

● 国家基础教育课程改革系列参考文献

中国教育学会

“借鉴多元智能理论 开发学生潜能实践研究”暨

DIC 国际合作项目

多元智能理论与新课程教学实践

高中教学部分

(第二辑)



多元智能与高中数学教学(二)

本册主编 谭利民



北京师联教育科学研究所 编
学苑音像出版社 出版

责任编辑 冯克诚 王 军

封面设计 师联平面工作室

多元智能理论与新课程教学实践
高中教学部分
(第二辑)



多元智能与高中数学教学(二)

本册主编 谭利民

学苑音像出版社出版发行



北京密云红光印刷厂印刷

2004年8月印刷

开本 850 × 1168 1/32 印张 :175.125 字数 :4550 千字

ISBN7 - 88050 - 144 - 4

本系列资料配光碟发行册均 16.80 元(不含碟)

本书如有印刷、装订错误,请与本社联系调换

《多元智能理论与新课程教学实践》

出版说明

多元智能(MI)理论由美国哈佛大学终身教授、“零点项目”负责人霍华德·加德纳(Howard Gardner)先生于1983年提出并创立,旨在研究人的智能功能的多元结构,创建一个开放的教育系统,促进人类心灵全面而充分地发展。经过20余年的理论和实践研究发展,在全世界范围的教育系统内产生了极大的震动和深远的影响,被欧美理论界称为二十世纪最伟大的教育理论发现。

DIC(Discover In China)是以中国联合国教科文组织协会全国联合会主席陶西平代表中方与美国亚利桑那大学DISCOVER项目组负责人、“零点项目”核心专家琼·梅克教授,于2000年8月在北京签署的国际合作项目,是国内唯一具有签约授权的多元智能(MI)研究的国际合作项目,它同时被批准为中国教育学会“十五”重点课题,即:“借鉴多元智能理论 开发学生潜能实践研究”。课题的研究目标,是适应中国基础教育改革的实际需要,借鉴以多元智能理论为代表的、开发学生多元潜能的现代教育理论,通过不同类型实验区和项目学校在教学改革各个领域的实践研究,逐步形成适合开发学生多元潜能的学校课程和以“问题解决”为导向的基本教学策略。其相应的多元多维教育评价体系,已被教育部基教司课程改革评价项目组接纳,直接参与了当前义务教育新一轮的课程改革研究,为国家的教育决策和

各地教学改革提供了参考和依据。

为深入推进和开展多元智能理论和实践的研究,团结全国从事该领域研究的各方教育力量,整合研究成果,配合国家基础教育课程改革,经中国联合国教科文组织协会全国联合会、北京市教育委员会、中国教育学会“借鉴多元智能理论 开发学生潜能实践研究”十五重点课题暨 DIC 国际合作项目组特别授权,由学苑音像出版社投巨资整理出版了大型系列音像资料片《多元智能理论与新课程教学实践》(VCD399 种)。本资料属于国家基础教育课程改革系列音像资料,内容包括多元智能理论创始人霍华德·加德纳在内的国内外众多研究多元智能理论的核心专家关于多元智能的基本理论原理、学术渊源、多元智能学校实验工作、多元智能理论研究的原则、方法等专题讲座 75 种,和国内外各大实验区的优秀课堂实录(VCD)及各种课件共 324 种,较全面完整地反映了在不同学校类型、不同学科和各种教学环节中多元智能理论与实践工作进展的基本情况,对于进一步推进学校实验工作和教育创新具有相当重要的理论意义和实际借鉴作用。

《多元智能理论与新课程教学实践》文库是与前述大型系列音像资料配套使用的大型参考文献,主要整理了有关多元智能理论的基本内容和各大实验区的原创性的研究成果、经验总结、案例解说、个案设计以及其中特别具有实用价值的内部文献,对于指导学校进一步的实验、培训实验教师进行新课程改革和教学创新都具有直接的参考作用和应用价值。

北京师联教育科学研究所

2004 年 8 月

组织授权

中国联合国教科文组织协会全国联合会

北京市教育委员会

中国教育学会“借鉴多元智能理论 开发学生潜能实践研究”

暨 DIC 国际合作和项目课题组

课题指导专家

陶西平 中国联合国教科文组织协会全国联合会主席 ,北京市社会科学界联合会主席 ,本课题负责人

柳 斌 教育部总督学、顾问、中国教育国际交流协会会长、原国家教委副主任

顾明远 中国教育学会会长 ,北京师范大学、教授 ,博士生导师

郭福昌 原国家教委副总督学、本课题组副组长

霍华德·加德纳(Howard Gardner):多元智能理论创始人 ,美国哈佛大学终身教授、“零点项目”负责人

琼·梅克(June Maker)美国亚利桑那大学教授、导师。“零点项目”核心专家

张稚美(Ji-Mei Chang, Ph.D.)美国加州圣荷西州立大学教授、导师

托马斯·里尔·阿姆斯特朗(Thomas Leigh Armstrong)美国著名心理学家、多元智能研究专家

约翰·保罗·汤普森(John Paul Thompson)英国诺丁汉大学教授、多元智能研究专家

梅汝莉 中国陶行知研究会副会长 北京教育学院教授 , 课题组长常务副组长

迪·迪瑾逊(Dee Dickinson) 全美在线多元智能课堂总裁(政府) 师资培训专家《多元智能教学的策略》作者

米歇尔 加拿大魁北克省教育专家、教育委员会总裁。

托马斯·R·霍尔(ThomasR·Hoem) 美国第一所多元智能实验学校——新城中学校长

张国祥 澳门大学教授、博士、澳港地区实验学校负责人

沈致隆 北京工商大学教授、教育部艺术教育委员会委员
《多元智能》中文版一书首译者

张开冰 泰兆教育基金总裁、(香港) 中国多元智能教育协会会长

陈杰琦 全美多元智能与教育研究专题组组长、教育博士 ,
北美华人教育研究年会主席

张梅玲 中国科学院心理研究所研究员、导师

霍力岩 北京师范大学教授、教育学博士

青岛泰治 联合国教科文组织驻北京办事处主任

杰瑞·伯瑞奇(Jary·Borich) 美国德州奥斯汀大学教授

程方平 中央教育科学研究所研究员、教育学博士

冯克诚 中国社会科学院高级编审、本课题年会秘书长、教育学博士

目 录

《平行直线》教学设计	(1)
《两条异面直线所成的角和距离》教学设计	(11)
《异面直线上两点间距离》教学设计	(23)
《直线和平面垂直的性质定理》教学设计	(26)
《三垂线定理》教学设计	(36)
《两个平面平行的性质》教学设计	(45)
《面面平行判定定理》教学设计	(57)
《二面角》教学设计	(65)
《棱 柱》教学设计	(75)
《球》教学设计	(82)
《锥体的体积》教学设计	(89)
《棱锥、圆锥的体积》教学设计	(95)
《直线方程的一般形式》教学设计	(106)
《两条直线所成的角》教学设计	(116)
《点到直线的距离》教学设计	(127)
《充要条件》教学设计	(137)
《圆的标准方程和切线问题》教学设计	(146)
《椭圆及其标准方程》教学设计	(153)
《双曲线的几何性质》教学设计	(166)
《坐标平移》教学设计	(178)



《平行直线》教学设计

教学目标

1. 了解公理 4 的内容及其初步应用；
2. 初步了解空间四边形概念的定义及其画法。

教学重点和难点

空间四边形是立体几何中很重要的一个概念,它与第二章中所讲的三棱锥、四面体这两个概念是相互联系、相互转化但是又有区别的三个不同的概念,所以使学生了解并掌握空间四边形的概念是本节课的重点,而掌握空间四边形的画法是它的难点。

教学设计过程

师:在平面几何我们讲过定理:平行于同一条直线的两直线平行。这定理在立体几何中还成立不成立?我们可先观察教室中与此有关的模型,再看一看用三根小棍所组成的模型。

生:这定理在立体几何中仍成立。

师:对,这定理在立体几何中是可以证明的,但为了减少学习立体几何的难度,所以我们不再作为定理要去证明,而把它作为公理,这就是我们今天所要讲的公理 4。(板书)

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行。

师:下面我们应用公理 4 来判断下列两直线的位置关系。

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中。(如图 1)



(1) AB 与 C_1D_1 是什么位置关系?为什么?

生:因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,所以它的每一个面都是正方形。所以 $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, 所以 $AB \parallel C_1D_1$, 平行于同一直线的两直线平行。

师:

(2) A_1D_1 与 BC 是什么样的位置关系?为什么?

生:因为 A_1D_1 与 BC 同平行于 B_1C_1 , 所以 $A_1D_1 \parallel BC$ 。

师:

(3) 如果 M 、 N 分别为 B_1B 、 C_1C 的中点,问 A_1D_1 与 MN 是什么样的位置关系?

生:由平面几何可知 $MN \parallel B_1C_1$, $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, 所以 $MN \parallel A_1D_1$ 。

师:

(4) AC 与 A_1C_1 是什么位置关系?为什么?

生:因为 $AA_1 \parallel BB_1$, $CC_1 \parallel BB_1$,

所以 $AA_1 \parallel CC_1$, 所以四边形 AA_1CC_1 是平行四边形,故 $AC \parallel A_1C_1$ 。

师:

(5) AD_1 与 BC_1 是什么位置关系?为什么?

生:与(4)同理可知四边形 ABC_1D_1 是平行四边形,所以 $AD_1 \parallel BC_1$ 。

师:在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,相对两个面的对角线如 $AC \parallel A_1C_1$, $BC_1 \parallel AD_1$, $A_1B \parallel D_1C$ 等,今后在证有关题时可做结论来用,不要求再证明。

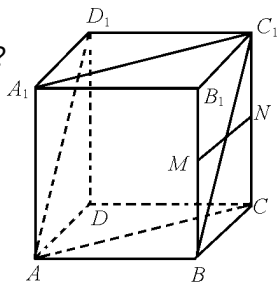


图 1



师:下面我们来看课本第12页例。(抄题)

例 已知:四边形 $ABCD$ 是空间四边形(四个顶点不共面的四边形), E, H 分别是边 AB, AD 中点, F, G 分别是 CB, CD 上的点, 且 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$ 。求证: 四边形 $EFGH$ 是梯形。

师:括号内“四个顶点不共面的四边形”就是空间四边形这个概念的定义。(同时拿出四根小棍组成首尾相连接的空间四边形的模型让学生观察)这就是空间四边形的模型。

师:对这空间四边形的模型,我们从各个不同的角度来观察,从什么位置的视角来画出空间四边形的直观图,才能使这直观图有较强的立体感。当我们从正面来看模型时,这时直观图是什么形状呢?上黑板上来画。

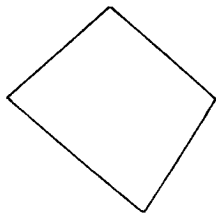
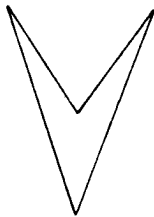


图 2

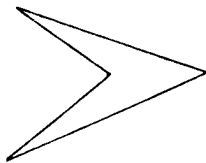
生:是这样的形状。(如图2)

师:当我们从俯视这个视角来看这个模型,所画出的直观图又是什么样的形状呢?

生:可能是这样两种形状。(如图3)



(1)



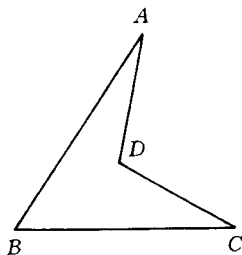
(2)

图 3

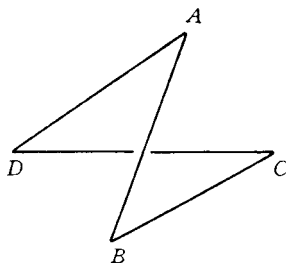
师:对。所以从正面这个视角和俯视这个视角来画空间四边形这个模型的直观图时,它们的立体感都不强。而当我们从正侧和后侧这两个视角来画这空间四边形模型的直观图时,立体感才比较强。(如



图 4)



(1)



(2)

图 4

图(2)是高考试卷中出现过的空间四边形的直观图,对空间四边形的直观图的这两种不同视角所得出的两个不同的直观图相比较而言,立体感较强。一般来说,以后画空间四边形时,我们经常采用图(1)所画的直观图。

对于最简单的一个空间四边形,由于视角的不同可以画出不同的直观图。关于这点我国宋代有名的诗人苏东坡在他一首哲理诗中就已经表述过。“横看成岭侧成峰,远近高低各不同。不识庐山真面目,只缘身在此山中。”所以今后在从立体模型画出它的直观图时,一定要注意选择好视角,选择好视角的标准就是所画出的直观图既富有立体感,又能表达出模型中各主要部分的位置关系和度量关系。

下面我们就以图 4 的(1)(2)为基础把第 12 页中的例题的条件在图中标出,并给予证明。(如图 6)

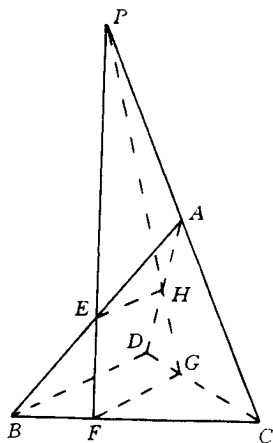
师:要证四边形 $EFGH$ 为梯形,就是要证什么呢?

生:要证 $EH \parallel FG$ 且 $EH \neq FG$ 。

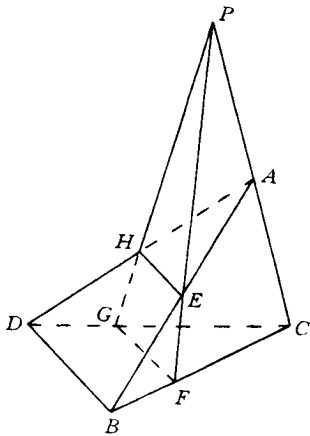
师:怎样证 $EH \parallel FG$ 。

生:连 BD 。

师:为什么想到连 BD ?



(1)



(2)

图 6

生:因为连 BD 后,空间四边形 $ABCD$ 就可以转化为有一公共边的两个三角形,即 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 。

师:很好。连 BD 看起来很简单,但它的思想很重要,就是把所要解的立体几何问题转化归结为平面几何问题。这种把立体几何问题化归为平面几何问题是我们在解立体几何时最主要,最常用的一种方法,所以从今天起我们就要逐步理解、掌握这种化归方法。

连完 BD 后,我们又如何证明呢?

生:在 $\triangle ABD$ 中,因为 EH 是三角形的中位线,所以 $EH \parallel \frac{1}{2}BD$,又因为在 $\triangle CBD$ 中 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$,由平面几何可知 $FG \parallel BD$, $FG = \frac{2}{3}BD$,所以 $EH \parallel FG$ (公理 4), $EH < FG$,由梯形的定义可知四边形 $EFGH$ 为梯形。

师:我们已经证明了这个例题。在证明这题的过程中我们要理解



并掌握以下三点：

第一,空间四边形的概念；

第二,如何选择视角,画出有立体感的空间四边形的直观图；

第三,在解立体几何问题时,如何自觉地、有意识地把它化归为平面几何问题。

现在,我提出一个思考题。

在梯形 $EFGH$ 中, $EH < FG$, 所以当我们延长 FE, GH 后, 它们一定相交, 假设这交点为 P 。问 P 点在哪一条直线上? 为什么? 这里也可以根据学生水平的情况, 直接问 P 点和直线 AC 是什么样的关系? 为什么? (这时教师把 FE, GH 延长后的交点 P 画出来, 让学生观察直观图)

生: P 点可能在直线 AC 上。

师: 对。 P 点是在直线 AC 上, 我们怎样证明呢? 我们首先要想一想 P 点是如何产生的?

生: P 点是 FE 和 GH 延长后的交点, 即 $FE \cap GH = P$ 。

师: 既然 $FE \cap GH = P$, 那么我们可知 P 点在哪一条直线上?

生: $P \in FE$ 上。

师: FE 又在哪一个平面内?

生: $FE \subset$ 平面 ABC 。

师: 所以 P 点一定在哪一个平面内?

生: $P \in$ 平面 ABC 。

师: P 点又应该在哪一个平面内?

生: 因为 $P \in GH, GH \subset$ 平面 ADC , 所以 $P \in$ 平面 ADC 。

师: 所以 P 点是平面 ABC 和平面 ADC 的公共点。两个平面的公共点应该在哪一条直线上?

生: 根据公理 2, 两个平面的公共点应该在这两个平面的交线上。平面 $ABC \cap$ 平面 $ACD = AC$, 所以 $P \in AC$ 。

师: 对, 这种证明的方法比较特殊, 实际是应用了元素与集合、集



合与集合之间关系来证明的。这种证明方法具有一般性,即要证一个点在一条直线上,只要证这个点是某两个平面的公共点,而这条直线是这两个平面的交线即可,因为由公理2保证两个平面的公共点一定在一条直线上。同样,当我们要证三点共线时,我们只要证明这三个点都是某两个平面的公共点,那么这三个点一定在一条直线上。

师:今天我们讲了公理4及其应用,讲了空间四边形这个概念及其画法。特别要理解在解有关立体几何问题时把它化归为平面几何问题的主要方法。

作业

课本第17页,第4,5,6,7题。

补充题

1. 求证:若空间四边形的对角线相等,则顺次连结四边中点所得的四边形的对角线互相垂直。[提示:证四边中点所连的四边形是菱形]

2. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 B_1C_1 和 D_1C_1 的中点,求证四边形 $EFDB$ 是梯形。[提示:连 D_1B_1]

3. 空间四边形 $ABCD$, 点 E, F, G, H 分别在边 AB, BC, CD, DA 上,且 E, F, G, H 共面, EH 和 FG 不平行,求证: EH 和 FG 的交点 K 在直线 BD 上。[提示:证明 K 点是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点]

4. $\triangle ABC$ 在平面 α 外, AB 的延长线交平面 α 于 P , CB 的延长线交平面 α 于 Q , AC 的延长线交平面 α 于 R 。求证: P, Q, R 三点在同一条直线上。[提示:证明这三点是两个平面的公共点]

课堂教学设计说明

首先,师、生都要理解课本的编者为什么要在此处安排这个例题呢?目的有四:一是建立一个新概念——空间四边形,复习一个旧概念——梯形;二是灵活应用在立体几何中刚学过的知识:平面的基



本性质,两条直线的位置关系,公理4以及平面几何中的有关知识;三是初步培养学生的空间想象能力和发展学生的逻辑思维能力;四是使学生初步理解并掌握解立体几何问题把它化归为平面几何问题的这一种数学中常用的化归方法。

第二,在前一个设计说明中,我们引入一个“视觉语言”这个概念,关于这个概念今后在设计说明还会经常使用。

为了使“视觉语言”有最好的视觉效果,必须选择从立体模型到画出这个模型的直观图的视角。我们有时从一些教学参考书中看到,由于不注意视角的选择,所画的直观图不但不能起到正面的“视觉语言”的效果,而是相反的起到负面的效果。就是学生不但不能看懂它,而且有时还产生错觉。所以,对每一个直观图教师都要精心设计,使之有最佳的视觉效果,关于这一问题,后面我们还要进一步阐述。

关于在讲课过程中引用的苏东坡的哲理诗是我在看了余秋雨所著《文化苦旅》第292页后在脑中立刻闪出可以在这节课中引用的,这绝不是为了卖弄,而是这首诗在这里是画龙点睛之笔,绝妙的说明了在观察对象时由于不同的视角而产生不同的印象。从讲课的效果来看,学生背过这首诗,能完全理解并引起共鸣。在数学课上恰当地引用一些哲学的、文学的语言会使课堂气氛更生动活泼,更有一种文化气息,这也是素质教育的一个方面吧!

下面在这里顺便说一下关于等角定理的设计说明。

关于等角定理可用类比思想引入,并用四根小棍组成两角做演示,学生很容易了解了定理。关于定理的证明,也是把它化归为平面几何问题,学生也很容易理解。所以关于等角定理不再另写教案。但是,在讲过等角定理和推论后,在课本第14页上的“注意:由上面定理的证明可知:平面里的定义、定理等,对于非平面图形,需要经过证明才能应用”可能被忽视。所以在这里要强调的是教师一定要重视这个“注意”,讲好这个“注意”,并且使学生真正理解这个“注意”。为此,可向学生提出:试举出平面几何中的定理,在立体几何中不能成



立的例子。这个问题很难,很多学生都回答不出来。可能只有一些好学生能想出在平面几何中的定理:垂直于同一直线的两直线平行,在立体几何中不成立。因为这时这两直线可能平行、可能相交、可能异面,用三根小棍一演示,学生就容易理解。如果学生再回答不出别的例子,教师可事先准备好如下例子。当然教师也可课前做好有关模型,使学生观察模型后自己得出相应的结论。

用一张平行四边形硬纸,沿对角线折起,这时对边仍然相等,但它是一个空间四边形而不是平行四边形。所以两组对边相等的四边形是平行四边形这个平面几何中的定理在立体几何中不能成立。

当我们把平行四边形 $ABCD$ 一张硬纸沿对角线 AC 折起后, $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$ 仍成立。但这时 $ABCD$ 已经是空间四边形。所以两组对角相等的四边形是平行四边形这个平面几何定理在立体几何中不能成立。

用一张菱形 $ABCD$ 的硬纸,沿对角线 BD 折起,这时四边形 $ABCD$ 的四边 $AB = BC = CD = DA$ 仍成立,但它已经是空间四边形,不是菱形。所以四边相等的四边形是菱形这个平面几何定理,在立体几何中不能成立。

最难使学生理解的是三个角是直角的四边形是矩形这个平面几何中的定理在立体几何中也不能成立。可做如下模型演示给学生看:一个矩形 $ABCD$ 的硬纸板,用一根小棍 PD 垂直于平面 $ABCD$ 于 D ,连 PA , PC ,从模型我们可以观察到 $\angle PAB = \angle ABC = \angle BCP = 90^\circ$,这时四边形 $PABC$ 虽然有三个角是直角,但它不是矩形而是一个空间四边形。这时如果让学生仔细观察可以发现 $\angle APC < 90^\circ$ 。也就是说我们可以发现“空间四边形四内角和小于 360° ”这是立体几何中的一个定理。关于这个定理的证明可参看 1989 年版《立体几何(甲种本)全一册教学参考书》(江苏教育学院编,人民教育出版社出版)第 198 页。

虽然举出了上述五个例子,但是学生还是不容易一下子就理解



的。因为在初中二年半的时间里学平面几何,长期在二维平面“爬行状态”的思维方式要转化到在三维空间的“站立状态”的思维方式要有一个“思想解放”的过程。这过程不是一下子就能完成的,而且一定会有反复。要理解这种反复是自然的。我们一定要给学生讲清,在平面几何中是“真理(定理)”的,为什么在立体几何中不再是“真理(定理)”呢?因为任何真理都应以时间、地点、条件为转移的。现在因为条件变了,我们在立体几何中研究的是空间图形,上述五个例子中虽然它们都满足了平面几何有关条件,但是我们都不能证明它们是平面图形,所以平面几何中的定理对它也就失去了有效性。

言归正题,经过以上阐述,现在对课本中第14页的“注意:由上面定理的证明可知:平面的定义、定理等,对于非平面图形,需要经过证明才能应用”的重要性,一定有了较深刻的理解,所以在讲过等角定理证明后,一定要讲好这“注意”,使学生起到“解放思想”这个作用。



《两条异面直线所成的角和距离》 教学设计

教学目标

1. 运用类比推理,理解引入有关概念的必要性、重要性;
2. 理解、掌握有关概念的定义,并会初步应用有关概念的定义来解题。

教学重点和难点

这节课的重点与难点都是异面直线所成的角和距离这两个概念的引入,和使学生真正地理解、掌握这两个概念。

教学设计过程

一、引入有关概念的必要性

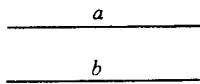
师:我们都知道空间的两直线的位置关系有三种:相交、平行、异面。这只是“定性”来研究对象,当我们要“定量”来研究对象时就必须要引入一些有关的新概念。

(这时教师拿出两根小棍做平行直线演示并说)

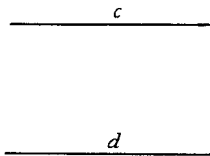
例如 $a \parallel b, c \parallel d$ (如图1),虽然它们都是平行直线,但是它们之间有什么区别呢?

生:虽然它们都是平行直线,但是它们的之间的距离不同。

师:对,为了区别都是平行直线的不同情况,也就是说为了“定



(1)



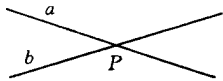
(2)

图 1

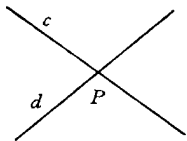
量”的研究平行直线,就必须引入有关“距离”这个概念。

(这时教师又拿出两根小棍做相交直线,并且使其角度各有不同,并说)

师:又例如 a 与 b 是相交直线, c 与 d 也是相交直线(如图 2)。虽然它们都是相交直线,但是它们之间有什么区别呢?



(1)



(2)

图 2

生:虽然它们都是相交直线,但是它们的夹角大小不同。

师:对,为了区别两相交直线的不同情况,也就是说为了“定量”的研究相交直线就必须引入有关“角”的概念。

(这时教师又拿出两根小棍做异面直线状,并变动其距离的大小演示给学生看,让其观察后,得出相应的结论)

师:直线 a 、 b 是异面直线,直线 c 、 d 也是异面直线,它们之间有什么不同?

生:虽然它们都是异面直线,但是它们之间的距离不同。

(这时教师又拿出两根小棍做异面直线状,并变动其所成角的大



小演示给学生看,让其观察后,得出相应的结论)

师:直线 a, b 是异面直线,直线 c, d 也是异面直线,它们之间有什么不同?

生:虽然它们都是异面直线,但是它们之间所成的角大小不同。

师:对,通过观察我们可以发现为了“定量”的研究异面直线,必须引入异面直线所成的角和异面直线的距离这两个概念。下面我们先来研究异面直线所成的角这个概念的定义。

二、异面直线所成的角的定义

(教师拿出两根小棍做异面直线状,演示给学生看,使其观察如何给异面直线所成的角下定义)

师:我们来看这模型,怎样给异面直线 a, b 所成的角下定义?

生:可以把直线 a 平移与 b 相交,这时由 a 平移而得的 a' 与 b 相交所成的角,就可以定义为异面直线 a 与 b 所成的角。

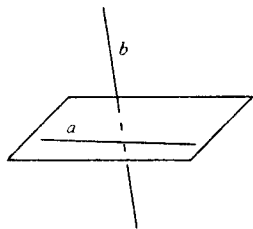
师:对,但是为了使这个定义更有一般性,我们给异面直线所成的角做如下的定义。

定义 直线 a, b 是异面直线,经过空间任意一点 O ,分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$,我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角。(如图3)

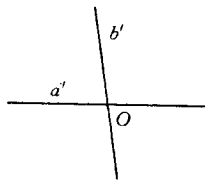
师:由定义来看, O 是空间中任意一点,当然我也可以在空间任意取一点 O_1 ,过 O_1 分别引 $a_1 \parallel a, b_1 \parallel b$,那么这时 a_1 和 b_1 所成的锐角与 a' 和 b' 所成的锐角是否相等呢?

生:相等,因为有等角定理的推论“如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等”。因为 $a' \parallel a, a_1 \parallel a$ 可推出 $a' \parallel a_1$,同理可推出 $b' \parallel b_1$,所以可用等角定理的推论。

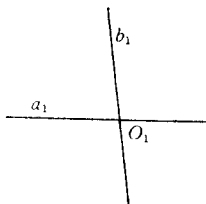
师:对,我们在上两节课讲的公理4和等角定理,在某种意义上说都是为给异面直线所成的角下定义做理论上的准备,正因为角的



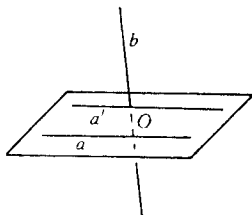
(1)



(2)



(3)



(4)

图 3

大小与 O 点的选择无关, 所以为了简便, 点 O 常取在两条异面直线中的一条上, 所以你们一开始给异面直线所成的角下的定义是对的。

师: 我们如何给两条异面直线互相垂直下定义呢?

生: 如果两条异面直线所成的角是直角, 我们就说这两条异面直线互相垂直。

师: 设两条异面直线所成的角为 θ , 问 θ 角的取值范围?

生: $\theta \in (0^\circ, 90^\circ]$, 半开、半闭区间。

师: θ 角能否等于 0° 。

生: 不能, 因为当 $\theta = 0^\circ$ 时, 异面直线就转化为平行直线。

师: 对 $\theta \neq 0^\circ$, 否则, 量变就转化为质变, 异面直线就转化为平行直线了。至于异面直线所成的角规定为锐角或直角, 则是为了所成的



角是唯一确定的。

三、练习

例 正方形 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 。求：

(1) A_1B 与 CC_1 所成的角是多少度？为什么？

(2) A_1B_1 与 CC_1 所成的角是多少度？为什么？

(3) A_1C_1 与 BC 所成的角是多少度？为什么？

(4) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱中，与棱 B_1B 垂直的棱有几条？如图 4)

师：请你们依次回答上述的四个问题。

生：(1) 因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为正方体， $CC_1 \parallel BB_1$ ，所以 A_1B 与 CC_1 所成的角为 $\angle B_1BA_1$ ，而 $\angle B_1BA_1 = 45^\circ$ ，所以 A_1B 与 CC_1 所成的角为 45° 。

师：请回答第(2)问。

生：因为 $CC_1 \parallel BB_1$ ，所以 A_1B_1 与 CC_1 所成的角为 $\angle BB_1A_1$ ，而 $\angle BB_1A_1 = 90^\circ$ ，所以 A_1B_1 与 CC_1 所成的角为 90° 。

师：请回答第(3)问。

生：因为 $BC \parallel B_1C_1$ ，所以 A_1C_1 与 BC 所成的角就是 $\angle B_1C_1A_1$ ，而 $\angle B_1C_1A_1 = 45^\circ$ ，所以 A_1C_1 与 BC 所成的角为 45° 。

师：请回答第(4)问。

生：与棱 B_1B 垂直的棱有 8 条。

师：有哪几条是与 B_1B 相交垂直？有哪几条是与 B_1B 异面垂直？

生：与 B_1B 相交垂直的棱有 4 条，为 AB, A_1B_1, BC, B_1C_1 ；与 B_1B 异面垂直的棱也有 4 条，为 AD, A_1D_1, CD, C_1D_1 。

师：对。这里我们需要指出，在立体几何中，“垂直”、“相交垂直”、

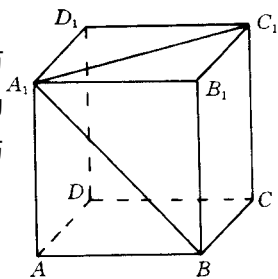


图 4



“异面垂直”这三个不同概念的联系和区别。以后我们讲两直线垂直,则是指这两直线可能是相交垂直,也可能是两直线异面垂直。这里我们要破除在平面几何中形成的思维定式,就是一说两直线垂直就是指两直线相交垂直。而要了解:“垂直”=“相交垂直”+“异面垂直”。

四、异面直线的距离的定义

师 和两条异面直线都垂直的直线有多少条?同时拿出两根小棍做为异面直线 a, b ,再拿出一根小棍 c 摆出与 a, b 都垂直状,而小棍 c 在保持与 a, b 都垂直的情况下可平行移动,用这样的模型让学生观察,再让学生回答)

生:有无数条。

师:对。现在再问与这两条异面直线都相交垂直的直线有几条?

生:只有一条。

师:对,由对模型的观察我们知道和两条异面直线都相交垂直的直线有而且只有一条,现在可以给出下面两个定义。

定义 和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线。

定义 两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度,叫做两条异面直线的距离。

要注意这两个定义之间的联系与区别,公垂线是一条直线,这直线在这两条异面直线间(两垂足间)的线段的长度是这两条异面直线的距离。

五、练习

例 在长方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, $AB = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $B_1 B = 2\text{cm}$ 。求:

(1) 异面直线 $A_1 A$ 与 BC 的距离;



(2) 异面直线 A_1A 与 C_1D_1 的距离;

(3) 异面直线 A_1B_1 与 BC 的距离。(如图 5)

师: 在第(1)问中 A_1A 与 BC 的距离等于多少? 为什么?

生: 因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是长方体, $AB \perp A_1A$ 于 A , $AB \perp BC$ 于 B 。所以 AB 的长度就是异面直线 A_1A 与 BC 的距离。因为 $AB = 4\text{cm}$, 所以 A_1A 与 BC 的距离为 4cm 。

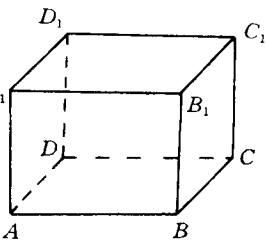


图 5

师: 在第(2)问中 A_1A 与 C_1D_1 的距离等于多少? 为什么?

生: 因为 $A_1D_1 \perp A_1A$ 于 A_1 , $A_1D_1 \perp C_1D_1$ 于 D_1 , A_1D_1 的长度就是异面直线 A_1A 与 C_1D_1 的距离。因为 $A_1D_1 = BC = 3\text{cm}$, 所以 A_1A 与 C_1D_1 的距离为 3cm 。

师: 在第(3)问中 A_1B_1 与 BC 的距离等于多少? 为什么。

生: 因为 $B_1B \perp A_1B_1$ 于 B_1 , $B_1B \perp BC$ 于 B 。所以 B_1B 的长度就是异面直线 A_1B_1 与 BC 的距离。因为 $B_1B = 2\text{cm}$, 所以 A_1B_1 与 BC 的距离等于 2cm 。

师: 现在你们自己看课本第 15 页到第 16 页的例, 看完后你们自己来讲。可根据课本来回答。

例 设图 6 中的正方体的棱长为 a 。

(1) 图中哪些棱所在的直线与直线 BA' 成异面直线?

(2) 求直线 BA' 和 CC' 所成的角的大小;

(3) 求异面直线 BC 和 AA' 的距离。

(可根据课堂情况灵活掌握让学生看 3 ~ 5 分钟后, 叫学生回答)

师: 现在你们先回答第(1)问。

生: 因为 $A' \notin \text{平面 } B'BCC'$, 而点 B 、直线 CC' 都在平面 $B'BCC'$ 内, 且 $B \notin CC'$ 。所以直线 BA' 与 CC' 是异面直线。



同理,直线 $C'D'$, $D'D$, DC , AD , $B'C'$ 都和直线 BA' 成异面直线。

师:刚才回答是正确的,但它们的理论根据是什么呢?

生:是根据课本第 10 页例,过平面外一点与平面内一点的直线,和平面内不经过该点的直线是异面直线。

师:对,过去我们已经讲过,课本第 10 页上的例,应该明确把它“升格”为定理。这定理有的书上叫它为异面直线存在定理,有的书上把它叫做异面直线判定定理。以后,我们叫这定理为异面直线判定定理。过去我们还小结过,证明两条直线是异面直线的方法有两个,是哪两个方法。

生:一是用反证法,二是用异面直线的判定定理。

师:现在回答第(2)问。

生:因为 $C'C \parallel BB'$, 所以 BA' 和 BB' 所成的锐角就是 BA' 和 CC' 所成的角。因为 $\angle A'BB' = 45^\circ$, 所以 BA' 和 CC' 所成的角是 45° 。

师:现在回答第(3)问。

生:因为 $AB \perp AA'$ 于 A , $AB \perp BC$ 于 B 。所以 AB 是 BC 和 AA' 的公垂线段, 因为 $AB = a$, 所以 BC 和 AA' 的距离是 a 。

师:今天我们讲了两个很重要的概念,两条异面直线所成的角和距离,我们一定要很好的理解、掌握这两个概念并能应用它们来解有关的题。

作业

课本第 17 页,第 9,10 两题。

补充题

1. 正方体 12 条棱中,组成异面直线的对数是多少? [24]
2. 空间四边形的对角线互相垂直,顺次连结这个四边形各边的中点,所得的四边形是矩形,试证明。[提示:证有一个角是直角的平

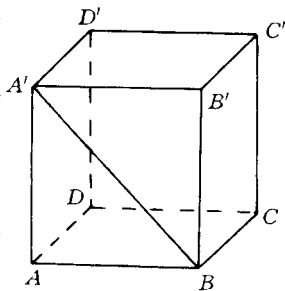


图 6



行四边形是矩形]

3. 空间四边形 $ABCD$, AB , BC , CD 的中点分别是 P , Q 和 R , 且 $PQ = 2$, $QR = \sqrt{5}$, $PR = 3$. 求异面直线 AC 和 BD 所成的角是多少度? $[90^\circ]$

4. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E , F , G , H 分别是 AB , AD , CD 和 CC_1 的中点, 求异面直线 EF 和 GH 所成的角是多少度? $[60^\circ]$

课堂教学设计说明

1. 为了使学生理解引入异面直线所成的角和距离这两个概念的必要, 一定要运用类比推理的思想, 从平面几何为了区别不同的平行直线要有距离的概念, 为了区别不同的相交直线要有角的概念。这样为了区别不同的异面直线要引入异面直线所成的角和距离就是很自然很合理的了。

一定要使学生观察模型, 使他们理解两异面直线所成角的概念的定义合理性。并且要求自己给出这个定义。

一定要使学生理解垂直、相交垂直、异面垂直这三个相互联系又相互区分的三个概念, 使学生理解与两异面直线都相交垂直的直线有且只有一条, 从而给异面直线的距离下定义做准备。

这节课引入两个新概念要用较多的时间, 所以应用这两个概念的练习要很简单、很基本, 使学生一看就会, 目的是加深对概念的理解。

2. 在立体几何第一章的教学中要有四个“高潮”(也可借用音乐中的一个术语, 就是要有四个华彩乐段)。第一个“高潮”是在讲了异面直线所成的角和距离以后; 第二个“高潮”是在讲了三垂线定理及其逆定理以后; 第三个“高潮”是在讲了二面角及其平面角以后; 第四个“高潮”是在讲了两平面垂直的定义、判定和性质以后。

所谓“高潮”是指在这一阶段教学中, 要选较多、较全的题型, 要



多讲几次练习课,学生要多做些题,使学生能通过这一阶段的教学在解题的能力上有较大的提高,也就是说在逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力等跃上一个新的台阶或者说达到一个新的层面。所以在讲了异面直线所成的角和距离这节课后,还应安排两次练习题。为了节省篇幅,我们把第一节练习课的提纲写在下面。

3. 第一节练习课提纲

例1 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中。

(1) 求 AD_1 与 B_1B 所成的角是多少度?

