

太原市高三第三次月考

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。)

(1) 直线 $x + 2ay - 1 = 0$ 与直线 $(3a - 1)x - ay - 1 = 0$ 平行且不重合，则 a 等于()

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$

(C) 0 或 $\frac{1}{3}$ (D) 0 或 $\frac{1}{6}$

(2) 在空间，下列命题正确的是()

若两直线 a 、 b 分别与直线 l 平行，则 $a \parallel b$ 。

若直线 a 与平面 β 内的一条直线 b 平行，则 $a \parallel \beta$ 。

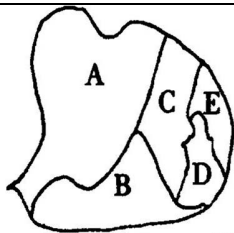
若直线 a 与平面 β 内的两条直线 b 、 c 都垂直，则 $a \perp \beta$ 。

若平面 β 内的一条直线 a 垂直平面 γ ，则 $\beta \perp \gamma$ 。

(A) (B)

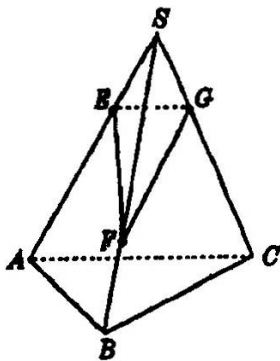
(C) (D)

(3) 直线 l 的方程为 $y = kx - 1$ ，双曲线 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 1$ ，若 l 与 C 的右支相交于不重合的两点，则实



(12) 如图三棱锥 $S-ABC$ 中, $\frac{SE}{EA} = \frac{BF}{SF} = \frac{SG}{GC} = \frac{1}{2}$, 则截面 EFG 把三棱锥分成两部分体积的比为 ()

- (A) 1 9
(B) 1 7
(C) 1 8
(D) 2:25



二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在题中横线上。)

(13) 圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y-25=0$ 距离的最小值为_____。

(14) 设 $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} =$ _____。

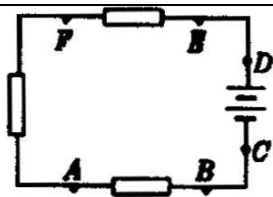
(15) α 、 β 是两个不同的平面， m ， n 是不在 α 与 β 内的两条不同直线，给出四个论断： $m \perp n$ ； $\alpha \perp \beta$ ； $n \perp \beta$ ； $m \perp \alpha$ 。以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题： $(\quad)(\quad)(\quad) \Rightarrow (\quad)$ 。(填序号)

(16) 自空中一点 P 观察地面上的三点 A 、 B 、 C 的俯角为 α 、 β 、 α ，测得 $AB=a$ ， $BC=b$ ，且 A 、 B 、 C 三点依次排列在同一直线上，则 P 到地面的距离为 _____。

三、解答题(本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。)

(17) (本题满分 12 分)

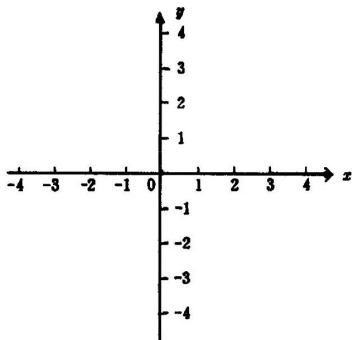
如图，某电子器件是由三个电阻组成的回路，其中共有六个焊接点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F ，如果某个焊接点脱落，整个电路就会不通。每个焊接点脱落的概率均是 $1/2$ ，现在发现电路不通了，那么至少有两个焊接点脱落的概率是多少？



(18) (本题满分 12 分)

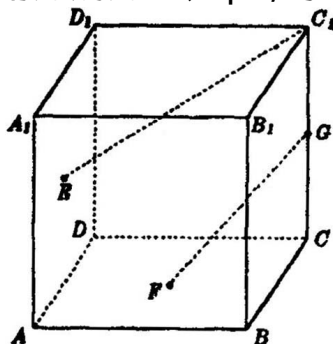
已知 x, y 满足不等式组
$$\begin{cases} x + y - 1 \leq 0, \\ x - y - 1 \geq 0, \\ x + 2y + 1 \geq 0, \end{cases}$$
 求 $z = 20 - 2y + x$ 的最大值和最小

值。



(19) (本题满分 12 分)

如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 分别是正方形 ADD_1A_1 和 $ABCD$ 的中心， G 是 CC_1 的中点。设 GF 、 C_1E 与 AB 所成的角分别为 α 、 β ，求 $\alpha + \beta$ 的值。



(20) (本题满分 12 分)

已知大西北某荒漠上 A、B 两点相距 2 千米，现准备在荒漠上围垦出一片以 AB 为一条对角线的平行四边形区域建成农艺园。按照规划，围墙总长为 8 千米。

() 试求四边形另两个顶点的轨迹方程。

() 问农艺园的最大面积能达到多少？

() 该荒漠上有一条直线型小溪 l 刚好通过点 A , 且 l 与 AB 成 45° 角。现要对整条小溪进行改造, 但考虑到小溪可能被农艺园围进的部分今后要重新设计改造, 因此对该部分暂不改造。问暂不改造的部分有多长?

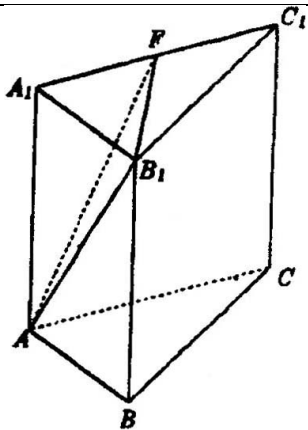
(21) (本题满分 12 分)

如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=AB=a$, F 是 A_1C_1 的中点, 连结 FB_1 , AB_1 , FA 。

() 求证: 平面 $AFB_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 。

() 求证: 直线 BC_1 平面 AFB_1 。

() 求二面角 A_1-AB_1-F 的正弦值。



(22) (本题满分 14 分)

已知双曲线的一个焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ ，且渐近线为 $y = \pm\sqrt{2}x$ 。过点 $A(2, 1)$ 的直线 l 与该双曲线交于 P_1, P_2 两点。

() 求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程；

() 过点 $B(1, 1)$ 能否作直线 l' ，使 l' 与已知双曲线交于两点 Q_1, Q_2 ，且 B 是线段 Q_1Q_2 的中点，请说明理由。

参考答案

(1)D (2)C (3)B (4)D (5)A (6)C (7)A
(8)B (9)D (10)A

(11)A (12)D

(13)4 ; (14) $\frac{3^n+1}{2}$; (15) $\Rightarrow$ 或 $\Rightarrow$

$$(16) \frac{\sqrt{ab} \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\beta+\alpha) \sin(\beta-\alpha)}}$$

$$(17) (12 \text{ 分}) 1 - \frac{1}{2^6} - C_6^1 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{57}{64} (12 \text{ 分})$$

(18) 如图不等组为不等式组所表示的可行域 (4 分)

令 $u=x-2y$

作出 $l_0: x-2y=0$

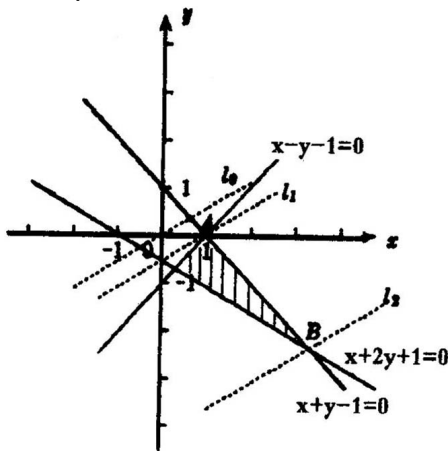
在可行域内平行移动 l_0 得 l_1, l_2 , 可知 A、B 为满足条件的最优解。

(8 分)

由 $\begin{cases} x+y-1=0, \\ x-y-1=0 \end{cases}$ 得 $A(1, 0)$, $u_{\min}=1$

由 $\begin{cases} x+2y+1=0, \\ x+y-1=0 \end{cases}$

得 $B(3, -2)$, $u_{\max}=7$ (10 分)



$z_{\min}=21$, $z_{\max}=27$ 。(12 分)

(19) 如图, 建立坐标系, 设 $AB=2a$

则 $\vec{AB}=(2a, 0, 0)$

$\vec{FC}=(2a, 2a, 2a)-(a, a, 0)=(a, a, a)$

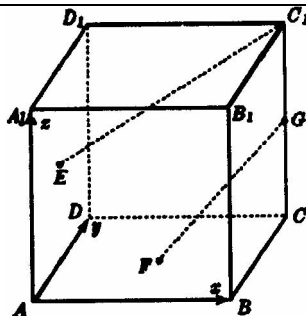
$\vec{EC}_1=(2a, 2a, 2a)-(0, a, a)=(2a, a, a)$ (5 分)

$\therefore \cos(\angle \vec{AB}, \vec{FC}) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin(\angle \vec{AB}, \vec{FC}) = \frac{\sqrt{6}}{3},$

$\cos(\angle \vec{AB}, \vec{EC}_1) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (10 分)

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (12 分)

此题应用解三角形的方法应给相应的分。

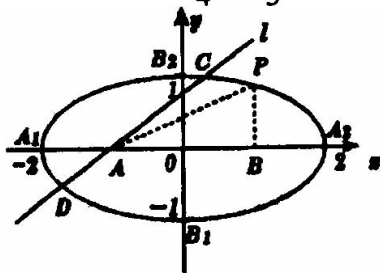


(20) () 如图，以 AB 所在直线为 x 轴，其中垂线为 y 轴建立坐标系。

设 P 为平行四边形不同于 A 、 B 的另一顶点。

则 $|PA| + |PB| = 4$

点 P 的轨迹方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($y \neq 0$) (5 分)



