点 A 的横坐标为 4，点 C 的纵坐标为 5，求四边形 ABCD 的面积的最大值。

五、极 坐 标

（一）极坐标方程

在极坐标平面内，动点的运动形成曲线，与动点对应的实数对(ρ,θ)的制约关系就表现为方程$f(\rho,\theta)=0$，这个方程叫做曲线的极坐标方程。由此我们可以认为，曲线的极坐标方程就是曲线上的点的极半径ρ和极角θ的关系等式。和在直角坐标系中一样，求曲线的极坐标方程同样有待定系数法和轨迹法，轨迹法也可分为直接法和间接法（代入法、参数法等）。

例1 画出极坐标方程$\cos\theta=\frac{1}{2}(\rho\in R)$表示的曲线。

解 $\cos\theta=\frac{1}{2}$， 可取$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{5}{3}\pi$

$\rho\in R$，，$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\theta=\frac{5\pi}{3}$分别表示两条直线（如图12-6所示）。

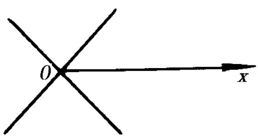


图12-6

例2 已知定圆的圆心为O，半径为R，A为圆内一定点，点B是圆上一动点，连接半径OB，作$AM\perp AB$交OB于M，求M点的轨迹方程。

解 取圆心O为极点，射线OA为极轴建立极坐标系，设A$(a,0)$，M$(\rho,0)$。

由题设可知，$|BM|^2|=|AB|^2+|AM|^2$。

如图12-7所示，若点M在OB上，则$|MB|=R-\rho$，

$$|AB|^2=|OB|^2+|OA|^2-2|OB|\cdot|OA|\cos\angle AOB$$
$$=R^2+a^2-2Ra\cos\theta,$$

$$|AM|^2=|OM|^2+|OA|^2-2|OM|\cdot|OA|\cos\angle AOM$$
$$=\rho^2+a^2-2\rho a\cos\theta,$$

, $(R-\rho)^2=R^2+a^2-2Ra\cos\theta+\rho^2+a^2-2\rho a\cos\theta$,

即 $$\rho=\frac{a(R\cos\theta-a)}{R-a\cos\theta}。$$

如图 12 - 8 **所示,若点** M **在** BO **的延长线上,则** $|MB|=R+\rho$,

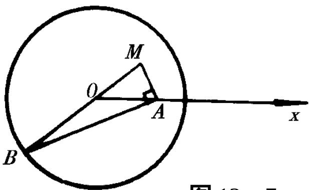


图 12 - 7　　　　图 12 - 8

$$|AB|^2=|OB|^2+|OA|^2-2|OB|\cdot|OA|\cos\angle AOB$$
$$R^2+a^2+2Ra\cos\theta,$$
$$|AM|^2=|OM|^2+|OA|^2-2|OM|\cdot|OA|\cos\angle AOM$$
$$=\rho^2+a^2-2\rho a\cos\theta,$$

, $(R+\rho)^2=R^2+a^2+2Ra\cos\theta+\rho^2+a-2\rho a\cos\theta$,

即 $$\rho=\frac{a(R\cos\theta+a)}{R+a\cos\theta}。$$

将 $(-\rho,\pi+0)$ **代入方程** $\rho=\frac{a(R\cos\theta+a)}{R+a\cos\theta}$ **得**,

$$\rho=\frac{a(R\cos\theta-a)}{R-a\cos\theta}。$$

, **所求轨迹的方程为** $\rho=\frac{a(R\cos\theta-a)}{R-a\cos\theta}$。

说明　本例是用直接法求轨迹方程,即直接将等量关系式 $|MB|^2=|AB|^2+|AM|^2$ **转化成** ρ,θ **的关系等式。**

例 3　**过极点** O **作圆** $\rho=a\cos\theta$ **的豁线** OB **交该圆于点** B,**过** B **作** $BC\perp OX$ **于** C,**过点** C **作** $CM\perp OB$ **于** M,**求点** M **的轨迹方程(见图** 12 - 9)。