(45°)

(2) 问与 AD_1 异面,且所成的角是 45° 的正方体的棱有哪几条?

(4条即为 B_1B, C_1C, B_1C_1, BC)

(3) 问 AD_1 与 B_1C 所成的角是多少度?

(90°)

(4) 如果 M, N 分别是 B_1C_1, C_1C 的中点,问 MN 与 AD_1 所成的角是多少度?

(90°)

由第(4)问这个特殊的题,用一般化的方法得出定理:一直线垂直于平行直线中的一条,也垂直于另一条。

例2 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中。

(1) 求 AD_1 与 A_1C_1 所成的角的度数?

($\triangle D_1AC$ 为等边三角形, $\angle D_1AC = 60^\circ$)

(2) 如果 M, N 分别为 A_1B_1, B_1C_1 的中点,求 MN 与 BC_1 所成的角的度数?

(60°)

(3) 如果 P, Q 分别是 A_1A, A_1D_1 的中点,求 PQ 与 MN 所成的角的度数?

(60°)



例3 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB = 4$, $BC = 3$, $B_1B = 2$ 。求：

(1) AB 与 A_1C_1 所成的角的正切？

$$\left(\frac{3}{4}\right)$$

(2) A_1A 与 BC_1 所成的角的正弦？

$$\left(\frac{3}{13}\sqrt{13}\right)$$

(3) A_1C_1 与 AD_1 所成的角的余弦？

$$\left(\frac{9}{65}\sqrt{13}\right)$$

略解 (1) 在 $\text{Rt}\triangle A_1B_1C_1$ 中 $\tan\angle C_1A_1B_1 = \frac{3}{4}$ 。

(2) 在 $\text{Rt}\triangle B_1BC_1$ 中 $\sin\angle B_1BC_1 = \frac{3}{13}\sqrt{13}$ 。

(3) 在 $\triangle D_1AC$ 中 $AD = 5$, $AD_1 = \sqrt{13}$, $CD_1 = 2\sqrt{5}$ 。

$$\text{所以 } \cos\angle D_1AC = \frac{AD_1^2 + AC^2 - CD_1^2}{2AD_1 \cdot AC} = \frac{13 + 25 - 20}{2\sqrt{13} \cdot 5} = \frac{9}{65}$$

$\sqrt{13}$ 。

这叫余弦定理 我们补充的定理。详见代数课本第 239 页二 解斜三角形中的 3.5 余弦定理。

在讲完这三个例题后 , 可做如下总结。

小结

(1) 以概念为指导作出异面直线所成的角；

(2) 找出这个角所在的三角形 (直角三角形或斜三角形)；

(3) 解这个三角形 , 求出所要求的角。

在求异面直线所成的角的三个步骤中 , 关键是第 (1) 步 , 即把空间角 (异面直线所成的角) 转化为平面角 , 把解立体几何中的问题化归为解平面几何中的问题。



这节课可留如下作业。

(1)重做课堂练习中的例3。

(2)看代数课本第239~242页。余弦定理只要求记住定理和用法,定理证明过程可略。

(3)做代数课本中第243页练习1(1)(2)(3)(4)。

以上就是讲完异面直线所成的角和距离后第一节练习课的讲课提纲。在这节课中我们补充了余弦定理。在讲立体几何第一章中要不要提前补充余弦定理。在什么时候补充余弦定理,下面就谈一下自己在教学实践中的想法。

4. 对补充余弦定理想法

余弦定理本来是初中的教材,在立体几何第一章的教学中不存在补充的问题。现在的教材把余弦定理放在高一下半学期才讲,这就出现了在立体几何第一章的教学中要不要补充余弦定理的问题。

从理论上来说,求异面直线所成角的问题都要归结到解三角形的问题。而解直角三角形的问题一般来说都比较简单,达不到提高学生解题能力的目的。而要解斜三角形,一般来说就要用到余弦定理,所以余弦定理是我们在解立体几何有关问题时思维链条中不可缺少的一个环节,所以一定要补上这一环,否则学生的解题能力很难提高。

从实践上来说,1994年我从北京师大二附中退休后一直在教学第一线上工作。从1996年到1999年都在北京第九十二中教立体几何就补充了余弦定理,而且就是讲了异面直线所成的角以后补充。从教学实践的效果来看,学生完全能够理解,掌握余弦定理,并利用余弦定理来求异面直线所成的角。用一句通俗的话来说“过了这一村,就没有这个店”。错过了在这个时候补充余弦定理,并用余弦定理来求异面直线所成的角的机会,以后就很难有适当的机会再来解这些类型的题。



《异面直线上两点间距离》教学设计

立体几何的主要特点是借助于图形进行抽象思维,图形成了思维的主要载体。在平时教学中,自制一些简易的直观教具,可以培养学生的空间想象能力,提高作图能力。本文谈谈“异面直线上两点间距离”的教改的一点尝试。

1. 寻因

异直直线上两点间距离公式的推导,一般是引导学生分析条件,教师自己画出图形。这样往往成为教师的表演课,学生只能死记公式的结论。因此,这道例题的讲授一直是教学的难点之一。主要原因是: 1. 立几知识的综合性比较强 2. 作辅助线面将有关的量集中到三角形中很难想到 3. 怎样作辅助线面又无从着手。

2. 设计

计对这些难点,我自制了一个简易的直观教具,用折叠的手段将学生由平面图形带入空间结构,既分散难点,又培养学生的空间想象能力,使学生自己正确画出图形,自然地作出辅助线面。制作方案如下:

(1) 用三根粗铁丝 AA' , AG , $A'E$ 和两根伞骨 EG , EFG 焊成如图 1 的直角梯形,使直角 $\triangle EGF$ 可绕 EG 转动,以完成折叠动作。

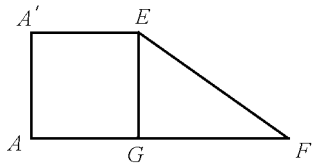


图 1



(2) 另加一根活动铁丝。

3. 施教

题目 已知两条异面直线 a, b 所成的角为 θ , 它们的公垂线段 AA' 的长度为 d , 在直线 a, b 上分别取点 E, F , 设 $A'E = m, AF = n$, 求 EF 。

分析 师(教师,下同):出示教具(如图1),这是什么图形?

生(学生,下同):直角梯形。

师:能否对图中的各量说得更为清楚些?

生: $A'E$ 是上底, AF 是下底, AA' 是直角腰, $EG(AA')$ 是高。

师:若已知 $AA' = d, A'E = m, GF = x$, 怎样求另一腰 EF 的长?

生:在 $Rt\triangle EGF$ 中利用勾股定理即可求出。

师:如此看来,求线段长的一般思路是通过构造三角形,最好是直角三角形,然后利用有关定理而求之。

师:现在 $\triangle EGF$ 绕 EG 转过一个角度,得到一个空间图形(如图2),此时 AA' 与平面 AGF 是什么关系?

生:垂直!

师:为什么?

生: $\left. \begin{array}{l} EG \perp AG \\ EG \perp FG \end{array} \right\} \Rightarrow EG \perp \text{面 } AGF \left\{ \begin{array}{l} EG \perp \text{面 } AGF \\ AA' \parallel EG \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \perp \text{面 } AGF$

AGF 。

师:非常好!如果在点 A, F 之间放一根铁丝,则 $A'E$ 与 AF 的位置关系是什么?

生:异面!

师: AA' 与它们是什么关系?

生:垂直相交,且线段 AA' 是公垂线段。

师:很好!如果已知异面直线 $A'E$ 与 AF 所成的角为 $\theta, AF = n$, 怎样求线段 GF 和 EF 的长?

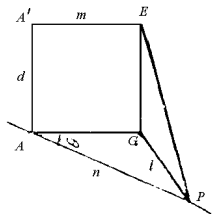


图 2



生 因为 $AG \parallel A'E$,那么 $\angle GAF$ 为两条异面直线所成的角 θ ;在 $\triangle GAF$ 中 ,由余弦定理可以求得 $x^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta$;在 $\text{Rt}\triangle EGF$ 中 ,由勾股定理得 $EF^2 = d^2 + x^2 = d^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta$.

师 太棒了 !

撤离教具 ,由学生分析题目条件 ,正确画出图形 ,完成求解过程。

生 (学生完成).....

师 再现教具 ,确定符号的选取。

总之 ,在立几教学中 ,若能自制一些简易的直观教具 ,变抽象为具体 ,就能大大激发学生的学习兴趣 ,有利于培养学生的空间想象能力 ,有效地突破教学难点。



《直线和平面垂直的性质定理》 教学设计

教学目的

1. 进一步理解直线与平面垂直定义的两用法；
2. 理解并掌握直线与平面垂直的判定定理 2；
3. 理解并掌握直线与平面垂直的性质定理。

教学重点和难点

这节课的重点是使学生进一步理解、掌握直线和平面垂直的定义和判定定理。这节课的难点是直线和平面垂直的性质定理的证明。

教学设计过程

一、复习 , 讲练上节课所留的作业

师 : 先请一位同学讲他所做的第 32 页习题四中的第 1 题。(教师写出已知、求证并画出直观图)

已知 : $\triangle ABC$, $l \perp AB$, $l \perp AC$ 。(如图 1)

求证 : $l \perp BC$ 。

生 : 因为 $l \perp AB$, $l \perp AC$,

所以 $l \perp$ 平面 ABC 。(线面垂直的判定定理)

故 $l \perp BC$ 。(线面垂直的定义)

师 : 对 , 在上一节我们讲直线和平面垂直的定义时 , 就强调过在



立体几何中这是一个很重要的定义,我们一定要很好地理解、应用。线面垂直的定义既是线面垂直最基本的判定方法,在线面垂直判定定理的证明思路就是回到定义去。关于这一应用在上节课中已经做了详细的说明。线面垂直的定义又是线面垂直的最基本的性质,当我们知道直线和平面垂直后,这平面的垂线就和平面内任何一直线都垂直,所以应用线面垂直的定义是证明两直线垂直常用的方法之一。

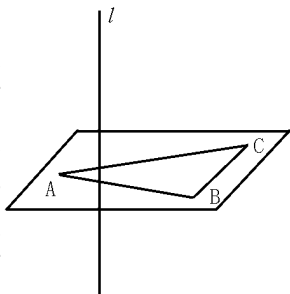


图 1

师 现在来看第32页习题四的第2题。请一个同学回答。(写出已知、求证和根据已知条件而画的直观图,我们叫它为起始图)

已知:直线 $a \parallel$ 平面 α , 直线 $b \perp$ 平面 α 。(如图 1)

求证: $b \perp a$ 。

生 过 a 作平面 β , 设 $\beta \cap \alpha = c$ 。因为 $a \parallel \alpha$, 所以 $a \parallel c$ 。(线面平行的性质定理)

又因为 $b \perp \alpha$, 因此 $b \perp c$, 故 $b \perp a$ 。

师 我们怎样想到要过 a 作平面 β 的呢?

生 这是线面平行的性质定理的要求。因为在线面平行的性质定理,如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行。在图中没有这条交线,所以我们就作平面 $\beta \cap \alpha = c$, 作出这条交线,以满足定理的要求 a 平行交线 c 。

师 这是定理要求我们作辅助面。在立体几何解题过程中,我们经常要作辅助线、辅助面,我们根据什么原则来作辅助线、辅助面呢? 有两条原则:一是用概念来指导作图,这在求异面直线所成的角时,我们曾反复强调;二是用定理来指导作图。这就是今天我们在证明这个题时要明确的。这是在立体几何中作辅助线、辅助面的两条基本原



则,遵循这两条原则就说明解题的思路是正确的,就使解题的正确性有了基本的保证;反之,如果违背了这两条原则,那就说明了第一步就走错了方向。这一题肯定不可能做对。所以作辅助线、辅助面这两条原则我们一定要理解、记住,并且在解题过程中应用。当然,以后随着课程内容不断的展开,我们还会反复强调这两条原则。

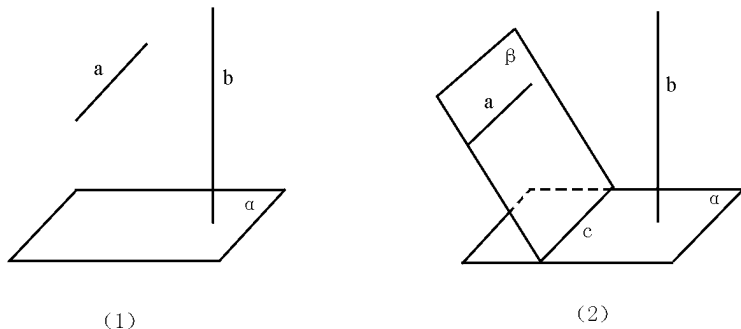


图 2

以前我们还讲过要使直观图有好的视觉效果,还要注意视角的选择,这一题的起始图(根据已知条件所画出的直观图)看起来它的视觉效果并不好,但当我们证完这道题,看到它的终止图(解完题后的直观图)视觉效果就比较好,所以视角选择好与不好要以终止图的视觉效果好与不好为标准。这样在解完一道题后,有时要重新设计起始图的画法,以保证终止图有最好的视觉效果。

二、直线与平面垂直的判定定理 2。

师 这是课本第 25 页的例 1,我们把它正式升格为判定定理 2。我们来看下面的模型就很容易了解定理的内容。(这时拿出两根小棍平行地放在课桌面上,并使其中一根与桌面垂直,让学生观察另一根与桌面的关系) $a \parallel b$,如果 $a \perp$ 平面 α ,那么 b 与平面 α 是什么关系?

生 b 也垂直平面 α 。

师 这就是线面垂直的判定定理 2。



判定定理 2 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于同一个平面。

已知: $a \parallel b, a \perp \alpha$ (如图 3)

求证: $b \perp \alpha$ 。

师:判定定理 1、判定定理 2 这里的 1、2 不是人为的排列,而是有它内在的逻辑关系,也就是说我们可以应用判定定理 1 来证明判定定理 2,那么我们如何用判定定理 1 来证明判定定理 2 呢?

生:为了用判定定理 1,我们可以首先在平面 α 内作两条相交直线 m, n 。

因为 $a \perp \alpha$,

所以 $a \perp m, a \perp n$ 。(线面垂直的定义)

又因为 $a \parallel b$,

所以 $b \perp m, b \perp n$ 。(一条直线垂直于平行线中的一条也就垂直于另一条)

故 $b \perp \alpha$ 。(线面垂直的判定定理 1)

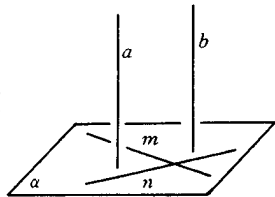


图 3

三、直线和平面垂直的性质定理

师:现在我们来研究直线和平面垂直的性质定理,先来看模型。
(这时教师用两根小棍都垂直于桌面,让学生观察、回答)

生:这两直线平行。

师:这就是直线和平面垂直的性质定理。

直线和平面垂直的性质定理 如果两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行。

已知: $a \perp \text{平面 } \alpha, b \perp \text{平面 } \alpha$,

求证: $a \parallel b$ 。

师:我们讲过了线面垂直的判定定理 1、2。也曾经在讲线面垂直



的定义时,把课本中的两句话(第24页)升格为两个定理,即:

定理 过一点有且只有一条直线和一个平面垂直。

定理 过一点有且只有一个平面和一条直线垂直。

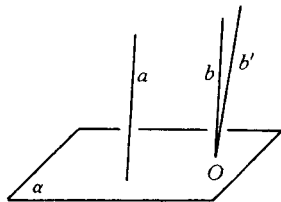


图 4

现在可以根据上述定理来证明线面垂直的性质定理:

生:可用反证法,假设 $b \neq a$, 设 $b \cap \alpha = O$, 过 O 点作 $b' \parallel a$, 因为 $a \perp \alpha$, 所以 $b' \perp \alpha$ (判定定理2), 所以过点 O 有两条直线 b, b' 都与平面 α 垂直, 与垂线的唯一性矛盾, 所以 $b \neq a$ 不能成立, 所以 $b \parallel a$ 。

师:用反证法证明可以,也可以用同一法,即在证明的开始不做假设 $b \neq a$, 证完 $b' \perp \alpha$ 后, 根据垂线的唯一性 b' 应与 b 重合, 所以 $b \parallel a$ 。当然, 对反证法和同一法, 我们主要要掌握反证法, 对同一法只要求有所了解。

四、两个定义

1. 点到平面的距离 从平面外一点引一个平面的垂线, 这个点和垂足间的距离叫做这个点到这个平面的距离。

(教师可先用一根小棍垂直于桌面演示, 然后给点到平面的距离下定义, 下完定义后可指出, 点到平面的距离可转化为两点间的距离, 即这个点和垂足之间的距离)

2. 平行的直线和平面的距离 一条直线和一个平面平行, 这条直线上任意一点到平面的距离, 叫做这条直线和平面的距离。

(教师可先用一根小棍和平面平行, 演示让学生观察, 如何给平行的直线和平面的距离下定义, 定义给出后, 教师可指出平行的直线和平面的距离可能转化为点到平面的距离, 当然也就可转化为两点



间的距离)

师:在这定义中,是这条直线上任意一点到平面的距离叫做这条直线和平面的距离,那会不会因在直线上所取的点不同,而使距离不同呢?

生:不会,它们之间的距离都相等。

师:对,但为了在理论上说明这个定义的合理性,我们来看下面这个例题。

例 已知: $l \parallel$ 平面 α , $A \in l$, $B \in l$, $AA' \perp \alpha$ 于 A' , $BB' \perp \alpha$ 于 B' 。(如图 5)

求证: $AA' = BB'$ 。

生:因为 $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$, 所以 $AA' \parallel BB'$ (性质定理), 所以过 AA' , BB' 作平面 β , 设 $\beta \cap \alpha = A'B'$, 因为 $l \parallel \alpha$, 所以 $l \parallel A'B'$, 故 $AA' = BB'$ 。(平行线间的距离处处相等)

师:通过这个例题的证明,我们就了解了定义的合理性。可以在直线上任意取点。这对于以后我们求平行的直线和平面的距离,提供了很好的思路。

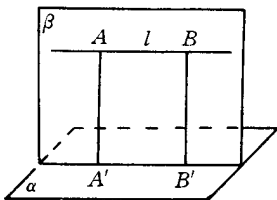


图 5

今天我们讲了直线和平面垂直的第 2 个判定定理,讲了直线和平面垂直的性质定理,在这个基础上还讲了点到平面的距离、平行的直线和平面的距离两个定义。

作业

课本第 32 页习题四第 3、5、8 题。

补充题

1. 已知: 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta =$ 直线 l , $A \in \alpha$, $AB \perp \beta$ 于 B , $BC \perp \alpha$ 于 C 。

求证: $AC \perp l$ 。

[提示: 证明直线 $l \perp$ 平面 ABC]



2. 已知: AB 是圆 O 的直径, C 是圆 O 上不同于 A 和 B 的点, $PA \perp \odot O$ 所在的平面。

求证: $BC \perp PC$ 。

[提示: 证明 $BC \perp$ 平面 PAC]

3. 已知: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $PB \perp$ 平面 ABC , $BD \perp PC$ 于 D 。

求证 (1) $AC \perp BD$ (2) $BD \perp PA$ 。

[提示 (1) 证明 $AB \perp$ 平面 PBC (2) 证明 $BD \perp$ 平面 PAC]

课堂教学设计说明

1. 立体几何第一章直线和平面主要研究的是空间两条直线、空间直线和平面、空间两个平面的位置关系,其中以直线与直线的垂直、直线与平面的垂直、平面与平面垂直为重点。而直线与平面的垂直是其中的最重要的一个环节,它是三垂线定理及其逆定理、两平面垂直的判定和性质的基础。所以对直线与平面垂直的定义与判定定理一定要让学生深刻理解、牢固记忆、灵活应用。

2. 直线与平面垂直的定义,既是直线与平面垂直的最基本的判定方法,别的判定定理都是根据定义和有关定理经过演绎推理而得,在这个意义上,我们说直线与平面垂直的定义是最基本的判定方法;直线与平面垂直的定义又是直线与平面垂直最基本的性质。别的性质定理是根据定义和有关定理经过演绎推理而得,在这个意义上,我们说直线与平面垂直的定义是直线与平面最基本的性质。

为了使学理解直线与平面垂直的定义这两种用法,以平面几何中的平行四边形的定义为例。平行四边形的定义既是平行四边形的最基本的判定方法,也是平行四边形的最基本的性质。别的判定定理和性质定理都是根据定义和有关定理经过演绎推理而得。

在这里一定要让学生深刻的理解并掌握应用直线与平面垂直的定义是证明两直线垂直最常用的方法。



3. 在课本第 24 页给直线与平面垂直下定义后的这两句话：“过一点有且只有一条直线和一个平面垂直；过一点有且只有一个平面和一条直线垂直。”是两个定理。关于垂线的唯一性和垂面的唯一性的这两个定理是可以证明的。关于这两个定理的证明可以参看 1989 年出版的《立体几何全一册(甲种本)教学参考书》第 47 页第 11 题(1)(2)。要让学生了解这两个定理，并会应用这两个定理，在证明直线和平面垂直的性质定理时，用到垂线的唯一性，以后在证课本第 38 页习题五第 4 题时还要用到垂线的唯一性和垂面的唯一性。

为什么课本在这里只是提出两个唯一性没有明确是两个定理也没有证明呢？这是课本的编者为了降低学习立体几何的难度而这样处理的。但我以为还是明确垂线的唯一性、垂面的唯一性是两个定理，但可以不予证明而直接应用为好。

4. 前面我们提出了“视觉语言”这个概念，既然作为一种“语言”，它应该而且必须与思维过程相一致。所以这里我们又提出“起始图”(根据题中的条件而出现的“视觉语言”)和“终止图”(解完题后，或思维过程完结时出现的“视觉语言”)这两个概念。

前面我们也提到过为了使“视觉语言”达到最佳的视觉效果，必须注意视角的选择，我们认为视角的选择要以终止图有最佳的视觉效果为标准，这样有时会出现起始图视觉效果较好而终止图视觉效果并不好；或者起始图视觉并不太好而终止图视觉效果较好这样不一致情况，所以这样就要求教立体几何的教师对于直观图要精心地、反复地设计，务必使终止图有最佳的视觉效果，这样才能使这个“视觉语言”起到它应有正面效应，否则，这个“视觉语言”不但不能起到它应有正面效应，相反，却起到负面效应，增加了学生在学习立体几何中的困难。这是每一个教立体几何的教师务必要理解并切实掌握的基本功。

起始图和终止图不仅仅是形式上的不同，而且它们之间还应该有着“时间差”。因为这两个图是与思维过程相一致，思维既然以一个过



程而出现,所以与这抽象思维过程相一致,或者说要以具体形象来表现这个抽象思维过程的“视觉语言”当然也要以一个过程而展现。这两个过程当然是一致的,但是“视觉语言”展现的过程应该比思维过程慢“半拍”,而不是同步,也就是说动脑先于动手。我们说以概念指导作图,以定理指导作图,也就是说在我们动手作图前,脑中得先有有关概念和定理。

在一篇文章中,我看到中国画画家在总结他们的创作国画经验时,用“蓄图在胸、意在笔先”这八个字来概括。当我看过这篇文章后,这八个字就牢记在心,感到对于立体几何的教学很有启发、很有教益。我们在脑中所蓄的图应该是由起始图到终止图一个不断的展现过程,而以终止图为主。这里的所谓意,就是思想,就是有关的概念和定理。

最后我还想以江泽民同志在1998年一次讲话中所引用的李白的《春夜宴桃李园序》“夫天地者,万物之逆旅也,光阴者,百代之过客也”。后说李白已经意识到了四维空间。明确指出“视觉语言”是要在二维平面来展现“四维空间”。不论用什么手段进行教学,一定要把这“时间差”表现出来。即展现出一个随时间的变化而变化的有“动感”的空间图形。

当然有的立体几何题的起始图和终止图是同一个图形,不要作任何的辅助线和辅助面,如这节课所讲的课本第32页习题四中的第1题。但伴随着思维过程的进展,作为对起始图的认识到对作为终止的认识(由直线与直线的垂直,到直线与平面的垂直,再到直线与直线的垂直)也同样有一个过程。

科学和艺术在一定条件下是可以统一的。记得在《新华月报》上曾看到有名的华人物理学家请中国有名的美术家用他们的绘画来展现高深抽象的物理内容。因此在立体几何教学中我们有可能也有必要把科学和艺术统一起来,即所画的每一个空间图形既要展示它所包含的数学科学的内涵,又要展示它的形式的艺术的美。把数学中



(立体图形)的美渗透在每一节课中,这样可以培养学生对美的感受,可以更好吸引学生的注意力,从而达到更好的教学效果。

每一个听过我的课的人,都表扬我所画的图很美。在上课时有时让学生做练习,我踱步向教室后面走去,回过头来也很自我欣赏所画图的美。因为从某种意义上来说,每一个图都是一幅美术作品——空间图形的素描。当然我们在立体几何画“素描”的方法用的是平行投影中的斜二测画法,而在美术课中画素描的方法用的是中心投影中的透视法。



《三垂线定理》教学设计

教材分析

1. 本节教材的地位和作用

“三垂线定理”是《立体几何》的 § 1.11,它是在研究了空间直线和平面垂直关系的基础上研究空间两条直线垂直关系的一个重要定理。它既是线面垂直关系的一个应用,又为以后学习面面垂直,研究空间距离、空间角、多面体与旋转体的性质奠定了基础,同时这节课也是培养高一学生空间想象能力和逻辑思维能力的重要内容,对培养学生的探索精神和创新能力都有重要意义。

[点评:在分析教材的地位和作用时,教者不仅从数学知识系统本身进行了发掘,而且从学生能力培养方面进行了探索,还特别从培养学生探索精神和创新能力上进行了发掘。从而使本课例具有了鲜明的时代特色,这对当今数学课堂教学具有普遍性指导意义。]

2. 教学内容

本节课的主要内容是三垂线定理及其逆定理的引出、证明和初步应用。对定理的引出改变了教材中直接给出定理的做法,通过讨论空间直线与平面内直线垂直的问题让学生逐步发现定理。这样,学生会感到自然,好接受。对教材中的例题则有所增加,处理方式也有适当改变。

[点评:在教学内容的处理上,教者一改直接给出定理的传统做法,精心设计适宜的教学情境,让学生在学数学中先发现定理,这是教学大纲大力提倡的。这种做法不仅能使学生“感到自然、好接受”,更重要的是它体现了数学教育既重视证明、又重视猜想的正确



教学观,再一次显示了本课例的时代特色。]

3. 教学目的

根据教学大纲的要求,本节教材的特点和高一学生对空间图形的认知特点,我把本节课的教学目的确定为:

(1)理解三垂线定理及其逆定理的证明,准确把握“空间三线”垂直关系的实质;

(2)领会应用三垂线定理及其逆定理解题的一般步骤,初步学会应用定理解决相关问题;

(3)通过教学进一步培养学生的空间想象能力和逻辑思维能力;

(4)进行辩证唯物主义思想教育、数学应用意识教育和数学审美教育,提高学生学习数学的积极性。

4. 教学重点、难点、关键

对高一学生来说,空间观念正在形成,因此本节课的重点是要学生通过模型演示、推理论证,领会三垂线定理及其逆定理的实质,正确认识“空间三线”的垂直关系;同时掌握用“线面垂直法”研究空间直线垂直关系的思想方法。本节教学的难点是准确把握“空间三线”垂直关系的实质,掌握应用三垂线定理及其逆定理证题的一般步骤。领会定理实质的关键是要认识到平面内一条直线与斜线及其在平面内的射影确定的平面垂直;应用定理的关键是要找到平面的垂线,射影就可由垂足与斜足确定,问题便会迎刃而解。

[点评:在确定教学重点时,教者不仅看到了定理本身的重要作用,而且看到了“线面垂直法”这一思想方法的重要性,从而使本课例上升到了思想方法这一教学层次。这在目前也是具有普遍性指导意义的。]

教法分析

建立模型,启发引导,猜想论证,学习应用,发展能力。



由于本节课安排在立体几何学习的初始阶段,是学生空间观念形成的关键时期,因此要重视让学生动手做模型。教师演示指导,让学生直观地感受到空间线面、线线关系的变化,再在教师的引导下思考线面、线线垂直关系存在的因果关系,逐步推理、猜想命题、论证命题,从而发现定理,揭示定理实质。在定理证明中进一步发展定理,引出逆定理,再进行比较,从而更进一步地把握定理的关键。对定理的应用,只要求学生在理解定理的基础上理清应用定理证题的一般步骤,学会证明一些简单问题。

学法指导

教学矛盾的主要方面是学生的学。学是中心,会学是目的。因此在教学中要不断指导学生学会学习。根据立体几何教学的特点,本节课主要是教给学生“动手做、动脑想、大胆猜、严格证、多训练、勤钻研”的研讨式学习方法,这样做增加了学生的参与机会,增强了参与意识,教给了学生获取知识的途径,思考问题的方法,使学生真正成了教学的主体。也只有这样做,才能使学生“学”有新“思”;“思”有所“得”;“练”有新“获”,学生也才会逐步感受到数学的美,会产生一种成功感,从而提高学生学习数学的兴趣;也只有这样做,才能适应素质教育下培养“创新型”人才的需要。

[点评:教法和学法是一个统一体的两个不同侧面。教法设计和学法指导应根据具体的教学内容、所确定的教学目标以及学生的实际来进行,既要使学生实现教学目标,又必须有利于学生逐渐地学会学习。

本课例中教者主要选取了实验法和引导发现法两种教学方法,让学生在学习三垂线定理及其逆定理的同时,经历一个“实验、探索、猜想、论证、应用”的科学的教學全过程。经常性地坚持这样教学,数学教育的任务就可以全面地完成了。]



教学程序

1.(教学环节)复习提问:

(1)直线和平面垂直的定义

(2)直线和平面垂直的判定

(3)什么叫平面的斜线、斜线在平面上的射影?

(学生回答,教师作图1)

(设计意图:为本节课的学习做好知识铺垫和图形准备)

2.(教学环节)演示启发

由以上复习可知,平面的垂线垂直于平面内的每一条直线,平面的斜线显然不能垂直于平面内的每一条直线,那么平面的斜线在平面内有垂线吗?有几条?请同学们来做做看(教师引导学生用三角板和铅笔在桌面上搭建模型,如图2和图3)

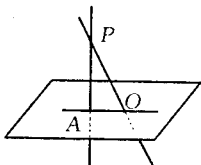


图1

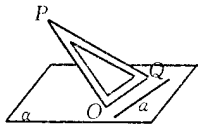


图2

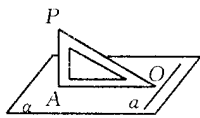


图3

图2和图3均能表示平面的斜线在平面内有垂线,而且有无数条。但进一步观察图3,并思考:斜线 PO 在平面内的垂线 a 与 PO 在平面内的射影 AO 有什么关系?

结论: $a \perp AO$ 。

那么,我们在平面内找斜线的垂线时能否只找到与其射影垂直的直线,换句话说,平面内的直线 a 与斜线 PO 的射影 AO 垂直时, a 与 PO 垂直吗?

结论:根据观察, $a \perp PO$ 。为什么?



(设计意图 这样采用观察、猜想、发现的方法引出定理比课本上直接给出定理显得自然,学生好接受)

[点评 这一教学环节在于通过实验、观察探索,猜想出所需要的命题。教者给出了两个演示图形 根据图2 学生容易发现斜线在平面 α 内有垂线 而且有无数条(α 内凡与 OQ 平行的直线都与 PO 垂直)图3 是一个更关键性的模型,保持 $AO \perp \alpha$ 不变,使三角板绕 AO 旋转,让学生观察思考 PO 和直线 a 的位置关系的变化,发现只有在 AO 恰为 PO 的射影时,才有 $PO \perp a$ (为方便起见,可以先让 a 过点 O)。

这一环节是本课例的一个高潮,应注意实验的充分性——即既有 $PO \perp a$ 的情况,更有 PO 不与 a 垂直的大量的情景。]

3.(教学环节)引导证明

观察得来的结论,必须经过严格证明才能确认,我们把刚才的问题写出来,大家一起来证明一下。

已知: PA 、 PO 分别是平面 α 的垂线、斜线, AO 是 PO 在平面 α 上的射影, $a \subset \alpha$, $a \perp AO$ 。(图4)

求证: $a \perp PO$ 。

分析:要证两条直线垂直,常用的方法有看两线形成的角,或证明一条直线垂直于另一条直线所在的平面。从本题的条件看, PO 在平面 PAO 内,只要能证明 $a \perp$ 平面 PAO 即可。条件能找到吗?

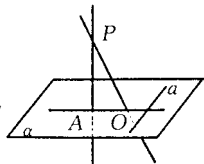


图4

证明(师生共同完成)

$$\left. \begin{array}{l} PA \perp \alpha \\ a \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} PA \perp a \\ AO \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \perp \text{平面 } PAO \\ PO \subset \text{平面 } PAO \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp PO.$$

(设计意图:让学生养成严格论证问题的习惯和正确的书写格式,培养学生思维的严谨性。)

4.揭示定理

这样我们就找到了判定平面内一条直线与平面的斜线垂直的方法,只要它与斜线的射影垂直即可。以后我们在平面内要作斜线的垂



线,只需作它的射影的垂线即可。现在我们把上面这道题用文字表述出来:

三垂线定理 在平面内的一条直线,如果和这个平面的一斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直。

这就是著名的三垂线定理,它实质是平面内的直线与平面的斜线垂直的判定定理:它集中反映了平面内一条直线、平面的斜线、斜线在平面内的射影这三者的关系。这个定理之所以著名,不仅在于它给了我们一个证明线线垂直的重要方法,为研究计算空间角,空间距离,研究多面体和旋转体的性质奠定了基础,而且这个定理的证明方法——“线面垂直法”,也是一种非常重要的方法。刚才我们由 a 与 PA 、 AO 垂直得到了与平面 PAO 垂直,现在我们再看图 4,由于 PA 与 a 总垂直,那么当 a 与 PO 垂直时还会有 $a \perp$ 平面 PAO 吗?进一步可得到什么结论? ($a \perp AO$)。这样我们又得到了一个重要定理:

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线的射影垂直。

请同学们写出证明过程,并与原定理的证明进行对比。

(设计意图:从分析原定理证法的角度引出逆定理,有利于学生加深对两个定理一致性的认识,能充分认识到两个定理的实质是线面垂直。)

5.(教学环节)原、逆定理的比较与说明

(1)比较:

相同点 ① 结构相同,都是由线线垂直推证线线垂直的;

② 证明方法相同,都采用了线面垂直法。

不同点 ① 用途不同,原定理是用来证空间两线垂直的,而逆定理是用来证同一平面上两直线垂直的。② 条件与结论不同,原定理是:“与射影垂直 $\Rightarrow$ 与斜线垂直”,逆定理是:“与斜线垂直 $\Rightarrow$ 与射影垂直”。

(2)说明 这两个定理反映的实质是一样的,它们都反映了平面



内一条直线、平面的斜线、斜线在平面内的射影这三者之间的一种关系。由这两个定理联合分析可知: $a \perp PO$ 与 $a \perp AO$ 是等价的。若 a 与 AO 不垂直,必有 a 与 PO 不垂直。为什么会这样呢?关键是在 PO 、 AO 确定的平面内恒有直线 $PA \perp \alpha$,即 $PA \perp a$ 存在。因此使用定理时要抓住这个关键。同时我们还要认识到空间任一平面都有斜线,因此要克服平面水平放置的思维束缚,定理中叙述的平面其位置是任意的,同时直线 a 也可在平面内任意平移。

(设计意图:通过比较加深对定理实质的认识,为定理的应用做好准备。)

[点评:对命题的论证重在教会学生通过分析贯通证题思路。教师在此注重指导学生有关分析证题思路的思想方法,进行学习方法指导,形成其科学思想方法,这是十分重要的。]

通过对定理的揭示和定理证明方法的发散性思维,又得到了定理的逆定理。这样不仅有利于从整体上把握这两个定理及其证法实质,而且有利于学生思维发散性的培养,还体现了学习的完整性要求——“回顾”学习环节的作用,形成学生良好的学习习惯。]

6.(教学环节)定理的应用

例1 如图5,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中。

求证(1) $BD_1 \perp AC$;

(2) $BD_1 \perp B_1C$;

(3) $BD_1 \perp$ 平面 AB_1C 。

分析(1)欲证 $BD_1 \perp AC$, AC 在下底面上, BD_1 是下底面 ABC 的斜线,由三垂线定理,只需找出 BD_1 在下底面的射影 BD ,而 $AC \perp BD$,故可证(2)与(1)同理,只是平面不再是水平位置,要让学生适应这个变化,必要时可借助正方体框架教具演示说明。(3)在(1)、(2)证毕后是水到渠成的。

证明:



$$(1) \left. \begin{array}{l} \text{连结 } BD. \\ D_1 D \perp \text{平面 } ABC \\ BD \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BD_1 \perp$$

AC ;

$$(2) \left. \begin{array}{l} \text{连结 } BC_1, \\ D_1 C_1 \perp \text{平面 } BCC_1 \\ BC_1 \perp B_1 C \end{array} \right\} \Rightarrow BD_1$$

$\perp B_1 C$;

$$(3) \left. \begin{array}{l} BD_1 \perp AC \\ BD_1 \perp B_1 C \end{array} \right\} \Rightarrow BD_1 \perp \text{平面 } AB_1 C.$$

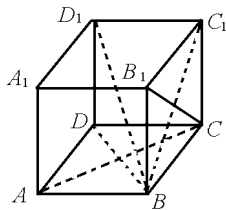


图 5

小结:使用三垂线定理证题的一般步骤是:

- 一定 —— 定平面及平面内的一条直线;
- 二找 —— 找平面的垂线、斜线及其射影;
- 三证 —— 证平面内一直线与斜线垂直。

由于逆定理与原定理实质相同,结构相似,因而使用时也可以按以上步骤进行,这对我们在复杂图形中使用定理很有好处。

(设计意图:通过一道简单例题的推证,总结出使用定理的方法,使学生形成解题技能打好基础。)

例 2 见课本 P.29 例 1

帮助学生理清题意作出图形,让学生自己完成。

(设计意图:在上例的基础上,让学生自己分析,护照“一定、二找、三证”的步骤使用逆定理完成证题过程,训练证题技能。)

[点评:定理的应用是定理教学的当然部分,要根据教学目标和学生实际精心选取例习题。教者所选的例 1 是比较适宜的,其中(1)是定理在常见背景下的应用,也比较简单(2)是在背景变化后的应用,可进一步强化定理应用的步骤(3)的设计看似简单,实则使学生可以体验定理当然能用于证明线面垂直。而且就大背景来说,是学生常见常用的正方体,不论从心理方面,还是从突出重点方面,都是值得肯定的。]



7.(教学环节)小结

本节课重点学习了三垂线定理及其逆定理。它们是空间两线垂直的判定与性质定理,要牢固掌握,并注意原、逆定理的区别。学会按“一定、二找、三证”的步骤应用两个定理证明线线垂直。

(设计意图:使学生对本节课所学知识的结构有一个清晰的认识,能抓住重点进行课后复习。)

8.(教学环节)作业布置

练习:P.30 题 1。

作业:P.31 题 11,12。

思考题:在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各顶点连线中,与 BD_1 垂直的有哪些?

