中外高考及重要竞赛试卷

ZHONGWAIGAOKAOJIZHONGYAOJINGSAISHIJUANQUANXIQUANJIE

全析全解

北京师联教育科学研究所 编

CD-ROM

数学卷

3+X·数学解题思维能力培养

电子出版物数据中心
北京广播学院音像教材出版社出品

●《师联题库》

中外高考及重要竞赛试卷

数学卷

3 + X·数学解题思维能力培养

北京师联教育科学研究所　编

学苑音像出版社

责任编辑：许　飚
封面设计：师联平面工作室

中外高考及重要竞赛试卷
数学卷
3 + X·数学解题思维能力培养
北京师联教育科学研究所　编
★
学苑音像出版社出版发行
（ADD 北京市朝阳区三间房邮局 10 号信箱）
P.C.:100024　Tel:010-65007730（带 Fax）　010-65740218（带 Fax）
E-mail:webmaster@BTE-book.com　Http://www.BTE-book.com
★
北京市社科印刷厂印刷
2004 年 1 月印刷
开本：850 × 1168　1/20　印张：3500　字数：104720 千字
ISBN7-89998-576-5/G·132
10 本书 + 18 碟 2580.00 元
本书如有印刷、装订错误，请与本社联系调换

《中外高考及重要竞赛试卷全析全解》

出版说明

没有不考试的学习
没 有 不 解 题 的 考 试
考 试 永 远 是 指 挥 棒

解题是课堂学习的基本形式

课堂教学主要是围绕解决问题来进行的。教学的组织形式、课堂调控、课堂操作程式、教学的设计、课堂评价等,最后都要围绕问题解决来进行。只有围绕解决问题的思路来进行课堂学习,才能使课堂教学过程达到最优化。

解题是课堂学习的主要内容

课堂学习的目的,都是要解决现实和理论中的问题,尤其是课程学习,是学习与讲授经过高度提炼的系统化、规范化的问题为中心的知识体系。所以,课堂学习的主要内容就是需要解决"不懂"的问题,问题解决是教与学的主要内容。

解题是课堂学习的存在目的

从教与学的目的在本质上的联系来看,不管是教还是学,都是要弄懂未知的世界,也就是说,解决旧问题,提出新问题,再解决问题,再提出新问题,是科学学习的永无止境的无限循环过程,除此以外,课堂学习不可能有其它目的。

解题是课堂学习的兴奋中心

根据人的思维和创造活动的本质和规律,人的学习和创造只有面对问题的时候,才是最活跃、最兴奋、最激荡、最能闪现火花的时候,创造就是在激烈的矛盾交错中出现的。解决问题,使人的思维和创造潜能得以充分发挥,以问题解决的形式激励人的思维活动和创造才能是最为有效的。所以,抓住问题进行学习是最为直接的。高效地解决问题的那份理知的享受和自信,是使每个学习者不断探索向前的最有效的动力。

所以,自古至今的学习,尤其是课堂学习中,没有不考试的学习,没有不解题的考试,考试永远是指挥棒。

事实上,我们的每届考生和长期组织指导考试的毕业班教师都有这样的体会:尽管考前经过了精心的准备,可以说能想到的都想到了,能找到的试题设计方式和试题都训练过了,各种各样的解题思路、策略、方法、技巧都准备了,但一上考场,面对试卷却仍然感到新鲜、兴奋、刺激,甚至有点茫然和措手不及,而绝少似曾相识感,甚至重复感,这就是因为中外高考和重要的国际竞赛上的这些试题,是经过考试专家和教育专家,按照试题本身的内在规律和要求进行严肃认真和科学的设计出来的,这些经历了许多智慧的头脑检验、设计、思考、又见过世面、上过大堂,经受过严格实践检验的试题,以其权威性和科学性,即使多少年以后来做,仍然感到新鲜、精致、巧妙,其原因正在于此。

目前，社会上见到的“××秘卷”，“××中学绝秘”“××学校高分宝库”“××学校高分突破”等以及大量的同步训练题海试卷，令人目不暇接，眼花缭乱，存在严重的泛滥、粗糙、炒作、混乱和不负责任的粗制滥造的问题，其危害在于：

一是徒然增加学生的训练量和教师的教学工作量，因为这些题层出不穷，又无权威性，师生忧于顾此失彼，挂一漏万，只好尽其所及，尽量搜索以资训练，以侥幸上场时能如期而遇；

二是这些题卷本来自个别学校、个别教师的教学实践，甚至是平时的教学练习，没有权威性，也没经过科学的设计，因而也不典型；

三是大量试题是个别教师，甚至不是教师的人，仅仅为了出卷的经济利益，从市场上大量的试卷中东拼西凑，剪刀加浆糊拼传而来.更有甚者，怕出版者看出破绽，小视作者，故意将题的来处隐没，改头换面，更改参数、条件，使试题本身的交度、信度、难度完全失真，失去了其训练价值。用这种试题训练学生，就相当于用篮球去训练排球队员，表面上看似乎无碍，甚至认为增加了训练难度，实际上场时则犯规的多。

北京师联教育科学研究所组织大批专家及一线师编辑本书，就是要为高考解题及教学树立一个权威，建立一个严肃和科学的样本和题库。主要做了以下几方面的工作：

1. 对国内外近几十年的高考及国际上的重要竞赛试卷进行搜索陈列和解析，并附标准参考答案及评分标准。

2. 对近二十年国内外高考及国际重要竞赛试题，根据当年考试的具体情况，进行评价、分析、解答，包括解题的思路、原则、策略、方法、技巧、失误等。

3. 重点对近十年内尤其是近年国内外高考及国际重要竞赛试卷，除解析答案评分标准，介绍解题思路与方法外，尤其从考试科学的角度，对其难度、效度、信度、进行分析、解答、并分析具体试题的设计思想思路，考查的知识范围、目的、能力和智力因素、非智力因素以及当年一线教师的反映、失误及国家考试中心等权威部门的评价等。

以上工作使本书具有毋庸置疑的全面性、完整性、科学性、严肃性和实用性，作为应对高考教学和训练的工作用书，相信本书能成为工作在高考一线的教师和准备进场学生的得力助手。尤其是其中大量的国外试题，其设计之精巧，试卷之精练、简洁清新和灵致，给我们留下了深刻的印象，这对于中国教育在逐步开放中，了解国外的教学考试及学生学习的情况，促进素质教育中的考试工作的改进，都有更直接的参考和操作意义。

目　　录

3＋X·数学解题思维能力培养

3 + X·数学解题思维能力培养

□数学思维的含义和结构

人在学习数学的认识活动中,思维占有重要的地位。数学思维作为结果,指数学知识本身。数学思维作为过程指的是获取数学知识和解决数学问题时的思维过程。数学思维过程是人脑和数学对象相互作用的过程。学生在获取数学知识的思维过程中,以已有的数学概念和事实为基础,通过数学判断和推理等形式来认识数学对象,掌握新知识。学生在解决数学问题的思维过程中,运用已有的数学知识和经验,灵活地处理在新的具体情境下或各种不同的抽象水平上的新问题。

数学思维的对象,可以看作是一个数学概念、规律、方法及其综合形成的知识块所组成的包括横向组合形式和纵向层次发展的知识结构。数学思维结构是个体在数学活动中,以数学知识结构为基础在头脑中建构、形成的具有数学特点的信息操作系统。

数学思维结构是数学思维研究的主体。研究数学思维结构,探讨知识在思维能力形成过程中所起的作用,探讨内容的选择与形成和发展学生数学思维的关系,有助于选择适宜的数学内容,合理编排和处理知识系统以形成完善的教学结构。研究数学思维结构,弄清学生原有的基础,揭示其思维发展规律,有助于运用恰当的教学方法及灵活的教学组织形式开展教学活动,使学生掌握科学的知识结构,形成合理的思维结构。

研究数学思维结构,应着眼于数学思维的主要方面及其相互关系。湖南张天孝老师认为,数学思维包括数学思维方式(内容),数学思维品质,数学思维能力和数学思维方法四个主要方面。

数学思维方式(内容)是对数学思维结果的总结。从这个意义上说数学思维方式是指数学思维过程中知识和信息的吸收、运用、转化和组合的原理,它是学习者在数学活动中学习数学知识和掌握方法的基础上形成的,是数学知识与主体的认识长期相互作用的结果。对数学教学来说,学生的数学思维方式主要是指对应思维、函数思维、可逆思维、空间思维、程序化思维和结构化思维。

1.对应思维

对应是数学中的重要思维方式,即使在一年级课本中出现的也不少。在计数中每个集合都被它元素的个数对应,在序列中每件东西被它的序号对应。对应对两个集合的等值提供了最简单最直接的计量方法。如果两个集合的各个元素之间能够一对一的对应,它的量是等值的,如果不做一对一的对应,就产生了“多”和“少”的观念。因此,对应的过程是整数结构的基础。在分数问题中量和率的对应,在比例问题中抽象的份数与具体量的对应,在 $a\times b=c$ 这一基本数量关系中,行程问题中的速度、时间、路程,分别对应于商品问题中的单价、数量、总价,工作问题中的工效、时间和总量。对应的思维方式在小学数学学习中有着广泛的应用。

2.函数思维

函数思维就是人的思维对两个集合间联系的把握。它反映了数学自身的内在联系,是对事物及其关系的变化性、相互联系和相互转化的认识,它要求从联系中去发现数学结论与解题方法。这种思维方式的基本过程是:从运动和变化中提出数学对象,运用因果、相似关系解决数学问题;将解决结果返回到原来的问题情境中,重视说明数学对象的丰富内容。

3.可逆思维

数学的许多概念都是成对的,运算也是互逆的。这种相反相成的对立统一关系,反映在人的头脑中就形成了一种可逆思维。思维的可逆性,意味着心理过程中思维方向的转变,即从正向思维转为逆向思维。皮亚杰把可逆思维能力作为儿童智慧发展的重要标志。原苏联心理学家克鲁捷茨的研究也证明凡是数学能力强的学生,在一个方向上形成了联系,就意味着相反的方向上建立了联系,因而他们能迅速地辩认或理解逆向问题,数学能力差的学生则往往感到困难。

4.空间思维

空间关系是数学的基本内容之一,它与数量关系是有机地联系在一起的,空间思维是头脑中构成物体的空间形状、大小及其位置关系的简略结构,并能将实物的一些操作在头脑中进行相应的思考。

5.程序化思维

程序化的思维方式是按一定步骤的有序思考。在思考问题时,把任务分解化小为能被清晰感知的组成部分;把过程分解成小步子,找出各步间的逻辑关系。

6.结构化思维

结构化的思维方式表现为用统一的观点处理数学内容,从相互联系相互作用的内在规律上揭示数学知识。它具有三个显著的特点,即整体性、转换性和自我调节性。研究数量关系的结构形式,可以运用迁移规律解决同构异素问题。某些问题,尽管在具体内容上不同,但实际上都具有相似的结构形式,教学时可以使形式超脱内容,把不同题材中共同的结构形式分离出来,进一步抽象化,并把它符号化,只研究结构形式之间的关系。通过合理的结构去掌握知识,从思维过程上说是简单的,在时间上是经济的,可以减轻学生记忆的负担,提高思维的敏捷性。

由于数学思维方式是数学思维结果(数学内容)的总结,而数学内容是互相融洽的,所以数学思维方式也是融合的,在思维过程中综合起作用。

数学思维品质是数学思维发生和发展中所表现出来的个性差异。在小学数学教学活动中,经常可以发现有的学生思维敏捷,思路宽,有独创性;而有的学生思维呆板,思路狭窄,这就是思维品质的差异。数学思维是数学认识活动的高级阶段,完成这种活动必须而且直接影响活动效率的是数学思维品质。学生数学思维品质的好坏,虽然与遗传因素有一些关系,但主要还是靠学习数学知识和解决数学问题的思维活动的实践中得到锻炼和发展。在小学数学教学中,需要着重培养和训练的思维品质有:数学思维的深刻性、灵活性、独创性、批判性和敏捷性。

思维能力是在一定的思维品质基础上形成的分析问题和解决问题的能力,数学思维能力是数学思维品质在解决问题实践中的具体化。

在小学数学教学活动中,经常可以见到有的学生善于思考,领悟力强,思维敏捷、灵活;而有的学生遇到难题一筹莫展,抓不住问题的本质和关键找不到解决门路。这就是思维能力的差异。如果数学思维能力不强,那以即使思维再灵活,再有批判性,到了面对实际问题时也束手无策。在小学数学教学中,需要着重培养和训练的思维能力主要有:数学形象思维能力,数学抽象思维能力,数学收敛思维能力和数学发散思维能力。

思维方法是比思维能力更具体的东西,它是人们思维中处理各种问题的基本方法。思维方法大体上可分为两个层次,一个层次是各科都要用到的逻辑思维方法,如演绎、归纳、分析、综合、类比等等;另一个层次是每个学科自身所特有的基本方法,如数学中的化归方法,模型方法,公理化方法等等。数学思维能力的训练,就是通过数学材料进行智力活动方法的训练。换句话说,数学的学习过程是数学知识内容与数学思维方法的结合。归纳、类比、化归、假设是小学生学习数学常用的方法。

综合上所述,数学思维方式、数学思维品质、数学思维能力和数学思维方法构成了数学思维结构的基本框架。数学思维结构是数学认知结构的最重要的方面,数学认知结构的建构与发展主要是数学思维结构的建构与发展。

数学思维的模式

数学的载体是数、式、图,但数、式、图并不是数学所独有。李白的诗就善用数,他的“飞流直下三千尺,疑是银河落九天”、“白发三千丈,缘愁似个长”,脍炙人口。但作为理性与逻辑的考察却十分荒谬:头发再长也不会是庐山瀑布的十倍。因为他是文学的形象思维的模式,而不能用数学的思维模式去理解。即使是与数学有密切联系的物理、化学等自然科学,主要是观察与实验的思维模式,与数学思维也有所区别。我们有理由说,数学是有它突出特点的思维模式。数学思维反映在数学的概念、法则、定理甚至符号之中,反映在数学内容之中,也反映在教与学之中,数学知识错综复杂,千差万别,作为数学思维的模式却很有限,但确是数学的精髓:纵观知识,横看数学,安徽省铜陵县一中朱

秀山老师总结数学思维的模式有如下几种：

1.操作模式的数学思维 数学方法、法则

数学思维的最初级的模式是法则和方法以及公式等的直接运用。如加减乘除的法则，幂的运算法则，整式的乘除法则，等等。表现为“有章可循”可以操作的一种程度。这里讲操作，当然是思维，它们往往并不简单、单纯，常常是多种法则的联合运用，即便是最简单的自然数的加法，也有进位问题，只不过这种思维有相对固定的程式而已。

重要法则的反复操练，不仅可以熟悉数学知识，形成技能，也是练就数学基本功的重要手段。

法则的灵活运用就是技巧，较常用的技巧就是一种方法。方法和技巧是操作模式的数学思维中的较高层次，有理性的参与。方法的运用，提高了法则的效率，方法的发现和运用既要有运用法则的基本功，也需要有必要的变式的训练，还需要教师的指点，更需要学生对法则方法的渐进深刻的理解。仅会法则的刻板运用，至多只不过是一台计算器，至多只感受到数学大海浪花撞击的一点水珠。我国人民历来讲究法则的操练和方法的运用。“熟能生巧”的成语就是这个意思的概括。我国古代的数学经典《九章算术》就包括了 202 个“术”。这个“术”事实上就是方法。

外国的小高斯，在计算 100 以内的自然数和时，就成功地运用了“凑整”方法。

在这种模式下，初中的换元法、待定系数法、消元法、十字相乘法等都应属于这个范畴，这个思维模式的直接结果是熟悉数学知识与形成数学技能。

2.机理模式的数学思维 数学原理

机理模式的数学思维，表现为一种适应范围广、高层次的方法，充满了理性与逻辑性，常以数学原理的形式出现。有时虽然也需“操作”，但是从属地位，且不一定有固定的程度。它与操作模式的重要区别是：前者突出“为什么是这样”，而后者常表现为“一定要这样”。

中学的数学原理主要有：分析原理、综合原理、反证原理、同一原理、构造原理、等价原理、数学归纳原理、对称原理、分类原理、分解原理、抽屉原理，等等。

我们特别指出的是“反证”和“数学归纳”。这些被称为“数学家最

精良的武器”常被认为是“方法”。不错，“反证”和“数学归纳”的运用，常有固定的“程序”一面，但更重要的是它的“机理”。优秀教师在讲述反证法时，都不在“程序”上大做文章，而首先讲叙“林肯当辨护律师”的故事。讲“数学归纳法”时讲多米诺现象，讲成排自行车倒下等问题，就是讲这里的核心“理”，而程序只不过是外壳。“反证”实质上是逻辑学中排中律在数学中的运用。“数学归纳”实质上是利用自然数的有序性和传递性进行数学思维。

如果没有经过法则和方法的认真操练，难得扎实的数学基本功，但如果不能上升到数学原理上去思维，思考法则和方法，势必是机械的数学。反过来，如果仅仅是从原理上学习数学，而不是从法则训练的基础上去提炼，则数学原理成为无源之水，无本之木。美国的“新数”运动的失败就在于此。因此，法则的操练和原理的领悟二者不可偏废。

著名学者杨振宁曾将高斯计算 100 以内自然数和的故事讲给他的孩子们听。大家都懂，也很欣赏，但一年之后都忘了。陈省身教授在谈及此事时，感慨地说：“不同的是，我们了解这个推论的美，听过之后，永远不忘。具有数学意识的人还会举一反三。我们的数学教育就是要培养听过不忘和举一反三的人。”这大概就是杨振宁之所以杨振宁，陈省身之所以陈省身吧！

数学中的许多概念往往是数学原理的反映，它们常常是在不能让学生作较多操作训练的情况下而让学生接受的，所以概念往往成为学生接受的难点。大多数的概念是“分类”的产物。至于象什么是“排列”什么是“组合”也实在是“构造”的结果。

数学的原理是能够让学生接受的。但用数学原理去思维，去进行数学思维并不是一件简单的事。只有在牢固掌握法则的基础上去揭示、去分析、去领悟。

3.动态模式的数学思维 数学思想

学习数学的最基本的要求是理解，依赖背诵来学习数学是行不通的。如果你要问数学爱好者爱好数学的原因，他们的回答除了“成功”和“有趣”之外，必就是学习数学不需要“死背”，而“辛辛苦苦的数学中差生”中的大多数都是企图通过“背诵”得到高分。优生的“有趣”就是数学的魅力，不死背就是要理解。不仅是局部的而且是广泛的融汇贯通，这就是动态模式的数学思维 数学思想。表现为一种辨证性，运动

性的和总体形的思维形式。

中学的数学思维有转化思想、运动思想、数形结合思想、优化思想、类比思想、化归思想、极限思想、集合与对应思想、理论联系实际思想、普遍性与特殊性思想,等等。

作为这种模式的数学思维的数学思想,是沟通数学知识与数学知识之间、数学知识与实践之间那种辩证、运动和活化的内在联系的思维形式,具有更深刻的、居高临下的理解知识的思维模式。例如,平面几何里的圆周角、弦切角、圆内角和圆外角,认为都是角的边在运动而得的不同结果,没有必要一一记住这些定义、定理和公式。射影定理、相交弦定理、切线定理、割线定理、切割线定理的关系也是如此。正如我国著名数学家华罗庚教授所说:“学习知识就是一个不断地由薄到厚,和由厚到薄的过程。”这里由厚到薄的薄,不是知识少了,而是精了,就是理解的上升、就是知识的融汇贯通。作为思维,就是通过这种动态模式的数学思维。没有这种思维,就无法学习数学。一个小孩子即使到 6—7 岁才会数到 100 个,没有人担心他数到 200 个时要到 10—14 岁。人类掌握数学知识也是如此。三、四千年前的古埃及、巴比伦的数学文献中,就把一万(即 10^4)称为“黑暗”,即这在当时已经模糊不清,不可想象了。10^8 是“黑暗的黑暗”,被认为是人的智慧所不及的了,公元七世纪,欧洲最有学问的英国修士倍达说:“世界上有很多难做的事情,但是没有比算术四则再难的了。”直到十八世纪,人们对分数的运算仍十分畏惧。1735 年,英国一本算术教科书的作者说:“为了照顾学生们……,我们把通常称为分数的破碎数的运算单独叙述。部分学生在看到这些分数时,灰心到就此停止学习,他们嚷声说‘不要再往下了’!”可见畏惧到何等程度!现在,被人们称为“信息时代”和“知识爆炸”,于是有人说人类的大脑将“不堪重负”,既然,人类已经如此轻松地认识了“黑暗”和算术四则及分数运算,人类也必能同样轻松地处理“爆炸”。人类有动态的思维模式,那种“不堪重负”的担心必是杞人忧天。

4.工具模式的数学思维 数学意识

许多优秀学生在领受数学之美,感叹数学之精妙之余,常不由自主地问 数学家如何创造了数学?数学家在处理似乎与数学无关的问题时,他的技法为何如此高超?这种创造,这种处理,就是工具模式的数学思维 数学的意识。的确,不可通约量的出现,无穷小量的矛盾,几个

简单悖论的提出和解决，把数学一次又一次推向新的高度。欧拉研究“七桥问题”揭开了近代图论的第一页。集合控制论的创立，更把人类引向电脑时贷。

数学意识是人类用数学思维处理问题的方式。数学意识有抽象化意识、量化意识、模型化意识、符号化意识和利用工具意识，等等。数学意识具有数学再生与创造的品格，具有用来解决挑战性问题的能力的品格。

数学意识是一个工作母机，它不仅解决数学问题的本身，而且开辟新的数学领域。正因为如此，数学才如此枝繁叶茂，并且深入社会的每一个角落。当今西方提出“问题解决”正是培养数学意识的做法。

只有提高了数学意识，“工具的数学”才能作为“数学的工具”服务于生产生活与社会活动中。

在数学思维与数学知识的关系上，方法是知识的积累，原理是知识的消化，思想是知识的掌握，而意识是知识的运用。

数学意识是学习者在走出校门若千年后，什么法则都忘记了、什么概念都淡化了，什么公式都模糊了而保留下来的东西，并且是终生受益的东西。

几种思维模式是伴随知识的深入而滚动发展、循环上升的。低层次的数学知识，无论是数学原理或是数学思想，都只能提供一个狭小的阵地。随着数学知识领域的扩大，也为数学思维提供了广阔的空间。也正因为如此，人类才不断地化难为易，化神奇为浅显。

如果一个人仅仅是解决了问题，并不一定表明他思维的高超。除了他知识水平外，还应看他用什么模式的思维去解决的。我们斩头去尾，从中间说起 如果一个初中生，他没有学过“排列与组合”问题，要解决“十个人开会，每人互相握手，一共握手多少次的问题”可能有多种方法。第一种，他在纸上写了张、王、李……等十人的姓名，然后两两配对，一一数之，可得结果 ;第二种，他把设想中的十人列成一个表，如同比赛的场次表，分类而得，不难得到解决 ;第三种，他先分析两人开会，三人、四人开会的握手次数，找出人数增加和握手次数的增多的关系，而得到解决 ;第四种，他把人抽象成点，握手是两点连线，握手次数是十边形的边数与对角线条数的和，从而解决问题。可以说，第一种是握手法则的操作思维，第二种主要是分类或分解原理的机理思维，第三种是

运动思想的动态思维,第四种是用抽象化,模型意识的工具思维。一种比一种具有更高的档次。这四种思维模式可概括为:

方法有章可循,原理依理则明,

思想动态联系,意识化为利刃。

也应注意到,即使较低层次的数学知识,也蕴藏着大量较高层次的数学思维模式。但是,如果没有较高模式的数学思维的领悟,必然难以承受较深数学知识的压力。正因为如此,数学思维的引导,具有比数学知识的学习更重要的地位。

数学的四种基本思维模式与教学

关于提高学生运算能力的研究成果累累,但是太多且细反而有在庐山云雾中之感,甚至会迷入唯技巧的歧途。所以江苏省南京市江宁县秣陵中学周素华老师提出在解题中以强化思维训练,理出整体控制、顺向探源、逆向思考、发散创新作为四个基本的框架思维模式。

1.整体控制思维是“三论”(控制论、系统论、信息论)的核心

要实现熟练的整体控制思维就应以牢固的数学基础知识和基本的技能技巧为基础、为标准,注意整体衡量问题所处的主干位置以及可能涉及的知识范围,要避免零枝碎节的纠缠。这样可以大大提高运算的成功率。

例 1 已知:$z_1 = 1 - \cos\theta + i\sin\theta$, $z_2 = 1 + i\sin\theta$,求 $\arg z_1 + \arg z_2$。

通过计算 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 进行解答,弯子多而繁琐,如果引导学生在复数与三角函数的诸多性质及其联系中定位,从整体上加以控制,就会注意到:

(1) 求得 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 对于求 $\arg z_1 + \arg z_2$ 只是充分的并非必要的。

(2) z_1 与 z_2。的辐角之和等于 $z_1 \cdot z_2$ 的辐角。

由此,便可以发现简便的解题途径。

略解: $z_1 \cdot z_2 = 2\sin\theta$,

当 $\sin\theta \geqslant 0$ 时,$\mathrm{Re} z_i \geqslant 0$, $\mathrm{Im} z_i \geqslant 0$ $(i = 1,2)$,所以 $\arg z_1 + \arg z_2 = \dfrac{\pi}{2}$。

当 $\sin\theta < 0$ 时,$\mathrm{Re} z_i \geqslant 0$, $\mathrm{Im} z_i < 0$ $(i = 1,2)$,

所以 $\arg z_1 + \arg z_2 = \dfrac{7\pi}{2}$。

例 2 若 a、b、c 为实数,$A = a^2 - 2b + \dfrac{\pi}{2}$, $B = b^2 - 2c + \dfrac{\pi}{3}$, $C = c^2 - 2a + \dfrac{\pi}{6}$,

证明:A、B、C 中至少有一个值大于零。

由于 a、b、c 的任意性,很难直接判断 A、B、C 值的符号,不妨引导学生进行整体思维,如将 A、B、C 相加,则可得 $A+B+C=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+\pi-3>0$。于是由上式知道,A、B、C 至少有一个值大于零。

这样即使枝节问题也可能在整体控制下得到顺利解决,或者可避免忽视问题的存在性而造成失误。

2.顺向思维在解答数学问题中是经常运用的,引导得当,能收到奇巧的效果。　　例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上定义如下:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{当 } x=0, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{当 } x \text{ 是 } (0,1) \text{ 内的有理数}, \\ 1 & \text{当 } x \text{ 是 } (0,1) \text{ 内的无理数}, \\ 0 & \text{当 } x=1。\end{cases}$$

若已知 $f\{f[f(x)]\}=\dfrac{1}{2}$,那么 x 是怎样的数?

分析及简解:$f\{f[f(x)]\}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\Rightarrow f[f(x)]=0\Rightarrow$ $f(x)=1\Rightarrow x$ 是 $(0,1)$ 内的无理数。

本题解题的过程就显示了从外至内层层脱去所有 f 的过程,这是一种典型的顺向的程序化模式。有时在使用穷举法、类比法、结构代换等时,往往都可进行顺向思维。

3.逆向思维在解题过程中同样具有举足轻重的作用

一般地说,顺向思维受阻或头绪繁琐的情况下,就应该迅速向逆向思维转换。

例 4　如果二次函数 $y=mx^2+(m-3)x+1$ 的图象与 x 交点至少有一个在原点的右侧,试求 m 的取值范围。

若从正面求解,要分别就“两交点均在原点右侧”,“一个交点在原点右侧”等情况一一解答,这样做虽然能行得通,但运算繁琐,为此可引导学生从反面思考。

解 当函数图象与 x 轴的交点均不在原点的右侧时,由一元二次方程有两非正实数根的条件,得:

$$\begin{cases}\Delta=(m-3)^2-4m\geqslant 0 \\ \dfrac{3-m}{m}\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{m}\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant 9 \text{ 或 } m\leqslant 1 \\ m<0 \text{ 或 } m\geqslant 3 \\ m>0\end{cases}$$

因此得 $m \geqslant 9$。其对立面为 $m < 9$，但因为是二次函数，所以 $m \neq 0$，且与 x 轴有交点，故 $\Delta \geqslant 0$，即 $m \geqslant 9$ 或 $m \leqslant 1$。于是，二次函数图象与 x 轴的交点至少有一个在原点右侧的条件是 $m \leqslant 1$ 且 $m \neq 0$。

例 5　解不等式 $\sqrt{5-4x-x^2} \geqslant x$.

本题如顺向求解，就得需要解两个不等式组再求并集，但右引导学生从反面求解，就能化难为易。

解 设全集 $I = \{x \mid 5-4x-x^2 \geqslant 0\} = \{x \mid -5 \leqslant x \leqslant 1\}$。

由 $\sqrt{5-4x-x^2} < x$，得：

$$\begin{cases} 5-4x-x^2 \geqslant 0 \\ 5-4x-x^2 \leqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x \left| \frac{\sqrt{14}-2}{2} < x \leqslant 1 \right. \right\}$$。令其为 A。

据此即得原不等式的解集应是 A 的补集 $\overline{A}$，

$$\overline{A} = \left\{ x \left| -5 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{14}-2}{2} \right. \right\}$$。

此外如用逆向猜想法、减元法、降次法、旋转变换等都可找到思维逆向的本质。

4. 发散 (多向) 性思维具有独创品质

如在教学中引导学生多侧面、立体式的思维，可以简化运算过程。

例 6　已知 a、$b \in R$，

$$A = \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x = 1 + a\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} a \neq 0, \theta \in R \right. \right\},$$

$$B = \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x = t \\ y = mt + b, \end{cases} m, t \in R \right. \right\},$$

问是否存在实数 a，b，使 $A \cap B \neq \varnothing$ 总成立？

初知 A 表示椭圆 $\frac{(x-1)^2}{a^2} + y^2 = 1$ 上的点集，B 表示直线 $y = mx + b$ 的点集。要使 $A \cap B \neq \varnothing$，只须椭圆方程和直线方程联立的方程组恒有实数解。但这样运算量大，因此可以引导学生利用数形结合的思想方法，可知本题等价于过点 $(0, b)$，斜率为 m 的直线 $y = mx + b$ 与椭圆 $\frac{(x-1)^2}{a^2} + y2 = 1$ 恒有公共点，只须点 $(0, b)$ 落在椭圆内或椭圆上。

简解 :欲使 $A \cap B \neq \varnothing$ 总成立，由题设只须点 $(0, b)$ 落在椭圆内或其上。故 $\frac{(0-1)^2}{a^2} + b^2 \leqslant 1$。所以当

$$-\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \leqslant b \leqslant \frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \quad (|a| \geqslant 1)$$ 时总有 $A \cap B \neq \varnothing$。

类似一题多解、添辅助线、结构代换等解题技巧，大都可以从发散思维派生出来。

□数学思维教育对提高人的素质的意义

数学是一门思维的科学，由于它的高度抽象、逻辑性强和不断创造新的精神产品的特征，深刻地影响着人们的思维习惯和思维抗议式。同时，数学思维不仅仅是一种数学现象，而且是一种深刻的文化现象。江西余干二中周鸿生老师总结数学教学中的思维教育对提高人的素质的作用是：

1.数学思维教育可以促使人的先天素质得到发展，使人的生理、心理素质得以显化出来，即使人的固有的内在本性外化出来

人的遗传素质虽有差别，但它并不是人的发展中的决定因素。在不同环境特别是教育的影响下，人的遗传素质可以向肯定的方向或否定的方向发展。而数学思维教育则在人的先天素质的外化和发展的过程中起着独特的作用。

⑴ 从数学学习的特点来看。　数学是思维的科学，学生学习数学知识基本上是在演绎体系下展开的，数学学习中的“再创造”比其它学科要求更高，需要较强的逻辑推理能力；同时，数学是高度抽象概括的理论，比其它学科更抽象、更概括。其概括程度之高，使数学脱离了具体实物，仅考虑形式的数量关系和空间关系。有人把数学誉为“思维的体操”，“用符号表示的哲学”。数学的这些不同于其它学科的特点，使数学思维教育在外化和发展人的先天的素质的过程中起着其它学科、其它形式的教育所不能替代的作用。

⑵ 从数学思维教育的特点来看。　探索是数学思维教育的生命线。数学必须注意揭示知识的发现过程，揭示知识从已知到未知的激烈而曲折的矛盾运动，注意点拨和引导学生的思维，真正把数学作为思维科学来教学，把数学知识作为砥砺学生智力的磨刀石，这必将对外化和发挥学生的先天素质起着难于估量的作用。

⑶ 从人的思维发展的特点来看。　儿童从出生到成人，身心发展是一个由低级到高级，由量变到质变的连续不断的发展过程。童年期的学生的思维特点具有较大的具体性和形象性，少年期的抽象思维已

有很大的发展，青年期抽象思维则已居于主导地位。数学以抽象性和逻辑性的特点，顺应人的思维发展规律并为这种发展提供了最理想的强有力的工具，决定了它在促进人的思维素质发展过程中的独特作用。

2.数学思维教育可以使人类在历史进程中所形成的固有本质转移于新生的个体中，即使人类的固有本质内化于个体

⑴从数学思维是一种人类文化现象来看。 美国数学家克莱因说过：“数学是人类最高超的智力成就，也是人类心灵最独特的创作。音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科技可改善物质生活，但数学却能提供以上的一切”。数学是一个巨大思想的历史，它包括数学知识的演变，创造这些知识的人，产生这些人和这些知识的客观条件，还有这些知识的社会作用，与人类其它文化领域的相互影响，可见数学是一种历史的、社会的、文化的现象。要使学生认识到这一点并非易事。只有进行数学思维教育，在日常教学渗透这种文化观点和历史观点，不是把数学当作纯粹技巧的堆砌而是当作思维科学，不是把数学仅仅当作一种数学现象而是当作一种文化现象，我们才能培养出不但有才和学、而且有德和识的人才。这种教学的必然结果，是使历史长河中形成的人类的本质内化到人体上来。

⑵从中华民族的素质来看。 民族素质不仅取决于每个国民的素质，它还包括一个国家一个民族在长期的历史进程中所形成的民族特性。这些素质作为民族意识通过民族文化世代传递下来，形成自己的特色。整个民族的素质既依赖于个人的素质，而又构成个人素质发展的条件。中华民族勤劳、勇敢、坚韧不拔、敢于自立于民族之林而著称于世。数学思维教育所需要的非智力品质，如兴趣、情感、意志等，则恰恰是我们民族素质的重要组成部分。数学思维教育为这些素质内化到个体提供了肥沃的土壤。

3.数学思维教育有利于我们按照一定社会的要求造就合格的社会成员，这是将外在特定的社会本质对象化于个体的过程，即个体社会化

社会主义教育的根本目的，是提高人的素质，即培养为社会主义现代化建设服务的、德智体全面发展的合格人才，数学思维教育对提高社会主义现代化建设中的公民素质究竟有什么意义呢？

⑴从数学思维教育在德育中的作用来看。 数学思维的逻辑性

与组织性,是数学对于一般文化修养所提供的不可缺少的素养。它能潜移默化地培养青年人树立一系列具有道德色彩的特性。这些特性中包括正直、诚实、遵纪守法的习惯,尊重真理的习惯和严肃认真的工作态度 数学思维的深刻性、批判性、创造性则能培养人坚韧不拨的意志,敢于打破陈规陋习和勇于开拓的创造精神 数学思维中审美能力的培养,则能培养人们具有正确的审美观点、高尚的情操、文明的行为习惯以及朝气蓬勃的精神面貌。在数学教学中通过思维教育来进行德育,尽管是摆在我们面前的一个有待开拓的新课题,但它的前景是非常广阔的。

⑵ 从数学思维影响人的思维方式来看。 数学中的抽象思维,要求我们从本质上看问题,对于复杂的事物、现象,能有意识地区分主要因素与次要因素、本质与表面现象,从而抓住本质解决问题 数学思维中的整体意识,影响着人们由着重对事物单方面的研究,转向着重对事物多方面的整体研究,由着重对事物实体的研究,转向着重对事物的各种类型的联系和结构的研究 数学思维中的化归思想,意味着用联系、发展的运动变化观点观察问题、认识问题,要求人们有意识地对问题进行转化,变为已经解决和易于解决的问题。数学思维能力的意义,已经超越了数学的范围本身,它影响着人们运用科学的思维方式去考虑问题、处理问题。一个具备了数学思维能力的人,看问题时一定会从全局上把握,并注意整个问题的各个细节及它们之间的联系,善于抓住问题的实质,把不容易解决的问题分解、转化为易解决的问题,这正是现代社会公民所应具备的思维素质。它对于我们在改革开放中,破除陈腐的传统观念和落后的思维方式,形成适合新形势的新观念及思维方式,具有深刻的意义。

⑶ 从数学具有方法论的意义来看。 按照马克思的看法,一种科学只有成功地运用数学时,才算真正达到完善的地步。在当前科学日益数学化的时代,数学已经成为一种应用十分广泛的、横向联系的公共研究方法。数学在自然科学中的作用,自不待言。历史学引进数学方法,产生了计量史学 ;语言学引进数学方法,产生了数理语言学、计算语言学 ;在文学领域里,可用数学方法对艺术作品作结构分析等。另外,在哲学、法学、社会学、心理学、经济学、科学学、考古学、人类学等领域都可以找到数学的足迹。可见,数学方法及其思维对提高各类专业人

才的素质的作用是无法估量的。

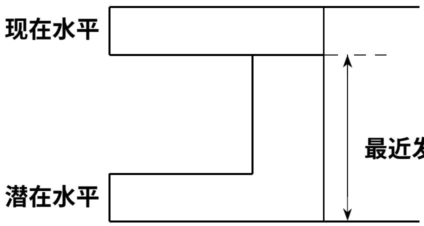
□思维的“最近发展区”及其开发

当前，培养学生数学思维能力的问题越来越引起广大数学教育工作者的重视。随着现代数学教育改革的不断深入，数学思维的培养和训练日益成为人们关注的热点。实践证明，数学教学因素是促进数学思维的发展的一个重要的可控制因素。具体到数学思维能力的培养，我们不仅要整体把握，更要有一种层次性把握，使数学教学既非轻而易举让学生感到乏味也非高不可攀令学生丧失信心。因此，中科院自然科学史研究所付海伦等老师研究认为思维“最近发展区”思想有利于数学思维能力的形成和螺旋式地向前发展：

1.思维的“最近发展区”即“教学的最佳期”

“最近发展区”是前苏联心理学家维果茨基提出的，其涵义即指学生的潜在发展水平，在此水平上，学生还不能独立地完成学习任务，但经启发、帮助和努力，就能完成任务。因此，“最近发展区”就是经过努力后所达到的较高一层的智能发展区。

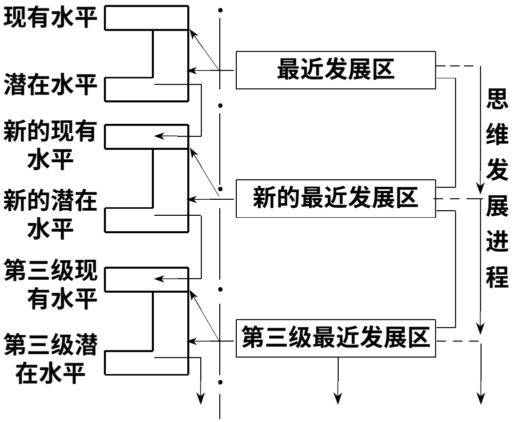
“最近发展区”的基本点在于“发展”。维果茨基认为至少可以确定学生有两个发展水平，第一个是现有发展水平，是由已完成的发展程序的结果而形成的学生心理机能的发展水平，表现为学生能独立地、自如地完成教师提出的智力任务；第二个就是潜在发展水平，是那些尚处于形成状态，表现为学生还不能独立地完成任务，但在教师帮助下，在集体活动中，通过训练和自己的努力才能完成智力任务。这两个水平之间的幅度即为“最近发展区”。如图所示：



他认为这两种水平之间的“最近发展区”，是“教学的最佳期”。在“教学最佳期”进行的教学是促进学生发展的最佳教学。

2.思维教学就是不断地将“最近发展区”转变为“现有水平”的螺旋式向前发展的过程

数学思维能力的形成必须是依靠数学知识基础上的发展运动,数学思维的教学应从学生的思维的潜在水平开始,通过教学把潜在水平转化为新的现有水平,在新的现有水平的基础上,又出现新的思维潜在水平,并形成新的思维最近发展区,于是教学又从新的思维潜在水平开始……这种循环往复不断转化和思维发展区层次逐步递进的过程,就是学生不断积累知识和启动数学思维发展的过程。如图示:



下面对本图进行重点分析。首先,从教的方面说,本图实际上是一种螺旋式思维教学结构。数学思维能力的形成和发展,就应该采取这种螺旋式优化教学结构。因为通过数学基础知识的学习,学生首先就具有了数学基本技能,容易转化为一般的数学能力,关键的问题是了解学生,分析他们的思维结构,看他们的现在水平如何,潜在水平怎样,从而找出“最近发展区”,然后组织从潜在水平开始的思维教学。下面举一例说明:

例1　将函数 $y=f(2x)$ 图象上所有点的横坐标向右平移1个单位,得到图象的解析式是什么?