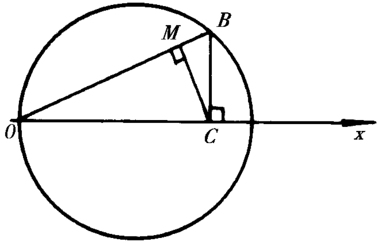


图 12 - 9

解　设点 $M(\rho,\theta)$ 为轨迹上的任意一点，相应点 B 的坐标为 (ρ_1,θ_1)，则 $\rho_1=a\cos\theta_1$。

$$\rho=|OM|=|OC|\cos\theta=|OB|\cos_2\theta=\rho_1\cos^2\theta,$$

,　　$$\rho_1=\frac{\rho}{\cos^2\theta},$$

又　　$\theta_1=\theta$，

,　　$\frac{\rho}{\cos^2\theta}=a\cos\theta$，即 $\rho=a\cos^3\theta$。

说明　本例是用代入法求点的轨迹。

（二）极坐标系中的旋转变换。

设在极坐标系中，曲线 C 的方程为 $f(\rho,\theta)=0$，若将曲线 C 绕极点 O 逆时针旋转角 θ_0，则曲线 C 的方程变为 $f(\rho,\theta-\theta_0)=0$

事实上，设点 $P(\rho,\theta)$ 为旋转后曲线 C 上的任意一点，其相应原曲线 C 上的点为 $P'(\rho',0')$，则 $f(\rho',\theta')=0$。

$$\rho'=\rho,\theta'=\theta-\theta_0,$$

,　　$f(\rho,\theta-\theta_\theta)=0$。

例 4　已知曲线 C 与曲线 $\rho=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$ 关于极轴对称，求曲线 C 的方程。

解法一　曲线 $\rho=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$ 的方程可以化为 $\rho=10\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，其为圆心为 $\left(5,-\frac{\pi}{6}\right)$，半径为 5 的圆，刻圆由圆 $\rho=10\cos\theta$ 绕极点顺时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 而得到，故将圆 $\rho=10\cos\theta$ 绕极点逆

时针旋转$\frac{\pi}{6}$可得曲线 C,曲线 C 的方程为$\rho=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$。

解法二 设点 $P(\rho,\theta)$ 是曲线 C 上的任意一点,则点 $P'(\rho,-\theta)$ 是由线 $\rho=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$ 上的点,

, $\rho=5\sqrt{3}\cos(-\theta)-5\sin(-\theta)$,即 $\rho=5\sqrt{3}\cos\theta+5\sin\theta$。

说明 解法一是用旋转变换的方法求曲线的方程,解法二是用代入法求轨迹方程的方法求曲线的方程。

(三)极坐标系的应用

在任何一种坐标系中,都引进了不同的坐标变量(如直角坐标系中的 x,y,极坐标系中的 ρ,θ)这些坐标变量具有不同的几何意义,解题过程中,当选定的坐标变量与问题中涉及到的几何量具有直接的或简明的联系时,就会有较简捷的解法,这是解题中选择坐标系的一项重要依据。

一般地说,当问题涉及到与定点相关时,建立以该点为极点的极坐标系,往往可以获得较为简捷的解题方法。

例 5 已知 $\angle AOB=120°$,直线 l 和 OA、OB 及 $\angle AOB$ 的平分线分别交于 A、B、C。求证:$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{|OC|}$。

分析 由于 OA、OB、OC 都为由点 O 发出的射线,故建立极坐标系证明较为方便。

证明 取点 O 为极点、OC 为极轴建立极坐标系。

设 $|OC|=a$,直线 l 的倾斜角为 α,则直线 l 的极坐标方程为 $\rho=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)}$。

设 $A\left(\rho^1,\frac{\pi}{3}\right)$,$B\left(\rho_2,-\frac{\pi}{3}\right)$,则由点 A、点 B 在直线 l 上可知,$\rho_1=\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$,$\rho_2=\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}$,

, $$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{a\sin\alpha} + \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{a\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{a\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{|OC|}。$$

例 6 **已知椭圆的长轴**$|A_1A_2| = 6$**,焦距**$|F_1F_2| = 4\sqrt{2}$**,过椭圆的焦点** F_1 **作一直线交椭圆于两点** M、N**,设**$\angle F_2F_1M = \alpha(0 \leqslant \alpha < \pi)$**,当** α **为什么值时,**$|MN|$**等于椭圆的短轴的长(见图** 12 - 10**)。**