(设计意图:使学生能巩固本节课所学知识,培养学生自觉学习的习惯,同时对学有余力的学生留出自由发展的空间。)

[点评] 教者在设计作业时,除考虑到巩固所学知识的要求外,还设计了一道开放性题供学生探索,以发展学生思维,培养其创新精神,从而使培养学生的探索精神和创新能力的教学思想贯穿于本课教学设计的始终。这种把小小三尺讲台和新世纪人才应有素质培养大业自觉联系起来的做法,应该成为我国现阶段整个教育的一大主题。

综合来看,本课例的设计合理、层次分明,教法选择适宜,学法指导实在。在教学思想上既重视扎实知识点的获得,能力的培养,科学思维方法的形成,还特别突出学生动手能力和创新精神的培养以及学习方法的指导,具有鲜明的时代特色。希望教者更好地处理好课堂上教与学这一对矛盾,在学生有效参与教学活动上下大功夫,为全面完成数学教育的任务做出更大的成绩。



《两个平面平行的性质》教学设计

教学目标

1. 使学生掌握两个平面平行的性质定理及应用；
2. 引导学生自己探索与研究两个平面平行的性质定理，培养和发展学生发现问题解决问题的能力。

教学重点和难点

重点：两个平面平行的性质定理；

难点：两个平面平行的性质定理的证明及应用。

教学过程

一、复习提问

教师简述上节课研究的主要内容（即两个平面的位置关系，平面与平面平行的定义及两个平面平行的判定定理），并让学生回答：

（1）两个平面平行的意义是什么？

（2）平面与平面的判定定理是怎样的？并用命题的形式写出来？

（教师板书平面与平面平行的定义及用命题形式书写平面与平面平行的判定定理）

（目的（1）通过学生回答，来检查学生能否正确叙述学过的知识，正确理解平面与平面平行的判定定理。（2）板书定义及定理内容，是为学生猜测并发现平面与平面平行的性质定理作准备）



二、引出命题

(教师在对上述问题讲评之后,点出本节课主题并板书,平面与平面平行的性质)

师:从课题中,可以看出,我们这节课研究的主要对象是什么?

生:两个平面平行能推导出哪些正确的结论。

师:下面我们猜测一下,已知两平面平行,能得出些什么结论。

(学生议论)

师:猜测是发现数学问题常用的方法。

“没有大胆的猜想,就作不出伟大的发现。”

但猜想不是盲目的,有一些常用的方法,比如可以对已有的命题增加条件,或是交换已有命题的条件和结论。也可通过类比法即通过两个对象类似之处的比较而由已经获得的知识去引出新的猜想等来得到新的命题。

(不仅要引导学生猜想,同时又给学生具体的猜想方法)

师:前面,复习了平面与平面平行的判定定理,判定定理的结论是两平面平行,这对我们猜想有何启发?

生:由平面与平面平行的定义,我猜想:两个平面平行,其中一个平面内的直线必平行于另一个面。

师:很好,把它写成命题形式。

(教师板书并作图,同时指出,先作猜想、再一起证明)

猜想一:

已知:平面 $\alpha \parallel \beta$, 直线 $a \subset \alpha$,

求证: $a \parallel \beta$ 。

生:由判定定理“垂直于同一条直线的两个平面平行”。我猜想:一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面,它也垂直于另一个平面。

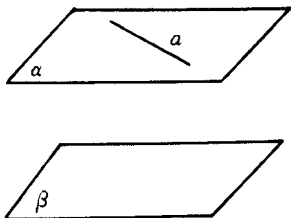


图 1



[教师板书]

猜想二:

已知: 平面 $\alpha \parallel \beta$, 直线 $l \perp \alpha$.

求证: $l \perp \beta$.

师: 这一猜想的已知条件不仅是“ $\alpha \parallel \beta$ ”, 还加上了“直线 $l \perp \alpha$ ”。下面请同学们看课本上关于判定定理“垂直于同一直线的两平面平行”的证明。在证明过程中, “平面 $\gamma \cap \alpha = a$, 平面 $\gamma \cap \beta = a'$ ”。 a 与 a' 是什么关系?

生: $a \parallel a'$ 。

师: 若改为 γ 不是过 AA' 的平面, 而是任意一个与 α, β 都相交的平面 γ 。同学们考虑一下是否可以得到一个猜想呢?

(学生讨论)

生: 如果一个平面与两个平行平面中的一个相交, 也必与另一个平面相交。”

[教师板书]

猜想三:

已知: 平面 $\alpha \parallel \beta$, 平面 $\gamma \cap \alpha = a$, 求证: γ 与 β 一定相交。

师: 怎么作这样的猜想呢?

生: 我想起平面几何中的一个结论: “一条直线与两条平行线中的一条相交, 也必与另一条相交。”

师: 很好, 这里实质用的是类比法来猜想。就是把原来的直线类似看作平面, 两平行直线类似看作两个平行平面, 从而得出这一猜想。大家再考虑, 猜想三中, 一个平面与两个平行平面相交, 得到的交线有什么位置关系?

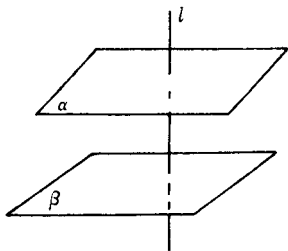


图 2

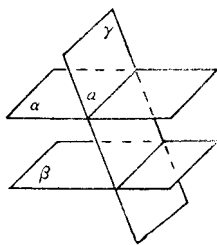


图 3

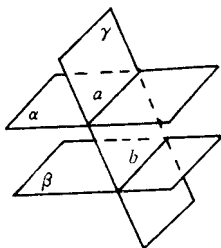


图 4



生:平行

师:请同学们表达出这个命题。

生:如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线平行。

[教师板书]

猜想四:

已知:平面 $\alpha \parallel \beta$, 平面 $\gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b$ 。

求证: $a \parallel b$ 。

[通过复习定理的证明方法,既发现了猜想三、猜想四,同时又复习了定理的证明方法,也为猜想四的证明,作了铺垫]

师:在得到猜想三时,我们用到了类比法,实际上,在立体几何的研究中,将所要解决的问题与平面几何中的有关问题作类比,常常能给我们以启示,发现立体几何中的新问题。比如:在平面几何中,我们有这样一条定理:“夹在两条平行线间的平行线段相等”,请同学们用类比的方法,看能否得出一个立体几何中的猜想?

生:把两条平行线看作两个平行平面,可得猜想:夹在两个平行平面间的平行线段相等。

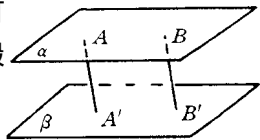


图 5

[教师板书]

猜想五:

已知:平面 $\alpha \parallel \beta$, $AA' \parallel BB'$, 且 $A, B \in \alpha, B', A' \in \beta$ 。

求证: $AA' = BB'$

[该命题,在教材中是一道练习题,但也是平面与平面平行的性质定理,为了完整体现平面与平面平行的性质定理,故尔把它放在课堂上进行分析]

三、证明猜想

师:通过分析,我们得到了五个猜想,猜想的结论往往并不完全



可靠。得到猜想,并不意味着我们已经得到了两个平面平行的性质定理,下面主要来论证我们得到的猜想是否正确。

[师生相互交流,共同完成猜想的论证]

师 猜想一是由平面与平面平行的定义得到的,因此在证明过程中要注意应用定义。

[猜想一证明]

证明 因为 $\alpha \parallel \beta$,

所以 α 与 β 无公共点。

又 因为 $a \subset \alpha$,

所以 a 与 β 无公共点。

故 $a \parallel \beta$ 。

师 利用平面与平面平行的定义及线面平行的定义,论证了猜想一的正确性,这便是平面与平面平行的性质定理一。简言之:“面面平行,则线面平行。”

[教师擦掉“猜想一”,板书“性质定理一”]

[论证完猜想一之后,教师与学生共同研究了“猜想二”,发现,若论证了“猜想四”的正确性质,“猜想二”就容易证了。因而首先讨论“猜想三,猜想四”]

师:“猜想三”是类比平面几何中的结论得到的,还记得初中时,是怎么证明的?

[学生回答:反证法]

师:那么,大家可否类比初中的证明方法来证明“猜想三”呢?

生:用反证法。假设 γ 与 β 不相交,则 $\gamma \parallel \beta$ 。这样过直线 a 有两个平面 α 和 γ 与 β 平行。与“过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行”矛盾。故 γ 与 β 相交。

师 很好。由此可知:不只是发现问题时可用类比法,就是证明方法也可用类比方法。不过猜想三,虽已证明为正确的命题,但教材中并不把它作为平面与平面平行的性质定理,大家在今后应用中要注意。



[猜想四的证明]

师:猜想四要证明的是直线 $a \parallel b$, 显然 a, b 共面于平面 γ , 只需推导出 a 与 b 无公共点即可。

生(证法一)

因为 $a \parallel \beta$,

所以 a 与 β 无公共点。

又因为 $a \subset \alpha, b \subset \beta$ 。

所以 a 与 b 无公共点。

又因为 $a \subset \gamma, b \subset \gamma$,

所以 $a \parallel b$ 。

师:我们来探讨其他的证明方法。要证线线平行, 可以转化为线面平行。

生(证法二)

因为 $a \subset \alpha$, 又因为 $\alpha \parallel \beta$,

所以 $a \parallel \beta$ 。

又因为 $a \subset \gamma$ 且 $\gamma \cap \beta = b$,

所以 $a \parallel b$ 。

师:用两种不同证法得出了“猜想四”是正确的。这是平面和平面平行的性质定理二。

[教师擦掉“猜想四”板书“性质定理二”]

师:平面与平面平行的性质定理二给出了在两个平行平面内找一对平行线的方法。即:“作一平面, 交两面, 得交线, 则线线平行。”同时也给我们证明两条直线平行的又一方法。简言之:“面面平行, 则线线平行”。

[猜想二的证明]

师:猜想二要证明的是直线 $l \perp \beta$ 根据线面垂直的判定定理, 就要证明 l 和平面 β 内的两条相交直线垂直。那么如何在平面 β 内作两条相交直线呢?



[引导学生回忆：“垂直于同一直线的两个平面平行”的定理的证明]

生(证法一)

设 $l \cap \alpha = A, l \cap \beta = B$ 。

过 AB 作平面 $\gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = a'$ 。

因为 $\alpha \parallel \beta$, 所以 $a \parallel a'$ 。

再过 AB 作平面 $\delta \cap \alpha = b, \delta \cap \beta = b'$ 。

同理 $b \parallel b'$ 。

又因为 $l \perp \alpha'$, 所以 $l \perp a, l \perp b$,

所以 $l \perp a', l \perp b'$, 又 $a' \cap b' = \beta$,

故 $l \perp \beta$ 。

师:要证明 $l \perp \beta$, 根据线面垂直的定义, 就是要证明 l 和平面 β 内任何一条直线垂直。

生(证法二)

在 β 内任取一条直线 b , 经过 b 作一平面 γ , 使 $\gamma \cap \alpha = a$,

因为 $\alpha \parallel \beta$, 所以 $a \parallel b$,

因此 $l \perp \alpha, a \subset \alpha$,

故 $l \perp a$, 所以 $l \perp b$ 。

又因为 b 为 β 内任意一条直线,

所以 $l \perp \beta$ 。

[教师擦掉“猜想二”板书“性质定理三”]

[猜想五的证明]

证明 因为 $AA' \parallel BB'$,

所以过 AA', BB' 有一个平面 γ , 且 $\gamma \cap \alpha = AB, \gamma \cap \beta = A'B'$ 。

因为 $\alpha \parallel \beta$,

所以 $AB \parallel A'B'$,

因此 $AA'B'B$ 为平行四边形。

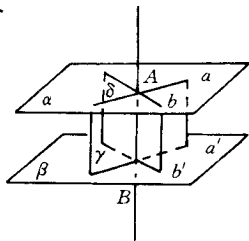


图 6

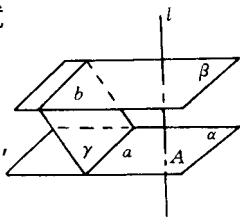


图 7



故 $AA' = BB'$ 。

[教师擦掉“猜想五”，板书“性质定理四”]

师：性质定理四，是类比两条平行线的性质得到的。平行线的性质有许多，大家还能类比得出哪些有关平行平面的猜想呢？你能证明吗？请大家课下思考。

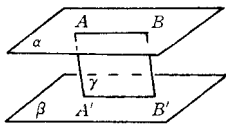


图 8

[因类比法是重要的方法，但平行性质定理已得出，故留作课下思考]

四、定理应用

师：以上我们通过探索——猜想——论证，得出了平面与平面平行的四个性质定理，下面来作简单的应用。

例 已知平面 $\alpha \parallel \beta$ ， AB, CD 为夹在 α, β 间的异面线段， E, F 分别为 AB, CD 的中点。

求证： $EF \parallel \alpha, EF \parallel \beta$ 。

师：要证 $EF \parallel \beta$ ，根据直线与平面平行的判定定理，就是要在 β 内找一条直线与 EF 平行。

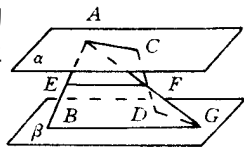


图 9

证法一：

连接 AF 并延长交 β 于 G 。

因为 $AG \cap CD = F$ ，

所以 AG, CD 确定平面 γ ，且 $\gamma \cap \alpha = AC, \gamma \cap \beta = DG$ 。

因为 $\alpha \parallel \beta$ ，所以 $AC \parallel DG$ ，

所以 $\angle ACF = \angle GDF$ ，

又 $\angle AFC = \angle DFG, CF = DF$ ，

所以 $\triangle ACF \cong \triangle DFG$ 。

所以 $AF = FG$ ，

又 $AE = BE$ ，



所以 $EF \parallel BG, BG \subset \beta$ 。

故 $EF \parallel \beta$ 。

同理 $EF \parallel \alpha$ 。

师:要证明 $EF \parallel \beta$, 只须过 EF 作一平面, 使该平面与 β 平行, 则根据平面与平面平行性质定理即可证。

证法二: 因为 AB 与 CD 为异面直线, 所以 $A \notin CD$ 。

在 A, CD 确定的平面内过 A 作 $AG \parallel CD$, 交 β 于 G , 取 AG 中点 H , 连结 AC, HF 。

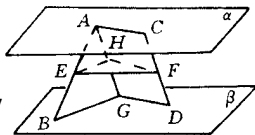


图 10

因为 $\alpha \parallel \beta$,

所以 $AC \parallel DG \parallel EF$ 。

因为 $DG \subset \beta$, 所以 $HF \parallel \beta$ 。

又因为 E 为 AB 的中点,

因此 $EH \parallel BG$, 所以 $EH \parallel \beta$ 。

又 $EH \cap FH = H$,

因此 平面 $EFH \parallel \beta, EF \subset$ 平面 EFH ,

所以 $EF \parallel \beta$ 。

同理 $EF \parallel \alpha$ 。

师:从以上两种证明方法可以看出, 虽然是解决立体几何问题, 但都是通过转化为平面几何的问题来解决的。这是解决立体几何问题的一种技能, 只是依据的不同, 转化的方式也不同。

五、平行平面间的距离

师:和两个平行平面同时垂直的直线, 叫做这两个平行平面的公垂线, 它夹在这两个平行平面间的部分, 叫做这两个平行平面的公垂线段, 两个平行平面有几条公垂线? 这些公垂线的位置关系是什么?

生:两个平行平面有无数条公垂线, 它们都是平行直线。

师:夹在两平行平面之间的公垂线段有什么数量关系? 根据是



什么?

生:相等。根据“夹在两个平行平面间的平行线段相等。”

师:可见夹在两个平行平面的公垂线段长度是唯一的。而且是夹在两个平行平面间的所有线段中最短的。因此我们把这公垂线段的长度叫做两个平行平面的距离。显然两个平行平面的距离等于其中一个平面上的任一点到另一个平面的垂线段的长度。

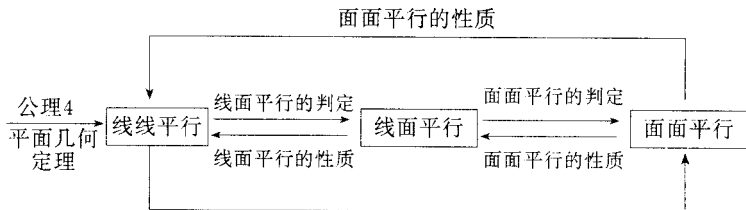
六、小结

1. 由学生用文字语言和符号语言来叙述两个平面平行的性质定理。

教师总结本节课是由发现与论证两个过程组成的。简单的说就是:由具体问题具体素材用类比等方法猜想命题,并由转化等方法论证猜想的正确性,得到结论。

2. 在应用定理解决立体几何问题时,要注意转化为平面图形的问题来处理。大家在今后学习中一定要注意掌握这一基本技能。

3. 线线平行、线面平行与面面平行的判定定理和性质定理构成一套完整的定理体系,在学习中应发现其内在的科学规律:低一级位置关系判定着高一位置关系;高一位置关系一定能推导低一级位置关系。下面以三种位置关系为纲应用转化的思想整理如下:



七、布置作业

课本:P.38,习题五 5,6,7,8。



课堂教学设计说明

1. 本节课的中心是两个平行平面的性质定理. 定理较多, 若采取平铺直叙, 直接地给出命题, 那样就绕开了发现、探索问题的过程, 虽然比较省事, 但对发展学生的思维能力是不利的。

在设计本教案时, 充分考虑到教学研究活动是由发现与论证这样两个过程组成的。因而把“如何引出命题”和“如何猜想”作为本节课的重要活动内容, 在教师的启发下, 让学生利用具体问题, 运用具体素材, 通过类比等具体方法, 发现命题, 完成猜想。然后在教师的引导下, 让学生一一完成对猜想的证明, 得到两个平面平行的性质定理。也就在这一“探索”、“发现”、“论证”的过程中, 培养了学生发现问题、解决问题的能力。

在实施过程中, 让学生处在主体地位, 教师始终处于引导者的位置。特别是在用类比法发现猜想时, 学生根据两条平行线的性质类比得出许多猜想。比如: 根据“平行于同一条直线的两条直线平行”得到“平行于同一个平面的两个平面平行。”根据“两条直线平行, 同位角相等”等, 得到“与两个平行平面都相交的直线与两个平面所成的角相等”等等, 当然在这些猜想中, 有的是正确的, 有的是错误的, 这里不一一叙述。这就要求教师在教学过程中, 注意变化, 作适当处理。学生在整节课中, 思维活跃, 沉浸在“探索、发现”的思维乐趣中, 也正是在这种乐趣中, 提高了学生的思维能力。

2. 在对定理的证明过程中, 课上不仅要求证出来, 而且还考虑多种证法。对于定理的证明, 是解决问题的一些常用方法, 也可以说是常规方法, 是要学生认真掌握的。因此教师要把定理的证明方法, 作为教学的重点内容进行必要的讲解, 培养学生解决问题的能力。

3. 转化是重要的数学思想及数学思维方法, 它在立体几何中处处体现, 实质上处理空间图形问题的基本思想方法就是把它转化为平面图形的问题, 化繁为简。特别是在线线平行, 线面平行, 面面平行



三种平行的关系上转化的思想也有较充分的体现,因而在小结中列出三个平行关系相互转让的关系图,一方面便于学生理解,记忆,同时通过此表,能马上发现三者相互推导的关系,能打开思路,发现线索,得到最佳的解题方案。



《面面平行判定定理》教学设计

教学目标

1. 认知目标

引导学生在“线线平行”或“线面平行”的知识基础上“同化”和“索引”出“面面平行”的判定定理及其变式,并能运用它们解决相关的实际问题。同时,进一步熟悉类比转化和“观察——猜想——论证”的认知方法。

2. 元认知目标

引导学生反思新旧知识间的联系,促进学生养成善于联系地思考问题,提炼思想观点,获取知识、方法、思想等应用时机的元认知知识。

[点评:建构主义学习理论认为,学生对知识与经验的获取是以已有知识经验为依托的,贮存在头脑中的知识与经验如何提取是以知识间的联系为基础的,知识与经验如何与来自各方面的信息产生作用是由情境来激发的。只有在平时的课堂教学中,随时运用问题的情境,培养学生的认知和元认知能力,他才能积蓄问题解决的能量,完成对当前所学知识意义的建构。因此,建构主义学习理论下的教学目标主要是培养和发展学生的认知和元认知能力。]

教学过程

1. 创设情境

师 如图,观察教室的天花板与地面所在的两个平面,它们有怎



样的位置关系?

生:平行。

师:你能说出为什么平行的道理吗?

生:用定义。

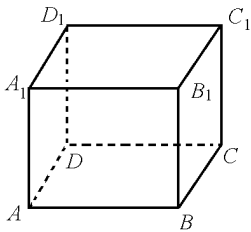
师:试试看!

生:...(欲证不能,欲罢不忍)

师:以前,见过类似于这样的问题吗?

生:在“用定义证明直线与平面平行”中见过。

[点评:建构主义学习理论认为,学习总与一定的知识背景即情境相联系,在实际情境下进行学习,可以使學生利用已有知识与经验同化和索引出当前要学习的新产识,这样获取的知识,不但便于保持,而且易于迁移到阳生的问题情境中。



这里,教者充分运用学生熟知的实例,既激活了学生要学习的“面面平行”的判定定理,又引发出了学生长时记忆中的“线面平行判定定理”之间的关系,为“面面平行判定定理”意义的建构建立了一个稳固的支撑点。]

2. 提供背景材料

师:那时,用“直线与平面平行的定义”证明直线与平面的平行,而不易证时,我们是怎样处理这个问题的?

生:寻找便于证明的判定定理,即寻找判定“线面平行”的条件。

师:照这样分析,我们现在要探寻的是“面面平行”判定的条件,那么条件又是什么呢?

上:...(一时想不到)

师:还要像探寻“线面平行判定的条件”那样,从实际问题中去提炼吗?

生:...(还是拿不准)



师:从实际问题中去提炼是一种办法。但现在我们已有线面平行的判定定理作基础,我们能否从分析“线面平行判定定理”的条件与结论入手,去获得有益的启示呢?

生₁:线面平行判定定理“的条件是“线线平行”,结论是“线面平行”。

生₂:我明白了;“线面平行”的条件是“线线平行”。即证明“线面平行”的问题可转化为证明“线线平行”的问题。照这样,判定“面面平行”的问题可转化为判定“线面平行”的问题。

生₃:按照生₂的想法,我认为,判定“面面平行”的问题也可转化为判定“线线平行”的问题。

师:大家的分析都很有道理,并且集中地揭示了解主体几何问题的一个重要的思想方法,这个思想方法是什么?

生(齐):高维向低维转化。

师:究竟生₂、生₃的想法是否正确,下面我们一起来逐个验证。

[点评:建构主义学习理论认为,学生对问题解决思想方法意义的建构,是从熟知的相类似的问题情境中“同化”和“索引”出来的。当然,如果不这样,经过反复学习,也可以获取这一思想方法,可是这样的思想方法不可能与长期记忆中相关的思想方法产生联系。因而是孤立的,很难用来解决实际问题。

这里,教者为学生探索“面面平行”判定的条件提供了熟知的背景材料,引导学生先从熟知的问题情境中感受体验出探索“线面平行”判定条件的方法,然后类比地迁移到探寻“面面平行”判定的条件中,有效地实现了学生对思想方法意义的建构。]

3. 形成假说

师:根据生₂的分析;“面面平行”判定的条件是“线面平行”,那么“线面平行”的含义如何?

生₁:... 一平面内一直线与另一平面平行。



生₂:一平面内两平行直线与另一平面平行。

师:上述假说是否正确,我们来逐一检验,下面请同学们观察思考下列问题:

① 已知 $a \parallel \alpha$, 则过 a 的平面是否一定与 α 平行? (教师演示模型, 学生观察口答。以下同)

② 已知 $a \parallel \alpha$, $b \parallel a$ 且 $a \parallel b$, 则过 a, b 的平面是否一定与 α 平行? 为什么?

③ 已知 $a \parallel \alpha$, $a \cap b = 0$, 则过 a, b 的平面是否与 α 平行? 为什么?

④ 经过怎样的两相交直线的平面才能与 α 平行呢?

引导学生形成命题: 经过与平面都平行的两相交直线的平面与已知平面平行。

[点评: 为了支持学生主动地形成假说, 这里教师站在稍稍超前于学生智力发展的边界上(即思维的最邻近发展区), 通过问题引领, 来促成学生形成“面面平行”判定的假说, 重视了“自主”在意义建构中的关键作用。]

4. 证明假说

师: 上述命题是否正确, 请同学们自己画出图形, 写出已知, 求证(片刻后, 教师板书)

师: 欲证 $\beta \parallel \alpha$ 实质是证明什么?

生: β 与 α 没有公共点。

师: 能否说得更具体一点呢?

生: 即证 α 上的任意点, 都不在 β 上。

师: 对于处理“任意点, 都不在 β 上”的证明问题, 以前见过吗?

生: 在证明直线与平面平行中见过。

师: 用什么方法?

生: 用反证法, 假设 $\alpha \cap \beta$ 。

[点评: 发展学生的认知结构, 更重要的还包括对元认知知识(在什么情境下运用某数学知识、方法、思想的知识)意义的建构, 而元



认知知识是对问题解决过程反思体验的认知结果,反过来又引领调控新问题解决的过程。

这里,教者先引导学生发掘出证明“面面平行”判定定理的思维情境,再引导学生反思体验出证明“线面平行”判定定理的思维过程,从而引发出学生认知结构中已有的“反证法”在“面面平行”判定定理证明中的迁移。]

师:下面请同学们自己用反证法给出上述命题的证明。

(学生证后,师生共同讲评,并引出“面面平行的判定定理”,学生口述,教师板书。)

生(不满足地)本题可用直接法证(其余学生为之诧异)。

师:请把你的直接证法说给大家听听看。

生:任取点 $A \in \beta$, 点 A 对于 α 的位置关系只有两种, $A \in \alpha$ 或 $A \notin \alpha$ 。若 $A \in \alpha$, 则 α 与 β 相交于过 A 点的一条直线, 设为 c , 余同前述证法。

师:说得很好,请同学们仔细想想看,这种证法的实质是什么?

生:以反证法为基础。

[点评:帮助学生进行思想方法意义的建构,要尽可能揭示出思想方法的全貌,使学生从整体上把握问题的解决的方法。]

5. 变式延伸

师:前面曾提到,面面平行判定定理的条件可以是“线线平行”,那么“线线平行”的含义又是怎样呢?

生:一平面内一直线平行于另一平面内一直线,...

师:好!下面请同学们自己逐一分析研究这些条件,为此,观察、思考下列问题。

(1) 已知 $a \subset \alpha$, $a' \subset \beta$, $a \parallel a'$, α 与 β 是否一定平行(教师演示模型,学生观察回答,以下同)

(2) 已知 $a, b \subset \alpha$, $a', b' \subset \beta$, 且 $a \parallel a'$, $b \parallel b'$, α 与 β 是否一定平行?



(3) α 内的两直线 a, b 与 β 内的两直线 a', b' 应满足怎样的条件才能使 α 与 β 平行呢?

引导学生概括出命题 1: “一平面内的两相交直线分别平行于另一平面内的两相交直线, 那么这两个平面平行。”然后, 要求学生自己写出已知、求证, 并给出证明。

师: “面面平行”判定的条件一定要从线线或线面平行的位置关系中去寻找吗? 还能否从线面的其他位置关系中探寻出“面面平行”的判定的条件呢?

生: 线面其他的位置关系只能是相交。

师: 对! 要从线面相交的位置关系中, 探寻出“面面平行”判定的条件, 一般的认知方法是什么?

生₁: 从特殊情形出发。

生₂: 线面相交的特殊情形是线面垂直, 照此说法, 应先考虑直线和两平面都垂直的情形。

生₃: (受“线面平行”的判定定理形成的启发) 从考察教室的内部结构出发可知: 四条墙脚线垂直上下底面, 则上下底面平行。

生₄: 因为四条墙角线是平行的, 其中一条垂直于上下底面, 其余的三条必垂直于上、下底面, 因此, 如果生₄ 的假说成立, 那么, 面面平行判定的条件可以是“一直线同垂直于两平面”。

师: 根据上面的分析, 请同学们概括出这个命题。

生(命题 2): 如果两平面同垂直于一直线, 那么这两个平面平行。

师: 命题是否正确, 请同学们自己写出已知、求证, 并给出证明。略。

师: 在命题 2 中, 将“与两平面垂直的直线”改为“不垂直”命题还成立吗? (教师演示模式, 学生观察)

生: 不成立。



师:能否再增加一些条件,使命题2成立呢?请同学们自己演示模型,观察分析得出结论。

生₁:平面 α 与平面 β 间的两平行线段相等,则 $\alpha \parallel \beta$ 。

生₂:不对,这只能保证平面 α 内一直线与平面 β 内一直线平行,我觉得条件应该是平面 α 内不在一直线上的三点到平面 β 间的平行线段相等。

生₃:这些条件还不够,因为,若 α 与 β 相交,也能在 α 上找到不共线的三点,它们与平面 β 间的相等线段相等。

师:同学们讨论得很好,谁来概括出这一命题呢?

生₁(命题3):平面 α 上,不共线的三点(在 β 的同侧)到平面 β 间的平行线段相等,则 $\alpha \parallel \beta$ 。

生₂:若命题3成立,那么命题3的特殊情形也成立,即有:

命题4:平面 α 内不在一直线上三点(在 β 同侧)到 β 的距离相等,则 $\alpha \parallel \beta$ 。

师:还能够演变出另外的命题来吗?(延迟)比如,保持 α 不动,让 β 按逆时针方向旋转呢?(教师演示图形)

生(命题5): α 与 β 间不共面的三线段 AA' 、 BB' 、 CC' 交于一点 O ,且 $AO = A'O$, $BO = B'O$, $CO = C'O$,则 $\alpha \parallel \beta$ 。

师:你们探索到的命题3至命题5都是正确的,有兴趣的同学课后去验证。

[点评:建构主义学习理论认为,学习者与周围环境的相互作用,对于学习内容的理解起着关键性的作用,这是建构主义的核心概念之一。

这里,学生在教师的引导下,在积累了已有探索经验的基础上,一起讨论交流,相互评价,共同完成“面面平行”判定定理变式意义的建构,通过这样的协作学习环境,学习者群体的思维与智慧为整个群体所共享。]



6. 总结提高

师(屏幕显示定理及命题 1 至命题 5 的示意图): 在“ 面面平行 ”判定定理的学习中 , 我们应掌握哪些知识与方法呢 ? 请同学们在示意留下方写出相应的定理和命题 , 标出这些定理或命题间的思维联系 , 并提炼出应用这些定理或命题解题的思想观点。

余略。

[点评 : 学生完成定理及命题 1 至命题 5 意义的建构后 , 对这一知识块意义的建构是否有质有量 , 还取决于学生认知结构中的这些定理或命题间的思维联系是否清晰有序 , 因此 , 在学生完成对定理及有关命题意义的建构后 , 教师仍然继续在知识间的联系上做细致扎实的引导工作 , 这样既便于学生长时记忆 , 又能激活将要学习的相关的新知识。]



《二面角》教学设计

教学目标

1. 使学生正确理解和掌握“二面角”、“二面角的平面角”的概念,并能初步运用它解决实际问题;
2. 引导学生探索和研究“二面角的平面角”应该如何定义,在概念形成的过程中,发展学生的思维能力。

教学重点和难点

本课的重点是“二面角”和“二面角的平面角”的概念;
 本课的难点是“二面角的平面角”概念形成的过程。

教学设计过程

教师:在平面几何中“角”是怎样定义的?

学生:从平面内一点出发的两条射线所组成的图形叫做角。

教师:在立体几何中“异面直线所成的角”、“直线和平面所成的角”又是怎样定义的?它们有什么共同的特征?

学生:直线 a, b 是异面直线,经过空间任意一点 O , 分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角。

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角,叫做这条直线和这个平面所成的角。

它们的共同特征是都是将三维空间的角转化为二维空间的角。



教师:请同学们观察下面的几个问题。

(当教师说完上述话后,利用多媒体技术,让学生通过计算机看两个例子)

例子之一:

镜头一:淡蓝色的地球。(图片)

镜头二:火箭发射人造地球卫星。(录像)

镜头三:人造地球卫星绕地球旋转,最后画出卫星的轨道平面和地球赤道平面。

让学生观察这两个平面相交成一定的角度。

例子之二:

镜头一:人走在坡度不太大的桥上。

(录像)

镜头二:人在爬山。(录像)

镜头三:攀岩运动。(录像)

镜头四:演示下面动态图象。(让水平面静止不动,坡面在不断变化,目的是让学生看到,在生活实践中,有许多问题要涉及到两个平面相交所成的角的情形)

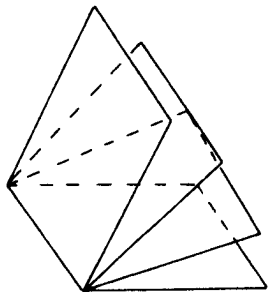


图 1

(注意:四个镜头要连续编排在一起进行演示,时间一分钟)

教师:如何给二面角下定义呢?下面我们用类比的办法,与角的概念对比,探讨二面角的定义。

这一段教学采用计算机辅助手段,每一个问题分三步完成,首先给出平面角的问题,然后请学生思考并回答二面角的问题,最后计算机显示正确结果。这部分共有四个问题,全部研究完毕后,将整个过程列成一个总表,显示在屏幕上。

教师:请看角的图形,思考二面角的图形。

学生可以将自己画的图展示给大家。

计算机显示:二面角的图形。



教师(给出平面角的定义)请同学们给二面角下定义。

显示:从平面内一点出发的两条射线所组成的图形。

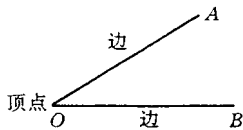


图 2

学生(口答)

计算机显示:从空间一直线出发的两个半平面所组成的图形。

教师:平面角由射线一点一射线构成。二面角呢?

学生:二面角由半平面—线—半平面构成。

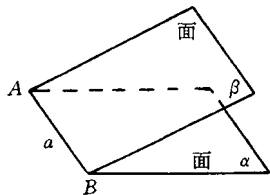


图 3

教师:平面角表示法: $\angle AOB$ 。

二面角表示法 $\alpha - a - \beta$ 或 $\alpha - AB - \beta$ 。

最后计算机显示整个过程。

教师:经过上面的研究我们已经看到,平面上的角,可以看作是一条射线绕其端点旋转形成的图形;类似地,一个半平面绕其界线旋转到一定位置所得到的图形,就是二面角。

教师:二面角与平面内的角一样,是可以比较大小的,其比较方法,与平面内的角的大小的比较方法类似。

(教师让学生打开书本)

打开书本的过程,给我们一种二面角的大小连续变化的形象。(前面看到的爬山问题也是如此)教师:用量角器可以量出平面内的角的大小,能否也能用量角器直接去量出二面角的大小呢?

比如,这里有一个对顶量角器和一个三角木块(直三棱柱)模型,你们能用我们自制的对顶量角器来量出三角木块模型的某两面角的大小吗?比如平面 α 与 β 的夹角?

教师:一般地说,量角器只能测量“平面角”(指两条相交直线所成的角。相应地,我们把异面直线所成的角,直线与平面所成的角和

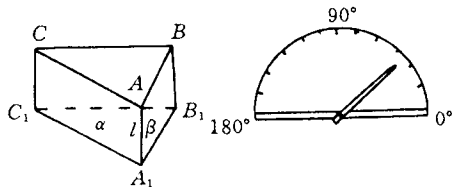


图 4

二面角(均称为空间角)那么,如何去度量二面角的大小呢?我们以往是如何度量某些角的?

学生:分别通过“取点、平移(相交)”(对异面直线所成的角)与“斜线的射影(相交)”(对斜线与平面所成的角)去度量的。

教师:这些做法的共同点是什么?