这个问题实际上就是分辨应得 $y=f(2x-1)$ 还是 $y=f2[(x-1)]$ 的问题。为此,解决本题应首先选择学生熟悉的三角函数。学生的现有水平是将 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,画出图来容易得到解析式为 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,而潜在水平是由 $y=\sin x$ 的图象过渡到 $y=\sin 2x$ 的图象,这中间就有个“最近

发展区”,教学就可以从潜在水平开始,分析离到 $y=\sin 2x$ 图象上所有点的横坐标向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到的解析式为 $y=\sin 2(x-\frac{\pi}{3})$,这样就使之达到一个新的现有水平。在此基础上,对比所求的问题,又会出现新的潜在水平。即由函数 $y=\sin 2x$ 的图象到函数 $y=f(2x)$ 图象性质的过渡,从而又形成了新的最近发展区,然后教学又从新的潜在水平开始……如此循环往复,螺旋上升,问题即可迎刃而解,学生的知识不断积累,思维能力也趋于形成和发展了。

其次,从学的方面考虑,上述结构,学生在不断地完成“平衡—不平衡—平衡”的过程,并在此过程中不断得到心理上的满足,这种状态的多次重复便会产生某种心理需要,是构成兴趣、情感、意志的基本因素。学生之所以对数学学习产生厌倦感,很大原因在于教师不真正了解学生,老师教学仅仅停留在学生现有水平上,没有挖掘他们的潜能,从潜在水平开始的“最近发展区”的教学,由于学生接触到的知识刚好符合自己思维的“最近发展区”,他们经过努力使问题得到圆满解决,就会感到解答问题的极大乐趣,同时数学能力的形成也处于内驱力的兴奋状态,西方心理学著作中称“内驱力是一种唤起的内部激动状态”。这样教学的结果,会使学生始终保持在一个旺盛求知的氛围里,并从解决问题的过程中得到成功的情绪体验,从而产生较为稳定和持久的兴趣。

3.思维教学的关键在于对学生最近发展区的开发和创设

数学思维的教学,必须重视研究学生的“最近发展区”,这是优化学生的思维品质、提高思维能力的重要手段之一,重视对学生最近发展区的开发和创设研究,将会明了学生在学习数学过程中的各种阶梯和困难,从而把握“教学的最佳期”,给学生的数学方法及思维途径以有效的指导。那么,如何在数学思维教学中开发和创设最近发展区呢?

(1)对难建立的数学概念要唤起学生对已有知识的联想。 前苏联教育家苏霍姆林斯基认为:实践证明,当课堂上所讲的教材里既包含一定“份额”的已知的东西又包含一定“份额”的新的东西,才能唤起建立在思维本质上面的稳定的兴趣……。揭示出已知的东西与新东西之间的内部的深刻联系,这是激发兴趣的奥妙之一。讲授新课要唤起学生对原有知识的回忆和联想,培养能力也要以原有能力为基础,尤其是对抽象难以建立和接受的概念更应如此。例如讲反正弦函数,可先回忆反函数的概念,突出反函数存在的条件是一一映射,在此基础上,针对正弦函数 $y=\sin x$,对 x 施加什么条件,与 y 才是一一对应的?这样以旧寓新 新旧相融,不仅

搞清了反正弦函数的本质,而且便于记忆和应用。

⑵ 把教学层次和要求设置在学生的最近发展区。 教学就是把学生的“最近发展区”转化为“现有水平”的过程,教学层次和要求要从学生的思维水平和知识水平出发,妥善地安排其学习内容,既非轻而易举使学生感到乏味,贻误了学生思维向高一级发展的时机,也不能大大超过学生的智能“最近发展区”。使学生高不可攀而丧失信心。应该把教学层次和要求设置在学生的“最近发展区”,让学生“跳起来摘到果子”。例如“将复数的代数式化为三角式”这一节,其内容是学生力所能及的,如果要让学生解决问题,就不能简单提出:“怎样把复数的代数式化为三角式?”这样太抽象、太空洞的问题,学生会感到束手无策,如果换一种方式提问:“已知 a 和 b 为不同时为零的实数,求 r 和 θ,使得 $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,0\leqslant\theta<2\pi)$”,则属于学生能力的最近发展区,学生通过努力,最终能够“跳起来摘到果子”。

⑶ 重视解题策略和方法训练,顺利实现知识和方法的迁移。 学生这所以感到某个内容难学,问题难解,主要是由于该内容或问题的抽象程度高,综合性强,若离开学生现有思维水平越远,则难度越大,为减少这种思维的跳跃性,适当地采取一些解题策略或方法训练是很有必要的。比如采取“以退求进”、化归、模型化等策略,安排预备练习,采取“铺垫”等做法,有意识地为学生的后继学习作好准备,增设阶梯,使“较远发展区”转化为依次递进的“最近发展区”。

例2 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根 n 次方的和以 S_n 求证:$S_n=-\dfrac{bS_{n-1}+cS_{n-2}}{a}$ $(n=3,4,5,\cdots)$。

分析 要直接找出问题解法是困难的,为此应给学生创设一个最近发展区,先“退”到简单的情况:$n=3$,以探求途径。

设方程两根为 x_1、x_2,则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$,$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$。

$$\because\ S_3=x_1^3+x_2^3=(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2)-x_1x_2(x_1+x_2)=S_2\left(-\frac{b}{a}\right)-\frac{c}{a}S_1=-\frac{bS_2+cS_1}{a}$$

由 S_3 的启示,可找到解题的途径,即可循着这条途径“进”到 S_n:

$$\because\ S_n=(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})(x_1+x_2)-x_1x_2(x_1^{n-2}+x_2^{n-2})=S_{n-1}\left(-\frac{b}{a}\right)-\frac{c}{a}S^{n-2}=-\frac{bS^{n-1}+cS^{n-2}}{a}$$

本题通过“以退求进”的做法，为学生解题创设了最近发展区，若不先“退却”，一时很难想到上述这种变形技巧。

□数学思维与数学教学内容、方法的层次性

同样采用的同一本教材，上得同一节课，不同思维素质的教师去讲，产生的效果为什么会出现如此大的悬殊呢？究其根源，这就反映出数学教学内容、方法的层次性问题，同时伴随着数学思维能力的层次性问题。山西省吕梁地区教育局教研室刘应平老师着重从如下几方面研究了数学思维与数学教学内容、方法的层次性问题。

1.数学教学内容、方法的层次性

⑴什么是层次。　层次就是在自然界长期发展和演化过程中，物质运用由简单到复杂、由低级到高级、由量变到质变，由无序到有序，逐渐形成的类似阶梯样的序形。每一节阶梯在实际中都是展开了一个面，所以每节阶梯都可以看作一个层次，这样由低层到高层渐次形成了今天的自然和社会。我们把这种现象称为层次性。

化学中各元素所形成的离子的电子层结构，根据每层所分布的核外电子数，反映出它固有的性质的活泼性，每一门学科都有它的发展史，也都具有其层次性。数学是一门具有悠久发展历史的学科，它的层次性更直观，更明显。著名的数学家华罗庚曾讲过，这是把一本书读厚了又读薄了的结果。可见，数学绝不是那单纯抽象的，僵化的静态物，而是那由抽象上升到具体的、活生生的、有血有肉的被你理解的公理体系。

⑵概念教学的三个层次。　首先，概念是反映事物特有属性的一种思维形式，要进行正确的数学思维活动就必须做到概念明确，也就是必须明确概念的内涵和外延，这是概念学习的第一个水平层次，是对概念学习的基本要求。

其次，正确认识这些概念之间的关系，是概念学习的第二个水平层次，这个层次（及后述第三层次）是教学成果得到巩固、深化的重要环节。概念间的关系主要有同一、从属、交叉、并列等诸种，通过对一些概念（特别是易混概念）进行比较、分析，将有助于明确它们之间的联系与区别。如“无理式”、“根式”及“方根”等概念就常常纠缠不清，如果用一

些具体实例对照着鉴别,充分认识它们之间的交叉关系,就容易收到较好的教学效果。对于并列的全异关系,又分为矛盾关系和反对关系两种。明了这些关系,对于正确进行概念的概括是十分有利的。如“有理数”和“无理数”就是一对具有矛盾关系的概念,而“正实数”与“负实数”却是两个具有反对关系的概念,因为它们的共同邻近属概念“实数”,还包括零这个特殊数。

概念学习的第三个水平层次是在一定的学习阶段上,通过概念的系统化、条理化,形成相应的概念体系。如在学习了几何体的体积计算后,应通过复习从体上把握教材的逻辑结构,充分认识各种几何体求积公式间的辩证关系,只有在这个层次上,才能引导学生克服概念掌握上的孤立、离散状况,为数学理论的应用及进一步学习打下坚实的基础。正如斯托利亚尔指出的:“掌握概念的体系是掌握作为其组成部分的演绎理论的必要条件”。

⑶ 公式教学的层次性。 公式是中学数学贯穿始末的重要内容。公式教学本身就是传授知识的一个重要内容,它又是和培养能力同步进行的。因此,结合公式的具体特点,寓“培养能力,发展能力”于公式教学的各个层次之中,就能收到较好的教学效果。

首先,公式教学的最低层次就是把公式引入,如何抓住公式的结构特征,把公式记住。 公式的引入,需能把学生深深吸引住,这样将大大激发学生的求知欲望,使他们处于积极的思维状态,从而引导他们自觉地去探索新的知识。当我们导出一个公式时,还必须根据这个公式的结构特点,介绍或引导学生设法记住这个公式,只有记住公式,应用时才能左右逢源,得心应手。

其次,公式教学才能进入第二层次,来着重研究公式的推导,公式的特例以及它的几何解释。 任何一个公式,都有其来龙去脉,有意识地让学生参与推导公式的过程,不但可以使学生掌握公式,而且能挖掘出推导公式过程所隐含的各种数学解题方法,对帮助学生提高分析问题,解决问题以及形成技能技巧的能力都是十分有益的。

一般说来,公式中的数学对象是具有普遍意义的,但为便于研究具体的问题,不但要对公式中的数学对象的特殊情况加以分析,导出更简单的公式,而且对抽象的数学公式作出隐藏在它背后的几何图形,这对于进一步加深第一层次的记忆是极有好处的。

第三，公式教学的第三层次，不但教公式的变式，而且要教公式的应用，这是公式教学的最终目的，也是培养能力的重要环节之一。　任何一个公式都蕴涵着一定的数学对象间的关系，深刻认识公式所反映的这种关系和形式，对公式进行适当变式，可以帮助学生提高运用公式（活用、巧用）的能力。

这里仅以基本不等式为例，说明公式应用的五个层次。基本不等式指：

$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a,b\in R)$

第一个层次——套着用公式

这一层次的思维是模仿式的，思维量极小，几乎是平静状态下的思维，这种静态思维是必要的，对理解和巩固公式会起积极作用，但这种积极作用极其有限，所以过多地套用公式的训练是没有意义的。

例 1　求函数 $y=3x^2+\dfrac{1}{2x^2}$ 的最小值。

解　直接运用基本不等式得

$y\geqslant 2\cdot\sqrt{3}x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}x}=\sqrt{6}$，

当且仅当 $3x^2=\dfrac{1}{2x^2}$，即 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}$ 时，y 达到它的最小值 $y_{min}=\sqrt{6}$。

第二个层次——凑着用公式

如果习题形式不符合公式的模式，则须通过适当变形，凑成公式的模式，然后用公式得出结果。这一层次的思维打破了静态，思维开始低速度流动，向发散方向前进。

例 2　求证：$\log_{n+1}(n+2)<\log_n(n+1)$。

证　$2\log_{n+1}(n+2)\log_{n+1}n$

$\leqslant \log^2_{n+1}(n+2)+\log^2_{n+1}n$

$=[\log_{n+1}(n+2)+\log_{n+1}n]^2$

$-2\log_{n+1}(n+2)\cdot\log_{n+1}n$

，$4\log_{n+1}(n+2)\cdot\log_{n+1}n$

$\log^2_{n+1}(n+2)n\leqslant[\log_{n+1}(n+1)^2]^2=4$

即　$\log_{n+1}(n+2)<\log_n(n+1)$。

$\left(\text{注意 }(n+2)n<\left(\dfrac{n+2+n}{2}\right)^2=(n+1)^2\right)$

第三个层次——逆着用公式

一般公式均有左右两端，从左向右较顺，由右向左用常很不习惯，这种逆向思

维促使人们对公式深刻理解,诱发新的认识。

例 3　求证:$\frac{1}{2}(1+n)\geqslant\sqrt[n]{n!}$(n 为自然数)

证　$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\times2\times3\times\cdots\times n}$

$\leqslant(1+2+3+\cdots+n)/n$

$=\frac{(n+1)n}{2n}=\frac{n+1}{2}$

第四个层次——变着用公式

每个公式本身均可作各种变化,为了能在更广阔的背景中运用公式,就需要对公式本身进行各样的形变,产生各种不同形式的新公式,这一层次的思维量极大,思维奔腾了。这样可培养学生思维的高度灵活性,对发散思维的诱发和创造能力的培养都起促进作用。

例 4　已知:$a_1,a_2,\cdots a_n>0$,求证:

$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$。

证　将公式 $a^2+b^2\geqslant2ab$ 变形,则有

$a^2\geqslant(2a-b)b$

, $a^2/b=2a-b$,由此得:

$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1}$

$\geqslant2a_1-a_2+2a_2-a_3+\cdots+2a_n-a_1$,

$\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$。

第五个层次——横着用公式

某一分科的公式,不但应研究它在本分科内的应用,还应注意它在其他分科内的应用,开拓应用范围,这是学习知识的目的——用知识去解决问题。这一层次的思维需更多独创精神。

例 5　椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的切线与两坐标轴交于 A、B。求 $|AB|$ 的最小值。

解　设切点为 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$,则切线方程为

$b\cos\theta\cdot x+a\sin\theta\cdot y=ab$。

令 $x=0$,得纵截距　$y=b/\sin\theta$,

令 $y=0$,得横截距　$x=a/\cos\theta$。

,　$|AB|=\sqrt{b^2/\sin^2\theta+a^2/\cos^2\theta}$

$=\sqrt{b^2(1+ctg^2\theta)+a^2(1+tg^2\theta)}$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + (b^2 \operatorname{ctg}^2\theta + a^2 \operatorname{tg}^2\theta)}$$

$$\geqslant \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}$$

$$= a + b = |AB|_{\min}。$$

第四,公式数学不但要从横的方面与别的公式加强串联,而且还要从纵的方面加以推广,这是公式教学的最高层次。

⑷ 数学方法的层次性　数学方法有计算、证明、作图等几条线,证明与作图问题可归结为数学计算,无容否认,计算是一条主线,中学的数学计算呈现出明显的层次性:

第一层次　算术、代数运算。

第二层次　超越式运算。

第三层次　求导数,求不定积分。

中学以第一、二层次的运算为主,可以作如下更细致的极次划分:

第一级次:算术运算。

第二级次:有理数的运算——运算法则可分解为两个部分:符号法则与绝对值的运算,后者归纳为算术运算。

第三级次:整式运算——运算法则的基础是加乘运算与指数运算律,是有理数运算法则的一般化。

第四级次:分式运算——只要能归结为整式运算,以下就认为是容易完成了。

第五级次:根式运算——一般是归结为有理式运算,如化简:

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \div \frac{1}{\sqrt{x^3}-1},$$

可令 $u=\sqrt{x}$,即归结为

$$\frac{u+1}{u^2+u+1} \div \frac{1}{u^3-1},$$

第六级次:超越式运算,如对数式运算和三角运算——它们总是设法归结到代数运算。当然,也要同时运用一批超越运算法则,比如化简

$$\frac{\sin 2\alpha + 1}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha},$$

运用三角公式化为:

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha},$$

以下就相当于完成代数运算了。

数学计算的真谛在于不断地将较高层次的计算化归为较低层次的计算,以至最后归于最简单的算术运算,计算过程的首要任务是实现从较高层次到较低层次的转化,即不断使问题“初等化”,有时也将一个较初等的计算问题转化为较高层次的演算也可能是有利的,限于篇幅,例子从略。

2.数学思维的层次性

数学是锻炼人的思维体操,数学思维是进行数学活动(比如数学学习、教学、研究与应用等)过程中的思维,它具有连贯性、顺序性和发展性的特点,认真地分析它的思维过程,有助于发展学生的思维能力,提高解题效率,下面分三方面来作具体研究:

⑴数学的思维的特点。　数学教学过程简单地说包括知识发生和应用两个阶段。第一个阶段主要是指揭示和建立新旧课题,知识间的内在联系,使学生得到新知识的过程;第二阶段主要指在课堂上应用基础知识和基本技能技巧,解决数学问题并形成能力的过程,而在这两个教学阶段,学生的思维活动过程主要表现为如下特点:连贯性、顺序性和发展性。

思维的连贯性,是指在教学中教师提出某一教学课题后,学生针对这一课题所进行的一系列思考的承前启后的特征,他们先是要搞清课题有关的“什么是”的问题,次则要搞清课题有关的“为什么”的问题,最后学生还需要对所研究的课题进行具体化(由抽象到具体),达到初步应用,这样学生的思维才算完成了对课题知识体系认识的一次循环。

思维的顺序性是与连贯性有别的,它是学生思维活动的另一个层次。学习的思维过程,必须遵循一定的程序进行,由总课题到围绕着总课题的具体课题,形成了一个循序渐进的层次分明的体系,某一课题明确以后,便要及时进入另一课题,不能跳跃或倒退,体现着学生思维过程始终在环环相扣地进行。

教学过程中学生思维的发展性,体现在学生的思维循着课题的难度渐渐增加而积极向前的发展趋势;体现在思维围绕课题的一次循环之后,向更高一次循环跃进的兴趣和欲望。

如果在教学中不注意学生的这种思维活动特性,我们的教学过程是无法收到良好效果的。例如,不重视学生思维的连贯性,不把学生为明确某一课题的思维活动进程当做一个连续过程来看待,使学生思维

嘎然而止,就会造成学生思路的紊乱。长久下去,不但会影响学生掌握知识,而且更重要的是阻碍学生思维能力的发展。

⑵ 简单数学思维层次例说。　根据数学思维的特点,在涉及到某一个小问题时,我们又可按低、中、高思维层次来研究问题,如平面几何教学中,有关多角度、多层次、全方位识图问题较为典型:

例 6　已知图中 AD、BE、CF 为△ABC 三条高线,相交于 H,问图中共有多少对相似三角形?

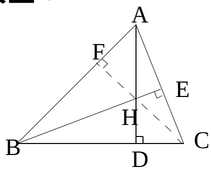


图 1

分析　抓住高线的特点,从“有一组对应角相等的两直角三角形相似”出发,直视 (低层次思维) 易见

Rt△AHF∽Rt△CHD、

Rt△BFH∽Rt△CEH

Rt△BHD∽Rt△AHE;

用重迭式视图 (中层次思维) ,可见

Rt△AHE∽Rt△ACD,

Rt△CHE∽Rt△CAF,

Rt△CDH∽Rt△CBF、

Rt△BDH∽Rt△BCE、

Rt△BFH∽Rt△BEA、

Rt△AFH∽Rt△ABR;

用半迭式视图 (高层次思维) 可发现

Rt△ACD∽Rt△BCE、

Rt△BAE∽Rt△CAF、

Rt△ABD∽Rt△CBF。

综上共有 12 对相似三角形。

⑶ 解决问题的思维层次。　心理学的研究表明,人们在创造性解决问题的过程中,总是力求逐步缩小探索的范围,即在如下的三个层次中不断地发现并提出新的辅助问题:

一般性解决,即基本逻辑水平上的解决,它力求明确解题的大体方向。

功能性解决,即基本数学方法水平的解决,它力求明确解题所用基本数学方法 (如配方法、换元法等) 。

特殊性解决,即具体的解决,它力求明确解题的具体方法、技巧和程序。

在解决问题的阶段,人们往往循着上述层次来发现问题,推进解决

问题的思维进程,如果思维在某一层次上受阻,则就逼使思维返回到上一个或两个层次中去。

例 7　设正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为 a,侧棱长为 $2a$ (图 2),求截面 AEF 周长的最小值。

一般性解决 :使复杂的,生疏的问题转化为简单的、熟悉的问题,是解决问题的一般方法,将立体问题转化为平面问题,是解决立体几何问题的一般方法。

功能性解决 如何转化为平面问题,考虑到问题特点,可以通过侧面展开解决。

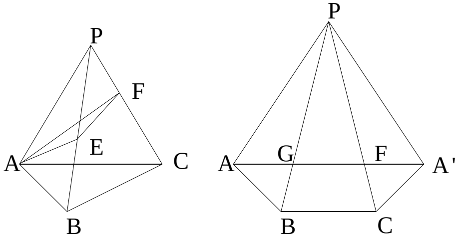


图 2

特殊性解决 :要使 $\triangle AEF$ 周长最小,即展开图中折线 $AEFA$ 最短,应有 A、E、F、A 共线,设 $\angle APB=\theta$,则

$$\sin=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}a/2a=\frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{3\theta}{2}=3\cdot\frac{1}{4}-4\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{11}{16}$$

$$,\quad AA'=2\cdot a\sin\frac{3\theta}{2}=\frac{11a}{4}$$

可见一般性解决和功能性解决是解题过程的两个重要思维层次,突出这两个思维层次,对于暴露数学思维活动过程和发展学生数学观念系统都具有重要意义。

综上所述,获取提高课堂教学的最佳效果,一方面,要求教师深刻理解每节课教学内容的层次性,并能根据学生的差异性来灵活采取不同层次的教学方法,另一方面,要求教师强化提高自己的数学思维能力。只有双管齐下,才能达到应有的教学效果。

□数学教学中思维能力训练手段的几个关系

数学思维在思维科学中具有极其特殊的重要地位,中学数学教学

几乎无时无刻不在引导学生进行思维活动。作为数学教师在课堂教学中怎样逐步培养和提高学生的思维能力，使之合乎逻辑性、合理性，达到清晰、严密、敏捷的程度，这就需要我们精心地设计思维训练的方案，其中包括训练的目的、内容和手段。江苏省射阳县教师进修学校蔡中科老师就中学数学思维训练手段方面的几种关系进行了研究：

1.“渐进性”训练和“跳跃性”训练

所谓“渐进性”训练，是指根据循序渐进的原则进行训练。表现在研究某一具体数学问题时，根据其难易程度，将一个复杂的思维过程有目的地分解成若干个简单的思维活动，即设计一定的思维“台阶”，让学生按台阶一个一个地“爬”。

例如讲过圆锥体积公式

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

之后，对解决“一圆锥，底面周长为 c，母线长为 l，求 V”这一问题，教者可设计这样的思维方案：

⑴ 本题求什么？(圆锥体积)

⑵ 应该用什么公式？($V=(1/3)\pi r^2 h$)

⑶ 需要什么条件？(r，h)

⑷ 怎样求 r？(根据圆的周长求，$r=c/(2\pi)$)

⑸ 怎样求 h？(由母线 l 和 r，通过勾股定理求出)则问题可解。

所谓“跳跃性”训练是指从提高学生思维敏捷性的目的出发，有计划地、有步骤地、有可能地让学生思维活动多个台阶地“跳”。

例如，已知 $|z|\leqslant 1$，求 $|z-i|$ 的最大值的一种解法：

解 1 $\quad |z-i|^2=(z-i)\overline{(z-i)}$ ⑴

$=(z-i)(\bar z+i)$ ⑵

$=z\bar z+(z-\bar z)i+1$ ⑶

$=(z\bar z+1)-2\operatorname{Im}(z)$ ⑷

$\leqslant 2-2\operatorname{Im}(z)$ ⑸

又 $\quad -1\leqslant \operatorname{Im}(z)\leqslant 1$，

$\therefore$ 当 $|z|=1$，$\operatorname{Im}(z)=-1$ 时，

$|z-i|^2_{max}=4$，$|z-i|_{max}=2$。

在讲解上述解题过程时，教者可有意地省去⑵、⑷让学生思考“为什么”(思维活动的跳跃不是省略必要的解题过程)。

看上去，这两种训练手段是一对矛盾，其实，它们是辩证的统一体。

前者是基础，后者是提高，不管“爬”也好、“跳”也罢，两者都要根据量力性和因材施教的原则去进行，即从教学对象的接受能力，教学内容的难易程度两方面去考虑安排。对难度大的、学生接受比较困难的要“爬”，以便降低思维坡度；对难度小的、学生容易接受的要“跳”，以求逐步提高思维跨度。总之，该爬则爬，当跳则跳。如果该爬的地方跳了，则会出现欲速不达的现象；倘若该跳的地方爬了，亦会导致容量减少，厚度不够的结果。同样，教者不去有计划地逐步引导学生由爬变跳，则不利于提高学生思维的敏锐度，让思维能力始终停留在初级水准。好比下棋一样，只能看上“一步”，而不能看上“几步”，无形中阻碍了学生判断力、洞察力的发展。

2.“引导性”训练和“放手性”训练

所谓“引导性”训练，是指教者按照解答或分析某一数学问题的途径，有目的地进行引导，让学生的思路在教者的指拨下展开，以期顺利地解决问题。

我们仍以$|z|\leqslant1$，求$|z-i|$的最大值”为例，教者按常规的解题思路，可得下解：

解2　设$z=x+yi\ (x,y\in R)$，有

$$x^2+y^2\leqslant1,$$

$$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\leqslant\sqrt{2-2y}。$$

$|g|\leqslant1$

，　当$y=-1,x=0$时，

$$|z-i|_{max}=2。$$

“放手性”训练，是指教者有意识地让学生进行“发散性”思维，充分地多方位进行包括正确的、错误的；清晰的、含糊的；复杂的、简捷的解题思路的猜想和探讨。

对于上题，如果放手让学生广泛讨论，还可得以下多解：

解3　设$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (0\leqslant r\leqslant1)$，

$$|z-i|=\sqrt{r^2\cos^2\theta+(r\sin\theta-1)^2}$$

$$\sqrt{r^2-2r\sin\theta+1}。$$

当$r=1,\sin\theta=-1$时

$$|z-i|_{max}=2;$$

解4　设z是单位圆内或圆上的点，$|z-i|$表示点z与点$(0,1)$的距离，当$z=$

-1 时，$|z-i|_{max}=2$；

解5　z 是单位圆上或圆内的点，$|z-i|$ 表示将点向下平移 1 个单位，显然新圆上或圆内点的最大模为 2，即

$|z-i|_{max}=2$。

解6　根据 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 得 $|z-i|\leqslant|z|+|-i|\leqslant2$，$z=-i$ 时等号成立

，　$|z-i|_{max}=2$。

目前，在我们的实际教学中，教者往往出于“完成任务”的需要，总是按自己所准备的解题思路诱使学生“就范”。似乎对前者有所“垂青”，对后者采取较少。其实，这两者乃是对立的统一，是思维训练中不可割裂、不可忽视的两个方面。我们把前者称之谓“收”，后者称之谓“放”。无论是“收”还是“放”，教者的主导地位没有变，也不能变。在充分“放”的基础上抓住契机有目的地“收”，将使学生的主动性、思维的积极性得到最大程度的发挥和调动，教者的主导作用得到更为饱满、出色的体现。如果只偏向“收”、舍不得“放”，长此以往，势必会束缚学生的思维个性，跳不出教者划定的“圈子”，解题思路狭窄，使学生的思维达不到一定的广度，影响了创造力的提高。如果只“放”不“收”，不去进行适当的引导，将一些盲目的、甚至错误的思维活动进行“拨乱反正”；不去进行很好的比较、将几种思维活动进行优劣评估；不去进行高度的归纳、将学生的思维活动进行质的提炼，势必使学生的“发散性”思维停留在浅表层、达不到一定的深度，有时还会出现“失控”。当然要使“放”、“收”结合得体，达到预期的效果，这就需要教者一要有扎实的知识基础，二要有充分的课前准备，三要有一定的引导功夫其中包括由“具体到抽象”、“由已知到未知”、“由特殊到一般”的启发式教学的各种手段。只有这样，教者才能驾驭课堂，以不变应万变、循循善诱，稳操胜券。

3.“正面性训练”和“反面性训练”

所谓“正面性训练”，是指教者按正确的思路进行正面引导，启发学生思维。这是常见的训练形式，不再举例赘述。

所谓“反面性训练”，是指教者为纠正某种易发性错误而设置的思维圈套，故意地将学生引入歧途，然后通过分析，让学生发现上了当。

例如，已知△ABC 的周长是 6，BC = 2，求△ABC 的最大面积。

教者开始可设置这样的解题思路：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A。$$

由题意得　$AB+AB=4$（定值）

$$\sqrt{AB\cdot AC}\leqslant\frac{AB+AC}{2},$$

$$,\quad AB\cdot AC\leqslant\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2=4,$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A。$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2\cdot\sin A$$

$$=2\sin\leqslant 2。$$

,　　$\triangle ABC$ 的最大面积是 2。

乍看上去，这种解答正确无误，学生也不介意，以为这个问题已解决了。这时教者指出这种解法错了，学生势必感到惊讶，随之必然会对整个解题过程进行反思。经过教者的启发诱导，发现错误出在前一个不等号中等号成立的条件是 $AB=AC$，此时$\angle A=60°$；后一个不等号中等号成立的条件是$\angle A=90°$。前后矛盾，犯了逻辑错误，于是启发学生思考它的正确解法：

由海伦公式

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3(3-AB)(3-AC)(3-2)}$$

$$\leqslant\sqrt{3\cdot\left(\frac{3-AB+3-AC}{2}\right)^2}=\sqrt{3}。$$

（当然还有其它解法）

此例使学生懂得了在求最值问题时，应用不等式有几处放大（或缩小），必然使它们取得等号时的条件一致。

通过这一“正”—“反”的训练，学生由“大误”到“大悟”，其效果显然比仅进行“正面性”训练要强得多。俗话说，吃一堑，长一智”。教者在思维训练中，根据问题的需要不时地进行一种“反面性”引导，学生必然在思想中筑起一条防线，谨防再上老师的“当”，而对每一步推导、变形，都要认真地琢磨一番，不能“师云亦云”。这对于增强学生的思维嗅觉，培养优良的思维品质、提高识别力都有一定的帮助作用。

4.“直观性”训练和“抽象性”训练

列宁说：“从生动的直观，到抽象的思维，再由思维到实践、是认识真理、是认识客观实在的辩证道路。”通过直观获得的知识是生动的，是

活的领悟，最容易使学生接受并且最容易巩固，因而“直观性”训练是一种从“感性”到“理性”的训练手段，也是启发式教学的重要方面。这是我们教者所必须掌握的一种教学方法。

然而，随着年级的升高、数学知识的抽象性也愈来愈强，有的知识也难以“直观化”。这就需要我们数学教师要将“抽象性”训练提到一定的位置。另外，从学生今后学习高级知识的需要出发，要有所侧重地对学生进行“抽象性”训练，对有些可直观化的知识，也应逐步抽去其具体形象进行思维，以便养成抽象思维的习惯，使学生在学习中利用直观而不依赖直观。笔者认为数学知识的教学，形象思维只是抽象思维的一种辅助手段，抽象思维是以形象思维为基础的一种较高级的思维形式。所以，我们在实际教学中要把“直观性”训练和“抽象性”训练紧密有机地结合起来、使之融为一体、相得益彰。

例如，当实数 a 在什么范围内取值时，曲线 $c:\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1$ 和曲线 $y^2=\frac{1}{2}x$ 有公共点。

如果仅从抽象的数的知识方面思维，容易得出下面的错误解答：

解　由 $\begin{cases}\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1,\\ y^2=\frac{1}{2}x,\end{cases}$

消去 y 得 $x^2-(2a-1)x+a^2-2=0$ 由 $\Delta=(2a-1)^2-4(a^2-2)\geqslant 0$ 得 $c\leqslant\frac{4}{9}$ 时，两曲线有公共点。

其实，结合图形来检查这一结论，

当 $a<-\sqrt{2}$ 时，椭圆系与抛物线无公共点，于是得到正确的结论：

$-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\frac{4}{9}$。

但是，尽管运用了图形这一“直观性”方法，还未能彻底地解决这一失误的原因。这还需要我们从“充分性、必要性”这一抽象的逻辑思维中去找答案。最终使学生明白：用 Δ 法判定曲线和曲线的位置关系时要注意，在联立方程组化成关于 x 与 y 的二次方程后，方程有实数解仅是原方程组有解的必要非充分条件，还要结合图形来解。

由此可见，“直观性”训练和“抽象性”训练都是训练中不可缺少的

两个方面,两者均不可轻而视之。

在我们中学数学教学中,一定要用辩证法的观点正确运用各种训练手段,切不可顾此失彼。从而不断提高学生的逻辑思维能力,而思维能力的发展,又将对学生数学基本知识和基本技能的掌握产生不可低估的推动和促进作用。

数学思维策略及其教学

数学思维策略是指对于所要学习和解决的数学问题,按照某种规则进行自我调控思考的一般程度和方法。为了使学生逐步领悟如何进行数学思维,学会调控自己的思维,应该倡导教师结合数学的具体内容,教学一些数学思维策略。华南师大教育系袁碧云老师总结介绍了几种学生常用的思维策略的教学方式:

1.数学思维一般程序策略的教学

数学教学要逐渐使学生懂得并学会调控自己进行数学思维的一般程度。主要包括以下几个方面:

⑴ 数学思维的定向“递归”程度。 这里是指培养学生会紧紧抓住要解决问题的方向去展开思维,逐步递进,归结为问题的解决。

学生必须学会抓住思维的对象——问题来进行思维。否则,头脑中没有问题状态,就不会出现思维。要培养学生会从数学的角度思考问题,会用数学观点看世界,会按数学思维的目标去定向思考。在随机进行思维活动的动荡中,保持一定的方向目标,不会“走题”,递进思考,最后归结为目标的实现——解决问题。

⑵ 数学具体问题抽象化,或抽象问题具体化的基本思维程序。学生学习任何数学知识,都要对感知的材料或已有知识经验的具体材料进行分析、比较、综合,然后进行抽象概括。我们主张要教学数学知识的形成过程和推导过程,并在推导知识形成过程的基础上,适当由学生自己来概括有关的知识。其目的除了为加深学生对知识的理解之外,也为了使学生学会对具体问题的抽象化,即学会舍弃对象的非本质属性、非内在规律关系,抽取并概括本质属性、内在规律关系的思维程度。

当学生运用数学知识解决问题、解答习题的时候,往往要进行抽象

问题具体化的思考。即通过思维对面临要解决的数学问题、习题进行课题类化。分析它们与已学过的数学概念、法则、性质、定理等抽象知识的联系,或把面临较复杂的问题、习题转化为能直接运用已学过的知识去解决。我们主张在数学教学中不仅要阐明例题的解法,而且要说明为什么要这样解法,应该怎样思考,还要训练学生表述解题的思路,其作用之一就在于使学生逐渐领悟抽象问题具体化的思考程序。

学生在实际解决数学问题的思考过程中,有时会把具体问题抽象化和抽象问题具体化交织结合进行。这是在较高层次意义上的学习与应用。

⑶ 数学思维对象的整体与部分结合思考的程序。 学习数学知识或解题时,通常按整体——部分——整体的程序来思考。例如解答一道应用题首先要对题目的整体作些思考,然后把应用题分解为条件和问题作些分析思考,再把条件和问题结合起来作为整体来思考。许多数学知识分成若干部分去教学,但每次出现在学生面前的是一个一个的问题或习题。作为一个问题或一道习题的思维对象,必须把整体与部分结合起来思考。离开了整体的部分,是没有意义的或者是变义的;离开了部分的整体,也就无所谓整体。数学教学中,要使学生学会从问题或习题和整体出发去思考,对于某些问题特别是较复杂的或综合性较强的问题,可以分为若干部分或若干子问题去思考解决,但部分或子问题必须与整体结合起来。要引导学生克服只抓住式子的个别符号、数量,或只抓住题目的个别词语、句子等,就急于思考解决问题的现象。

⑷ 思考数学问题的纵横沟通联系的程序。 要培养学生学会从横的相关比较和纵的相关沟通联系去思考数学问题。思考问题作为程序性的纵横沟通联系,可以使知识理解得深广,有利于分化易混淆的知识,有利于形成知识的网络结构,有利于知识的提取应用,较容易实现多角度、优办法地解决问题。

⑸ 有根据的运作数学思维的程度。 数学思维的展开运作,必须是有根据的。数学中有许多是模式化、形式化的思考方法、思考程序。常见的数学思维的进行或解题的表述用“(因为)……,(所以)……”的程序,其实这是演绎推理思维形式的程序。无论用哪一种形式的思维运作,都必须是有根据地进行。这包括两个方面的根据:一是数学知

识方面的根据,即根据数学概念、法则、性质、公式、定理等进行判断、推理、分类、排列…… ;二是根据面临要解决的问题情境。例如,“2 是不是质数”,思维运作的根据之一是“质数的概念定义 ;“一个数只有 1 和它本身两个约数的,这样的数叫做质数” ;根据之二是“2”这个数只有 1 和它本身两个约数。推出结论 :2 是质数。有根据地运作数学思维,才可能正确、科学地认识问题和解决问题。

⑹ 个体自我组织、调控思维的程序。 要培养学生对于自己思维的状况能够自我意识,自我监控,自我调节。这样提高思维功能,发展思维能力。

2.选用参照物辅助思维策略的教学

学生学习和解决数学问题时,可以利用原型或其它参照物辅助思考,以便把抽象的数学问题形象化、图形化、图式化,用具体形象支持抽象思维。辅助数学思维常用的参照物有 :反映事物问题内容的简图、图形、特别是线段图 ;低年级学生可以操作数学学具 ;学习几何形体模型 ;还可以运用模拟表演、个体脑中的表象、用具体的语言文字叙述数量、形体的实例等。

要培养学生学会选用参照物、会设计实例来辅助思考,还要使学生逐渐领悟到选用参照物辅助思考要注意 :

⑴ 不能离开数学问题原来的本质属性或关系来选取照物。

⑵ 按照所要解决的数学问题的特点以及参照物特点之间的关系来选用。例如,比较两组数量多少之间的关系,或整体与部分量之间的关系,可以采用画线段图作参照物 ;反映动态变化的数量关系,可以用草图作参照物。

⑶ 结合数学材料的特点来组织处理参照物。例如,同样是线段图作参照物,行程问题线段图除了注意各个量之间的关系以外,还要注意所画的线段有行程方向的表示。

⑷ 结合学生自己的情况,考虑选择适用的参照物。例如,小学一年级可以较多地运用图片、小棒、方块等模象学具作参照物。

数学中既要培养学生学会运用参照物,又要在适当的时候甩掉参照物,直接运用概念及其相互关系来思考。

3.转化言语形式的思维策略的教学

学习或解决数学问题的思维过程,经常要进行两种言语形式的转

化：

⑴ 外部言语与内部言语形式之间的转化。　外部言语是以开展的形式外现的并让别人能感知得到的言语。内部言语是以简缩的形式内隐的只为语言使用者所意识的言语。

通常学生解答习题,开始用外部言语的形式接收习题的信息。当对题目进行分析、思考如何可解答时,就转化为使用内部言语形式进行。当进行书写列式计算和解答时,要把思维的结果外化表述出来,这时就用外部言语形式进行,即常常表现为下面的程度：

外部言语—→内部言语—→外部言语

教学时,可以让学生用外部言语表述自己对习题的分析和思考解答,来促进运用内部言语思考的准确性和逻辑性;还可以让学生总结并讲述如何使解题思考更为简缩、概括,以提高运用内部言语思考的机能。

⑵ 社会生活言语与数学特殊言语形式之间的转化。　从社会应用中提出的数学问题,或者是一道应用题,主要采用社会生活语言来表述;当表述的是抽象的数学问题,则主要采用数学特殊语言,即采用数学特有的符号语言和图象语言。学生学习知识和解题思考,经常要进行社会生活言语与数学特殊言语形式之间的转化,才能理解或解答。解答应用题的言语转化形式的程序一般是：

社会生活言语—→数学特殊言语—→数学表达式

在教学过程的适当时候,训练学生把应用题、文字题或数量关系式、式子互相转化,有助于学生思考应用题中进行言语转化,实现课题类化,选择计算方法,也有助于学习和应用数学问题时,把具体数学问题抽象化,或把抽象数学问题具体化。

可以训练学生逐渐学会把一些比较陌生的或不容易明嘹的社会生活言语转化为熟识、易明的社会生活言语表述数学问题,或者对所用的数学特殊言语本身进行比较简明的转化,以有助于思考解题。

言语形式转化的要求,必须是与问题(习题)初始状态的语言形式所反映的本质或规律关系不变。

4.换元思考策略的教学

在思考解决数学问题时,可以利用其元素的结构特点,根据有关数量、式子或形体的性质,把其中某个或某几个元素进行同值、同等的代

换或变换，即“换元”，就可能产生新的思路、变通解决问题的方法。

可以结合经常的教学，教学一些同值不同形式的数的转化，或教学入算数据与运算种类的转化，数量关系的转化，几何图形的转化等思考策略。通过这样的换元转化，可以把复杂问题转化为简单问题，复杂量转化为基本量，抽象问题转化为具体问题，逆向叙述转化为顺向叙述等，使要解决的问题从未知化为已知，生疏化为熟识，变得易理解、易处理。这样，学生的思路就会开阔得多，思考问题的角度、办法也会多些。

