

2005 年全国硕士研究生入学考试

数学二试题

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$ ，则 $dy|_{x=\pi}$ _____.

(2) 曲线的斜渐近线方程为_____.

(3) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$ _____.

(4) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为_____.

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\alpha(x) = kx^2 \text{ 与 } \beta(x) = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$$

等价无穷小，则 $k=$ _____.

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为维列向量，记矩阵

$$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B=(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3).$$

如果 $|A|=1$ ，那么 $|B|=$ _____.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ().

- (A) 处处可导 (B) 恰有一个不可导点
(C) 恰有两个不可导点 (D) 至小有三个不可导点

(8) 设 $f(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”，则必有 ().

$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

(9) 调函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是 ().

- (A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$ (B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$
(C) $-8\ln 2+3$ (D) $8\ln 2+3$

(10) 设区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4, x\geq 0, y\geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则().

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}} d\sigma = ().$$

- (A) $ab\pi$ (B) $\frac{ab}{2}\pi$
(C) $(a+b)\pi$ (D) $\frac{(a+b)}{2}\pi$

(11) 设函数

$$u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt,$$

其中函数 φ 具有二阶导数 ψ , 具有一阶导数, 则必有 ().

- (A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(12) 设函数 $f(x) = \frac{1}{\frac{x}{e^{x-1}} - 1}$, 则 ().

$x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

$x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$

线性无关的充分必要条件是 ().

- (A) $\lambda_1 \neq 0$ (B) $\lambda_2 \neq 0$
(C) $\lambda_1 = 0$ (D) $\lambda_2 = 0$

(14) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩 B , A^* , B^* 分别为 A , B 的伴随矩阵, 则 ().

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*
(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*
(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$
(C) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写文字说明、证明过程或演算步骤)

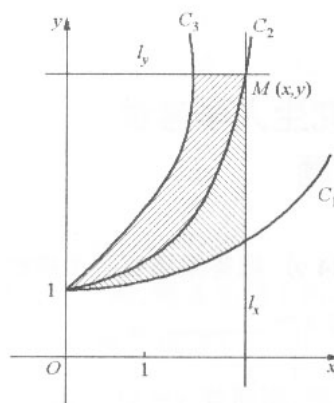
(15) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

(16) (本题满分 11 分)

如图, C_1, C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像, 过点 $(0, 1)$ 的

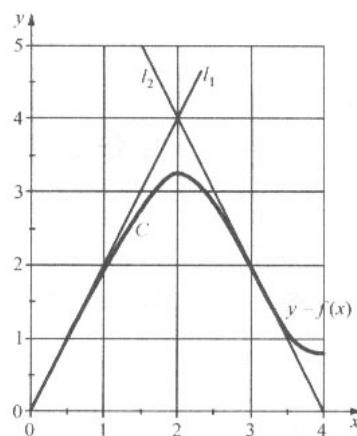
曲线 C_3 是一单调增函数的图像. 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y . 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.



(17) (本题满分 11 分)

如图, 线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx.$$



(18) (本题满分 12 分)

用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

(19) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$,
证明:

存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(20) (本题满分 10 分)

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$, 并且 $f(1,1)=2$, 求 $f(x,y)$ 在椭圆域

$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值.

(21) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(22) (本题满分 9 分)

确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组

$\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但是向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23) (本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行的是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数),

且 $AB=O$, 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.