学生:都是将空间角化为平面角。

教师:对!再回到刚才的量角操作,你是怎样用对顶量角器去量二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小呢?

学生:将对顶量角器的一个角的两边靠紧二面角的两个面,角的顶点则在二面角的棱上。

教师:大家注意,实际上同学们量的是一个平面内的角: $\angle BAC$ 。这个角的顶点在二面角的棱上,它的两边分别在二面角的两个面内且与棱垂直,而且对于确定的二面角,这样的角的大小是唯一的,确定的,我们把它叫做二面角的平面角。

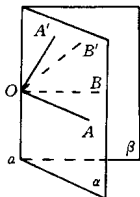


图 5

(对于训练有素,肯于思考的学生可能会提出下面的问题)

学生:若以棱 a 上任意一点 O 为端点,在两个面内作与棱成等角 θ' ($0^\circ < \theta' < 90^\circ$) 的两条射线 OA', OB' , 由空间等角定理知, $\angle A'OB'$ 也是存在且唯一的,为什么不用这样的角定义二面角的平面角?

教师:记 $\angle AOB = \theta$, $\angle A'OB' = \phi$ 。当 OA', OB' 在平面 AOB 同



侧时 $\theta > \psi$; 当 OA', OB' 在平面 AOB 异侧时 $\theta < \psi$. 请看图 6 :

设 $A'P' = a, A'P' = b, A'B' = x$

由余弦定理, 得 :

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + b^2 - 2b^2 \cos \psi \\ &= 2b^2(1 - \cos \psi), \end{aligned}$$

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \theta = 2a^2(1 - \cos \theta),$$

$$\text{所以 } \frac{\cos \psi - 1}{\cos \theta - 1} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{在 Rt} \triangle A'pp' \text{ 中 } \sin \theta' = \frac{a}{b},$$

$$\text{所以 } \sin^2 \theta' = \frac{\cos \psi - 1}{\cos \theta - 1} (*)$$

当 OA', OB' 在平面 AOB 的同侧时, 若用 $\angle A'OB' = \psi$ 表示二面角的大小, 由 (*) 知, ψ 与 θ 之间会有常数关系, 这将给表示, 尤其是计算、应用带来诸多不便; 另外, 若用 $\angle A'OB' = \psi$ 表示二面角的大小, 当平面 $\alpha \perp$ 平面 β 时, $\psi \neq 90^\circ$, 当半平面 α 与半平面 β 在同一平面时, $\psi = 2\theta' \neq 180^\circ$, 都与已有知识和经验不符, 不能直观反映出空间两个相交平面的相对位置关系。

教师板书二面角的平面角的定义。

定义 以二面角的棱上任意一点为端点, 在两个面内分别作垂直于棱的两条射线, 这两条射线所成的角叫做二面角的平面角。

教师: “二面角的平面角”的定义三个主要特征是什么?

学生 过棱上任意一点 ($O \in a$), 分别在两个面内作射线 ($OA \subset \alpha, OB \subset \beta$), 射线垂直于棱 ($OA \perp a, OB \perp a$)。

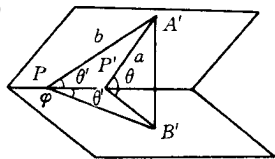


图 6

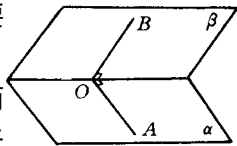


图 7

教师 经过上面的研究我们看到, 二面角的大小, 可以用它的平面角来度量, 二面角的平面角是几度, 就说这个二面角是几度。



教师:许多立体几何问题,若能正确地作出图形,则问题就便于解决。若能正确地作出二面角的平面角乃是解决这类问题的关键步骤,下面我们总结一下作二面角平面角的几种基本方法,如何利用定义作二面角的平面角呢?

学生:在二面角的棱 a 上任意取一点 O 为端点,在面 α, β 内分别引垂直于棱 a 的两条射线 OA, OB , 则 $\angle AOB$ 为该二面角的平面角。

教师:如何利用三垂线定理作二面角的平面角呢?

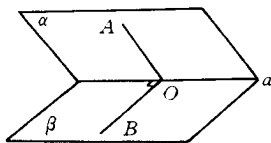


图 8

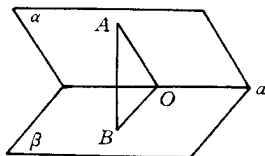


图 9

学生:在二面角 $\alpha - a - \beta$ 的面 α 上任取一点 A , 过 A 分别作棱 a 和另一面 β 的垂线 AO 和 AB (O, B 分别是垂足), 连 BO ; 或者过 A 作面 β 的垂线 AB , 又过垂足 B 引棱 a 的垂线 BO , 连 AO , 则 $\angle AOB$ 为该二面角的平面角。

教师:能否用作垂面的办法作二面角的平面角呢?

学生:过二面角的棱 a 上任一点 O , 作平面 γ 与该棱垂直(作棱的垂面), 平面 γ 与 α, β 分别交于 OA, OB , 则可用 $\angle AOB$ 来度量二面角 $\alpha - a - \beta$ 的大小。

教师:下面我们研究一道例题。

题目:如图 11, 山坡的倾斜度(坡面与水平面所成二面角的度数)是 60° , 山坡上有一条直道 CD , 它和坡脚的水平线 AB 的夹角是 30° , 沿这条路上山, 行走 100 米后升高多少米?

(投影打出下图)

(此例是一个实际应用问题, 难度较低, 一般不易引起人们的注意, 但教师应深入思考, 讲清下面几点)



分析：

1. 建模过程 此例的求解首先要对实际图形作出想象理解,然后在教学中抽象出数学模型,虽然建模过程难度较低,但教学中应主要向学生渗透建模的思想和增强学生对立体几何中一些基本图形的认识与理解。

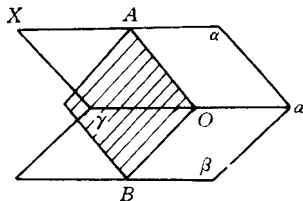


图 10

设过 AB 的水平面为 α , 坡面 DAB 所在的平面为 β , $CD = 100m$ 。

本题要求“升高了多少米”即是求点 D 到水平面 α 的距离 DH 。这自然会想到解直角三角形 DHC , 但该直角三角形不可解, 故必须另寻途径。(如图, 利用计算机显示在屏幕上)

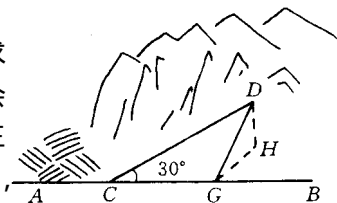


图 11

再看看给出的条件, 已知二面角 $\alpha - AB - \beta$ 是 60° , 如何作出它的平面角呢? 过 D 在平面 β 内作 $DG \perp AB$, G 是垂足, 再连结 HG , 则根据三垂线定理, 可得 $HG \perp AB$, 则 $\angle DGH$ 就是该二面角的平面角, 即 $\angle DGH = 60^\circ$ 。再根据 $\angle DCH = 30^\circ$ 及直角三角形 DGH 和 DCG 的边角关系, 就可以求出 DH 。

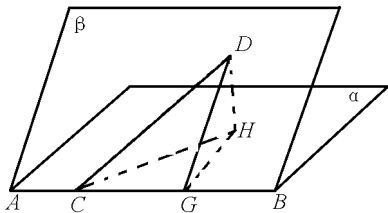


图 12

2. 提炼方法 此例的求解是应用三垂线定理作二面角的平面角的典型例子, 也是立体几何的一个基本方法。为了强化此法, 应在本节练习中配套出相应的题目。这表明在教学中加强对基本方法的提炼、理解是很有必要的, 也是加强通法教学的具体表现。

练习：



① 在 30° 二面角的一个面内有一个点,它到另一个面的距离是 a ,求它到棱的距离。

② 把边长为 a 的正方形 $ABCD$ 以 BD 为轴折叠,使二面角 $A-BD-C$ 成 60° 的二面角,求 $A、C$ 两点的距离。

3. 导出等式 在图 12 中,不妨从一般性出发,记 $\angle DCH = \theta_1$, $\angle DCG = \theta_2$, $\angle HCG = \theta_3$, $\angle DGH = \theta$ 。引导学生从例题图形中推导出等式:

$$\textcircled{1} \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \sin \theta;$$

$$\textcircled{2} \cos \theta_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_3。$$

这样的练习既锻炼了学生的动手能力,还揭示了例题的引申功能,使例题的作用突出,导向明确,极有利于学生对知识串联、累积、加工,从而达到举一反三的作用。

推导 ①:因为 $\sin \theta_1 = \frac{DH}{CD}$, $\sin \theta_2 = \frac{DG}{CD}$, $\sin \theta = \frac{DH}{DC}$, 所以 $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \sin \theta$ 。

推导 ②:因为 $\cos \theta_2 = \frac{CG}{CD}$, $\cos \theta_1 = \frac{CH}{CD}$, $\cos \theta_3 = \frac{CG}{CH}$, 所以 $\cos \theta_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_3$ 。

4. 挖掘引申 教师在学生导出等式 ①、② 后,把课堂教学进一步引向深入,对等式 ①、② 作出说明与解释。

由等式 ① 可得 $\sin \theta_1 \leq \sin \theta$, 即 $\theta_1 \leq \theta$, 说明沿山坡直道 CD 上山时与水平面所成的角 θ_1 不大于山坡的倾斜度,这使例题的实际性增强,又使学生在教学过程中对数学知识与实际生活进行比较、联系、评价,突出了数学应用的广泛性,进一步强化了学生的应用意识,从而有利于学生数学素养的提高。

小结

1. 空间的“二面角”是平面几何中角的概念在空间中的拓广。处理问题的思想方法是“空间的角”转化为“平面的角”来处理。定义



的原则是 这个“平面角”的大小必须是由空间的角完全确定而且是唯一的。

2. 凡是涉及到二面角的几何问题,都要根据题目的条件,在图形的恰当位置作出二面角的平面角,主要方法有“定义法”;“应用三垂线定理”和“作垂面”的方法,我们将在下一课做进一步的研究。

布置作业

1. 阅读课本。
2. 正四面体 $ABCD$ 求侧面与底面所成二面角的大小的余弦值。
3. 如果两个二面角的两个面对应平行,那么这两个二面角相等或互补。

课堂教学设计说明

本节课属于新授课型,应主要把握下述几个方面。

1. 要有良好的铺垫,数学教学的过程,实质上就是原有认知结构不断地同化或顺应的能动过程。学生原有的认知结构,始终是关系迁移功能的一个关键的因素,为了有效迁移和建构,就应认真寻找和了解学生的原认知,及时组织改造和唤起这些关键因素,为学习新的知识提供基础。主要要做到三个方面的铺垫:(1)知识性铺垫。(2)技能性铺垫。(3)原理性铺垫。

2. 抓着新知识的导入点,新课导入就是在新旧问题之间架起一座“认知桥梁”,从而顺利实现迁移。导入时要寻求新旧问题的最短距离,要瞄准新旧关系的最佳方位,要把握新旧转换的最精确表达。

3. 新授课的重点是新授。新授是一堂课的重要环节,也是学生思维最活跃、最紧张、最有效的认知高潮。因此,新授过程应确保在教学中的最佳时域进行。要让学生有观察、动手、表达、思考、交流、表现等时机,让学生真正成为学习的主人,主动地和生动地进行认知建构。

4. 做好课堂巩固。巩固的主要目的就是帮助学生建立起关于某道范例的思维模式,形成积极有益的认知定势作为学习优势去解决



实际问题。这样的巩固练习,不能单纯停留于对范例的模仿上,而应恰当地变换形式或角度,集中突破教学难点和重点。

5. 做好作业的选题、批改、订正、讲评,进一步提高学习质量。



《棱柱》教学设计

教学目标

1. 使学生掌握四棱柱的概念及类属关系；
2. 通过对长方体性质的研究 培养学生的空间想象能力；
3. 通过由长方形性质推导长方体性质的类比方法对学生进行辩证唯物主义的思想教育。

教学重点和难点

长方体的性质。

教具

四棱柱、平行六面体、直平行六面体、长方体、正四棱柱、正方体等模型。

教学设计过程

一、复习

1. 棱柱的定义。
2. 棱柱的性质。
3. 什么叫四棱柱。

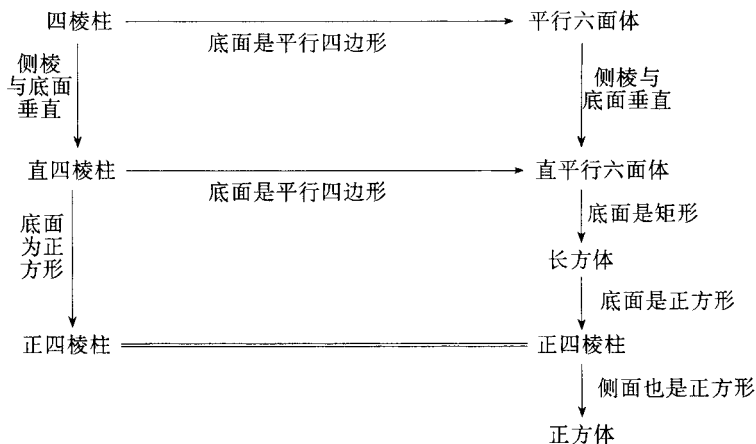


二、新课

师:由复习3知:底面是四边形的棱柱叫四棱柱。

(板书:1. 四棱柱)

师:四棱柱有6个面,各个面的形状不同,构成不同的四棱柱,请大家观察模型总结出:



(板书上面图表,从两个不同的角度带领学生分析各面的形状对四棱柱分类)

师:由此得到问题:

1. 平行六面体的各个面是什么样的四边形?直平行六面体、长方体、正方体呢?

学生甲:平行六面体的六个面都是平行四边形。

生乙:直平行六面体的一组相对的面是平行四边形,其余四个面是矩形。

生丙:长方体的六个面都是矩形,正方体的六个面都是正方形。

2. 长方体是直四棱柱,直四棱柱是长方体吗?

生:不一定。因为直四棱柱的底不一定是矩形。



3. 正方体是正四棱柱,正四棱柱是正方体吗?

生:不一定。因为正四棱柱的底是正方形,而侧面不一定是正方形。

(通过这组练习,使学生搞清不同的四棱柱间的区别与联系)

师:在平面几何中长方形有什么性质呢?

生:若长方形的长为 a ,宽为 b ,则对角线长为 $l^2 = a^2 + b^2$ 。

另一生:若对角线与过同一个顶点的两条边的夹角分别为 α, β , 则有 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ 。

师:谁能证明?

(通过学生回忆,讨论后,找一学生到前面板演)

生:证明如图1:

$$\cos \alpha = \frac{a}{l},$$

$$\cos \beta = \frac{b}{l},$$

$$\text{所以 } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \left(\frac{a}{l}\right)^2 + \left(\frac{b}{l}\right)^2 =$$

$$\frac{a^2 + b^2}{l^2} = 1.$$

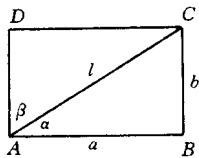


图 1

师:很好。那么在立体几何中长方体是否也有类似的性质呢?

(给学生两分钟时间思考,讨论,请一学生回答)(板书 2. 长方体的性质)

生甲:长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上的三条棱的长的平方和。

师:你能证明吗?

此时学生乙举手,老师请他到前面板演证明。

已知:长方体 AC, B_1D 是一条对角线。

求证: $BD^2 = AB^2 + BB_1^2 + BC^2$ 。

证明:连结 BD ,



因为 $B_1B \perp BD$,

所以 $B_1D^2 = BD^2 + B_1B^2$ 。

又因为 $BD^2 = AD^2 + AB^2 = AB^2 + BC^2$,

所以 $B_1D^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2$ 。

师 通过与长方形比较,长方体还有什么性质?

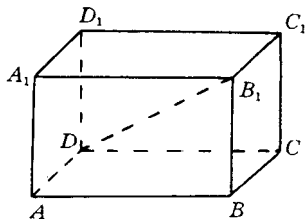


图 2

生:长方体的一条对角线与一个顶点上的三条棱所成的角分别为 α, β, γ 则有 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 。

已知:长方体 AC_1, B_1D 是一条对角线
线 $\angle A_1B_1D = \alpha, \angle BB_1D = \beta,$
 $\angle C_1B_1D = \gamma$ 。

求证 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 。

证明 连 A_1D, BD, C_1D ,

因为 $A_1B_1 \perp$ 面 A_1D ,

所以 $A_1B_1 \perp A_1D$ 。

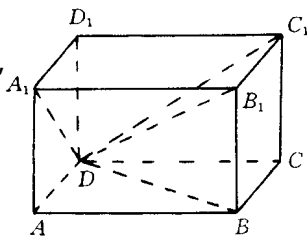


图 3

在 $\text{Rt}\triangle A_1B_1D$ 中 $\cos \alpha = \frac{A_1B_1}{B_1D}$ 所以 $\cos^2 \alpha = \frac{A_1B_1^2}{B_1D^2}$ 。

同理 $\cos^2 \beta = \frac{BB_1^2}{B_1D^2}, \cos^2 \gamma = \frac{B_1C_1^2}{B_1D^2}$ 。

故 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{A_1B_1^2 + BB_1^2 + B_1C_1^2}{B_1D^2} = 1$ 。

(板书:性质1,性质2)

师:引申 若以 D 点为坐标原点, DA 方向为 x 轴的正方向, DC 方向为 y 轴的正方向, DD_1 方向为 z 轴的正方向,在确定长度单位后就建立了空间直角坐标系,则长方体的长、宽、高即为 B_1 点在坐标轴上的射影 α, β, γ 即为 OB_1 与 x, y, z 轴的夹角,即有关系式:

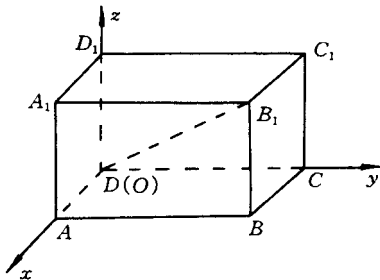


图 4

$$(1) x^2 + y^2 + z^2 = |OB_1|^2.$$

$$(2) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

(1)式也可以说成长方体的对角线长的平方,等于长方体三度的平方和。利用此式为计算空间两点间的距离提供了方便。

例1 有一矩形纸片 $ABCD$, $AB = 5$, $BC = 2$, E, F 分别是 AB , CD 上的点,且 $BE = CF = 1$,把纸片沿 EF 折成直二面角。

(1)求 BD 的距离;

(2)求证 AC, BD 交于一点且被这点平分。

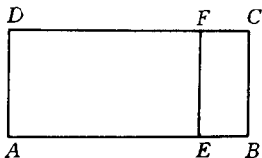


图 5

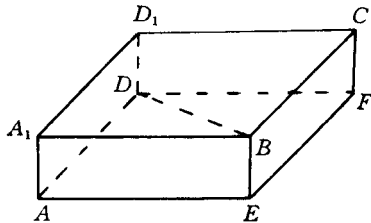


图 6

分析 将平面 BF 折起后所补形成长方体 $AEFD - A_1BCD_1$, 则 BD 恰好是长方体的一条对角线。

(1)解 因为 AE, EF, EB 两两垂直,

所以 BD 恰好是以 AE, EF, EB 为长、宽、高的长方体的对角线,



所以 $BD = \sqrt{AE^2 + EF^2 + EB^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{21}$ 。

(2) 证明 因为 $AD \parallel EF$, $EF \parallel BC$, 所以 $AD \parallel BC$ 。

所以 $ACBD$ 在同一平面内,

且四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

所以 AC 、 BD 交于一点且被这点平分。

师 通过此例可把求空间两点间距离问题转化为求长方体的对角线长的问题。

例 2 长方体的一条对角线与各个面所成的角分别为 α, β, γ , 求证:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2.$$

证明 连 BA_1, BC_1, BD 。

因为 $A_1D_1 \perp$ 面 A_1B ,

所以 $\angle A_1BD_1$ 即为 BD_1 与平面 AB_1

所成的角 α 。

同理 $\angle C_1BD_1 = \beta$, $\angle DBD_1 = \gamma$

在 $\text{Rt}\triangle A_1BD_1$ 中 $\cos \alpha = \frac{A_1B}{BD_1}$,

$$\text{故 } \cos^2 \alpha = \frac{A_1B^2}{BD_1^2} = \frac{A_1A^2 + AB^2}{BD_1^2}$$

$$\text{同理 } \cos^2 \beta = \frac{BC^2 + CC_1^2}{BD_1^2}, \cos^2 \gamma = \frac{AB^2 + AD^2}{BD_1^2}.$$

所以 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$

$$= \frac{A_1A^2 + AB^2 + BC^2 + CC_1^2 + AB^2 + AD^2}{BD_1^2} = 2.$$

师 此例是长方体的对角线与各面所成的角所具有的性质,也可以作长方体的一条性质来用。

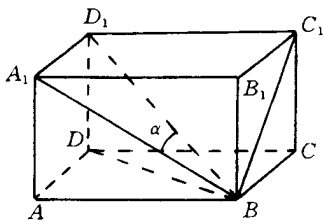


图 7



三、小结：

本节课的内容：

1. 特殊四棱柱及它们之间的关系，用集合表示为：

$\{\text{四棱柱}\} \supset \{\text{平行六面体}\} \supset \{\text{直平行六面体}\} \supset \{\text{长方体}\} \supset \{\text{正四棱柱}\} \supset \{\text{正方体}\}$

特别是长方体、正四棱柱、正方体，它们较接近，要注意它们之间的区别。

2. 长方体的性质，长方体的对角线长的平方，等于长方体三棱的平方和，利用这一性质可使求空间两点间的距离问题转化为求长方体的对角线长的问题，使运算简单多了。

作业：p.58 第4、5题。

思考题（1）在例1中若沿对角线AC折起成直二面角后是否可构成一长方体，求BD的距离？若能构成长方体，是怎样的长方体？

（2）在例1中沿任一直线l折成直二面角后如何构成一长方体，求BD的距离？

课堂教学设计说明

本节课由于是第二章多面体与旋转体的第一节，所以在教学中分两节进行。

第一节是紧扣教学大纲和教材，从辩证唯物主义的观点出发，培养学生的观察能力、空间想象能力。抽象的概括出棱柱的定义、性质和分类，所以这节课中用的教具较多，意在多观察、多想。老师适当点拨、高度的概括出定义、性质并有意的引导出棱柱的两种分类的方法。

第二节是在上一节的内容基础之上进一步培养学生的观察能力和空间想象能力。通过对四棱柱的研究进一步的展现“转化”这一思想方法的应用。通过学习，使学生学会研究多面体的方法和步骤，学会如何对多面体进行分类。



《球》教学设计

教学目标

1. 掌握球的定义。
2. 掌握球的性质,并能熟练应用;
3. 通过球的教学,培养学生分析问题解决问题的能力。

教学重点和难点

- 重点 球的截面性质。
- 难点 球面距离的计算。

教学设计过程

一、复习提问

师:圆柱是怎样定义的。

生:以矩形的一边为旋转轴,其余各边旋转而成的曲面所围成的几何体叫做圆柱。

师:是矩形的边为旋转轴吗?

生:是。

师:同学们请读 $p.21$ 定义,然后教师强调指出,是以矩形的一边所在的直线为轴。

师:同学们再考虑,圆锥、圆台是怎样定义的。教师要强调边所在的直线为轴。



二、讲课题

师:以上同学们清楚了圆柱、圆锥、圆台的形成过程。那么球是怎样形成的呢?是否也可以通过某一个几何体旋转而形成呢?学生经过思考不难发现,半圆以它的直径所在的直线为轴旋转所成的曲面围成的几何体。(待学生回答后)教师展示教具(从而得出球面的旋转定义)(板书)半圆以它直径所在的直线为轴旋转所成的曲面叫做球面,球面所围成的几何体叫做球体(简称球)(接着教师画出下图并介绍球的有关概念:球心、球半径、直径、球的表示,特别要强调球面与球二者的区别)

师:球面与球的区别是什么?

生:球是包括球面在内的一个几何体,球面是一个面。

师:在平面几何里,从点集的观点看圆是怎么定义的,我们是否也可用类似的方法定义球面。

生:在同一平面内,一动点到一定点的距离等于定长的点的集合,是以定点为圆心,定长为半径的圆。

师:在空间到定点的距离等于定长的点的集合,是以定点为球心的球面。

球的性质:

师:通过上面的讨论我们不难看出:球面两种定义和圆有联系。比如说:从点集的观点看圆与球面的定义,这个定义就其内容来说,都是指到定点的距离等于定长的点的集合,它们的不同之处只在于定义适用的范围,圆的定义是对平面而言,而球的定义则是对空间而言的,因此可以说,球面的概念是圆的概念在空间的推广,既然如此我们不禁要问,它们之间会不会有某些相似的性质,我们能否从圆的某些性质去推测并证明球的某些性质。

(显而易见,上面的引入和启发为学生对球性质的进一步探讨在

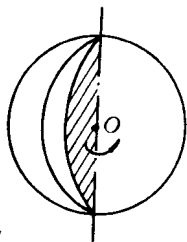


图 1



思维方法上做好了必要的准备,学生已形成了一定的“定势”思维,教师要牢牢把握住既定的思维轨道去探索)

师:我们知道圆的割线在圆内的部分是一条线段,球被平面所截其截面是什么?

生:是圆面。

师:为什么是圆面,教师出示教具演示,并指出教材不做证明要求。(请有兴趣的同学下去完成证明)

(下面的证明仅供教师参考)

证明:设球的半径是 R ,下面分两种情况研究。

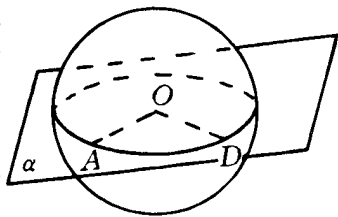


图 2

(1) 设平面 α 与球面相交,如果点 $O \in \alpha$ (如上图 2), 设 A 是球面和平面 α 的交线上的任意一点, 因为 A 在球面上, 所以 $AO = R$ 。

所以 A 在平面 α 内以 O 为圆心, R 为半径的圆上。反过来, 如果 B 是这个圆上的任意一点。因为 $OB = R$, 所以点 B 在球面上。

点 B 在球面上, 又在平面 α 内, 就是说点 B 在平面 α 和球面的交线上。

因此, 平面 α 和球 O 的截面是一个圆面。

(2) 如果点 $O \notin \alpha$ (如图 3), 自点 O 作 $OK \perp \alpha$, 垂足为 K , 设 A 是平面 α 和球面交线上的任意一点, 连结 AK 。因为 $OK \perp \alpha$, 所以 $OK \perp AK$ 。而 $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - OK^2}$, 所以点 A 在平面 α 内, 以 K 为圆心, $\sqrt{R^2 - OK^2}$ 为半径的圆上; 反过来, 如果 B 是这个圆上的任意一点, 那么 $BK = \sqrt{R^2 - OK^2}$, $OB^2 = OK^2 + KB^2 = R^2$, $OB = R$, 即点 B 在球 O 的球面上。

点 B 在平面 α 内, 又在球 O 的球面上, 那么点 B 就在它们的交线上。



因此平面 α 截球 O 的截面是一个圆面了。

师 球的截面在球中的地位类似于弦在圆中的地位,截面是圆面。(学生明确了球的截面是圆面之后,下面的问题便迎刃而解)

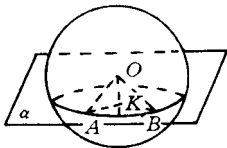


图 3

师 在圆中,圆心与弦的中点连线与弦有什么位置关系?

生 垂直。

师 那么在球中,球心与截面圆心的连线与截面有什么位置关系。(教师画出示意图)

生 垂直于截面圆。(教师板书球的性质(1))并展示实物或模型演示给学生,不作证明)

师 球心与截面圆心的连线垂直于截面圆,那么不难看出,球半径 R ,球心与截面圆的距离 d ,及截面圆半径 r 之间有什么关系?

生 由线面垂直的关系可知, $R^2 = d^2 + r^2$, 即: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ 。

[教师板书球的性质(2)]

师 在圆中,弦心距的变化与弦长有什么关系。

生 当 $d = 0$ 时弦最长,随着弦心距的增大,弦在减小,当 $d = R$ 时弦长为 0,这时直线与圆相切。

师 在球中,球心到截面的距离 d 与截面圆的大小有什么关系?

生 (可类比圆的弦变化思考)当 $d = 0$ 时,截面过球心,这时 $R = r$,截面圆最大,如图 4。

师 这个圆叫做大圆。

生 当 d 增大时截面圆越来越小。

师 当 $0 < d < R$ 时截面是小圆,如图 5。当 $d = R$ 时,截面圆缩为一个点,这时称截面与球相切,如图 6。

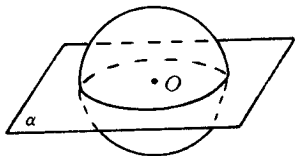


图 4

师 在地球仪中,纬线和经线是怎样规定的。

生 平行于赤道的小圆线是纬线,过南北极的半大圆是经线。

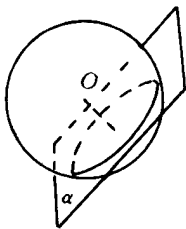


图 5

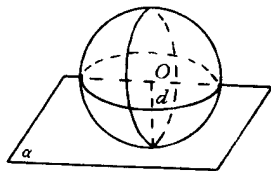


图 6

师(下面对经度和纬度结合图形要讲清楚,这两个概念也是很难理解的)

如图 7 纬度—— P 点的纬度,也是 $\widehat{PA}$ 或 $\angle POA$ 的度数,即:某地的纬度就是经过该点的球半径和赤道平面所成的角度。

如图 8 经度—— P 点的经度,也是 $\widehat{AB}$ 或 $\angle AOB$ 的度数,即:某地点的经度就是经过这点的径线与地轴确定的半平面与本初子午线与地轴确定的半平面所成二面角的度数。

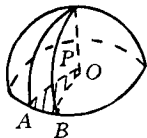


图 7

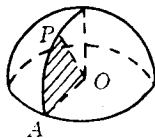


图 8

球面上两点间的距离。

(用地球仪边演示边发问)

师:如果我们把地球看成一个球,我们会遇到这样的问题,由 A 到 B 的球面上应如何走行程最短?我们知道平面上两点间最短的距离是连接这两点的线段的长度,而地球的表面是曲面,球面上 A, B 两点间的最短路程显然不是线段 AB 的长度,那么它又是什么呢?这时教师把事先做好的连接 A, B 两段铁丝作成的圆弧由地球仪表面(见图 9)搬到电教片上,并画图 10。)指出这相当于在平面上连接 A, B 的劣弧中,怎样的劣弧的长度最短?就图而言,哪一段弧较短?要



求学生答($\widehat{AmB}$) ,这两段弧在本质上有什么区别?

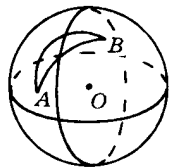


图 9

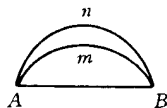


图 10

生:所在圆半径不同。

师:可以看出,半径较大的劣弧反而短。这就启示我们,在球面由A到B的路程要尽量沿着所在圆半径较大的劣弧走。在连接A,B的劣弧中最大圆的半径存在吗?

生(学生相互议论,研究发现)最大圆半径存在。

师:它等于多少?

生:就是经过这两点的大圆半径R。

师:由以上讨论,最后我们知道,在球面上,两点间的最短距离就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧长度,把这个弧长叫做两点间的球面距离。(板书)

例1(把例题抄在投影片上)

我国首都北京靠近北纬 40° ,求北纬 40° 纬线的长度约为多少千米(地球半径约6370km)。

师:怎样能把这个问题平面化呢?

生:做地球的截面大圆。

师:是截面大圆吗?在一个截面大圆能完成该题的要求吗?

生(部分学生说能,另一部分说不能,经过讨论争执,最后统一了意见)是经过南北极的大圆截面。

师(画图)请同学回答哪个角等于 40° 。

生: $\angle AOB = 40^\circ$

师:请找出经过A点纬线圈的半径。

生:半径是AK。



师 过 A 点纬线圈的周长是多少?

生 $C = 2\pi \cdot AK$ 。

师 用半径 R 和 40° 表示 AK 的长。

生 $AK = R\cos 40^\circ$

师 故求出了北纬 40° 纬线的长度约为

$$C = 2\pi \cdot R\cos 40^\circ \approx 3.066 \times 10^4 \text{ km}$$

练习:

(1) 课本 $p.87$ 1。

(2) 下列命题:

a . 球的任意两个大圆的交点连线是球的

直径。

b . 球面上任意两点的球面距离, 是过这两点的大圆弧长。

c . 球面上任意两点的球面距离, 是连接这两点的线段长。

d . 用不过球心的平面截球, 球心和截面圆心的连线垂直于截

面。正确的是()。

(A) a, b (B) b, c (C) a, d (D) d

作业 课本 $p.91.1.2$ 。

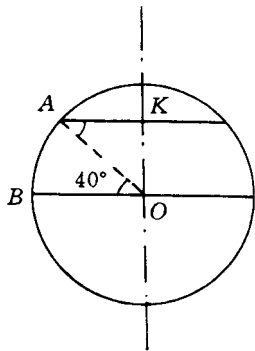


图 11

课堂教学设计说明

本教案体现由浅入深、循序渐进的教学原则,充分体现了启发式、和类比思想的教学方法,培养学生独立思考、发现问题和解决问题的能力。



《锥体的体积》教学设计

教学目标

1. 使学生掌握锥体的体积公式及其推导线索,并能初步掌握其应用;

2. 通过三棱锥体积公式的探求,提高学生分析、综合、抽象概括等逻辑推理能力,培养学生类比、归纳、猜想等合情推理方法及勇于探索的精神。

[点评 我们知道,数学教学的目标包括三方面的内容:(1)双基内容及要求的确定;(2)数学能力的培养;(3)思想教育内容的把握。这三方面又体现了数学教育的两个功能:技术教育功能和文化教育功能。在数学教学目标中把培养优秀素质的人放在重要位置,是本教学设计的核心,也是对数学和数学教育有深刻认识的体现。]

教学重点

三棱锥体积公式的探求。

教学过程

一、复习

1. 祖暅原理 2. 柱体的体积公式及其探索思路 3. 锥体平行于底面的截面的性质。

[点评 复习的目的有多种,检查上节课教学落实情况,进行反



馈和矫正,进一步巩固学习过的知识和方法,使它们板块化,便于学生记忆、理解、提高和创新;为新课的学习做准备、做铺垫。从本节课的复习来看,目的是多方面的、综合性的,是讲究数学课堂教学效益的。]

二、新授

1. 等底面积等高的两个锥体的体积之间的关系

(1)提出问题:等底面积等高的两个柱体的体积是相等的,那么等底面积等高的两个锥体的体积之间有何关系?

(学生易回答“相等”,教师可追问:你们怎么知道它们是相等的?学生易回答:是猜想的或估计的。)

(2)如何探索证实(用祖暅原理。(请一学生口述探索过程)要求说清两点:①把这两个锥体的底面放在同一个平面 α 上,由于它们的高相等,故它们的顶点必在与 α 平行的同一个平面 β 上,即两个锥体可夹在两个平行平面 α 、 β 之间;②用平行于 α 的任意平面去截这两个锥体,设截面面积分别为 S_1 、 S_2 ,则 S_1 与 S_2 相等(可用锥截面性质推出。)

由祖暅原理得 $V_1 = V_2$ 。

(3)请一学生完整地叙述上述结论。(板书)

定理 等底面积等高的两个锥体的体积相等。(请学生说出定理的条件、结论分别是什么。)

[点评:由学生提出问题、分析问题、解决问题,这是对学生最高层次的要求。当学生达不到这个层次时,可由老师提出问题、学生分析问题和解决问题这一层次向上一个层次过渡。老师提出问题后,给学生时间,让学生观察、比较、分析、归纳、猜想。著名数学教育家波利亚指出:“只要数学的学习过程稍能反映出数学发明过程的话,那么就应当让猜想、合情推理占有适当位置”。猜想后还要严格地证明,合情推理与逻辑推理并重,猜想与证明并重,这两者缺一不可,才是完



整地解决问题的全过程。传统教学中忽视猜想过程,只教结论,是不全面的;在教学过程中也出现另一种极端现象,学生只是满足用观察、实验和猜想去求得问题的解答,而不再做进一步的思考和研究,做出必要的检验、证明。*MM* 教育方式的教学原则之一是既教猜想,又教证明。这个原则是全面的、准确的、科学的。]

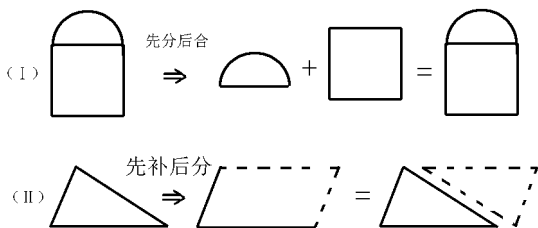
2. 三棱锥的体积

上述定理只是回答了具有等底面积等高的两个锥体体积之间的相等关系,但这个体积如何求出,能否像柱体那样有一个体积公式仍是一个谜。然而柱体体积公式的探索思路却给我们求锥体体积一个有益的启示:须找到一个“简单”的锥体作代表。如果这个代表的体积求出来了,那么由上述定理即可获得其他锥体的体积了。

(1) 请同学们思考,选怎样的“简单”锥体作代表呢? 三棱锥的底面边数最少,似乎最“简单”些,故选三棱锥作为代表来研究。若学生一时感到茫然,教师可作适当点拨。)

(2) 怎样研究三棱锥的体积呢?