要使学生懂得并遵循换元的规则：要守恒。即实行数、量、形、数学关系、运算种类以及式子等的变换时，必须是同值、同等、同义的。

要培养学生做到有根据地进行换元转化，并能适当表述换元转化的根据。例如，数据数的组成，把 444 转换成 400 + 40 + 4 来入算；根据积、商的变化规律，把 25 变换为 25 × 4 ÷ 4，或变换为 100 ÷ 4 来入算，常见有些学生在换元转化的时候，与原题目给予的条件不符合，不同值、不相等、不同意义的情况，教师要加以指导和纠正。

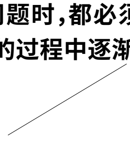
5. 判断、推理策略的教学

解决数学问题要运用形式逻辑和辩证逻辑，其中很多时候要运用形式逻辑，即按照形式逻辑的规律去运用数学概念进行判断、推理。所以，我们在数学教学中要逐渐使学生领悟数学判断、推理的策略。

判断和推理紧密联系。要进行正确的数学判断和推理，有两个基本要求：

(1) 数学材料（前提）及其认识的真实性。

(2) 思考合乎逻辑规律。例如，所思考的问题前后必须是同一意义的，每一个概念、公理、性质，都必须在同一意义上使用；必须是有根据地思考处理数学问题；分析数学问题时不要自相矛盾等。形式逻辑中的同一律、充分理由律、排中律、矛盾律等，在思考解决数学问题时，都必须遵守，只是数学课中不教学这些逻辑规律，让学生在思考数学问题的过程中逐渐领悟。



任何数学命题都有条件和结论两个组成部分。如果（前提）条件是真实可靠的，认识正确无误，又正确运用推理规律，那么推出的结论必然正确；如果（前提）条件是假的不准确的，或推理违反逻辑，那么推出的结论必然错误。例如：问学生下面两条线会不会相交？（见上图）有的学生回答：这两条线延长后会相交。错误

回答的原因：一是把前提条件搞错了。这里给与数学材料前提条件不是两条直线，以为是两条直线，那是假设条件；二是推理不合逻辑，推理过程不是在同一意义上使用两条线相交的条件。思考这个问题的推理过程应该是这样的：

大前提：在同一平面内，不平行的两条直线可以各向两方无限延长，会出现相交。

小前提：一条直线；一条射线，有端点的一头不能任意延长，而这一端点正是距离另一条直线比较近的一方。

结论：这两条线不会相交。

数学教学中，不仅要使学生逐渐领悟进行判断、推理的这两个基本要求，而且在学生进行自我调控思考方面，还应注意以下几个方面的培养训练：

⑴ 思考过程以及表述思考问题的过程，可以按照"根据（即大前提）……，(现在的）条件是（即小前提）……，所以（即结论）……"的程序进行，以培养学生合逻辑规律地进行判断、推理。

⑵ 既能进行顺向联想、顺向思考，也能进行逆向联想、逆向思考；既能从肯定方面运用某项数学知识，也能反过来从否定方面运用某项数学知识。

⑶ 要逐渐学会排除推理过程中的"气氛效应"的干扰。

"气氛效应"是指两个前提如果是同类的命题，就容易使人接受这种一致的倾向而作出类似的结论。如果两个命题是不同类的，其中一个具有强烈的气氛，也会影响人接受相应的结论，而这些结论往往是不正确的。

常见的学生受"气氛效应"干扰数学问题推理过程，如："一个圆面积的各部分，都是这个圆的面积。扇形面积是圆面积的一部分"。有的学生容易接受或作出结论："圆面积的一部分是扇形面积，"这是错误的结论，因为圆面积的一部分不一定是扇面积。这是属于命题同类——圆面积，学生容易接受其一致的倾向而误以为它们是一类的事物。

又如："所有的质数都是只有 1 和它本身两个约数，没有别的约数。1 除了它本身，没有别的约数"。有的学生容易接受或作出："1 也是质数"的错误结论。这是属于命题不同类，其中一个命题是"质数"，一个命题是"1"，由于"1 和它本身两个约数，没有别的约数"的气氛强烈，影响学生接受其结论。

要培养学生对于数学问题、习题所给予的条件加以分析，细心注意条件各细目之间的相互关系，必要时可以进行换元或言语的转化，使条件更明显易懂。要克服只凭对于所给条件的大概印象，形成一种定势，按这种定势反应所产生的气氛效应，匆忙作出错误的结论。

教学数学知识时，遇有不等价的判断词语，要注意适当强调交代说

明,以免出现推理的前提错误。例如,小学教学“自然数和 0 都是整数”。这个主语和表语是不等价的。要注意告诉学生,不能反过来说,“整数是自然数和 0”。

6.转换思考策略的教学

转换思考是必要时能从一个角度、一个方面去思考转为从另一角度、另一个方面去思考,从运用一种方式、方法去思考转为运用另一种方式、方法去思考,从顺向思考转为从逆向思考,从试用一种解决问题的办法转为试用另一种解决问题的办法等。

例如:一个学生简便计算下面习题,曾转换几个角度思考试用几种不同的解法:

①试图用改变运算顺序的办法进行速算,发现不简便:

②转换试图用补充数法进行速算,发现仍不够简便,同时发现改变入算数据后,也有一个数是 143;

③转向把连减的两个数先求和再减的办法进行速算。

10000- 2857- 143

10000- 143- 2857

10000- (3000- 143) - 143

1000- (2857+ 143)

如果学生能运用转换思考的策略,解决数学问题就可能有多端性,思维的运行就可以变通、流畅地进行,解决问题的办法会灵活、精细、新颖,在可能条件下会有多种解答方案,会显现一定的创造精神。特别是一些数学变式题、综合性发展性较大的习题,解题思考过程会有一定的难度,会出现阻滞。如遇此情景,学生懂得转换思考的角度、方式、方法等,就能变通解答,高效率地思维。

问题在于有些学生不会转换思考,或者是转换得不合理,转换思考过程中乱了进程,迷失方向、目标等。

教学中,为培养学生运用转换思考的策略,要注意以下几个方面:

⑴ 使学生逐渐领悟转换思考的规则:要定向思维。 即无论如何转换思考的角度、方式、方法,都必须要明确并紧紧抓住思考解决问题的目标。

⑵ 适当教学知识的可逆性,为学生进行可逆思维,换个角度或换个方法去思考提供条件。

⑶ 适当教学数、量、形的矛盾对应关系,为学生以辩证的观点,从矛盾对应的不同方面、不同角度去转换思考数学问题提供条件。

⑷ 适当培养学生进行让步思维。 让步思维是指在既定答案的前提下再进一步思考 ;如果不是这样,会怎样 ;如果这不对,什么是对的。这样就有可能发现既定结论的悖谬,发现原来做法、解法的不完善、有缺欠,及时从错误的思路中跳出来,去寻找正确的思路、方法、解法。这还有利于培养学生做习题进行检验的习惯,有利于培养学生自我监督、调控思维。

⑸ 在数学教学中倡导提供机会让学生发表不同见解,质疑问难,提出习题的不同解法等,有利于培养学生适当运用转换思考的策略和习惯去解决问题。

教学过程中的数学思维能力培养

要形成学生的数学能力,教师不能只是传授数学知识,更重要的是要自觉地在数学教学过程中加强对学生思维能力的培养。“数学是思维的体操”,所有的数学知识是数学思维活动升华的结果。那么,整个数学教学过程就是数学思维活动的过程。因此,如何通过数学教学自觉地培养学生的数学思维能力,就成为值得探讨的重要课题。

广州市第 113 中学孔宪福老师总结在数学教学过程中,加强学生数学思维能力的培养,主要应从以下几个方面进行 :

1.既重视逻辑思维的教学,又重视非逻辑思维的教学

逻辑思维与非逻辑思维,作为人类不同的思维方式,它们各有自己的功能,都是人类健全理智的要素。对于数学而言,它们构成了数学进展的两翼。

我们知道,所谓逻辑思维方法,概括地讲就是 :在逻辑规则的控制下,从一定的前提出发,找出与之有联系的依据,循序渐进、步步为营、连续推导的线性思维方法。也正由于这个原因,逻辑思维往往比较难以获得突破性的创新。与此相反,想象、直觉与灵感这些非逻辑思维的方法,不受逻辑规则条条框框的制约,它们之间相互交叉、相互渗透、思路灵活、容易转移,形成一种放射式的非线性思维方式。因此,它能直接地获得突破性的创新。许多著名科学家的切身体验说明,最富有创造性的乃是非逻辑思维。因而,在数学教学过程中应该注重培养学生的非逻辑思维能力。

然而,长期以来,由于在数学教学中过分地强调逻辑思维,导致了数学教育仅赋予学生以“再现性的思维”、“总结性思维”的严重弊病。因此,为了发展学生的创造性思维,现在的数学教学必须冲破传统数学教学中把数学思维单纯地理解成逻辑思维这种旧观念的束缚,而应当同样重视直觉、想象、灵感等非逻辑思维的发展。

应该指出的是,我国现行中学数学教学大纲,只提对学生运算能力、空间想象能力以及逻辑思维能力的培养,没有涉及对学生非逻辑思维能力的培养。可以说,“大纲”对“三种能力”的要求,已经落后于全国数学教学的实践。

2.改变纯演绎式的教学,注重猜想的教学

我国目前的数学教学,大多数是纯演绎式的教学。教材表现的是经过逻辑加工所完成了的数学形式,呈现为概念——定理(公式)——范例组成的纯数学系统,既看不到概念的形成和实际问题的数学化,也看不到真实的应用。而在该系统建立过程中的定理的发现,公式及其证明过程的探索等,这些最精彩、最生动的过程都被掩盖了。学生若不能学到发现问题、分析和解决问题的思维方法,对他们来说,数学就变成了定义、定理、公式的堆砌,莫明其妙的推理和演算,以及为应付考试而进行的“程序输入”式的解题训练,这就极大地妨碍了学生思维能力的培养。要根本改变这种状况,需要进行多方面的综合治理,包括注重猜想的教学。大力提倡教师教猜想,学生学猜想,无疑是数学教学方法改革的一项重要措施。

完成了的数学所具有严格的演绎体系,是通过合情推理(包括归纳、类比等)和猜想而发现的。要想取得成就,就必须学习合情推理和猜想,这是创造性工作赖以进行的条件。学生需要学习证明法,但更要学习猜测法。不重视合情猜想,恰是传统教育的弊端。如果在数学教学过程中,教师能注意分析问题提出的背景,注意把实际问题数学化地讲解,并能把自己直接猜测结果的心理活动告诉学生,必将有利于学生直觉、灵感思维能力的培养。

3.通过概念教学培养思维能力,使学生学到科学的研究方法

在数学概念的教学过程中,从引入、理解、深化到应用等各个阶段都伴随着重要的创造性思维活动过程,因而都能达到培养学生数学思维能力的目的。

数学概念的教学首先要认识到概念引入的必要性，注意创设思维情境，对感性材料进行分析、抽象和概括。也就是说，数学概念教学的任务，不仅要解决“是什么”的问题，更重要的是要解决“是怎样想到的”，以及有了这个概念后又如何建立和发展新理论的问题。讲清楚概念的来龙去脉和历史背景，有利于培养学生的创造性思维能力，而对概念的理解过程亦是复杂的数学思维活动的过程。当然，还需要进一步引导学生对概念定义的结构特征加以分析，明确概念的内涵和外延，在此基础上再启发诱导学生归纳概括出其基本性质、应用范围以及利用概念进行判断，利用定义解题、证题，进而发展学生的思维能力。

在进行概念教学时，加强逆向思维的训练，对于克服思维定势的消极影响，培养发散思维的能力是有益的。思维背离指定方向，进行逆向思考探索，是逆向思维的特征。正确引导学生进行逆向思维，会使学生对概念的本质属性认识得更清楚，要以开阔学生的思路。

4.在注重思维方法、思维过程、思维转移的教学中，培养学生的思维能力

在日常的数学教学中，在加强基础知识的教学的同时，沿着数学思维和方法这条主线把力气花在培养学生良好的思维素质上，在“思想方法、思维方式”的教学上狠下功夫，使学生不仅“学会”数学，而且“会学”数学，会从“生动的直观”到“抽象的思维”，“数学地”提出问题、争论问题和解决问题。

数学教学是思维活动的教学。只有引导学生按照思维过程的规律进行思维活动，才能提高学生的思维能力。要使学生逐步学会应用“思维的问题律”，是说思维过程是从问题开始，在实践中有解决问题的需要，使思维过程深化，而问题的解决又使思维转入下一过程的必然性。据此，应该常从新知与旧知的矛盾和知识间的转化与联系、发展、变化等诸方面引发学生的思维活动，激发学生的思维积极性。还要使学生逐步学会应用“思维的情境律”，因为任何思维过程都受一定的情境所制约和激发。因而在教学过程中必须根据问题的具体情况及时组织和调整教学内容、方法、手段，创设思维情境，才能实现教学过程的优化控制。此外，还要使学生逐步学会应用“思维的多向律”，在思维过程中学会从性质接近、形状相似的内容想起，对问题的题设和结论互换联想，从具体事物的因果关系、从属关系进行联想，对具有相反特点的事物作

比较等等，可以使学生的思维具有多向性。

在数学教学中，对概念来说，有一个抽象概括的过程；对公式来说，有一个推导的过程；对性质、定理来说，有一个归纳过程。而结果则是过程的必然产物，即认识的自然升华。假如在教学中忽视了思维过程，只力求要学生掌握结果，势必使学生理解不了、贮存不住、运用不当，造成注入式教学的必然结局。

在数学教学中，逐步教会学生应用"思维转换"，也是培养学生思维能力的重要途径。思维转换是思维从一种状态转换为另一种状状态的复杂的心理过程。在数学思维活动中，有正向思维和逆向思维的转换；定势思维和发散思维的转换；抽象思维和形象思维的转换。

当然在注重思维方法、思维过程、思维转换的教学过程中，还必须组织学生动手、动脑，积极参与思维训练以实现从理性认识到实践即由知到用的转化，从而培养学生的思维能力。

5.在数学定理、公式、法则的证明过程中，培养学生的思维能力

数学定理、公式、法则的证明过程即是寻求、发现和作出证明的思维过程。数学定理、公式、法则反映了数学对象属性之间的关系，对于这些关系的认识，要尽量创造条件，从感性认识和学生已有的知识入手，让学生了解定理、公式、法则的形成过程，并设法使学生体会到寻求真理的乐趣。定理、公式、法则的证明是数学教学的重点，因为它承担着双重任务：一是它的证明方法一般具有典型性，学生掌握了这些具有代表性的方法后可以达到"举一反三"的目的；二是通过定理、公式、法则的证明，可以发展学生的创造性思维。当然，在数学教学中，还要注意使学生掌握知识的内在联系，这也是人们的认识由感性上升到理性的一个重要方面，而数学的每一个定理、公式、法则实质上都揭示了某一种内在联系。

当一个定理或公式、法则展现在学生面前时，首先应该使学生从整体上把握它的全貌，凭直觉思维预测其真假性，而后在具有初步确信感的基础上，再通过积极的思维活动，从认识结构里提取有关的信息、思路和方法，最后才能给出严格的逻辑证明。这样，在证明数学定理、公式、法则的全部过程中，培养和发展学生的思维能力。

6.注重习题教学，培养和发展学生的思维能力

如何重视习题教学以开发学生的智力和培养学生的思维能力？这

也是中学数学教学中一个不可忽视的问题。为此,必须注意到很多习题潜含着进一步扩展其数学功能、发展功能和教育功能的作用,从解决这种问题到转向独立地提出类似的问题并解答这些问题,这个过程显然扩大了解题的“武器库”。由此,学生类比和概括能力得以形成,辩证思维、思维的独立性和创造性也得到发展。

利用一题多证,培养发散思维。教学实践告诉我们,选讲的习题不在量多,而在于质精。对于典型习题,要注意从知识的纵横联系上去剖析和寻求多途径证法,从而促使学生的思维向多层次、多方位发散。

利用一题多疑,发展求异思维。求异思维能打破习惯思维程序而赋予开拓创新意识。在处理课本习题时,应引导、鼓励学生质疑,只有大胆地质疑,才能更有效地发展求异思维,并使这种思维更趋深刻。

利用一题多变,激发创造思维,创造性思维表现为在新的问题面前具有应变的能力。它主要体现在善于联想,能摆脱思维定势的束缚,对所面临的问题能初步地进行去粗取精、去伪存真的剖析,它具有跳跃性和发散性。而训练、培养这方面的能力的途径是多方面的,对课本某些例题习题作深入的探讨则是行之有效的途径之一。

综上所述,只有通过数学过程中的各个环节,注重开发学生智力和培养学生的思维能力,才能为社会造就一代具有开拓、创造精神的新人。

培养数学思维方法的教学

数学是一门综合性较强的学科,在数学教学中,不仅要向学生讲授知识,培养基技能,使学生“学会”,而且更主要的是在传授知识、培养技能的过程中有目的、有计划地教给学生思维方法,使学生“会学”。这是中学数学教学的一项重要任务

在数学教学过程中,发现学生普遍存在着一种思维凝滞现象,很多学生的解题思路狭窄,概括性思维能力、联想能力差,解题的创造能力和知识的相互渗透能力不能很好地发挥。故此在教学中有必要注意教给学生数学思维方法,培养学生解题的变异思维能力,全面提高学生的自身素质。哈尔滨市第二职业高中周秋霞老师总结了以下几方面:

1.分析、综合的思维方法

分析、综合是抽象思维的基本方法，它贯穿于整个认识过程的始终。分析是综合的基础，而综合则必须依靠分析。

在推理论证命题、解答应用问题、算式化简求值等教学中，使学生逐步掌握综合——“已知什么，可以求得什么”、分析——“要求什么，需要知道什么”的思维方法，配以思路图辅助教学，使他们逐步养成习惯。

例如：已知直角三角形的两直角边 a 和 b，求斜边上的高。

综合法：

解：已知两直角边 a、b 可求出：$c=\sqrt{a^2+b^2}$（Rt△的斜边）；$S=\frac{1}{2}ab$（Rt△的面积）；Rt△锐角三角函数值。

进而可求斜边上的高（结论）：

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}bc,$$

$$\therefore h=\frac{ab}{c}。$$

分析法：

解：要求 Rt△斜边上的高，需知 Rt△的面积、斜边长；或锐角三角函数值及一边。从而需要知 Rt△的两直角边（已知）。

2.类比、对比的思维方法

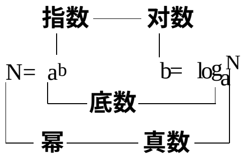
类比与对比是科学的一般思维方法，也是变未知为已知的重要认识方法。在教学中有计划地把规律性相同或类似的知识，运用类比的方法讲解，有目的地训练学生在比较中弄清异同，探索规律。对一些彼此既有联系，又有区别，容易混淆的知识，通过对比，有助于学生掌握本质属性，消除一些糊涂认识。

在讲述一些相关概念、规律、公式时，以旧带新，把本质上有联系的知识进行类比，从而引出新知识。如从建立椭圆方程的方法、步骤引出建立双曲线方程的方法、步骤等。

数学中有不少内容是相互对立的，如：有理数与无理数；等式与不等式；乘方与开方等。对立的双方各以对方为自己存在的前题，在一定条件下又互相转化。在这些内容的教学中，教会学生采用对比的方法，用对立统一的观点来阐明它们之间的关系，这样讲解，概念清晰，易于掌握和记忆。

例如指数和对数是两个对立的概念，讲对数概念时，要求学生对比着指数概念理解，并辅以板书：

这样,两个概念的关系一目了然,运用起来灵活自如、由此及彼。



有些数的概念、公式、法则由于思维定向的消极影响,学习时往往混淆不清,容易出错,通过正误对比,让学生从中领悟到随着数集的扩充或空间位置的变化,不能只从形式或文字上做出肯定或否定的答案,而需将所研究的问题放到新的数集或位置上进行考察、研究。

3.抽象、概括的思维方法

抽象和概括是人们认识事物的基本思维方法,抽象是从具体实例出发,得出一般的、容易为学生所理解和接受的结论的方法;概括是把由比较中抽出来的本质特征联合起来,推广到一切同类事物的方法。

如讲数列的概念时,提问什么是自然数?板书自然数(由小到大):1,2,3,4,5…

引导学生观察分析这一列自然数有什么特征(即顺序性、无限性),接着给出引例

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\cdots$(自然数1,2,3,4,5…的倒数排成的一列数)

(2) 1,1.4,1.41,1.414…($\sqrt{2}$精确到1,0.1,0.01,0.001,…的不足近似值排成的一列数)

(3) -1,1,-1,1,-1,1…(-1的1次幂,2次幂,3次幂,4次幂…排成的一列数)

(4) 1,1,1,1,1…(无穷多个1排成的一列数)

由引例(1)、(2)指明客观世界中按某种次序排列着数列大量存在,同时(1)和(2)中的每个位置上排列的数不局限于自然数。而引例(3)、(4)仍在拓宽学生对顺序特征的认识,从而全面深刻地认识数列,了解数列定义的内涵与外延。在此基础上自然地引出定义,使学生从被动地接受,进入主动地思考,由此及彼,比较、分析过渡自然,水到渠成,促成了学生的知识和技能产生积极的迁移,有助于学生辩证思维能力的培养和提高。

在教学数学原理、法则时要注意从具体入手,多提供让学生观察的具体材料,并采用变式,使被观察对象的属性得以充分的暴露,引导学生避开对象的表面内容,就它的属性进行分析研究,在此基础上进行比

较，区分其本质属性和非本质属性，从而抽象出具有一般意义的结论。

如，分数指数概念，是由正整数指数幂（初中）的定义、法则：⑴ $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$、⑵ $(am)^n = a^{mn}$、⑶ $a^m a^n = a^{(m-n)}$ $(m > n, a \neq 0)$、⑷ $(ab)^n = a^n b^n$ 推广得到的。

如果取消⑶中的条件 $m > n$，则正整数次幂可推广到整数次幂，由实例 $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0 = 1$，$\Rightarrow \frac{a^3}{a^3} = 1$ $(a \neq 0)$，$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} \Rightarrow \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ $(a \neq 0)$。

推广到一般：$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$，$\Rightarrow \frac{1}{a^n} = a^{-n}$ 引出定义 $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$，$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$。

即从正整数次幂推广到了整数指数幂。

再由方根（初中）定义——当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义时，$\sqrt[n]{a}$ 叫根式，n 叫根指数，通过实例，引出定义：$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$，$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $(m, n \in N)$。

负分数指数幂与负整数指数幂的意义相同。

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \ (m, n \in N, a \neq 0)。$$

概括是比抽象要求更高的思维方法，要教会学生对所学习的数学知识主动地去分析、比较、探索，概括其规律性。这样学生才能深刻理解，牢固掌握。

□强化思维过程渗透数学思想

在数学教学过程中，结合教材内容，根据学生实际，强化思维过程，揭示数学观念，讲清数学方法，渗透数学思想是十分重要的。所谓渗透是有机地结合数学知识，采用教者有意，学者无心的方法，反复向学生介绍诸如形数、分类、化归、反证、转化等思想方法。浙江淳安县临岐中学谢健康老师总结了初中阶段掌握学生的思维规律，渗透数学思想的做法。

1.形数并举，渗透形数结合思想

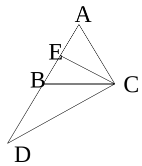
省九年制义务教育数学指导纲要（试用）一开头就指出，数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。它的产生与发展是“形”与“数”相互依存、相互促进的过程。在数学教学中，渗透和运用形数结合的思想方法，可以帮助学生从具体形象思维向抽象思维过渡；反过来又

可利用抽象思维来完善形象思维,使对客观形象的认识更加深刻,更加完整。

初中阶段,形数结合中的“形”可以是数轴、函数的图象和几何图形等等,渗透和运用形数结合的思想方法可以从这方面入手。

⑴ 以形思数,帮助学生深刻理解数学概念。 可运用数轴上的点和实数之间的对应关系讲清相反数、绝对值的概念;讲清比较两个数大小的方法;运用函数图像,研究函数的性质;讨论一元二次方程的根,一元二次不等式的解等等。

⑵ 以数思形,帮助学生简化解题方法。 如在三角形 ABC 中,已知 $AB = AC$,D 是 AB 延长线上一点且 $AB = BD$,CE 是腰 AB 上的中线,求证 $CD = 2CE$(本题可用几何方法也可用代数方法或三角方法证明之)证:设 $AE = x$ 则由余弦定理得



$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2\cdot AC\cdot AE\cdot\cos A$,

即 $CE^2 = 5x^2 - 4x^2\cos A$,

又 $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD\cdot AC\cos A$,

$\therefore CD^2 = 20x^2 - 16x^2\cos A$,

$4(5x^2 - 4x^2\cos A) = (2CE)^2$。

$\therefore CD = 2CE$。

2.比较归纳,渗透分类思想

人们的一切思维活动是从观察事物开始的,通过观察对事物形成一个初步的认识,再通过比较归纳抓住了事物的体质属性,“于观察事物中发现结论,在调节修正中接近目标”。从而形成了概念,对事物进行分类。从通常意义上来说,分类就是按照一定的标准,把研究对象分成若干部分,这在数学教学中是十分重要的。由于初中学生的知识面狭窄,思维活动范围小,因此分类思想只能在比较归纳的过程中逐步加以渗透。

首先,帮助学生初步学会用比较法进行分类,如在学习有理数后,可引导学生:按是否整数分(整数、分数),按数的性质分(正数、零、负数)两种方法进行分类。

其次,引导学生用比较归纳去解决一些比较复杂的比较,让学生真正掌握这两种数的联系与区别(见表)。

	定义	有限性	无穷性	循环性
有理数	整数 和分数	有(整数与 有限小数)	有(无限 循环小数)	有(无限 循环小数)
无理数	无限不 循环小数	没有	有	没有

然后,让学生对所学知识进行分类。如让学生对代数式、方程进行分类;用判别式对一元二次方程的解进行分类,并同时注意培养学生运用分类的思想方法解决实际问题,“由此及彼,比较分析,促成学生的知识和技能产生积极的迁移”。(《心理学》)以提高他们的解题能力。

3.纵横沟通,渗透化归思想

数学知识的系统性、相关性决定了数学思维的连贯性、多向性。因此在教学中,解决数学问题的过程就是促使矛盾转化的过程。解决数学问题中沟通知识之间的纵横联系,就是通过各种变换化未知为已知,化复杂问题为简单问题,化非基本问题为基本问题,化新的问题归结为旧的问题。“化归思想”也就成了常用的数学思想方法之一。

在初中阶段,应及早渗透这种化归思想。比如在讲解“合并同类项”的法则时,“把同类项的系数相加,所得的和作为系数,字母和字母的指数不变”,对于刚接触代数的初一学生来说,单从课本文字上的叙述来讲解是比较困难的,若用有理数的分配律来解释那是很容易理解的。同时在例题的讲解中也应该引导学生合理地运用化归思想沟通各部分知识间的横向联系优化解题过程,改讲解题方法。

4.反面设问,渗透反证法思想

反证法思想是中学阶段接触的间接证法之一,是逆向思想的具体体现。

初中学生的思维方式是以顺向思维为主,一般不具备逆向思维的能力,他们习惯于用直接说理的方法去推理论证数学命题。因而“反证法”是数学教学中的一个难点,为此我们须在平时的课堂教学中及时渗透反证意识,为日后的学习作好铺垫。

反证法思想可从初一开始,最初从多问“为什么”、“假如……就……”等入手,通过这一系列的反面设问不仅让学生更深刻地看清问题

的本质,而且能逐步培养学生的反证意识。比如,当初一学生学完了“有理数的大小比较后”。对“有理数中是否有最小数的问题”,大多数学生都能回答“没有!”这时教师就可顺水推舟地接问一句“为什么?”“假如有最小的数,则会怎样?”以此用最通俗、最易懂的实例,借助于已有的知识让学生粗浅地了解从反面说理的方法。据此,只要教师细心引导,就会发现:

⑴ 两数相乘,如果积为零,则这两个数中至少有一个为零,为什么?

⑵ 如果两个有理数的绝对值的和为零,那么这两个有理数一定都是零,为什么?

⑶ 两直线相交,只有一个交点,为什么? …………

当学生掌握了从反面说理的基本方法后,教师就可“由浅入深,层次分明,链式递进”,加强对学生反设语言和逆向推理能力的训练,这样做了后,就会收到正如《教育学》中所述“教授之力,仅为诱导之具,而自动之力,实为成功之基”的效果。这时可让学生书面解答下列问题:

⑴ 等腰三角形的底角必为锐角,为什么?如果不是锐角,则如何?

⑵ 平行于同一直线的两直线是否一定平行?假如不平行,则位置关系如何?

⑶ 两直线平行,同位角相等,为什么”

……

5.启迪联想,渗透转化思想

转化是处理数学问题的一种重要思想方法,把一个新问题转化归结为另一个已经解决或较简单的问题,有些错综复杂的问题,经过巧妙的转化往往变得豁然开朗。同时在分析问题的过程中,积极启发学生的思维,寻找知识的变化和发展规律,去挖掘知识的存在性质,去探索解题思路,“自然形成‘知与不知’的矛盾,构成认识的需要和内在的求知欲”。如利用相反数将减法转化为加法;利用倒数将除法转化为乘法。又如解方程实质是一个由“未知”向“已知”转化的过程。转化的方法是通过等式变形,分离已知数和未知数。诸如把二元一次方程组转化为一元一次方程;三角函数中的正、余弦定理之间的相互转化;应用题中将实际问题转化为数学模型;把代数问题转化为三角或几何问题来解;把“一般”转化为“特殊”;把“形的领域”转化为“数的领域”等等。

以此引导学生并启发他们去探求知识,使学生觉得自己不仅是在学习知识,而且是在创造知识。使之亲身感受到,如何在“山穷水尽疑无路”时,通过问题的转化,另僻蹊径,发现“柳暗花明又一村”的乐趣。

数学思想的渗透必须是在数学问题的思维分析过程中去实现。心理学认为:学习是认识结构的组织和重新组织,是把具有内在逻辑联系结构的教材与学生原有认识结构结合起来,新旧知识发生相互作用,使新材料在学生头脑中产生新的认识。数学思想并不是一个抽象的概念,而是建立在众多数学基础知识和基本方法这一基础上的。它具有实实在在的基础和内容,同时又是千千万万具体例子的总结和概括,数学思想的渗透必须也只可能在具体数学问题的分析过程中得以实现。因此作为一个数学教师,在讲解具体的数学内容以及解题技巧和方法时,切切不可忽视它的依据和背景——基本数学思想。

课堂导思五法

高三复习课的目的是通过对知识的巩固和深化,使学生对所学知识有系统而有悟性的认识,进一步完善知识结构,自我获取运用知识的方法,达到最佳的应试状态。如果抓不住学生心理,学生上课时心不在焉或别有所思,甚至关闭了“心灵之扉”,这样复习犹如“压牛头喝水”,毫无效果。如何增加复习课魅力呢?依据人脑思维中的陌生原理,加强思维引导,使学生对复习材料始终保持新鲜感,使一堂课沿着“陌生—疑问—无疑”波浪式的思维路线前进,更好地开发学生的智力和潜能。广东高州中学钟载硕老师总结的方法是:

1.以疑激思

“疑虑,思之始,学之始。”复习课中为了引导学生突破课本知识的表层,挖掘深层次知识点,教师于“无疑处生疑”,精心设计题组,通过质疑、释疑来激发他们积极思维,探求未知的情感,培养思维品质,发现能力。

例1 ⑴直线 $ax+by+c=0$ 的斜率是______,倾斜角是________________。

⑵已知直线的斜率 $k\in[-1,1]$,则直线的倾斜角 θ 的范围是:

(A) $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$;

(B) $[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi]$;

(C) $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$;

(D) $[(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})]$。

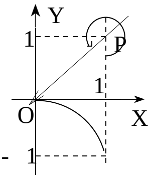
(3) 已知直线 l 经过点 $p(2,1)$,且它的倾斜角等于已知直线 $l_1:3x-4y-17=0$ 的倾斜角的一半,求直线 l 的方程。

(4) 如果实数 x,y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$,那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是__________。

(5) 函数 $y=\frac{\sin\theta-2}{\cos\theta+2}$ 的值域是__________。

(6) 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\quad,+\quad)$ 上的减函数,如果不等式 $f(1-kx-x^2)>f(2-k)$ 对任何 $x\in[0,1]$ 都成立,求 k 的取值范围。

这是复习直线的倾斜角和斜率的一个题组,(1)(2)(3)是概念的基本运用。但是这两个概念的外延却远远超出课本所述,不同的情境会折射出多彩的形式。因此,很有必要引导学生将概念适当地迁移到其它知识领域,促使思维的变通、联想,形成能力。(4)(5)(6)着重挖掘直线斜率的各种表现形式,使数与形相互转换,融为一体。通过启发、思考、释疑,学生惊叹不已,感知课本深层次知识的新颖实用,特别(6)更反映数学思想方法的强大活力。



(6) 解　　$f(x)$ 是 R 上的减函数,且 $f(1-kx-x^2)>f(2-k)$。

, 　$1-kx-x^2<2-k$,重组得 $-x^2<k(x-1)+1\ (0\leqslant x\leqslant 1)$。问题等效于"确定斜率 k 的取值范围,使过定点 $P(1,1)$ 的动直线 $l:y=k(x-1)+1$ 在定抛物线弧 $OA:y=-x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 的上方"。作图,定直线 PA 与 PO 是动直线的界限。

, $-\quad<k<k_{op}$,即 $k\in(-\quad,1)$。

2.对比诱思

心理学研究表明,对比抗干扰。因此,在复习课中加强对易混淆的知识的比较,抓准分化点,利于排除干扰,加深对某些相关概念的认识和理解,促使易混淆的知识在学生头脑中彻底分化,提高辨析能力。

例 2　(1) 将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,再将曲线上各点的横坐标压缩为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变),这样得到的图象的解析式为____________。

(2) 将函数 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标压缩为原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变)，再将所得图象上所有点向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，这样得到的图象的解析式为__________。

(3) 将函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位，再将图象上各点的横坐标压缩为原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变)，所得图象的解析式为______。

(4) 将函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，再把所得图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象，则函数 $y=f(x)$ 的解析式为____________。

对函数 $y=A\sin(\omega x+\psi)$ $(A>0,\omega>0)$ 的图象变换，很多学生抓不住相位和伸缩变换的实质，区分不了“先平移后伸缩与先伸缩后平移”对 ω 的影响，因而错误认为 (1) 和 (2) 的答案都是 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$。其实，平移和伸缩变换是针对 x 的变换，正确的变换方式是：①将函数 $y=A\sin(\omega x+\psi)$ $(\omega>0)$ 向右平移 $(x_0<0)$ 或向左平移 $(x_0>0)$ $|x_0|$个单位，得到函数 $y=A\sin[\omega(x+x_0)+\psi]$ 的图象；②将 $y=A\sin(\omega x+\psi)$ $(\omega>0)$ 图象上所有点横坐标伸长或压缩到原来的 k 倍 $(k>0)$ 得到子数 $y=A\sin(\frac{\omega}{k}x+\psi)$ 的图象。经过这样的对比分析，学生分清了知识的联系与区别，很快得出正确答案：(1) $y=A\sin(2x+\frac{\pi}{3})$。(2) $y=A\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$。(3) $y=\sin(4x-\frac{3\pi}{4})$。(4) $y=-\frac{1}{2}\cos 2x$。

3. 以议畅思

复习课中创设议论情境，让学生积极参与教学活动，变原来“老师讲，学生听”的单向信息传递为师生间的纵向交流与学生间的横向交流，整个课堂沉浸在为获取知识而积极思索的“思维场”中，突显复习课魅力。

例 3　点 (x,y) 在直线 $x+2y-1=0$ 上移动。

(1) 求 $u=2^x+4^y$ 的最小值；

(2) 求 $v=2^x+2^y$ 的最小值；

(3) 求 $s=2^x+8^y$ 的最小值；

(4) 若 $x>0,y>0$，求 $t=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值。

这是复习用平均不等式求函数最值时，我引导学生议论的一个题组。对⑴直接用不等式，易得 $u_{min}=2\sqrt{2}$。但是对⑵直接用不等式却出现不能利用题设定值的矛盾。于是有人提议用拆项法化解矛盾：$v=2^x+\frac{1}{2}\cdot 2^y+\frac{1}{2}2^y\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2^{x+2y}}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$（当且仅当 $x=-\frac{1}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$ 时取等号）。而⑶的拆项又比⑵复杂得多，在拆项须保证"定与等"的原则指引下，学生彼此启发，调整平衡得 $s=\frac{1}{3}\cdot 2^x+\frac{1}{3}\cdot 2^x+\frac{1}{3}\cdot 2^x+\frac{1}{3}\cdot 2^{3y}+\frac{1}{2}\cdot 2^{3y}\geqslant 5\sqrt[5]{\frac{2^{3(x+2y)}}{3^3\cdot 2^2}}=\frac{5}{3}\sqrt[5]{18}$（当且仅当 $x=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\log_2 3$，$y=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\log_2 3$ 时取等号）。对⑷有人仍想走"拆项"老路，结果行不通，于是提出转向，消元后用"Δ"法，取得成功。但是我穷问不舍，"真的不能用平均不等式了吗？这可是求函数最值最简捷的方法呵！"学生的思维再掀高潮，创造欲被充分激发，议论并尝试后，有人提出了好办法，对"1"进行代换得 $t=\frac{x+2y}{x}+\frac{x+2y}{y}=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$（当且仅当 $x=\sqrt{2}-1$，$y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号）。议论中，学生熟练了技能的操作，在不断的肯定与否定中发展了能力。

4.以奇促思

"惊讶感情——是寻求知识的强大源泉。"复习课中经常变换思维角度，逆向提出新问题，从反面诱发新思想，学生的求知欲和好奇心得以激发，思维的积极性、主动性和灵活性得以调动，因而有助于活化知识结构，消除思维定势的负迁移，有利于启迪智慧。

在复习复数模的性质"$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$"时，布置学生做课本习题 求证：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$。不少学生出现一种不屑一做的神气，证完后我反问："你做此题有什么心得？其中蕴藏着一个常用的重要技巧，你发现了吗？你会熟练运用吗？将学生由始料不及引入新奇与矛盾的漩涡，强烈的思考兴趣驱使他们探觅发现 $z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=|z_1+z_2|^2$"，即四项式的十字相乘法分解技巧，为逆用性质"热身"，然后再引导他们做下列题组练习。

⑴满足条件 $z\cdot\bar{z}+(1-2i)z+(1+2i)\bar{z}=3$ 的复数 z 对应的点 Z 的轨迹是______________。

⑵设复数 z_1 和 z_2 满足关系式 $z_1\bar{z}_2+\bar{A}z_1+A\bar{z}_2=0$，其中 A 为不等于零的复数，证明 $|z_1+A||Az_2+A|=|A|^2$。

(3) 已知复平面上三点 Z_1、Z_2、Z_3 是一个正三角形的顶点，它们对应的复数分别是 z_1、z_2、z_3，且满足 $z_1 = 1$，$|z_2| = |z_3|$，$|1 - z_2 z_3| = |z_2 - \overline{z_3}|$，求复数 z_2、z_3。

(4) 复数 z 和 ω 满足 $z\omega + 2i\omega - 2iz + 1 = 0$，$|\omega| = \sqrt{3}$，试问复数 z 在复平面上所对应的点 Z 的集合是什么图形？并说明理由。

(答案：(1) 圆 $|z + (1 + 2i)| = 2\sqrt{2}$。 (3) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$。 (4) 圆 $|z - 4i| = 3\sqrt{3}$

好奇与求知欲驱使人产生探究的热望，探究又导致了创新意识的萌发，产生一种升华。

5. 以变活思

知觉具有恒常性，长期接受枯燥乏味，单调重复的训练会使学生产生一种固定的机械思维模式——思维定势，其消极作用是进一步学习的绊脚石。复习课中充分挖掘课本例习题的潜在教学功能，巧妙适当地对习题演变、引伸、拓广，不断地探觅，提高应变能力、识辨能力和独创能力。

例 4 (《平面解析几何》《必修》第 57 页例 1) 求直线 $y = x + \frac{3}{2}$ 被曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 截得的线段的长。

如果平淡地循课本的思路求出答案，没有给学生更多的启迪，何以点燃思维的火花？教似“看山不喜平”，奥妙全在一个“变”字。

一变解法，培养求简意识。应用韦达定理不解方程组，直接求弦长。更深入一步，结合图形，推导出一般的弦长公式，

$$
\begin{aligned}
|AB| &= |x_1 - x_2| \cdot \sqrt{1 + k^2} \\
&= \sqrt{[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2](1 + k^2)} \\
&= \sqrt{(2^2 + 4 \cdot 3)(1 + 1^2)} \\
&= 4\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

二变曲线位置，把题设中直线改为 $y = x - \frac{3}{2}$，从几何直观上可见直线与曲线无交点，而相应的代数特征是“$\Delta < 0$”，解答几何题宜增强代数意识。特别提醒应用韦达定理须在“$\Delta \geqslant 0$”的前提下，否则十有八九导致错解。