() 当点 P 位于 B_1 或 B_2 时，农艺园面积最大且 $S = 2\sqrt{3} \text{ (km}^2\text{)}$ (8 分)

() $l: y = x + 1$ 与椭圆交于 C 、 D 两点。由

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \text{ 得 } 7x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$|CD| = 24/7$$

暂不改造部分长变为 $\frac{24}{7} km$ (12 分)

(21) () 在正三棱柱中 F 为 $A_1 C_1$ 的中点

$$\Rightarrow B_1 F \perp A_1 C_1$$

$$\left. \begin{array}{l} A A_1 \perp \text{面 } A_1 B_1 C_1 \\ B_1 F \subset \text{面 } A_1 B_1 C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow A A_1 \perp B_1 F \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow B_1 F \perp \text{面 } A C_1 \\ B_1 F \subset \text{面 } A B_1 F \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{面 } A F B_1 \perp \text{面 } A C_1 \quad (3 \text{ 分})$$

(II) 连结 $B C_1$, $A_1 B$, 设 $A_1 B \cap A B_1 = E$, 连结 $E F$.

$$\left. \begin{array}{l} E F \parallel B C_1 \\ E F \subset \text{面 } A F B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow B C_1 \parallel \text{面 } A F B_1. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(III) 面 } A C_1 \perp \text{面 } A F B_1, \text{ 又面 } A C_1 \cap \text{面 } A F B_1 = A F \\ \text{在平面 } A C_1 \text{ 中过 } A_1 \text{ 作 } A H \perp A F, \text{ 垂足为 } H \end{array} \right\} \Rightarrow A H \perp \text{面 } A F B_1$$

连结 $H E$, $A_1 E$ $A B_1$

$\Rightarrow H E$ 上 $A B_1 \Rightarrow A_1 E H$ 为二面角 $A_1 - A B_1 - F$ 的平面

角 (9 分)

在 $A A_1 B_1$ 中, $A_1 E = \frac{\sqrt{2}}{2} a$

在 $A A_1 F$ 中, $A_1 H \cdot A F = A_1 A \cdot A_1 F \quad A_1 H = \frac{\sqrt{5}}{5} a_0$

在 $A E H$ 中, $\sin A_1 E H = \frac{A_1 H}{A_1 E} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ (12 分)

(22) () 双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ (3 分)

设 P_1 、 P_2 的坐标分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 中点

$P(x, y)$

$$\text{则 } x_1^2 - \frac{y_1^2}{2} = 1 \quad \text{①}$$

$$x_2^2 - \frac{y_2^2}{2} = 1 \quad \text{②}$$

$$\text{— 得, } 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$$

当 $x_1 \neq x_2$, $y \neq 0$ 时, $\frac{2x}{y} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

P_1, P_2, P, A 四点共线 $\frac{y-1}{x-2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

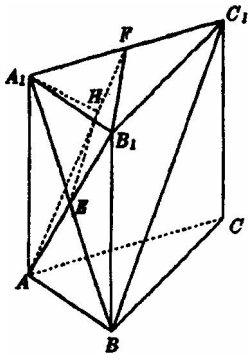
由 得 $\frac{2x}{y} = \frac{y-1}{x-2}$, 即 $2x^2 - y^2 - 4x + y = 0$

当 $x_1 = x_2$ 时 $x=2, y=0$ 满足此方程。

中点 P 的轨迹方程是 $2x^2 - y^2 - 4x + y = 0$ (8 分)

() 假设存在直线 l' , 同(1)可得 l' 的斜率为 2, l' 的方程为 $y=2x-1$ 。(11 分)

$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 无解, 与假设矛盾, 满足条件的直线 l' 不存在。(14 分)



南宁市高中毕业班适应性测试

$$\text{公式: } \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

一、选择题: (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)。

(1) 设集合 $S = \{y \mid y = 3^x, x \in \mathbb{R}\}$, $T = \{y \mid y = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $S \cap T$ 为()

(A) S (B) T

(C) $\emptyset$ (D) 有限集

(2) 若实数 a, b, c 满足 $|a-c| < |b|$, 则下面不等式中成立的是()

(A) $|a| > |b| - |c|$ (B) $|a| < |b| + |c|$

(C) $a > c - b$

(D) $a < b + c$

(3) 圆 $\rho = -\sin \theta$ 的圆心的一个极坐标是()

(A) $(1, \frac{\pi}{2})$

(B) $(1, \frac{3\pi}{2})$

(C) $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ (D) $(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2})$

(4) 两个正方体 M_1, M_2 , 棱长分别 a, b , 可知 M_1, M_2 , 棱长的比为 $a : b$, 表面积比为 $a^2 : b^2$; 体积比为 $a^3 : b^3$ 。我们把满足类似条件的几何体称为“相似体”, 下列给出的几何体中是“相似体”的应是 ()

- (A) 两个长方体 (B) 两个球
(C) 两个圆柱 (D) 两个圆锥

(5) 设 $a > 0, a \neq 1$, 函数 $y = \log_a x$ 的反函数和 $y = \log_a 1/x$ 的反函数的图象关于 ()

- (A) x 轴对称 (B) y 轴对称
(C) $y=x$ 对称 (D) 原点对称

(6) 两个母线长相等的圆锥, 它们的侧面展开图恰好拼好一个圆, 且它们侧面积之比为 $1:2$, 则它们的高的比为 ()

- (A) $2:1$ (B) $8:5$
(C) $2\sqrt{2}:\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{2}$

(7) 设 $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ 若 $|Z_1|=5, |Z_2|=8, |Z_1-Z_2|=7$, 那么 $\arg(\frac{Z_1}{Z_2})^3$ 等于 ()

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2^3}$
(C) π (D) $\frac{\pi^3}{27}$

(8) 建筑学规定，民用住宅的窗户面积必须小于地板面积，但按采光标准，窗户面积与地板面积的比值应不小 10%，并且这个比值越大，住宅的采光条件越好，若窗户和地板同时增加相等的面积，则住宅的采光条件比原来()

- (A) 变好了 (B) 变差了
(C) 无变化 (D) 以上情况都有可能

(9) 若 $a < 0$ ，且 $(\frac{x}{10})^a > (1/x)^a > x^a$ ，则正数 x 的取值范围是()

- (A) $0 < x < 1$ (B) $0 < x < \sqrt{10}$
(C) $1 < x < \sqrt{10}$ (D) $x > 1$

(10) 某建筑公司规划办公室有 8 个人，现从中选出 3 人出席 A、B、C 三个不同的会议，其中甲如果出席，则只以参加 B 会或 C 会，那么选派人员出席会议的方法有()

- (A) 35 (B) 56
(C) 294 (D) 336

(11) 对于函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，($a \neq 0$) 作 $x = h(t)$ 的代换，则总不改变函数 $f(x)$ 的值域的代换是()

- (A) $h(t) = 10^t$ (B) $h(t) = t^2$
(C) $h(t) = \log_2 t$ (D) $h(t) = \sin t$

(12) 将正偶数按下表编排：

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	第 5 列
第 1 行		2	4	6	8

第 2 行	16	14	12	10	
第 3 行		18	20	22	24
第 4 行	32	30	28	26	
...	...	...	...	...	...

则 2002 在 ()

(A) 第 501 行第 1 列 (B) 第 501 行第 2 列

(C) 第 251 行第 1 列 (D) 第 251 行第 2 列

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分,把答案写在题中的横线上。

(13) 若 $f(x)=2\sin\omega x$ ($0 < \omega < 1$) 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上的最大值是 $\sqrt{2}$, 则 $\omega =$ _____。

(14) 设 F_1 、 F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P 是椭圆上一点, 且 $|PF_1| - |PF_2| = 1$, 则 $\angle F_1PF_2$ 等于 _____。

(15) 当 $a = \sqrt[3]{5}$ 时, $(a+1)^5 - 5(a+1)^4 + 10(a+1)^3 - 10(a+1)^2 + 5(a+1)$ 的值等于 _____。

(16) 方程 $x+1=(2x-1)^{\operatorname{sgn} x}$ 的解是 _____ 其中符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$

三、解答题:

(17) (本小题 12 分)

求 $\frac{\sqrt{3} - 4\sin 20^\circ + 8\sin^3 20^\circ}{2\sin 20^\circ \sin 480^\circ}$ 的值。

(18) (本题共 12 分) 在直角坐标平面上, 有一点列 $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2), \dots, P_n(a_n, b_n) \dots$ 对于每一个自然数 n , 点 $P_1, P_2, \dots, P_n \dots$ 都在曲线 $y=x^2$ 上, 且点 P_n 与点 $A_n(n, 0), B_n(n+1, 0)$ 构成以 P_n 为顶点的等腰三角形。

() 求 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ 各点纵坐标构成的数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

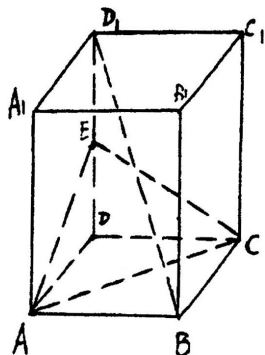
() 设 $C_n = \frac{1}{2b_n - a_n + n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 + C_2 + \dots + C_n)$ 。

(19) (本题满分 12 分) 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 点 E 在棱 D_1D 上, 截面 $EAC \perp D_1B$, 且面 EAC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45° , $AB=a$ 。

() 求截面 EAC 的面积 ;