可作如下启发:请学生回忆探求如下两个图形(见下页左栏上)面积的情境:



[点评:本节课最突出的是运用了合情推理的方法之一类比。由柱体体积公式的探索过程,类比到锥体体积公式的探索过程,当锥体体积公式的探索过程中遇到困难时,类比到平面图形面积公式的探索过程。开普勒说:“我珍视类比胜于任何别的东西,它是我最可信的



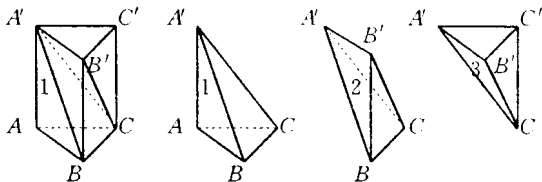
老师,它能揭示自然界的秘密,在几何中它应该是最不容忽视的”。著名数学家阿达玛说过,创造就是选择,所谓选择就是从众多对象中,选取满足自己要求的对象。所以在教学设计中,应把所有可能使用的方法都列出来让学生选择,这是合理的,这样才能培养学生思维的批判性和创造性。]

提出问题:

① 通过类比能否将上述思维方法迁移到求三棱锥的体积上来?(能)

② 是采用先分后合呢?还是先补后分呢?三棱锥的底面边数最少,再分已不合适(教师可引导学生试分,发现不合适),故否定充分后合,从而肯定先补后分。)

③ 补成怎样的几何体较合适呢?回忆前面学过的关于体积的一些结论,易想到补成三棱柱,再分成三个三棱锥,请学生说分法,教师连线。)



④ 你希望分成的三个三棱锥之间有何关系?由(Ⅱ)做类比、联想(Ⅱ)中分成的三角形等面积,那么当然希望分成的三个三棱锥等体积。)

⑤ 你能说明这三个三棱锥 1、2、3 等体积吗?寻找等体积的依据——1 中的定理。条件 (a) 等底面积 (b) 等高。)请学生观察、比较、总结。一名学生口述,教师板书。参考课本 P. 101。

在三棱锥 1、2 中, $S_{\triangle ABA'} = S_{\triangle B'A'B}$ 高也相等(同顶点 C);

在三棱锥 2、3 中, $S_{\triangle BCB'} = S_{\triangle C'B'C}$ 高也相等(同顶点 A');

(也可考虑在三棱锥 1、3 中, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'}$ 高也相等(都等于



三棱柱的高)。

故 $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{1}{3} V_{\text{三棱柱}}$, 而 $V_{\text{三棱柱}} = Sh$, 所以 $V_{\text{三棱锥}} = \frac{1}{3} Sh$ 。

[点评: 学生有潜在的发现能力, 让学生通过自己的发现学习数学, 这是当前数学教育的共识。要达到这一目的, 更要发挥教师的主导作用。在这一段中, 教师的设问适时、确切、有启发性, 一环套一环, 步步紧逼解决问题的核心。我和特级教师杨之都听了这节课, 在这一连串的设问下, 学生确实回答得非常正确, 抓住顶点和底面是判断 V_1 、 V_2 、 V_3 相等的关键, 学生中判断 $V_1 = V_2$ 、 $V_2 = V_3$ 和判断 $V_1 = V_3$ 、 $V_1 = V_2$ 两种情况的都有。]

3. 锥体的体积及其推论

(1) 三棱锥的体积问题已经解决了, 那么一般锥体的体积如何呢?

(学生容易回答 $V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} Sh$ 。)

(2) 请学生做出解释(设一般锥体的底面积为 S , 高为 h 。)

(构造一个三棱锥, 使其底面积为 S , 高为 h , 由等底面积等高的锥体的体积相等, 得 $V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} Sh$ 。)

(3) 对于圆锥有何别的表达式? $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ 指出 r 、 h 的意义。)

[点评: 让学生做出解释的做法很好, 这是学好数学的一个新的观点。要求学生解释, 而不只是证明, 这是让学生从整体上把握数学, 比那种只让学生机械地证明要好。此外, 培养学生语言表达能力, 即数学交流能力也是重要的, 它是培养学生数学素养的一个方面。]

三、巩固练习

由课本 P. 103 练习 1 改编。

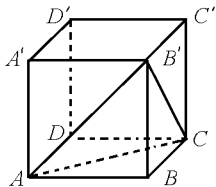


在正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, 棱长为 a 。求

(1) 三棱锥 $B' - ABC$ 的体积;

(2) 这个三棱锥的体积是正方体体积的几分之几?

(3) B 到平面 $AB'C$ 的距离。(若没时间, 可留作课后思考, 要求用两种方法求解)。



[点评: 能够灵活运用“双基”也是数学教学大纲中提出的“能力”之一。问题(3)就是向这个方面努力的, 它也为用体积法解距离问题打下了基础。]

四、小结。

(请学生自行小结, 师生共同补充完善。)

1. 知识方面: 通过本节课学习, 我们利用割补法获得了三棱锥的体积公式, 进而获得了一般锥体的体积公式, 并初步体会了它的应用;

2. 思维能力方面: 又一次体会到联想、类比、猜测、证明等合情推理及逻辑推理的方法在探索新知识方面的重要作用。

五、作业

(略)

[点评: 不仅做知识方面的总结, 也要做能力和数学文化方面的总结, 全面达到教学目标。]



《棱锥、圆锥的体积》教学设计

教学目标

1. 使学生掌握棱锥、圆锥的体积公式及初步运用进行锥体体积运算；
2. 使学生进一步树立联系转化的数学思想，进一步提高逻辑推理和图形变换的能力；
3. 通过本节课教学使学生思维品质（如思维的深刻性、灵活性）受到锻炼。

教学重点和难点

棱锥、圆锥体积公式推导为重点，以联系转化为主线推导棱锥、圆锥体积公式的过程为难点。

教学设计过程

师：今天我们研究的课题是棱锥、圆锥的体积。

已知：锥体的底面积为 S ，高为 h 。

求： $V_{\text{锥体}} = ?$

（板书课题）

这些锥体可以是三棱锥、四棱锥、五棱锥……还可以是圆锥。

（教师一边说一边出示小黑板——图1）

师：对于这个课题我们要解决二个问题：

1. 底面积是 S ，高是 h 的锥体体积公式是什么？

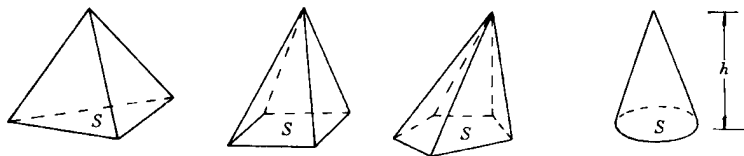


图 1

2. 如何推导这个公式?

怎么推导锥体体积公式呢?

(学生思考片刻后,教师继续引导)

师:能不能用体积单位去量?

(引导学生从几何体体积度量方法入手考虑问题)

生(摇头示意不成)

师:还有什么方法?

生:能不能利用祖暅原理?

师:是一种方案,如果想用祖暅原理就需要用我们已经知道了体积公式的几何体来比,用哪种几何体呢?

生:柱体。

师:这些柱体可以是三棱柱、四棱柱、五棱柱……,还可以是圆柱。(出示第二块小黑板——图2)

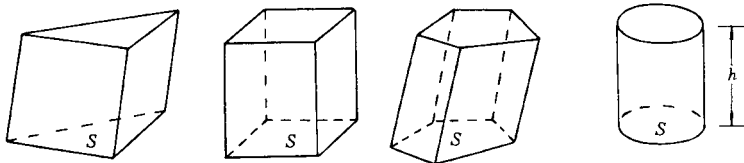


图 2

师:为了用祖暅原理,我们选这些柱体底面积为 S , 高为 h , 于是这两类几何体都可以夹在两个平行平面间, 满足祖暅原理第一条, 然后用平行于这两个平行平面的平面去截这些几何体, 分别得到截面, 这时锥体的截面积与柱体的截面积相等吗?



生: 不相等。

师: 为什么?

生: 柱体的截面与柱体底面全等, 所以柱体的截面积为 S , 而锥体的截面与柱体的底面相似, 所以锥体截面面积不等于 S 。

师: 说得很好, 这说明没有满足祖暅原理的第二个条件, 因此利用祖暅原理也不可能了, 怎么办?

(学生感到困惑, 教师引导鼓励学生思考)

师: 我们不妨调整一下思路, 刚才只说了这些锥体的截面面积不等于 S , 这些截面之间又有什么关系?

生: 这些锥体截面面积相等。

师: 能证明吗?

(学生口述, 教师板书)

生: 设锥体顶点到截面的距离为 h_1 , 截面面积 S' , 因为 $\frac{S'}{S} = \frac{h_1^2}{h^2}$, 又因为这些锥体的底面积、高、顶点到截面距离分别相等。所以这些锥体的截面面积相等。

师: 由我们得到的这些锥体的条件, 可以得出什么结论?

生: 这些锥体体积相等。

师: 根据什么得出这个结论?

生: 根据祖暅原理。

师: 谁能概括一下我们得到这个命题。

生: 夹在两个平行平面间, 底面积相等的锥体体积相等。

师: 很好, 但可以再简练些。能夹在两个平行平面间说明这些几何体高相等, 最后概括为(板书)

定理 1 等底面积等高的两个锥体体积相等。

师: 虽然祖暅原理不能帮我们直接得到锥体体积公式, 但它帮我们得到了一个很好的定理。根据这个定理, 我们的研究对象还用这么多吗?



生:不用。研究锥体中的一个就可以了。

师:研究哪一个比较好呢?

(学生议论纷纷,说法不一)

生:有的同学说三棱锥,有的同学说圆锥。我们选择的标准应该是简单、方便研究的几何体,圆锥涉及曲面问题,研究比较复杂,所以选棱锥中最简单的三棱锥做研究对象。

(取下小黑板,微机显示一个三棱锥图形——图3)

师:现在锥体体积公式的推导归结为三棱锥体积公式的推导。

研究三棱锥体积,还得与柱体体积有联系,选三棱柱。

(微机显示——图4)

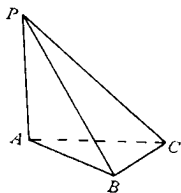


图 3

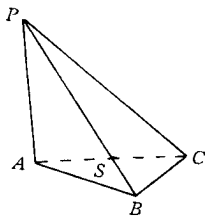
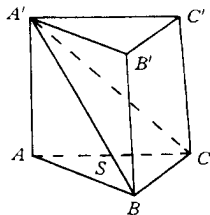


图 4



(完成第一次转化,使研究系统简化)

师:对于底面积 S ,高为 h 的三棱柱 $ABC - A'B'C'$,三棱锥 $P - ABC$,它们的体积会有什么关系?

(学生考虑,教师引导)

二个几何体的体积哪一个大?

(学生活跃起来,抢着说出答案)

生:三棱柱体积大。

师:能从数学角度论证一下吗?

(学生沉默片刻,部分同学举手)

生:在三棱柱中,连结 $A'B$, $A'C$ 。

(微机显示——图5)



三棱锥 $A' - ABC$,底面 $\triangle ABC$,面积为 $A'S$,高为 h ,根据定理 1 ,它的体积与三棱锥 $P - ABC$ 体积相等 ,说明三棱锥 $P - ABC$ 体积是三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 体积一部分 ,所以三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 体积比三棱锥 $P - ABC$ 体积大。

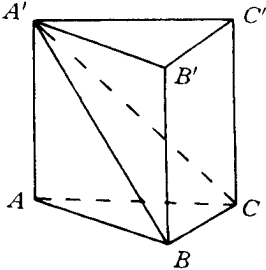


图 5

师 :论证得很好 ,那么三棱柱体积比三棱锥体积大多少呢 ?

(学生很感兴趣 ,议论纷纷 ,互相争论)

生 :三棱柱体积大约是三棱锥体积 3 倍左右。

师 :能说说理由吗 ?

(学生思考片刻回答)

生 :在三棱柱中 ,连结 $B'C$,三棱锥 $C - A'B'C'$ 底面 $\triangle A'B'C$ 面积为 S ,高为 h ,它的体积与三棱锥 $A' - ABC$ 体积相等。

师 :这说明三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 体积为三棱锥 $P - ABC$ 体积 2 倍。

这时三棱柱被分割成了三部分 ,其中三棱锥 $A' - ABC$ 与三棱锥 $C - A'B'C'$ 体积相等。

(微机显示 — 图 6 , $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 红色画面闪动 ,点 A' , C' 白色亮点闪动)

现在关键是三棱柱被分割为三部后中间部分图形体积 ,这是个什么图形 ?

(教师指示图 (2))

生 :也是三棱锥。

师 :这个三棱锥以哪个点为顶点 ,哪个面为底面 ?

生 : A' 为顶点 , $\triangle B'BC$ 为底面 ,也可以看成 B' 为顶点 , $\triangle A'BC$ 为底面 ,或者看成 C 为顶点 , $\triangle A'B'B$ 为底面。

师 :那么这个三棱锥体积是多少呢 ?

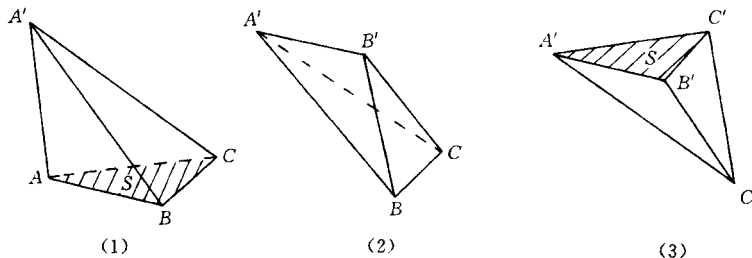


图 6

(学生议论纷纷,思维活跃)

我们希望……

生:相等。

师:是的,我们希望这个三棱锥体积与另外二个三棱锥体积相等,那么,它们体积相等吗?

(学生积极思考,教师适当提示)

师:想证两个三棱锥体积相等,需要哪些条件?

生:等底面积,等高。

师:能找到这二个条件吗?

(学生观察,思考)

师:不能只看局部,要注意局部与整体相结合。

(微机显示——图7)

生:三棱锥 $A - A'BC$ 与三棱锥 $B' - A'BC$ 底面积相等。

师:这时高如何?

(学生感到有困难)

师:这时想证两个三棱锥高相等有困难,能不能换个角度。

生:先找高相等, A' 为顶点,三棱锥 $A' - B'BC$ 与三棱锥 $A' - B'C'C$ 有共同的高,而在三

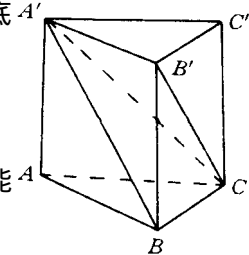


图 7



棱柱 $ABC - A'B'C'$ 中, 四边形 $B'C'CB$ 为平行四边形, $B'C$ 将 $\square B'C'CB$ 分成面积相等的二个三角形, 所以 $\triangle B'BC$ 与 $\triangle B'C'C$ 面积相等。

(微机显示 — 前图 6 $\triangle B'BC$ $\triangle B'C'C$ 绿色画面闪动, A' 白色亮点闪动)

由定理 1, 可知三棱锥 $A' - B'BC$ 与三棱锥 $A' - B'C'C$ 体积相等。

师 很好, 由此可知三棱柱分割成的三个三棱锥体积相等, 也就是说三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 体积为三棱锥 $P' - ABC$ 体积 3 倍。

由于三棱柱的底面积为 S , 高为 h , 三棱锥底面积也为 S , 高为 h 。

因为 $V_{\text{三棱柱}} = S \cdot h$, 所以 $V_{\text{三棱锥}} = \frac{1}{3} S \cdot h$ (板书)

定理 $2 V_{\text{三棱锥}} = \frac{1}{3} \times \text{底面积} \times \text{高}$ 。(板书)

再由定理 1 可得

定理 3 $V = \text{棱锥} \frac{1}{3} \times \text{底面积} \times \text{高}$ 。(板书)

师 我们已经推导得到了锥体的体积公式下面我们做一下小结:
(显示投影软片)

1. 公式特征与功能:

(1) 从推导过程记忆“ $\frac{1}{3}$ ”;

(2) 公式中有三个量——方程思想。

2. 推证思路、联系、转化

推导公式的过程是以联系, 转化为主线, 这是一种通用的数学思想。

3. 转化特点

(1) 由研究所有锥体体积公式的推导转化为三棱锥体积公式的推导, 使研究简化, 这是通过逻辑推理实现的。

(2) 三棱锥体积公式的导出, 又是利用三棱柱与三棱锥二种图



形间内在联系(三棱锥可以补成三棱柱,三棱柱可以分割成三棱锥)进行转化的。

下面我们利用已经导出的锥体体积公式进行体积计算。

(显示投影软片)

练习:

1. 已知:等边圆锥 $S-O$, 底面半径 r 。

求: $V_{\text{圆锥}} = ?$

(学生口述)

生:因为是等边圆锥,所以轴截面为等边三角形,又因为圆锥底面半径为 r ,所以可得圆锥底面面积为 $r^2\pi$,圆锥的高为 $\sqrt{3}r$,圆锥体积为

$$\frac{1}{3} \times r^2\pi \times \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3.$$

师:正确,做这道题时要注意分析题中条件,正确使用体积公式,另外,圆锥的体积公式也可以表示

为 $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ 。(板书)

2. 如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 设棱长为 a , 若 E, F, G 分别为棱 AB, BC, BB_1 中点。

求(1)三棱锥 $B-EFG$ 体积;

(2)三棱锥 $B-EFB_1$ 体积。

(学生口述,教师板书)

解(1)解法一:

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中。

因为 E, F, G 分别 AB, BC, BB_1 中点,

所以 $EF = FG = GE, BE = BG = BF$ 。

所以 在三棱锥 $B-EFG$ 中, 顶点 B 在底面射影为底面正 $\triangle EFG$ 的中心 O 。

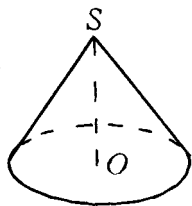


图 8



所以 BO 为三棱锥 $B - EFG$ 的高。

(此时学生中有人议论 教师不中断回答问题学生的思路)

连结 GO 延长交于 EF 于 P , 因为正方体棱长为 a ,

所以 $EF = FG = GE = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $BE = BG = BF = \frac{a}{2}$ 。

因此 $GP = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$,

$$GO = \frac{2}{3}GP = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a。$$

所以 $BO = \sqrt{BG^2 - GO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{12}}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a。$

又 因为 $S_{\triangle EFG} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$,

所以 $V_{B-EFG} = \frac{1}{3}S_{\triangle EFG} \cdot BO = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{1}{48}a^3。$

师:方法是对的,运算也很准确,公式使用正确,但是刚才有些同学在议论,你们有什么看法吗?

生:这道题这样做运算太麻烦,如果把这个三棱锥看成以 G 为顶点, $\triangle BEF$ 为底面运算会很简单。

解法二:

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,因为 E, F, G 分别为 AB, BC, BB_1 中点,又因为正方体棱长为 a ,所以 $BE = BG = BF = \frac{a}{2}$, $\triangle BEF$ 为 $\text{Rt}\triangle BEF$ 。

所以 $S_{\text{Rt}\triangle BEF} = \frac{1}{2}BE \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}。$

在正方体中, $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

所以在三棱锥 $G - BEF$ 中, GB 为高,故 $V_{B-EFG} = V_{G-BEF} =$



$$\frac{1}{3} S_{\triangle BEF} \cdot BG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}.$$

师:两种解法都正确,但第二种解法显然运算更简捷,这说明在计算三棱锥体积时,适当选择它的顶点和底面,会使运算简捷、合理、正确。

(2)解 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,因为 E, F 分别为 AB, BC 中点.又因为正方体棱长为 a ,所以 $BE = BF = \frac{a}{2}$,

$\triangle BEF$ 为 $\text{Rt}\triangle BEF$.

因此 $S_{\text{Rt}\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}$. 又因为 $B_1B \perp$ 平面 $ABCD$,

所以在三棱锥 $B_1 - BEF$ 中, BB_1 为高 A_1 且 $BB_1 = a$,

故 $V_{B_1 - BEF} = V_{B - EFB_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle BEF} \cdot$

$$BB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot a = \frac{a^3}{24}.$$

师:利用棱锥体积公式进行体积计算时,首先要正确使用公式,其次要注意运算途径的简捷、合理.在今后的学习中我们还要进一步加强对锥体体积公式的灵活运用。

作业 课本 P.103 习题十三 1 3 A.

课堂教学设计说明

这节课是锥体体积教学的第一节课,教学重点是锥体体积公式

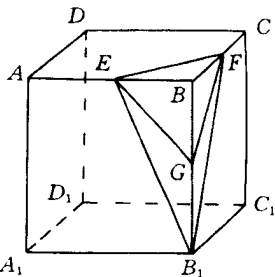


图 9

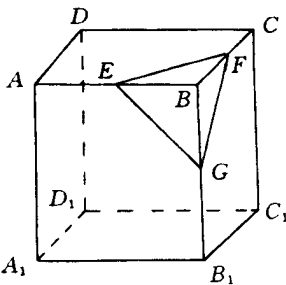


图 10



的推导,在锥体体积公式推导过程中,学生在教师启发下,进行一定量的思维活动,力争体现教师的主导作用和学生的主体地位。

在公式推导过程中,教师的每一次提问,都应该促使学生积极思考,学生的每一次思考不一定都有正确答案,但这个思考过程是非常重要的,学生在思考过程中可以猜想,可以估算,甚至可以大胆猜想,并设法论证自己的猜想。正是由于学生的参与,学生的思维品质得到了锻炼和提高,而老师的作用是创设思维情景,促进学生思维活动。

锥体体积公式推导的过程教学,也是向学生渗透联系、转化等数学思想的机会,这节课体现了两次重要的转化,一次是利用祖暅原理将锥体体积公式的推导转化为三棱锥体积公式的推导,简化了研究系统;一次是利用割补变换建立了三棱锥与三棱柱之间的体积关系,第一次转化是通过逻辑推理实现的,第二次转化是通过图形变换实现的,这也是这里区别于其他地方转化的特点。

本节课突出公式形成的过程,是为了使学生在参与公式的推导过程中能在数学内容、数学方法和思维教育等方面吸收更多的营养。

本节课尝试使用计算机辅助教学,在体现三棱锥与三棱柱两种几何体之间的体积关系时使用,使三棱锥与三棱柱之间割补变换显得直观、有动感,弥补在黑板上画图动感差,费时间的不足,也有利于学生对两种几何体之间关系的深刻认识,起到了良好的辅助作用,在教学中使用现代化教学手段是很有必要的,但应注意适时、适量。



《直线方程的一般形式》教学设计

教学目标

1. 使学生经历一般式的发现过程,并掌握直线方程的一般形式,以及点斜式、斜截式、两点式、截距式和一般式的联系与转化。
2. 向学生渗透用分类讨论的数学思想解决问题。
3. 培养学生观察、归纳、猜想等合情推理的能力。

教学重点与难点

理解寻求直线方程的一般形式是重点,分类、讨论是难点。

教学过程

师:我们已研究过直线方程的4种形状,请叙述这4种直线方程,并各举一例,而且请指明它们的条件及应用范围。

(学生回答,教师打出投影片。见表一)

师:在平面内任意给定一条直线一定可以用以上4种形式之一来表示吗?

(提出问题,再次突出4种直线方程的不足。)

生:不一定。

(引起学生的反思:研究了4种直线方程但并不能表示平面内任一条直线,是不是...。从而呼唤有一种直线方程能表示平面内的任一条直线。)



附表一

方程名称	已知条件	举例	应用范围
点斜式			
斜截式			
两点式			
截距式			

师:是否有另一种直线方程能表示平面内任何一条直线?如果这样的直线方程存在,我们可以把它叫做……。

(由学生取名,引出课题:直线方程的一般形式(?)板书课题。课后画个问号表明:它是否存在还需等待探求的结果来最后验证。)

师:根据我们已学过的直线方程的有关知识,结合所举的例子,请同学们通过观察、分析、猜测直线方程的一般形式。

(若学生基础较差,教师可引导学生观察所举各例中都含有几个未知数,各是几次?学生容易发现含两个未知数,均是一次。因此直线方程是含两个未知数的一次方程,即二元一次方程。同时可以让学生对几种特殊形式化简整理成一边等于零的方程形式。)

最后学生可以猜测出是一个二元一次方程。数学形式可以表示成 $Ax + By + C = 0$, 其中 A 、 B 、 C 是常数。

(马上提出一个问题, $Ax + By + C = 0$ 总表示直线吗?引导学生对字母 A 、 B 、 C 去讨论,从而也明确 A 、 B 的限定条件。)

师: $Ax + By + C = 0$ 总表示直线吗?若是,它又表示怎样的直线,我们该怎么去研究?

生:根据 A 、 B 、 C 不同的取值来讨论。

师:分类讨论都要有个分类的标准,此处以什么为标准来分类好呢?

(学生讨论鉴别,最后总结。)

生:根据直线斜率存在不存在两种情况来看,可以以 B 等不等



于零来分类。

师 好,请你做一做。

生 1)若 $B \neq 0$, 方程 $Ax + By + C = 0$ 可以移项, 然后两边同除以 B 得 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, 它就是直线方程的斜截式, 表示斜率为 $-\frac{A}{B}$ 的直线。

2)当 $B = 0$ 时, 方程 $Ax + By + C = 0$ 变为 $Ax + C = 0$ 。

① 若 $A \neq 0$, 则方程变为 $x = \frac{\pi}{3} - \frac{C}{A}$ 表示斜率不存在的直线。

② 若 $A = 0$, 而此时就得看 C 了。

i) 若 $C \neq 0$, 方程即为 $0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$, 矛盾方程, 没有图象。

ii) 若 $C = 0$, 方程即为 $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$,

师(追问)此时 $Ax + By + C = 0$ 它表示什么图形?

(升华, 把学生的思维积极性调动起来, 并且使学生对问题的把握不停留在表面, 而是让学生积极挖掘一个看似简单知识的深刻内涵。)

生 1 :..... 没想好。

生 2 $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$ 对任意的 $x, y \in R$ 都是成立的, 因此它可表示平面内的任一点, 也就是说这个方程此时可表示整个坐标平面。

师 解释得非常好。

(以上的讨论过程可视学生的情况具体操作。)

师 从上面的讨论过程看, $Ax + By + C = 0$ 到底何时表示直线呢?

(观察, 总结。)

1) $B \neq 0$, $A \neq 0$ 2) $B \neq 0$, $A = 0$ 3) $A \neq 0$, $B = 0$ 这 3 种情形下都表示直线。



即 A 或 $B \neq 0$, 即 A, B 中至少一个不为零。

结论: 当 A, B 不全为零时, $Ax + By + C = 0$ 表示直线。并且它可以表示平面内的任一条直线。

师: 是否可以说直线方程的一般形式是 $Ax + By + C = 0$, 其中 A, B 不全为零。它可以表示平面内的任一条直线?

生们: 还需证明。

师生共同分析要证哪些方面:

(1) 平面直角坐标系内, 任何直线的方程都可表示成 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 的形式。

(2) 方程 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 可表示平面直角坐标系内的任意一条直线。

(证明过程可视学生的具体情况而适当给予分析引导, 或可让学生课下自行证明。)

生: 证明: 1) 平面内的所有直线都可分为两类: ① 倾斜角 $\alpha \neq 90^\circ$, 直线的斜率 k 存在, 故直线可表示为 $y = kx + b$, 即 $kx - y + b = 0$ 的形式; ② 倾斜角 $\alpha = 90^\circ$, 直线的斜率 k 不存在, 直线可表示为 $x = a$, 即 $x - a = 0$ 。

由 ①② 可知, 平面直角坐标系中的任一直线的方程都可表示成 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 的形式。故 (1) 得证。

(2) 已知方程 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零), 由以上的分析讨论可知:

1) 当 $B \neq 0$ 时, 方程可化为 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, 这是直线的斜截式, 它表示平面直角坐标系内斜率存在的任意直线。

2) 当 $B = 0$ 时, 由于 A, B 不同时为零, 所以 $A \neq 0$ 。此时 $Ax + By + C = 0$ 可化为 $x = -\frac{C}{A}$, 它表示平面内斜率不存在的任意直线。

由 1) 2) 可知, 方程 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 可表示平



面直角坐标系内的任意一条直线。

师 经过同学们的共同探索,我们得到结论:直线方程的一般形式存在(去掉前面画的问号),且是 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 这样的二元一次方程。

师 从上面的讨论、证明过程我们可以看到直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式与直线方程的一般式是相互联系的。直线方程的各种特殊形式都可化为一般式,而直线方程的一般式也可以化为某种特殊形式。

例 1 已知直线经过点 $A(-4, -6)$, 斜率为 $\frac{3}{4}$, 求直线的点斜式、一般式、截距式。

解 经过点 $A(-4, -6)$ 并且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线的点斜式是:

$$y + 6 = \frac{3}{4}(x + 4),$$

化成一般式,得 $3x - 4y - 12 = 0$,

化成截距式得 $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-3} = 1$ 。

例 2 把直线 l 的方程 $x - 2y + 6 = 0$ 化成斜截式,求出直线 l 的斜率和在 x 轴与 y 轴上的截距,并画图。

解 直线 $l: x - 2y + 6 = 0$ 化成斜截式得

$$y = \frac{1}{2}x + 3, \text{ 所以直线 } l$$

的斜率 $k = \frac{1}{2}$, l 在 y 轴上的截距 $b = 3$, 在 x 轴上的截距 $a = -6$ 。如图 1-23。

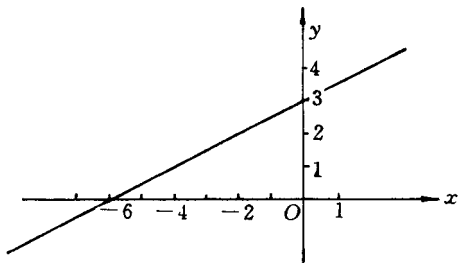


图 1-23

(以上两个例题可由学



生自己完成,教师打出投影片,并提醒学生注意。)

(1)要求直线的斜率和纵截距,应化成斜截式;要求直线的横截距和纵截距,应化成截距式或用分别令 $x = 0$ 和 $y = 0$ 的方法来求。

(2)在画一条直线时,通常是用直线与两个坐标轴的交点,这样较为方便。

例3 直线方程 $Ax + By + C = 0$ 的系数 A, B, C 满足什么关系时,这条直线 (1)与坐标轴都相交 (2)只与 x 轴相交 (3)是 x 轴; (4)是一、三象限角平分线。

(此例目的是加强学生对字母系数的各种可能情形的认识及培养学生数形结合解决问题的能力。)

解 (1) $A \neq 0, B \neq 0$ 时,与坐标轴都相交(画草图)。

(2) $B = 0, A \neq 0$ 时,只与 x 轴相交(画草图)。

(3)当 $B \neq 0, A = C = 0$ 时,是 x 轴。

(4)当 $A = -B, C = 0$ 时,是一、三象限角分线。

例4 把直线 l 的方程 $mx + 2y - 4 = 0$ 化成点斜式,求出直线 l 的斜率,并指出对任意 m 值,直线 l 的共同特征。

分析 把 $mx + 2y - 4 = 0$ 化成点斜式可以有很多种形式,但要指出 l 的特征,无论 m 取何值, l 都有不受影响的特点,因此可以想到把 mx 称到等式的右边得 $2y - 4 = -mx$ $2(y - 2) = -mx$, 所以 $y - 2 = -\frac{m}{2}x$, 由此可观察到无论 m 怎么变化,当 $x = 0$ 时, $y = 2$ 。

解 原方程 $mx + 2y - 4 = 0$,

移项得 $2y - 4 = -mx$,

两边同除以 2 得 $y - 2 = -\frac{m}{2}x$,

故直线 l 的斜率为 $-\frac{m}{2}$, 斜率随着 m 的变化而变化,但直线 l 总过定点 $(0, 2)$ 。

师:以后如何处理直线系过定点的问题,请同学们回去思考。



小结(师生共同谈收获)

(1)探求了直线方程的一般形式 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零)

(2)更熟悉了分类讨论思想。

(3)(生)教会我看问题更深入,更全面,平凡中孕育着神奇。如 $Ax + By + C = 0$ 讨论到 $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$ 时,可表示整个坐标平面。

作业:

1. 直线方程 $Ax + By + C = 0$ 的系数 A, B, C 满足什么关系时,这条直线(1)只与 y 轴相交(2)是 y 轴(3)是二、四象限的角平分线(4)过一、三、四象限。

2. 求下列直线的斜率和在 y 轴上的截距,并画出图形。

(1) $3x + 2y - 5 = 0$ [$k = -\frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}$]

(2) $x + 2y = 0$ [$k = -\frac{1}{2}, b = 0$]

(3) $3y + 6 = 0$ [$k = 0, b = -2$]

(4) $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1$ [$k = \frac{4}{5}, b = -4$]

3. 求下列直线的横、纵截距,并画出图形。

(1) $x + y - 1 = 0$ [$a = 1, b = 1$]

(2) $2x - 3y + 6 = 0$ [$a = -3, b = 2$]

(3) $3x + 4y + 5 = 0$ [$a = -\frac{5}{3}, b = -\frac{5}{4}$]

(4) $x - 2y - 3 = 0$ [$a = 3, b = -\frac{3}{2}$]

4. 将直线方程 $mx - y + 3m + 2 = 0$ 化成点斜式,求该直线的斜率,并指出直线对任意 m 值,都经过哪个定点?

[点斜式 $y - 2 = m(x + 3), k = m$, 定点 $(-3, 2)$]



设计说明

这个教案实际可分为以下几大块：

- (1) 提出问题, 激发疑问, 呼唤直线方程一般形式的出现。
- (2) 猜测一般式的结构。
- (3) 讨论、完善。
- (4) 证明。
- (5) 应用。

为什么这么设计呢? 是基于：

(1) 直线方程的一般式是在学生学习了直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式后的第 5 种形式。前 4 种形式都有其各自的优点, 那么为什么还要学习一般式呢? 实际上直线方程的一般式有其他 4 种形式无法实现的一个优点, 它能表示平面内的任意一条直线。针对这个特点就想到先让学生寻找 4 种形式的不完备之处, 那就是它们都有一定的应用范围, 进而提出问题: 平面内任意给定一条直线一定可以用以上 4 种形式之一来表示吗? 再一次突出了 4 种直线方程的不完备之处, 从而引起学生的疑惑与反思。由此引起学生的联想: 是否有另一种直线方程能够表示平面内的任何一条直线? 从而激发起学生学习研究的兴趣。这就是通过引导学生发现现有知识的不完备, 使学生产生不完备的地方能否给予改进、提高的想法, 从而使学生发现探求新知识的必要。这样新知识的出现就不是老师“塞”给学生的“今天我们学习……”。而是知识研究的必然。它的出现就像清泉般慢慢地却极自然地流进学生的心田。

(2) 知识出现的台阶已铺垫好了, “唱戏”的主角应该还是学生。根据学生已学知识, 引导学生去观察、归纳, 让他们猜想直线方程一般式的结构。为什么不是老师抛给学生呢? 首先数学学习本质上就是一种思维活动。如果所学知识是在老师今天抛, 明天塞的, 必将使学生的思维产生一种惰性, 不利于学生思维素质的提高。其次现在倡导



创新能力,要创新首先应是思维上的创新、发现。这种创新能力在学生的学习过程中就应致力于培养。据报道,在中国孩子放学回家后,家长常问:今天学了什么知识。而在美国,家长常问:今天你在学校问了些什么问题。从这里就反映出中、美两国家庭教育的侧重点不一样。中国的家长观念陈旧,关心的只是老师讲的孩子是否都学会了;而美国的家长更侧重于孩子的思维创造、发现能力。由此看来,要想促进家庭教育观念的转变,首先我们教师自身就先要转变。我们平时的教学过程、教学设计就应为学生营造积极思维活动空间,创设有利于学生思维去创造、发现的问题情境,以此来逐步培养学生思维的创新能力。

(3)在学生猜想得出直线方程的一般式是 $Ax + By + C = 0$ (A 、 B 、 C 是常数)后,这个由特殊推导到一般的结论是否有一定的合理性?这个方程是否一定表示直线?这些可以引导学生去验证。通过对字母 A 、 B 、 C 的各种可能情形的讨论,不仅由一般再返回到特殊,巩固了旧知识,而且也更深层次地认识到 $Ax + By + C = 0$ 和直线的对应关系。如讨论到 $A = B = 0, C \neq 0$ 时,方程 $Ax + By + C = 0$ 不成立,显然不能表示任何图形,这使学生初步认识到 A 、 B 不能同时为零。讨论再往前进一步:当 $A = B = C = 0$ 时,追问学生方程 $Ax + By + C = 0$ 表示什么?让学生的思维动起来: x 、 y 取任意实数,方程 $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$ 总成立,因此它表示整个平面。讨论到此就使学生对 $Ax + By + C = 0$ 的各种情形有了一个全面、深刻地认识,并且再次发现 A 、 B 不能同时为零。讨论完毕,学生也得到了直线方程一般式 $Ax + By + C = 0$ 应附加的条件: A 、 B 不同时为零。这不也是学生自己发现的吗?