三引进参数，让学生从“动态”中把握解题要领。把题目变为：①求直线 $y = x + b$ 被曲线 $y = \frac{1}{—}x^2$ 截得的线段长。②求直线 $y = x + \frac{3}{2}$ 被曲线 $y = ax^2$ 截得的线段长。

四变题目要求,拓宽视野。①设直线 $y=x+\frac{3}{2}$ 与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 交于 A、B 两点,求△AOB 的面积②在曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上求一点,使该点到直线 $y=x-\frac{3}{2}$ 的距离最短,并求最短距离。

培养思维能力的教学方法

在当前的教学中,单纯采用某一种教学方法是完不成整体的教学任务的。根据教学内容和学生实际水平选择某种适当的方法或几种方法有机结合起来进行教学,才能收到良好的教学效果。南京外国语学校宋静娟老师总结了在教学实践中培养学生的思维能力采用的多种教学方法:

1.启导式教学,注重思维灵活性的培养

高二代数中"由递推公式求数列通项公式"是教材的一个难点。教学中抓住递推公式中的一个基本变形式子"$a_n-a_{n-1}=c(a_{n-1}-a_{n-2})$",让学生观察这个式子的由来、特点,启发引导学生运用猜想、类比、联想、归纳等方法,从各个不同角度大胆设想、思考,最终得出了求数列通项公式的 6 种不同方法。学生从中感受到这是个内容丰富而有趣地的数学问题,开阔了解题思路。启发学生多角度、多方位思考问题,使思维过程灵活化,这是启导式教学的目的。

2.讨论式教学,注重思维创造性和批判性的培养

经常进行的是一题多解讨论和反例讨论。学生对做题常常是感兴趣的,但却不善于挖掘命题本质,掌握一般规律,因此开展一题多解的讨论能加深学生对知识的理解、活跃思维。青少年学生好胜心强,喜欢争辩,根据这一特点在课堂上把有争议的问题或容易产生的错误,用反例的形式让学生进行鉴别、讨论,将会收到正面讲述所达不到的效果。

例如,"不等式的性质"这部分内容学生自以为容易掌握,往往不予重视,而在解不等式时常常出错。于是编了一组题——判断下列解法是否正确,如不正确进行改正:

1. $x\lg\frac{1}{2}>8\lg\frac{1}{2}$,两边同除以 $\lg\frac{1}{2}$ 得 $x>8$。

2. $\frac{2x-1}{x-2}<1$,两边同乘以 $x-2$,得 $2x-1<x-2$,, $x<-1$。

3. $x(x-5)^2<8(x-5)^2$，两边同除以 $(x-5)^2$，，$x<8$。

4. $2x-1+\sqrt{x-5}>x+2+\sqrt{x-5}$，两边同减去$\sqrt{x-5}$得 $2x-1>x+2$，，$x>3$。

5. $\sqrt{2x-1}+x>0$，$\sqrt{2x-1}>-x$，$2x-1>x^2$，$(x-1)^2<0$，，无解。

通过讨论辨析，学生对不等式性质在解题中的重要作用有了充分认识，给予了重视。这种利用反例进行讨论式教学的方式，也培养了学生思维的创造性和批判性。

3.分“专题”教学，注重思维深刻性的培养

在学完一单元的基本概念后，经常采用习题课的形式分专题进行教学。如在学习了二次曲线的定义、方程、性质后，与学生共同讨论了“求动点轨迹方程”、“从定义出发解题”、“讨论曲线性质”、“韦达定理的应用”、“求极值的问题”等 5 个专题，通过对这些问题的探讨总结出基本解题方法，深挖知识的内在联系，拓宽知识面。学生深有体会地说：“过去觉得定义、方程、性质学起来枯燥无味，现在这样分专题总结，学习兴趣大增，对二次曲线运用的广泛有豁然开朗之感。”

4.开放式教学，培养思维的独立性

教学过程必须开放，学生能够自己做的事放手让他们自己去完成，有些不能独立完成的，教师可作指导，但也不要包办代替。例如二次曲线方程的指导，改变了教师推导学生听讲的传统教法。对于椭圆的标准方程，由于学生已掌握了求动点轨迹方程的基本方法，在教师指导下由学生自己导出就有可能。但为了使方程标准化，在推导前有意识地引导学生建立直角坐标系，定出焦距 $2c$ 和常数 $2a$，另外学生还不会想到令 $a^2-c^2=b^2$，教师要启发“引路”，就能得到椭圆的标准方程。双曲线的标准方程可以完全由学生推导，对抛物线标准方程的推导我提出了更高要求，让学生根据定义自己选择坐标系。由于学生已尝到了自己完成任务的喜悦感，所以热情高涨，气氛活跃，共推出了十多种不同形式的方程，其中有的不是标准方程，这就为下一章“坐标平移”的学习埋下了伏笔。

遵循思维规律　渗透数学思想

数学思想、数学概念和数学命题是构成数学基础知识的三大部分。而数学概念的形成、数学命题的论证，都要依赖于数学思想和方法。因此，在中学阶段，必须注重数学思想和数学方法的渗透与教学，使学生

逐步由“学会”向“会学”转变。大丰县教研室顾正宏、陈克毅老师介绍了初中阶段根据学生的思维规律，渗透几种数学思想的方法：

1. 反面设问，渗透反证思想

反证法是初中阶段接触的间接证法之一，是逆向思维的具体体现。初中学生对逆向思维尚不习惯，而习惯于直接推理论证的方法。因而，“反证法”是初中数学教学中的一大难点。我们在平时的课堂教学中，应该及时渗透反证意识，潜移默化地渗透反证思想。

反证法的渗透可以从初一年级开始。比如初一学生学习了“有理数的大小比较”后，对“有理数中是否有最小的数”这样的问题(见初一《代数》第68页第15题)，大多数学生都能回答“没有”。这时教师可追问：“为什么没有？”“假如有最小的有理数，则会怎么样？”有用这种最通俗易懂的实例，借助于已经掌握的说理方法，让学生粗浅地了解从反面说理的方法。像这类可以渗透反证思想的问题较多，比如：

⑴ 两数相乘，如果积为零，则这两个数中必定至少有一数为零。为什么？

⑵ 如果两个有理数的绝对值的和为零，则这两个有理数一定都是零。为什么？

⑶ 两条直线相交，只有一个交点。为什么？

⑷ 平行于同一直线的两直线是否一定平行？假如不平行，则位置关系如何？能否成立？为什么？

总之，提前渗透反证思想、渗透反证方法，是完全可行的。提前渗透的工作做好了，一旦正式讲授反证法，就会比较顺利。

2. 重视图形教学，渗透数形结合思想

在数学教学中，渗透和运用数形结合的思想方法，可以帮助学生从具体的形象思维向抽象思维过渡，同时，又可以用抽象思维来完善形象思维。教学大纲要求初中学生“初步了解数形结合的观点，并初步领会用这个观点分析问题的方法”。因此，我们应该把数形结合的思想方法渗透到课堂教学之中。

在初中阶段，数形结合中的“形”可以看成数轴、函数的图象、几何图形等。它们都具有形象化、具体化的性质。“数”可以看成通常所见的数、表示数的字母、以及代数式、方程式、不等式、函数的表达式、定理的公式等，它们都具有特定的抽象的含义。

要使学生领会数形结合的思想，掌握数形结合的方法，教师就要在课堂上有计划地运用数形结合的思想处理一些重点和难点，运用数形

结合的方法解决一些实际应用问题。

比如,在初一年级,应用数轴上的点和实数之间的对应关系,可以帮助学生理解相反数、绝对值的概念,帮助学生领会并掌握两个实数比较大小的方法;应用函数的图象可以进一步讲清楚函数的性质,讲清方程、不等式、函数之间的关系。应用图形的一些几何性质还可以揭示图形中各元素之间的数量关系,解决有关的数学问题。例如:

"在△ABC 中,∠A = 60°,∠C = 75°,AC = 1,求 AB 边的长。"

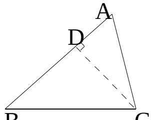


图 1

分析 这题是一道简单的三角题,从理论上说,用正弦定理或余弦定理均可获得解决,但由于 75°的角不是特殊角,故对初中学生来说,求 sin75°或 cos75°的值并非易事。如果结合图形仔细观察,只要添加一条辅助线,结果立即可得 ($AB = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$,如图 1 所示)。

经常结合图形分析数学问题,学生的解题能力也能相应提高。

3.比较归纳,渗透分类思想

数学中的分类有两大特点:⑴分类标准的同一性,即尽管对同一数学对象来说,可能有不同的分类标准,但在相应的一次分类中,必须始终按同一标准进行分类。⑵分类的严密性,即在同一标准的分类中,保证分类的对象既不重复,又不遗漏。这种分类的数学思维,对培养学生的思维能力十分重要,教师在平时的教学中,应积极引导学生对所学知识进行分析、归纳、比较,在不同程度上将其进行分类,有计划、有目的地渗透分类思想。

由于初中学生的知识面狭窄,思维活动范围小,因而最初可让学生按已知标准进行分类。比如在学习了正负数后,可让学生按正数、负数、零的分法将有理数进行分类,到这一单元结束时,可要求学生按整数、分数将有理数进行分类。

当学生初步学会分类方法后,可引导学生由已知的分类方法去解决一些具体的较复杂的问题。例如,绝对值的教学是初一年级的重点和难点之一。学生往往对 $|a|$ 的确切含义感到抽象,对含绝对值符号的式子的化简颇觉为难。教师可引导学生根据有理数的一种分类(分成正数、负数、零),结合绝对值的定义,对 $|a|$ 的结果进行分类,即:

$$|a|\begin{cases} a, & a>0; \\ 0, & a=0; \\ -a, & a<0。\end{cases}$$

此外,还可以放手让学生捕捉分类的时机,制定分类的标准,以正确地进行分类。如让学生自己对代数式、方程进行分类;应用根的判别式,对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 根的情况进行分类;根据 a、A、B 的取值情况对△ABC 解的个数进行分类;应用分类的方法解决一些实际应用问题。经过这样的训练过程,学生对分类思想的掌握将会比较牢固。

数学教学发展思维培养与能力

数学思维过程是人脑和数学对象相互作用的过程。发展学生多种思维,培养能力,牙克石市第二中学李梦国老师总结主要表现在正确掌握、运用概念,通过不同渠道、方法,形成准确的判断,进行合乎逻辑的推理、运算。

1.在预习中发展思维,培养能力

良好的课前预习,会发现许多需要研究和解决的问题,使人听课有目标,课前准备有条理。

(1)读出目标。 反复阅读要学习的内容,联系已学过的知识,划分段落、弄清层次,逐句推敲其含义,对概念、法则、定理、符号等进行运用。边阅读边思考,边分析边提高,边解决问题边发现疑问。然后,用数学语言写出反映知识结构的阅读提纲,确定上课时要学习的主要目标。

(2)读出条理。 写好阅读提纲,可以有条理地准备好上课所用的资料和用具,并将主要用途补入提纲中。这样,学生有准备地进入课堂,有目标地听讲、使用资料和用具,可以大大提高学习效率。课后再完善修改预习提纲,加深对所学内容的理解和思索。

2.课堂教学是发展思维培养能力的重要途径

最有效的教育途径是课堂教学。教师要有意识地挖掘教材,以激发调动学生思维的积极性。又要适时、恰当地引导,使思维不断得到发展,这是教学艺术所在。

(1)听出兴趣。 45 分钟的一节课,教师要组织好师生的双边活动,按学生已预习的程度,应讲之处一定要细致准备,透彻分析,设问、质疑要科学适度。通过生动形象、准确而又富有启发性地讲解,诱发学生学习兴趣。

⑵ 练出联想。 讲授中,应设计有层次、有梯度的分组练习。除巩固知识、加深理解、归类比较、找出知识间关系外,应提供一些“类似”题目,在解题过程中,研究比较有关知识,发展联想。如:

例 1、分解因式

A、x^3+27;$1-x^3$; B、$a-a^4$;$27x^3-\frac{1}{8}y^3$

C、$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+1$;m^6-n^5(两种方法)

D、说明 C 组练习运用公式的特点,再举两例。

⑶ 议出题路。 对练习或例题在获得一种解法后,需注意启发引导学生寻求其它解题途径。求得多解不是目的,而是借助这种手段去认识分析问题的实质,综合运用知识,加深对知识理解,开阔解题思路视野,克服思维定势、定向的障碍,使思维发散,做到“舍其形”,“握其质”,举一反三,触类旁通。

例 2、证明:$(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$ $(a>b>0)$

证法一 :差值比较法

$a>0$,$b>0$

由 $(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$$

, 原不等式成立。

证法二 :比值比较法

$a>0$,$b>0$,故 $(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}>0$,$(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}>0$,$\sqrt{a}>0$,$\sqrt{b}>0$,

由 $\dfrac{(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\geqslant\dfrac{2\sqrt{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1$

, 原不等式成立。

证法三 :分析逆证法

若 $(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$成立,两边平方整理到$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b$ 再整理得 $(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant ab(a+b)$ 即 $(a-b)^2\geqslant 0$,注意到推理的每一步都可逆,故原不等式成立。

证法四 :分析综合法

由 $a>b>0$ 知 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\geqslant 0$ 可得 :$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\geqslant\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$即$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$

$\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$,亦即:$(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

⑷逆向求索。　某些问题在由已知条件推证结论思路不明显时,从结论着眼去分析,由假设结论成立,推出已知条件或明显的数学事实。在此过程中,必须注意推理的每一步是等价变换,具有可逆性,从而使问题得证。

例3、在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,a、b、c为相应三边。

求证:$\sqrt{2}c\geqslant a+b$

证法一 若$\sqrt{2}c\geqslant a+b$成立,则$2c^2\geqslant(a+b)^2$,而$c^2=a^2+b^2$。

从而有$(a-b)^2\geqslant0$,此结论成立,且推理每一步都可逆,故有$\sqrt{2}c\geqslant a+b$。

证法二 若$\sqrt{2}c\geqslant a+b$成立,即$\sqrt{2}\geqslant\frac{a+b}{c}$。

就有$\sqrt{2}\geqslant\sin A+\cos A$,两边平方得$2\geqslant1+\sin2A$亦即$\sin2A\leqslant1$。

此结论成立,且推理每一步都可逆,故$\sqrt{2}c\geqslant a+b$成立。

⑸规范表述。　练习、作业都要及时总结,对出现的问题让学生知道错在何处,无论是思维方式不对,还是运算推理上有错误,都应按照一定规范加以改正。常此以往,思考处理问题就会有规可循,养成规范表述的好习惯。

3.运用第二课堂,提高思维能力

思维能力是智力的核心。数学第二课堂的内容,也应侧重于从不同角度锻炼提高学生的思维能力。

⑴通过争辩提高思维的应变能力。　选定具有探讨意义的题目,让学生准备材料和例证,在第二课堂上探讨、争论、解答、辨析,最后把全组人的意见综合,形成书面材料。比较谁的主意新颖,辨词贴切,思维敏捷,应变能力强。

⑵通过命题测试、阅卷总结,提高思维的综合分析能力。　对于章节测试、定出难度后在教师指导下轮流组织部分同学查阅资料,共同研究后命题测试、阅卷总结。找出命题自身存在的问题,学习中存在的问题和其它问题,再次修改试题,以备待用。经过几轮命题测试、阅卷总结,促进综合分析能力的提高。

⑶通过典型几何证题,提高思维的逻辑能力。　选定典型几何题目,各自准备,然后根据已知和求证画出直观形象的几何图形,注意数量结合,数形结合。然后,分析各自的证法,评析并完善证题过程,做到

步骤间层次清楚，推理中逻辑严密，叙述时言简意赅。

数学思维是学习数学认识活动的较高级阶段，教师要努力做好各种教学活动，使学生思维不断得到发展，能力逐步提高。

课堂思维情境的创设与调控

课堂教学过程，是师生之间复杂的心理信息相互作用和交融的过程。其中思维信息的交流是主要的活动形式。吉林白城刘彦、刘冶老师总结了教师在课堂上准确地把握学生的思维脉搏，进而充分地使师生之间、学生之间的思维共振，情感共鸣，提高课程教学质量的做法：

1.巧设悬念，以疑诱思

学精于思而荒于嬉，思源于疑而止于不惑。教者要善于分析学生的思维状态，设法将那些枯燥、抽象的教学内容，设计成若干个有趣、诱人且易于学生接受的“问题”，使学生在对这些问题的积极思维中去品尝学习的乐趣。教者所设计的问题要尽可能地做到，既有启发性又不浅显；既有难度又一跃可得，所以，对于一个教学难点，要有序地设计出几个主疑，为了防止主疑过于抽象和费解，还要针对某一个主疑逐渐降低难度再设计出若干个辅疑，以便在课堂上“审时度势”，灵活地控制“问题”的难度，使其与学生的思维保持同步。问题设计得越有趣，越符合学生的思维实际，学生的思维也就越活跃，越深刻。

2.以静代动，深思熟虑

问题提出后，教者要给学生以足够的思考时间，不要急于喋喋不休地提示或“揭谜”，以免剥夺学生独立思考的权力。对于有些难度的题目，在示题后，至少应给学生 2—3 分钟的独立思考时间，再看是否有必要提示或降低问题的思考难度。若学生确有困难时，可不为人知地略加暗示，或通过转换角度去降低问题的难度。俗话说“此处无声胜有声”。不要舍不得这几分钟的寂静，正是这几分钟的寂静，才有可能使学生的思维进入到兴奋状态，尽自己的所能去思考和探索。其中的优者，能在这几分钟里将“问题”从整体上基本解决；中者，对“问题”的某一部分已有了基本的考虑，起码对某一点也会有一些建设性的认识；差者，尽管还没有形成什么有价值的认识，但至少精力集中了，对“问题”中的各条信息认识得比较完全了，清晰了。而教者在这几分钟里，则有

了充分的时间,从学生的神态、表情中去观察、揣摩,掌握学生的思维进展程度,并确定出相应的对策。同时也可做一些组织教学、下一步工作的准备等等。

由此可见这几分钟的寂静是“静而不闲”,“以静胜动”。它诱发了一种深思熟虑的情境,这种情境不仅利于手头问题的解决,而且对于培养学生的思维习惯,提高科学思维素质也是大有益处的。

3.欲擒故纵,因势利导

经过设疑、静思之后,特别是当中差生对问题也有了一些认识之后,便可让其回答对问题的理解。不可避免,在解答问题的过程中常常会出现许多不尽人意甚至尴尬的场面,对于这种情形,教者应注意不要回避或扼杀,而应“欲擒故纵”,因势利导。

譬如学生的回答与“问题”风、马、牛不相及的时候,教者要指出所回答内容中那些令人不解的地方,再从其对这些问题的陈述中,了解清楚症结之所在,巧驳谬误,暗指正途,使全体学生都得到一次从错例辩析中受益的机会。

若学生在回答问题过程中夹有谬误时,不要打断他,让其继续说下去,这样既可以给回答者自己一个完整展现思维过程的机会,又能让教者和旁听者从其对问题的回答中去查找谬误。甚至回答者本人,往往也会从后来的回答中,顿悟到前面的错误,使课堂上所有的人领略到“受挫后的获得”这样一种乐趣。

若学生的回答不是最佳答案时,可待其把话说完,再允许其他学生把产生的每一种答案都公布与众,最后由学生自己去筛选出最佳答案。这样做显然是在向学生建议,解决“问题”不仅意味着找到它的答案,而且意味着要设法寻求到最佳答案。这个建议不但会将手头的问题处理得尽善尽美,而且对学生解决将来的问题也是大有帮助的。

4.及时调控,防骄避馁

胜骄败馁,我们在教学中经常见到。这种现象除了学生自身的品德素养外,与教者设计的“问题”不能和学生的思维保持同步、而又没能很好地调节有很大关系。所以教者在课堂上对教学目标和要求要及时调整,多层次、多角度地发问,直到问题解决为止。

不能轻易地放弃任何一个已站起来,而又没有成效的学生。要一而再、再而三地不为人知地降低“问题”的难度,直到他对“问题”做出了

一些有成效的回答，并得到教者一些诚心诚意的赞许之后，才让坐下，使其自我感觉对“问题”的解决是有成效的。值得注意的是，在给这一类学生的提示中，不要提出类似“你能应用某定理吗”这样的建议，这样的建议是很糟的，是教者无计可施时的一种推卸和回避。其原因有三点：

⑴ 若其已想到了应用某定理，那么问题便解决了，又何以会没有成效呢？所以他不会理解教者的建议。相反，他会情不自禁地出现下列疑问：“为什么要用某定理？怎么用某定理？”因而剥夺了他原来对问题的考虑，被动地扭转了思维的方向，一时很难有什么突破。而常有可能的是，此问题的解决不用某定理也是可以的，学生原有的考虑恰是如此。

⑵ 这样的建议针对性太强了，既使能将手头的问题解决，但对于将来解决其他问题也是无助的，学生没有从中得到多少启发。

⑶ 既使学生接受和理解了这条建议，但他也未必会悟出教师是怎么想到这个建议的，令人诧异，有一种受愚弄的感觉，感受不到“问题解决”的快慰。

所以要尽可能多地提出一些诸如：“你对这个问题中的哪一条哪一点最感兴趣？”“从这一点中你能得到什么结论？”“这个结论与所求有什么关系？”“要使问题解决还需要什么？”“需要的东西能从已知或图形中的哪一点得到？”等等。这些建议再露骨，也会使学生感受到一种启发性，并从中学到一些有助于以后解其他问题的思维方法。

同样，也不要轻易地放过任何一个发言的智能尖学生。当其对原有的问题回答得很完美时，可再提出一些与所回答的问题有关的新问题，直到使其回答得不十分圆满时，才略加点拨，促其思维进一步发展，使新问题得到圆满解决。诸如“这个问题的解答方案你是怎么想到的？”“为什么要用这种方法解决这个问题？”“这个问题的突出特征是什么？”“具有这个特征的问题是否都可以考虑这样解决呢？”“你能总结出具有这种特征的问题的一般解法吗？”“是否还有别的解答方案？”等等。而这些新问题正是原问题的继续和升华，是在下一步的教学活动中应向全体学生归纳或渗透的那一部分内容。

这样，每个“问题”学习结束之后，都应该做到，再拨尖的学生也没有登峰造极之感，再差的学生也不会觉得自己是一无是处的。

5.总结规律,建立模式

每一个数学问题的解决,绝不仅仅是为了解决这个问题本身,而很大程度还是为今后的学习提供思维模式。无论是一个概念从提出到揭示出其本质属性,还是一个例题从示题到“问题解决”,都蕴含着丰富的数学思想、方法、观念及妙趣横生的解题技巧和思维规律。所以,教者在每一个问题解决之后,要不失时机地提出诸如:“此概念有几个要点?失去一个或某几个要点会有什么情形发生?”“这个概念具有什么功能?在什么情况下考虑可能应用此概念?”“此例题具有什么典型的特征?”“解决此例题应用了什么典型的思维方法和技巧?”“解决与此类似的问题时,我们曾用过什么与此技巧不同的方法?”“在什么情形下考虑可能用这种方法或技巧去解决新问题?”等等。

师生共同归纳、总结出规律,提供出今后学习活动可模仿、可借鉴的数学模型。

6.旁证博引,开拓视野

俗语说得好,“站得高,看得远”。若要学生的思维进入兴奋状态,除了对本学科的思维对象做出有成效的加工之外,还应向学生介绍一些有助于激发思维兴奋的广博知识。如数学问题的物理解法、数学史中的名人轶事、数学在科技与生产上的应用、我国数学家对数学发展的贡献、国际奥林匹克数学竞赛等等。这些知识和信息,对于振奋精神,创设思维情境无疑会起到积极的作用。

以上几种做法可以概括为问、思、答、总结。这几种做法是创设最佳思维情境的有机结合。没有巧妙的“问”,就不能引起积极的“思”,也就不可能完美地去“答”,更不会通过总结上升为规律。而且无论是“答”还是“总结”,都是在持续的“问”和不断的“思”中来完成的,所以说“问”是诱饵,“思”是整个学习的灵魂,“答”是“思”的落实和完善,而“总结”则是“思”的升华。正是经过问、思、答、总结这四个环节,使学生所面对的思维对象形象了,丰富了,课堂气氛活跃了,热烈了。教师输出的心理信息,能拨动学生的心弦,而学生欢慰的表情,良好的学习信息,对教师的心理也起到了良性的刺激作用。这种师生之间的思维共振,情感共鸣,创设了思维的最佳情境,课程教学效果不言喻。

调动学生积极思维的五步法

传统的教学往往是老师讲学生听,许多问题都是由教师提出,学生

还未来得及思索,又由老师很快地给予解答。使学生对老师产生神秘感,使得他们懒于思考,不去思考。其结果往往是老师讲得累,学生听得苦。一节课下来,问学生听懂没有?多数同学会回答听懂了。可是不少学生反映一旦做作业时,又不知如何去做。究其原因是学生在课堂上缺乏积极性和主动性思维。总是被老师牵着鼻子走—老师讲到哪里学生听到哪里。为改变这种填鸭式教学方式,安徽巢湖白马山水泥厂子弟学校余建通老师总结可采用如下五步教学法来调动学生勤思考,积极主动思维的能力:

1.学生寻找解题思路

这一步是让学生充分理解题意,让他们在思维活动中发现问题和提出问题这即是解决问题的起点也是解决问题的动力,让学生通过寻找已知条件和隐含的已知条件及其和未知条件的关系达到解决问题的途径。由于学生的知识和观察能力有限,当思路受阻时就会急于想知道问题的解决及受阻的原因。这时就能激发起学生的求知欲,使学生的学习由“要我学”向“我要学”转化。

2.教师分析解题思路

当学生解决问题的思路受阻时,教师要及时帮助学生分析思路。这一步的主要任务是分清问题中的主要矛盾,找出问题的关键所在和解决问题的核心。使学生的思维活动有指向性和明确的方向性。有选择地再现和运用已有知识经验来解决面前的问题。

3.学生叙述解题思路

教师的分析思路要点到为止,最后一层纸要留给学生去点破,让学生尝到通过他们积极思维得到问题解决办法的甜头。使他们充分认识到问题解决并非一帆风顺,往往是通过周密的思考、合理的假设,才能使问题的解决会迅速和容易。

4.寻找解题其他途径

当学生叙述完解题的思路后,教师要及时给予肯定。同时要指出不足之处,然后问学生解题的方法唯一吗?这时学生会全神贯注,冷静思考。当某个学生想到了一种解法会向周边的同学讲解或是积极举手发言。学生在叙述解题的思路过程中,另一些同学会反驳或指出其错误所在,这样在反驳、争论的气氛中一种新的解法诞生了。因此,寻找解题的其他途径,可使学生的思维再上新台阶,推向新高潮!甚至一些

学生会突发奇想得“高招”。这时教师要注意把这些解法面向全体学生进行综合性小结,即肯定其长处,又指出其不足。这样又可诱导其他学生积极思维,去寻找新方法。且将课内问题延续到课外。在热烈的课堂气氛中,教师要注意把握好课堂活跃的分寸,要求学生吸其之长,补其之短,树立正确学风。

5.学生完成解题过程

让每个学生把自己的思路进行整理并写出来。要求思路清晰、逻辑性强,因为思路仅是解决问题的线索,还不是解题或证题的过程,学生往往找到解题思路却不一定能用文字清楚地表达出来。因此,解题的过程中学生会发现提出的假设错了,导致线索中断。此时应立即改变解决问题的思考方向,不要被老一套方法所束缚,从而去探寻新的解题思路。所以完成解题过程是一步既动脑又动手的思维过程。它可以不断地检验、调试解题的思路,同时,培养了学生认真学习、精益求精、一丝不苟的学风。

数学教学中的思维训练

“我们生活在精确的数学定理制约的宇宙之中。”数学思维方法已渗透到社会各个领域,由于数学内容的抽象性,应用的广泛性,推理的严谨性和结论的明确性,使数学成为现代科学的基础,不仅对经济竞争至为重要,而且对提高民族科学、文化素质起着重要作用,因此探索数学思维的科学原理是当前数学教学必须研究的重大课题。

人的智能是由知识和能力组成的,数学能力有与记忆有关的再现能力,与思维有关的创造能力,数学思维能力强的学生通常表现为:有好奇心,求知欲强,“学,思,锲而不舍”;才思敏捷,接受能力强,反应快,能清楚了解数学知识的内在联系的来龙去脉;能独立思考,别出心裁,不受常规的羁绊,能机智地寻求一题多解;记忆力强,对数学知识,结构,解题思路,推理证明的模式都能牢记,经久不忘;有很强的分析、概括、综合、判断、推理、应用能力,能一把繁杂的问题简化出来,有把“书越看越薄”的本领加以发展。

那么,怎样对学生进行数学思维训练呢?

从脑科学、教育学、心理学的发展证实,智力开发的前景十分广阔。

据研究，在对学生进行有目标思维训练后，智力和创造品质都有明显的提高，因此必须重视思维训练，在教学中有目的培养学生的创造性思维能力。

数学思维训练可以分为：敏捷训练；周密训练；深刻训练；逆向训练；逻辑训练；相似训练。育青中学邵仲辰老师总结在教学中训练的方法有：

1.思维速度的训练

精编构思巧妙、概念性强、覆盖面广、灵活性大的判断题、选择题、简答题进行专项训练，提高快速答题的能力；辅导学生掌握心算的巧诀，勤学苦练，久而生巧；训练学生等量变形把一般命题化为可代公式的形式，提高决策，简化问题的能力。

2.分类归纳能力的训练

综合题的审题练习，要求学生把综合题分解为几个基本题，分析涉及的基本概念和基本方法，提高解剖综合题的能力；开展证题术的分类归纳练习，如平面几何中相似形全等形解题时，边相等、角相等是广泛运用的基本条件。可由学生动足脑筋领会数学术语在命题中判断边相等、角相等的条件，归纳交流，看谁想的办法多，以此为基础，对平面几何的综合题就能迎刃而解了。

3.分析能力的训练

传授数学知识时要注意教给学生思考的方法，分析问题的思路，“授人以鱼，只供一饮之需；教人以渔，则终身受用无穷。”组织学生展开解题思路的讨论，剖析各种题解方法的特点，发扬简捷、有创造性的解题思路，提高分析、解决问题的能力，拓展学生思维时尽可能考虑一题多解，或多题一解。

4.想象力的训练

把想象寓于活动之中，如给 6 根火柴，可搭几个全等的三角形？利用实体模型激发学生的空间想象力，把台体求积公式：$V_{台}=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$，变换条件：若 $S_1=0$，则为锥体、$V_{锥}=\frac{1}{3}sh$。若 $S_1=S_2$ 那么成柱体，即 $V_{柱}=sh$，在教学中要大胆发挥学生的主体作用，如复习阶段，提出具体要求，命题原则，可由学生分组讨论，动手命题，再从中筛选出部分命题，略加整理作为复习的反馈练习题。

5.逆向思维训练

启发学生思考与已知过程相反的过程，培养学生倒过来想问题的习惯，考虑与已知条件相反条件下的状况，从相对的对象构思事物反作用的结果，另僻蹊径，开拓思路，找出独特的解题途径，平时练习中也要注意有意识把互逆的命题组合在一起交替使用，如多项乘法公式和因式分解，等腰三解形的性质定理和判定定理，在同一题中交替应用。

6.思维广阔性和深刻性的训练

选择多层次思维深刻的综合题，引导学生周密、准确、全面考虑问题，使他们自己发现并找到解题规律，并在班级的学习园地上发表交流。

以思维过程为主线安排课堂教学

人的素质是由多方面因素决定的，其中思维品质的优劣是决定人的一生事业成败的重要因素之一。因此，加强学生的思维训练，不断优化他们的思维品质，是当前基础教育阶段实现“素质教育”的一个重要环节。

数学课是中学生的一门主科，它系统性、逻辑性、抽象性强，能给学生的思维发展不断提出新的需求。因此，要对学生进行思维训练，和其他课相比，数学课的潜力最大、条件最佳。如果能在数学课的教学过程中，由教师带领学生做“思维的体操”，在这种反复的、经常的思维训练中，使学生逐渐形成符合科学规律的思维习惯，掌握正确的思维方法，必会收到优化学生思维品质的效果。

每堂数学课的教学内容不同，课堂类型不同，思维训练的侧重点自然也不同。在讲授新知识的课堂教学中，如果能以科学的思维过程为主线，贯穿于教学的始终，那么不仅能达到对学生进行思维训练的目的，也必能收到理想的教学效果。科学的思维过程包括：分析、综合、比较、抽象、概括、系统化和具体化等程序，只有当人们完成了这样一个完整的科学思维过程，才能真正认识客观事物，掌握新的知识。

清华大学附中邵光砚老师以复数（代数式）运算的第一节课的教学实践为例，介绍了以思维过程为主线安排课堂教学的具体做法。

[教材处理]

把分散在§8.4和§8.5两节教材中的复数的加、减、乘、除四则运算法则集中

到一节课讲授。

[课堂教学的三个过程]

第一个过程，讲授复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ $(a,b,c,d\in R)$ 的加、减、乘、除运算法则，即

$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$，

$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$，

$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\quad(z_2\neq 0)$

第二个过程：

提问 如果把虚数单位 i 看作一个字母，那么 $(a+bi)\pm(c+di)$，$(a+bi)(c+di)$ 这三种运算应怎样进行？引导学生联想过去学过的多项式运算，得出下面的运算过程：

$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)$

$=a+bi+c+di$。 ←去括号

提问 把 z_1+z_2 的运算结果表示成 $A+Bi$ $(A,B\in R)$ 应该怎样变形？

得出 $z_1+z_2=(a+c)+(b-d)i$，合并同类(实、虚)项

$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)$

$=a+bi-c-di$ ←去括号

$=(a-c)+(b-c)i$， ←合并同类(实、虚)项

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)$

$=ac+adi+bci+bdi^2$ ←二项式的乘法

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$ ←合并同类(实、虚)项

把上述各运算的结果与复数加、减、乘各运算法则相比较，让学生自己得出结论。

提问：复数除法运算法则中，将分子、分母同乘以分母的共轭复数的变形与过去学过的哪种运算相似？引导学生联想到根式除法的有理化分母。

最后总结出：

(1) 复数的加、减、乘运算可化归为多项式的同种运算(把项按实、虚分类)；复数除法在实数化分母后化为复数的乘法运算；

(2) 复数的乘方运算可应用乘法公式

$(a+bi)^2$，$(a-bi)^2$

(3) 复数四则运算的运算律与实数运算律相同。

第三个过程 演算例题

例 计算：

(1) $(5-6i)+(-2-i)-(3-4i)$；

(2) $(1-2i)(3+4i)(-2+i)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$；

(4) $(1+2i)\div(3-4i)$。

练习 教科书第 93 页练习 2、3、4 第 96 页练习 2、3、4。

[课堂教学中的思维训练]

由于复数的加、减、乘、除运算纯属定义，故教学中的第一个过程应尽可能精练。

教学中的第二个过程是对学生进行思维训练的重要过程。这个过程中的思维训练是由以下几个步骤完成的。

第一步，对学生进行分析、比较的思维训练

《心理学》中指出：分析即在脑中把研究对象的整体分解成各个部分或属性；在比较即在人脑中把各种事物或对象加以对比，从而确定它们的异同和关系。

在第一步的思维训练中，首先把复数的四则运算这个研究对象，分解为加法、减法、乘法、除法与多项式的加法、减法、乘法、根式的除法运算逐个对比，从对比中找出它们各自的异同。从而把分析、比较的思维训练，贯穿于这一步教学的全过程。使学生体会到比较与分析，在整个思维过程中，常常是两个不可分割的思维程序，比较是在分析过程中进行的，也是在分析过程中完成的。

第二步，对学生进行综合、概括思维训练

《心理学》中指出：综合即在人脑中把研究对象的个别部分与属性联合为一个整体；概括即在人脑中把各种对象或现象间的共同的属性抽象、综合起来。

在第二步的思维训练中，我们引导学生在第一步分析、比较的基础之上，将复数的加法、减法、乘法这三种运算综合为一个整体，去寻找、抽象出共同的规律。经过综合与抽象，使学生最终概括出“复数的加、减、乘法运算可化归为多项式的同种运算”的结论，从而把综合、概括的思维训练贯穿于这一步教学的全过程。

课堂教学的第三个过程，对学生进行了具体化的思维训练

《心理学》中指出：具体化即人把经过抽象、概括后的一般规律同某

一具体事物联系起来。

在这个过程的思维训练中，我们首先通过对例题的演算，引导学生把概括出的一般规律运用到复数的加、减、乘、除的具体的运算中去，并让学生独立完成一定数量的练习题，从而将具体化的思维训练，贯穿于这一过程的教学之中，使学生体会到具体化是人们认识客观事物，掌握知识的一个重要环节，增强“用”的意识。

从以上叙述可以看出：本节课的数教学过程是以一个近乎完整的科学的思维过程为主线安排的，这个过程可表示为：

$$\text{联想}\rightarrow\begin{matrix}\text{分析}\\ \text{比较}\end{matrix}\rightarrow\text{综合}\rightarrow\begin{matrix}\text{抽象}\\ \text{概括}\end{matrix}\rightarrow\text{具体化。}$$

经过前面所述的分析、比较、综合、概括的思维过程，使学生找到了新、旧知识之间的内在联系，当他们认识到多项式中的字母表示的是数(此时已扩大到复数集)时，就会悟出复数代数式的运算与多项式运算的内在联系是那么显然，从而使他们切实感受到数学本身是一个多么和谐统一的整体。

当我们把新知识归入旧知识的体系中后，学生就不必去死记复数代数式的每个运算的具体法则，从而减轻了学生记忆的负担。通过练习、又巩固了学生对所学知识的掌握。

这节以思维过程为主线安排的复数四则运算法则的教学实践，既达到了对学生进行思维训练的目的，也在减少学时的前提下提高了课堂教学的效果。

要想优化学生的思维品质，不仅应教会学生经过怎样的思维去求解数学习题，更要教会他们通过怎样的思维去认识客观事物，去学会新的知识。因此，对学生进行旨在认识客观事物的、完整的科学思维的过程的训练是十分重要的。以科学的思维过程为主线，去安排某些数学课堂教学(而不受教材所限)，必会收到优化学生的思维品质和优化教学效果的双重效益。

□课堂教学中的数学思维培养

课堂教学特别是在重要的概念教学中，教师不宜直接地给出结论，而宜采取以“推迟判断”为特征的课堂教学方法。即启发学生联系实

际,不断探索,而最后得到的结论应当使学生觉得是自己和大家一起探索得到的“成果”,不是伸手摘到的果实,也不是老师硬塞给他的礼物。这种“成果”他们特别珍惜,容易记住。德海纳特在《教师的创造性教学》中说:“所有有活力的思想都有一个缓慢发展的过程,应给学生足够的时间,而向学生预示结果或者解决方法都会阻碍学生努力研究。”

从教学过程来看,中心环节就是如何引导学生去思维。

1.应非常重视概念引入的方式和教学方法

心理学认为“思维过程通常是以需要应付某种困难,理解什么东西,解决某个问题开始的。”概括地说,思维是从问题开始的。

⑴ 联系实际,提出问题,讲述概念。 例如:高一立几“线面平行”的判定定理,可让学生在教室中挂一幅画“平不平?”的讨论中引入。先由实际中归纳出结论,再加以证明,让学生懂得理论来源于实践的道理,学会归纳思维的方法。

⑵ 掌握规律,让学生自己归纳可以类比的概念。 数学中提供类比,就如搭桥引渡,使学生温故而知新。

例如:高一代数幂函数讲完后,帮助学生掌握研究函数的性质的规律是:定义域、值域、图象、单调性、奇偶性。那么引入指数函数、对数函数时,可让学生主动地去讨论这些性质。到学习正弦函数时,再指出“周期性”这个规律,余弦函数、正切函数、余切函数就容易掌握了。当反正弦函数详细讲述后,反余弦函数、反正切函数、反余切函数就不必多讲了。

数学教学中,这种现象是很多的。如详讲了棱柱后,可让学生在研究规律中,发现棱锥、棱台的性质;引入圆柱母线的概念后,学生就容易迁移出圆锥、圆台的概念;研究了椭圆的性质后,学生很容易迁移出双曲线的性质……

⑶ 增加复现率,引导学生加强对新旧概念的比较。 例如:学习极坐标的极角,可以比较复平面的辐角,直角平面的任意角,甚至直线的倾斜角。两条直线的夹角等概念,区别异同点,加深理解。

2.应非常重视定理、公式、性质的证明推导

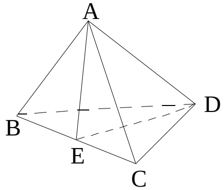
学生往往仅重视结论的获得和运用,而感到证明是死的,没有用的,如果教师也不重视证明过程,那么这个教学环节将“走过场”。事实上,证明不仅是培养学生思维的严密性,培养学生逻辑推导的能力等的重要手段,而且有许多证明的本身就是提供了正确的思维方法,具有很大的启发性。

例如:立几初学时,离不开反证法,为什么呢?因为手头上除了几个公理外,

可利用的定理、推论太少了！无法从正面加以说明，这也是个规律："最初的命题往往要用反证法"。

又如：线面垂直的判定定理的证明，初学者很难独立完成，甚至看了书的解答也很难接受。学生会想："怎么会想到这个方法，太特殊了。"教师应针对学生的疑惑，强调利用"对称平面"的思想，介绍"对称"的特点和性质，并引导学生自觉地运用对称平面，那么象如下例题：