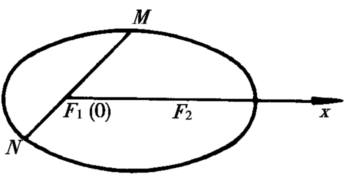


图 12 - 10

分析　本例的解法很多,因为线段 MN **是与定点** F_1 **相关的一条线段,故可以考虑取定点** F_1 **为极点的极坐标系求解。**

建立未知量的方程求解未知量的取值是求未知量取值的基本思想方法,题设中的等量关系"$|MN|$**等于椭圆短轴的长"是建立方程的基础。**

解　以椭圆的焦点 F_1 **为极点,以** F_1 **为起点并过** F_2 **的射线为极轴建立极坐标系。**

椭圆的长轴长为 6**,焦距为** $4\sqrt{2}$**,**

, **椭圆的极坐标方程为** $\rho = \dfrac{1}{3 - 2\sqrt{2}\cos\theta}$。

由$\angle F_2F_1M = \alpha$ **可设** $M(\rho_1, \alpha)$,$N(\rho_2, \pi + \alpha)$,

, $$|MN| = |F_1M| + |F_2N|$$

$$= \rho_1 + \rho_2$$

$$= \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha}$$

$$= \frac{6}{9 - 8\cos^2\alpha}。$$

椭圆的短轴长为 2,

, $$\frac{6}{9 - 8\cos^2\alpha} = 2,$$

, $$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \alpha = \frac{5\pi}{6}。$$

例 7 已知双曲线的中心在原点,焦点在 x 轴上,过双曲线的右焦点 F_2 且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P、Q 两点,若 $OP \perp OQ$,$|PQ| = 4$,求双曲线的方程。

分析 因为题设条件与椭圆的中心及右焦点相关,所以可以考虑用双曲线的极坐标方程求解。

解 取双曲线的中心为极点,x 轴正半轴为极轴的极坐标系中,设双曲线的方程为 $\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$,即有 $\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}$。

设 P、Q 的极坐标分别为 (ρ_1, α),$(\rho_2, \alpha \pm \frac{\pi}{2})$,

则 $$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}, \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{\sin^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\alpha}{b^2}$$

, $$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \text{即} \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\rho_1^2\rho_2^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}。$$

设 PQ 的倾斜角为 φ,则 $\tan\varphi = \sqrt{\frac{3}{5}}$,从而 $\sin\varphi = \sqrt{\frac{3}{8}}$,$\cos\varphi = \sqrt{\frac{5}{8}}$。

$$OP \perp OQ,$$

$$\frac{1}{2}\rho_1\rho_2 = \frac{1}{2}|PQ|\cdot|OF_2|\sin\varphi\text{,即 }\rho_1\rho_2 = 4C\sqrt{\frac{3}{8}},$$

, $$\rho_1{}^2\rho_2{}^2 = 6C^2。$$

$$|OP|^2 + |OQ|^2 = |PQ|^2,$$

, $$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16。$$

, $$\frac{16}{6C^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2},$$

, $3e^4 - 14e^2 + 8 = 0$,则 $e > 1$ 知 $e = 2$。

取双曲线的右焦点 F_2 为极点,x 轴的正方向为极轴的方向建立极坐标系,则双曲线的方程为 $\rho = \dfrac{2P}{1-2\cos\theta}$。

$$e = 2,\tan\varphi = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

, **点** P、Q **分别在双曲线的两支上,**

, $$|PQ| = \left|\frac{2p}{1-2\cos\varphi} + \frac{2p}{1+2\cos\varphi}\right|$$

$$= \left|\frac{4p}{1-4\cos^2\varphi}\right|$$

$$= \left|\frac{4p}{1-4\cdot\frac{5}{8}}\right|$$

$$= \frac{8p}{3}。$$

$$|PQ| = 4,$$

, $$\frac{8}{3}p = 4,p = \frac{3}{2}。$$

, **所求双曲线的极坐标方程为** $p = \dfrac{3}{1-2\cos\theta}$。

, $a = 1,b = \sqrt{3}$,**故双曲线在题设直角坐标系中的方程为** $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$。