() 求异面直线 A_1B_1 与 AC 之间的距离 ;

() 求三棱锥 B_1-EAC 的体积。



(20) (本小题满分 12 分) 据 2000 年 4 月份的“光明日报”报道，水土流失是我国西部开发中最突出的生态问题，全国 9100 万亩的山坡耕地需要退耕还林，其中西部地区占 70%。国家确定 2000 年底在西部地区退耕土地面积为 515 万亩，以后每年退耕土地面积递增 12%。

() 试问从 2000 年起，到那年底西北地区基本解决退耕还林问题？(用四舍五入精确到年)

() 为支持退耕还林工作，国家财政一次性补助农民每亩 300 斤粮食，每斤粮食按 0.70 元折算，并

且每亩已退还林地每年补助 20 元。试问西北地区基本解决退耕还林时，国家财政共支付约多少亿元。（用四舍五入精确到亿元。）

($\lg 1.12=0.0492$, $\lg 2.484=0.3952$,
 $1.12^9=2.773$, $1.12^8=2.476$)

(21)(本小题满分 12 分)已知 C 过定点 $A(0, P)$ ($P>0$)，圆心 C 在抛物线 $x^2=2py$ 上运动，若 MN 为 C 在 y 轴上截得的弦，设 $|AM|=l_1$, $|AN|=l_2$, $\angle MAN=\theta$ 。

()当 C 点运动时， $|MN|$ 是否变化？
 证明你的结论：

() 求式子 $\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1}$ 的最大值，并求取得最大值时的 θ 值和此时 C 的方程。

(22) (本题满分 14 分) 已知

$$f_n(x) = (1+2x)(1+2^2x) \dots (1+2^n x)$$

() 设 $f_n(x)$ 展开式中 x 的系数为 a_n ，求 a_n ；

() 设 $f_n(x)$ 展开式中 x^2 项的系数为 b_n ，求证： $b_{n+1} = b_n + 2^{n+1} a_n$ ；

() 是否存在常数 a 、 b ，使 $b_n = 8/3(2^{n-1} - 1)(2^n a + b)$ 对一切 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ 提成立?说明理由。

参考答案

一、 (1)A (2)B (3)D (4)B (5)B (6)C
(7)C (8)A (9)C (10)C (11)C (12)D

二、 (13) $\frac{3}{4}$ (14) $4/3$ (15) 6 (16) 0, 2, -
 $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

$$\begin{aligned}
 \text{三、(17)解:原式} &= \frac{\sqrt{3} - 4\sin 20^\circ (1 - 2\sin^2 20^\circ)}{2\sin 20^\circ \cdot \sin 120^\circ} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 4\sin 20^\circ \cos 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ} \quad (5 \text{ 分}) \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 4 \times \frac{1}{2} (\sin 60^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{3} \sin 20^\circ} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (11 \text{ 分}) \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (12 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

(18) 解: () 由已知 P_n 坐标为 (a_n, a_n^2) , 则 $b_n = a_n^2$ (2 分)

设 $A_n(n,)$, $B_n(n+1, 0)$, 由已知 $|P_n A_n| = |P_n B_n|$ (4 分)

$$\therefore a_n = \frac{n+n+1}{2} = \frac{2n+1}{2} \quad \therefore b_n = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} C_n &= \frac{1}{2b_n - a_n + n} \\
 &= \frac{1}{2\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 - \frac{2n+1}{2} + n} = \frac{1}{2n(n+1)} \quad (8 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

$$\therefore C_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad (10 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \quad (12 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

(19) 解: () 连结 DB 交 AC 于 O, 连结 EO.

底面是正方形

DO AC 又 ED 上底面 ABC

(1 分)

EO A C(分)

EOD 是面 EAC 与底面 ABCD 所

成二面角的平面角

$EOD=45^\circ$ (3 分)

$$DO = \frac{\sqrt{2}}{2} a, AC = \sqrt{2} a \quad EO = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \sec 45^\circ = a$$

$$S_{\triangle EAC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \quad (4 \text{ 分})$$

() 由题设知 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 上正四棱柱 A₁A

A₁B₁

又 A₁A 底面 ABCD

A₁A A , 故 A₁A 是异面直线 A₁B₁ 与 AC 的公垂线段(6 分)

D₁B 平面 EAC , 且面 D₁BD 门面 E AC=EO

D₁B EO 又 C 是 DB 的中点 E 上 D₁D 的中点(7 分)

D₁D=2ED= $\sqrt{2}a$ 故异面直线 A₁B₁ 与 AC 的距离为 $\sqrt{2}a$ (8 分)

() 由(2)可知 , 四边形 BB₁D₁D 是正方形 , 连结 B₁D 交 EO 于 Q

B₁D E

又 B₁D AC B₁D 面 CAE

B₁Q 是三锥 B₁-EAC 的高(10 分)

$$B_1 Q = \frac{3}{4} B_1 D = \frac{3}{2} a \quad \because V_{B_1 - EAC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \cdot \frac{3}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{4} a^3$$

(20)解: () 设每年退耕数为 a_n , 则 $\{a_n\}$ 是一个等比数列, 公比 $q=1.12$ (1 分)

依题意得: $515(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) \geq 9100 \times 70\%$ (2 分)

$$515 \times \frac{1-1.12^n}{1-1.12} \geq 6370 \quad (4 \text{ 分})$$

$$1.12^n \geq 2.484 \quad \text{取对数 } n \geq \frac{\lg 2.484}{\lg 1.12} = 8 \quad (5 \text{ 分})$$

答: 从 2000 起, 到 2007 年底西部地区基本解决退耕还林问题。 (6 分)

() 粮食补助一次性的, 支付数为:

$$9100 \times 70 \times 300 \times 0.7 \times 10000 = 1337700 \times 10^4 \text{ 元} \quad (7 \text{ 分})$$

退耕费为每年一, 第一年退的耕地补 8 年次, 最后一年退的耕地补一次。

$$\text{支付数为: } 51(8+7q+6q^2+\dots+2q^6+q^7) \times 20 \times 10^4$$

$$\text{设 } s=8+7q+6q^2+\dots+2q^6+q^7 \quad qs=8q+7q^2+\dots+2q^7+q^8 \quad (9 \text{ 分})$$

$$(q-1)s = -8+q+q^2+\dots+q^7+q^8 = \frac{q^9-1}{q-1} - 9 = 5.77 \quad (10 \text{ 分})$$

$$s=48 \quad (11 \text{ 分})$$

共支付 $515 \times 48 \times 20 \times 10^4 + 1337700 \times 10^4 = 1832100$ 万元 = 183.2 亿元 (12 分)

(21)解: () 设 $C(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 = 2qy_0$ ($y_0 \geq 0$) (1 分)

作 CD $\perp$ x 轴于 D, 则 $|CD| = y_0$ (2 分)

$$|MN| = 2|MD| = 2\sqrt{|CM|^2 - |CD|^2} = 2\sqrt{|CA|^2 - |CD|^2} \quad (3 \text{ 分})$$

$$=2\sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2} - y_0^2$$

$$=2\sqrt{x_0^2 - 2py_0 + p^2}$$

$$=2P \text{ (5 分)}$$

当 C 点运动时, $|MN|$ 保持不变, $|MN|$ 为定值
2p (6 分)

() 解法, 由(1)得 $|MN|=2p$,

设 $M(x_0-p, 0)$, $N(x_0+p, 0)$,

$$\therefore l_1 = \sqrt{p^2 + (x_0 - p)^2}, l_2 = \sqrt{p^2 + (x_0 + p)^2} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\therefore l_1^2 + l_2^2 = 4p^2 + 2x_0^2, l_1 \cdot l_2 = \sqrt{4p^4 + x_0^4} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 \cdot l_2} = \frac{4p^2 + 2x_0^2}{\sqrt{4p^4 + x_0^4}} = \frac{4p^2 + 4py_0}{\sqrt{4p^4 + 4p^2 y_0^2}} = 2 \cdot \frac{p + y_0}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}$$

(9 分)

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{p^2 + y_0^2 + 2py_0}}{\sqrt{p^2 + y_0^2}} \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{p^2 + y_0^2 + (p^2 + y_0^2)}}{\sqrt{p^2 + y_0^2}} = 2\sqrt{2} \quad (10 \text{ 分})$$

当且仅当 $y_0=p$ 时, $\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1}$ 取最大值 $2\sqrt{2}$, 这时

$$x_0 = \pm \sqrt{2}p$$

$|CD|=y_0=P$, $M(CN=90^\circ)$, 又 θ 为 C 的直径 MN 上的圆周角, $\theta=45^\circ$ (11 分)

此时圆的方程为 $(x-\sqrt{2}p)^2 + (y-p)^2 = 2p^2$ 或 $(x+\sqrt{2}p)^2 + (y-p)^2 = 2p^2$ (12 分)

$$(22) \text{ 解: } () a_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \quad (3 \text{ 分})$$

$$() f_n(x) = 1 + a_n x + b_n x^2 + \dots \quad (4 \text{ 分})$$

$$f_{n+1}(x) = 1 + a_{n+1} x + b_{n+1} x^2 + \dots$$

$$= (1 + a_n x + b_n x^2 + \dots) (1 + 2^{n+1} x) \quad (6 \text{ 分})$$

$$b_{n+1}=2^{n+1} \cdot a_n+b_n \text{ (7 分)}$$

$$(\quad) \text{ 若存在, 则: } b_2=\frac{8}{3}(2-1)(2^2 \cdot a+b)=\frac{8}{3}(4a+b)$$

$$f_2(x)=(1+2x)(1+2^2x)=1+6x+8x^2 \text{ (8 分)}$$

$$b_2=8, a_2=6 \text{ 又 } b_3=2^3 \cdot a_2+b_2=56$$

$$b_3=\frac{8}{3}(2^2-1)(2^3 \cdot a+b)=56$$

$$\text{由 } \quad, \quad \text{可解得: } a=1, b=1 \text{ (9 分)}$$

$$\text{猜想: } b_n=\frac{8}{3}(2^{n-1}-1)(2n-1) \text{ 对一切 } n \geq 2 \text{ 恒成立 (10 分)}$$