已知：$AB=AC$，$BD=CD$，求证：AD 垂直于 BC。



只要添加一个辅助的对称平面 AED 就容易解决了，(取 BC 中点 E，连接 AE、ED 即可)。学生就不至于提出：怎么会想到添这个平面的？

又如：等比数列求和公式的推导，给出了"错项相减法"的数列求和思想。

再如：几十个三角公式源于两角和余弦公式，直线方程的多种形式源于直线方程的点斜式等等，学生就会体会到证明本身也是有用的，从而把证明和推导过程作为"自己的事"。

证明推导的过程光"重视"、"强调"还不够，教师还要有意地安排学生的参与，即不能停留在把证明推导当作"老师的事"，而学生停留在一知半解上。

3.要及时准确地获取反馈，并利用反馈进行再教学

在课堂教学中，应重视课堂练习和提问，及时准确地取得反馈，并采取相应措施。

例如：复数的概念引进后，让学生选择以下表述哪些是正确的？

(a) $\sqrt{-1}=i$；(b) $\sqrt{-1}=-i$；

(c) $\sqrt{-1}=\pm i$；(d) $i^2=-1$；

(e) $\sqrt{-1}$没有意义；(f) -1 的平方根是 $\pm i$；

(g) -1 的算术平方根是 i。

又如 数学归纳法讲完后，举例用数学归纳法证明：

$1+6+11+\cdots+(5N-4)=N\times(5N-3)/2$ (N 为自然数)。

证明：当 $N=K$ 时，

$1+6+11+\cdots+(5N-4)$

$=(5\times1-4)+(5\times2-4)+\cdots+(5\times K-4)$

$=5\times(1+2+\cdots+K)-4K$

$=K(5K-3)/2$，

等式成立。

当 $N=K+1$ 时，

$1+6+\cdots+5+[5(K+1)-4]=(K+1)[5(K+1)-3]/2$，等式仍成立。

，$1+6+11+\cdots+(5N-4)=N\times(5N-3)/2$。

问学生，以上证明对不对？错在哪里？

学生往往会指出 (1) 缺少第 [1] 步；

(2) 第 [2] 步时，当 $N=K$ 时，只要作假设，不要证明；

(3) 当 $N=K+1$ 时，不能代入，要证明。那么又修改得证明：

[1] 当 $N=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1\times(5-3)/2=1$，等式成立

[2] 假设当 $N=K$ 时，等式成立，即

$1+6+\cdots+5(K-4=K\times5(K-3)/2$，则当 $N=K+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&1+6+\cdots+5(K-4)+[5(K+1)-4]\\
&=(5\times1-4)+(5\times2-4)+\cdots+\\
&\quad[5\times(K+1)-4]\\
&=5[1+2+\cdots+K+(K+1)]-4(K+1)\\
&=5\times(K+1)(1+K+1)/2-4(K+1)\\
&=(K+1)[5(K+2)/2-4]\\
&=(K+1)[5(K+1)-3]/2
\end{aligned}
$$

等式仍成立；

根据上述过程，命题得证。

以上证明是否有错？错在哪里？如何改正？这个问题就比第一个问题深入一步，要使学生明确第二步递推证明必须利用归纳假设，即 $N=K+1$ 时，命题成立是在 $N=K$ 时命题成立基础上递推出来的，由于命题之初成立，又有递推性，命题才成立。从而加强学生对数学归纳法从形式上到本质上认识。

□培养数学思维能力的教学

数学思维是人脑和数学对象交互作用并按一般思维规律认识数学规律的思维过程。L. M. 弗德曼指出：数学思维是一种极抽象的理论思维，它的对象没有任何物质性，而且可以用任意一种方式来解释，只要保留所给对象间的关系就行。正是由于数学对象的这一特点，导致

了数学思维的概括性和间接性更强。湖北省荆门市教研室甘家炎老师介绍的措施是：

1.按照思维规律，充分暴露数学思维过程

数学教学大纲指出：数学教学中，发展思维能力是培养能力的核心。数学学习，从本质上说，是以思维为主的过程，同时又伴随着记忆、复现、再认这些环节。A. A.斯托利亚尔指出：充分暴露数学思维过程是教学的指导原则。数学教学要展示数学思维过程，要求教师创造性地将数学思维过程“复现”出来。当前的数学教学基本上是数学结果的教学，其表现就是自觉或不自觉地取消了让学生进行思维的环境、时间和空间，取消了诱发思维的土壤和条件，如注入式教学、“题海战术”就是如此。

学生学习的知识是前人的思维结果，但学习知识不应是简单的接收，而是必须把新知识消化、吸收，纳入自己已有的知识系统，形成新的认知结构。因此，数学教学要立足于学生思维活动的展示，变结果教学为过程教学，让学生在获取知识和运用知识过程中发展思维能力。

例 1　设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，$b_1=2$，$b_2=1$。从第 3 项开始，每一项都等于它的前两项之和，问这两个数列中含有多少个相同的数。

[思考] 先考察这两个数列的前若干项，有

$\{a_n\}$：1，2，3，5，8，13，…；

$\{b_n\}$：2，1，3，4，7，11，…。

我们发现：这两个数列的前 3 项是相同的数，从第 4 项起，再没有相同的数了，并且

$$a_3<b_4<a_4 \quad ①$$

$$a_4<b_5<a_5 \quad ②$$

$$a_5<b_6<a_6 \quad ③$$

于是，我们猜想：对于任何 $n\geqslant4$，都有

$$a_{n-1}<b_n<a_n \quad *$$

如果猜想被证明了，那么问题也就解决了。怎么证明这一猜想呢？

不妨先试证当 $n=7$ 时，不等式 $a_6<b_7<a_7$ 成立。此不等式可以写为

$$a_4+a_5<b_5+b_6<a_5+a_6^{*} \quad ④$$

容易发现②+③得④式，于是获证。

由此得到启示，不等式 * 可用如下类型的数学纳法证明：

(i) 当 $n=4$、5 时，可验证不等式 * 成立；

(ii) 假设当 $n=k$、$k+1$ 时,不等式 * 成立,即有 $a_{k-1}<b_k<a_k$,$a_k<b_{k+1}<a_{k+1}$,

两式相加,则得 $a_{k-1}+a_k<b_k+b_{k+1}<a_k+a_{k+1}$

即 $a_{k+1}<b_{k+2}<a_{k+2}$。

这表明当 $n=k+2$ 时,不等式 * 也成立。

综上可知,对于一切 $n\geqslant 4$,不等式 * 都成立,故在数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中,从第 4 项起,彼此没有相同的数,它们所含的相同的数只有前 3 项。

问题是数学的心脏。数学问题是数学思维的动力,并为思维指出了方向。数学思维过程是不断提出问题和解决问题的过程,而数学问题的产生是要经过一系列解决问题的过程,因此,在教学中,教师应从学生原有的认知结构出发,通过观察、类比、联想、猜想等一系列思维活动,立体式地展示问题、提出过程,让学生在温故知新的联想过程中产生强烈的求知欲,尽可能地参与概念的形成和结论的发现过程,并掌握观察、试验、归纳、演绎、类比、联想、一般化与特殊化等思考问题的一般方法,从而在发展学生思维能力的过程中,加以灵活应用。

2. 合理设计思维层次,使学生在思维过程中学习数学

按照思维活动中思维的层次和水平,可将思维由低级到高级划分为三个发展层次:直观行动思维,形象思维,抽象逻辑思维。

直观行动思维是在实际操作中进行的依赖于动作的思维。在这种思维活动中,动作是思维的起点,动作终止,思维也即停止。从动作到动作是这种思维的特点。

形象思维是凭借事物的知觉、形象和表象而进行的思维,其主要特征是思维材料的形象化,基本思维形式是表象、直感和想象,而整个思维过程是靠理性思维来把握的。因此,它不仅是感性认识,而且是具有形象的理性认识,有较高的抽象度。可见,形象思维能揭示数学知识的内在联系与本质,能为数学解题提供明确的思路和方法。

在数学思维过程中,抽象逻辑思维是核心,直观行动思维、形象思维是先导,这三种思维成份是互相渗透的。在数学学习中,随着学习内容的不断加深和抽象概括水平的不断提高,学生的数学思维也随之逐步由直观行动思维发展到形象思维,再发展到抽象逻辑思维。

在教学过程中,学生的思维是怎样发生的?如何才能使学生的思维持续发展?这就要求教师创造性地将数学家的思维活动、教师的思

维活动以及学生的思维活动和谐地统一起来。教师要精心创设问题情境,诱发学生的积极性,同时启发引导要与学生思维同步。给学生适当的思维时间、空间,以保持思维的持续性。

目前的教材基本上是把前人发现的知识,按照演绎科学,以严格的逻辑推理和高度抽象的特征来整理的。因此,教师必须对教材进行教法加工,挖掘教材中蕴含的因素以及数学家在发现过程中的思维进展层次,然后模拟这一过程,引导学生通过自己的思维进行学习。在概念教学过程中,揭示概念的提出、抽象和概括的过程,尽可能让学生参与概念形成过程的思维活动。数学结论的发现过程中,需要假设与猜想,而选择正确的结论主要凭借直觉思维,教学中要突出思维过程,就必须对直觉思维进行慢镜头的剖析,挖掘结论及其探索过程的一般思考方法,让学生领略并掌握其中的奥妙,现以绝对值的教学为例加以说明。

首先教师提出“$|a|=a$ 对吗?”造成悬念,并获得课题的表象,以便思维定向。

⑴ 具体的感知阶段,以数字为对象的数学活动。 如计算 $|+5|=$?,$|-3|=$?,$|0|=$?等等,提问 5 与 +5 是什么关系”3 与 -3 及 0 与 0 呢?然后再举若干类似的例子,师生共同总结“正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数,0 的绝对值是 0。”

⑵ 表象演算阶段,将抽象化的不同程度可分为三个层次,逐步向最终的抽象概括过渡。

第一层次,研究绝对值符号里面数的正负性显然的情况,如计算 $|1/4|$,$|-8|$等。

第二层次,研究绝对值符号里面数的正负性不显然的情况,如计算 $|5-3|$,$|2-2|$,引导学生产生必须“首先判断绝对值符号里面的数是正还是负”的数学意识,为抽象字母的讨论打基础。

第三层次,研究有字母的但实质还是具体的数的情况。当 $a=2$ 时,计算 $|a|$ 的值,$a=-2$ 时呢?$a=0$ 时呢?或当 $a=2$,$b=3$ 时,计算 $|a-b|=$?等等。其表象层次更加趋于抽象化、概括化,为过渡到抽象概括做好准备。

⑶ 抽象概括阶段。 这时只要解决“a 表示什么数”的问题,可在前面两个阶段的基础上概括出:

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\0 & (a=0),\\-a & (a<0)。\end{cases}$$

总之,课堂教学要树立以思维过程为中心、以适当推迟判断为特征、让学生参与知识形成过程来学习数学的教学观念,发展学生的思维能力。

3.重视解题教学的思维训练,优化学生的思维品质

弗赖登塔尔指出:谁都知道,真正的数学家学习数学,常常凭借数学的直觉思维,作出各种猜想,然后加以证实。在解题教学过程中,分析与综合、归纳与演绎、类比与猜想是贯穿其始终的,是思维运动的基本形式,我们不仅要把巧妙的构思、多方位的探索情境展示给学生,而且还要把失败的过程,或从失败到成功的过程展示给学生,让他们从反思中看到应当如何转变思维方向和策略,如何缩小探索范围,如何进行解题的评价等,从而激活教学过程,优化学生的思维品质。

例 2　已知函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ $(x\in R)$,试比较 $|f(a)-f(b)|$ 与 $|a-b|$ 的大小。

思路 1.按证明绝对值不等式的常规方法,经过平方去绝对值符号,作差比较,利用配方法证之。

思路 2.用商比法,利用共轭根式有理化分子,再用放缩原理证之。

思路 3.注意函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 的结构特征,用三角代换令 $x=\mathrm{tg}\theta$,转化为三角不等式证之。

思路 4.考虑方程 $y=\sqrt{1+x^2}$ 表示双曲线 $y^2-x^2=1$ 的上支,$|f(a)-f(b)|/$ 与 $|a-b|$ 是双曲线上两点 $(a,f(a))(b,f(b))$ 连线斜率的绝对值,于是问题可转化为双曲线上支任一弦所在直线斜率的估计问题,而双曲线的渐近线斜率为 ± 1,问题即可得证。

思路 5.观察函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 的特点,联想到复数的模,可构造复数 $z=1+xi$,利用复数不等式证明。

通过多角度的观察、联想,获得多种解题途径,充分展示了思维的广阔性、深刻性和灵活性,感受到了数学的美妙与情趣,有利于学生思维素质的提高。

数学解题教学中的一题多解以及变式训练是培养学生良好思维品质的有效途径。

例 3　**已知** a、b、c **是不相等的正数,求证** $a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$。

引导学生抓住命题的条件和结论以及一般到特殊、特殊到一般的思维方法加以引伸拓广。

⑴ 削弱命题条件,加以引伸。

已知 a、b、c **是不全相等的实数,求证** $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$。

⑵ 保留条件,分别将结论中的 a、b、c **换成** bc/a、ca/b、ab/c **加以引伸。**

已知 a、b、c **是不全相等的正数,求证** $bc/a+ca/b+ab/c>a+b+c$。

⑶ 采用一般到特殊的思想,令 $c=1$**,有**

已知 a、b **是两个不相等的正数,求证** $a+b+1>\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

⑷ 采用特殊到一般的思想,将命题加以推广。

已知 a_1、a_2、$\cdots a_n$ **是不全相等的正数,求证** $a_1+a_2+\cdots+a_n>\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}a_n}+\sqrt{a_na_1}$。

□数学教学中学生思维能力的培养

数学是思维的体操。数学教学要开发智力、发展能力,就不能仅仅停留在传授知识上,还必须注重培养学生的思维能力。那么,在数学教学中怎样来培养学生的思维能力呢?贵州省南白师范学校刘昌源老师总结具体作法可以从以下几个方面进行:

1.**一题多解,开阔视野**

在教学过程中,用多种方法,从各个不同的角度和不同的途径去寻求问题的答案,培养学生思维的变通性。

例 1、**求证** $tg^2\theta-\sin^2\theta=tg^2\theta\cdot\sin^2\theta$

思路 1 **:从左到右证明,化差为积。**

证法 1 **:** $tg^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\sin^2\theta\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}(1-\cos2^{\theta})=tg^2\theta\cdot\sin^2\theta$。

证法 2 **:** $tg^2\theta-\sin^2\theta=\sin^2\theta(\sec^2\theta-1)=tg^2\theta\cdot\sin^2\theta$。

证法 3 **:** $tg^2\theta-\sin^2\theta=tg^2\theta(1-\cos^2\theta)=tg^2\theta\cdot\sin^2\theta$。

思路 2 **:从右到左证明,化积为差。**

证法 4 **:** $tg^2\theta\cdot\sin^2\theta=tg^2\theta(1-\cos^2\theta)=tg^2\theta-\sin^2\theta$。

证法 5 **:** $tg^2\theta\cdot\sin^2\theta=(\sec^2\theta-1)\sin^2\theta=tg^2\theta-\sin^2\theta$。

思路 3 **将** $a=b$ **转化为** $a-b=0$。。

证法 6 **:** $(tg^2\theta-\sin^2\theta)-tg^2\theta\cdot\sin^2\theta=tg^2\theta(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta=tg^2\theta\cdot\cos^2\theta-$

$\sin^2\theta = \sin^2\theta - \sin^2\theta = 0$。

，$tg^2\theta - \sin^2\theta = tg^2\theta \cdot \sin^2\theta$。

证法 7： $(tg^2\theta - \sin^2\theta) - tg^2\theta \cdot \sin^2\theta = tg^2\theta - \sin^2\theta(1 - tg^2\theta) = tg^2\theta - \sin^2\theta\sec^2\theta = tg^2\theta - tg^2\theta = 0$。

，$tg^2\theta - \sin^2\theta = tg^2\theta\sin^2\theta$。

证法 8： $(tg^2\theta - \sin^2\theta) - tg^2\theta \cdot \sin^2\theta = \sin^2\theta(\sec^2\theta - 1) - tg^2\theta\sin^2\theta = \sin^2\theta \cdot tg^2\theta - tg^2\theta\sin^2\theta = 0$。

，$tg^2\theta - \sin^2\theta = tg^2\theta \cdot \sin^2\theta$

思路 4 **证明左右两边都等于同一个式子。**

证法 9： **右边** $= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \sin^2\theta = \dfrac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}$。

左边 $= \dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\sin^2\theta(1 - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta} = \dfrac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}$。

，$tg^2\theta - \sin^2\theta = tg^2\theta \cdot \sin^2\theta$。

思路 5 **:用逆证法。**

证法 10 **:由题意可知** $\cos^2\theta \neq 0$**,于是求证式两边可同乘以** $\cos^2\theta$ **得** $\sin^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^4\theta$**,**

即 $\sin^2\theta(1 - \cos^2\theta) = \sin^4\theta$

也就是 $\sin^4\theta = \sin^4\theta$。

(*)式是恒等式,且以上各步均可逆。

，**原式** $tg^2\theta - \sin^2\theta = tg^2\theta \cdot \sin^2\theta$ **成立。**

思路 6 **将** $a = b$ **转化为证** $\dfrac{a}{b} = 1$**,但转化时要注意** $b = 0$ **的特殊情况。**

证法 11： $\cos^2\theta \neq 0$**,否则求证式无意义。**

若 $\sin^2\theta = 0$**,则** $tg^2\theta = 0$**,显然等式成立;**

若 $\sin^2\theta \neq 0$**,则** $tg^2\theta \cdot \sin^2\theta \neq 0$**,欲证原等式成立,只须证** $\dfrac{tg^2\theta - \sin^2\theta}{tg^2\theta \cdot \sin^2\theta} = 1$ **即可。**

而 $\dfrac{tg^2\theta - \sin^2\theta}{tg^2\theta \cdot \sin^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta} - \dfrac{1}{tg^2\theta} = \csc^2\theta - ctg^2\theta = 1$**,**

，$tg^2\theta - \sin^2\theta = tg^2\theta \cdot \sin^2\theta$

然后再引导学生根据这些证法归纳出证明三角恒等式的基本方法和常用技巧。这样做不但开阔了学生的视野,使学生的发散思维和收敛思维能力得到锻炼和培养,而且使学生学得的知识更灵活、牢固。

2.**一题多变,以点串线**

“变换”是数学中最有用的概念之一。教学中对数学概念、法则、定理、公式、题目等从“变换”的思想角度去联想,去开拓,不但可以达到以

点串线、举一反三、牵动全面知识的目的,而且还能将知识深化,提高学生分析问题,解决问题的能力和“发散思维”能力。

例 2　用二项式定理证明 $55^{55}+9$ 能被 8 整除。

分析:从命题角度来看,需要将 $55^{55}+9$ 分解成 8 的整数倍,联系到二项式定理,应该考虑 $55=56-1$ 及 $9=1+8$ 等关系。

证明:$55^{55}+9=(56-1)^{55}+9=56^{55}-C_{55}^{1}\cdot 56^{54}+\cdots+(-1)^{r}C_{55}^{r}\cdot 56^{55-r}+\cdots+C_{55}^{54}56-1+1+8=56^{55}-C_{55}^{1}\cdot 56^{54}+\cdots+(-1)^{r}C_{55}^{r}\cdot 56^{55-r}+\cdots+C_{55}^{54}56+8$。

上式右边各项均能被 8 整除。

∴ $55^{55}+9$ 能被 8 整除。

完成上述证明后,再将此题作如下一些变换、引导学生联想。

①若题设中其它条件不变,只将 $55^{55}+9$ 中的指数 $n=55$ 改为 $n=2k-1$ $(k\in N)$,情况如何?若改指数 $n=2k$ $(k\in N)$,情况又如何?

对于这两个问题,学生稍加思考便可证明,前者能被 8 整除,而后者不能被 8 整除。

②再把条件中另一加数 9 换成 7,这时候 $55^{2k-1}+7$ 能被 8 整除吗?而 $55^{21}+7$ 呢?$(k\in N)$。

学生可以立刻得出,$55^{2k-1}+7$ $(k\in N)$ 不能被 8 整除,而 $55^{2k}+7$ 反而能被 8 整除了。

③这时再将命题变换为,对于形如 $55^{n}+a$ $(n\in N)$ 的整数,a 是小于 8 的自然数,这时候 $55^{n}+a$ 若被 8 除,余数是多少?

依据前面的推证与具体思维,大部分发学生已能进一步抽象思维,知道将指数 n 分为偶数和奇数两种情况进行讨论,于是得出:

因为当 $n=2k$ $(n\in N)$ 时,$55^{n}+7$ 被 8 除的余数是 0,所以在 a 为小于 7 的自然数时,$55^{n}+a$ 被 8 除的余数是 $a+1$;而当 $n=2k-1$ $(k\in N)$ 时,$55^{n}+a$ 被 8 除的余数是 $a-1$。

④经过前面的变换和推证,可以引出这样一个趣味性的问题:

今天是星期三,经过 $55^{55}+9$ 天后的那一天是星期几?

学生容易看出,这是求被 7 除后的余数问题,因与生活实际有联系,学生较感兴趣,且由前面的推证不难进一步得出余数是 1,答案是星期四。

如此借题发挥、一题多变、以点串线、联想开拓,对培养学生由此及彼、由表及里的思维方法起到了举一反三、触类旁通的效果。

3.探索未知,猜想结论——解题结论上的推广

在教学中,让学生用自己学过的知识,通过多方观察、纵横联系、积极探索、大胆猜想,去得出可能的结论,这有助于培养学生的探索精神和创造性思维能力。

例3　**已知** $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(1) $f_2(x)=f_1[f_1(x)]=$ **?**

(2) $f_3(x)=f_1\{f_1[f_1(x)]\}=$ **?**

(3) **由此可能得出什么结论?**

解:(1) $f_2(x)=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1-f_1^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2}}$;

(2) $f_3(x)=f_1[f_2(x)]=\dfrac{x}{\sqrt{1-3x^2}}$;

(3) **学生从(1)、(2)的解答过程中不难发现规律,猜想到一般性结论:**

$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-nx^2}}\ (x\in N)$。

当然,对任意的自然数 n**,上式是否成立,还必须用数学归纳法证明。(略)**

4.**由特殊到一般,深化提高——解题方法上的推广**

在教学中,对一些题进行由简到繁、由特殊到一般的推广或延伸,可以训练学生思维的深度和广度,培养学生归纳思维的能力。

例4　**求证** $\cos80^\circ\cos40^\circ\cos20^\circ=\dfrac{1}{8}$。

证明:$\cos80^\circ\cos40^\circ\cos20^\circ$

$$=\frac{\cos80^\circ\cos40^\circ\cos20^\circ\cdot2\sin20^\circ}{2\sin20^\circ}$$

$$=\frac{\cos80^\circ\cos40^\circ\sin40^\circ}{2\sin20^\circ}$$

$$=\frac{\sin80^\circ\cos80}{2^2\sin20^\circ}=\frac{\sin160}{2^3\sin20^\circ}=\frac{1}{8}$$

然后,请学生将上例的证明方法推广到下例:

例5　**求证** $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}\ (x\neq2^nk\pi,n\in N,k\in Z)$。

尽管此题看起来较为复杂,但学生根据上题的证明思想,很容易得到证明方法。

证　明:　左　边 $=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\dfrac{x}{2^n}}=$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

5.由一般到特殊,不落俗套

在教学中,对一些题目,教师要引导学生分析其特殊性,鼓励学生打破常规,克服习惯的束缚,从异向思考问题,培养学生敏锐的观察力、灵活的思维方式和独创求异精神。

例6　设 a、b、c 为正实数,$a+b+c=3$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$。求证 $abc=1$。

分析 此题若由已知条件通过恒等变形去推结论,是很复杂的。但若根据此题的特殊性,把问题转化为证明不等式 $abc\geqslant1$,且同时 $abc\leqslant1$,这就简单多了。

证明: a、b、c 是正实数,于是

$3=a+b+c\geqslant3\sqrt[3]{abc}$,即 $\sqrt[3]{abc}\leqslant1$,;

同时 $3=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$,即 $\sqrt[3]{abc}\geqslant1$。

因此必有 $\sqrt[3]{abc}=1$,, $abc=1$。

6.综合分析,深入挖掘

例7　已知整数 a、b、$a-b$ 均非3的倍数,试证:a^3+b^3 是9的倍数。

分析 初看此题的条件和结论似乎不相关,思维肤浅的学生往往写出 a^3+b^3 的公式以后便无从下手,分析不出条件里隐含的全部意义,而思维深刻的学生则会在"均非"二字上挖掘,于是发现:当 $a=3n+1$ 时,必定有 $b=3m+2$;而当 $a=3n+2$ 时,必定有 $b=3m+1$,(m、$n\in Z$),否则,$a-b$ 将成为3的倍数。这样题目的隐含条件一旦剖析清楚,难度就大大地降低了。

□数学教学中的思维培养与训练(一)

在数学教学中,教师在重视双基(传授基础知识,训练基本技能)教学的同时,应注重学生能力,特别是思维能力的培养。在诸多训练学生思维能力的做法中,盐城市教研室张谨华老师总结下面几种做法切实可行,效果显著:

1.设计能启发学生积极思维的问题

在课堂上,教师与学生相互交流的常见形式是问答。有经验的老师,绝不提让学生不加思索就脱口齐答的问题,他们总是在深刻理解大

纲、教材的基础上，设计一系列设问，变数学结论的教学为知识发生发展过程的教学，使学生自始至终处在积极思维之中，自主地探索、思考、推理。

组织了一个专题研究小组，着意收集、整理教师们在授课时设计的能启迪学生思维，激发学生学习兴趣的设问，印制成册，供青年教师教学时参考。下面摘举的三例就是教师们在初一代数教学中设计的问题。

①教过有理数四则运算后，设问：“你能说说有理数四则混合运算与算术四则混合运算的异同吗？”

②教完有理数一章后，设问：“你能谈谈对数零的认识吗？”

③教完二元一次方程组的解法后，设问：“你知道‘代入消元法’与‘加减消元法’之间有什么联系吗？

从初一开始，每节课都坚持以“设问—→思考—→回答—→讨论—→小结”的形式教学，学生的思维能力在如此反复训练之下必能有提高。

2.编撰能激发学生思维的代数习题

不少教师忽略在代数教学中利用习题对学生进行思维能力的训练，因而未能把几何入门教学的难处——学生逻辑思维能力薄弱，提早在代数教学中解决。

在代数教学中，就有意识选择、编撰形似简单，但必须经过仔细、周密地思考方能正确解答的习题，用来对学生进行思维能力的训练。例如，我们在讲完平方根的概念之后，出了下面一组习题让学生课外练习。

①试比较 a 与 $-a$ 的大小；

②试比较 a 与 $\frac{1}{a}$ 的大小；

③试比较 a 与它的平方数及平方根之间的大小。

这一组练习题，在知识方面，要求学生能巩固、深化倒数、平方数、平方根等有关概念及掌握实数大小的比较方法；在能力方面，则着力对学生进行分段（分部、分类）比较（论证）的思维程式的训练，对学生培养思维的周密性也很有好处。

3.复习课教学中重视思维能力的训练与提高

概略地提一下概念，选讲几个代表性的例题，让学生做几道练习，这几乎已成为复习课教学的一种程式。为了能让学生“见多识广”，利用“模式”解题，老师们总是搜集各种类型的题目讲授给学生，却忽略了

复习时对学生进行思维能力的训练。有的老师虽考虑到复习中要训练学生的思维能力，但因怕占用时间，影响进度，更怕题目类型讲不全，题目讲少了影响学生今后应考的成绩，因而在复习时仍采用以讲例题为主的授课方式。

在复习教学中，对训练学生思维能力作了些尝试。例如，在复习三角形内角平分线性质定理时，要求学生用多种方法证明这个定理。学生经过回忆、思索和老师的点拨，课堂上列出了 13 种证法。

学生用这许多方法证明定理的过程中，涉及的知识面之广，思维活动量之大，使教学效果远远超出了定理结论证明本身。为了进一步训练学生的思维，提高学生的思维素质，我们又向学生提出了如下的几个问题：

① 这十几种解法中有哪些解法实质上是完全相同的？为什么？

② 每种解法主要运用了哪些数学知识、数学思想？这些解法间有什么联系？

③ 谈谈你探索解法的思维过程，你认为这些解法中哪些解法最理想？

经过比较归纳，学生的思维品质得到了锻炼。由此可见，上复习课（包括平时的习题课），老师编拟、选择习题不一定要太多，也不要太难，但要具有代表性，让学生能从多方位、多角度去观察、分析、探讨，学生的思维能力必会得到充分的锻炼。

□数学教学中的思维培养与训练（二）

当前，中学数学教学中不同程度地存在着重视解题技巧，忽视思维训练，注重知识传输，忽视思维教育的状况。

要改变这种状况，就要充分认识在数学教学中，进行思维教育的重要性。不仅要教给学生相应的数学知识，更必须着力提高学生的思维素质。

周学祁老师针对当前中学数学教学中普遍存在、迫切需要解决的倾向性问题，介绍了在数学教学中如何改革教学加强思想教育的方法。

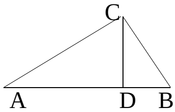
1. 改造教材的演绎式体系，克服思维的封闭性

当前的初中数学教材，大多采用“先给出结论，后加以论证”的演绎体系。这种体系，用于数学科学内容的叙述与系统展开，是十分必要

的,但作为中学教材却未必适合。如果将教材原封不动地搬进课堂,而忽视了归纳、发现、探求、验证、反思、展拓等等重要的思维过程,长此以往,学生将只能证明现成结论,而不善于发现新的命题,只能被动接受现成的知识与方法,而不能独立地更新与创造,只能模仿、而不能超越,这将是数学教育的悲剧。

因此,在处理教材的过程中,应突破一成不变的演绎体系,适当推迟结论的出现,注意暴露思维过程,适当采用猜想、联想、类比、归纳、模拟等等"似真推理",即对课本中的内容,要从教学论的要求出发,对教材的叙述顺序与方式进行适当的改造,要根据学生的认识过程与思维特点,进行恰当的设计。

例如:平面几何中"射影定理"的教学,如果先出示定理条文,然后将定理翻译为符号化的形式,最后进行证明,学生的思维将被禁锢在"条件——证明——结论"的封闭圆圈中。因此必须对教材加以改造:



(1) 已知 Rt△ABC,找出两直角边在斜边上的射影。

(2) 猜想这两条射影的积(如图,AD·DB)和斜边上的高有什么关系?

(3) 猜想斜边与一条射影的乘积与其它线段有什么关系?

(4) 证明这些关系。

(5) 将图形变式或将背景复杂化,指出这些关系。

(6) 用文字语言归纳与叙述这些定理。

几乎每个定理都需要作这样的改造,即创造一定的思维情境,让学生去发现结论,比较可能的证明思路,探索证明的途径;在此基础上再归纳、提炼、总结得出书上的定理。

我们提倡:"适当推迟结论的出现"!

2.改变教法的灌输型模式,克服思维的被动性

目前,课上由教师单向传输,包办代替的现象,仍然是普遍存在的。在这样的状况下教师讲什么,学生听什么;教师画什么,学生看什么;教师想什么,学生也跟着想什么。因而教师给什么,学生接受什么,学生的思维完全处于被动的状态。提倡围绕本节课的中心内容,经过教师的点拨诱导,由学生去主动获取。要给学生看书的机会,给学生发问的机会,给学生回答问题的机会,给学生板演练习的机会,给学生在集体中显露才能的机会。

在教材的重点、难点处,特别不要包办代替。要围绕教材难点,引

导学生回忆相关的知识与类似问题，激发学生联想；在思维跳跃度较大的地方，架设适当的“梁桥”，使学生中断了的思维，得以延续；在思维比较抽象的地方，要设法帮助他们构造图形、实例，从中悟出一般性的道理；在面临多种选择、多条思路时，要帮助学生评价、判断、筛选出合理的方案；还要鼓励学生别出心裁，发表个人的独特见解。总之，要通过创设思维情境，引发学生的思维，最终攻克难关，要让学生享受主动思维的乐趣与攻克“碉堡”后的欢乐！

对于学生的思考与练习，都应提出明确的要求。要让学生在一节课中不停地动手演算，动脑思考。

3. 改变例题的凝固状态，克服思维的呆滞性

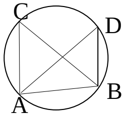
在教学中，讲一例就是一例，做一题仅得一题，不善于变换图形，变换条件，变换结论。本来相互联系的题目，往往变得孤立、隔绝、僵化。久而久之，就容易造成学生思维的禁锢与呆滞，题目稍有变化，便束手无策。我们主张，在研究一道例题以后，应对例题进行变化、改制与必要的引伸，以培养学生思维的灵活性。

例：(几何第二册第 92 页)如果两个三角形有一条公共边，这条边所对的角相等，且在公共边的同侧，那么这两个三角形有公共的外接圆。

在证明以后可以提出：

如果两个三角形在公共边的两侧，这个命题还能成立吗？

如果两个三角形有一条公共边 AB，且第三顶点 C、D 在公共边的两侧，当$\angle C$与$\angle D$满足什么关系时，这两个三角形有公共的外接圆？



通过上述两个问题的研究，既使学生认识到原题中“同侧”二字的必要性，又使学生认识到在异侧的情况，必须满足$\angle C+\angle D=180°$，才有 A、B、C、D 四点共圆，这就是前面第 89 页的定理，“如果四边形的一组对角互补，则四边形内接于圆”，从而把两者之间的联系揭示了出来。

总之，我们要尽量做到一例多变，一例多用。由一题想多题，做一题，带一片。我们提倡：要充分“榨取”每个例题的效益！

4. 改变习题单一化类型，克服思维的局限性

目前的教科书，题型比较单一，都是条件、结论俱全的封闭型或半封闭型题，这样容易造成思维的局限性。

在课堂练习与课后作业中，除了适当编拟选择题外，还可以适当地隐去部分条件或结论，使问题变为开放型或半开放型题。

例：(代数第四册) 证明 $A(1,3)$、$B(2,\sqrt{6})$、$C(-2,\sqrt{6})$、$D(\sqrt{3},\sqrt{7})$ 各点在以原点 O 为圆心的圆上。

可以改造成如下的开放型题；

某印刷不清的题为："证明 $A(1,3)$、$B(2,\sqrt{6})$、$C(\times,\sqrt{6})$、$D(\times,\sqrt{7})$ 各点在以原点 O 为圆心的圆上。"("×"代表印刷不清的数字) 试填补适当的数字，并证明之。(本题为仅有结论与部分条件的开放型题。)

例 在二次函数二次不等式部分可编拟下列开放型题：

二次函数 $y = x^2 + ○x - ○$，经过 $(1, -2)$ 点，且对称轴为 $x = 1$，求函数的最小值，试在○中填上恰当的数，并解本题。

开放型题由于条件不全或结论不明，因而对思维有更强的锻炼效能。

让我们在数学实践中，不断探索思维教育的新路子。我们赞成这样的提法——

让学生通过自己的思维来学习数学。

□数学教学中的思维培养与训练(三)

在数学学习中，随着学习内容的不断加深和抽象概括水平的不断提高，学生的数学思维逐步由低层次向高层次发展，即由直观形象思维发展到具体形象思维，再发展到抽象逻辑思维。当然，由于数学思维活动的复杂性，在数学学习过程中，这三种思维成份之间又是互相渗透的。

中学生的数学思维发展具有以下两个主要特点：第一，抽象逻辑思维开始占有优势，但在很大程度上，还属于经验型，他们的逻辑思维需要感性经验的直接支持。也就是说，具体形象思维仍然起着重要作用；第二，思维的独立性和批判性有了显著的发展，他们往往喜欢怀疑和争论问题，不随便轻信教师和书本上的结论。当然中学生思维的独立性和批判性还是很不成熟的，还很容易产生片面性和表面性，这些缺点是和他们的知识经验的不足相联系的。

可见，要使学生的思维能力得以提高，作为教师，一方面要适应他们的思维发展的规律，另一方面要利用成熟前的可塑性大的特点(主要表现为多思、多疑、好问等)，通过设问的形式给予引导教育。

如何通过数学教学来培养学生的思维能力

江苏省昆山中学吴中强老师提出的方法是：

1.创设合适的问题情境，叩开学生的思维之门

思维总是从问题开始。要想使学生对数学产生兴趣，有学习的积极性，其行之有效的方法就是要创设合适的问题情境。需要指出的是并不是所有问题都能引起学生的兴趣的。那么怎样才是合适的问题情境？

其一是要和学生已有的知识经验有联系，使学生有条件、有可能去思索和探索。这样的问题情境才具有亲切感。　例如，“实数”的引入。学生往往以为有理数已经很多了，为什么数轴上还会留有“空隙”呢？这是一个很有意义的问题。对这个问题，教师可以让学生做如下的一个实验：拿出一瓶细沙子，然后把水倒入，水立即渗了下去。这时可对学生说，“这里面的沙粒可以说多得数不清了，而水仍能渗入沙中，说明它留有“空隙”。接着就可指出，有理数尽管有无穷多个，但它们排在数轴上，还会留下许多“空隙”，这些“空隙”就是我们今天要学习的一种“新数”。我以为，这样处理不仅有新鲜感，而且帮助学生理解“数与点的一一对应关系”。

再如，“平行线等分线段定理”。为了诱导学生探求知识，教师给每个学生发一根火柴，要求他们利用练习本印出的等距平行线，把火柴梗头尾都放在格子里，找出五等分点，再用刻度尺验证。这个实验，不仅引出了该课的课题，而且为等分线段的作图提供了模型。

其二是要有新的要求，使学生不能简单地利用已有的知识经验去解决，从而使学生面临一种似乎熟悉但又不可能很快找出解决问题的方法和手段的情境之中。　这时，学生有一种“心欲求而不得”、“口欲言而不能”的心理状态，有一种不可遏止的跃跃欲试的求知欲望，促使学生积极思考。

例如，讲“方程”一课，教师可采用数学游戏“猜你心中想的数”作开始。

师：请同学们想好一个数，经过加、减、乘、除一系列运算，把演算的过程和结果告诉我，我就能猜中你想的是什么数，看哪个先想好。这时，学生的积极性很高，纷纷举手。

生：一个数乘以3，加上7，减去9，再减去所想的数，结果得10。

师：你想的数是6

教师一连回答了几个，都猜对了。这个简单的数学游戏唤起了学生的好奇心，激发学生急切想知道其中的奥秘的欲望。在学生百思不得其解的时候，教师指出“奥秘就在于一元一次方程里”。这样的引入，显得十分生动，有魅力。

需要指出一点，教师在设计问题的情境时，一定要紧扣课题，衡量

问题情境设计合适的标准有两条:一条是有利于激发学生思维的积极性,也就是要叩开学生的思维大门;另一条是有利于即将要研究的课题的解决,要与教学目标紧密结合。

2.要启发引导,促使学生的思维进一步活跃

通过合适问题情境的创设,学生的思维之门被打开了,接下来就得考虑如何使学生的思维进一步活跃起来。

⑴要给学生以适当的思考时间。　思考问题必须要有一定的时间,这可以说是人人皆知的常识,但就本人所见,时下有相当数量的教师在提出问题后,就希望学生立即回答。如果一旦出现“冷场”,教师就会显得不耐烦,不是重复他的问题,就是急着提出另外一些问题来弥补这个“冷场”。殊不知,这是干扰学生的思考!那么,怎么知道学生是否在积极思考?一个明显的标志是学生的眼光。“眼睛是心灵的窗户”呢!学生的眼光明亮有神,表示专心致志,而且心领神会,思有所得;学生的眼光呆板凝滞,表示遇到疑难或阻梗,心有所思;学生的眼光游移不定,多数表示他们思想开小差,心不与一。另外还有一个问题,让学生思考多少时间?我以为要看问题的范围和程度,还要看所教学生的水平,总之“目中有人”了,这个尺寸还是可以把握住的。

⑵要与学生的思维同步。　常可听到学生这样说:“课堂上是听懂了,就是自己做不出来。”也常听得老师这么说:“我横启发、竖启发,就是启而不发”。师生的两种说法都反映了教师的启发引导是否与学生的思维同步。教学过程是一个师生信息交流的过程,教与学的思维同步,犹如平常我们使用收音机或电视机一样,首先要求发射机和接收机必须开动,其次两者必须在同一波长或同一频道上,这样就能发送和接收好信息,获取满意的效果。

例如,为巩固三角形内角和定理和推论可提出下面一道题目:

已知　如图 1,P 是△ABC 内的一点。

求证:$\angle BPC > \angle BAC$。　如果教师说:“能否用今天所学的知识来证明这个结论呢?”则未必有效。因为这发“炮弹”未射入学生思维的最近发射区,不能引起学生的反映。这时,教师如果急不可待地说:“你们看,连结 AP 并延长能否行?”要知道,这条辅助线下正是教师启发的着眼点,不能直接提出,超前引路反而断了学生的思路。在这里要舍得花时间启发学生,要调整提问的“射程”。可以这样进行:要证明$\angle BPC > \angle BAC$,如果$\angle BPC$是相应的三角形的外角,就可以用三角形外角定理

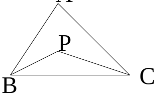


图 1

的推论了,而 ABPC 是一个四边形,如何转化为三角形问题呢?启发到此,学生的思路开始畅通。按照通常的思维规律,这时,学生的思维一般会发散成两条思路:一部分学生可能连 AP 并延长之;另一部分学生可能延长 BP(或 CP),显然殊途同

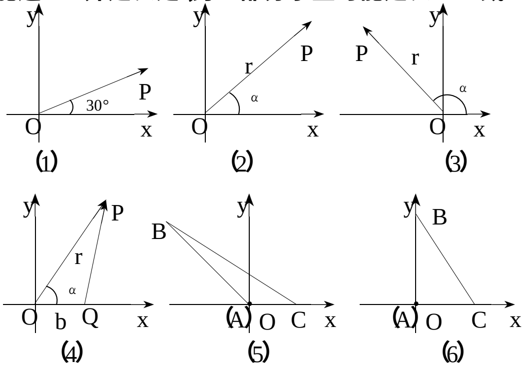


图 2

归,至此,学生定会露出依靠自己的思索而获得成功的喜悦。　　再如,“余弦定理”一节,在简单的开场白之后,教师可引导学生顺次解决以下问题:

①在 Rt△ABC 中,∠C = 90°,AB = 3,BC = 4,则 sinA = ?,cosA = ?tgA = ?ctgA = ?