说明 本例分别在两次建立的极坐标系下建立了关于 e,p 的两个方程,求得 e 和 p 的值。方程求值是求值的基本思想方法。

练 习 题

1. 作出极坐标方程$(\rho-2)\left(0-\frac{\pi}{4}\right)=0(\rho>0)$所表示的曲线。

2. 已知圆的方程为 $\rho=\cos\theta+2\sin\theta$,求其圆心的极坐标和半径。

3. 已知 P、Q 分别在锐角 α 的两边上,$\triangle POQ$ 的面积为 8,O 为角的顶点,

(1)求 PQ 的中心 M 的轨迹方程:

(2)求轨迹上到 O 点的距离的最小值。

4. 以抛物线的焦点 F 引直线交抛物线于 A、B 两点,线段 AB 的中点为 C,AB 的垂直平分线交抛物线的对称轴于 D,求证:$|CD|^2=|FA|\cdot|FB|$。

练 习 题 答 案

代数

第一章　函数

一、认识集合是解集合问题的基础

1. $A \subset B$　2. $m = 3$ 或 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$　3. B，$\{(x,y) \mid x \in R, y \in R, (x,y) \neq (2,4)\}$　4. $(2, +\ )$　5. $\{3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}\}$。

二、函数与反函数

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　2. $\frac{7-6\sqrt{2}}{4}$　3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $f(x) = 10^{-3x^2+9x}(x \in (0,3))$，$y \in (1, 10^{\frac{27}{4}})$。

三、函数的定义域和值域

1. $(-1,0)$　2. $[-2,0]$　3. (1) $[-\frac{1}{3}, 0]$，(2) $[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$

4. $(1,p)$；$(-\ , 1+\log_2(p-1))(1<p\leqslant 3)$，$(-\ , 2\log_2(p+1)-2](p>3)$。

四、函数的奇偶性

1. 偶　2. (2) $a=1$　3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1(x \leqslant 0)$　4. $1 \leqslant a \leqslant \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$　5. (1) $g(x) = x^4 + 2x^2 + 2$；(2) $\lambda = 4$。

五、函数的图像

2. $b < -2$　4. $0 < m < 4$　6. 关于直线 $x = a$ 对称　7. $(-\ ,$

$-2) \cup (-2, + \quad), (2, + \quad), (- \quad, -2)$ 增，$(-2, + \quad)$ 减，$x = -2$　8. $a = \frac{1}{2}$。

六、函数与方程

1. $0 < a < 4$，$a = 4$，$a > 4$　2. $-2 < a < 0$ 或 $0 < a < \sqrt{2}$　3. $(-\quad, -\frac{3+\sqrt{21}}{2})$。

第二章　三角函数

一、单位圆

1. $>$　2. $[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi) \cup (2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{7\pi}{6})]$，$k \in z$

3. $(2k\pi + \frac{5}{6}\pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ $k \in z$　　4. $(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi]$，$(2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \pi]$ $k \in z$。

二、三角函数的图像和性质

1. $[\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}, \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}]$ $k \in z$　　2. $y = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4})$ 3. $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} k \in z$　　4. $a = \pm 7$。

三、三角函数求值

1. $\frac{24}{13}$　2. (1) $\frac{3}{4}$，　(2) -1，　(3) $\sqrt{3}$　3. 1　4. 3　5. $\frac{1}{3}$　6. $\frac{\pi}{3}$。

四、化简与恒等式的证明

1. 1　2. $\cos\alpha$　7. $\frac{\pi}{2}$　8. 奇，$T = \pi$，$[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}]$ 增 $k \in z$，$[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}]$ 减 $k \in z$，　　9. 等腰三角形或直角三角形

10. $m=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，$0=\frac{5\pi}{3}$。

五、反三角函数式表示角

1. $\frac{7}{5}$　2. $-\frac{5\pi}{4}$　4. $>$　5. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$。

第三章　不等式

二、解不等式

1. (1) $\{x|x<1$ 或 $x>4$ 或 $x=-1\}$，(2) $x|x\leqslant1$ 或 $2<x\leqslant3$ 或 $x>4\}$，(3) $\left\{x|x<-\frac{7}{9}\right\}$，(4) $\{x|x\geqslant4$ 或 $x=-1\}$，(5) $\left\{x|0<x\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