(4)数学是一门实验性的归纳科学,同时它也是一门系统的演绎科学。因此教学过程中应注重既教猜想又教证明,这样才能培养学生既有发现、创新能力,又有检验、辨别能力。在学生猜想、验证了直线方程的一般形式是 $Ax + By + C = 0$ (A 、 B 不全为零)后,还要学生



给出严格的证明。如果学生程度比较好可以让他们自己分析,如果学生程度较差可以在教师的引导下分析要证明什么,怎么去证。实际上学生总结出的结论就对应着两个方面。其一:直线方程的一般形式是 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 就对应要证平面直角坐标系中任一直线的方程都可表示成 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 的形式。其二: $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 可表示平面内的任何一条直线,就对应要证二元一次方程 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 的图象是一条直线。证明过程中再次用到分类讨论思想。不仅再次强调了出现斜率就应讨论存在、不存在两种情形,同时也反映了数学证明的严谨,来不得半点纰漏。这样也加深了学生对分类讨论的数学思想的认识。

(5) 应用这一部分主要是想培养学生对直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式和一般式的联系与转化的认识。明确怎么转化,往哪儿转化。并使学生明确,虽然 $Ax + By + C = 0$ 中有 A, B, C 3 个字母,但并不是需要 3 个条件才能确定这条直线,而是通过变形: $A \neq 0$, $Ax + By + C = 0$ 变形为 $x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0$; $A = 0$ 时, $Ax + By + C = 0$ 方程变为 $By + C = 0$, 即 $y = -\frac{C}{B}$ 。从而发现确定直线方程的一般式仍然只需要两个条件。

总之,教师在教学设计中,要刻苦钻研教材,分析学生的认识结构,寻找教材知识与学生认知的最佳结合途径。积极创设有利于学生思维活动的问题情境。教学设计中应以学生为主体去设计。一切活动应围绕有利于学生的思维发展而进行。提倡学生大胆创新、发现,首先我们教师在教学设计和教学中就应大胆创新、发现,不要沉囿于传统的教材体系、教育模式。只有大胆创新才能推陈出新;才能真正做到教材为我所用,为我所写;才能有利于教学中培养学生的创新能力。



《两条直线所成的角》教学设计

教学目标

1. 使学生理解两条直线夹角的概念,掌握夹角公式的推导及运用。
2. 通过夹角公式推导过程的教学,培养学生周密分析、严格论证的能力。
3. 使学生进一步体会研究解析几何的基本思想和解决解析几何问题的方法。

教学重点与难点

夹角公式的推导及解析法的运用。

教学过程

一、复习提问

师:请同学们回忆一下,平面内不重合的两条直线的位置关系有几种?分别是什么?

生:两条直线的位置关系有平行和相交两种。

(学生有可能答平行和垂直两种位置关系,教师应注意纠正。)

师:相交这种位置关系中有一种非常特殊的情况,即两条直线垂直,在解析几何中是利用什么来判定两条直线垂直的呢?



生 利用两条直线的方程。

师 对 直线方程是直线这一平面图形的代数化,通过对直线方程的性质的研究就可以得到相应的图形——直线的性质,那么两条直线 l_1 和 l_2 的方程有什么性质,两条直线便垂直了?

生 如果两条直线的斜率都存在,而且斜率互为负倒数,两条直线互相垂直。反之,若两条直线互相垂直,斜率互为负倒数。

师 如果两条直线斜率都不存在呢?

生 因为这两条直线都垂直于 x 轴,所以根本不可能互相垂直。

师 如果一条直线 l_1 的斜率存在,而另一条直线 l_2 斜率不存在呢?

生 关键是看 l_1 的斜率 k_1 是不是等于零,如果 $k_1 = 0$,那么 l_1 垂直于 l_2 ,如果 $k_1 \neq 0$, l_1 与 l_2 肯定不垂直。

(如果学生答不出来,可以画出 l_2 帮助思考。)

师 好,通过以上这些问题,综合起来才是完整的,同学们在考虑直线的问题时,一定要注意直线的斜率是否存在。另外,直线间的位置关系与直线的斜率密切相关,斜率又由倾斜角来确定,所以研究直线的位置关系就离不开倾斜角这一几何图形的帮助。这一点同学们在推导两条直线平行垂直的判定方法时就应该注意到了。

然而两条直线相交更一般的情况是不垂直,那用什么来刻画两条直线的相对位置呢?

(用两支铅笔演示两条直线相交成角变化,学生一般能回答出来用角来刻画。)

二、讲授新课

师 请同学们看,两条直线相交,一共构成几个角?它们之间有什么关系?

生 一共构成 4 个角,它们是两对对顶角。



师:如果这4个角全相等,我们称这两条直线垂直。如果这4个角不全相等,为统一也为研究方便,我们研究哪对对顶角更好呢?

生:愿意研究锐角。

师:我们给出定义。

(板书)

1. 两条直线所成的角 两条直线相交,称不大于直角的角叫做两条直线所成的角,简称夹角。

师:由夹角定义,能否得到夹角 θ 的取值范围呢?

生: $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ (随着学生说,将结果写在定义后面。)

师:如果只研究两条直线斜交的位置关系,有两条直线的夹角就足够了,但是要研究多条直线时,夹角就有局限性,比如图 1-24 中, l_1 与 l_3 的夹角等于 l_2 与 l_3 的夹角,但 l_1 与 l_2 的位置关系并不确定,所以最好让“角”也具有方向。

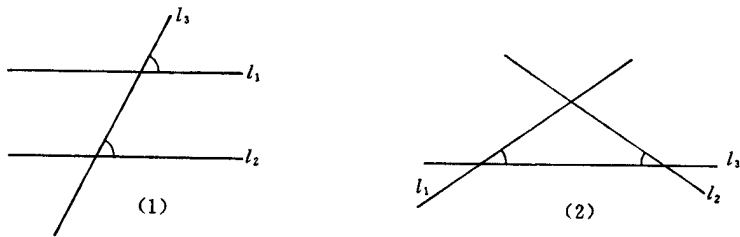


图 1-24

(板书)

2. l_1 到 l_2 的角 把直线 l_1 依边时针方向旋转到与 l_2 重合时所转的角,叫做 l_1 到 l_2 的角,简称到角。

师:如图 1-25, l_1 到 l_2 的角为 θ_1 , l_2 到 l_1 的角为 θ_2 , θ_1 和 θ_2 有什么关系?

生: θ_1 与 θ_2 和为 180° 。

师:可以看出,到角是有顺序的,它具有指向性,我们现在关心的



是 l_1 到 l_2 的角是多大,如何用解析几何的方法来求证?

生:应该对两条直线方程进行研究。

师:为了具有一般性,我们设出直线的方程。

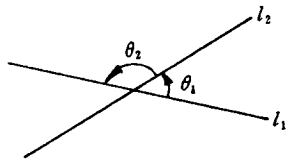


图 1-25

(板书)

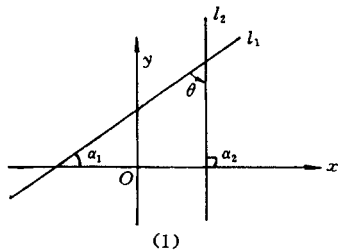
设 $l_1: y = k_1x + b_1$ 或 $x = x_1$;

$l_2: y = k_2x + b_2$ 或 $x = x_2$ ($k_1 \neq k_2$)

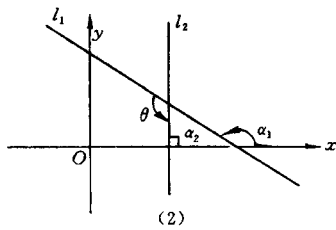
师:可以看到, l_1 、 l_2 的方程情况很多,先研究简单、特殊的情况——有一条直线斜率不存在。

(1)若 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: x = x_2$, 那么 l_1 到 l_2 的角可通过图来观察。

显然 θ 与 l_1 、 l_2 的倾斜角 α_1 、 α_2 相关。根据图 1-26(1)可以看出 $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 = 90^\circ - \alpha_1$; 根据图 1-26(2)则有 $\theta = \alpha_2 + 180^\circ - \alpha_1 = 270^\circ - \alpha_1$ 。由于这种情况特殊,所以画出图来帮助分析就可以了,我们研究的重点是两条直线斜率都存在时, l_1 到 l_2 的角如何计算。



(1)



(2)

图 1-26

(2)若 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$ 且 $1 + k_2k_1 \neq 0$ (因为要研究两直线斜交的情况), 设 l_1 到 l_2 的角为 θ 。

师:请同学们思考 θ 与直线方程的关系,明确地说,由什么量决定 θ ?



生:两条直线所成的角应该和这两条直线的方向有关(教师追问:直线方向的代数化是什么)。直线的方向的代数化是直线的斜率,所以 l_1 到 l_2 的角应该和这两条直线的斜率有关。

师:我们现在想找 θ 与 k_1 、 k_2 的关系,应该怎么办呢?

生: θ 是角, k_1 、 k_2 是实数,不太容易找关系。

生: k_1 、 k_2 也是和角有关的,是不是可以间接找关系?

生:试试先找 θ 和 l_1 、 l_2 的倾斜角的关系,然后再转化为 k_1 、 k_2 的关系。

师:很好, l_1 、 l_2 的倾斜角 α_1 、 α_2 是联系 θ 与 k_1 、 k_2 的纽带了,能不能凭空想出 θ 与 α_1 、 α_2 的联系?

生:应该画图帮助思考。

师:请一位同学在黑板上画出图形,反映两直线斜交的情况,其他同学在笔记本上画。

(教师巡视学生作图情况,根据黑板上作出的图形,另外挑一位同学上黑板画图,两个图形分别代表 $\alpha_1 < \alpha_2$ 、 $\alpha_1 > \alpha_2$ 的情况,如图1-27。)

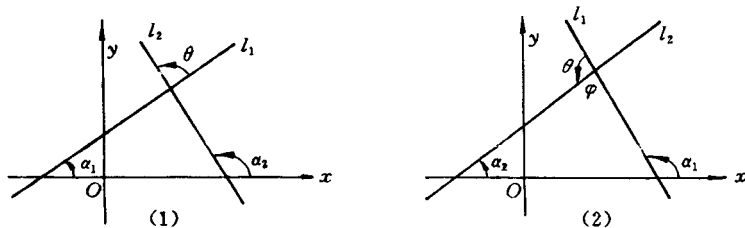


图 1-27

师:两幅图有什么区别?

生:图(1)中 $\alpha_1 < \alpha_2$,图(2)中 $\alpha_1 > \alpha_2$ 。

师: l_1 、 l_2 相对位置不同, θ 与 α_1 、 α_2 的关系可能不一样,我们先研究图(1)中的情况。

由于 l_1 与 l_2 相交, α_2 为三角形的外角, α_1 为这个三角形的内角,



故有

(板书)

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

师:得到了 θ 与 α_1 、 α_2 的关系,如何转化为斜率呢?

生:取角的正切。

师:为什么?

生:因为斜率是倾斜角的正切值,取了角的正切,就把这个倾斜角转化为斜率了。

师:等式两边取正切,有

(板书)

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_1} \text{ (转化为倾斜角的正切)} \\ &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \text{ (化为斜率)}.\end{aligned}$$

师:由于 k_1 、 k_2 存在且 $1 + k_2 k_1 \neq 0$, 所以这个关系式有意义,对于图(2)是否有相同的结论呢?

可以看到, α_1 是三角形的外角, α_2 是三角形的内角, $\alpha_1 = \alpha_2 + (180^\circ - \theta)$, 所以有

(板书)

$$\theta = 180^\circ + \alpha_2 - \alpha_1.$$

生:仿照上面的做法,等式两边取正切,然后利用两角差的正切公式,转化为单角的正切。

(学生叙述,教师板书)

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \tan(180^\circ + \alpha_2 - \alpha_1) \\ &= \tan(\alpha_2 - \alpha_1) \text{ (诱导公式)} \\ &= \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_1}\end{aligned}$$



$$= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

师:比较两种情况的结果发现,无论 l_1 与 l_2 的相对位置如何, l_1 到 l_2 的角的正切的表达式是一致的。

(板书)

3.“ l_1 到 l_2 的角”公式 设 θ 是 l_1 到 l_2 的角,则有

$$\tan \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

师:同学们要注意,公式的分子是角的终边所在直线 l_2 的斜率减去角的始边所在直线 l_1 的斜率,绝不能颠倒。由 $\tan \theta$ 的取值情况,能否判定 θ 的取值?

生:当 $\tan \theta > 0$ 时, θ 是锐角,当 $\tan \theta < 0$ 时, θ 是钝角。

师:这个公式该怎么证呢?

生:利用两角差的正切公式。

生:记公式的推导过程,只记图(1)中的3个角的关系。

(这时不必强求一致)

师:怎么求 l_2 到 l_1 的角 θ' 呢?

生:可以把公式中的 k_1 换成 k_2 , k_2 换成 k_1 ,也就是

$$\tan \theta' = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

师:同学们在利用这一公式求“到角”时,一定要注意哪条直线是 l_1 ,哪条直线是 l_2 ,还需要条件 l_1 与 l_2 不垂直,即 $1 + k_2 k_1 \neq 0$ 。

接下来的一个问题是 $\tan \theta$ 和 $\tan \theta'$ 有什么关系?说明了什么?

生: $\tan \theta$ 与 $\tan \theta'$ 互为相反数。说明 θ 和 θ' 二个角中,一个是锐角,一个是钝角,正切值的绝对值相等,所以 $\theta + \theta' = 180^\circ$ 。

师:两条直线的夹角 ψ 要么等于 l_1 到 l_2 的角 θ ,要么是 l_2 到 l_1 的角 θ' ,那么 $\tan \psi$ 如何计算?

生:两条直线的夹角的正切一定是正的, $\tan \psi = |\tan \theta| = |\tan \theta'|$ 。



(板书)

4. 夹角公式

$$\tan \psi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$$

师:显然 ψ 是锐角了,我们现在有两种角,一个是到角,有方向的,可能是锐角,可能是钝角;另一个是夹角,无方向,只能是锐角,求角时要注意求的是夹角还是到角,弄清角的类型再调动相应的公式。

师:我们来利用所学的知识解决一些问题。

(板书,或打出投影)

例1 求直线 $l_1: y = -2x + 1$ 和 $l_2: y = x - \frac{1}{2}$ 的夹角。

师:这里已知两直线方程,要求两条直线的夹角,如何处理?

生:由已知直线方程就可以知道两条直线的斜率,再利用夹角公式就能求出夹角了。

师:求夹角不必考虑始边与终边,直接代入夹角公式计算结果。

解 直线 l_1 的斜率为 $k_1 = -2$, l_2 的斜率为 $k_2 = 1$, 所以 l_1 与 l_2 的夹角 θ 有:

$$\tan \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right| = \left| \frac{1 - (-2)}{1 + 1 \cdot (-2)} \right| = 3。$$

因为 θ 是锐角,所以 $\theta = \arctan 3$ 。

师:如果再求 l_1 到 l_2 的角,这个角多大? l_2 到 l_1 的角又多大?

生:那需用到角公式,求出 l_1 到 l_2 的角的正切为 -3 ,这个角是钝角,所以 l_1 到 l_2 的角是 $\pi - \arctan 3$, l_2 到 l_1 的角是 $\arctan 3$ 。

师:答案正确,从这道题的求解我们可以总结些什么规律?明确地说,该如何选择公式?结果是正还是负?

生:如果所求的是两条直线的夹角,就用夹角公式,求出的值必是正值;如果求一条直线到另一条直线的角,就得用到角公式,它不带绝对值符号,求出的值可能是正的,也有可能是负的。



师:归纳得很好,之所以求夹角时选用带有绝对值符号的公式,是因为不必区分两条直线中的哪一条是始边,哪一条是终边;而“到角”具有方向性,所以公式中的分子是终边的斜率减去始边的斜率,由正切值判断这个角是锐角还是钝角,当难以区分夹角还是到角时应画出图形帮助分析、判断。

(板书)

例2 等腰三角形一腰所在的直线 l_1 的方程是 $x - 2y - 2 = 0$, 底边所在的直线 l_2 的方程是 $x + y - 1 = 0$, 点 $(-2, 0)$ 在另一腰上, 求这腰所在直线 l_3 的方程。

师:要求直线 l_3 的方程, 已知点 $(-2, 0)$ 在 l_3 上, 故只需求出 l_3 的斜率 k_3 , 要求 k_3 运用方程思想, 要建立关于 k_3 的一元方程。那么就需从题目中挖掘等量关系, 从而转化为一个含 k_3 的等式, 显然“等腰三角形”这一条件十分重要, 它能推出两腰长相等, 两底角相等。那么与 k_3 有关的条件是底角相等, 所以要用已知的直线方程表示等腰三角形的底角, 通过等腰三角形两底角相等建立关于 k_3 的等式。

(由学生列等式, 教师巡视, 从中发现不当的解法, 加以展示。)

生:因为 l_3 、 l_1 是三角形的二腰所在的直线, 所以 l_3 与 l_2 的夹角等于 l_1 与 l_2 的夹角, 所以有

(板书)

$$\left| \frac{k_3 - (-1)}{1 + k_3(-1)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2}(-1)} \right|,$$

解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = 2$ 。

生: $k_3 = \frac{1}{2}$ 是增根, 因为 l_3 的斜率等于 l_1 的斜率, 所以 l_3 和 l_1 平行, 不可能构成三角形, 这个解法有问题。



师 这就是我们刚才说的,两个夹角相等,二直线位置并不确定,所以应用角,为避免错误,结合直观图形加以判断。

(只需画出三线相对位置,如图 1-28。)

生:由图可以看出, l_2 到 l_1 的角 θ_1
等于 l_3 到 l_2 的角 θ_2 ,列式

(板书)

$$\frac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = \frac{-1 - k_3}{1 + (-1) \cdot k_3},$$

解得 $k_3 = 2$ 。

因为 l_3 过点 $(-2, 0)$,

所以直线 l_3 的方程为 $y = 2(x + 2)$, 即 $2x - y + 4 = 0$ 。

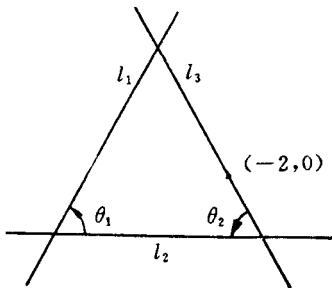


图 1-28

师 通过这两道例题,我们可以看到,恰当地调用公式是十分重要的,角度与两条直线的先后顺序没有关系时,应选用夹角公式,运算可变得简捷一些,但一定要加以判断:角是否与直线顺序无关;若角度与直线的先后顺序有关,或是出现多条直线时,通常要用“到角”公式,且要画图以助分析。

三、小结

师 本节课研究的是两条直线斜交所成的角、有关公式及应用,从公式推导过程,同学们要体会其中的数学思想:如转化思想,方程思想,分类讨论思想,数形结合思想,体会研究解析几何题的基本方法,此外要掌握公式并能灵活运用。

四、作业

- (1) 复习课本中“两条直线所成的角”一节。
- (2) 课本习题(略)。



设计说明

直线是最基本、最简单的平面图形,学生在初中就已研究过许多有关直线的理论,如两条直线平行、相交的位置关系,成角与距离等数量关系,但在解析几何中,解析法这种方法对学生来说是陌生的,所以课本要通过直线这一学生熟悉的图形、学生熟知的性质来使学生理解并掌握解析几何的基本思想和方法。

对于两直线成角,学生并不难理解与接受,因为他们已经有了研究两条直线平行和垂直位置关系的经验。其实平行和垂直都是两直线成角的问题,都是通过两条直线的斜率(如果存在)来研究的,因而利用斜率讨论两条直线斜交的成角就十分自然了,在研究过程中,都离不开倾斜角这个中间环节,学生不难想到研究新问题的手段与方法,所以在教学中应多启发学生,让学生参与到问题的研究中来,通过类比、归纳、推证得出结论。

在教学中要注意解析几何思想方法的渗透,时刻提醒学生,我们是用代数方法研究几何图形,同时注意思考上要严密,表述上要规范,学好这一章的知识能为进一步研究圆锥曲线作好知识上方法上的准备,也为今后灵活运用解析几何的基本思想方法打下坚实的A基础。



《点到直线的距离》教学设计

教学目标

1. 使学生掌握点到直线的距离公式及其结构特点,并能运用这一公式。
2. 学习并领会寻找点到直线距离公式的思维过程以及推导方法。
3. 教学中体现数形结合、转化的数学思想,培养学生研究探索的能力。

教学重点与难点

点到直线的距离公式的研究探索过程是重点,点到直线的距离公式的推导是难点。

教学过程

师:什么是平面上点到直线的距离?

生(略)。

师:如何求平面上一点到一直线的距离?问题1:已知点 $P(-1, 2)$ 和直线 $l: 2x + y - 10 = 0$, 求 P 点到直线 l 的距离。

生:先求出过 P 点与 l 垂直的直线 $l': x - 2y + 5 = 0$, 再求出 l 与 l' 的交点 $P'(4, 3)$, 则 $|PP'| = 2\sqrt{5}$ 即为所求。

师:问题2:已知点 $P(m, n)$, 直线 $l: y = kx + b$, 求点 P 到 l 的距离 d 。



生:可用问题1的方法,但运算非常复杂。

师:能否换一个角度去解决这个问题。(启发学生从最基本的概念入手分析)事实上点到直线的距离就是求过点向已知直线所引垂线段的长,而通常线段的长要利用三角形来求解。如何构造一个含所求线段又易于求解的三角形是解决这个问题的关键。我们知道,平面上点到直线的距离等于过这个点与已知直线平行的平行线间的距离。好,这样就可以将所求线段平行移动之后放在最佳的位置。

生:过 P 点作与 l 平行的直线 l' , l 与 l' 的距离即为所求(如图 1-29)。

师(板书图形)观察图形特征。

生:可利用两平行线与 y 轴交点间的线段构造三角形。

师生共同完成下面过程:设过 P

点与 l 平行的直线为 l' , 方程是 $y = bx + b'$, l 与 l' 分别交 y 轴于 Q 点、 R 点, 则 $|RQ| = |b - b'|$ 。过点 R 作 $RM \perp l$ 于 M , 则 $|RM| = d$ 。于是出现了直角三角形 RMQ , 是个好兆头。

在 $\text{Rt}\triangle RMQ$ 中(α 为直线的倾斜角),

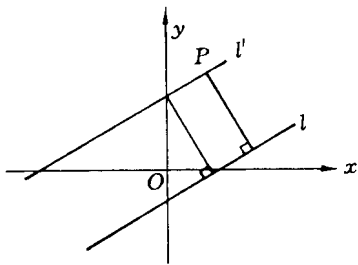


图 1-29

① 若 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (如图 1-30(1)) $|RM| = |RQ| \cdot \cos \alpha$,

② 若 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (如图 1-30(2)) $|RM| = |RQ| \cdot \cos(\pi - \alpha)$

由 ①② 可知 $d = |b - b'| \cdot |\cos \alpha|$

因为 $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$,

所以 $d = \frac{|b - b'|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ 。(设法将 b' 用已知数表示)又因为 $P(m,$

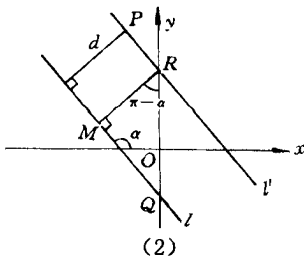
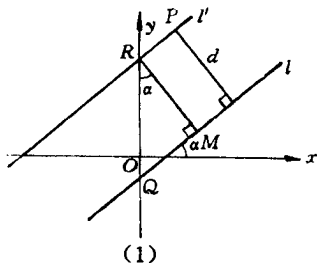


图 1-30

n) 在直线 $y = kx + b'$ 上, 故有 $n = km + b'$, $b' = n - km$ 。

$$\text{所以 } d = \frac{|b - n + km|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{即 } P \text{ 点到直线 } l \text{ 的距离是 } \frac{|km - n + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}. (*)$$

师: 如果将问题 2 中的直线方程 $l: y = kx + b$ 换成一般式 $Ax + By + C = 0$ 结果如何?

问题 3: 已知点 $P(x_0, y_0)$, 直线 $l: Ax + By + C = 0$, 求点 P 到直线 l 的距离 d 。

学生解答: 因为 $k = -\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$), $b = -\frac{C}{B}$ ($B \neq 0$), 代入公式 $(*)$, 即得

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

即: 平面内一定点 $P(x_0, y_0)$ 到一条定直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离为:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

师: 上述推导中 $B \neq 0$, 若 $B = 0$, 公式成立吗?

生: 验证如下, 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $x = a$ 的距离 $d = |x_0 - a|$ 。



用公式计算：

$$d = \frac{|x_0 - a|}{\sqrt{1^2 + 0}} = |x_0 - a|。结果相等，说明 B = 0 时，公式仍$$

然成立。公式适用于平面内的任意直线。

师：作为公式，要会应用并记住公式的结构特征。仔细观察：①问题中的全部已知数均在公式中出现。②公式保证了 $d \geq 0$ 。③公式要求 $A^2 + B^2 \neq 0$ ，说明 A、B 不能同时为零。另外注意：直线 l 的方程是一般式，公式的应用没有条件限制。

师：在求点到直线的距离的过程中，我们利用了平行线间的距离概念，那么现在是否会求两平行直线之间的距离呢？

生：问题 2 中已经得到：l₁：y = kx + b₁，l₂：y = kx + b₂，则 l₁ 与 l₂ 的距离 $d = \frac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ 。

师：对于一般情况呢？

生：如果 l₁：Ax + By + C₁ = 0，l₂：Ax + By + C₂ = 0，当 B ≠ 0 时， $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ；

当 B = 0 时，易验证上式仍然成立。

即平面上两条平行线 Ax + By + C₁ = 0 与 Ax + By + C₂ = 0 的距离是 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

例 1 点 A(a, 6) 到直线 3x - 4y = 2 的距离等于 4，求 a 的值。

解 应用点到直线的距离公式，解关于 a 的方程：

$$\frac{|3a - 4 \times 6 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4，$$

|3a - 26| = 20，所以 a = 2 或 a = $\frac{46}{3}$ 。



师 满足条件的点 A 有 $(2, 6)$ 和 $(\frac{46}{3}, 6)$ 两个, 它们在已知直线的两侧, 如图(1-31)。由解的过程可知: 当 $3a - 26 > 0$ 时, 所求点在已知直线的下方, 当 $3a - 26 < 0$ 时, 所求点在已知直线的上方。

例 2 求过点 $A(-1, 2)$, 且与原点的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的直线方程。

分析 因为所求直线方程过点 $A(-1, 2)$, 所以可以用点斜式表示成 $y - 2 =$

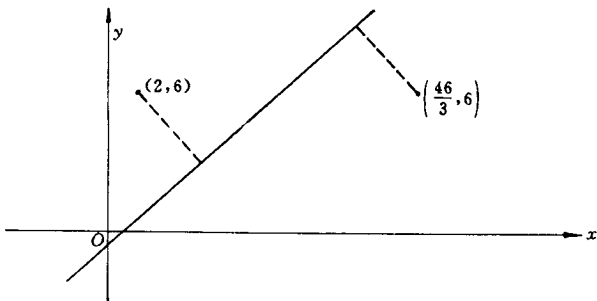


图 1-31

$k(x + 1)$, 问题就转化成求斜率 k , 根据原点到直线的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 列关于 k 的方程, 问题就可以得到解决。

由学生完成解题过程:

设所求直线的斜率为 k , 则方程 $y - 2 = k(x + 1)$,

即 $kx - y + k + 2 = 0$ 。

因为 $\frac{|0 - 0 + k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $k^2 + 8k + 7 = 0$ 解之 $k = -1$ 或 $k = -7$,

所求直线方程为 $x + y - 1 = 0$ 或 $7x + y + 5 = 0$ 。

师: 可以画图直观的看出结果(图略)

例 3 求直线 $2x + 11y + 16 = 0$ 关于点 $P(0, 1)$ 对称的直线方程。

分析(1)中心对称的两条直线是互相平行的。



(2) 这两条直线与对称中心的距离相等。

解 设所求直线方程为 $2x + 11y + C = 0$ 。

由点到直线的距离公式可得：

$$\frac{|0 + 11 + 16|}{\sqrt{2^2 + 11^2}} = \frac{|0 + 11 + C|}{\sqrt{2^2 + 11^2}},$$

$C = 16$ (已知直线) 或 $C = -38$ 。

所以 所求直线为 $2x + 11y - 38 = 0$ 。

师 利用图形的几何性质 结合代数运算 简而明地解决了问题。

小结 (学生回答) 这节课我们讨论了平面内点到直线的距离公式和两条平行直线之间的距离公式。

师 点到直线的距离转化成两条平行直线之间的距离来求, 最终两条平行直线之间的距离又利用了点到直线的距离公式, 可见二者有着密切的联系。通过公式的推导, 请同学们认真体会利用图形特点解题的好处。

作业：

1. 课本 第 42 页 1, 2, 3 题, 第 44 页 12, 13, 15 题。
2. 补充 (1) 已知平行线 $2x + 3y - 3 = 0$ 与 $2x + 3y - 9 = 0$, 求与它们等距离的平行线的方程。

(2) 求平行于直线 $x - y - 2 = 0$ 并且与它的距离为 $2\sqrt{2}$ 的直线方程。

(3) 过原点和点 $A(1, 3)$ 作两条平行直线, 使它们的距离等于 $\sqrt{5}$, 求这两条平行线的方程。

设计说明

点到直线的距离公式是解决理论和实际问题的一个重要工具, 教学中理应予以重视。但在以往的教学过程中遇到的最大困难是: 思路自然的则运算很繁, 而运算较简单的解法则思路又很不自然。这样



就造成了教学中通常采用“满堂灌”“注入式”,学生的思维得不到应有的训练,学生的主体作用也不能充分体现出来。为避免这个问题,有必要很好地探讨一下,“点到直线的距离公式”的教学如何更合理,怎样把教学过程变成师生共同探索、发现公式的过程,怎样使推导过程自然而简练。

本节课是“两条直线的位置关系”的最后一个内容,在复习引入时,有意识地涉及两直线垂直、两直线的交点等知识,既帮助学生整理、复习已学知识的结构,也让学生在复习过程中自己“发现”尚未解决的问题,使新授知识在原认知结构中找到生长点,自然地引出新问题,符合学生的认知规律,有利于学生形成合理、完善的认知结构。教学过程中,逐步逼近目标,在这过程中展示了数学知识产生的思维过程。学生能够自觉地、主动地参与进来,教师的主导作用,学生的主体作用都得以充分体现,经常这样做,学生的数学思维能力必将逐步得到提高。

在教学中还可以采用其他的方法推导“点到直线的距离”公式。只要抓住“构造一个可用的三角形”这个关键,就能突破难点,易于学生的理解和掌握。

比如问题2中:

$$\left. \begin{aligned} (1) & \frac{|QM|}{d} \tan \alpha \\ (2) & \frac{|QM|}{d} \tan(\pi - \alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |QM| &= d |k| \\ |RQ| &= |b - b'| \end{aligned} \right\} \Rightarrow d^2 + (d|k|)^2 = |b - b'|^2,$$

$$\text{所以 } d = \frac{|b - b'|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

在公式的推导过程中,必须充分利用图形的特征,根据平面几何的有关知识,使问题得到解决。

分析 点 P 到直线 l 的距离是 P 点到直线 l 的垂线段的长,即



该点与垂足 Q 间的距离。由图 1-32 可联想 利用平面几何中的射影定理,使 PQ 成为一直角三角形斜边上的高。通过解直角三角形使问题得到解决。

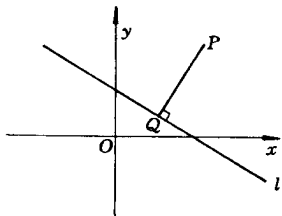


图 1-32

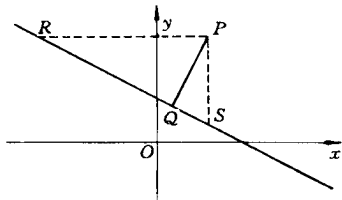


图 1-33

具体方法如下:

直线 $l: Ax + By + C = 0$, 点 $P(x_0, y_0)$, 设 $A \neq 0, B \neq 0$, 这时 l 和 x 轴、 y 轴都相交, 如图(1-33) 过点 $P(x_0, y_0)$ 作直线 l 的垂线交 l 于 Q , 令 $|PQ| = d$, 过 P 作 x 轴的平行线交 l 于 $R(x_1, y_0)$, 作 y 轴的平行线交 l 于 $S(x_0, y_2)$, 有:

$$Ax_1 + By_0 + C = 0, Ax_0 + By_2 + C = 0.$$

$$\text{得出 } x_1 = \frac{-By_0 - C}{A}, y_2 = \frac{-Ax_0 - C}{B}.$$

$$\text{所以 } |PR| = |x_0 - x_1| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right|,$$

$$|PS| = |y_0 - y_2| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B} \right|,$$

$$\begin{aligned} |RS| &= \sqrt{|PR|^2 + |PS|^2} \\ &= \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|AB|} \cdot |Ax_0 + By_0 + C|. \end{aligned}$$

$$\text{因为 } d \cdot |RS| = |PR| \cdot |PS|,$$

$$\text{所以 } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$



易证 $A = 0$ 或 $B = 0$ 时也成立。

平面解析几何的研究方法就是用代数方法来研究几何问题,上面的推导方法突出了这种思想方法,巧妙地运用了平面几何的知识,构造了三角形,使繁杂的计算简化了。

例1虽然是一个简单的公式应用,自然解出两个结果,为什么会有两个满足条件的点 A ,由图很直观地得到解释,从公式结构看是由于绝对值符号产生的两个不同解。那么当点 P 在直线 l 的某一侧时,就可去掉绝对值符号:

当 $Ax_0 + By_0 + C \geq 0$ 时,

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

当 $Ax_0 + By_0 + C < 0$ 时,

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{-\sqrt{A^2 + B^2}},$$

而 $Ax + By + C > 0$, $Ax + By + C < 0$, 分别表示整个平面被直线 $Ax + By + C = 0$ 分成的两个半平面,我们只需要判定点 P 在哪个半平面上就可以脱去绝对值符号。由此还可加深对图形的理解和认识。

例如下面问题:

(1) 求到已知直线 $3x + 2y - 6 = 0$ 距离等于 $\sqrt{13}$ 的点的轨迹。

(2) 求与平行线 $3x + 2y - 6 = 0$ 和 $6x + 4y - 3 = 0$ 等距离的点的轨迹。

第(1)题中的“点”不能确定在已知直线的哪一侧,因此在已知直线的两侧都有满足条件的点,故得出轨迹是:与已知直线平行且距离是 $2\sqrt{13}$ 的两条平行直线 $3x + 2y + 7 = 0$ 和 $3x + 2y - 19 = 0$ 。

第(2)题中的“点”必在直线 $3x + 2y - 6 = 0$ 和直线 $6x + 4y - 3 = 0$ 之间,也就是说满足条件的点只能在已知直线的同一侧。因此



轨迹是与两条平行线等距离的一条平行线。可先求出两条直线在 y 轴上的截距的平均值 b 。

$$\text{因为 } b_1 = 3, b_2 = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } b = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{3 + \frac{3}{4}}{2} = \frac{15}{8}。$$

再由斜截式可得出所求直线的方程是：

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{8},$$

$$\text{即 } 12x + 8y - 15 = 0。$$

第(2)题还可以直接用公式：

设动点 $P(x, y)$ 到两条平行线的距离相等, 根据点到直线的距离公式, 得到

$$\frac{3x + 2y - 6}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{6x + 4y - 3}{\sqrt{6^2 + 4^2}}。$$

$$\text{化简 } 2|3x + 2y - 6| = |6x + 4y - 3|。$$

由于动点在直线 $3x + 2y - 6 = 0$ 的下方, 同时在直线 $6x + 4y - 3 = 0$ 的上方。故可得到：

$$2(3x + 2y - 6) = (6x + 4y - 3),$$

$$\text{所以轨迹方程为 } 12x + 8y - 15 = 0。$$

通过对本节课教学的探讨, 力求打破照本宣科、满堂灌、注入式的旧模式, 希望达到较好的效果, 使学生的思维得到有效训练, 并能充分发挥教师的主导作用和学生的主体作用。



《充要条件》教学设计

教学目标

1. 使学生正确理解充分条件、必要条件和充要条件 3 个概念, 并在判断、论证中正确运用。
2. 在师生、学生间的数学交流中增强逻辑思维活动, 为用等价转化思想解决数学问题打下良好的逻辑基础。

教学重点与难点

正确理解 3 个概念, 并在分析中正确判断。

教学过程

师: 上堂课后留了一道题 给出原命题“若 A , 则 B ”(板书), 写出它的逆命题、否命题、逆否命题, 请同学们回答。

生(口答, 师板书)

原命题 若 A , 则 B 。

逆命题 若 B , 则 A 。

否命题 若非 A , 则非 B 。

逆否命题 若非 B , 则非 A 。

师: 请同学们构造 4 个原命题, 写在投影片上。要求是:

- (1) 原命题成立, 逆命题不成立;
- (2) 原命题不成立, 逆命题成立;
- (3) 原命题成立, 逆命题成立;



(4)原命题不成立,逆命题也不成立。

(师巡视后,选4位同学的投影片待用。以下讨论将随机应变,下面写的只是一种设想。)

师(取第一位同学的投影片定格,并板书。)

原命题 如果 $x = y$, 那么 $x^2 = y^2$ 。

师 这个原命题成立吗?

生(口答)成立。

师 这个原命题的逆命题是什么?是否成立?

生(口答)这个原命题的逆命题是:如果 $x^2 = y^2$, 那么 $x = y$ 。
不成立。

师 请举一个逆命题不成立的例子。

生(口答)例:取 $x = 1, y = -1$ 。满足 $x^2 = y^2$, 但 $x \neq y$ 。

师 如果我们将原命题的条件“ $x = y$ ”记作 A , 把原命题的结论“ $x^2 = y^2$ ”记作 B 。本例说明:若 A , 则 B 。”成立,记作 $A \Rightarrow B$ 。则称 A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件。由于逆命题不成立,即 $A \not\Leftarrow B$, 则称 A 是 B 的充分但不必要条件。

这个例子的原命题成立,但它的逆命题不成立。即“ $x = y$ ”是“ $x^2 = y^2$ ”的充分但不必要条件。

师(取第二位同学的投影片定格,并板书。)

原命题 如果两个三角形面积相等,那么这两个三角形全等。

师 这个原命题成立吗?

生(口答)不成立。

师 请举一个例子。

生(板书)

因为 $AA' \parallel BC$, 所以 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC}$ 。但这两个三角形不全等。

师 请叙述这个原命题的逆命题,并说明是否成立。

生(口答)



如果两个三角形全等,则这两个三角形的面积相等。

这个逆命题成立。

师 如果原命题不成立,而逆命题成立。我们说原命题的条件对结论的成立是必要但不充分的。也就是说:“两个三角形面积相等”是“这两个三角形全等”的必要但不充分条件。

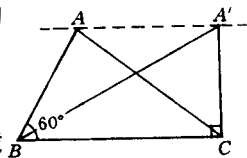


图 2-10

把本例原命题的条件记作 A , 结论记作 B 。由于原命题不成立, 而逆命题成立。即 $A \Rightarrow B$, 则称 A 是 B 的必要但不充分条件。

师 (取第三位同学投影片定格, 板书。)

原命题: $x^2 + y^2 = 0$ 则 $x = 0$ 且 $y = 0$ 。这个命题成立吗?