②如图 2—⑴,OP = 5,∠POX = 30°,则 P 点的坐标是(　　);

③如图 2—⑵,OP = r,∠pox = α,则 P 点的坐标是(　　);

④上题中 r、α 都是变量。若将 OPX 旋围到第二象限如图 2—⑶,P 点坐标($r\cos\alpha$,$r\sin\alpha$)中的 x、y 的值各有什么变化?若 OP 与 y 轴重合又有什么变化?

待学生把以上问题一一回答后,教师又把 P 点在第一象限、P 点在第二象限、P 点在 y 轴上等三种情况点清楚后,又在图 2—⑵上作如图 2—⑷的修改,再引导学生继续研究:

P 点坐标为($r\cos\alpha$,$r\sin\alpha$),Q 点坐标为(b,0),PQ^2 = ?学生通过计算后,师生共同整理得

$$PQ^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\alpha。$$

教师又将图 2—⑶改成图 2—⑸那样研究:B 点坐标为($c\cos A$,$c\sin A$),C 点坐标为(b,0)则 a^2 = ?学生思考一会儿回答 $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cdot\cos A$,接着教师追问学生,若 AB 与 y 轴重合即图 2—⑹那样,则∠A = 90°,cosA = ?,而 $a^2 = b^2 + c^2$ ____?学生回答后教师指出 $a^2 = b^2 + c^2$,这个特例就是我们已经学过的勾股定理,时机成熟,教师引导学生分析一下表达式 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 的特征后指出,这就是我们今天要研究的“余弦定理”。在这个过程中,学生的复习温故好似十月怀胎,教师的适时点拨好似助产,由旧知识孕育的新知识就这样顺利地“降生”。

□数学教学中的思维情境设计

国家教委颁发的九年制义务教育全日制初中数学教学大纲(初审稿)在教学目的中提出:初中数学教学中发展学生思维能力主要是逐步培养学生会观察、分析、综合、比较、抽象和概括,能够运用归纳、演绎和类比的方法进行推理,逐步做到简明地阐述自己的思想和观点,注意培养良好的思维品质。在教学中,如何去实现这个目的呢?这里仅就概念、定理、公式等教学中如何发挥教师的主导作用,为学生创造良好的思维情境来谈一些看法。

学生获取新的知识,必须通过自己的思维。良好的情境设计,能为学生铺设思维通道,加速了思维的进展,从而提高教学效率。

湖南省冷水江市教研室张宝菁老师总结在教学中,常用下列的情境设计方法:

1.变静止为运动

有些概念,包含了所属的多个名词,同时还与位置形状有关。如学习“圆周角”这一概念,教科书的定义是:顶点在圆上,其它两边与圆相将交的角叫圆周角。这里有角的顶点位置的规定,还有两边位置的规定,符合这几个条件的角才是圆周角。为了引起学生兴趣启发学生全面考虑问题,可以设计这样一个情境:用两条硬纸片与一个图钉做成一个“活动的角”,分别作下列演示:顶点在圆周内(外),是否为圆周角?顶点在圆周上,当角的两边变化时,什么时候所成的角才是圆周角?

有时,变静为动能够深刻认识定理的内在的变化规律,如在指导学生认识“同位角相等,两直线平行”这条公理时,可以设计如下的教学程序:l_1,l_2,l_3 分别交于 A、B、C 三点,此时,$\angle 2 > \angle 1$,当$\angle l_3$ 绕 A 点转动时,观察$\angle 2$ 与$\angle 1$ 的大小变化规律,同时观察 l_3 与 l_1 的交点 B 的位置变化规律,如下图所示:

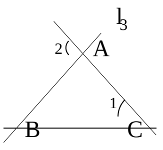


图 1

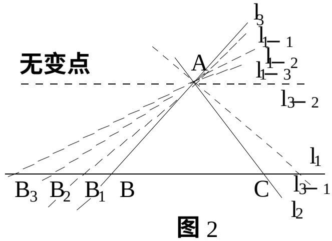


图 2

①$\angle 2$ 逐整减小,B 点向左逐渐远离 C 点;②$\angle 2$ 减小到等于$\angle 1$,B 点在 l_1 上

消失；③$\angle 2$ 减小到小于$\angle 1$，l_3 与 l_1 在 C 的右方相交于 B 点。　变静为动还能揭示相关定理之间的联系，这里就不举例了。

2.集部分为整体

在求线段、角的和时，常常进行集部分为整体的设计。如证三角形内角和定理时，就可用硬纸板作成三角形模型，用拼揍法集三个角为一个平角。下面是较成功的教学设计：

先启发学生用图 3 的方法作出三个角之和，依次提出以下问题：

和角的顶点：①可以是三角形的另两个顶点吗？（图 4）②可在三角形的边上

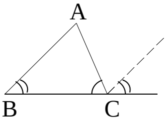


图 3

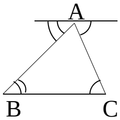


图 4

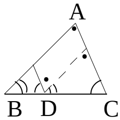


图 5

吗？（图 5）　③可以在形内吗（图 6）

④可以在形外吗？（图 7）

所有这些不同的方法，有什么共同规律？

a.方法：集部分为整体。

b.手段：平移。

c.根据：平行线的同位角或内错角相等。

d.和角顶点位置：可以不定，但以三角形的顶点位置最好。

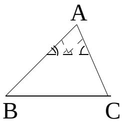


图 6

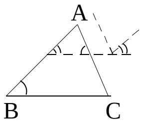


图 7

3.从特殊到一般

从特殊到一般，普遍运用数学的思想和方法。

例如在推导坐标平面内两点间的距离公式时，下面的情境设计是可取的：

先观察图形，由于 P_1 与 P_2 之间的距离一下难以解决，我们从特殊的位置关系开始分析。①如果 P_1、P_2 同在 x 轴或 y 轴上，能求出 $|P_1P_2|$？②如果 P_1 在 y 轴上，P_2 在 x 轴上，能求出 $|P_1P_2|$？（容易想到勾股定理）。③如果 P_1 在第一象限，P_2 在 x 轴，能求出 $|P_1P_2|$？

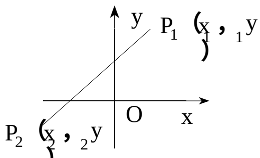


图 3

通过以上三种特殊情况的分析，学生主容易求出坐标平面内任意两点间的距离了。

从特殊到一般的认识过程符合人的认识规律,遵循了循序渐进的教学原则。

4.用图表形式编制学习程序

过点数	圆心位置	圆心个数	半径个数	作圆个数	结论
一点 A	整个平面	无穷多个	无穷多个	无穷多个	不在同一直线上的三点确定一个圆
两点 A、B	AB 的中垂线	无穷多个	无穷多个	无穷多个	
三点 A、B、C、	AB、BC(或 AC)中垂线的交点	可能有一个(三点不在同一直线上) 可能没有(三点在同一直线上)	一个 无	一个 无	
四点 A、B、C、D	AB、BC、CD、中垂线的交点	可能有一个(当 D 在 A、B、C 三点确定的圆上时) 可能没有(当 D 不在 A、B、C 三点确定的圆上时)	一个 无	一个 无	四边形的对角互补时内接于圆

在研究不在同一直线上的三点确定一个圆时,可以用上列图表揭

示规律：

5.制作思维模式

在平面几何的论证题中，现在选用的例题与习题最多只有三步推理，因此，在引导学生思维时，就可利用一些思维的模式，有些可以整理成歌诀。比如

遇等积，变等比，
横找、竖找定相似；
不相似，忍住气，
等积等比来代替。
遇等比，改等积，
使用射影与圆幂；
平行线，换比例，
两端各自找联系。

例如，由平行四边形 ABCD 的顶点 B 任引一直线与对角线 AC 交于 F，与 CD 交于 G，与 AD 的延长线交于 E，求证：$BF^2 = EF \cdot FG$。

分析　要证乘积式，转化为证比例式：

$$\frac{BF}{EF}=\frac{FG}{BF}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB /\!/ CD \Rightarrow \dfrac{FG}{BF}=\dfrac{FC}{AF} \\ BC /\!/ AD \Rightarrow \dfrac{BF}{EF}=\dfrac{FC}{AF} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{FG}{BF}=\frac{BF}{EF}$$

启示　（制作思维模式）

要证$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，可先证$\dfrac{a}{b}=\dfrac{e}{f}$，$\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$。

在其它的命题中，可以得到另一个思维模式：要证$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，可先证$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{f}$，再证 $d=f$。

6.不要只给学生创设优解的情境，还要学生了解问题解答的“难处”　例如对下列几何题的教学，可作如下教学设计：

题目　如图 9，GE 与 HF 将矩形 ABCD 分成三个边长都是 a 的正方形，求证：△AEF ∽ △CEA。（初中《几何》第二册 P67）

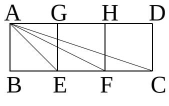


图 9

⑴一个简捷的证明。　只要同学们有一定的观察能力，能找出△AEF 与△CEA 的对应边与对应角，就很容易想到先求出夹公共角两边的长度。用对应角成比例且夹角相等’的定理来证明。

证明　由 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{2}a$。

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{EC}{AE}=\dfrac{2a}{\sqrt{2}a}=\sqrt{2}\\ \dfrac{EA}{EF}=\dfrac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{EC}{AE}=\dfrac{EA}{EF}\\ \angle AEF=\angle CEA\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow\triangle AEF\backsim\triangle CEA$

⑵ **避免谬误的证法。　有同学给出这样证明：**

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{10}a$

$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}a$

$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{2}a$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AC}{AF}=\dfrac{CE}{AE}=\sqrt{2}\\ \angle AEF=\angle CEA\end{array}\right\}$$

$\triangle AEF\backsim\triangle CEA$。

这个证法的错误在哪里？与上面的证法比较，错就错在相等的角不是两组成比例的对应边夹角。

如果一定要用此法证，有什么方法来补救吗？有的，加上一个说明："$\angle AEF$ 与 $\angle CEA$ 相等且都为钝角"就行了。也就是说：如果两个三角形都是钝角三角形或者都是锐角三角形，相等的角不一定是夹角，两个三角形也相似。

⑶ **其它一些好的证法。　如果要证明（除公共角外）第二组角相等，还是有办法的。就是考虑图中线段之间的长度关系，用正弦定理或余弦定理证另一组角相等。若用正弦定理：**

$\triangle AEF$ **中，**$AE=\sqrt{2}a$，$AF=\sqrt{5}a$，**由**

$$\frac{AE}{\sin\angle EFA}=\frac{AF}{\sin\angle AEF},$$

得 $\sin\angle EFA=\dfrac{AE}{AF}\sin\angle AEF$

$$=\frac{\sqrt{10}}{5}\sin\angle AEF。$$

在$\triangle CEA$ **中，**$AC=\sqrt{10}a$，$CE=2a$，**又**

$$\frac{CE}{\sin\angle EAC}=\frac{AC}{\sin\angle AEF},$$

，$\sin\angle EAC=\dfrac{CE}{AC}\sin\angle AEF$

$= \frac{\sqrt{10}}{5}\sin\angle AEF$。

$\angle EAF$ 与 $\angle EAC$ 都是锐角,

, $\angle EAF = \angle ECA$

⑷ 小结

要完成此题的证明。无论用哪种证法,都必须用到三个边长为 a 的正方形组合成矩形图形这一特点,都必须运用图形中一些线段的长度求出相应的另一些线段的长度。否则要想证明此题是不可能的。

还有一些方法如数形结合,设未知为已知,一题多解,一题多变等,都是老师们常常用的情境设计技巧。

以上所述各种情境设计方法,都是从某一个角度提出来的。其实它们之间互相联系,都遵循着教育学与心理学的基本原理。提法不妥之处敬请老师指正。

□数学思维教学及其评价初探

数学“目标教学及其评价”实验对认知、情感目标教学及其评价进行了探索。如何实施智能目标教学及其评价呢?数学教学大纲指出:“数学教学中,发展思维能力是培养能力的核心。”因此,在实验中,湖北省当阳市教研室李宠宇、刘汉义老师从数学思维教学及其评价入手,通过数学思维教学及其评价,不断优化学生的思维品质,提高思维能力,发展智力。

1.数学思维教学及其评价的原则

⑴ 知识教学与思维教学相结合的原则。 数学知识与数学思维密不可分。知识是数学思维的基本要素,是数学思维存在的基础,是数学思维的载体;离开了数学知识,就谈不上数学思维,更谈不上数学思维教学及其评价。

⑵ 连续性与渐进性相结合的原则。 数学是一门逻辑性极强的学科,其知识的内部结构本身有一定的连续性和渐进性,形成由低级向高级发展的阶梯状态。因此,对数学思维教学及其评价必须贯穿初中数学教学的始终,数学思维能力也应随着知识教学的不断深入而逐步形成和发展。

⑶ 导与索相结合的原则。　数学思维教学中，关键是让学生思维。因而学生是教学活动中的主体，教师是主导，通过教师的导，点拨学生的思维火花，让学生自己思维，去主动争当一名探索者；通过师生共同参与的评价活动，使学生逐步形成良好的思维品质。

⑷ 定性评价与定量评价相结合的原则。　对思维教学的评价，以定性评价为主。但根据知识内容和学生思维发展的不同阶段，有时也可用定量评价的方式(如编拟思维能力评估题等)。只有将定性评价与定量评价有机结合起来，才有助于思维品质的优化、思维能力的提高。

2.数学思维教学途径的探索

如前所述，数学教学从某种意义上说是数学思维活动的教学，数学知识是思维活动的结果。

那么，数学教学中如何实施思维教学呢？首先，应该培养学生良好的思维习惯，调动学生思维的积极性；其次，应该教给学生思维的方法，如比较、分类、抽象、概括、分析、综合、类比等，让学生逐步会综合运用这些方法进行有效思维；第三，把思维的教学贯穿于知识品质的目的。应该注意以下几个方面：

⑴ 创设思维情境，注重思维诱导，培养思维的探索性。　思维的探索性即良好的思维习惯，主要体现在是否敢于思维和独立思维。这就要求教师首先应为学生的思维提供空间和时间，注重思维诱导，把知识作为过程而不是结果教给学生，为学生的思维创设良好的思维环境。

①充分发挥学生的主体作用，培养学生独立思维的习惯。如讲分式的基本性质时，教师可以提出以下自学思考：a.分式的基本性质与分数的基本性质是否完全相同？b.教材 P.62 例 1 中，两个等式的右边是如何从其左边得到的？为什么第一小题中有 $c \neq 0$ 的限制？c.学习例 2，试做 P.63 练习 2，想一想所填整式的依据是什么？

②鼓励大胆质疑、释疑，培养学生敢于思维的习惯，教师在教学中应不失时机地提问，并给学生留有思考的余地；对学生经思考回答的问题，正确的应及时给予肯定和鼓励，回答不完善的不应马上否定，而应引导学生"再想一想，把问题回答得更完善或更准确"，以充分保护学生思维的积极性，使学生养成敢于思维的习惯。。

⑵ 理清思维脉络，严密叙述推理，培养思维的正确性。　概念是思维的基本形式，概念的正确理解是思维的基础，而数学思维的发展又

依赖于掌握、应用定理和公式去进行推理、论证和演算。因而在理解掌握概念、定理、公式的同时，能正确表述（包括文字语言和符号语言），并用它们进行严密的推理，做到步步有据是正确思维的前提。

如$\sqrt{a}$ $(a>0)$表示 a 的算术平方根，那么求 a 的平方根和计算$\sqrt{a}$ $(a>0)$是否一回事？$\sqrt{a^2}$、$|a|$、$(\sqrt{a})^2$ 之间有何关系？如果没有对概念的透彻理解，思维将处于混乱状态。

如果说对概念、公式、定理的理解和正确而严密的表述是正确思维的前提，那么清晰明确的思维脉络则是正确思维的保证。因而培养学生思维的顺序性显得非常重要。

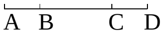


图 1

例如，如图 1，B、C 是线段 AD 上的点，那么由 A、B、C、D 构成的线段的总条数是多少？解决这个问题，首先是对线段概念的理解，然后是确立线段的总条数，先得从 A 数起，点 A 和其他三点构三条线段，再从点 B 数，点 B 和其他两点构成两条线段……这样有序地数，便可不重不漏，正确得到线段的总条数。掌握了这个顺序性后，再把问题加深：如果线段 AD 上有 10 个点、n 个点，组成的线段共有多少条？把问题变式：如图 2，三条直线 l_1、l_2、l_3 交于点 O，图中对顶角有多少对？这样，既训练了学生按顺序思维的方法，又培养了学生的观察能力。

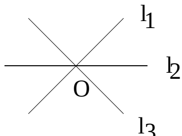


图 2

⑶ 克服思维定势，注重多向思维，培养思维的灵活性。　在思维和解题过程中，应该总结某些题的常规解法，做到遇到问题有“法”可循，有“路”可行。但有些学生往往忽视知识的灵活运用，受某些方法的局限，形成一定的思维定势，影响思维的灵活性。因而教学中应设法克服学生的某些思维定势，注重多角度思维，培养学生思维的灵活性和全面性。

例如，设 $a\neq b$，$a^2=3a+1$，$b^2=3b+1$，求 ba^2+ab^2 的值。如果按常规解法，先解一元二次方程，分别求出 a、b 的值，然后代入 ba^2+ab^2，计算将很复杂。如果采用逆向思维，逆用方程根的定义，便可得到简便解法：因为 $a\neq b$，所以 a、b 是一元二次方程 $x^2-3x-1=0$ 的两个根，所以 $a+b=3$，$ab=-1$，所以 $ba^2+ab^2=ab(a+b)=-3$。

⑷ 抓住问题本质，挖掘隐含条件，培养思维的深刻性。　有些学生解题时，往往抓不住问题的实质，对问题中的某些隐含条件挖掘不出来，思维仅处于较浅层次。教师在引导学生思考时，应注重问题本质的分析。通过逐层分析，挖掘隐含条件，揭露问题的实质，培养思维的深

刻性。

⑸加强对比联想,引导一题多解,培养思维的广阔性。　在教学中,教师应多结合教材内容,从新知与旧知、本类与它类、纵向与横向等方面引导学生展开联系、弄清知识之间的联系,以拓宽学生的知识面,开拓学生的思维。

在教学中有意识地引导学生一题多解,让学生用不同的思路、方法来解,有利于培养学生思维的开阔性。

例如,如图3,D为BC的中点,E为AD的中点,求证:$FA=\frac{1}{2}FC$。

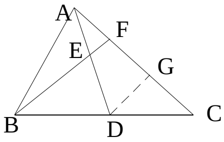


图3

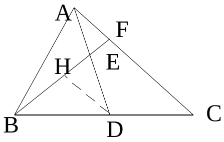


图4

证法1:取FC的中点G,连结DG,两次运用三角形的中位线定理得证。

证法2 如图4,过D作AC的平行线交BF于H,证$\triangle AEF\cong\triangle DEH$,然后用三角形的中位线定理而得证。

证法3 如图5,延长ED到M,使DM=ED,连结CM,证$\triangle BED\cong\triangle CMD$,得$BE\parallel MC$,再根据平行线分线段成比例定理而得证。

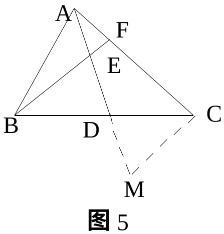


图5

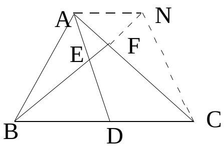


图6

证法4 如图6,过点A作BC的平行线,与BF的延长线交于点N,连结NC,证四边形ADCN为平行四边形,再证$\triangle AEF\cong\triangle CNF$,通过相似比使结论得证。

以上通过多种辅助线的作法,得出不同的证题思路。

⑹注得一题多变,加强思维发散,培养思维的创造性。　数学思维的创造性是思维品质的最高层次,只有多种品质协调一致发生作用,才能有助于创造思维能力的培养。教学中,应有意通过一题多变,一题多答等具有发散性的题型进行训练,培养学生思维的创造性。

如学习了一元二次方程后,设计一题:在方程$4x^2+4kx+2k-1=0$中,k为任

意实数，方程有无实根？

接着可将问题做如下变化：

①若方程有两个相等实根，求 k 的值；

②若方程的两根互为相反等，求 k 的值；

③若方程两根的绝对值相等，求 k 的值；

k 为何值时，方程两根都为负数？

又如，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，E 为 AB 的中点，$EF \perp CD$ 垂足为 F，且 $EF = \frac{1}{2}AB$。根据这些条件，你能得出哪些结论？

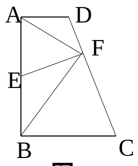


图 7

学生根据已有的知识，经过推理判断，可以寻找相等的线段、相等的角、相似的三角形，等等。

3. 数学思维评价策略的把握

如前所述，对数学思维的评价，应贯穿在整个知识教学中，并适时、有机、有效地进行评价。通过评价，及时排除思维中的障碍，优化思维品质，达到提高思维能力的目的，评价主要从以下几个方面入手：

⑴ 抓思维习惯的评价，强化思维意识。　对思维习惯的评价，一般采用定性评价，常以他评、师评为主。教师或通过观察，或通过提问，评价学生是否具有思维的习惯。如在学习了有理数的加法法则后提出如下问题：两个有理数的和是否一定大于每一个加数？不善于思维的学生会想当然地说“是”；而有良好思维习惯并善于思维的学生则回答“不一定”。此时进一步鼓励学生思维，举出一两个反例加以说明，既巩固了有理数加法法则，又强化了学生的思维意识。

⑵ 抓思维发展方向的评价，促进思维方法的掌握。　这一过程主要在思维开始或初期进行，它对思维活动的进程起控制作用。评价可采用师评、他评、互评的方法，通过评价，教师及时了解学生解题思路的正确与否，有利于及时排除学生的思维障碍，促进思维方法的掌握。

如在复习因式分解时，先让学生分解因式 $2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1$。学生往往习惯于将此式按两项一组或三项一组分组，结果分组后没有新的公因式可提，也不能运用公式，使分解不能进行下去，思维受阻。教师根据反馈的信息及时评价，正确引导，学生排除了思维障碍，找到了如下分组方法：

①$2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1$

$=(2x^2+3x+1)+(-3xy-2y)+y^2$

②$2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1$

$=(2x^2-3xy+y^2)+(3x-2y)+1$

③$2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1$

$=2x^2+(3x-3xy)+(y^2-2y+1)$

分组正确了，再用十字相乘法，问题就好解决了。

(3) 抓思维过程的评价，优化思维品质。 思维的开始或初期（解题、证题的分析）确定了思维的方向（或解题思路），而解题方案的实施并不是简单的程序操作，而是在新的思维不断产生的过程中向最终目标逐步接近的过程，直至达到目标。这一过程，将思维的全部过程暴露无遗，对这一过程实施有效的评价，可以发现思维过程中的问题，培养、优化思维品质。

例如，证明梯形的中位线平行两底，并且等于两底和的一半。

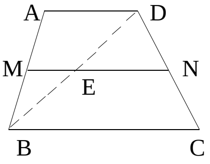


图 8

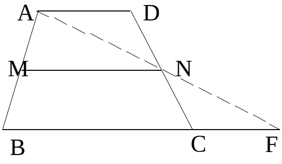


图 9

已知梯形 ABCD 中，$AD\parallel BC$，$AM=BM$，$DN=CN$，求证 $MN\parallel BC$，$MN=\frac{1}{2}(AB+BC)$。

思维发展方向：设法利用三角形中位线定理。

思路 1 连结 BD，取 BD 的中点 E。

M 是 AB 的中点，N 是 CD 的中点

，$ME\ \underline{\parallel}\ \frac{1}{2}AD$，$NE\ \underline{\parallel}\ \frac{1}{2}BC$（三角形中位线定理）。

，$MN\parallel BC$，

$MN=ME+NE=\frac{1}{2}(AD+BC)$。

思路 2 连结 AN 并延长交 BC 的延长线于点 F，

$AD\parallel BC$，，$\angle ADN=\angle FCN$。

又 $DN=CN$，$\angle DNA=\angle CNF$，

，$\triangle ADN\cong\triangle FCN$。

，$AD=FC$，$AN=FN$。

又 M 是 AB 的中点，，$MN\parallel BF$，$MN=\frac{1}{2}BF$

$=\frac{1}{2}(BC+FC)=\frac{1}{2}(AD+BC)$，

即 $MN\parallel BC$，$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$。

仔细分析两种思维过程，发现思路 1 忽视了点 E 是否在直线 MN 上，思维存在缺陷，解决的办法是证明 M、E、N 共线；思路 2 正确。

⑷ 抓思维结果的评价，发展思维能力。　解决一个问题，就是完成了思维的一个轮回。但问题的解决不等于思维的结束，还应对思维的全过程进行反思。对思维结果进行评价，一方面可考察思维结果是否可靠，另一方面可以看思维过程的优劣与否，是否还有更优的思维途径。

例如，已知 a、b 是方程 $x^2+2\sqrt{2}x+1=0$ 的两根，求 $a-b$ 的值。

解： $a+b=-2\sqrt{2}$，$ab=1$，

$$, \quad a-b=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$$

$$=\sqrt{(-2\sqrt{2})^2-4}=2。$$

这个结果是否可靠？分析一下，由于 a、b 的大小没有指定，因而 $a-b$ 的正负不能确定。问题出在对算术平方根的意义理解不透，没有掌握分类讨论的思想。

对思维过程及结果的评价，我们还通过思维能力测试题，定期对学生的思维能力实施评价，考察学生思维的发展水平。

理解在数学学习中的发展过程

学生学习数学，不仅要通过感知认识事物的表面现象和外部联系，获得感性认识，而且要在感性认识的基础上，通过理解，逐步地达到对数学的理性认识，这是学生数学学习过程中的一个中心环节。上海市普陀中学陈惠民老师研究认为学生对所学知识的理解经过初步理解、确切理解和深刻理解三个阶段。

1.初步理解

初步理解是理解的初级阶段，它是在感知的基础上获得的。这是比较粗糙的，不很精确的，低水平的理解，是进一步深入理解的基础。在数学教学中，怎样才能使学生获得对数学知识的初步理解呢？

⑴ 借助丰富的感性材料，帮助理解。　理解总是以已有的知识、经验为基础的。在数学教学中，教师向学生提供足以说明有关知识的

丰富的感性材料,有助于学生对数学知识的初步理解。向学生提供这类感性材料,一般是在概念或定理引入时最多。例如,在讲过"一元一次不等式组及其解法"时,可从实际出发,一开始就提出问题:"某校选拔业余艺术学校学生,规定报名者年龄不超过 15 岁,又要不少于 8 岁,问有几种年龄是合适的?"这时,由于从学生熟悉的事情出发,他们自己得出了$\begin{cases} x\geqslant 8, \\ x\leqslant 15 \end{cases}$的表达式。这个式子反映了不等式组、不等式组的解集以及解法的背景,对于初步理解一元一次不等式组及其解集的定义,无疑是有一定意义的。

⑵ 创设合适的问题情境,促进理解。　我们知道理解的主要心理依据是思维,没有思维是没有理解的,而思维总是从问题开始的。在数学教学中,合适的问题情境,应该具备两个条件:一是和学生已有的知识、经验有联系,学生有条件、有可能去思维和探究;二是要有新的要求,使学生不能简单地利用已有的知识、经验去解决。这样才能使学生面临一种似乎熟悉,但又一下子找不出解决问题的方法和手段的情境之中。这时学生就有一种不可遏止的跃跃欲试的求知欲望,促进他们去思考,去理解有关的知识。例如,在教学"圆"的概念时,有这样一个片断:教师:为什么车轮要做成圆形的?学生:(一致回答)能滚动呀!教师:为什么不做成正方形的呢?学生:因为正方形不能滚动。教师:为什么不做成"扁圆"形呢?这种形态也能滚动呀?经过实例引发,学生就由"能滚动"进入到"滚动得平稳",便从新认识水平上,用圆上任一点到定点(圆心)的距离来加以解释了。这就为初步理解圆的定义创设了一个合适的引人入胜的情境。

2. 确切理解

确切理解是在初步理解的基础上进一步深入全面理解的阶段。在这一阶段中,学生通过分析、综合、抽象、概括等思维活动,理解数学知识的本质和规律,达到对有关概念和原理的精确而清晰的认识。促进确切理解的主要方法是:

⑴ 抓要点,抓本质。　如学习"正弦函数"这一概念时,涉及到比的意义,角的大小,点的坐标,距离公式,相似三角形和函数概念等知识,而"比"是这一概念的本质特征,必须紧紧抓住。

⑵ 举反例,抓变式。　一般地说,准确地理解数学知识,从正面阐述是很重要的,但为了更确切地理解这些知识,还应该在正面理解的基础上,再从反面或侧面去剖析它。在数学教学中,要经常通过举反例逐渐使学生对所学知识有确切理解。所谓抓变式,就是变换同类事物的

非本质特征，突出其本质特征，从而更确切地理解知识的本质。

3.深刻理解

深刻理解是高层次、高水平的理解，要求学生对数学知识的理解达到融会贯通能运用的程度。促进深刻理解的主要方法是：

(1) 抓对比和联系。 例如，为了深刻理解二次三项式、一元二次方程，一元二次函数和一元二次不等式的知识，必须在分散学习的基础上，将它们贯通起来对比学习，特别要通过数形结合，把握它们之间彼此渗透和互相转化的内在联系，以达到对“四个二次”的深刻理解。

(2) 抓灵活运用。 知识的运用，既是对是否理解知识的一种检验，又是深入理解知识的必经之路。

例如，求证方程 $(x-a)(x-a-b)=1$ 有两个实根，并且其中一个根大于 a，另一个根小于 a。对于这道题，多数学生只会借助判别式和求根公式加以证明，只有少数学生能将其转化为二次函数加以证明。这说明要深刻理解决非一朝一夕之功，必须不断地灵活运用知识才能学有所成。

理解的思维本质与数学教法

“理解”的通常意义是“懂得”、“明白”。

教师教的内容让学生理解是教学的初步要求，也是教师进一步发展学生的技能和技巧以及进行各种能力培养的基础。山东济宁教育学院哈家定老师研究了“理解”的思维本质，对指导教法的实施，在教学上具有重要意义。

数学教学把数学知识中的概念和规律通过适当的教法揭示出来作用于学生的思维，学生在主动思维过程中，通过大脑特殊而又复杂的运动来反映这些概念或规律，并把它们保存下来。这种保存可以是理解的，也可以是不理解的。不理解的保存就成为通常说的“死记”。在数学教学中死记是不可取的。因为数学的价值在于灵活地运用概念和规律去解决问题，而死记则不能灵活支用。当然，直接地、机械地套用是可能的，但作为学数学的目的来说，则是意义不大的。而理解的保存是对概念和规律(定理、公式、法则等)在某种深度上达到本质的理性认识的记忆，因此才有可能用这种本质的认识去观察问题，用理性的认识去分析问题、解决问题。

对于教师的教，当学生表现为理解时，其思维状态究竟是怎样的？

这种思维状态通常有以下两种：

1.学生已具有某种经验或某些初步的知识，即学生在大脑中已经有某种感性认识（即使不那么条理，那么明朗）或与新知识有关的初步认识，当教师提出某种新知识内容时，与学生已有的经验或已有的某些初步知识吻合，于是学生表现为理解

如在初中讲绝对值的概念，教师用某人从某点开始向东走若干米与向西走若干米来说明他的运动既有方向又有距离，当不考虑方向只考虑距离时，这个距离就叫做向东走若干米或向西走若干米的绝对值。这里谈到的运动，其中所包含的数学思考和抽象出的数学概念是学生的经验中曾经有过的。虽然他们不曾条理地、明朗地想过这个问题，但这种体验是他们十分清楚的，和他们的感性认识是一致的，于是他们对教师的讲解感到“明白”和“理解”。而且这种经验愈丰富，感性愈强烈，“明白”和“理解”的感觉就愈强。反之，则会产生相反的效应。

2.学生已具有某种思维能力（如推理能力、抽象能力、概括能力等）

尽管这种能力对不同年级的学生来说，差异很大，当老师提出某种新知识内容时，与学生通过这种思维获得的结果是一致的（学生的这种思维过程通常是在无意识的自然状态下进行的），于是表现为理解。

如在初中讲“减去一个数等于加上这个数的相反数”这条法则时，采用具体数字利用加减关系来说明（如教师提出要计算 $(+3)-(+5)$ 是多少，就是求 $+5$ 与什么数相加等于 $+3$。因为

$$(+5)+(-2)=+3,$$

所以 $$(+3)-(+5)=-2,$$

但 $$(+3)+(-5)=-2,$$

所以 $$(+3)-(+5)=(+3)+(-5)$$

然后再结合其他例子进一步概括出一般法则），与学生的推理认识和抽象概括的结果是一致的，因而对教师的教就感到“明白”和“理解”。

上面的论述说明，教学中学生表现出的“理解”，其本质时教师所教内容（相对学生来说是客观的刺激）与学生大脑中出现的神经联系（相对学生来说是主观的思维运动）相一致的思维反映。

弄清楚这个本质对我们的教学是有重要启示的：

1.概念或法则的教学应尽可能引起学生已有感性认识的共鸣

这些感性认识可以是学生熟悉的事实，也可以是他们有过的经历或他们感兴趣的事情。因为这样不仅容易引起他们的思想与教师所教内容的共鸣，而且可以增加师生间的感情色彩，从而进一步使思想上的共鸣强化。

例如关于有理数加法法则的教学,教师用下列算式:

$(+2)+(+3)$,$(-2)+(+3)$

$(+2)+(-3)$,$(-2)+(-3)$

$(+2)+0$,$0+(+3)$,$(-2)+0$

$0+(+3)$,$0+0$

结合这样的事例:咱们班与其他班比足球,正数表示赢球的个数,负数表示输球个数,零表示双方都未进球;被加数表示上半场的输赢球数,加数表示下半场的输赢球数。显然,全场的输赢球数要把它们加起来。用这种例子来教,比用工厂的盈利、亏损更接近于学生的实际体验,也比用物体前进后退更有感情色彩。由于学生对足球比赛的兴趣,尤其是对本班的比赛具有深厚的感情,因此会以极高的主动精神来计算结果,从而有利于归纳发现有理数加法法则。

2.规律(定理、公式、法则)的教学要与学生的思维进程同步

教师在规律教学中要善于把握学生的思维进程,创造条件,引导学生的思维随着规律的教学内容的逐步深化而深入进去,使他们犹如进入出神入化的境地。当学生的思维运动控制在对知识认识的发展中时,才能使他们的思维能动性得到充分地发挥,不仅显示出已有思维能力在促进理解上的效应,而且在理解的反作用下也使相应的思维能力得到发展。

例如初中几何多边形内角和的教学:它的推导通常是在平面上适当选取一点 O,其位置的取法常有三处:①在多边形内;②在多边形边上;③在多边形角顶。

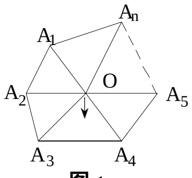


图 1

从深化理解、培养能力的角度,对教学作如下处理,可使三种位置的选用变得思路清晰、进程分明,却又揉为一体:

首先取 O 点在多边形内,由 n 个三角形内角和为 $n\cdot180°$ 并认只到共中不属于多边形内角的那些角之和为 $360°$,从而得到凸 n 边形内角和等于 $n\cdot180°-360°=(n-2)\cdot180°$

然后,教师引导学生把思维发展下去:是否还可选 O 在其他位置?当把 O 点向下移动时,让学生观察图 1 中 OA_3A_4,由于 O 的移动而逐渐消失,得到图 2,由此清楚地理解到三角形少了一个 成为 $n-1$ 个三角形,使这个难点成为十分必然的结果。(进一步的分析,由上面结果自然启发,发现这里不属于多边形内角的这些角之和为 $180°$,从而得凸 n 边形内角和等于 $(n-1)180°-180°=(n-2)\cdot180°$。)

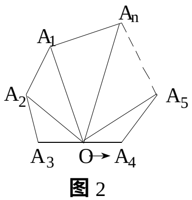


图 2

最后再把 O 点向右移,让学生观察图 2 中的 $\triangle OA_4A_5$,由于 O 的移动而逐渐消失,得到图 3。于是十分清晰地理解到三角形又少一个,成为 n - 2 个三角形 (进一步的分析即得凸 n 边形内角和就是这 n - 2 个三角形的内角和,$(n-2)\cdot180°$)。

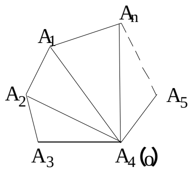


图 3

于是对三种不同位置的 O 点,都分别推出了同样的结论,不仅使学生对结论的理解愈加深刻,而且对 O 点的选择也彻底消除了神秘感。

3. 解题教学要充分考虑学生的思维障碍并帮助排除

解题是概念、规律、应用三者的结合。除极简单的题外,在这个过程中对知识将形成综合性的理解并产生深化效应。因此解题过程将会使学生在理解上出现飞跃。但学生的这种思维起飞和飞跃过程往往存在某些障碍,它们有的是经验性的,有的是知识性的,有的则是能力性的。从教学的角度来说,应该考虑题的难点所在,学生的基础知识和能力水平等状况,既可以在解题教学的过程中对逐步展现的障碍引导学生分散地加以克服,也可以在解题之前对可能出现的特殊情况、知识欠缺或能力不足用适当方式帮助学生了解可能出现的特殊情况、获得那些必须的知识或提高某些相反的能力,然后让学生在解决问题的过程中,自己去发现障碍并加以克服。

例如对这样一道题:

一个整数如果是 2 的倍数,那么它与比它小的最大整数的平方差与 1 的和必定是几的倍数?如果这个整数是 3 的倍数呢?4 的倍数呢?你能发现什么规律吗?作出你的研究。

这是一道适合初中学生研究并具有培养学生探索能力功能的开放性题。但它的培养功能只有在学生独立研究时 (而不是老师讲学生听) 才能得到有效地发挥。为此,在解题前教师就应引导学生正确理解题意 (各词语的含意),帮助排除关于倍数的知识障碍和启发发现规律的观察点等,然后让学生独立地去研究。

教师 我们先来考虑几个基础知识:

1. a 与 b 的平方差怎样表示?

学生:a^2-b^2。

教师:a 与 b 的平方差与 c 的和呢?

学生:a^2-b^2+c。

教师 好!2. 比整数 a 小的最大整数是什么?举例说明。

学生思考,指定回答 (首先让差生回答,然后其他),回答若有错误,就对“比它小”、“最大整数”的含义进行启发。

学生:$a-1$。如比 5 小的最大整数是 4,就是 $5-1$。

教师:很好!3.一个整数是 2 的倍数,这个整数的一般形式是怎样的?

学生:$2n$(n 为整数,下同)。

教师:对!反之我们知道形状为 $2n$ 的数必定是 2 的倍数。一个整数是 3 的倍数,这个整数的一般形式是什么?

学生:$3n$。

教师:反之,$3n$ 形式的数必定是什么数的倍数?