2. (1) $\left\{x|\frac{1}{1-a}<x<0\right\}(a>1)$，$\left\{x|1<x<\frac{1}{1-a}\right\}(0<a<1)$，(2) $\{x|0<x<\sqrt{a}$或 $x>a^4\}$，$\{x|a^4<x<\sqrt{a}\}(0<a<1)$　3. $x>a+1-\sqrt{1-2a}(0<a\leq2)$，$x\geq\frac{1}{2}a(a>2)$　4. $-2a<x<0(0<a<1)$，$x>0$ 或 $-3<x<-2a\left(1<a<\frac{3}{2}\right)$，$x>0\left(a\geq\frac{3}{2}\right)$。

三、不等式的应用

1. $3+2\sqrt{2}$　2. 9　3. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

4. (1) $f(x)=\frac{1}{x+a}\sqrt{(x^2+2ax)^2+3a^4}(0\leqslant x\leqslant a)$，(2) $\sqrt{2a}(x=(\sqrt{2}-1)a)$

5. $\left(-\frac{3}{4},+\quad\right)$　6. $\sqrt{2}$　7. $a\leqslant-8$　8. $0<a<1$。

第四章　数列、极限、数学归纳法

一、数列是函数

1. (1) 14　(2) 1393　2. (1) $-\frac{24}{7}<d<-3$, (2) S_6　3. (1) $d=5$, $q=6$　(2) $a=\sqrt[5]{6}$, $b=1$。

二、等差数列和等比数列

1. $\frac{4}{3}$　2. 1　3. 6 **或** 7　4. 240　5. 24　6. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$。

三、数列求和

1. $S_n=\frac{1}{9}-\frac{6n+1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

2. $a=1$ **时**, $S_n=n^2$, $a\neq1$ **时**, $S_n=\frac{1+a-(2n+1)a^n+(2n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}$

3. $a_n=\frac{1}{4}[9-(3)^{n-1}]$

4. $d=0$ **时,定值为** $\frac{1}{2}$, $d=2$ **时,定值为** $\frac{1}{8}$。

四、数列的极限

1. $\frac{1}{3}$　2. $1(0<q\leqslant1)$, $\frac{1}{q}(q>1)$　3. $\frac{2}{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}$。

五、数学归纳法

4. $a_n=4n-2$。

第五章　复数

一、复数运算的形式选择

2. $\frac{1}{r^2}$　3. $-\frac{3}{10}\pm\frac{3\sqrt{3}}{10}i$　4. **最大值为** $-\frac{1}{2}(k=1)$, **最小值为** $-1\left(k=\frac{1}{2}\right.$ **或** $\left.k=\frac{3}{2}\right)$。

二、变复数的代数表示和几何表示

1. $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$　2. (1) $3\left(z=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)$　(2) $\frac{2\pi}{3}$($z=-$

$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i)$

3. 2　4. 不存在　5. 圆$(x-3)^2+(y-3\sqrt{3})^2=9$(除去点$(0,3\sqrt{3})$和$(6,3\sqrt{3})$)。

第六章　排列、组合、二项式定理

一、两个基本原理是解排列、组合问题的依据

1. $3^5, 5^3$　2. 480　3. 5760　4. 55　6. 80。

二、解排列、组合问题的基本方法

1. 78　2. $P_n^1 P_{2n-1}^1 P_{3n-2}^{3n-2}$ 3. 426　4. 25920　5. 216　6. 25

三、二项展开等式是恒等式

1. (1) 3281　(2) -3280　2. 41。

立体几何

第七章　直线和平面

四、异面直线的判定与证明

1. (1) 是　(2) 是　2. 24。

五、立体几何中添加辅助线的问题

3. $\frac{60}{13}$　4. (1) $\frac{2\sqrt{61}}{5}$, (2) $\frac{12\sqrt{61}}{61}$。

六、空间元素的位置关系

1. 相交或平行或异面　2. $b /\!/ \alpha$ 或 $b \subset \alpha$　3. 无数条　4. B。

七、空间元素量及空间元素位置关系量的计算

1. $\frac{10+2\sqrt{13}}{3}$cm　2. 7 或 $\sqrt{19}$　3. 90°　4. 30°

5. (1) $\sqrt{2}a$, (2) $\frac{\sqrt{7}}{2}a$　6. (1) $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}$, (2) $3-\sqrt{3}$