生 (口答) 成立。

师 这个原命题的逆命题怎样叙述, 是否成立?

生 (口答) 如果 $x = 0$ 且 $y = 0$ 则 $x^2 + y^2 = 0$ 。这个逆命题是成立的。

师 如果原命题成立, 逆命题也成立。我们说原命题的条件是其结论的既充分又必要的。本例中, 把“ $x^2 + y^2 = 0$ ”记作 A , 把“ $x = 0$ 且 $y = 0$ ”记作 B 。由于 $A \Rightarrow B$, 且 $B \Rightarrow A$ 。记作 $A \Leftrightarrow B$ 。则称 A 是 B 成立的充分且必要条件, 简称 A 是 B 的充要条件。

师 (取第四位同学的投影片定格, 并板书。)

原命题 如 $a > b$ 则 $|a| > |b|$ 。

这个原命题成立吗? 并说明理由。

生 (口答) 不成立。例: $a = -1, b = -2$ 。满足 $a > b$, 但不满足 $|a| > |b|$ 。

师 请说出这个原命题的逆命题, 并说明是否成立。

生 (口答) 如果 $|a| > |b|$ 则 $a > b$ 。不成立。例: $a = -3, b = 1$ 。满足 $|a| > |b|$, 但不满足 $a > b$ 。



师:如果把原命题的条件记作 A , 原命题的结论记作 B 。本例是 $A \Rightarrow B$ 则称 A 是 B 成立的既不充分又不必要条件。

现在我们总结一下, 本节所讲叙的概念(板书。)

1. “若 A 则 B ”是真命题, 记“ $A \Rightarrow B$ ”。称 A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件。

2. 如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$, 记 $A \Leftrightarrow B$ 。

3. $A \Leftrightarrow B$ 称 A 是 B 的充要条件;

$A \Rightarrow B$ 称 A 是 B 的充分但不必要条件;

$A \Leftarrow B$ 称 A 是 B 的必要但不充分条件;

$A \nRightarrow B$ 称 A 是 B 的即不充分又不必要条件。

以上前两条给出了充分条件、必要条件、充要条件这 3 个概念; 第 3 条给出了判断 A 是 B 的什么条件的依据。

现在请同学们回答: $A \Leftarrow B$, B 是 A 的什么条件?

生(讨论后回答) B 是 A 的必要但不充分条件。

师: 请同学们阅读课本第 50 页, 有关“曲线的方程”和“方程的曲线”的定义。

(投影或计算机操作显示)

在直角坐标系中, 如果某曲线 α (看作适合某种条件的点的集合或轨迹) 上的点与一个二元方程 $f(x, y) = 0$ 的实数解建立了如下关系:

1. 曲线上的点的坐标都是这个方程的解;

2. 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点, 那么, 这个方程叫做曲线的方程, 这条曲线叫做方程的曲线(图形)。

师: 我们把“曲线的方程”和“方程的曲线”看成条件 A , 把关系 1、2 看成 B 。它们都是 A 的必要条件。两者都满足了, A 才具备充分性, 即 A 是 B 的充要条件。如果两者缺一, 譬如仅把关系 1 看成 B , 那



么 A 是 B 的充分但不必要条件。为此,在定义“曲线的方程”和“方程的曲线”时,关系 1、2 缺一不可。实际上这也是一个充要条件问题,是我们数学中常见的等价转换问题。

现在请看以下例题:

例 1 两条不重合的直线 l_1 、 l_2 (共同前提) l_1 与 l_2 的斜率分别为 k_1 、 k_2 , 且 $k_1 = k_2$ 是 $l_1 \parallel l_2$ 的什么条件?

(学生讨论后回答)

生甲:两条不重合的直线 l_1 、 l_2 的斜率相等是 $l_1 \parallel l_2$ 的充要条件。

师:这个结论对吗?

生乙:不对。因为 $l_1 \parallel l_2$, 有可能 l_1 和 l_2 的斜率不存在。故两条不重合的直线 l_1 、 l_2 的斜率相等是 $l_1 \parallel l_2$ 的充分但不必要条件。

师:生乙的回答很好。如何改变命题的条件(或结论),使命题的条件是结论的充要条件呢?

生丙:把命题的结论改为“ $l_1 \parallel l_2$ 且 l_1 、 l_2 都有斜率”即可。

例 2 “ $0.1^{\lg x^2} > 1$ ”是“ $|x| < 1$ ”成立的()。

(A)充分但不必要条件

(B)必要但不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分又不必要条件

(学生讨论后回答)

生:选 A。理由是 $(0.1)^{\lg x^2} > 1 \Leftrightarrow (10^{\lg x^2})^{-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} >$

$1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x| < 1$ 。由 $|x| < 1$ 推不出 $x \neq 0$ 。

例 3 “三棱锥(底面是非正三角形)的侧面和底面所成的二面角均相等”是“三棱锥的顶点在底面的射影是底面的内心”的什么



条件?

生(口答)是充要条件。

师:同学们再想一想。

生:是充分但不必要条件。

师:为什么?

生:因为顶点在底面的射影有可能是非等边三角形的旁心。

师:大家再讨论一下,这位同学的结论是否正确?

生(讨论后回答)不正确。应该是必要但不充分条件。其理由是:把条件“三棱锥(底面是非等边三角形)的侧面和底面所成的二面角均相等”看成 A ;“三棱锥的顶点在底面的射影是底面的内心”看成 B 。那么 $A \not\Rightarrow B$ 。理由是有可能三棱锥的顶点在底面的射影是底面三角形的旁心。所以 A 是 B 的必要但不充分条件。

师:这位同学回答得很好。如何改变命题的条件,使其成为充要条件呢?

生:条件 A 是“三棱锥(底面是非等边三角形)的侧面和底面所成的二面角均相等,且顶点在底面的射影落在底面三角形内”即可。

例4 $a, b \in R$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的一个充分而不必要条件是

()

(A) $b < a < 0$

(B) $a < b$

(C) $ab(a-b) > 0$

(D) $a > b$

(同学们讨论回答)

生:选(A)。其理由是 $b < a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 。

例子是 $a < 0, b > 0$ 满足 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 但 $b < a < 0$ 不成立。

例5 已知 α 是 β 的充要条件, S 是 γ 的必要条件同时又是 β 的充分条件, 试求 α 与 γ 的关系。



师:请同学们把解答写在投影片上。

(师巡视后,选错误及正确解答展示,最后把正确解答定格。)

解:由已知得

$$\alpha \Leftrightarrow \beta \Leftarrow S \Leftarrow \gamma,$$

所以 γ 是 α 的充分条件,或 α 是 γ 的必要条件。

例 1 (投影展示)

A	B	A 是 B 的什么条件
n 是自然数	n 是整数	
x 是实数	x 是有理数	
$x > 5$	$x > 3$	
m, n 是奇数,	$m + n$ 是偶数	
$a > b$	$a^2 > b^2$	
四边形对角互补	四顶点共圆	
$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	
$\alpha = 45^\circ$	$\tan \alpha = 1$	
$x \in A$ 且 $x \in B$	$x \in (A \cap B)$	
$ab \neq 0$	$a \neq 0$	
$(x+1)(y-2) = 0$	$x = -1$ 或 $y = 2$	
m 是 4 的倍数	m 是 2 的倍数	
方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有两个相等实根	$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	
$x = 1$ 或 $x = -3$	$x^2 + 2x - 3 = 0$	
$a^2 - b^2 = 0$	$a = 0$	

(学生兴趣盎然,数学交流达到了高潮,在争论中得到正确答案。)

师:今天我们学习了充分条件、必要条件、充要条件 3 个概念,并学会了判断条件 A 是 B 的什么条件。也为今后我们解决数学问题打下了等价转化的基础。今天的作业:

1. 第 58 页练习 1 2 3 4.
2. 第 61 页习题四 9.



3. 构造 16 个小题,代数、三角、立体几何、解析几何各 4 个。分别为 A 是 B 的充分但不必要条件、 A 是 B 的必要但不充分条件、 A 是 B 的充要条件、 A 是 B 的既不充分又不必要条件。

设计说明

1. “充要条件”是高中数学中一个重要的数学概念,也是学生解决数学问题时进行等价转换的逻辑基础。在实际教学中,这一节一般有两种处理方法:第一种是,在高一讲授或高二解析几何起始课时讲授,俗称“前充要”;第二种是按教材编排,放到解析几何第二章讲授,俗称“后充要”。本节教案为“后充要”设计。

2. 由于“充要条件”与“原命题、逆命题、否命题、逆否命题”紧密相关。而学生在初中都了解到原命题与逆否命题、否命题与逆命题是等价的。为此,本教案着重从“原命题、逆命题”与“充要条件”的联系进行分析,从而没有提及否命题和逆否命题。在实际教学中,可将否命题与逆否命题容纳进去。

3. 本教案有悖于教材,仅从 A 是 B 的充分但不必要条件、必要但不充分条件、充要条件,即不充分又不必要条件 4 个方面进行明确叙述,便于学生进行正确的判断。

4. 由于这节课概念性、理论性较强。一般的教学使学生感到枯燥无味。为此,激发学生的学习兴趣是关键。把课堂由老师当演员转为学生当演员,以学生为主,让学生自己构造数学题,自我感到数字美。从而培养学生的数学能力,为强化等价转换这一数学思想打下良好的逻辑基础。

5. 充要条件这节课是个难点,也是高中数学的基础。如有可能,不妨先给学生介绍点简易逻辑知识。譬如,什么叫命题?用语言、符号或式子表达的,而且能判断真假的语句叫做命题。两个命题 p 、 q 用逻辑联结词“且”联结起来构成一个新命题,称为联言命题。联言命题的真假,只有当 p 、 q 同真时,才是真命题。两个命题 p 、 q 用逻辑联结



“或”联结起来构成一个新命题,称为选言命题。选言命题的真假,如 p 、 q 中至少有一个是真命题,则这个选言命题是真命题,只有当 p 、 q 同时是假命题,这个选言命题才是假命题。这种逻辑知识对学生判断是十分有用的。



《圆的标准方程和切线问题》教学设计

教学目标

1. 使学生掌握圆的标准方程和切线的探求过程和方法。
2. 通过教学,使学生学习运用观察、类比、联想、猜测、检验等合情推理方法,提高学生运算能力、逻辑推理能力。
3. 培养学生勇于探索、坚韧不拔的意志品质。

教学重点与难点

圆的标准方程和切线的求法是教学重点,圆的切线的求法是教学难点。

教学过程

师:前面我们学习了曲线和方程的关系,请同学们考虑:如何求适合某种条件的点的轨迹?

生:①建立适当的直角坐标系,将曲线上任一点的坐标为 (x, y) ;②探求这些点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的关系,列出等式并化简。

师:这就是建系、设点、列式、化简四步曲。用这个方法我们曾经求出圆心在原点,半径为5的圆的方程,它的方程是怎样的?

生: $x^2 + y^2 = 25$,

师:若半径发生变化,圆的方程又是怎样的?能否写出圆心在原点,半径为 r 的圆的方程?



生: $x^2 + y^2 = r^2$ 。

师:你是怎样得到的?(启发地)圆上的点满足什么条件?这些条件怎样转化成圆上的点的坐标所满足的条件?

生:此圆是到原点的距离等于 r 的点的集合,由两点间的距离公式可得 $\sqrt{x^2 + y^2} = r$,

即 $x^2 + y^2 = r^2$ 。

师: $x^2 + y^2 = r^2$ 表示的圆的位置比较特殊,圆心在原点。有时候圆心可能不在原点,若此圆的圆心移至 (a, b) 点,圆的方程是怎样的?

生:此圆是到点 (a, b) 的距离等于 r 的点的集合,由两点间的距离公式可得

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

即 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

师:方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 叫做圆的标准方程。圆的标准方程由哪些量决定?是否可以和平面几何中有关理论联系起来?

生:平面几何中,圆由圆心、半径决定,圆的方程由 a 、 b 、 r 决定(其中 a 、 b 是圆心的横、纵坐标, r 是圆半径)。

师:很好!这里再一次体现了解析几何的特点——用代数的方法研究几何问题。由此可见,要确定圆的方程,只须确定 a 、 b 、 r 这 3 个独立变量即可。

请同学们思考这样一个问题:

例 1 已知两点 $A(4, 9)$ 和 $B(6, 3)$, 求以 AB 为直径的圆的方程, 并且判断点 $M(6, 9)$ 、 $N(3, 3)$ 、 $Q(5, 3)$ 是在圆上, 在圆内, 还是在圆外?

师:这道题的已知、要求很明确,应怎样解?

生:先求圆的方程,再判断点的位置。

师:要确定圆的方程需要什么?要不要按“四步曲”来求?



生:不需要,只要根据圆的标准方程,求出圆心和半径即可。

师:怎么求?

生:用中点公式求圆心坐标,用两点间距离公式求半径。

师:好,请具体求出。

生:圆心 $C(a, b)$ 是线段 AB 的中点,那么它的坐标为:

$$a = 5, b = 6.$$

$$r = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{(4-6)^2 + (9-3)^2}}{2} = \sqrt{10}.$$

因此圆的方程是 $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 10$ 。

因为 $|CM| = \sqrt{10}$, $|CN| = \sqrt{13} > \sqrt{10}$, $|CQ| = 3 < \sqrt{10}$,
所以点 M 在圆上,点 N 在圆外,点 Q 在圆内。

由此可见,若点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上,点 P 的坐标与圆的方程有什么关系? P 在圆外,圆内呢?

生:点 $P(x_0, y_0)$ 在圆上 $\Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$;

点 $P(x_0, y_0)$ 在圆内 $\Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$;

点 $P(x_0, y_0)$ 在圆外 $\Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$ 。

师:这道题研究了点和圆的位置关系。试问直线和圆有哪些位置关系?

生:相交、相离、相切。

师:相切是直线和圆的位置关系中比较常见,也比较重要的位置关系,在解析几何中,我们研究曲线常常要求出切线的方程,你能求出这圆上一点的切线方程吗?

例 已知圆的方程是 $x^2 + y^2 = 17$,求经过圆上一点 $P(\sqrt{6}, \sqrt{11})$ 的切线的方程。

师:你打算怎样求?

生:要求经过一点的直线方程,可利用直线的点斜式来求。

师:斜率怎么求?



生 :.....

师 :已知条件有哪些 ?可以直接利用吗 ?

不妨画张图看看。如图 2-22。

生 :切线与半径 OP 互相垂直 ,故斜率互为负倒数。

师 :哪位同学能够具体的说一说 ?

生 :半径 OP 的斜率 $k = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$,

因为圆的切线垂直于过切点的半径 ,

所以切线的斜率为 $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}$,由点斜式可得所求方程为 :

$$y - \sqrt{11} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}(x - \sqrt{6}) ,$$

即 $\sqrt{6}x + \sqrt{11}y - 17 = 0$ 。

师 :对照着圆的方程 $x^2 + y^2 = 17$ 和点 $(\sqrt{6}, \sqrt{11})$ 分析切线方程 ,你能作出怎样的猜想 ?

生 :.....

师 :由 $x^2 + y^2 = 17$ 怎样写出 $\sqrt{6}x + \sqrt{11}y - 17 = 0$?与已知点 $(\sqrt{6}, \sqrt{11})$ 有何关系 ?

如果看不出来 ,我们可以再演算两个例子试一试。谁来举例 ?

生 :圆的方程是 $x^2 + y^2 = 13$,过其上一点 $(2, 3)$ 的切线方程是 $2x + 3y - 13 = 0$ 。

生 :圆的方程是 $x^2 + y^2 = 5$,过其上一点 $(-2, 1)$ 的切线方程是 $-2x + y - 5 = 0$ 。

师 :发现规律了吗 ? 学生纷纷举手回答问题)

生 :分别用切点的横坐标和纵坐标代替圆方程中的一个 x 和一个 y ,便得到了切线方程。

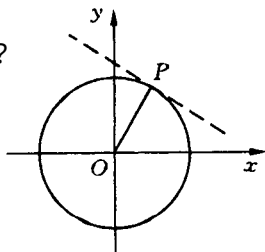


图 2-22



师:若将已知条件中圆半径改为 r , 点改为圆上任一点 (x_0, y_0) , 结论将会发生怎样的变化? 大胆地猜一猜!

生: $x_0 x + y_0 y = r^2$ 。

师:这个猜测对不对? 若对, 可否给予证明?

生:.....

师:这个问题就相当于:已知圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$, 求过圆上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线的方程。

用点斜式表示方程, 有什么条件?

生:切线若与 x 轴垂直, 则不能用点斜式表示。

师:要求切线的斜率, 需要求半径 OP 的斜率, OP 的斜率一定存在吗?

(引导学生完成解题过程)

解 ① 若切线的斜率不存在 $x_0 = \pm r, y_0 = 0$, 切线方程为 $x = r$ 或 $x = -r$ 。

② 若半径的斜率不存在 $y_0 = \pm r, x_0 = 0$, 切线的方程为 $y = r$, 或 $y = -r$ 。

③ 若切线及半径的斜率都存在, 设切线的斜率为 k ,

半径 OP 的斜率 $k_1 = \frac{y_0}{x_0}$, 所以 $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{x_0}{y_0}$ 。

经过点 P 的切线方程为:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

亦即 $x_0 x + y_0 y = r^2$ 。(*)

经验证 ①② 均适合(*)式, 故切线方程为 $x_0 x + y_0 y = r^2$ 。

师:对照圆的方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 及点 $P(x_0, y_0)$, 看看切线方程与圆的方程有什么关系?

生:圆的方程可看成 $x \cdot x + y \cdot y = r^2$, 将其中一个 x, y 用切点



的坐标 x_0, y_0 替换, 可得到切线方程。

师: 按照这种方法, 若圆的方程是 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 过其上一点 (x_0, y_0) 的切线方程会是怎样的呢? 能猜到吗?

生: 切线方程为 $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$ 。

师: 你的猜测对吗? 可否给予证明?

这实际上就是: 已知圆的方程是

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

求经过圆上一点 (x_0, y_0) 的切线方程。

解 ① 若切线及半径的斜率都存在,

$$OP \text{ 的斜率 } k_1 = \frac{y_0 - b}{x_0 - a},$$

$$\text{所以切线的斜率 } k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}.$$

$$\text{故切线方程是 } y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x - x_0),$$

$$\text{即 } (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = r^2. (* *)$$

② 若切线或 OP 的斜率不存在时, 切线方程也是 $(*)$ 式。

师: $(*)$ 式与同学猜测的结果 $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$ 不同, 是我们猜错了, 还是算错了? 哪里出了毛病?

生: 对比两个方程, 凑出 $(x - a)$ 项, 将 $(*)$ 式整理如下:

$$[(x-a) - (x_0-a)](x_0-a) + [(y-b) - (y_0-b)](y_0-b) = 0,$$

$$\text{即 } (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2.$$

因为 P 在圆上,

$$\text{故 } (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2,$$

$$\text{所以切线方程为 } (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2.$$

这与同学们猜测的结果是一致的!



设计思想

在教学过程中,教师遵循数学本身的发展规律,同时注意到学生的认识规律,力求使它们同步协调,具体做法如下:

在探询圆的标准方程的过程中,引导学生用代数的方法研究平面几何中常见的曲线——圆。

从简单的、特殊的到复杂的、一般的,使用了观察、猜测、经验归纳等等合情推理的方法,同时引导学生对照圆的几何形状,观察和欣赏圆的方程,体会数学中的美学——对称、简洁。

在探求圆的切线方程时,运用波利亚一般解题方法求出过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程,同时也提出思考:若改变条件为圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,结论将发生怎样的变化?此时引导学生通过观察、类比、联想、猜测、归纳出一般方程,并且给以证明,既教猜想,又教证明。

在课堂上,运用问题性,使教学富有情趣性、激励性,同时通过问题和建议控制研究的方向与进程,通过问题和提示,帮助度过难关。



《椭圆及其标准方程》教学设计

教学目标

1. 使学生理解并掌握椭圆的定义、标准方程及其推导过程,并能进行简单应用。
2. 通过数形结合,教学生猜想,培养学生的探索发现能力。
3. 帮助学生树立运动变化的观点,培养学生的探索能力和进取精神。

教学重点与难点

对椭圆的定义的理解及其标准方程记忆是本节重点,椭圆标准方程的推导是难点。

教学过程

一、复习并引入新课

师:在解析几何中,我们通常把动点按照某种规律运动形成的轨迹叫做曲线。曲线和方程的关系是什么?

生:如果曲线上任意一点的坐标都是方程 $f(x, y) = 0$ 的解,同时以方程 $f(x, y) = 0$ 的解为坐标的点又都在曲线上,那么方程就是曲线的方程,曲线就是方程的曲线。

师:圆的定义是:在平面上,到定点的距离等于定长的点的轨迹;那么当动点满足哪些条件时轨迹仍然是圆?



生 ① 平面上到两个定点(距离为 $2d$)距离的平方和等于定值 a ($a > 2d^2$)的点的轨迹是圆;

② 平面上,与两个定点连线的斜率乘积为 -1 的点的轨迹是圆。

(以上结论在本节课之前书上第 61 页习题中,请学生自己总结。)

师:由此可见,平面上到两个定点距离或与两个定点连线满足某种条件的点的轨迹比较特殊,下面就从这点出发研究。

二、讲授新课

1. 请学生观察计算机演示如图 2-23,并思考两个问题。

(1) 动点是在怎样的条件下运动的?

(2) 动点运动出的轨迹是什么?

观察后请学生回答。

生:动点是在“到两个定点距离之和等于定值”这一条件下运动的,轨迹是椭圆。

师:椭圆这种曲线你在哪些地方见过?

生:立体几何中圆的直观图是椭圆。

生:人造卫星的运行轨道。

师:好,这种曲线在实际生活中是很常见的,很多物体的横截面的轮廓线也是椭圆,可见学习这种曲线的有关知识是十分必要的。

(联系实际生活进行教学可以使教学内容亲切,激发学生的学习热情。)

师:是否到两个定点距离之和等于定值的点的轨迹就一定是椭圆呢?

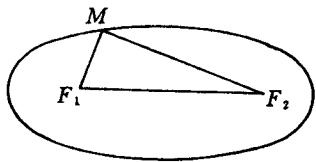


图 2-23



(学生可能一时答不出,教师可请学生观察计算机演示如图 2-24 并思考。)

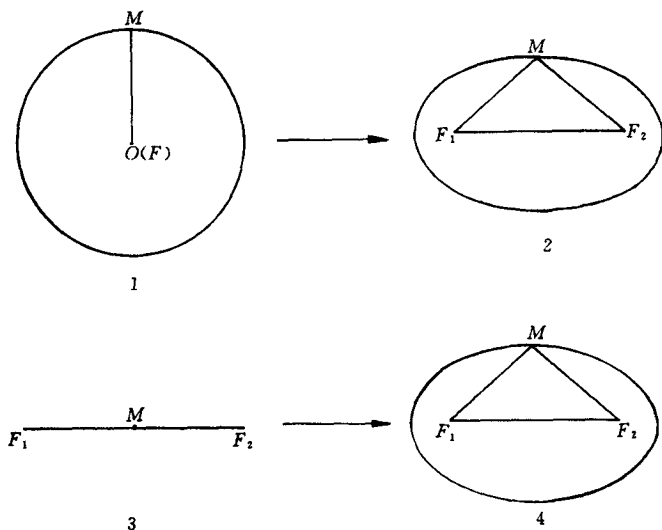


图 2-24

师:当两个定点位置变化时,轨迹发生了怎样的变化?

生:当两个定点重合时,轨迹变化为圆;当定值等于两个定点间的距离时,轨迹是一条线段。

师:可见圆是椭圆的特例。据此你能得到什么结论?

生:平面上不存在到两个定点距离之和小于定值的点。

说明:观察计算机演示“通过两焦点位置的改变而引起椭圆形状变化的课件”,首先从一个点分裂为两个点,曲线从圆变成椭圆,随着两点间距离的增大,椭圆越来越扁,直到动点到此两点距离之和恰好等于两点间距离时,动点的运动曲线变成了线段,然后随着两点间距离的缩小,曲线再变成椭圆;当两点重合时,曲线又变成了圆,如此反复……如图 2-24。从而启发学生发现椭圆定义中的条件,然后师生



共同小结完成下表,教师可用投影进行完整的总结。

在平面上到两个定点 F_1, F_2 距离之和等于定值 $2a$ 的点的轨迹为

$$\begin{cases} \text{椭圆} (2a > |F_1 F_2|); \\ \text{线段} (2a = |F_1 F_2|); \\ \text{不存在} (2a < |F_1 F_2|). \end{cases}$$

最后由学生口述教师板书:把平面内与两个定点 F_1, F_2 距离之和等于定值 $2a$ 的点的轨迹叫做椭圆,其中 $2a > |F_1 F_2|$ 。顺便可以指出两个定点叫做焦点,两个焦点之间的距离叫做焦距,用 $2c (c > 0)$ 表示。

2. 推导椭圆的标准方程。

师:下面我们一起来推导椭圆的方程。

教师提出问题:求到两个定点 F_1, F_2 距离之和等于定值 $2a (2a > |F_1 F_2|)$ 的点的轨迹。

师:求曲线方程的步骤是什么?

生:求曲线方程的步骤是:①建立坐标系设动点坐标;②寻找动点满足的几何条件;③把几何条件坐标化;④化简得方程;⑤检验其完备性。

师:那么此题应如何建立坐标系呢?建立直角坐标系一般应符合简单和谐化的原则,如使关键点的坐标、关键几何量(距离、直线的斜率等)的表达式简单化,注意要充分利用图形的特殊性。

(让学生思考后回答)

教师归纳大体上有如下三个方案:

① 取一个定点为原点,以 F_1, F_2 所在直线为 x 轴建立直角坐标系,如图 2-25;

② 以 F_1, F_2 所在直线为 y 轴,线段 $F_1 F_2$ 的中点为原点建立直角坐标系,如图 2-26;



③ 以 F_1, F_2 所在直线为 x 轴, 线段 $F_1 F_2$ 的中点为原点建立直角坐标系, 最后选定方案 ②, 如图 2-27 推导出方程。

解 1) 建系: 以 F_1, F_2 所在直线为 x 轴, 线段 $F_1 F_2$ 的中点为原点建立直角坐标系, 并设椭圆上任意一点的坐标为 $M(x, y)$,

设两定点坐标为:

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0),$$

$$2) \text{ 则 } M \text{ 满足: } |MF_1| + |MF_2| = 2a,$$

$$3) \text{ 坐标化即: } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

4) 化简。

师: 我们要化简方程就是要化去方程中的根式, 你学过什么办法?

生: 化去方程中的根式应该用移项平方、再移项再平方的办法。

师: 好, 下面我们就一起来完成这部分计算。(师生共同完成)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a -$$

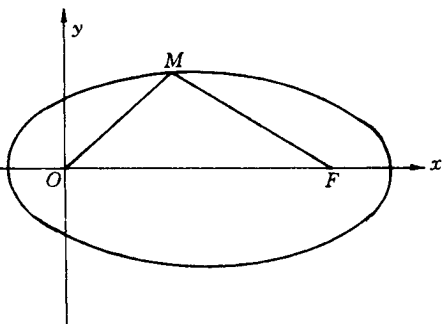


图 2-25

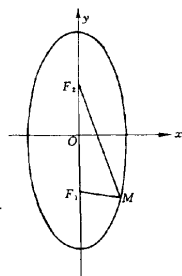


图 2-26

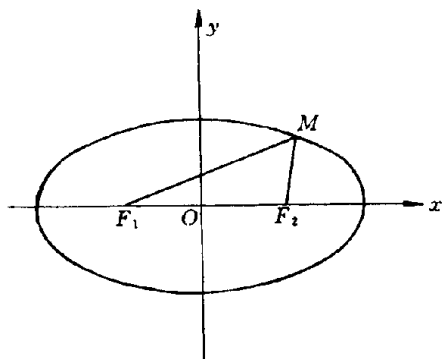


图 2-27



$\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ 两边平方得:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

即 $a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$,两边再平方得:

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \text{ 整理得:}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

师 还有其他化简的方法吗?一般遇到化简根式的问题你应该想到什么?

生 共轭根式。

师 好,下面我们就通过构造共轭根式、解方程组的办法化方程中的根式。

(师生共同完成。此部分内容可根据学生情况选讲)

$$(x+c)^2 + y^2 - [(x-c)^2 + y^2] = 4cx \quad \textcircled{2} \text{ ,由 } \textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ 得:}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{4cx}{2a} \quad \textcircled{3} \text{ ,} \textcircled{1} + \textcircled{3} \text{ 得:}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \frac{cx}{a} + a \quad \textcircled{4}$$

$$\text{两边平方得: } x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2},$$

$$\text{化简得 } (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

师 到此我们已经推导出了椭圆的方程,但此形式还不够简洁,且 x, y 的系数形式不一致,为了使方程形式和谐且便于记忆和使用,我们应该如何将方程进行变形呢?(这里,数学审美成为研究发现的动力。)

学生此时可能还不理解,教师可启发学生观察图形如图 2-28,看看 a 与 c 的关系如何?

师 请结合图形找出方程中 a, c 的关系。

生 根据椭圆定义知道 $a^2 > c^2$, 且如图所示, a 与 c 可以看成 $Rt\triangle MOF_2$ 的斜边和直角边。



师:很好!那我们不妨令 $b^2 = a^2 - c^2$, 则方程就变形为 $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, 如果再化简, 你会得到什么形式的方程呢?

生: 方程变化为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (※)

师: 其中 a 与 b 的关系如何? 为什么?

生: $a > b > 0$, 因为 a 与 b 分别是 $\text{Rt}\triangle MOF_2$ 的斜边、直角边。

教师指出(※)式就是焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程, 最后说明:

1) 方程中条件 $a > b > 0$ 不可缺少(结合图形), 当 $a = b > 0$ 时, 就化成圆心在原点的圆的方程, 从而进一步说明圆是椭圆的特例(这实际上是一种极限情况。)

2) b 的选取虽然是为了方程形式简洁与和谐, 但也有实际的几何意义, 即: $b^2 = a^2 - c^2$;

3) 请学生猜想: 若用方案③(即焦点在 y 轴上), 得到的方程形式又如何呢?

(启发学生根据对称性进行猜想)

生: 方程形式为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 。

师: 请同学们课后进行推导验证。

师: 此时方程中 a 与 b 的关系又如何? 结合图形请学生将条件 $a > b > 0$ 补上。)

3. 椭圆的第二定义:

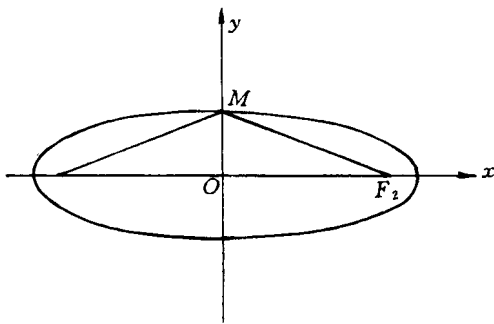


图 2-28



请学生观察方程推导过程中的④式:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \frac{cx}{a} + a. \quad (4)$$

师:④式左边表示什么?

生:④式左边可以表示动点 $M(x, y)$ 到一定点 $F_1(-c, 0)$ 的距离;

师:我们将④式右边变形为:

$$\frac{cx}{a} + a = \frac{c}{a} \left(x + \frac{a^2}{c} \right) > 0, \text{ 你有何联想?}$$

生:④式右边可以表示为动点 $M(x, y)$ 到定直线 $x = -\frac{a^2}{c}$ 的距离。

师:好,下面我们将④式变形为:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \frac{c}{a} \left(x + \frac{a^2}{c} \right), \text{ 进一步变形为:}$$

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{x + \frac{a^2}{c}} = \frac{c}{a}.$$

师:由此可见,椭圆还可以从另一方面定义,你能用自己的语言叙述吗?

生:椭圆可以看成是平面内到定点的距离与到定直线的距离之比为定值的点的轨迹。

师:你能说说定值的取值范围吗?

生:由于 $a > c > 0$, 所以 $0 < \frac{c}{a} < 1$ 。

(由此引出椭圆的第二定义,教师板书。)

椭圆的第二定义:平面内到定点的距离与到定直线的距离之比为定值 e ($0 < e < 1$) 的点的轨迹为椭圆。

师:关于椭圆第二定义的其他问题我们将在下节课学习。下面我



们看看如何应用本节的知识解决问题。

三、例题

例1 平面内两个定点间的距离为8,写出到这两个定点距离之和为10的点的轨迹方程。(由学生完成)

解 所求轨迹是椭圆,两个定点为焦点,用 F_1, F_2 表示,不妨以 F_1, F_2 所在直线为 x 轴,线段 $F_1 F_2$ 的中垂线为 y 轴,建立直角坐标系,则 $2a = 10, 2c = 8$,因为 $b^2 = a^2 - c^2 = 9$,

故所求轨迹方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。

(另一种情况 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ 也可以,但只有一解。)

本题的主要问题是:很多学生不建立坐标系就写出了方程。强调建立不同的坐标系会得到不同的方程,因此当题目中没有给定坐标系时,首先应选择合适的坐标系。

课堂练习1:写出适合下列条件的椭圆的标准方程(其中(1)、(2))学生回答)。

(1) $a = 4, b = 1$, 焦点在 x 轴上;

答:所求方程为 $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ 。

(2) $a = 4, c = \sqrt{15}$, 焦点在 y 轴上;

答:所求方程为 $\frac{y^2}{16} + x^2 = 1$ 。

(2)两个焦点的坐标分别是 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$,且经过 $P(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$;

略解 $2c = 4$, 故设所求方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 4} = 1$ 。

因为经过 $P(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ 求得 $a^2 = 10, b^2 = 6$,



故所求方程为 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ 。

例2 已知定圆 $x^2 + y^2 - 6x - 55 = 0$ 动圆 M 和已知圆内切且过点 $P(-3, 0)$ 求圆心 M 的轨迹及其方程。

分析

师:由两圆内切,你会得到什么结论?

生:圆心距等于半径之差的绝对值。

师:根据图形,请用数学符号表示此结论。(如图2-29)

生:此结论表示为: $|MQ| = 8 - |MP|$ 。

师:观察上式,你有何联想?

生:上式可以变形为 $|MQ| + |MP| = 8$, 又因为 $|PQ| = 6 < 8$, 所以圆心 M 的轨迹是以 P, Q 为焦点的椭圆。

师:很好。下面我们观察计算机演示验证一下此结论。(演示计算机如图2-29)

师:我们的结论完全正确,下面请大家把解题过程写在笔记本上。(指定一名学生板演,然后更正。)

解 已知圆化为 $(x - 3)^2 + y^2 = 64$,

圆心 $Q(3, 0)$, $r = 8$,

所以 P 在定圆内。

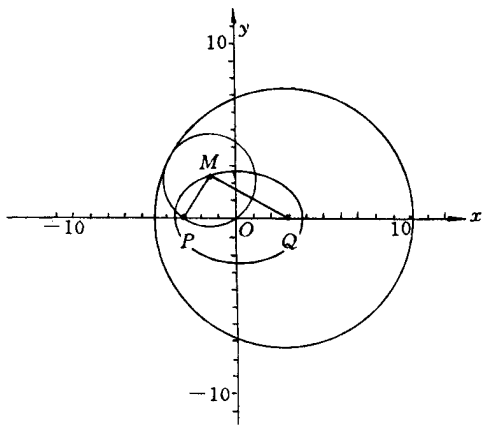


图 2-29

设动圆圆心为 $M(x, y)$, 则 $|MP|$ 为半径。

又圆 M 和圆 Q 内切, 做 $|MQ| = 8 - |MP|$,

$|MQ| + |MP| = 8$, 故 M 的轨迹是以 P, Q

为焦点的椭圆, 且 PQ 中点为原点, 所以 $2a = 8$, $b^2 = 7$, 故动圆



圆心 M 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 。

课堂练习 2:

已知 $\triangle ABC$ 的一边长 $BC = 6$, 周长为 16, 求顶点 A 的轨迹方程。

略解 以 BC 所在直线为 x 轴, BC 中垂线为 y 轴建立直角坐标系, 设顶点 $A(x, y)$, 根据已知条件得 $|AB| + |AC| = 10$ 再根据椭圆定义得顶点 A 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (特别强调检验)

因为 A 为 $\triangle ABC$ 的顶点 故点 A 不在 x 轴上 所以方程中要注明 $y \neq 0$ 的条件。

四、小结(由师生共同完成)

1. 知识方面 椭圆的定义(要注意定义中的条件)以及椭圆的标准方程要注意焦点的位置与方程形式的关系;

2. 能力方面 巩固了求曲线方程的步骤与方法, 要学会用运动变化的观点研究问题;

3. 体会到数学知识的和谐美, 几何图形的对称美。

布置作业:

(1) 看书第 71 页至第 74 页。

(2) 第 74 页 2、3。

教案设计说明

这份教案是针对基础较好班级的情况设计的, 以提高学生思维素质、既教学生猜想又教学生证明为着眼点, 通过创设问题情境, 达到提高学生学习能力的目的。以下将从 4 个方面具体说明。

1. 关于教学目标的制订

《椭圆及其标准方程》是在学生学习了曲线和方程及圆的有关



知识以后学习的第二种圆锥曲线,因此这一节的教学既可以对前面所学知识情况进行检查,又可以为进一步学习其他两种圆锥曲线打好基础。所以学好本节内容具有承上启下的重要意义,据此制订了教学目标 1;在图形由圆变化到椭圆的过程中蕴涵着运动变化和从量变到质变的哲学思想,通过学生的观察、猜想到验证,既可以让学生体会圆与椭圆两种曲线的内在联系,又为今后的学习做了铺垫,据此制定了目标 2、3。

2. 关于教学过程的设计

在教学过程中,为了使教学目标得到有效的落实,在以下两个环节上进行了精心设计:

(1)在引入椭圆定义时,为了使学生了解圆是椭圆的特例以及两种曲线之间的内在联系,于是在本节课之前让学生通过课本习题亲自从轨迹形成的角度给圆下定义,从而使学生接受椭圆定义时不会感到陌生,同时也落实了教学目标 2、3;

(2)在推导椭圆的标准方程的环节中,使学生对前面求曲线方程的步骤和方法进行了复习,既加强了教学中学生的参与,又使教学目标 2、3 得到进一步落实;

3. 关于教学例题的选择

针对学生的情况,在例题选择上也力求从中档题起步,对一些解題形式单一的作为课堂练习,这样可以省下课时,给学生充分的时间进行观察、猜想、讨论,从而提高课堂效率。通过例 1 着重强调建立不同坐标系方程形式也不同;例 2 的目的则在于进一步加深学生对椭圆定义的理解,培养他们运动变化的观点和用数形结合的思想解題,从而使教学目标 1 也得到落实。

4. 关于教学方法和手段的选择

在教法的选择上,通过用“MM”教学方式指导课堂教学,使学生直接参与课堂教学,充分体现学生的主体作用;启发、讨论的教学形式既增加了教师与学生、学生与学生之间的交流,又能使他们的思路



更加开阔,思维更加敏捷,从而引发了他们的学习兴趣。在教学手段的选择上,也力求克服只为单纯展示课件的教学形式,使多媒体辅助教学的作用得以充分发挥,从而使学生想象、发现的空间更加广阔。



《双曲线的几何性质》教学设计

教学目标

1. 通过课堂讨论让学生探究、推导、并初步掌握双曲线的基本性质。
2. 通过探究双曲线的性质,培养学生运用数形结合的思想,用联想、类比、归纳的方法,提高解决问题的能力。

教学重点与难点

双曲线的渐近线既是重点也是难点。

教学过程

师:上节课我们根据双曲线的定义推导出双曲线的标准方程。今天我们以其标准方程为工具,研究双曲线的几何性质。

(这时写课题:双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的性质)那么双曲线有哪些性质呢?请同学们对比椭圆性质的讨论,谈谈这一问题。

生:双曲线也应有范围、对称性、顶点、离心率的问题。

师:好,那么请同学们动手做。

(目的是让学生产生联想椭圆时的情景,用类比方法推导双曲线范围,……联想和类比也是数学中非常重要的思维方法。)

生:把双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 变形为 $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$ 。因为 $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$,



因此 $x^2 \geq a^2$,即 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$,再把双曲线方程变为 $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$,由 $|x| \geq a$,所以 $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$ 即 $y \in R$,换句话说 :双曲线的范围是 $y \in R$ 且 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$ 。

师 这个结果说明了什么 ?