学生:必定是 3 的倍数。

教师:很好!我们已经发现这里考虑和观察的关键是 n 的系数。你能把我问的这个问题推向一般吗?用"一个整数是整数 k 的倍数"来考虑。

学生:一个整数如果是整数 k 的倍数,这个整数的一般形式是 kn,反之,kn 形式的数必定是 k 的倍数。

教师:好,同学们自己来研究一下上面这道题。

教师巡回,对学生的问题只作启发,不作结论式的直接回答。最后让一名学生把正确解答写在黑板上并讲述自己的思考过程。

略解:$(kn)^2-(kn-1)+1$

$=k^2n^2-(k^2n^2-2kn+1)+1=2kn$,

所以一个整数如果是 k 的倍数(k 为整数),那么满足题意的数必定是 $2k$ 的倍数。

□数学知识的发生过程与数学思维训练

数学教学不仅是传授现成的数学结论,数学教学是数学思维活动教学。教学的价值不仅局限于帮助学生获得和记住书中的知识,要有助于思维的训练与认识能力的提高,这就得研究知识发生的思维过程,即是怎样提出问题、想出问题和解决问题的,又是怎样把获得的知识引伸、发展和应用的。传统教学方法往往只注重知识结论的传授,忽视了知识获得的过程,往往偏重于逻辑思维的推理论证能力的训练和整理性思维,忽视了学生形象思维的探索能力的训练和归纳性非论证的思维。要改变这种状况就要求我们增加思维教学的透明度,准确深刻、鲜明生动地再现数学知识的发生过程。在数学教学过程中,教师的思维是要把学生的思维过渡到科学家的思维(科学、正确、符合客观规律的思维方法),暴露获得知识过程中的正确或失误的思维过程,这是现代数学教学理论与方法共同特点。

再现数学知识的发生过程,对于数学概念定义,法则、公式、定理的

教学，如果照搬课本教学程序，只停留在现成知识的传授、满足于结论的证明，不注意引导问题提出的过程，不注意思路产生过程和修正偏差或改正失误的过程，只能使学生知其然，不知其所以然。正如学生所反映那样，我们的数学老师，“列方程总是胸有成竹，添设辅助线总是马到成功，演算证明总是简捷又灵巧。”造成了一部分学生“一听就懂，自己一作就不会”的不良后果。其原因就是教师没能做到“心理换位”，即站在学生立场和角度来展现思维的过程，要让学生产生新原始思维过程，使学生获得发现的欢乐、产生学习兴趣和求知欲望，还要使学生意识到知识发生过程中，所反映的重要的数学思想和方法，并为知识的应用打下厚实的思想方法的基础。从根本上改革旧的数学教学的传统的模式，提高学生学习能力和数学素质。

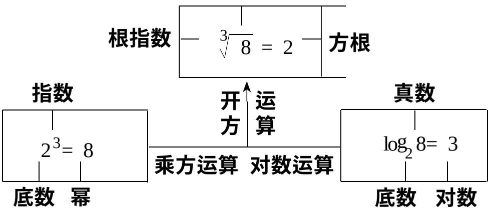
为此，揭示数学知识发生的思维过程，北京教育学院宣武分院陈在瑞老师总结应充分体现以下的几个方面：

1.问题的提出过程

“问题是思考的开始”，问题的提出是数学教学中首要的一环，使学生明确学习内容的必要性，才有可能调动学生解决问题的主动性，促进学生认识能力的提高与发展。在教学中一方面要揭示所提出问题的背景和来龙去脉，这里包括历史上遗留下来问题，理论上提出的问题，生产和生活中要解决的实际问题。另一方面，精心设计问题的教学情境，造成学生认知上的冲突，以利激发他们分析问题、解决问题的积极性和主动性，并启发、引导学生探索解决问题的途径，是学生理解和掌握数学知识的开始，是认知过程的起点。

例如，对于对数概念与运算问题的提出可以设计下列教学的情境：

先考虑 $a^b=N$ 的定义的几种运算。



⑴ 已知 a，b 求 N，可以用乘方运算，结果 N 称之为幂。

⑵ 已知 N，b 求 a，可以用开方运算，结果称之为 N 的根。

从数学理论本身出发，我们自然要提出第三种情况，即

(3) 已知 a,N 求 b,这是什么运算?结果又是什么?这就要求再重新定一种新运算,称之为对数运算,结果 b 称之为以 a 为底的对数。

如果我们把三种运算加以比较,又可发现它们之间的关系,

再提出同底数幂的指数运算与同底数的对数运算的共同特点是什么?即均是底数不变,指数运算比幂的运算和对数运算比真数运算降一级运算。如

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

$\log_a(N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$。

对于生产和生活中实际问题,学生看得见,摸的着,有的还亲身经历过,所以,当教师提出这些问题时,他们都跃跃欲试,想学以致用,这样能起到充分调动学习积极性的作用。

在讲"正多边形和圆"时,提问:正多边形有无数种,哪些正多边形可以用来设计美术瓷砖铺地坪呢?即无空隙铺满地面的条件是围绕每一公共顶点 P 的各角之和等于 $360°$,通过计算得出,只能使用正三角形、正方形和正六边形三种。又如讲数系扩充过程,既可例举实际测量过程需要,又可例举满足运算的必要性,等等。

创设课堂教学中问题情境的方法是多种多样的,教师应根据具体情况和条件,紧紧围绕教学中心和学生的思想实际,从实践和理论上设置出富有吸引力的问题的情境。

2.概念建立的过程

数学概念建立过程中主要表现为两种形式,即概念的形成与同化的过程。

所谓概念形成是人们对客观事物的反复感知和进行比较,分析、抽象、概括出一类事物关键的本质属性的过程。这个心理过程是以学生的直接经验为基础,通过各种例证的分析,经历由表及里,由部分到整体,由具体到抽象以及辨别、类化、形式化,归纳概括出一类本质属性从而形成数学概念。

概念同化是以间接经验为基础,是利用已经掌握的概念去学习新概念,或修改、改造旧概念使之适应新的需要的过程。概念同化学习需要概念本身具有逻辑意义,同时具备同化新概念所需要的知识经验。概念同化学习的心理过程往往经历定义、分类、同化、辩论、强化的过程。

概念形成与同化是学习数学概念的两种主要方式,虽有区别,但在数学概念教学中都不能单纯用某一种方式,应当互相补充,把两种形式

结合起来综合使用。

例如,负数概念引入,可以从相反意义量的实际例子引出,还要从对加法的逆运算理论上需要引出负数概念,这样便从理论上认识负数概念引出的必要性。

又如,空间上“距离”的概念形成与同化是以“最短”和“唯一”的长度为依据,建立两点间距离的概念,延伸发展到点到线、点到平面的距离以及异面直线的距离概念,另外,还包括平行线间距离,平行线面距离的概念,等等。

再如,绝对值概念的建立过程中,在数学上也是体现形成与同化相结合的过程,具体反映出绝对值概念教学的阶段性与发展性,经历了螺旋式的深化理解:

先用几何模式中“长度”,“距离”在数轴上建立有理数范围的绝对值概念,如$|\pm 3|$进而用字母表示数的绝对值,深化数的绝对值概念,即$|a|$;第三次算术根范围出现绝对值概念,即

$$\sqrt{a}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases};$$

第四次,引进直角坐标系后,两点间距离公式,即对$A(a,b)$,$B(c,d)$,

$$|AB|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2};$$

第五次引进复数模的定义,即

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}。$$

上述例子说明在建立概念的过程中,最好把概念的形成和概念的同化结合起来,以达到既能了解形成概念背后的丰富事实,又能促进新概念和原认知结构中知识的联系的目的,使概念教学不仅解决“是什么”的问题,还要解决“是怎样想到”的问题,以及有了这个概念以后又是如何建立、发展理论的问题,把概念的来龙去脉和历史背景弄清楚。所以,在概念教学中,概念阐明要明确其内涵与外延。对概念理解要多用正、反例证和形式的变化,运用概念要与定理、解题教学溶为一体,巩固概念要注意在运用中整理总结,形成概念系统。

3.命题的探究过程

所谓数学命题的探究过程,在这里是指的两个方面:一是定理的发现与导出的过程,二是证明的思路探索与推理论证的过程。关于定理、公式的传统教学,往往把数学定理的发现、证明的思路的猜想和证明方法的尝试、选择、评析全然不见了,给人以一种假象:数学是一种人造的完美规则系统。这种完美的形式在一定程度上颠倒了数学发现的过程,掩盖、湮没了数学发现、数学创造、数学真实应用的思维活动,如果教师照本宣科式的,把定理内容公布于众,塞灌给学生,无疑将会抑制

学生的探索、发现、创新思想,阻碍学生思维的发展和能力的提高,学生得到的仅仅是死的数学知识。

数学定理的教学应是“发现定理、寻求证明、作出证胆、运用定理”的思维活动过程的教学,而不是再现和熟记现成的证明教学。斯托利亚认为:“我们必须先发现定理然后再去证明它,我们应当先猜测到证明的思路然后才能作出证明。”要为学生设置发现的情景和环节,引导学生弄清定理的来源,反映数学的创造和建立的过程。

定理的导出教学应该从特殊到一般,从具体到抽象经过两种途径:一是在众多的特例中运用不完全归纳法抽象概括而成,诸如,引导学生归纳发现一元二次方程的根与系数的关系,即让学生从特殊具体的例子探索发现一般一元二次方程 $ax2+bx+c=0$ 的两根 x_1,x_2 的规律

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1\cdot x_2=\frac{c}{a},$$

进而再让学生叙述定理和推演证明,并在运用中让学生自己归纳总结定理的功能和用作;二是从理论体系需要,经归纳演绎、逻辑推理导出的。例如,从三角形内角和的规律的发现,经归纳演绎推理导出多边形的内角和的性质以及三角形的外角和和多边形的外角和。还可以启发引导,鼓励学生新的探索从发现多边形的外角和去推导出多边形的内角和的性质等。

关于定理的导出教学,其目的在于培养学生类比归纳,探索发现规律的能力。通常使用教学方法与手段有以下几个方面:集部分为整体、变静止为运动、由特殊到一般、从具体到抽象、由实验想模式、从联想促猜想。

寻求命题的证明,首先要分清定理的条件和结论,要证明命题是什么,是怎样叙述的,还有没有另外叙述方法;条件和结论各包含哪些事项,明晰已知什么,求证什么,它们的关系怎样。其次,要思考由什么样的前提才能推出待证的命题,在给定已学过命题(定义、公理、定理)范围内可以推出这个命题。利用综合法寻求证明的起点比较困难,借助分析法,利用“倒推”的方式容易找到证明起点。在寻求证明的思路过程,更常用是从已知条件和求证结论双管齐下,进行边分析,边综合找到证明途径中连接点(已学过的定义、定理、公理或过去类似证明的方式方法等)。再次,弄明白证明中的逻辑结构和所用的推理规则,作出

的证明要清楚、简明，并进行评价分析，深化数学思想方法。最后还要注意定理的延伸推广、功能和用途、应用范围和条件，与其它知识关系，创设一系列教学情境，让学生主动探索，发现新的问题。

4.解题思维的展现过程

解题教学中要注意使学生独立思考、标新立异，学会怎样分析、怎样判断、怎样推理、怎样选择方法、怎样解决问题。教师不仅要按思考成熟的方法讲解，还要把自己猜测的心理活动坦率地告诉学生，这样做必将有利于学生的想象能力、直觉思维能力的培养和灵感的产生。在展现解题思维过程中，要注意以下几个过程的体现：

⑴ 展现思路形成的过程。　把解题思路形成的过程、暴露、展现出来，使学生思维与教师思维产生共鸣，使教师思维为学生思维过渡到科学家思维架设起桥梁，变传授过程为发现过程，留给学生不再是“魔术师”式的表演，而是创造的教育与实践。

⑵ 尝试探索发现的过程。　平时学生在课上看到听到的多是一帆风顺的例子，但是亲自动手解起来却很少马到成功。我们把失败过程端出来，再把失败到成功过程端出来，从反思中使学生看到转变思维的方向、方式、方法与策略，诸如从特殊到一般、从具体到抽象、从正向到反向、从纵向到横向、从静到动、从实验到模型、从类比到迁移、从归纳到猜想，等等。缩小探索范围，尽快获得发现的成功。这在发展思维能力上无疑是一种很好体验和进步。

⑶ 方法选择优化过程。　在解题过程中要注意遵循思维规律，重视数学思想方法的传授，揭示选择与优化的过程的重要体现：

①反面设问、渗透反证法思想。及时渗透反证的逆向思维意识，多用“为什么？”“假如……就……”，“举个反例”等入手，通过一系列反面设问，让学生从不同角度看问题，看清问题的本质，针对具体问题选择适当的数学方法解决问题。

②重视图形，渗透数形结合。渗透和运用数形结合的思想方法，可帮助学生从具体形象向抽象概括思维过渡，反过来又对客观形象的认识更加深刻、更加完整。以利“数促形，形帮数”的转化，更加明快，简捷地解决问题。

③纵横沟通、渗透化归思想。数学知识的系统性、相关性，培养用整体观念来观察问题，并沟通知识之间联系，合理地运用化归思想，转

化问题的形式，优化解题过程。

④理解掌握具体的数学方法。数学思想是数学方法结晶，是相应方法的精神实质和依据。方法是思想的体现，是有关思想的技术手段。这包括重要思维方法，如分析综合法、观察试验法、递推归纳法、比较分类法和函数思想方法，还有常用工具方法，如配方法与分解法、消去法与换元法、参数法与变换法、面积法与体积法、待定系数法与判别式法等，理解领会、熟悉掌握这些具体方法，有利于学生对解题方法的选取与优化解题的过程。

⑷暴露解题偏差纠正过程。　在解题教学中有这样的情况，尽管教师屡屡疾呼，某某地方应当特别注意，但学生依然频频出错，如果能够构造一些简单生动、击中要害的反例，把纠正偏差过程暴露出来，或解后反思即时反馈给学生引导自我检测与修正，并揭示产生错误的原因或失败的教训。我们在教学中强调了 $\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta$。但在练习或考试中还常出此类错误。可举一反例：$\sin(30°+60°)$ 的值等于 $\sin30°+\sin60°$ 的值吗？并指出产生这种错误原因是把数的乘法对加法的分配律错误运用到三角函数运算法则中去。

又如，若 x_1，x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的两根，求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值。尽管教学中反复强调要保证一元二次方程有实根（在初中阶段），但常有错误解法：

$$
\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2 &= (x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2\\
&= -(k+5)^2+19
\end{aligned}
$$

认为 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值是 19。应让学生有自我检测修正的能力，当 $k=-5$ 时，方程元实根。应先由 $\Delta\geqslant0$，解得 $-4\leqslant k\leqslant-4/3$，只能当 $k=-4$ 时（可结合抛物线图象）$x_1^2+x_2^2$ 达到最大值 18。

教学实践说明，适时暴露解题过程的偏差或失误的纠正过程，非常有利于解题能力的提高。为了促使学生理解事物的本质，必须把他们经常出现的典型错误暴露出来，通过自我纠正，克服思维薄弱环节。

5.优化知识结构的认知过程

数学教学的重要任务是优化和发展学生的数学认知结构。所谓数学认知结构，是经过自己主动的认识而在头脑里建立起来的数学知识结构，它包含了数学知识技能、思维方法和原理经验等。数学认知结构是内化了的数学知识结构，是一个具有整体性、有序性、开放性、多要素多功能的动态系统，体现在组成系统的各部分和谐完整形态及功能的

互相联系、互相渗透、互相影响、互相配合而产生联合效应，在动态的平衡中不断突破旧的框架和模式，建立起新的数学知识结构。

著名美国认知心理学家奥苏贝尔指出来的”。数学知识结构是按照教学大纲顺序编写成教科书形式，不是现成的理想知识结构，不能照本宣科，把散乱知识“零售”给学生，应该是立足于教材的基础上，对教材进行剖析、加工和重新组织，形成相对完整的知识结构的认知过程。在这个认知过程中既照顾数学知识科学性，又要照顾学生可接受性；既要考虑数学知识结构（理论知识）又要考虑数学知识发生过程（思维活动）既要体现数学基本技能，又要体现数学的思想方法；既要注意知识顺序性和阶段性，又要注意知识整体性和纵横联系。提高学生的数学思维水平和认知能力。

优化与发展学生数学认知结构的课堂教学不可能有统一的最佳教学结构的模式，但是，针对具体教学内容和教学环境能创设合理课堂教学情境和结构，诸如，设置问题情境，鼓励学生主动参与发现过程的教学情境，指导学生归纳整理教材内容的基本点、中心点和衔接点。对教与学交换动态过程的控制，主要根据师生信息联系与反馈，灵活及时调节教学环节。这种结构式教学方法其宗旨是用综合、整体思想，从宏观上掌握教学内容，让学生能更好地掌握体系，渗透数学思想和方法，理解和掌握知识体系中的“源”（主干知识与原理方法）与“流”（派生知识和纵横应用），即理解了知识结构中的“源”有利于“流”的掌握，弄清了“流”会加深对“源”的理解。在教学中既要突出“源”，也要重视“流”，二者有机的结合，会使学生在头脑里形成一个经纬交织，融会贯通的知识网络。为今后学习的迁移和认知能力发展奠定了良好基础。下面以代数中“四个二次”（二次三项式、一元二次方程、二次函数和一元二次不等式）结构教学为例作一说明：

⑴ 作为一个单元教学开始，应先让学生通盘了解本单元的知识的整体特点和教学目标，以获得总的印象。 从问题的需要提出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 和解法思路。

⑵ 指导学生将分散在各节的内容以一元二次方程为基础，二次函数为主线，居高临下地理顺其内在联系，并采用比较法、数形结合法和函数的思想揭示其内在联系。 二次三项式本身就是所含字母 x 的二次函数式；一元二次方程，是二次函数 $y=0$ 时特殊情况；一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 <0）是二次函数值 $y\neq0$ 时特殊情况；以上问题讨论又都以一元二次方程解的情况为依据。另外，二次

三项式 ax^2+bx+c 的因式分解也可利用求方程根方式来获得,即

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)。$$

若将上述四个问题分散处理,学生就不易发现其内在联系,而置于一处进行比较和整体识记,则能使学生顿悟:它们都与二次方程根、二次函数图象紧密相关!

(3)整体性重新认识问题。 借助于练习应用和复习小结详细地把握知识间来龙去脉、逻辑关系、纵横联系、知识源流、思想方法的思维过程,做全局整体性的组织。就数学教学而言,全局整体性有两方面表现:

一是数学内容体系具有明显整体性,它包括不同数学知识之间存在逻辑关系与思想方法上联系,还具有存于数学结构中的“相对位置”关系及其功能与作用:

二是学生的数学的认知活动中所体现出整体性,即思维活动的内容与方式,过程与结果,经验与原理等,形成一个整体性的数学认知活动的过程。它能够使学生从本质上认识事物各部分之间联系,并通过这种认识上的升华,优化自身的认知结构。例如,学生通过上述的“四个二次”内容学习,把握知识整体和本质的认识,领悟其中的思想方法和变化规律。并以某种简练的压缩形式纳入自己的认知结构。引导帮助学生编制“四个二次”关系网络。

作为“四个二次”知识的基础和中心内容的一元二次方程,要引导学生进一步揭示方程根与系数关系,并通过解题练习,引导学生自己归纳总结三个方面的课题:

①差别式定理及其逆定理的功能与作用;

②韦达定理及其逆定理的功能与应用;

③二次函数中数与形关系及其转化与应用。

整体性地重新认识问题,从客观上看这是认识对象的基本要求,从学生主观上看,它能够使学生从本质上认识事物各部分之间联系,优化自身的认知结构。

整体性作为教师教学活动的指导思想和教学线索,即整体地提出问题,个别地解决问题以及整体地重新认识问题。事实上,从认知心理角度来看,这是一个整体——局部——整体的认识事物过程。

奥苏贝尔指出“每当我们致力于影响学生的认知结构,以便最大限度提高意义学习和保持,我们就深入到了教育过程的核心。”研究数学

的认知过程，对深入开展数学思维的研究，提高学生数学的认知能力有着重要意义。

综上所述，作为思维活动的教学，数学知识是数学思维（过程）的产物（结果），数学知识的思维价值是隐含在书本上现成的结论和现成的论述之中的，它有赖于教师在教学中再现数学知识的发生过程，针对具体教学内容，通过不同的教学方式和创设相应教学情境，启发学生去感受、去体验数学知识所包含着的深刻思维和丰富的智慧，使他们在生动活泼地绕有兴趣的学习中发展思维、提高能力，这是数学教学的出发点和归宿，是当前数学教学改革的一个核心问题。

数学知识发生过程的教学

学习是一种能动地建构过程，心理学家认为，学习并不是个体获得越来越多外部信息的过程，而是学到越来越多有关他们认识事物的程序，即建构新的认识图式。因此应重视数学知识发生过程的教学，不能仅仅重视结果教学。

另一方面，只强调结果，忽视过程，学生学到的是似无根之木，无源之水的知识，只能机械模仿，反复操练，越学必然负担越重。而重视过程教学，使学生知道所学知识的来龙去脉，知其然，更知所以然。这样既提高了学生的素质，又减轻了学生的负担。

在整个课堂教学过程中，教师要自始至终地激励学生的思维，激励学生能动地建构。教师每时每刻，一个动作，一个表情，一个问题，都存在是压仰学生思维，还是激励学生。课堂上教师脸铁板怎样激励学生呢？学生回答不出问题，即使不说：怎么连这个问题也回答不出？脸上无表情，淡淡地说一声："坐下"。也是压仰学生思维。若将现成结论给学生，又怎样能激励学生能动建构。教师必须循循善诱，作为诱导的主要手段的提问，大有学问。所设问题不能暗示答案，要从学生现有的知识结构和认识结构水平出发，过高了学生无从回答，过低学生不屑回答，都压抑了学生的积极性。当出了一个问题问："如何解？"只有找到答案的人才能回答。因此，问"看了这个问题，你是怎样想的？"人人都能说。为了激励学生能动建构，教师不可以对学生回答立即作出肯定或否定的结论，否则学生能动建构过程结束，等待教师给他建构了。教

师不仅不做回答,而且脸部表情上也看不出肯定与否。有时,还可以提出反面意见,甚至是错误的看法,使学生思维发生冲突,从而激化思维的内部矛盾,激励起学生主观能动性,师生平等讨论,造成学生能动建构的和谐环境。设问时,较多地能设计些开放性问题。上述“怎样想”的问题就是没一个标准答案的问题。

教师的工作在于激励学生能动建构,不了解学生的情况,激励就是无的放矢。因此,必须让学生不断地显示自己的建构过程。每一步都要问个“为什么?”学生有时只讲结果,就要问他怎样想出来的,为什么这样想,等等。通过问题不断激励学生能动建构。而且这些问题,学生能够用来自己问自己,自己激励自己,实际上这一系列问题就是一种建构图式。举个简单例子。

“坐标满足方程$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$ ($k\in R$) 的点的轨迹是什么?”

教师问:看了这个问题,你们怎样想的?

一学生:好像要讨论,可能是椭圆,也可能是双曲线。

师:为什么?你知道怎样的方程能确定其图形?(指导学生找到先行组织者,找到建构基点)。

生:由椭圆和双曲线的标准方程,可以知道曲线的形状、大小、位置。

师:很好。那么题中的方程是否标准方程呢?

生:不是,必须$\frac{x^2}{(\quad)}\pm\frac{y^2}{(\quad)}=1$ 括号处是正数,才能表达成某正数平方,化成标准方程。

师:题中是否正数。

生:不一定。

师:k 的取值范围是什么?

生:$k\neq4$,且 $k\neq9$。

师:很好。这样由题意知 k 取值区间分成几个?哪几个?

生:共三个,(1) $k<4$;(2) $4<k<9$;(3) $k>9$。

师:下面大家一起分别讨论三种情况下,与方程相应的曲线各是什么?

…………

每节课都能这样设计,就能激励学生能动地建构。使学生会学,每节课的结论都是由学生自己得出,学生的知识不断构筑,而且认知结构不断完善。

在组织教学内容和进行课堂设计时,应该以学生原有的知识结构

出发,从他们熟悉的了解的事出发,再设置情景,造成新问题与旧的知识结构和认知结构的矛盾,然后引导学生不断地比较,找出它们之间的区别和联系,促进转化使新问题得到解决。此时,不再停留在原有的水平上,而是螺旋式上升了。例如,在教学双曲线的内容时,可以通过复习椭圆的定义,标准方程,性质及与椭圆有关的所有内容,然后从椭圆的定义,动点到两个定点距离之和为一定值的点的轨迹出发,再从定义中与和相对的是差,而差又有被减数和减数之分,再引出 双曲线有不同两支曲线,而要表示两支就得出动点到两定点距离之差的"绝对值"是个定值的双曲线定义。接着再从椭圆是到一定点和定直线距离之比为小于 1 的常数的点的轨迹出发引导 :常数小于 1→等于 1→大于 1,这可以在椭圆研究的基础上,让一个焦点不动,2a 与 2c 之比趋于 1,实际上椭圆另一个焦点在趋于无穷远,当焦点到无穷远时变为抛物线了,若再过去就从另一方向回来了变成了双曲线。这样既为抛物线的研究埋下伏笔,又为双曲线展开了课题。然后,在与椭圆研究的比较中,研究有关双曲线的内容,这些内容全部由同学自己完成。激励起学生主动建构。在比较中,学生不仅获得与椭圆相同的有关双曲线的内容,像焦点坐标、标准方程、离心率 $=\frac{c}{a}$ 等,又抓住了它们区别的本质在于 a 与 c 之比不同,即 $e>1$,$e<1$,这是定性描写,而且进一步给出确定的定量关系,$a^2=b^2+c^2$ 和 $c^2=a^2+b^2$。再引导学生考虑以前是否遇到过双曲线,学生立即想到反比例函数的图象曲线也是双曲线,再由反比例函数图象的坐标轴为渐近线,接着由特殊到一般研究一般双曲线有否渐近线,最后,反过来,在研究了一般的双曲线后再研究反比例函数的曲线,知是个特殊的双曲线,称它为等轴双曲线。这样学生就能动地完成了双曲线内容的建构过程,而且实现了进一步完善认知结构。

□数学思维过程的暴露

传统的教学方法只注重知识的传授,而这些知识是怎样产生的,其生动活泼的思维过程,常被淹没在形式主义的海洋之中,波利亚指出:"思想应该在学生的大脑中产生出来,而教师仅仅只就起一个产婆的作用。""做一名真正的、优秀的思想产婆"。这就要求我们必须增加数学的透明度,准确、鲜明、深刻、生动地再现数学知识的发生过程,暴露数学思维的发展进程。

1.暴露知识产生的过程

对于定义、定理、公式的教学,如果照搬课本上的教学程序,满足于结论的证明,不注意证明思路的由来,那么,只能使学生知其然不知其所以然。为此,必须加强思维过程的分析,让学生亲历原始思维过程。

例如,关于两条异面直线上两点间距离公式的推导。已知两条异面直线 a、b 所成的角为 θ,它们的公垂线段 AA′的长度为 d。在 a、b 上分别取点 E、F,设 A′E = m,AF = n,求 EF。为符合学生的认识规律,我们采用"层层剥皮,暴露核心"的策略。下面是课堂实录。

先要求学生观察细竹条架成的模型,画出 a、b、AA′、EF 相对位置的示意图(暂不画平面)。

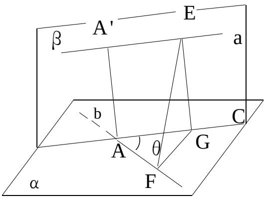


图 1

学生作图后,要求他们思考:还有哪些已知条件未在图中体现出来?怎样体现 a、b 所成的角 θ?学生回答:在 b 上取一点,过该点作 a 的平行线。启发:这样的点当然可以任意取,但取哪一点较好?回答:取点 A 为好,因为它是已知点,可减少作图线条。进一步启发:在立几中,经常是若要作线,不如作面,能否作一个面,使它包含所要作的线?回答:经过 b 作平面 $\alpha /\!/ a$ 即可。学生作出 α 后,追问:为什么经过 b 有一个平面 $\alpha /\!/ a$?回答:课本 p.23 第 4 题已证。再追问:现在怎样体现出 θ?学生凝思后回答:过 a、AA′作平面 β,$\beta \cap \alpha = c$,b、c 所成的角即 θ。又追问:为什么不直接在 α 内作一直线平行于 α,而要添面 β?学生回答说这是立几中通常的作法。但 β 的作用就是如此吗?学生有点茫然。启发:β 对于求 EF 有否特殊的用途?学生顿悟:作 β 原来是一箭双雕!

学生整理上述思路,写出证明过程后,要他们思考:为求出 EF,还要做哪些工作?学生答"必须归结于平面图形:作 $EG \perp c$ 于 G,连结 FG。为证 $EG \perp FG$,须证 $EG \perp \alpha$。为此,证 $\beta \perp \alpha$,而这只要证 $AA' \perp \alpha$。至此,要求学生写出以上证明过程。

现在,剩下的是计算了。学生很快由图中发现,可以解$\triangle AFG$,求得 FG;再解$\triangle EFC$ 即可求得 EF。完成之后,要求学生继续思考:①如果点 F 在点 A 的另一侧,则应当如何运用上述计算过程?②此时,异面直线上两点间距离公式应当如何完整地表述?③在具体问题上,你能判断点 F 在点 A 的哪一侧吗?④为什么说两条异面直线的距离,是分别在两条异面直线上的两点间的距离中最小的?⑤根据图形,如何具体作出异面直线的公垂线?

暴露公式的产生过程,为学生理解、掌握应用公式打下了厚实的思想基础,使学生经历了一次自己产生公式的欢乐。

2.暴露思路形成的过程

例　已知方程 $\sin x + \sqrt{3}\cos x + a = 0$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内有两个不同的根,求 a 的取值范围。

学生首先想到的是,把方程变为

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{a}{2}$$

再由 $-1\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant 1$,得 $-2\leqslant a\leqslant 2$。

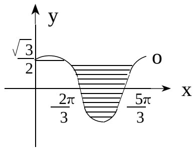


图 2

启发思考:在 $[-2,2]$ 上,所有的值都能为 a 吗?学生经过思索后回答:由 $x\neq 0$、2π,$a\neq-\sqrt{3}$。那么在 $[-2,2]$ 上,其它的值都可作为 a 吗?此时学生的思路普遍受阻,为此进一步启发:"在 $(0,2\pi)$ 内有两个不同的根"这一条件能否较直观地体现呢?有的学生提出能转化为求两条曲线的交点。在这个最佳时机,我们顺应学生思维流向,启发他们寻找曲线的过程。此时学生很快把思维转向研究数形结合范围,决定试求曲线 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 和 $y=-\frac{a}{2}$ 在 $x\in(0,2\pi)$ 内的交点。图象完成后(如图)引导他们通过观察确定 a 的取值范围。学生结合条件,逐一归纳:①由图象的最高、最低点,得 $-2\leqslant a\leqslant 2$;②在最高、最低点,直线 $y=-\frac{a}{2}$ 和曲线相切,它们只有一个交点,故 $a\neq\pm 2$。③图象不包含 $x=0.2\pi$ 两点,故 $y\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $a\neq\sqrt{3}$。从而求得 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 且 $a\neq-\sqrt{3}$。

在这个教学过程中,把思路形成的过程暴露出来,使学生的思维与教师的思维共鸣,变教师传授的过程为学生发现的过程,留给学生的不再是"魔术师"的表演,而是创造的教育与实践。

3.暴露尝试探索的过程

例　如图 3,设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 右半支上除顶点外的任一点,F_1、F_2 为左、右焦点,$\angle PF_1F_2=\alpha$,$\angle PF_2F_1=\beta$,e 为离心率。求证:$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{e-1}{e+1}$。

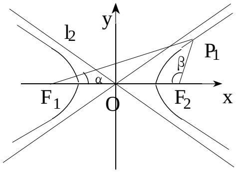


图 3

这个问题是解析几何和三角知识的综合,若立即把解题方法告诉学生,他们只会认为老师"神机妙算"。而巧妙地构思多方位的探索情

境,利用临时发生的情况,及时变换或追加问题,充分进行讨论,使教学过程充满生机,从而化平淡为新奇,化被动听取为积极探索。

多数学生首先想到的是:由结论入手,把 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\beta}$ 代入结论得 $\frac{\sin\alpha(1+\cos\beta)}{\sin\beta(1+\cos\alpha)}=\frac{e-1}{e+1}$,则

$$e=\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta-\sin\alpha+\sin(\beta-\alpha)}。$$

由于式子较复杂,难以找到与已知条件的联结点,尝试失败。这时,学生中各种方法齐现,其中部分学生尝试先变结论为 $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{e-1}{e+1}$,则 $e=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$,这时 e 的表达式似乎较前已简单了些。我们在肯定其方向正确之后,继续启发学生设法用 α、β 表示 e,学生思维再度活跃起来,部分人经逆推得

$$e=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}\cdot\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta-\sin\alpha}。$$

在学生兴奋地继续探索之际,启发他们:①由 $\sin\alpha$、$\sin\beta$ 的出现,联想到三角形中哪种边角关系?②由边 $|PF_1|$、$|PF_2|$、$|F_1F_2|$ 联想到它们与 a、b、c 有何数量关系?③由 a、b、c 联想到它们与 e 有何关系?于是学生由①,在 $\triangle PF_1F_2$ 中用正弦定理,得 $\frac{|PF_1|}{\sin\beta}=\frac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\frac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}$;由②,用等比定理,得 $\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{2a}{\sin\beta-\sin\alpha}$;由③,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta-\sin\alpha}$,于是思路接通。

平时,学生在书本上看的,在课堂上听的,多是一帆风顺的例子。但动手解起题来,却很少马到成功。我们把失败的过程端出来,再把从失败到成功的过程端出来,从学生的反思中,使他们看到应当如何转变思维的方向和策略,如何缩小探索的范围,如何进行解题的评价。这在思维能力上无疑是一种很好的体验和进步。

4.暴露偏差纠正的过程

在教学中有这样的情况:尽管教师屡屡疾呼:某某地方应当注意!但学生依然屡屡出错。如果构造一些简明生动、击中要害的反例,把纠正偏差的过程暴露出来,那么效果又怎样呢?

异面直线的概念是教学中的难点。一是学生想象不出异面直线的样子,二是画不出图或画图不准确,三是看图时不易判断,四是概念易

与分别在两个平面内的两条直线相混淆。

教学时先依次画出下列各图，其中 $a\in\alpha$，$b\in\beta$，$\alpha\cap\beta=c$；然后要求学生根据已学的定义、定理判定 a、b 是否异面直线，再用细竹条按图示的位置摆放、对照。

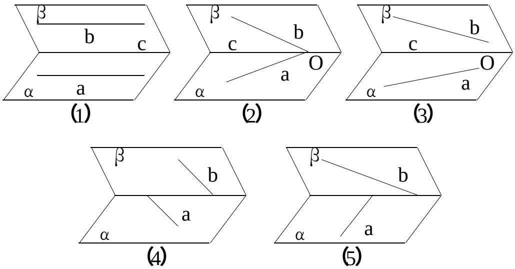


图 4

图 4⑴中直线 $a\parallel c$，$b\parallel c$；图 4⑵中 $a\cap b=C$，$C\in c$。引导学生判断出：a、b 都不是异面直线。这样，突出了“不同在任何一个平面内的两条直线”与“分别在某两个平面内的两条直线”两者含义的根本区别，强调了异面直线定义中的“任何”两字的内容。

图 4⑶是一个开放性的问题。有的认为 a、b 没有共公点，也不平行，是异面直线；有的认为 a、b 可能相交于 c 上的某点，可能不是异面直线。通过讨论，深化了对异面直线定义的理解，并且为正确画出分别在两个面内的两条异面直线提供了反面的借鉴。

学生可对照实物模型，判断出图 4⑷中 a、b 貌似平行，但实际上永远不会平行；图 4⑸中 a、b 貌似相交，但实际上永远不会相交，它们都是异面直线。

实践证明，为了促使学生理解事物本质，必须把他们经常出现的错误暴露出来，通过自我纠正，克服思维中的薄弱环节，这样做是事半功倍的。

□从心理活动入手训练数学形象思维

我们把运用图形等物化形式，表达那些直感表象信息、间接反映事物本质属性的思维，称为形象思维。训练学生的形象思维，就是力求使其对某些抽象的数学问题，建构起相应的直观图形模式。显然，，这就是一个加工、改造、并形成新形象的思维流程，其中必然伴有活跃的心理现象。因而，教学中我们对这些心理现象，要进行深入分析，并在此基础上探索培养形象思维的合理机制。河北承德县一中尚继惠老师总

结的方法是：

1.提取识记材料,训练形象思维

教学内容是由许多知识点有机地组合而成的,把这些“点”做为曾经识记过的材料,可进行信息积累。在后续课中,启发学生恰当选择、提取这些信息,用来认识未知对象。同时又可反作用于原对象,便于对其加深理解、牢固掌握。在中学数学的众多知识点中,能促进形象思维展开的最基本、最直接的识记材料,莫过于三角、函数与方程以及与复数模和辐角有关内容的知识点了。

例　已知角 α 在第三象限,且 $tg\alpha = 2$,则 α 的值是______。

就已知条件的给予的象限角、已知与欲求的同角关系等信息,容易想到学过的单位圆、正切线、余切线等知识,由此便得到几何解法：

解 如图 1,OP 是角 α 的终边,$tg\alpha = AT = 2$,那么 $\cos\alpha = OM$。

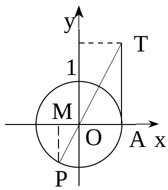


图 1

AT、$MP \perp x$ 轴,，$\triangle OMP \backsim \triangle OAT$,，$\dfrac{|OM|}{|OA|} = \dfrac{|OP|}{|OT|}$,，$|OM|$

$= \dfrac{1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

，$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

有时,为了强化形象思维的训练,我们则给定一些问题,明确要求学生用图形构造法求解,这就对如何提取识记过的形象材料,提出了较高要求。如当学过 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ 的坐标法推证后,还可要求学生思考能否用其它几何法证明,当然这时可向学生讲清,只就 α、β、$\alpha + \beta$ 为锐角、钝角情况证,至于推广到一般角,可由诱导公式来完成。

那么学生该怎么构造几何图形呢？很自然要回忆识记过的某些知识,比如由角想起三角形,由三角形想到涉及边角关系的正、余弦定理等,受其潜意识支配,必先画三角形,之后设角。想到 $\alpha + \beta$ 是 α 与 β 之和,可能构想图 2,于是形象思维得以展开。

证法 1 如图 2,在 $\triangle ABC$ 中,作 $AD \perp BC$,垂足为 D,设 $\angle BAD = \alpha$,$\angle CAD = \beta$,且令 $AD = 1$,则 $\angle BAC = \alpha + \beta$。，在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理知 $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$。在 $Rt\triangle ADB$ 中,

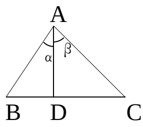


图 2

$AB = \dfrac{AD}{\cos\alpha} = \sec\alpha$,同理 $AC = \sec\beta$,

，$\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - (BD + DC)^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{\sec^2\alpha + \sec^2\beta - (tg\alpha + tg\beta)^2}{2\sec\alpha \cdot \sec\beta} =$

$\frac{2-2\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{2\sec\alpha\sec\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

有的同学可能会设三角形的两个底角为 α、β **(见图** 3) **,这样就会有另一种证法。**

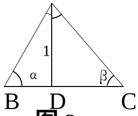


图 3

证法 2 **如图** 3**,在**$\triangle ABC$ **中,设**$\angle B=\alpha$**,**$\angle C=\beta$**,则**$\angle A=\pi-(\alpha+\beta)$。**过** A **作** $AD\perp BC$ **于** D**,且设** $AD=1$**,则** $AB=\frac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha$**,** $AC=\csc\beta$**,** $BD=\mathrm{ctg}\alpha$**,** $DC=\mathrm{ctg}\beta$。**由余弦定理得** $\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{AB^2+AC^2-(BD+DC)^2}{2AB\cdot AC}=\frac{\csc^2\alpha+\csc^2\beta-(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)^2}{2\csc\alpha\cdot\csc\beta}$

$\frac{2-2\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta}{2\csc\alpha\cdot\csc\beta}=\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta$。

，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

上两种构图证法可谓大同小异。而有的同学可能会提取 $\alpha+\beta$ **是**α、β **的外角这种识记材料,画图** 4**,如果想用**$\angle ABC=\pi-(\alpha+\beta)$**,显然与证法** 2 **雷同,故启发学生补直角三角形来证。**

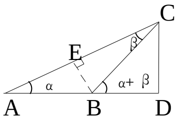


图 4

证法 3 **如图** 4**,**$\alpha+\beta$ **是**$\triangle ABC$ **的外角,过** C **作** $CD\perp AB$**,且交** AB **延长线于** D**,设** $BC=1$**,则** $\cos(\alpha+\beta)=BD=AD-AB$。**在**$\triangle ABC$ **中,过** B **作** $BE\perp AC$**,垂足为** E**,那么** $\cos(\alpha+\beta)=AC\cos\alpha-\frac{BE}{\sin\alpha}=(AE+EC)\cos\alpha-\frac{BE}{\sin\alpha}=(BE\cdot\mathrm{ctg}\alpha+\cos\beta)\cos\alpha-\frac{BE}{\sin\alpha}=(\sin\beta\cdot\mathrm{ctg}\alpha+\cos\beta)\cos\alpha-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+(\sin\beta\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin}-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha})=\cos\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$。

这种证法没有用余弦定理,但作了两条垂线,事实上,还有其它构造三角形的证法,但较为繁杂且学生不易想到,此略。“提取识记材料,训练形象思维”重在加强平面几何、立体几何、解析几何以及函数图像等知识间的纵横沟通,使学生不断丰富、积累“数形结合”解题的模型经验,助长形象思维的发展。