7. (1) 120°, (2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$　8. $\frac{2\sqrt{15}}{15}a$　9. (2) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$, (3) $\frac{1}{2}a$。

八、平行与垂直

4. $90°$　　5. (2) $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$。

第八章　多面体和旋转体

一、几何体中的空间元素

1. (1) $45°$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$　3. (2) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}$　4. (2) $\frac{2}{3}a$

5. $\sqrt{7}$　　6. $\frac{2\sqrt{6}}{3}R$。

二、多面体和旋转体的体积。

1. $30\sqrt{2}$　2. $\frac{\sqrt{2}}{12}abc$　3. $\frac{1}{6}a^3$　4. 12cm　5. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$。

解析几何

第九章　直线

二、有向线段的定比分点

1. $\left(\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right)$，$\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$，　2.　2　3. $\left(-8,-\frac{5}{3}\right)$　4. $2\sqrt{10}$。

三、求直线方程

1. $2x+y-8=0$　2. $9x+20y-96=0$　3. $5x-4y+4=0$ 或 $7x-4y-4=0$。

四、两条直线的夹角

1. $(3\pm\sqrt{10})x-y+2(3\pm\sqrt{10})=0$ 或 $7x+y+14=0$ 或 $2x-y+4=0$

2. $5x+y-7=0$，$x-5y+9=0$　3. $9x-20y+96=0$ 或 $9x+20y-24=0$。

五、点的坐标

1. $2x+y-8=0$　2. $4\sqrt{10}$　3. $2x+3y+7=0$

4. $A(-2,1)$，$B(1,0)$，$C(2,5)$，垂心 $H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。

六、平面几何知识在解析几何中的应用

1. $3\sqrt{2}$　　2. $4x+17y+12=0$

3. l_1：$x-2y=0$，l_2：$x-2y+5=0$ 或 l_1：$2x+y=0$，l_2：$2x+y-5=0$。

七、直线方程与变量

1. $(\frac{3}{5},-\frac{1}{5})$，$(-\frac{3}{5},\frac{1}{5})$　　2. $-\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$　　3. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，p$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

4. 3　　5. $5+2\sqrt{6}$，$\sqrt{6}x+2y-2\sqrt{6}-6=0$　　6. p$(1,-1)$，$\frac{\pi}{4}$。

第十章　圆锥曲线

一、曲线和方程

1. $3x-4y=0$ 或 $3x+4y=0$　$(x\in[-4,-\frac{12}{5})\cup(\frac{12}{5},4)]$

2. $2ax+2by-a^2-b^2=0$　　4. $[-1,-3+2\sqrt{2}]$　　5. $a>\frac{3}{4}$。

二、圆的方程及应用

1. $(x-1)^2+(y+2^2)=2$ 或 $(x-9)^2+(y+18)^2=338$

2. $(x-4)^2+y^2=4$ 或 $x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$　　3. $2x-y+1=0$

4. $-3<b\leq 3\sqrt{2}$

三、求二次曲线的方程

1. $\frac{x^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y^2}{\frac{2}{9}}=1$　　2. $x^2-2y^2=1$　　3. $y^2=3(\sqrt{2}-1)x$ 或 $y^2=3(\sqrt{2}+1)x$　　4. $4x^2-y^2=1$。

四、二次曲线中的几何元素特性问题

1. (2) $(0,\frac{25}{2})$。

五、二次曲线中的求值问题

1. $2+\sqrt{3}$　2. $2\sqrt{10}$，$\frac{4\sqrt{10}}{41}$　3. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　4. $\sqrt{5}$　5. $\frac{2a}{b^2}$。

六、二次曲线中的变量取值范围问题

1. $(12,0)$　2. $-\frac{9+2\sqrt{7}}{16}<a<-\frac{9}{16}$ 或 $-\frac{9}{16}<a<\frac{2\sqrt{7}-9}{16}$

3. $a>\frac{3}{4}$　4. $(-\sqrt{3},-1)\cup\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup(1,\sqrt{3})$。

七、二次曲线中的最值问题

1. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$　2. 6　3. $4p^2$　4. 32

5. $\left(-\frac{14}{5},\frac{11}{5}\right)$，$\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{11}=1$　6. $ab(b\leqslant c)$，$\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{a}(b>c)$