下面用数学归纳法证明

$$(\quad) \text{ 当 } n=2 \text{ 时, } b_2=\frac{8}{3}(2-1)(4-1)=8 \text{ 成立 (11 分)}$$

$$(\quad) \text{ 假设 } n=k \text{ 时成立, 即有: } b_k=\frac{8}{3}(2^{k-1}-1)(2^k-1)$$

$$\text{那么: } b_{k+1}=b_k+2^{k+1} \cdot a_k$$

$$=\frac{8}{3}(2^{k-1}-1)(2^k-1)+2^{k+1}(2^{k+1}-2)$$

$$=(2^k-1)\left[\frac{8}{3}(2^{k-1}-1)+2^{k+2}\right]$$

$$=(2^k-1)\left[\frac{1}{3} \cdot 2^{k+2}-\frac{8}{3}+2^{k+2}\right]$$

$$=(2^k-1)\left(\frac{4}{3} \cdot 2^{k+2}-\frac{8}{3}\right)$$

$$=\frac{8}{3}(2^k-1)(2^{k+1}-1)$$

$$n=k+1 \text{ 时猜想成立 (13 分)}$$

综合 $(\quad), (\quad)$ 知, 猜想成立

$$\text{故存在常数 } a=1, b=1, \text{ 使 } b_n=\frac{8}{3}(2^{n-1}-1)(2^n \cdot a+b)$$

对一切 $n \geq 2$ 恒成立 (14 分)

桂林市高考第一次模拟考试

本试卷分第 卷(选择题)和第 卷(非选择题)两部分。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 卷(选择题共 60 分)

参考公式:

三角函数的和差化积公式

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

正棱台、圆台的侧面积公式:

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长, l 表示斜高或母线长。

台体的体积公式:

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积, h 表示高。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

(1) 定义 $M-N=\{x \mid x \in M, \text{ 且 } x \notin N\}$ 。若 $M=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N=\{2, 3, 5\}$, 则 $M-N=(\quad)$

- (A) M (B) N (C) $\{2\}$ (D) $\{1, 7, 9\}$

(2) “ $\sin x=1$ ”是“ $x=\frac{\pi}{2}$ ”成立的 $(\quad)$

- (A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x \in (-\infty, 1] \\ \log_{81} x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ 则满足

$f(x)=\frac{1}{4}$ 的 x 的值为 $(\quad)$

- (A) 2 (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) 2 或 3

(4) 如果直线 $ax+by=4$ 与圆 $C: x^2+y^2=4$ 有两不同的交点, 那么点 $P(a, b)$ 与圆 C 的位置关系 $(\quad)$

- (A) 在圆外 (B) 在圆上 (C) 在圆内 (D) 不确定

(5) 已知点 P 的极坐标为 $(1, \pi)$, 那么过点 P 且垂直于极轴的直线的极坐标方程是 $(\quad)$

- (A) $\rho=1$ (B) $\rho=\cos \theta$
(C) $\rho=-\frac{1}{\cos \theta}$ (D) $\rho=\frac{1}{\cos \theta}$

(6) 已知 x_1 是方程 $x+2^x=4$ 的根, x_2 是方程 $x+\log_2 x=4$ 的根, 则 x_1+x_2 的值所在区间是 $(\quad)$

(A) $(0, 1)$ (B) $(1, 3)$

(C) $(3, 5)$ (D) $(5, +\infty)$

(7) 设抛物线的顶点在原点，其焦点 F 在 y 轴上，又抛物线上的点 $(k, -2)$ 与 F 点的距离为 4，则 k 的值是()

(A) 4 (B) 4 或 -4 (C) -2 (D) 2 或 -2

(8) 如果 $f(x+\pi)=f(-x)$ ，且 $f(-x)=f(x)$ ，则 $f(x)$ 可以是()

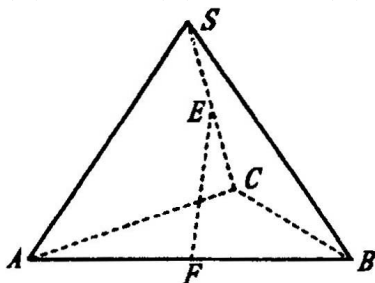
(A) $\sin 2x$ (B) $\cos x$ (C) $\sin |x|$ (D) $|\sin x|$

(9) 已知 $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$ ， $|z|=5$ ，则复数 z 为()

(A) $4+i$ (B) $-4-3i$ (C) $3+4i$ (D) $-3-4i$

(10) 如图一，三棱锥 $S-ABC$ 中，点 E 、 F 分别为棱 SC 、 AB 的中点，若 $AC=SB=2$ ， $EF=\sqrt{2}$ ，则异面直线 AC 与 SB 所成的角为()

(A) 30° (B) 45° (C) 90° (D) 120°



图一

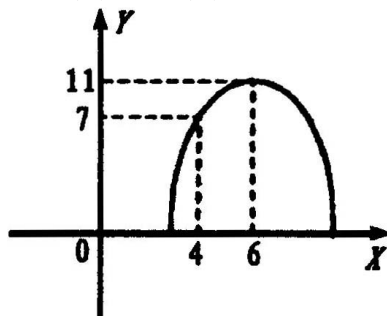
(11) 一个透明密闭的正方体容器中，恰好盛有该容器一半容积的水，任意转动这个正方体，则水面在

容器中的形状可以是： 三角形， 菱形， 矩形， 正方形， 正六边形，其中正确的是()

- (A) (B)
(C) (D)

(12) 某汽车运输公司，购买了一批豪华大客车投入营运，据市场分析每辆客车营运的总利润 y (单位:10 万元) 与营运年数 x ($x \in \mathbb{N}$) 的关系为二次函数，其函数图象如图二，则每辆客车营运多少年，其营运的年平均利润最大?()

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6



第 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线上。

(13) 在 120° 的二面角内，放入一个半径为 5cm 的球切两半平面于 A、B 两点，那么这两个切点在球面上的最短距离是_____。

(14) 在 $(ax+1)^7$ 的展开式中， x^3 的系数是 x^2 的系数

与 x^4 的系数的等差中项，若实数 $a > 1$ ，那么 $a =$ _____。

(15) 甲、乙、丙、丁、戊 5 名学生进行某种劳动技能比赛，决出了第一到第五名的名次，甲、乙两人去询问成绩，回答者对甲说：“很遗憾，你和乙都没拿到冠军”，对乙说：“你当然不会是最差的”，从这个回答分析，5 人的名次排列共可能有_____（用数字作答）种不同情况。

(16) 某工厂产值连续三年持续增长，已知年平均增长率为 P ，若这三年的增长率分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 ，则 $x_1 + x_2 + x_3$ 的最小值是_____。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $b_n = \frac{1}{S_n}$ ，且 $a_3 b_3 = \frac{1}{2}$ ， $S_3 + S_5 = 21$ 。

() 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

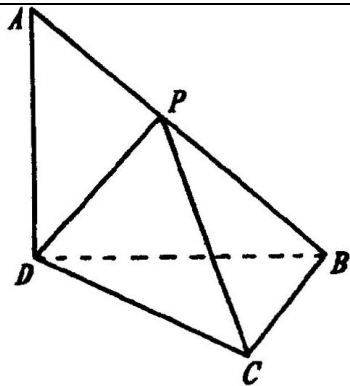
() 求证： $b_1 + b_2 + \dots + b_n < 2$ 。

(18) (本小题满分 12 分)

如图三，等腰直角三角形 ABD 与等腰直角三角形 CBD 所在平面互相垂直， $\angle ADB = \angle CBD = 90^\circ$ 且 $AD = BD = BC = a$ 。

() 求异面直线 AD 、 BC 所成的角；

() 设点 P 在线段 AB 上，问线段 PB 多长时， PCD 与 BCD 所在平面成 60° 的角？



(19) (本小题满分 12 分)

已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x$ ($\omega > 0$)，其周期为 π ，且 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{12}) = 4$ 。

() 求 $f(x)$ 的表达式；

() 设不相等的实数 $x_1, x_2 \in (0, \pi)$ 且 $f(x_1) = f(x_2) = -2$ ，求 $x_1 + x_2$ 。

(20) (本小题满分 12 分)

设抛物线过定点 $A(0, 1)$ ，且以直线 $y=-1$ 为准线。

() 求抛物线顶点 C 的轨迹方程；

() 过定点 $B(-\frac{5}{2}, 0)$ 是否存在一对互相垂直的直线同时与轨迹 C 有公共点？证明你的结论。

(21) (本小题满分 12 分)

某公司取消福利分房和公费医疗，实行年薪制工

资结构改革。该公司从 2002 年起，每人的工资由三个项目组成，并按下表规定实施：

项目	金额(元/人年)	性质与计算方法
基础工资	10000	考虑物价因素,从 2002 年起每年递增 10% (与工龄无关)
房屋补贴	400	按职工到公司年限计算,每年递增 400 元
医疗费	1600	固定不变