2.**抓住表象特征,训练形象思维**

数学中的许多内容,尤其是公式,有其独特的外形结构特征,这些特征必然在我们的头脑中留下鲜明的印象,以致形成一定的或固有的事物映象,即表象。这种表象常能促使我们的思维转向或换位,去联想与之相关的或相波及的有关图形,于是由表象常能启动形象思维的展

开。因而,我们在教学中要善于抓住这些表象特征,对学生进行形象思维的训练,提高其创造能力。

这里不罗列具有表象特征的大堆公式,还是先看一个例子。如高中代数下册不等式一章中用来阐述“比较法”的一道例题:已知 $a,b,m\in R^+$,且 $a<b$,求证:$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$,很明显,$\frac{a+m}{b+m}$呈现直线斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的结构特征,于是此例就可用解析几何法来证。

证明:$0<a<b$,,点 $P(b,a)$ 在第一象限且必位于直线 $y=x$ 下方。又 $m>0$,,点 $Q(-m,-m)$ 在第三象限且在 $y=x$ 上,如图 5,据几何直观易知,总有 $k_{PQ}>k_{OP}$,即$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$。此证法简捷明了、形象直观,显然优于其它证法。

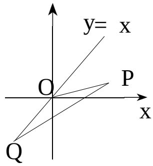


图 5

有的问题里呈现的几何表象特征很明显,也有的不甚明显,这就要求我们善于观察,否则会抑制联想,束缚形象思维的展开。

例　已知$\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$,求证:$\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\geqslant\sqrt{2}-1$。

对此题,如何启迪形象思维呢?教师不妨这样发问:此不等式有什么特征呢?当然会有学生答左、右两端都是两项差。这时教师强调:好,我们就从这“两项差”上做文章。进而引导学生展开联想,尝试用三角形边的不等关系构图证明。

证法 1 如图 6,作一个边长为 1 的正方形,在 BC 上取点 E,设$\angle AEB=\alpha$,则 $AE=\csc\alpha$,$BE=\operatorname{ctg}\alpha$,并连 AC。

在$\triangle ACE$ 中,显然有 $AE+EC\geqslant AC=\sqrt{2}$(仅当 E 与 C 重合,即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时,取等号),则 $\csc\alpha+1-\operatorname{ctg}\alpha\geqslant\sqrt{2}$,,$\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\geqslant\sqrt{2}-1$。

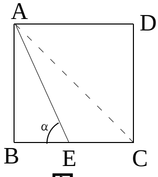


图 6

倘若再深入观察一下不等式左端,不难发现 $\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$,具备直线一斜率式特征,于是从证法 1 的平面几何证法又想到下面的解析几何证法。

证法 2:$\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{-\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$,,此式几何意义就是点 $M(\sin\alpha,-\cos\alpha)$ 与点 $P(0,-1)$ 的连线的斜率。

$\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$,,$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\alpha<1$,则点 M 在圆弧 $x^2+y^2=1$ $(x\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1])$ 上,如

图 7,圆弧两端点坐标求得为 $A(1,0)$,$B(\frac{\sqrt{2}}{2}$,$-\frac{\sqrt{2}}{2})$,∴ $k_{AP}=1$,$k_{BP}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1)/\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1$。∵ M 在圆弧上,∴ $\sqrt{2}-1\leqslant k_{AP}P<1$,故 $-\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}\geqslant\sqrt{2}-1$,即有 $\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\geqslant\sqrt{2}-1$。

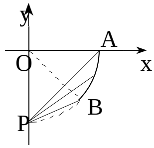


图 7

有关根据表象特征构造图形求解的代数问题很多,不胜枚举,以上两例足见一般。教学中,尤其是复习阶段,教师可经常开设这方面的专题课,如余弦定理的应用,两点间距离公式的应用等,经过这样的训练,可增强学生根据表象特征构图解题的意识,当遇到某些问题时,还将会挖掘出隐含的结构特征,从而使形象思维能力日益提高。

3.把握感知程序,训练形象思维

人们认识事物虽然有一个很复杂的心理过程,但就感觉、知觉的整体性而言,又有一定的程序或规律。所以,把握好这种“程序”,由浅入深,由表及里,一步一个台阶,使认知程序的每一层次都力求形成事物映象,这样就能从逻辑思维演变成形象思维。

先看一个较为简单的例子。

例　长方体 AC′ 的长、宽、高分别为 3、2、1,求异面直线 DB′ 与 BC′ 所成的角。

考虑到用三垂线定理去证 DB′ ⊥ BC′ 是不可能的,于是有另一种感知,其认识程序是:⑴先想到异面直线所成角的定义;⑵据定义找出与 BC′ 平行且与 DB′ 相交之线段(或与 DB′ 平行且与 BC′ 相交);⑶所找直线段并非现成,在长方体表面上也不能直接连出,于是想到长方体的外围。

至此,随着这种“外围形象”的扩充,想到了“补形”,如图 8,在前方补一个同样的长方体,那么连 EB′,则 EB′ ∥ BC′,DB′ 与 BC′ 所成的角即为∠EB′D,再连 DE,在△EB′D 中,先求边长,再求其角。

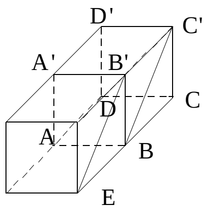


图 8

这个例子是“形中补形”,属于形象思维借助感知手段向外扩充、延展。而大多数情况是,我们更强调“数中构形”,即对某一代数问题,按感知程序,构造图形,用形解数。

例　试确定 m 的取值范围,使对任意角 θ 总有 $\cos^2\theta+2m\cos\theta+4m-1<0$。这时多数学生看到二次三项式,联想到二次函数,思想意识中抛物线的形象显露出来,故得如下解法。

解法 1 :由原不等式,得 $\cos^2\theta+2m\cos\theta+4m>0$,令 $f(x)=x^2-2mx-4m$,$x=\cos\theta$,则 $f(x)=(x-m)^2-(m^2+4m)$,且 $x\in[-1,1]$。

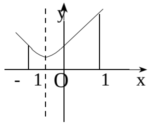
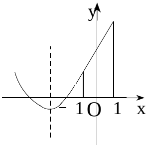


图 9

现在问题变为 :确定 m 的取值范围,使抛物线在 $x\in[-1,1]$ 上的弧总位于 x 轴上方,又因其开口向上,所以共有三种情况:

① 如图 9,有 $\begin{cases}-1\leqslant m\leqslant 1\\ -(m^2+4m)>0\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m<0$。

②如图 10,有 $\begin{cases}m<-1,\\ f(-1)=1-2m>0,\end{cases}$ 解得 $m<-1$。



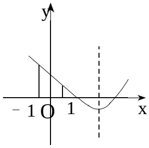


图 10　　图 11

③如图 11,有 $\begin{cases}m>-1,\\ f(1)=1-6m>0,\end{cases}$ 此不等式组无解。

故 $m<0$,即当 $m<0$,不等式 $\cos^2\theta-2m\mathrm{coc}\theta+4m-1<0$ 恒成立。

(2) 有的学生在得式 $\cos^2\theta-2m\mathrm{coc}\theta+4m>0$ 后,对式子分离 m,得到 $\cos^2\theta 2m(\cos\theta+2)$。对感知到这步的同学,教师要提示 :解法 1 是构造一个函数图像,那么由此式能否构造两个函数图像来解呢?

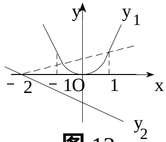


图 12

解法 2 :由原不等式得 $\cos^2\theta>2m(\cos\theta+2)$,设 $x=\cos\theta$ $(x\in[-1,1])$,又设 $y_1=x^2$,$y_2=2m(x+2)$。于是问题变为 :确定 m 的取值范围,使 $y_1=x^2$ 的图像在 $x\in[-1,1]$ 上总位于 $y_2=2m(x+2)$ 的图像的上方,如图 12,据几何直观易得 $2m<0$,, $m<0$

至此,学生又积累了经验,看来有时构造两个函数图像比一个函数图像优越得多。从而使形象思维有了长进。

(3) 有的学生在 (2) 的基础上,彻底把 m 分离出,成为 $m<\dfrac{\cos^2\theta}{2\cos\theta+4}$。出于这种考虑的同学,可能是想把 $\dfrac{\cos^2\theta}{2\cos\theta+4}$ 的范围求出,但用代数法尝试未成,又经思考,感知到此式呈斜率式特征,于是又一"形"跃然而出。

解法 3 :由原不等得 $m(2\cos\theta+4)<\cos^2$, $2\cos\theta+4>0$,$m<\dfrac{\cos^2\theta}{2\cos^2\theta+4}$,此式的几何意义就是点 $M(2\cos,\cos^2\theta)$ 与点 $P(-4,0)$ 的连线的斜率,而点 M 必在抛物线 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\cos^2\theta,\end{cases}$ 即 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ $(x\in[-1,1])$ 上。

如图 13， $k_{AP}=\frac{1-0}{-2+4}=\frac{1}{2}$，

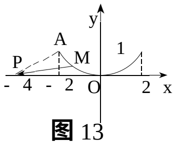


图 13

，$0\leqslant k_{MP}\leqslant\frac{1}{2}$，

从而$\frac{\cos^2\theta}{2\cos\theta+4}\geqslant 0$，故欲使 $m<\frac{\cos^2\theta}{2\cos\theta+4}$，只须 $m<0$ 即可。

这种解法虽不比解法 2 简捷，但就思维触角的纵深性和广阔性来讲，意义更加深远，也值得称道。

显然，一道题的感知层次不同，相应地影响着形象思维的着眼点也不同。因而在教学中，要把握好学生解题的感知程序，也就是说，对某一问题，也许一开始想不出其形象，可是随着感知的深入进行，到了某个阶段或某个层次，其“形”就会显露出来；另外，对某些个性心理，甚至那怕是产生偏离的思考，教师也不要过分干涉或指责，而应因势利导，启发其形象思维的展开，这样，才能使形象思维的训练更具多彩性。

数学思维中的抽象与概括

抽象是在感觉、知觉和表象的基础上认识事物的本质、规律并形成概念、原理、理论的一种思维方法。在数学中，抽象是指从研究对象或问题中抽取数量关系或空间形式而舍弃其它属性并对其进行考察的一种方法。数学中的概念、关系、性质、方法、符号等都是数学抽象或再抽象的思维结果。抽象性是数学科学的特点之一。因此抽象思维是数学学习的基础之一。

张天孝老师从数学抽象的过程把抽象分为分析型抽象和直觉抽象两类。

分析型抽象是建立在分析、比较基础上的抽象，其过程表现为“分离—提纯—简略”三个环节。例如，从钟表上的时针和分针所构成的图形、两脚规张开的两脚所构成的图形出发，将其空间的位置关系与它们的物理性质、化学性质分离开来，经过提纯（想象边的长度是无限的）、简化（想象边是没有粗细的），就抽出了它们所具有的共同特征：有一个共同的端点，两条从同一端点引出的射线，一块由两条射线组成的平面空间，就形成了角的概念。数学概念都是经过上述过程产生的。

直觉型抽象往往是在一刹那间完成的，其过程中的各个环节被迅

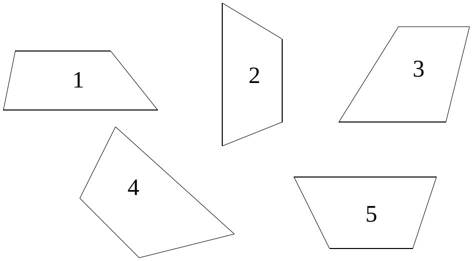
速地简化了，超越了，人们几乎察觉不到抽象的过程。例如，解答下列应用题。

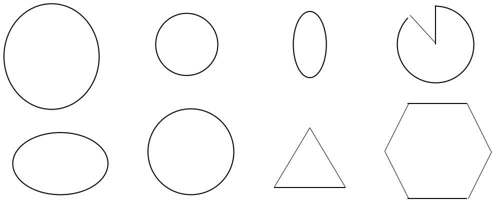
⑴ 甲、乙两地相距 360 千米，一列慢车从甲站开出，每小时行 48 千米，一列快车从乙站开出，每小时行 72 千米，快车先开 25 分，两车相向而行，快车开了几小时与慢车相遇？

⑵ 甲、乙两地相距 360 千米，一列慢车从甲站开出，每小时走 48 千米，一列快车从乙站开出每小时走 72 千米，两列火车同时相向而行，1 小时后快车出了故障停下来修理了 25 分钟再行，经几小时两车相遇？

有些学生不加分析，立即抓住了题中“和”的表述句，即“甲、乙两地相距 360 千米”，列出了以和为等量的方程：$48x + 72\left(x - \frac{5}{12}\right) = 360$（设经 x 小时相遇）。

数学中的抽象要求学生把本质属性抽象出来，而小学生在抽象时，往往会出现两种错误。一种是，将非本质属性与本质属性相混淆。例如，让学生判别下列四边形哪些是梯形时，有的学生以为只有 1 号、5 号是梯形，而把 2 号、3 号、4 号排除在梯形之外。说明这些学生在进行抽象时，思维被非本质属性——图形的位置（2 号、4 号）或腰的变形（3 号）所干扰。





另一种是，当本质属性中包含几个要素时，容易产生遗漏的现象。如圆的本质属性包含“圆心（定点）”、“封闭曲线”、“曲线上各点到圆心等距离”三个要素，有的学生在把下列图形分为圆和非圆两类时，由于思维时遗漏“曲线上各点到圆心等距离”这个要素，误把 3 号、5 号也归入圆的一类中。因此，在数学教学中教师要防止出现以上两种现象。应让学生明确抽象的目的在于抽象出数学对象的本质属性，舍弃对象的非本质特征。在掌握概念的过程中，能把本质和非本

质的东西区别开来。

概括是把抽象出来的若干事物的共同属性归结出来进行考察的一种思维方法。概括要以抽象为基础,它是抽象的发展。苏联著名心理学家鲁宾斯坦认为,概括,特别是关系的概括是一切能力的基础。许多心理学家也往往以能否独立地分析和概括有关事物间的关系作为智力发展的指标。

作为数学能力基础的概括,是指在数学领域中对数量关系和空间关系的概括。对数学材料的有效概括一方面必须在不同的现象中发现共同之处,在各种不同性质的现象中建立联系;另一方面必须形成解法的概括化模式。但不论哪一方面,都必须从具体内容中摆脱出来,在各种对象、关系或运算结构中,抽取出相似的、一般的和本质的东西。如有四堆物品:5 只苹果、3 支香蕉、5 块橡皮、5 个茶杯,要求从这四堆物品中找出和其它三堆不一样的一堆物品来。实际上就是要概括出三堆物品的共同属性——数量相同,都是 5。但是就形状、功能等方面,没有哪一种属性对三堆物品是共同的。学生必须在思维上舍弃这些方面的属性,从中抽出"5"来,才能正确指出 3 支香蕉这一堆是一个例外。

对数学材料的概括,在学习数学和解数学题的各个阶段,有不同的表现。教师应根据不同的表现特征对学生进行恰当的启发诱导。

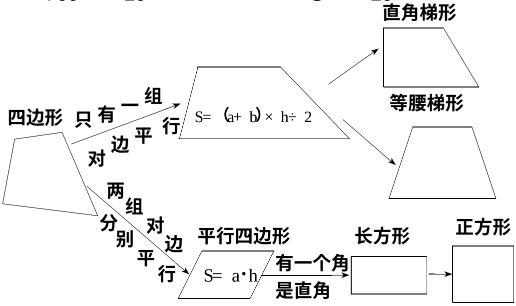
在获得数学信息阶段,主要表现为对数学材料的形式化的知觉能力和掌握题目形式结构的能力。所谓形式化,是指对于一个具体问题或一个数学式子的形式结构的迅速"抽象",从问题或数学式子的实际数字或具体内容中摆脱出来,只留下辨认问题或数学式子类型的标志。概括能力强的学生,在感知题目时,能抓住解题的最主要的条件,能透过情节性因素找出题目的基本结构,能把一些复杂的题目转化为基本形态的题目。例如,"甲、乙两仓共有粮食 38 吨,甲仓存粮的$\frac{4}{5}$等于乙仓存粮的$\frac{2}{7}$,甲、乙两仓各存粮多少吨?"概括能力强的学生,在感知这道题目时,就会想到这是一道"把一个总量分成两个部分量"的题目。

在加工和运用数学信息阶段,概括能力表现在两个方面。其一,简缩数学推理过程和相应的运算系统,用简缩了的结构进行思维。例如,"洗衣机厂上半年生产洗衣机 510 台,完成了全年计划的$\frac{3}{5}$,照这样计算,可提前几个月完成?"概括能力强的学生,根据:

提前完成月数 = 计划完成月数 - 实际完成月数

实际完成月数 = 实际总产量 ÷ 实际每个月产量

这样的关系，撇开“510 台”这一具体数量，简缩推理过程，列出简便的算式“$12-1\div(\frac{3}{5}\div6)$”。也可根据已知完成全年计划的$\frac{3}{5}$需要 6 个月，则完成全年计划需要 $6\div\frac{3}{5}$”个月，列出更为简洁的算式。其二，重组自己的心理活动，突破已经形成的解题模式，而代之以一种新的解题模式。概括能力强的学生，能把某些条件迁移到另外一些条件里，把某些材料迁移到另外一些材料之中。就是说能把看来与当前问题无直接关系的知识联系起来形成新的概括。例如解 $3\frac{4}{5}-[(0.27\times\frac{2}{7}-19\div700)\div0.05]$ 这道题时，不拘泥于原来的运算顺序，从原有的解题模式中解脱出来，根据除法与分数的关系以及分数的基本性质等知识，将小括号部分用新的解题模式代替，即$\frac{54-19}{700}=\frac{1}{20}$，代入原式为 $3\frac{4}{5}-(\frac{1}{20}\div0.05)=2\frac{4}{5}$。



在保持数学信息阶段，概括能力主要表现为对数学关系和数学形式的记忆。即数学关系和数学形式在心理活动中的概括系列得到融会贯通，触类旁通，不断形成逻辑联系。例如，四边形诸概念之间形成如下的系统，就可以说达到了概括的记忆。

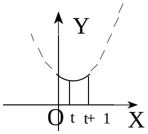
高一数学抽象思维能力的教学培养与训练

从初中到高一年级，数学教材的内容跃上了一个高台阶。高一数学教材明显具有内容增多、难度增大、概念抽象的特点。比如：高中代数第一册第一章函数有基本概念 52 个、符号 28 个，函数概念性质抽象难懂，与初中比，初中时的定义是描述性的，没有强调对应法则，没有引进用 $y=f(x)$ 记号，而高中函数概念提出强调对应法则，“f”记号又从

集合映射角度去理解函数。又如高一立体几何第一章有基本概念 37 个、基本定理、公理推论 21 条 ;立体几何比平面几何更要有一定的空间想象力,象征性的立体图远远不象初中平面几何图形那样具体固定。高中大量的三角公式既要记忆又要理解应用。高一学生学习数学正由单纯的解题转移到数学观念的树立、数学方法的掌握,以及分析、综合、归纳、演绎、概括、类比、想象诸多的能力的培养上。为帮助学生排除数学学习中难以掌握抽象知识的障碍,杭州市第十四中学徐海锋老师常常用以下四类教法,培养学生的数学抽象思维能力:

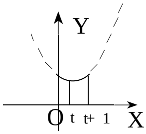
1.图示法

是指用直观形象的图象来反映抽象的数学概念的方法,比如为形象地刻划函数的性质,往往用数形结合,使学生加深对函数概念的理解。



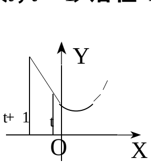
图二

例 1 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$,$x \in [t, t+1]$ 的最小值是 $g(t)$,试写出函数 $S = g(t)$ 的表达式并作出图。



图二

分析 :由 $f(x) = x^2 - 2x + 2$,即 $f(x) = (x-1)^2 + 1$,当 $x \in R$ 时,它表示开口向上的抛物线,且 $x \leqslant 1$ 单调减函数区间 1 图象可表示为 (图一)。因为 $x \in [t, t+1]$ 是一个运动的闭区间,因而它的图象是抛物线上的一段运动的弧。若 $[t, t+1]$ 落在 $f(x) = (x-1)^2 + 1$ 的增函数区间 (图二),则 $g(t) = f(t)$。若 $[t, t+1]$ 落在 $f(x) = (x-1)^2 + 1$ 的减函数区间 (图三),则 $g(t) = f(t+1)$。若 $[t, t+1]$ 落在 $f(x) =$ 非单调区间 (图四),显然 $g(t) = 1$。

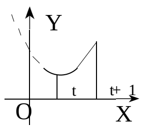


图三

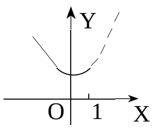
因此,$S = g(t) =$

$$\begin{cases} t^2 + 1 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leqslant t \leqslant 1) \\ (t-1)^2 + 1 & (t >) \end{cases}$$

它的图象可表示为 (图五)。



图四



图五

2.直接感知法

这是对一个抽象的数学问题，先化为具体的理解问题，通过对具体问题的分析达到对抽象的数学问题的感知。例1，为让学生理解若 $y=f(x)$ 的定义域是 G，则 $y=f(g(x))$ 的定义域是 $g(x)\in G$ 的解，我设计分步求解：

问题1.若 $f(x)=\sqrt{x}$，那么 $f(x)$ 的定义域是什么？

答：$x\in[0,\quad)$。

问题2.设 $g(x)=4x^2-1$，那么 $f(g(x))$ 的表达式是什么？

答：$f[g(x)]=\sqrt{4x^2-1}$

问题3. $f[g(x)]=\sqrt{4x^2-1}$ 的定义域是什么？

答：$4x^2-1\geqslant 0$，，$x\in(-\quad,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},+\quad)$。

问题4.已知 $f(x)$ 的定义域是 G，如何求 $y=f[g(x)]$ 的定义域？

答：只需求 $g(x)\in G$ 的解。因为，若分别 x、$g(x)$ 为两个函数的原象(自变量)，因有相同的对应法则 f，所以 x、$g(x)$ 有相同的定义域 G，所以 $y=f[g(x)]$ 的定义域是 $g(x)\in G$ 的解。

例2：已知 $f(x)$ 定义在数集 M 上，且有 $x\in M$，则必有 $-x\in M$，求证：$f(x)$ 可表示为一个奇函数和一个偶函数之和。

不妨先直观感知，设 $y=2^x$，$x\in[-1,1]$。若命题成立，则 $2^x=g(x)+h(x)$，其中 $g(x)$ 是偶函数、$h(x)$ 是奇函数，且 $g(-x)=g(x)$ $h(-x)=-h(x)$，以 $2^{-x}=g(-x)+h(-x)$ 即 $2^{-x}=g(x)-h(x)$，可得

$$\begin{cases} g(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x}) \\ h(x)=\frac{1}{2}(2^x-2^{-x}) \end{cases}$$

那么回到原题，一般有

$$g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$$

$$h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))。$$

完成了从具体到抽象，从特殊到一般的思维衔接。

3.错误辨析法

这是指针对学生解题中的错误，引导学生辨别分析，以纠正数学思维错误的方法。学习数学，难免要做错题目，重要的问题在于：以反树正，明白产生这些错误的原因是什么？防止这些错误的方法是什么？失败的教训有时会比成功的经验更加重要。比如，高一学生初中时已学过

一次函数，但理解不深刻，因此往往对定义域缩小，对应法则是 $y = ax + b$、$(a \neq 0)$ 的函数误认为都是一次函数，对于 $y = 2x + 1$、$x \in Z$，且 $|x| \leqslant 2$ 的图象，不少同学仍画成一条直线。对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 在某一区间的值域，又一律误认为当 $a > 0$ 时，$y \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a}$，当 $a < 0$ 时，$y \leqslant \frac{4ac - b^2}{4a}$ 又如 $y = f(x)$ 的定义域是 $x \in [0,1]$，则 $y = f(x^2 - 1)$ 的定义域是 $x \in [1,\sqrt{2}]$ 或 $x \in [-\sqrt{2}, -1]$ 更是稀里糊涂。在纠错中，引导学生认清其错的一切正是由于对变量转入函数这一个抽象的转折点及“f”对应记号不深刻理解而引起的。用错误辨析法在代数、三角、六体几何的教学纠错中的例子如下：

例 3 设 $f(x) = \log_a(x + 1)$、$(a > 0$，且 $a \neq 1)$，在 $(-1,0)$ 内 $f(x) > 0$，试讨论 a 的取值范围以及 $f(x)$ 的单调性。

〔错解〕：(1) 当 $a > 1$ 时，$f(x) = \log_a(x + 1)$ 单调增加，(2) 当 $0 < a < 1$ 时，$f(x) = \log_a(x + 1)$ 单调减少。

〔辨析〕：错解只是教条地搬用基本对数函数的单调性，而不联系实际情况，忽视了在 $(-1,0)$ 内 $f(x) > 0$ 的条件，因而造成错误。其实条件当 $x \in (-1,0)$ 时，$f(x) > 0$，就是 $(x + 1) \in (0,1)$ 时，$\log_a(x + 1) > 0$，，当 $0 < a < 1$ 时，$f(x) = \log_a(x + 1)$ 是减函数。

例 4 在△ABC 中，$\sin A = \frac{4}{5}$，$\cos B = \frac{12}{37}$，求 $\cos C$ 的值。

〔错解〕 $\sin A = \frac{4}{5}$，，$\cos A = \pm\frac{3}{5}$，又 $\cos B = \frac{12}{37}$，B 为锐角，，$\sin B = \frac{35}{37}$。

(1) 当 A 为锐角时，$\cos A = \frac{3}{5}$。

$$\cos C = -\cos(A + B) = -(\cos A\cos B - \sin A\sin B) = -(\frac{3}{5} \times \frac{12}{37} - \frac{4}{5} \times \frac{35}{37} = \frac{104}{185})。$$

(2) 当 A 为钝角时，$\cos A = \frac{-3}{5}$。

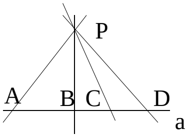
$$\cos C = -\cos(A + B) = -(\cos A\cos B - \sin A\sin B) = \frac{176}{185}。$$

〔辨析〕：错解在于对角 A 为锐角，钝角两类讨论时，没有考虑它们存在的可能性，忽视了 A、B 是三角形内角这个隐含条件。

事实上，$\cos B = \frac{12}{37} < \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$，，$\frac{\pi}{3} < B < \frac{\pi}{2}$ 若 A 为钝角，$\sin A = \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{2\pi}{3}$。

，$\frac{2\pi}{3} < A < \pi$，故 $A + B > \pi$，与 A、B 为三角形内角矛盾，因此 A 不可能为钝角，所以 $\cos C$ 的值只能是$\frac{104}{185}$)。

例 5 过已知直线 a 外一点 P，与直线 a 上的四个点 A、B、C、D 分别画四条直线。(图六)



图六

证明 这四条直线在同一平面内。

(错解)： P，A，B 三点不共线，， P，A，B 共面，即 PA，PB，AB 共面，同理，PB，PC，BC 共面，PC，PD，CD 共面。

A，B，C，D 均在直线 a 上，， PA，PB，PC，PD 四条直线在同一平面内。

(辨析) 错解在证明了四条直线分别在三个平面 (即平面 PAB，平面 PBC，平面 PCD) 内后，用 A，B，C，D 均在 a 上，而认为三个平面合在同一个平面内，这种方法是错误的。错误在于没有根据地用一条直线来保证三个平面重合。因此，错误的原因是概念不清。

(证解) 略。

4.观察分析猜想法

这是培养学生数学猜想能力，锻炼思维，提高数学抽象思维能力的好办法。特别是对一些数学命题式子结构有一定特征性时，通过观察与分析，从而提出解决问题的方法。

例 6：A、B、C 为锐角三角形的三个内角，

求证：$\cos A + \cos B + \cos C < \sin A + \sin B + \sin C$…… (*)

观察分析：从 (*) 式的结构特征，我们能否应用代数中“轮换对称”的概念，不妨猜察能否证明：

(1) $\cos A < \sin A$，(2) $\cos A < \sin B$，

(3) $\cos A + \cos B < \sin A + \sin B$。

显然 (1) 是不成立的。

而 (2) 式 A、B、C 是锐角三角形的三内角

， $A + B > 90°$，， $A > 90 - B$，且 $\cos A < \cos(90° - B)$，即 $\cos A < \sin B$ 成立，同理，可证：$\cos B < \sin A$，因此三式相加求证成立。

而 (3)，可利用和差化积，着重证明：$\cos A + \cos B < \sin A + \sin B$。

左边 $= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}2\cos\frac{A-B}{2}$

右边 $= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$0 < C < \frac{\pi}{2}$，

$\because 0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{4}$,

$\therefore \sin\frac{C}{2}<\cos\frac{C}{2}$,且 $\cos\frac{A-B}{2}>0$,

$\therefore$ 上式成立。

同理可证:$\cos B+\cos C<\sin B+\sin C$

$\cos C+\cos A<\sin C+\sin A$。

三式相加,即可得出求证成立。这样猜想分析,就容易找到证明本题的两种方法。

(具体证法略)。

综上所述,可见正像思维科学告诉人们,一个人的思维能力的高低,有天赋的因素,有知识与经验的因素,更有后天锻炼的因素,高中一年级学生的数学抽象思维能力是可以培养和锻炼的。不管用图示法,还是用直接感知法,以及错误辨析法、观察分析猜想法,都是为了锻炼学生的思维,优化其数学思维。通过我们教师的启发、分析、引导,开拓学生的思路,促进其智力的提高,发展其数学想象思维能力。而能力的提高又极大地影响促进学生进一步掌握知识,从而大面积提高数学教学的质量。

合情推理与数学学习

1.合情推理及其特征

所谓合情推理就是从具体的事实经验出发,通过观察、实验、类比、联想、归纳、猜想的一种推理。这种推理的途径是从观察、实验入手,或通过类比而产生联想,或通过归纳而作出猜想。这就是说,合情推理的条件与结论之间是以联想或猜想作为桥梁。

根据合情推理的涵义,北京教育学院方金秋老师认为合情推理具有以下特征:

(1) 似真性。 由于合情推理产生于学习者个人的联想、猜想,因此,合情推理的结论与条件之间并不存在一种必然性的关系,有时即使条件正确,但是由于推理者主观的判断失误,可能出现不正确的结论。例如,伟大的法国数学家费尔马(Fermat)从素数 5,17,257,65537 中得出它们的一般形式为 $2^{2^n}+1$,且它们恰是当 n 为 1,2,3,4 时的值。于是费尔马通过归纳,作出

了大胆的猜想:“凡是 2^n+1 形式的数均为素数。”著名的数学家欧·拉发现 $2^{2^n}+1$ 形式的数。当 $n=5$ 时不是素数,即

$$2^{2^5}+1=641\times6700417。$$

从而推悉了费尔马的猜想。

合情推理的似真性出自不完全归纳或类比这样两个过程。由不完全归纳而作出的猜想,可能产生偏颇,出现判断性的失误。由于类比联想主要依据事物间同一性,而忽略了事物间的差异性,也往往出现结论的错误。正由于合情推理的上述情况,因此所得的结论为似真的,有人也称合情推理为似真推理。

⑵ 主观性。　在合情推理过程中,往往由于推理者个人的原认知结构的差异、认知方式的不同以及情绪、爱好等主观因素的作用,推理的结构会因人而异。一般地说,人们的主观认识与现实世界的客观存在总存在着一定的差距,只有当主观的认识接近客观现实时,这个认识才接近真理。因此在同一条件下有的学生通过合情推理能得到正确的结论,而另有学生得不出正确结论。

⑶ 创新性。　合情推理的创新性是指推理的思路或推理的过程的新颖性和突破性。这种创新性主要来源于在合情推理过程中的直觉与灵感。

直觉是一种思维形式。它是在丰富的知识与经验的基础上,在短时间内直观地把握事物的本质、瞬间内作出判断的思维形式。心理学认为,直觉是直接觉察事物的心理活动。在合情推理过程中,无论是类比联想,还是归纳猜想,往往要借助于直觉思维。数学家笛卡儿曾强调直觉在数学中的重要性,他说:“…如果我们想去推断 2 加 2 等于 3 加 1,那么我们必须直觉地看到不仅 2 加 2 得 4 和 3 加 1 得 4,并且也应当看到由这两个命题出发,上面提到的第三个命题也就必然导出。”直觉的洞察力表现为对数学问题迅速作出判断的特征。例如,对无理方程 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-2}=0$ 能在算术根知识基础上,瞬间判断出方程无解来。这实际上是一种直觉。

灵感也是一种思维形式。在合情推理中,它是一种重要的思维形式。灵感是经过长期思维的瞬间顿悟,是思维的信息迅速转化和急剧重组,形成新的信息系统,从而使思维出现新的突破。

①在经过长时间的思维而不得其解的情况下,思维从显意识转入

潜意识。

②由于偶然因素的触发(或由思维者头脑内部的思路接通,或由思维者外部的事物的引发),使思维者显意识与潜意识接通,思维的焦点迅速集中,形成瞬间的认识飞跃。

在数学问题解决的过程中,经常地有这种灵感出现的。法国数学家阿达玛说:“一个考虑很久的问题的答案往往会在醒来的时候突然出现。比如被一个响声突然闹醒时,一个长期寻求的答案会突如其来地闪现于脑海之中,并且求解或证明的方法会完全不同于自己过去的努力方向,这种情景使人终生难忘。”数学家彭加莱也描述过这种过程的体验。他在长期思考一个数学问题而不得其解的情况下,踏上了旅游的行程。他说:“……旅途中的许多事使我忘掉了我的数学工作。到达康斯坦茨湖,我们要乘一辆马车到其他地方去,就在我把脚放到马车踏板上的一刹那,一个思想突然闪现在我脑海中,而在此以前,我还从来没有想到过。”

灵感的出现往往带来一种崭新的思想、方法,从而使思维的结果具有创新性。这也就是合情推理具有创新性的思维机理。

2.合情推理与数学学习方法

长期以来,在数学学习中总是强调着思维能力的培养,而这里的思维主要指逻辑思维。在数学的逻辑思维又主要的是指演绎推理,即三段论推理。这在中学数学教科书中可以说是俯拾即是的。不过在数学中的三段论推理一般都表现为“因为( )……,所以( )……”的形式。例如,

$\angle A$ 与 $\angle B$ 是对顶角,, $\angle A=\angle B$。

事实上,这是一种简化了的三段论,其原始的三段论形式应为:

大前提:对顶角相等,

小前提:$\angle A$ 与 $\angle B$ 是对顶角,

结论:$\angle A=\angle B$。

在数学中的推理形式,是省略了大前提的三段论推理。特别是从初中平面几何开始,就对学生进行严格的演绎推理训练,使学生形成根深蒂固的推理方法。

在数学中,这种三段论的推理形式是一种人为的逻辑过程。它实际上是把数学产生的自然过程给颠倒过来了,只是把一堆数学的结论

材料用逻辑的链条维系成一个逻辑系列，形成具有内在逻辑结构的体系。这种人为的逻辑结构体系不符合数学的发现过程。数学的发现过程存在着各种各样的推测与猜想。波利亚说："数学可以看作是一门证明的科学，但这只是一个方面，完成了的数学理论，用最终形式表现出来，象是仅仅由证明构成的纯粹证明性的。但是在建立过程中的数学，也跟人类处于建立过程中的其他知识一样，在证明数学定理之前，你必须先猜测它；在证明细节之前，应该先预测到论证的主纲。你应该综合观察和仿效类推，应该一试再试。"这里所说的"猜测"、"类推"、"一试再试"，实际上都是指合情推理的过程。可以这么说，数学发现主要靠的是合情推理；数学理论的整理主要的是靠演绎推理。

既然演绎推理是用来整理数学理论的一种形式，合情推理是用来发现数学知识的一种形式，当然，我们对二者不可偏废。审视以往的数学教科书，多是讲数学的演绎推理方法。检查我们以往的数学教学，也多是培养学生演绎推理能力的。作为数学教育，我们要通过数学教学来培养学生发现数学知识的能力，让学生通过数学的学习过程，重蹈数学家发现数学的道路。只有这样，才能更有效地培养出一代有创新性、有发现能力的新人。而这方面的培养，一个最为有力的工具就是合情推理。因此，提高学生合情推理能力是我们当前数学教学的一项重要任务。

要培养学生合情推理的能力，除了在数学教材中要提供充分的让学生进行推测与猜想的情境、在教师的教学中要注意引导学生进行合情推理训练外，这里，学生也要在学习方法上以及意识上有一个相应的转变或更新，它主要的表现为以下几方面：

⑴ 在数学学习中，应着意观察。　观察是思维的窗口，是有目的的视觉感知。欧拉说："……今天已知的数的许多性质，大部分都是经过观察发现的，而且在它的真实性被严格证实以前很久就已被发现了。虽然有许多数的性质我们都非常熟悉，但至今还不能证明，只有靠观察才能获得这些知识。"

对于学习数学的学生来说，经常着意于观察数学对象，通过观察来培养推测的才干，这对培养合情推理是大有好处的。例如，当学生看见以下的一些等式：

$$1 \qquad = 0 + 1$$

$$\begin{aligned} 2+3+4 &= 1+8 \\ 5+6+7+8+9 &= 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 &= 27+64 \end{aligned}$$

时,他会有意识地去观察这几个等式的一般性法则,即它们应遵守什么样的规律性？这就是说他要有观察的意识。由于有观察的意识,他才能出现观察的动机和意向,这是着意观察的第一要求。

其次,要学会观察,即要善于从被观察的对象中,找出一般性与特殊性的规律来。例如,在以上的 4 个等式中,有如下特性：

①等式左边为一段连续自然数之和,且最后一个数恰为各等式序号的平方,最前一个数恰为等式序号减 1 平方加 1。

②等式右边均为两数立方和,且也与等式序号具有明显的相关性。

观察的深入与周到,对于推测的作出起到重要作用。往往由于观察的深入与周到,则推测规律就是水到渠成的事了。例如,对上面的等式周到的观察,作出以下的一般性推测就比较容易了,事实上,上述等式的一般形式可以写为

$$\sum_{i=1}^{2n-1}(n-1)^2+1=(n-1)^3+n^3。$$

(2) 要养成归纳猜想与类比联想的习惯。　既然归纳、类比与猜想是合情推理的重要环节,学习数学的过程中要有意识地养成这种习惯。

归纳是从若干特殊事物的属性中找出其共同性,从而归纳出一般性来。“普遍性寓于特殊性之中”是归纳的核心原则。当学习者见到数列。

2,10,26,50,82,…

时,通过观察,发现这一数列各项中有一普遍性 :每个数减 1,恰为一个奇数的平方。于是归纳出一般性性 数列的通项公式为

$$(2n-1)^2+1。$$

在这里归纳把观察与猜想联系起来,使猜想成为观察后顺水推舟的彼岸。

观察而发现事物的普遍的内在性质,归纳而产生猜想,猜想的结果则是合情推理的结论。要养成归纳的习惯,首先要有归纳的意识,意识来自于求知的欲望。阿达玛说 :这种热切地希望去理解、去认识和洞察未知世界的强烈欲望,乃是科学研究的动力。”学生是未来社会的建设者,未来社会需要具有创造性的人才,学生要把自己培养成创造性人才,在数学学习上就要注意合情推理能力的培养,具体到归纳猜想的习惯培养上,就要逐步使自己具备归纳意识。这可以说是培养自己具有合情推理能力的一种思想方法。

类比与归纳一样,它的培养也需要类比意识。类比意识的存在,才

能形成类比的习惯。类比就是在两类相似事物中的一些属性进行求同的思维。当学生学习了直线

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

具有$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$时,则 $l_1 /\!/ l_2$。学生如果具有类比意识、养成类比习惯的话,他一定会把平面上的直线平行条件与空间中的平面平行条件进行类比,并大胆地作出联想:

对于空间两个平面:

$$a_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$a_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

当$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$时,则有 $a_1 /\!/ a_2$。

类比联想是从一个普遍性推出另一个普遍性的过程。在数学学习中如果有类比意识,他就会经常地在解决完一类数学对象之后,会去类比,通过类比可能会得出与之相似的另一类数学对象的类似性质来。这样,就可以不断提高自己的类比水平。

⑶ 要学会想象。 想象是思维者在自己头脑中创造新形象的思维方式,它是数学发现的不可或缺的方法。爱因斯坦说过,想象力比知识更重要,因为知识是有限的,而想象力概括着世界上的一切,推动着进步,而且是知识进化的源泉。严格地说,想象力是科学研究中的实在因素,在我们数学学习中,没有想象就不可能有合情的联想。归纳猜想中,需要从若干个别对象的性质中,想象出一般的性质 类比联想中,需要从一类对象的性质中想象出与之相似的另一类对象的性质。在这些方面,想象是具有创造性的思维活动。数学大师欧拉在数学上的想象力是出类拔萃的。他在解决“七桥问题”时,想象出“一笔画”,他在解决自然数平方的倒数级数之和

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + 1\,\frac{1}{n^2} + \cdots$$

时,想象到三角方程 $\sin x = 0$ 的展开式

$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = 0,$$

即 $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = 0$$

经比较系数,得

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}。$$

欧拉在解决数学问题时的想象力令人叹服!

学习数学中,想象力的高低对猜想的速度与准确性起到了决定性的作用。