

# 2005 年全国硕士研究生入学考试

## 数学一试题

一、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分把答案填在题中横线上)

(1) 曲线  $y = \frac{x^2}{2x+1}$  的斜渐近线方程为\_\_\_\_\_.

(2) 微分方程  $xy' + 2y = x \ln x$  满足  $y(1) = -\frac{1}{9}$  的解为\_\_\_\_\_.

(3) 设函数  $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$ , 单位向量  $n = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$ , 则  $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(1,2,3)} =$ \_\_\_\_\_.

(4) 设  $\Omega$  是由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  围成的空间区域,  $\Sigma$  是  $\Omega$  的整个边界的外侧, 则

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy = \text{_____}.$$

(5) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3).$$

如果  $|A|=1$ , 那么  $|B|=$ \_\_\_\_\_.

(6) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为  $X$ , 再从  $1, \dots, X$  中任取一个数, 记为  $Y$ , 则  $P\{Y=2\}=$ \_\_\_\_\_.

二、选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内( ).

- (A) 处处可导 (B) 恰有一个不可导点  
(C) 恰有两个不可导点 (D) 至少有三个不可导点

(8) 设  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 “ $M$  的充分必要条件是  $N$ ”,

则必有( ).

- (A)  $F(x)$  是偶函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是奇函数
- (B)  $F(x)$  是奇函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是偶函数
- (C)  $F(x)$  是周期函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是周期函数
- (D)  $F(x)$  是单调函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是单调函数

(9) 设函数

$$u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt,$$

其中函数  $\varphi$  具有二阶导数,  $\psi$  具有一阶导数, 则必有( ).

- (A)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- (B)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- (C)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- (D)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(10) 设有三元方程  $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$ , 根据隐函数存在定理, 存在点(0,1,1)的一个邻域,

在此邻域内该方程( ).

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数  $z = z(x, y)$
- (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $y = y(x, z)$  和  $z = z(x, y)$
- (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $z = z(x, y)$
- (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $y = y(x, z)$

(11) 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是矩阵  $A$  的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ , 则  $\alpha_1$ ,

$A(\alpha_1 + \alpha_2)$  线性无关的充分必要条件是( ).

- (A)  $\lambda_1 \neq 0$
- (B)  $\lambda_2 \neq 0$
- (C)  $\lambda_1 = 0$
- (D)  $\lambda_2 = 0$

(12) 设  $A$  为  $n(n \geq 2)$  阶可逆矩阵, 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行得矩阵  $B, A^*, B^*$  分别为  $A, B$  的伴随矩阵, 则( ).

- (A) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列得  $B^*$
- (B) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 列得  $B^*$
- (C) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列得  $-B^*$
- (D) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行得  $-B^*$

(13) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

	$Y$		
		0	1
$X$			
	0	0.4	$a$
	1	$b$	0.1

已知随机事件  $\{X=0\}$  与  $\{X+Y=1\}$  相互独立, 则( ).

- (A)  $a=0.2, b=0.3$  (B)  $a=0.4, b=0.1$   
 (C)  $a=0.3, b=0.2$  (D)  $a=0.1, b=0.4$

(14) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) 为来自总体  $N(0,1)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $S^2$  为样本方差, 则( ).

- (A)  $n\bar{X} \sim N(0,1)$  (B)  $nS^2 \sim \chi^2(n)$   
 (C)  $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$  (D)  $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$

**三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

(15) (本题满分 11 分)  
 设

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$[1 + x^2 + y^2]$  表示不超过  $1 + x^2 + y^2$  的最大整数. 计算二重积分  $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$ .

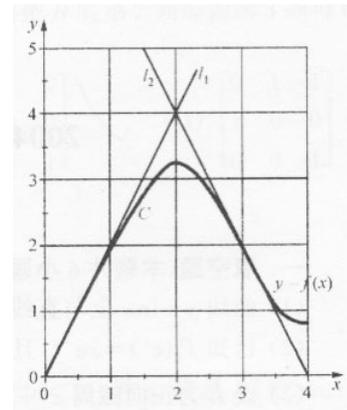
(16) (本题满分 12 分)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right) x^{2n}$  的收敛区间与和函数  $f(x)$ .

(17) (本题满分 11 分)

如右图, 曲线  $C$  的方程为  $y = f(x)$ , 点  $(3,2)$  是它的一个拐点, 直线  $l_1$  与  $l_2$  分别是曲线  $C$  在点  $(0,0)$  与  $(3,2)$  处的切线, 其交点为  $(2,4)$ . 设函数  $f(x)$  具有三阶连续导数, 计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx.$$



(18) (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 证明:

- ( ) 存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f(\xi) = 1 - \xi$ ;  
 ( ) 存在两个不同的点  $\eta, \zeta \in (0,1)$ , 使得  $f'(\eta) f'(\zeta) = 1$ .

(19) (本题满分 12 分)

设函数  $\varphi(y)$  具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线  $L$  上, 曲线积分

$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$  的值恒为同一常数.

( ) 证明: 对右半平面  $x > 1$  内的任意分段光滑简单闭曲线  $C$ , 有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0;$$

( ) 求函数  $\varphi(y)$  的表达式.

(20) (本题满分 9 分)

已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$  的秩为 2.

( ) 求  $a$  的值;

( ) 求正交变换  $x = Qy$ , 把  $f(x_1, x_2, x_3)$  化成标准形;

( ) 求方程  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解.

(21) (本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵  $A$  的第一行是  $(a, b, c)$ ,  $a, b, c$  不全为零, 矩阵  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$  ( $k$  为常数), 且

$AB = O$ , 求线性方程组  $Ax = 0$  的通解.

(22) (本题满分 9 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: ( )  $(X, Y)$  的边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$ ;

( )  $Z = 2X - Y$  的概率密度  $f_Z(z)$ .

(23) (本题满分 9 分)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n > 2$ ) 为来自总体  $N(0, 1)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 记

$$Y_i = X_i - \bar{X}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

求: ( )  $Y_i$  的方差  $D(Y_i), i = 1, 2, \dots, n$ ;

( )  $Y_1$  与  $Y_n$  的协方差  $\text{cov}(Y_1, Y_n)$ .