如果该公司今年有 5 位职工，计划从明年起每年新招 5 名职工。

() 若今年(2002 年)为第一年，试把第 n 年该公司付给职工的工资总额 y (万元)表示成年限 n 的函数；

() 试判断公司每年发给职工的工资总额中，房屋补贴和医疗费的总和能否超过基础工资总额的 20%。

参考答案

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分

(1)D (2)A (3)B (4)A (5)C (6)C (7)B
(8)D (9)C (10)C (11)C (12)C

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分。

(13) $5\pi/3\text{cm}$ (14) $1+\frac{\sqrt{10}}{5}$ (15) 54 (16) $3p$

三、解答题:本大题共 6 小题,共 74 分。

(17) 解: () 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则依题意, 得

$$\begin{cases} \frac{a_1 + 2d}{3a_1 + 3d} = \frac{1}{2}, \\ 3a_1 + 3d + 5a_1 + 10d = 21, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a_1 = d \\ 8a_1 + 13d = 21. \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

解之, 得 $a_1 = d = 1$ 。

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (6 \text{ 分})$$

$$b_n = \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} \quad (7 \text{ 分})$$

$$(\quad) \text{ 由 } (\quad), \text{ 得 } b_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \quad (9 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n &= 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2, \quad (11 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n < 2. \quad (12 \text{ 分})$$

(18) 解: $(\quad)$ 平面 $ABD \cap$ 平面 $CBD = BD$, 且平面 ABD 平面 CBD ,

又 $AD \subset$ 平面 ABD , 且 $AD \not\subset$ 平面 CBD ,

$AD \not\subset$ 平面 CBD , 又 $BC \subset$ 平面 CBD , $AD \not\parallel BC$.

即异面直线 AD 、 BC 成 90° 的角。 (6 分)

$(\quad)$ 在平面 ADB 内作 $PE \perp DB$ 于 E , 则 $PE \perp AD$.

$AD \perp$ 平面 CBD

$PE \perp$ 平面 CBD

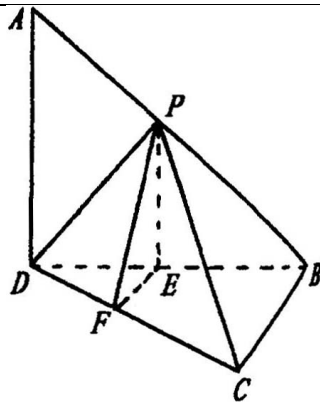
在平面 CBD 内作 $EF \perp DC$ 于 F , 连结 PF .

由三垂线定理, 得 $PF \perp DC$.

$\angle PFE$ 为 $\angle PCD$ 与 $\angle BCD$ 所在平面所成二面角的平面角, 即 $\angle PFE = 60^\circ$. (8 分)

设 $PE = x$, 在 $Rt \triangle PEB$ 中, $\angle B = 45^\circ$,

$$EB = x, DE = a - x,$$



在 Rt DFE 中, $\angle EDF = 45^\circ$,

$$EF = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \frac{\sqrt{2}}{2} (a-x),$$

在 Rt PEF 中, 由已知, $\angle PFE = 60^\circ$,

$$\tan 60^\circ = \frac{PE}{EF} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2} (a-x)}, \text{ 解得 } x = (3 - \sqrt{6})a,$$

$$PB = \sqrt{2}x = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})a.$$

即 PB 长为 AD 长的 $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ 倍时, $\angle PCD$ 与 $\angle BCD$ 所在平面成 60° 的角. (12 分)

(19) 解: () 由 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{12}) = 4$, 可知, 当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 有最大值 4.

$$\text{因此依题意, 得 } \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 4, \\ a \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{12}) + b \cos(\omega \cdot \frac{\pi}{12}) = 4. \end{cases}, \quad (4 \text{ 分})$$

解之得 $\omega = 2$, $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$.

$$f(x) = 2\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right). \quad (6 \text{ 分})$$

$$(\quad) \quad f(x_1) = f(x_2) = -2.$$

x_1, x_2 是方程 $4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -2$ 的根,

不妨设 $x_1 < x_2$, (8 分)

又 当 $0 < x < \pi$ 时, $\frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$,

$$2x_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}, 2x_2 + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6},$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{5\pi}{12}, x_2 = \frac{9\pi}{12}, \quad \therefore x_1 + x_2 = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} \quad (12 \text{ 分})$$

(20) 解: () 设点 $M(x, y)$ 是顶点轨迹上的任意一点, 点 $F(x_0, y_0)$ 为相应于顶点 M 的任一焦点, $y = -1$ 与 y 轴的交点为 $T(0, -1)$.

由抛物线定义得 $|AF| = |AT|$,

$$x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = 4, \dots\dots\dots$$

又 点 M 在抛物线上, $y_0 - y = y + 1$, 即 $y_0 = 2y + 1$,

又 $x_0 = x$, 故代入方程 得 $x^2 + 4y^2 = 4$, (4 分)

也即 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, \dots\dots\dots

$$y_0 - y = y + 1 \neq 0 \quad y \neq -1, \text{ 故 } x \neq 0,$$

顶点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \neq -1)$. (6 分)

() 设过点 B 且斜率为 k 的直线方程为 $y = k\left(x + \frac{5}{2}\right)$,

代入方程 得 $x^2 + 4k^2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 4 = 0$,

整理得: $(4k^2 + 1)x^2 + 20k^2x + 25k^2 - 4 = 0$.

直线和椭圆 C 有公共点，

$$= (20k^2)^2 - 4(4k^2 + 1)(25k^2 - 4) \geq 0, \text{ 解之得 } |k|$$

$$\leq \frac{2}{3}.$$

假设存在互相垂直的直线与轨迹 C 有公共点，设其斜率分别为 k_1 、 k_2 ，则

$$|k_1| \leq \frac{2}{3}, |k_2| \leq \frac{2}{3}, \quad |k_1| \cdot |k_2| \leq 4/9,$$

不可能满足 $k_1 k_2 = -1$ ，故这样的直线不存在。

(12 分)

(21) 解：() 第 n 年共有 $5n$ 个职工，因此基础工资总额为 $5n(1 + \frac{1}{10})^n$ (万元)，医疗总额为 $5n \times 0.16$ (万元)，房屋补贴为

$$5 \times 0.04 + 5 \times 0.04 \times 2 + \dots + 5 \times 0.04 \times n = \frac{1}{10}n(n+1) \text{ (万元)},$$

$$y = 5n(1 + \frac{1}{10})^n + \frac{1}{10}n(n+1) + 0.8n(n - N). \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} () \quad & 5n(1 + \frac{1}{10})^n \times 20\% - [\frac{1}{10}n(n+1) - 0.8n] \\ &= n[(1 + \frac{1}{10})^n - 0.602216n(n+1) - 0.8n] \\ &= n[(1 + \frac{n}{10} + C_n^2 \frac{1}{10^2} + \dots + C_n^n \frac{1}{10^n}) - 0.9 - \frac{n}{10}] \\ &= n[0.1 + C_n^2 \frac{1}{10^2} + C_n^3 \frac{1}{10^3} + \dots + C_n^n \frac{1}{10^n}] > 0, \end{aligned}$$

$$\therefore 5n(1 + \frac{1}{10})^n \times 20\% > \frac{1}{10}n(n+1) - 0.8n,$$

故房屋补贴和医疗费总和不会超过基础工资总额

的 20%。(12 分)

(22) 证明: () 设 $x_2 > x_1 > 0$, 则 $-x_2 < -x_1 < 0$ 。

$f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是增函数,

$f(-x_2) < f(-x_1)$, 又 $f(x)$ 是奇函数,

$-f(x_2) < -f(x_1)$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$

$f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, (4 分)

() 由 $m \cdot n < 0$ 可知 m, n 异号, 不妨设 $m > 0$, $n < 0$ 。

则由 $m+n < 0$, 得 $-n > m > 0$ 。

由 () 可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$f(-n) > f(m)$, 即 $-f(n) > f(m)$,

$f(m) + f(n) < 0$ 。(8 分)

() 不等式 $f[\log_a(1-x^2)] > 0$, 即 $f[\log_a(1-x^2)] > f(-1) = f(1)$, (10 分)

由函数的单调性, 得

$-1 < \log_a(1-x^2) < 0$ 或 $\log_a(1-x^2) > 1$ 。(12 分)

当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1-x^2 < 1$ 或 $1-x^2 > a$,

解得 $-\sqrt{1-\frac{1}{a}} < x < 0$ 或 $0 < x < \sqrt{1-\frac{1}{a}}$ 。

当 $0 < a < 1$ 时, $1 < 1-x^2 < 1/a$ 或 $0 < 1-x^2 < a$,

解得: $-1 < x < -\sqrt{1-a}$ 或 $\sqrt{1-a} < x < 1$ 。

当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | -\sqrt{1-\frac{1}{a}} < x < 0$
或 $0 < x < \sqrt{1-\frac{1}{a}}\}$

当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | -1 < x < -\sqrt{1-a}$

或 $\sqrt{1-a} < x < 1$ }。

(14 分)

昆明市高三模拟考试(二)

参考公式:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

一、选择题:(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

(1) 设 I 是全集, 集合 P 、 Q 满足 $P \subset Q$, 则下列结论中错误的是: ()

(A) $P \cap Q = Q$ (B) $P \cap Q = I$

(C) $P \cap \bar{Q} = \varnothing$ (D) $\bar{P} \cap \bar{Q} = I$

(2) 已知 $\log_a 3 < \log_b 3 < 0$, 则 a 、 b 的关系是: ()

(A) $0 < a < b < 1$ (B) $0 < b < a < 1$

(C) $a > b > 1$ (D) $b < a < 1$

(3) 函数 $y = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) + \cos 2x$ 的最小正周期是: ()