7. $\frac{9x^2}{28}+\frac{9y^2}{7}=1$ 或 $9x^2+36y^2=1$。

第十一章　坐标变换

一、移轴与移图（曲线）

1. (1) $(4,2)$，(2) $(2,6)$ (3) $x'^2+y'^2=4$　2. 1 或 -3

3. $a=1$，$b=2$，$c=2$　4. $x+3y-11=0$

二、平移坐标轴化简方程及其应用

1. $\frac{x'^2}{16}-\frac{y'^2}{9}=1$，8，6，$(-3,5)$，$(-8,5)$，$(2,5)$　2. (2) 1

3. $a>\frac{3}{2}$　4. $16p$　5. 20。

三、对称轴平行与坐标轴的圆锥曲线的方程及其几何元素的坐标、方程

1. $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$　　2. $-\frac{(x-2)^2}{\frac{18}{16}}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

3. $-\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{9(y+1)^2}{32}=1$　　4. $(y-\frac{10}{3})^2=\frac{2}{9}x$，$(\frac{1}{18},\frac{10}{3})$，$x=-\frac{1}{18}$

5. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$ 或 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2$　　6. $(-6,2)$。

四、对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线问题

1. $\frac{(x-\frac{4}{3})^2}{\frac{4}{9}}-\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$　　2. $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

3. $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$，$\frac{(x-\frac{4}{3})^2}{\frac{4}{9}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{3}}=1$

4. $x=0(\frac{3+\sqrt{5}}{2})\leq y\leq\left(\frac{4+\sqrt{13}}{2}\right)$。

第十二章　参数方程、极坐标

一、参数、参数方程

1. $(0,-3)$，$(0,-\frac{15}{4})$，$(5,0)$，$(9,0)$　　2. $\sqrt{2a+1}(a\geq 0)$，$|a+1|(a<0)$

3. $\left(\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$。

二、用参数法求轨迹方程

1. $x^2+y^2=a^2$　　2. $x-y-2=0(y\neq 0)$

3. $y=\frac{\sqrt{3}}{4}a(\frac{a}{4}<x<\frac{3a}{4})$　　4. $\begin{cases}x=1+\cos 2\alpha\\ y=\sin 2\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）。

三、参数方程与普通方程的互化

1. (1) $x-2y+3=0\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$，(2) $x^2-y^2=4$，(3) $y=-x^2+3x-2\quad(1\leqslant x\leqslant 2)$　2. $x=0$　3. (1) $\begin{cases}x=t\\ y=1-t^2\end{cases}$ (t 为参数)，(2) $\begin{cases}x=t\\ y=-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ (t 为参数)

4. $\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^2}\\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^2}\end{cases}$ (t 为参数)或 $\begin{cases}x=0\\ y=3\end{cases}$。

四、直线和圆锥曲线的参数方程的应用

1. $(3,-\sqrt{3})$　2. $(\pm\frac{3}{5}\sqrt{5},\pm\frac{4}{5}\sqrt{5})$　3. $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$ 或 $\pi-\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$　4. $(y+2)^2=4(x+1)(y<-8$ 或 $y>0)$　5. a^3　7. $20\sqrt{2}$。

五、极坐标

1. 极点为圆心，2 为半径的圆和极点为端点的射线(除去极点)

2. $\rho=\sqrt{5}\cos(\theta-\arctan 2)$，$(\frac{\sqrt{5}}{2},\mathrm{arcan}2)$，$\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. $\rho^2=\dfrac{8\sin\alpha}{\cos(2\theta-\alpha)-\cos\alpha}$，$2\sqrt{\cot\dfrac{\alpha}{2}}$。

内 容 简 介

本书以高中数学知识为载体，与教学同步地、系统地向学生介绍相关的数学观点、数学思想方法，强化各种数学观点，并举例教会学生从各种不同的角度，应用各种不同的数学观点寻找各种解决问题的方法，进行各种数学实践，使数学观点在学生的思维活动中升华为数学意识。使学生在解题思维活动中能在数学意识的作用下产生一种自然的心理倾向，自觉地调整、改善思维，形成解决问题的方法，辨别解决问题过程中的操作方向，形成良好的思维素质，从根本上提高学生的数学能力。

本书区别于一般的一题多解一类的书。读者对象为在校高中学生，也适用于高中数学教师，师范院校学生。