(这时写板书 :1. 范围 : $x \geq a$ 或 $x \leq -a$, $y \in R$)

生 :双曲线在两条平行直线 $x = \pm a$ 的两侧 ,而在两条平行线 $x = \pm a$ 之间没有图象。

师 如果双曲线的标准方程是 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 时 ,它的范围是什么 ?

生 :同理双曲线的范围是 : $y \geq a$ 或 $y \leq -a$, $x \in R$ 。

师 :下面我们来讨论双曲线的对称性 ,哪位同学能根据双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的标准方程 ,判断它的对称性 ?

生 :在标准方程中 ,把 x 换成 $-x$,或把 y 换成 $-y$,或把 x, y 同时换成 $-x, -y$ 时 ,方程都不变 ,所以图形关于 y 轴、 x 轴和原点都是对称的。

师 很好 ,这说明坐标轴是双曲线的对称轴 ,原点是双曲线的对称中心。双曲线的对称中心叫做双曲线的中心。

(板书 2. 对称性 :双曲线的对称轴是 x 轴、 y 轴 ,原点是它的对称中心。)

请大家回忆一下什么叫做曲线的顶点。

生 :曲线与它的对称轴的交点叫做曲线的顶点。

师 :那么咱们一起来判断一下 ,双曲线有几个顶点 ?顶点的坐标是什么 ?

生 :在标准方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中 ,令 $y = 0$ 得 $x = \pm a$;令 $x = 0$, y 无解。这说明双曲线有两个顶点 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ 。



师:不错,但大家要注意,一般曲线的顶点不一定在坐标轴上,而对称轴上位于两顶点间的线段

A_1A_2 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的实轴。所以双曲线实轴 $|A_1A_2|$ 长为

$2a$, 尽管双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 y 轴

无公共点,但 y 轴上的两个特殊点

$B_1(0, -b), B_2(0, b)$ 可看作双曲线与 y 轴的两个虚交点(这个问题待同学们学习复数之后将可以作出解释)。这两个点在双曲线中也具有举足轻重的作用。我们称 B_1B_2 为双曲线的虚轴,所以虚轴 $|B_1B_2|$ 的长为 $2b$ 。

(板书 3. 顶点: $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$, 称 A_1A_2 为实轴, B_1B_2 为虚轴, 其中 $B_1(0, -b), B_2(0, b)$, 当然当 $a = b$ 时, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的实轴长与虚轴长相等, 称其为等轴双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 。)

(前面这些内容可由椭圆类比过来, 学生不会感到困难, 下面进入这节课的难点渐近线, 思维从问题开始。)

师:椭圆与双曲线还有一个最大不同是曲线的范围及其走向。曲线的范围与走向是我们研究曲线性质的一个重要方面, 因为它可以为我们绘制曲线的草图提供依据, 那么大家想想双曲线的走向是什么样的呢? 谁能比较准确地画出双曲线?

生:在第一象限内双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可以化为 $y = \frac{b}{a}$

$\sqrt{x^2 - a^2}$, 是增函数。

师:很好, 别的同学还有什么补充?

生:根据双曲线与 x 轴对称可知它在第四象限是减函数。又根据双

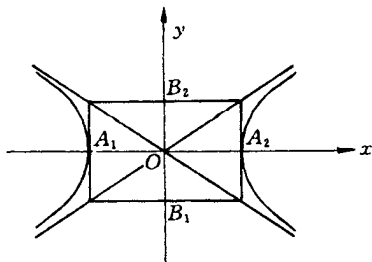


图 2-41



曲线与 y 轴对称可知在第二、第三象限分别是减函数和增函数。

师:只知道函数的增减性,是不能准确地作出图形的,我们还知道什么呢?

生:可以用描点法。

师:通过列表描点,我们能把双曲线顶点及其附近的点比较精确地画出来。但双曲线向何处伸展就不清楚了,怎么办呢?

生:没人回答。

(学生的思维受到了阻力,老师可以给点帮助。)

师:过去我们学过双曲线吗?

生:在初三学过双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 。

师:双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 具有什么性质?当时我们是怎样画出双曲线的呢?

生:双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 位于第一、三象限,当双曲线伸向远处时,它逐渐越来越接近 x 轴和 y 轴。

师:也就是说 x 轴、 y 轴是双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的渐近线,对于一般的双曲线它们有没有渐近线呢?如果有的话,它们的渐近线是什么呢?

(稍停,让学生思考。)

师:刚才我们讨论了双曲线的范围、对称性、顶点,我们回忆一下,双曲线的范围 $x \leq -a$ 或 $x \geq a$ 是怎样得出来的?由 $y = \pm \frac{b}{a}$

$\sqrt{x^2 - a^2}$, 知 $x^2 - a^2 \geq 0$, 所以 $x \leq -a$ 或 $x \geq a$, 从而得出了双曲线在两条平行线 $x = \pm a$ 的两侧,我们能不能把双曲线的范围再缩小一点?让我们先看看双曲线在第一象限的情况,设 $M(x, y)$ 是双曲线上第一象限内的点,则 $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ ($x > a$), 考察一下 y 的变化



范围：

因为 $x^2 - a^2 < x^2$, 所以 $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2} = \frac{b}{a}x$,

即 $y < \frac{b}{a}x$, 这个不等式意味着什么？

(再让学生思考一下)

这是个二元一次不等式 , 我们知道它表示一个区域 , 即直线 $y = \frac{b}{a}x$ 下方半个平面区域。(用先作矩形的方法 , 画出两条直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 然后指出区域。)

由于双曲线和直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 对称于坐标轴 , 所以双曲线(两支)在直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 之间(含 x 部分)这样 , 我们就进一步缩小了双曲线所在区域的范围。

然而直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有什么联系呢？为此 , 我们考虑下列问题：

经过 $A_1 A_2$ 作 y 轴平行线 $x = \pm a$, 经过 $B_1 B_2$ 作 x 轴平行线 $y = \pm b$, 4 条直线围成一个矩形 , 矩形的两条对角线所在直线的方程是 $y = \pm \frac{b}{a}x$ (如图 2-42) , 从图 2-42

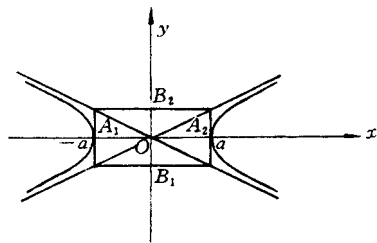


图 2-42

可以看出 , 双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的各支向外延伸时 , 与这两条直线逐渐接近 , 谁能来试一试证明这个结论？



生: 因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 关于 x 轴, y 轴对称, 所以只需要证明双曲线上在第一象限内的点随着远离原点而与直线 $y = \frac{b}{a}x$ 无限接近就行了。

师: 对, 什么叫做双曲线上的点在逐渐远离原点时, 它与直线 $y = \frac{b}{a}x$ 越来越接近, 再具体点。

生: 在第一象限内, 双曲线上任一点 $M(x, y)$, 当 x 无限增大, 点与直线 $y = \frac{b}{a}x$ 的距离 d 就无限接近零。

师: 咱们一起证明一下 (让学生说, 老师适当整理书写。)

生: 双曲线在第一象限内方程可以写成 $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ($x > a$), 设 $M(x, y)$ 是双曲线上的点, 这时 $M(x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2})$, M 到直线 $bx - ay = 0$ 的距离为 $d(x) = \frac{|bx - b\sqrt{x^2 - a^2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

(学生思路受阻, 不知所措。)

师: 这个式子告诉我们, 当 x 无限增大时, 分母为常数, 而分子是一个无穷减无穷的绝对值, 看不清楚这个距离是否趋于零, 需要继续变形。我们能不能让分子为常数, 而分母为无穷大呢? 谁有办法?

生: 分子和分母同乘以 $|bx + b\sqrt{x^2 - a^2}|$ 就可以了。

师: 很好, 请继续往下推。

$$\begin{aligned} \text{生: } d(x) &= \frac{|bx - b\sqrt{x^2 - a^2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|bx - b\sqrt{x^2 - a^2}| \cdot |bx + b\sqrt{x^2 - a^2}|}{\sqrt{a^2 + b^2} |bx + b\sqrt{x^2 - a^2}|} \end{aligned}$$



$$= \frac{b^2 a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} |x + \sqrt{x^2 - a^2}|}.$$

师 这个结果告诉我们什么?你能解释一下吗?

生 当 x 无限增大时,分子是常数而分母是无穷大,也就是说当 x 无限增大时,点 $M(x, y)$ 到直线 $y = \frac{b}{a}x$ 的距离就无限趋于零,换句话说,当点 M 在第一象限远离原点时, M 就无限接近直线 $y = \frac{b}{a}x$, 根据双曲线的对称性,在其他象限内也有类似的情况。

师 我们把两条直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的渐近线,那么实轴在 y 轴上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程是什么呢?

生 由于实轴在 y 轴上的双曲线方程是将实轴在 x 轴上的双曲线方程的 x, y 字母对调而得到。所以,双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程是 $x = \pm \frac{b}{a}y$ 即 $y = \pm \frac{a}{b}x$ 。

(板书 4. 定义: 直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线, 直线 $y = \pm \frac{a}{b}x$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线。)

师 这样,我们就比较完满地解决了画双曲线远处的走向问题,从而可以比较精确地画出双曲线。例如,画双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, 先作渐近线 $y = \pm \frac{2}{3}x$, 再描几个点,就可随手画出比较精确的双曲线。

例 1 求下列双曲线的渐近线方程(写成直线的一般式),并画出双曲线。

(1) $4x^2 - 9y^2 = 36$

(2) $4x^2 - 9y^2 = -36$



$$(3) 25x^2 - 4y^2 = 100 \quad (4) 25x^2 - 4y^2 = -100$$

请看结果：

双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 渐近线方程是 $2x \pm 3y = 0$ ，

双曲线 $4x^2 - 9y^2 = -36$ 渐近线方程是 $2x \pm 3y = 0$ ，

双曲线 $25x^2 - 4y^2 = 100$ 渐近线方程是 $5x \pm 2y = 0$

双曲线 $25x^2 - 4y^2 = -100$ 渐近线方程是 $5x \pm 2y = 0$ 。

师：可以发现，双曲线方程与其渐近线方程之间似乎存在某种规律（启发学生讨论、归纳）。

生：每项开平方，中间用正、负号连接起来，常数项改为零，就得到渐近线方程。

师：谁还补充？

生：以各项系数绝对值的算术平方根为 x, y 的系数，且用正负号连接起来等于零，就是渐近线方程。

师：还有吗？

生：如果两个曲线方程的二次项相同，那么渐近线方程就相同，与常数项无关。

生：反过来，渐近线的方程相同，双曲线方程的二次项就相同，常数可以不同。

生：应该说二次项系数成比例。

师：大家揭示了其中的规律。但是，大家的回答还不够严格，也不够简洁，是否可以归纳出一种方法，把双曲线方程处理一下，就得到渐近线方程？

把双曲线方程中的常数项改成零，会怎样呢？ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ，即 $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 0$ ，这表示什么？这就表示两条渐近线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ 或 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ 。因为渐近线上的点适合这个方程，适合这个方程的点在



渐近线上。所以 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 就是两条渐近线的方程,实际上,两条渐近线也可看作二次曲线,是特殊的双曲线。这个结论很容易记忆。

(板书:双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, 双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程是 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ 。)

最后我们讨论双曲线的离心率。

(板书 5. 定义 双曲线的焦距与实轴长的比 $e = \frac{c}{a}$ 叫做双曲线的离心率。)

那么双曲线的离心率与椭圆的离心率有什么不同?

生:因为 $c > a$ 所以双曲线的离心率 $e > 1$ 。

师:除了离心率的范围不同以外,双曲线的形状与 e 有什么关系?

生:由等式 $c^2 - a^2 = b^2$, 可知 $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{e^2 - 1}$ 。因此 e 越大, $\frac{b}{a}$ 也越大,即渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大,这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔,由此可知,双曲线的离心率越大,它的开口就越开阔。(这时板书:双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a}$, 所以 $e > 1$ 且 e 越大双曲线的开口就越开阔。)

例 2 求双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 上任一点到两渐近线的距离的积。

师:谁能解决这个问题?

生:在双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 上任取一点 $M(x, y)$, 双曲线两条渐近线方程是 $l_1: \sqrt{3}x + 2y = 0$, $l_2: \sqrt{3}x - 2y = 0$, $M(x, y)$ 到 l_1, l_2 的距离分别是 $d_1 = \frac{|\sqrt{3}x + 2y|}{\sqrt{7}}$, $d_2 = \frac{|\sqrt{3}x - 2y|}{\sqrt{7}}$, 所以 $d_1 \cdot d_2 =$



$$\frac{|3x^2 - 4y^2|}{7} = \frac{12}{7}.$$

师:从这个题的解法过程,能否得到更一般的结论。

生:双曲线可用一般形式表示,此题可改为求双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上任一点到两条渐近线的距离的积。

师:还能得到什么结论?

生:此题是否还可改为证明题。即证明:双曲线上任一点到两渐近线的距离之积是个常数。

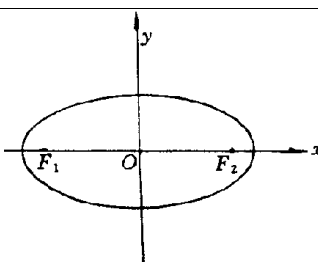
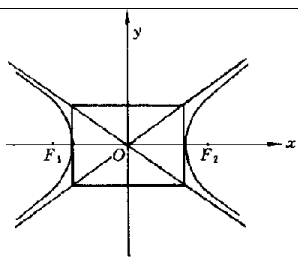
师:谁来证明这个结论?

生:设双曲线上任一点为 $M(x, y)$, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线为 $bx \pm ay = 0$, 所以 M 到这两条渐近线的距离的积为 $\frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2b^2}{c^2} = (\text{常数}).$$

师:下面小结一下今天课所讲的内容:

把椭圆、双曲线性质列表如下,让学生填写。

	椭圆	双曲线
定义	$ MF_1 + MF_2 = 2a$ ($2a > F_1F_2 $)	$ MF_1 - MF_2 = 2a$
图形	 图 2-43	 图 2-44



	椭圆	双曲线
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
范围	$ x \leq a, y \leq b$ (x, y 都有限)	$ x \geq a, y \in R$ (x, y 都无限)
对称性	关于 x 轴, y 轴, 原点都对称	关于 x 轴, y 轴, 原点都对称
顶点	$(\pm a, 0), (0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$
离心率	$0 < e = \frac{c}{a} < 1$	$e = \frac{c}{a} > 1$
渐近线	无	$y = \pm \frac{b}{a}x$

作业:

第 91 页练习 2, 3. 习题七: 1, 3, 4.

设计说明

1. 本节课的内容是通过双曲线方程推导研究双曲线的性质, 采用把椭圆的性质类比到双曲线上来, 让学生自己得到一些类似的结论。一句话, 在教学中, 凡是经过努力学生自己能得到的结论应该让学生自己得到, 凡是难度不大, 经过努力学生自己能解决的问题, 应该让学生自己解决。这样有利于调动学生学习的积极性, 有利于刺激和激发学生的学习兴趣, 同时也有利于学生建立信心, 使他们的主动性得到淋漓尽致的发挥, 从中提高学生的思维能力和解决问题的能力。

2. 这节课的难点是双曲线的渐近线, 故采取了有目的的精巧妙地存疑设问, 用悬念激发学生的情趣, 促进思考。根据已知与未知、新知识与旧知识、现象与本质之间的矛盾来明确探索课题。这样引入双曲线渐近线比较自然而且合理推理, 从而提出问题, 解决问题, 善



始善终。

3. 如果学生水平较高或时间允许,在帮助学生从两个双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 中概括出渐近线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 或 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$ 后,为这一般性的结论,最好再给出证明就更完美了。那么双曲线 $A^2 x^2 - B^2 y^2 = C$ ($C \neq 0$),它的渐近线是不是 $A^2 x^2 - B^2 y^2 = 0$ 呢?回答是肯定的。分情况证明一下:若 $C > 0$, $A^2 x^2 - B^2 y^2 = C$,即 $\frac{x^2}{\frac{C}{A^2}} - \frac{y^2}{\frac{C}{B^2}} = 1$,所以可设 $a^2 = \frac{C}{A^2}$, $b^2 = \frac{C}{B^2}$,即 $a = \frac{\sqrt{C}}{A}$, $b = \frac{\sqrt{C}}{B}$,

故渐近线方程为 $y = \pm \frac{\frac{\sqrt{C}}{B}}{\frac{\sqrt{C}}{A}} x$ 即 $y = \pm \frac{A}{B} x$ 。也可以化为 $Ax \pm By = 0$,

即 $A^2 x^2 - B^2 y^2 = 0$ 。其他情况,同学们可以自己去证明。反之,渐近线为 $Ax \pm By = 0$ 的双曲线是什么?可以证明: $A^2 x^2 - B^2 y^2 = C$ ($C \neq 0$)。 $C > 0$ 时,实轴在 x 轴上; $C < 0$ 时实轴在 y 轴上。因此我们得到下面结论: (1) 双曲线 $A^2 x^2 - B^2 y^2 = C$ ($C \neq 0$) 的渐近线方程为: $A^2 x^2 - B^2 y^2 = 0$ (2) 渐近线方程是 $Ax \pm By = 0$ 的双曲线方程是 $A^2 x^2 - B^2 y^2 = C$ ($C \neq 0$ 且为待定常数。)

4. 课中的例2,让学生做完后,采取继续反思、一题多变、一题多解的训练,这样做好处是多方面的。第一,每做完一个题都让学生养成一个反思的好习惯,这题还有没有其他解法?比较一下它们的优劣。第二,这题还能不能引申?第三,把已知和结论适当地调整,这题还能不能成立?第四,此题的结论是否有推广的价值?从而通过做一个题相当于做一类题,以少胜多,真正地摆脱题海战术对学生的无情摧残。从根本上提高教学效果,使学生在做题中,总结规律,发展思维,提高知识的应用能力和提出问题、解决问题的能力。



《坐标平移》教学设计

教学目标

1. 使学生理解坐标轴平移的意义和作用,掌握平移公式的导出过程。

2. 指导学生运用运动变换的思想、类比的思想正确理解新旧坐标之间的关系。在此基础上掌握移轴公式的应用,学会再待定系数法及配方法化简曲线的方程。

3. 培养学生勇于探索及严谨的思维方式,大胆创新、勇于进取的思维品质。

教学重点与难点

1. 用运动变换的思想导出平移公式。
2. 正确利用平移公式化简方程。
3. 对平移公式的正确理解是本节的难点。

教学过程

一、问题的提出(创设情境)

师:求椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的顶点坐标。

生(很容易得出)顶点 $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$, $B_1(0, -3)$, $B_2(0, 3)$

师:椭圆 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ 的顶点坐标还是上述 $A_1(-4,$



$O), A_2(4, 0); B_1(0, -3), B_2(0, 3)$ 吗?

(学生讨论)

生 椭圆 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

的中心不在坐标原点, 因此顶点的坐标不是以上 4 个。

师 应该如何求?

生 转化为中心在坐标原点的椭圆标准方程。

师 怎样转化?

此时学生讨论, 得出两种方案。
一是平移坐标轴, 将坐标原移到椭圆的中心。二是移图, 将椭圆的中心移到坐标原点; 而椭圆长轴短轴的长度不变。

师 两种方法的目的都是要将椭圆方程化为最简单的标准方程。我们

知道对于同一个点, 由于选取的坐标系不同, 点的坐标也不同。(计算机演示) 在 xOy 坐标系下, 点 $A(-2, 3)$ 在 $x'O'y'$ 坐标系下, 点 $A'(-2, 0)$ (如图 2-61)

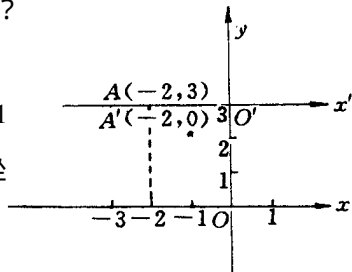


图 2-61

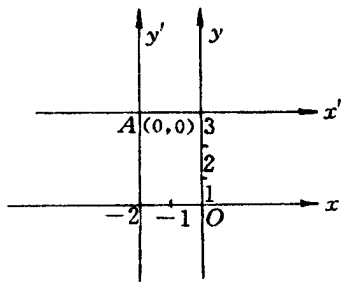


图 2-62

师 能否让 A 点的坐标再简单些?

此时学生很自然的想到将 y' 轴再移至过点 A 且垂直于 x' 轴的位置上, 此时点 $A(0, 0)$ (如图 2-62), 这说明将直角坐标系经过平移变换得到一个适当的直角坐标系后, 可以使点的坐标简化。

师 回到我们开始的问题上, 如何化简椭圆 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$?

生 将坐标原移至椭圆的中心 $O'(-2, 3)$, 过 O' 分别作 x 轴, y 轴的平行线, 得到 x' 轴, y' 轴。得到新坐标系“ $x'O'y'$ ”。(计算机演示



坐标轴的平移过程,学生一目了然。)

(学生说,教师板书。)

点 O' 的坐标

椭圆的方程

在 xOy 坐标系下 $(-2, 3)$

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

在 $x'O'y'$ 坐标系下 $(0, 0)$ $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$

师:把一个坐标系经过平移变换转化为适当的直角坐标系,可以改变曲线的方程,而保持曲线的形状不变。化简曲线的方程后,便于研究曲线的性质。

师(指出)移图的问题的实质是移轴的反问题,我们统一研究平移坐标轴问题。

二、坐标轴平移的定义

师:坐标轴平移时,坐标原点,坐标轴方向及单位长度是否都改变?可用计算机再一次演示。)

生:只改变坐标原点的位置,坐标轴的方向和长度单位均不改变。

师:如何给坐标轴平移下定义?

学生自己归纳坐标轴平移定义,教师给予修改完善,最后师生共同得出定义。

(计算机打出或投影以下定义。)

坐标轴的方向和单位长度都不改变,只改变坐标原点的位置,这种坐标系的变换叫做坐标轴平移,简称移轴。

三、寻觅、探索移轴公式

师:从上例我们看到,坐标轴平移前后,对于同一个椭圆,在两个不同坐标系下的方程不同(计算机演示坐标轴的平移过程)。



在 xOy 坐标系下,椭圆方程为 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ 。

在 $x'O'y'$ 坐标系下,椭圆方程为 $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$ 。

(让学生看到合理地选择坐标系,可得到结构完美而简单的标准方程。)

师:请同学们观察方程的两种不同形式,什么变了?什么没变?

生:椭圆中心的坐标变了,椭圆的长轴、短轴的长度没变。也就是椭圆的形状没变。

师(引导学生):我们知道在 xOy 坐标系下,中心坐标 $(-2, 3)$,在 $x'O'y'$ 坐标系下,中心坐标 $(0, 0)$ 同学们能否得出中心的新旧坐标间的关系?

生:通过观察两个坐标系下的方程知,在 xOy 坐标系下椭圆方程为 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$,在 $x'O'y'$ 坐标系下这个椭圆方程为 $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$,可以得出 $\begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = y - 3. \end{cases}$

师:观察得很好,从中我们可以得出椭圆的中心在原坐标系和在新坐标系中的坐标关系。

$\begin{cases} \text{新系横坐标} = \text{原系横坐标} + 2, \\ \text{新系纵坐标} = \text{原系纵坐标} - 3, \end{cases}$ 又由 $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3. \end{cases}$

知 $\begin{cases} \text{原系横坐标} = \text{新系横坐标} - 2, \\ \text{原系纵坐标} = \text{新系纵坐标} + 3. \end{cases}$ 而中心坐标 $(-2, 3)$ 即为新

坐标系的原点在原坐标系下的坐标。

师:显然中心可在平面内的任意位置,如何得出一般情况?如图 2-63,计算机演示。)

设 O' 在原坐标系 xOy 中的坐标为 (h, k) ,以 O' 为新坐标系原点。平移坐标轴,建立新坐标系 $x'O'y'$,平面内任意一点 M 在原坐标系中的坐标为 (x, y) ,在新坐标系中的坐标为 (x', y') ,请同学们指



出点 M 新旧坐标间的关系。

说明:问题提出后,学生们便开始讨论,请学生画图,并写出推导过程,最后由老师总结归纳出推理全过程。

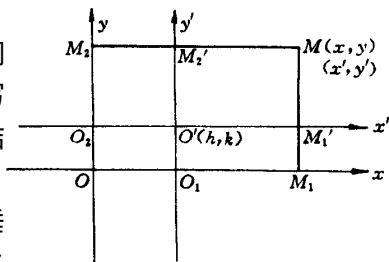


图 2-63

设点 M 到 x 轴、 y 轴的垂线的垂足分别是 M_1 、 M_2 , 到 x' 轴、 y' 轴的垂线的垂足分别是

M'_1 、 M'_2 , 由图 2-63 可知 $x = OM_1$, $y = OM_2$, $h = OO_1$, $k = OO_2$, $x' = O'M'_1$, $y' = O'M'_2$ 。

$$\text{则 } \begin{cases} x = OM_1 = O'M'_1 + OO_1 = x' + h \\ y = OM_2 = O'M'_2 + OO_2 = y' + k \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \text{ (说明)}$$

计算机演示在其他各象限位置时,仍可得出此结论。)

(师生共同小结推导公式的过程)推导公式分两步进行。第一步,用有向线段的数量表示 x , y , h , k , x' 和 y' 。第二步,由图可推导出公式

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \text{ 这两个关系都叫做平移公式。}$$

特别要明确指出 (h, k) 是新坐标原点在原坐标系中的坐标

$$\begin{cases} h = x - x' \\ k = y - y' \end{cases} \text{ (请学生自己总结出“记公式”的方法。)}$$

随后投影打出练习 1

新原点 O' 的坐标	点 P 在 xOy 坐标系中的坐标	点 P 在 $x'O'y'$ 坐标系中的坐标
$O'(4, 5)$	$(3, -6)$	$(\underline{\quad}, \underline{\quad})$
$O'(\sqrt{2}, -1)$	$(\underline{\quad}, \underline{\quad})$	$(-\sqrt{2}, 0)$
$O'(\underline{\quad}, \underline{\quad})$	$(3, -2)$	$(-2, 1)$

说明:可请一个学生给出数,由另一个学生求解,从而引起兴趣。



四、实例练习 掌握方法

1. 应用平移公式化简方程

由于点在不同坐标系中其坐标不同,所以用点组成的曲线在不同的坐标系中其方程也不同。当新原点 O' 选得适当时,平移坐标轴可将曲线方程化简。

例1 平移坐标轴,把原点移到 $O'(2, -1)$,求下列曲线关于新坐标系的方程,并且画出新坐标轴和曲线。

$$(1)x = 2, \quad (2)y = -1 \quad (3)\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

分析 因为坐标系的改变,曲线上每一点的坐标都相应地改变。所以,曲线的方程也要改变。设曲线上任意一点的新坐标为 (x', y') ,那么由移轴公式可知 $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$ 将其代入原方程就得到新方程

$$(1)x' = 0 \quad (2)y' = 0.$$

$$(3)\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

说明:师生共同分析解题思路后,让学生自己完成解题的全过程。

2. 利用坐标轴的平移化简二元二次方程

师 我们知道,由于坐标系的不同,方程的形式也不同,选择得当可使方程简化,选择不当还可能使方程更繁,因此我们研究如何选择新坐标系来化简方程。

例2 平移坐标轴化简方程 $x^2 - y^2 + 8x - 14y - 133 = 0$,并画出新坐标系和方程的曲线。

师 利用坐标轴平移达到化简方程的目的最重要的是应该确定什么?

生 新坐标原点 O' 的位置。



师:此题中新坐标原点不知,正是我们要找的,此时可利用什么关系?

生:可利用移轴公式 $x = x' + h, y = y' + k$ 。

师:对,我们不妨将公式 $\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$ 代入原方程,可得 $(x' + h)^2 - (y' + k)^2 + 8(x' + h) - 14(y' + k) - 133 = 0$,整理得 $x'^2 - y'^2 + (2h + 8)x' - (2k + 14)y' + h^2 - k^2 + 8h - 14k - 133 = 0$ 。

①

问:要将原方程化简,应该不含哪一项?

生:不含一次项,可达到将原方程化简的目的。

师:此时应该怎么办?

生:(自然得出)令 $2h + 8 = 0, 2k + 14 = 0$,得出 $h = -4, k = -7$ 。

学生们很高兴,这正是我们要找的新原点 O' 在原坐标系中的坐标 $O'(-4, -7)$ 。

师:非常好!我们只须将 $h = -4, k = -7$ 代入方程 ① 得到 $x'^2 - y'^2 = 100$,多漂亮的一个方程!

生:是等轴双曲线。

师:可见当我们化简方程后,在新坐标系下,方程的本来面目就显现出来了。

师:回顾化简方程的过程,我们用的是什么数学方法?

生:待定系数法。

(请学生整理过程,并画出新坐标系和方程的曲线。)

师:对上例题后反思,我们由待定系数法求出 $h = -4, k = -7$,此时由移轴公式易知 $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 7 \end{cases}$,由化简后的方程 $x'^2 - y'^2 = 100$ 能否得到原坐标系下的方程?

生:只要将 $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 7 \end{cases}$ 代入方程 $x'^2 - y'^2 = 100$,得到 $(x + 4)^2 - (y + 7)^2 = 100$ 。



$-(y+7)^2 = 100$ 。这就是原坐标系下的方程。

师:很好,我们可以整理验证一下。

$x^2 + 8x + 16 - y^2 - 14y - 49 = 100$, 即 $x^2 - y^2 + 8x - 14y - 133 = 0$ 。得到了原方程,这给我们一个启发。……

生:若将原方程配方,化成配方后的标准方程(逆向变化),然后再平移坐标轴化简方程。

同学们一致赞同,请学生们将上述过程步步逆推,得出结论。然后再出一题让学生亲自做,体会妙处。

练习:化简方程 $9x^2 + 36x + 16y^2 - 96y + 36 = 0$ 。

解 将方程配方 $9(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 6y) + 36 = 0$ 。

$$9(x+2)^2 + 16(y-3)^2 = 16 \times 9.$$

$$\text{所以 } \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1. \quad (1)$$

$$\text{令 } \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}, \text{ 代入方程(1)得 } \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1,$$

(以 $O'(-2, 3)$ 为新原点平移坐标轴。)

师:这种化简方程的方法叫配方法。请同学们比较这两种方法的不同点,相同点。

生:两种方法的目的都是要化简方程,待定系数法是先设移轴公

式 $\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$ 代入原方程去确定待定的 (h, k) , 运算较繁。配方法

将原方程配方后,移轴公式一目了然。运算简单。

师:由上例说明对于缺 xy 项的二元二次方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A, C 不同时为零),利用坐标轴平移,可使新方程没有一次项(或没有一个一次项和常数项),从而化成圆锥曲线的标准方程。

下面完成本节课开始时的问题,求椭圆 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ 的顶点坐标。



解 设 $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$.

在 $x'O'y'$ 坐标系下,椭圆方程为 $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$.

其顶点为 $A_1(-4, 0), A_2(4, 0), B_1(0, -3), B_2(0, 3)$.

在 xOy 坐标系下,利用移轴公式 $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$,可以得到顶点

$A_1(-6, 0), A_2(2, 3), B_1(-2, 0), B_2(-2, 6)$.

从此结果我们清楚地看到,经过平移变换后,曲线上点的坐标变了,而曲线的形状没变.

例3 证明二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图形是一条抛物线.

师:如何证?思路是什么?

生:只须将原方程化简,若得到抛物线的标准方程就可以证明它是抛物线.

师:思路正确,用什么方法化简?

生:可以用配方法.

师:观察到方程中缺 xy 和 y^2 项,可将原方程按 x 配方.(下面由学生完成.)

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

所以 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$,将此式变形为

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y - \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

设 $x' = x + \frac{b}{2a}$, $y' = y - \frac{4ac - b^2}{4a}$,代入方程 ①

得 $x'^2 = \frac{1}{a}y'$.



因此二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图形是以 $O'(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 为顶点, 对称轴平行于 y 轴的抛物线。当 $a > 0$ 时, 开口向上, 当 $a < 0$ 时, 开口向下。

3. 巩固练习(投影)

(1) 坐标轴平移后, 使点 $P(1, 1)$ 的坐标变为 $(2, -1)$, 则原坐标系的原点的新坐标是()。

(A) $(-1, 2)$

(B) $(1, -2)$

(C) $(3, 0)$

(D) $(0, 3)$

(2) 平移坐标轴, 把原点移到 $O'(2, -3)$, 使 $M(x, y)$ 变成 $M(-3, 1)$, 则 M 点在原坐标系中的坐标为()。

(A) $(-1, -2)$

(B) $(1, 2)$

(C) $(-5, 4)$

(D) $(5, -4)$

(3) 平移坐标轴, 把原点移到 $O'(-3, -2)$, 则 $P(2, -3)$ 的新坐标是()。

(A) $(-5, 1)$

(B) $(5, 1)$

(C) $(5, -1)$

(D) $(4, 0)$

(4) 经过平移变换 $x^2 - y^2 + 28x - 14y + 47 = 0$ 可化简为

说明可由学生自编自解题目。

五、小结(师生共同完成)

1. 本课推导出移轴公式。设 O' 在原坐标系中的坐标为 (h, k) , 以 O' 为原点平移坐标轴, 建立新坐标系 $x'O'y'$ 。设平面内任意一点 M 在原坐标系中的坐标为 (x, y) , 在新坐标系中的坐标为 (x', y') , 则点 M 的原坐标、新坐标之间的关系为 $\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$ (1) 或



$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \quad (2), \text{公式(1)(2)叫做移轴公式。}$$

2. 利用坐标轴的平移化简不含 xy 项的二元二次方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (A, C 不同时为零)的方法有两种,一是待定系数法,二是配方法。

六、作业第 105 页练习 第 105 页练习九 1 2 3。

设计说明

1. 通过教学使学生理解坐标轴平移的意义与作用。

由于同一个点,在不同的坐标系中有不同的坐标。同一条曲线在不同的坐标系中有不同的方程。因此可以不改变曲线的位置、形状和大小而只改变坐标系来化简曲线方程。通过坐标变换把原坐标系下较复杂的二元二次方程转化为新坐标系下的标准方程,便于研究它的几何性质。

2. 在教学方式上采用“助探式”教学法。

在教学活动中,注意揭示和反映教学发展过程,尽可能地介绍数学概念的形成背景,产生原因及新概念的作用。在课堂教学中要充分体现教师的主导作用及学生的主体地位。引导学生积极参与,选择适当的切入点,使全体学生都参与到教学全过程中来,既教给学生数学知识,又教会学生思考,并且在整个教学过程中要渗透、使用运动变换的数学思想。

在推导平移公式时,首先由具体的椭圆方程出发,逐步引导学生由特殊到一般,去寻觅、探索移轴公式,再让学生感受公式的作用及对研究问题的便利。让学生充分参与思考,参与创造,教师要给学生创设参与的情境。如由待定系数法化简方程后,引导学生由逆向思维的过程而自然得出配方法化简方程。