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) 2π (D) 4π

(4) 直线 $l: ax+by=4$ 和圆 $C: x^2+y^2=4$ 有两个不同的交点, 则点 $P(a, b)$ 与圆 C 的位置关系是: ()

(A) 点 P 在圆上 (B) 点 P 在圆外

(C) 点 P 在圆内 (D) 关系不确定

(5) 方程 $\cos x = x + \sin x$ 的实根个数是: ()

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

(6) 一个圆锥的底面直径和高都与一个球的直径相等, 那圆锥与球的体积比是: ()

(A) $1:3$ (B) $2:3$

(C) $1:2$ (D) $2:9$

(7) 双曲线 $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 的两条渐近线互相垂直, 那么该双曲线的离心率是: ()

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

(8) 复平面内 A 、 B 两点对应的复数分别是 2 和 i , 把向量 $\overrightarrow{AB}$ 绕 A 点顺时针方向旋转 90° 得到向量 $\overrightarrow{AC}$, 则 C 点对应的复数是: ()

(A) $1+2i$ (B) $1-2i$

(C) $3+2i$ (D) $2-i$

(9) 某电视台综艺节目中做一个游戏: 放四个写有号码的球, 每组请四个人摸, 如果第一人没拿到 1 号球, 第二人没拿到 2 号球, 第三人没拿到 3 号球, 第

四没拿到 4 号球，该组就得奖，则该组得奖的拿球方法有()种

- (A) 24 (B) 12 (C) 9 (D) 15

(10) 已知函数 $f(x) = \frac{1-2x}{1+x}$ ，函数 $y=g(x)$ 的图象与 $y=f^{-1}(x-1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(x) = ()$

- (A) $\frac{3-2x}{x}$ (B) $\frac{2-x}{x+1}$
(C) $\frac{1-x}{x+2}$ (D) $\frac{3}{x+2}$

(11) 到两坐标轴距离的差的绝对值等于 2 的点的轨迹是: ()

- (A) 二条直线 (B) 四条直线
(C) 四条射线 (D) 八条射线

(12) 给出下列命题:

函数 $y = \frac{3}{x-2}$ 在定义域内是减函数;

若直线 a 在平面 α 内的射影为直线 a' ，直线 $b \perp a'$ ，则 $b \perp a$;

若复数 Z 满足 $\arg Z = \theta$ ，则 $\arg(1/z) = 2\pi - \theta$;

若曲线 $C: \frac{x^2}{5-k} + \frac{y^2}{k-1} = 1$ 表示椭圆，则 $1 < k < 5$ ，其中错误命题序号是: ()

- (A) (B)
(C) (D)

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在横线上。)

(13)若四面体各棱的长是 1 或者 2，且该四面体不是正四面体，则其体积的值是_____。(只需写出一个可能的值)

(14)过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$ 的直线交于抛物线于 A、B 两点，由 A、B 间的距离为_____。

(15) 若 $(2x + \sqrt{3})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ，则 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2 =$ _____。

(16)200 根同规格的圆柱形钢管堆放成横截面为正三角形形状，且使正三角形面积最大，那么剩余的钢管根数为_____。

三、解答题(本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。)

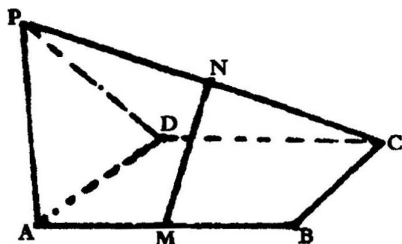
(17)(12 分)如图，已知线段 PA 垂直于矩形 ABCD 所在平面，M、N 分别是 AB 和 PC 的中点。

() 求证: MN $\perp$ CD ;

() 若面 ABCD 与面 PCD 所成的二面角等于 45°

°，求证 MN 上面 PCD；

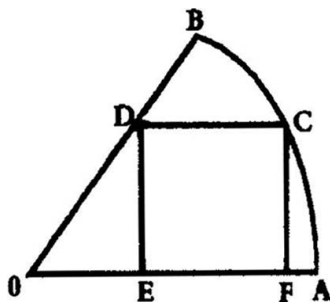
()在满足()的条件下，若 $AB=4\text{cm}$ ， $AD=2\text{cm}$ ，求四棱锥 N-ABCD 的体积。



(18) (12 分) 如图，已知扇形 OAB 的半径为 R ，圆心角 $\angle AOB = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 扇形的内接矩形 EFCD 的顶点 C 在弧上。

()求内接矩形 EFCD 的最大面积；

() 若 $R=2$, $a=30^\circ$, 求内接矩形 $EFCD$ 的最大面积。



(19) (12 分) 已知不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{12} \log_a(a-1) + \frac{2}{3}$ ($n > 1$, $n \in \mathbb{N}$) 恒成立, 求 a 的取值范围。

(20) (12 分) 已知复数 Z_1 满足 $|Z_1 + \sqrt{2}i| = |Z_1 - \sqrt{2}i| = 2$ ，且复数 Z 满足 $\sqrt{2}Z - (1+i)Z_1 = 0$ ，求复数 Z 对应点的轨迹方程。

(21) (12 分) 用汽船拖满载货物的小船若干只，在两港之间来回运输货物，且这些小船的载重量相等，已知每次拖 4 只小船，一日能来回 16 次，每次拖 7 只小船，一日能来回 10 次，每日来回的次数是每次拖小船只数的一次函数（每日中每次拖小船的只数不变），问每次拖多少只小船，才能使运货总量最大？

(22) (14 分) 设 A_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，
 $A_n = \frac{2}{3}(a_n - 1)$ ($n \in \mathbb{N}$)，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为
 $b_n = 4n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$)

() 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

() 把数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中的公共项，按它们在原
 数列中的先后顺序排成一个新的数列 $\{d_n\}$ ，证明 $\{d_n\}$
 的通项公式为 $d_n = 3^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$)；

() 设数列 $\{d_n\}$ 中第 n 项是数列 $\{b_n\}$ 中的第 r
 项， B_r 是数列 $\{b_n\}$ 的前 r 项的和， D_n 为数列 $\{d_n\}$ 的前 n

项和，并且 $T_n = B_n - D_n$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{(a_n)^4}$

参考答案

一、DBABB CDCCB DA

二、(13) $\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{\sqrt{14}}{12}, \frac{\sqrt{11}}{12}$ (14) 8 (15) 1 (16) 10

三、(17) () 取 CD 的中点 E，PD 的中点 F，连 ME，NE，NF，AF。则 $FN \parallel DE \parallel AM$

NE PD，ME AD

面 MEN 面 ADP

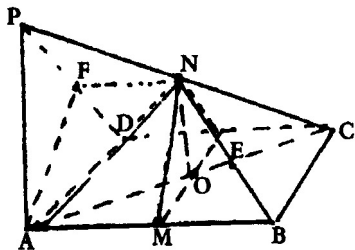
CD ⊥ PA

PA ⊥ 面 ABCD $\Rightarrow$ AD ⊥ CD $\left. \begin{array}{l} \text{CD} \perp \text{PA} \\ \text{PA} \cap \text{AD} = \text{A} \end{array} \right\} \Rightarrow$

CD ⊥ 面 PAD

面 PAD // 面 MEN $\Rightarrow$ CD ⊥ 面 MEN $\Rightarrow$ MN

⊥ CD (4 分)



() CD 面 PAD (已证) $\Rightarrow$ PDA 是面 ABCD 与面 PCD 所成二面角的平面角, 所以 $\angle ADP = 45^\circ$, 而 $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形。所以 $AF \perp PD$, 又 $FN \parallel AM$, 故 $MN \perp AF$, 所以 $MN \perp PD$, 又 $MN \perp DC$

$MN \perp$ 平面 PCD (8 分)

() 连 AC 交 ME 于 O, 则 $AO=CO$, 所以 $NO \parallel \frac{1}{2}PA=1$
 $NO \perp$ 面 ABCD

$$V_{N-ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot NO = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 \times 1 = 8/3 \text{ cm}^3 \text{ (12 分)}$$

(18) () 连 OC, 设 $\angle COA = \theta$ ($0^\circ < \theta < \alpha < 90^\circ$)
 则 $CF = R \sin \theta$

在 $\triangle CDO$ 中, $\angle DOC = \alpha - \theta$, $\angle ODC = 180^\circ - \alpha$

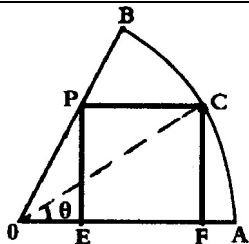
$$\therefore \frac{CD}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

$$\text{即 } CD = \frac{R \sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha}$$

$$\therefore S_{EFCD} = CD \cdot CF = \frac{R^2 \cdot \sin \theta \sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} =$$

$$\frac{R^2 [\cos(\alpha - 2\theta) - \cos \alpha]}{2 \sin \alpha}, \text{ 当 } \theta = \frac{\alpha}{2} \text{ 时, } S_{\max} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{R^2}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$$

所以当 C 为弧的中点时, 内接矩形 EFCD 有最大值 $\frac{R^2}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$ (8 分)



() 当 $\alpha = 30^\circ$, $R=2$ 时, 则

内接矩形 EPCF 面积的最大值为

$$\frac{2^2}{2} \tan 15^\circ = 2 \cdot \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 4 - 2\sqrt{3} \quad (12 \text{ 分})$$

注: 若用 $EF = OF - OE$ 求 EF 参照给分。

$$(19) \text{ 设 } f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

$$f(n+1) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2}$$

$$\therefore f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} > 0$$

(5 分)

$f(n)$ 在 $\{2, 3, 4, \dots\}$ 上是增函数

$$\therefore (f(n))_{\min} = f(2) = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} \quad (7 \text{ 分})$$

原不等式恒成立

$$\frac{1}{12} \log_a(a-1) + \frac{2}{3} \leq \frac{7}{12} \text{ 即 } \log_a(a-1) \leq -1$$

依题意设知 $a > 1$ $a-1 \leq \frac{1}{a}$ 解此不等式得

$$1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (12 \text{ 分})$$

(20) 由复数几何意义知, Z_1 所对应的集合是以 $(0, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$ 两焦点的双曲线上支, 设实半

轴，虚半轴长分别为 a, b ，则 $a=1, b=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$ ，
所以此双曲线方程为 $y^2-x^2=1$ (1) (4 分)

设 $Z=x+yi, Z_1=x_1+y_1i$ ，由条件得 $Z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}Z$

$$x_1+y_1i=\frac{\sqrt{2}}{1+i}(x+yi)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)i \quad (4 \text{ 分})$$

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x) \quad \text{代入方程(1)得}$$

$$\frac{(y-x)^2}{2}-\frac{(x+y)^2}{2}=1 \quad \text{化简得 } xy=-\frac{1}{2}(y>0) \quad (4 \text{ 分})$$

(其它方法解答者参照给分)

(21)解:设每日来回 y 次，每次拖小船 x 只 则

$$y=ax+b$$

$$\text{依条件知 } \begin{cases} 16=4a+b \\ 10=7a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=24 \end{cases}$$

$$y=-2x+24 \quad (0<x<12, x \in \mathbb{N}) \quad (6 \text{ 分})$$

又当每日小船的总只数最多时，运货总量最大，
设每日拖小船总只数为 P ，

$$\text{则 } P=xy=x(-2x+24)=-2x^2+24x=-2(x-6)^2+72$$

$$\text{当 } x=6, P_{\max}=72, \text{ 此时 } y=12$$

即每日来回 12 次，每次拖 6 只小船时，总运货
量最大(12 分)

$$(22) \text{解:} () \quad A_n=\frac{3}{2}(a_n-1) \text{ 即 } 2A_n=3a_n-3$$

$$2A_1=3a_1-3 \quad \text{即 } a_1=3$$

当 $n \geq 2$ 时

$$a_n=A_n-A_{n-1}=\frac{3}{2} [a_{n-1}-(a_{n-1}-1)] \text{ 化简得 } a_n=3a_{n-1} \text{ 即}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3$$

$\{a_n\}$ 是以 3 为首项, 公比 $q=3$ 的等比数列, 即

$$a_n=3^n \text{ (5 分)}$$

() 证明: 由计算知 a_1, a_2 不是数列 $\{b_n\}$ 中的项,

$$a_3=27=4 \times 6+3, \quad d_1=27 \text{ 是数列 } \{b_n\} \text{ 中第 6 项}$$

设 $a_k=3^k$ 是数列 $\{b_n\}$ 中的第 m 项, 则

$$3^k=4m+3 \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

$$3^{k+1}=3 \cdot 3^k=3(4m+3)=4(3m+2)+1$$

a_{k+1} 不是数列 $\{b_n\}$ 中的项。

$$\text{而 } a_{k+2}=3^{k+2}=9 \cdot 3^k=9(4m+3)=4(9m+6)+3$$

a_{k+2} 是数列 $\{b_n\}$ 中的项

于是有: $d_1=a_3, d_2=a_5, d_3=a_7, \dots, d_n=a_{2n+1}, \dots$

数列 $\{d_n\}$ 的通项公式为 $d_n=a_{2n+1}=3^{2n+1}$ (10 分)

$$() \quad d_n=b_r \quad 3^{2n+1}=4r+3 \quad r=\frac{3^{2n+1}-3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } B_r &= r(b_1 + b_r) = \frac{3}{4} \frac{(3^{2n} - 1)(7 + 3^{2n+1})}{2} \\ &= \frac{3(3^{2n} - 1)(7 + 3^{2n+1})}{8} \end{aligned}$$

$\{d_n\}$ 是以 27 为首项, 9 为公比的等比数列

$$\therefore D_n = 27 \frac{(9^n - 1)}{9 - 1} = \frac{27(3^{2n} - 1)}{8}$$

$$\begin{aligned} T_n &= B_r - D_n = \frac{(3^{2n} - 1)(3 \times 7 + 3 \times 3^{2n+1} - 27)}{8} = \frac{(3^{2n} - 1)(3^{2n+2} - 6)}{8} \\ &= \frac{9 \times 3^{4n} - 15 \times 3^n + 6}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{(a_n)^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times 3^{4n} - 15 \times 3^n + 6}{8 \cdot (3^n)^4} = \frac{9}{8} \quad (14 \text{ 分})$$

湖南省部分重点中学联考

参考公式：

台体的体积公式 $V_{\text{台}} = \frac{h}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')$ ， S' 、 S 分别表示上、下底面面积， h 表示高

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \quad \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \quad \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

第 卷(选择题共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 小题；每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的 4 个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) (理科) 在极坐标系中，方程 $\rho = 2\cos\theta$ 表示的圆的圆心是 ()

- (A) (1, 0) (B) (1, π)
(C) (2, 0) (D) (2, π)

(文科) 将函数 $y = \sin x$ 的图象向右平移 π 个单位，得到函数 $y = f(x)$ 的图象，则 $y = f(x)$ 的表达式是 ()

- (A) $y = -\sin x$ (B) $y = \sin x$
(C) $y = \cos x$ (D) $y = -\cos x$

(2) 设全集 $I=\mathbb{R}$, 集合 $A=\{x \mid |x-3|>0\}$, $B=\{x \mid -x^2+x-2<0\}$, 则 $\bar{A} \cup \bar{B} = (\quad)$

- (A) $[2, 3]$ (B) $(-\infty, 2)$
(C) $\{3\}$ (D) $\mathbb{R}$

(3) 过点 $M(1, -2)$ 的直线与 x 轴、 y 轴分别交于 P 、 Q 两点, 若 M 恰为线段 PQ 的中点, 则直线 PQ 的方程为 $(\quad)$

- (A) $2x+y=0$ (B) $2x-y-4=0$
(C) $x+2y+3=0$ (D) $x-2y-5=0$

(4) 复平面内, 点 A 、 B 对应的复数分别是 1 和 $3i$, 把向量 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后, 得到向量 $\overrightarrow{AC}$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数是 $(\quad)$

- (A) $-3-i$ (B) $3+i$ (C) $-2-i$ (D) $4+i$

(5) 当 $x \in (0, 1)$ 时, 不等式 $x^2 < \log_a(x+1)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 $(\quad)$

- (A) $(2, +\infty)$ (B) $[2, +\infty]$
(C) $(1, 2)$ (D) $(1, 2]$

(6) 在代数式 $(4x^2+2x-5) \cdot (1+\frac{1}{x})^5$ 的展开式中, 常数项的值是 $(\quad)$

- (A) 32 (B) 25 (C) 15 (D) -5

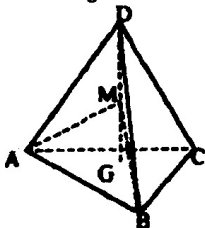
(7) 如图, 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1 , G 是底面 ABC 的中心, 点 M 在线段 DG 上, 且使得 $\angle AMB=90^\circ$, 则 GM 的长为 $(\quad)$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$



(8) 一个等比数列前三项的积为 2，最后三项的积为 4，且所有项的积为 64，则该数列有()

(A) 13 项

(B) 12 项

(C) 11 项

(D) 10 项

(9) 如图，空间中两个有一条公共边 AD 的正方形 ABCD 和 ADEF，设 M、N 分别是 BD 和 AE 的中点，那么

AD $\perp$ MN； MN $\perp$ 平面 CDE； MN $\parallel$ CE； MN、CE 异面。

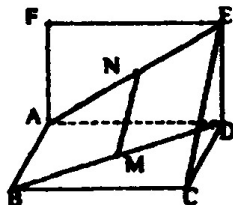
以上 4 个命题中正确的命题个数为()

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4



(10) 函数 $\begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \in (-\infty, 2] \\ 2^{1-x} - 2, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$ 的值域为()

(A) $(-\frac{3}{2}, +\infty)$ (B) $(-\infty, 0)$

(C) $(-\infty, -\frac{3}{2})$ (D) $(-2, 0]$

(11) (理科) 要排一张有 4 个歌唱节目、4 个舞蹈节目和 2 个小品节目的演出节目单，任何两个舞蹈节目不相邻，且任何两个小品节目也不相邻，则满足条件的排法种数为 ()

(A) $P_6^6 \cdot P_4^4 - 2P_3^3 \cdot P_4^4$ (B) $P_{10}^{10} - 2P_3^3 - P_2^2 P_4^4$

(C) $P_4^4 \cdot P_3^3 \cdot P_2^2$ (D) $P_4^4 \cdot P_3^3 \cdot P_2^2$

(文科) 乒乓球队的 n ($n \geq 5$) 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名队员参赛，3 名主力队员要安排在第一、三、五位置，其余的队员选两名安排在第四、六位置，若不同的出场安排有 252 种，则 $n =$ ()

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7

(12) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 内有一点 $P(1, -1)$ ， F 为椭圆的右焦点， M 为椭圆上的一个动点，则 $|MP| + |MF|$ 的最大值为 ()

(A) $3 - \sqrt{5}$ (B) $3 + \sqrt{5}$

(C) $4 - \sqrt{5}$ (D) $4 + \sqrt{5}$

第 卷 (非选择题共 90 分)

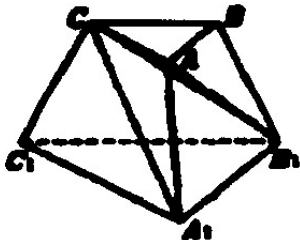
二、填空题: 本大题共 4 小题; 每小题 4 分, 共 16 分。

(13) 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{m} = 1$ ($m \in \mathbb{R}, m \neq 0$) 的离心率

为 2，则 m 的值为_____。

(14) 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a+b=3$ ，则 ab^2 的最大值为_____。

(15) 如图，三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，三棱锥 $B-AB_1C$ 、 A_1AB_1C 的体积分别为 $V_{B-AB_1C} = 1$ ， $V_{A_1-AB_1C} = 3$ ，则三棱锥 $C-A_1B_1C_1$ 的体积为_____。



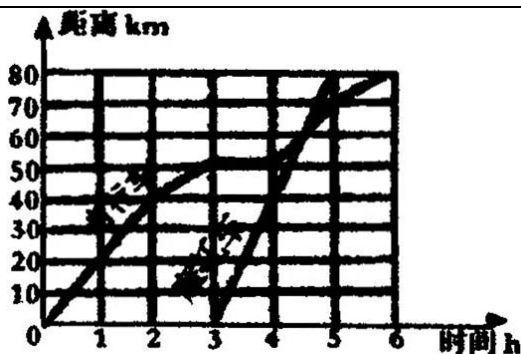
(16) 如图，表示一位骑自行车者和一位骑摩托车者在相距为 80km 的两城镇间旅行的函数图象。由图可知：骑自行车者用了 6 小时（含途中休息的 1 小时），骑摩托车者用了 2 小时。有人根据这个函数图象，提出关于这两个旅行者的如下信息：

骑自行车者比骑摩托车者早出发 3 小时，晚到 1 小时；

骑自行车者是变速运动，骑摩托车者是匀速运动；

骑摩托车者在出发 1.5 小时后追上了骑自行车者；

其中正确信息的序号是_____。

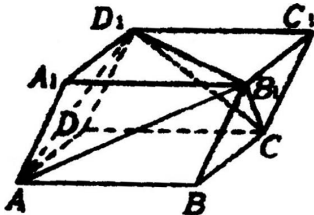


三、解答题:本大题共 6 小题;共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 设复数 $z = \cos A + i \sin A$ 且满足 $|z+1|=1$ 。

() 求复数 z 的值; () 求 $\frac{b-c}{a \cos(60^\circ + C)}$ 的值。

(18) (本小题满分 12 分) 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle DAB = 60^\circ$, $AB = AD = 2AA_1$ 。

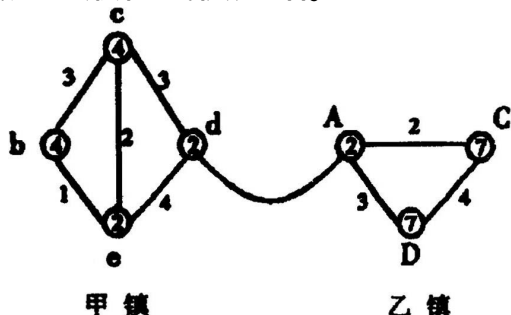


() 求证: $AA_1 \perp$ 平面 B_1CD_1 ;

() 求二面角 $A-B_1D_1-C$ 的大小(文科求余弦值)。

(19) (本小题满分 12 分) 今有甲、乙两个乡镇, 甲镇有 4 个居民区, 分别设为 b 、 c 、 d 、 e ; 乙镇有 3 个居民区, 分别设为 A 、 C 、 D , 居民区之间有若干条道路连接(用线段表示), 各居民区的人口数和道路的

长度如图(圆圈内的数字为人口数,单位:百人;道路长度单位:百米)。现在两镇的居民都要开始使用液化气,因此要建立液化气供应站。



() 若在甲、乙两镇之间没有直接的道路连通,要分别建立供应站,则甲和乙的站点分别应建立在哪个居民区,才能使送气成本最低?请说明理由。

() 若在甲、乙两镇之间有一条道路连接两个居民区 d 和 A,道路长度为 7 百米,那么两镇只建一个供应站,要使送气成本最低,站点又应建立在哪个居民区?请说明理由。

(20) (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$, 已知点 $P_n(a_n, b_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) 在 $y=f(x)$ 反函数的图像上, 且 P_n 与点 $A(n, 0)$ 、点 $B(n+1, 0)$ 构成一个以 AP_nB 为顶角的等腰三角形 AP_nB 。

() 求数列 $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ 的通项公式;

() (理科) 比较 2^{a_n} 与 b_n ($n \in \mathbb{N}$) 的大小。

(文科) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n}$ 的值

(21) (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 对任意实数 x_1, x_2 , 有

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right), \text{ 且 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ f(\pi) = -1.$$

() 求 $f(0)$ 的值 ;

() 求证: $f(x)$ 是偶函数且 $f(\pi - x) = -f(x)$;

() (理科) 若 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > 0$, 求证: $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减。

(文科) 若 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > 0$, 求证: $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减。

(22) (本小题满分 14 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上的两个动点 P、Q 及一个定点 $M(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$, F 是椭圆的左焦点, 且 $|PF|$, $|MF|$, $|QF|$ 成等差数列。

() 求证: 线段 PQ 的垂直平分线经过一个定点 A;

() 设点 A 关于原点 O 的对称点是 B , 求 $|PB|$ 的最小值及相应点 P 的坐标。

参考答案

一、选择题: ACBA DCDB CDAD

二、填空题: (13) 27 (14) 4 (15) 9 (16)

三、解答题:

(17) 解: () 由题设: $(\cos A + 1)^2 + \sin^2 A = 1$ $\cos A = -\frac{1}{2}$, (3 分)

$$A \quad (0^\circ, 180^\circ) \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad (6 \text{ 分})$$

() 由 () 得: $A = 120^\circ$ (7 分)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\sin B - \sin C}{\sin A \cos(60^\circ + C)} = \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\sin 120^\circ \cos(60^\circ + C)} \quad (10 \text{ 分}) \\ &= \frac{2 \sin(30^\circ - C)}{\cos(60^\circ + C)} = 2. \quad (12 \text{ 分}) \end{aligned}$$

(18) 解: () 连接 A_1D , DB , BA_1 , 由 $A_1D_1 \parallel BC$, A_1BCD_1 是平行四边形, 所以 $A_1B \parallel D_1C$, A_1AB 中, 设 $AA_1 = a$, 由余弦定理得 $A_1B = \sqrt{3}a$, 满足 $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2$, $AA_1 \perp A_1B \Rightarrow AA_1 \perp D_1C$. 同理可证 $AA_1 \perp B_1C$, $AA_1 \perp$ 平面 B_1CD_1 . (6 分)

() 由余弦定

$$\text{理: } AB_1^2 = AD_1^2 = a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = 7a^2$$

$$\text{由 () 知: } CB_1^2 = CD_1^2 = 3a^2,$$

取 B_1D_1 中点 O_1 , 连接 AO_1 、 CO_1 和 AC , $AO_1 \perp B_1D_1$, $CO_1 \perp B_1D_1$, 所以 $\angle AO_1C$ 是二面角 $A-B_1D_1-C$ 的平面角. (10 分)

$$CO_1^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2, \quad AO_1^2 = 7a^2 - a^2 = 6a^2,$$

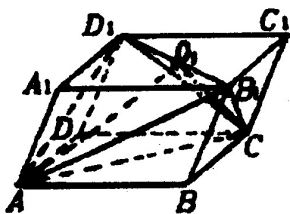
$$AC = 2 \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}a$$

$$\therefore \cos \angle AO_1C = \frac{6a^2 + 2a^2 - (2\sqrt{3}a)^2}{2\sqrt{6}a \cdot \sqrt{2}a} = -$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3},$$

二面角 $A-B_1D_1-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, (文 12 分)

二面角 $A-B_1D_1-C$ 的大小为 $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ (理 12 分)



(19) 解: () 设每百人 · 百米的送气运输量为一个运输单位 (1 分)

对甲镇:

若选址 b 区, 则送气的运输量为 $3 \times 4 + 2 \times 1 + 2 \times (1+4) = 24$ 个运输单位;

选址 c 区为 22 个运输单位;

选址 d 区为 40 个运输单位;

选址 e 区为 20 个运输单位。

故应选址 e 区; (4 分)

对乙镇:

选址 A 区为 35 个运输单位;

选址 C 区为 32 个运输单位;

选址 D 区为 34 个运输单位。

故应选址 C 区。 (7 分)

() 考查甲镇, 应选址 d 区;

考查乙镇, 应选址 A 区。

由于甲镇的供应量为 12 , 乙镇的供应量为 16 ,
故选址 A 区。(12 分)

(20) 解: () $f^{-1}(x) = (x - \frac{1}{2})^2 (x \geq \frac{1}{2})$, $b_n = (a_n - \frac{1}{2})^2$, (文 4 分, 理 3 分)

由图知: $a_n = n + \frac{1}{2}$, $b_n = n^2 (n \in \mathbb{N})$ 。(文 8 分, 理 6 分)

() (理
科) $2^{a_1} = 2^{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{8} > b_1 = 1$, $2^{a_2} = \sqrt{32} > b_2 = 4$, $2^{a_3} = \sqrt{128} > b_3 = 9$,

推测: $2^{a_n} > b_n (n \in \mathbb{N})$, (理 8 分)

下面用数学归纳法证明: 当 $n=1, 2, 3$ 时, 命题成立;

设 $2^{k+\frac{1}{2}} > k^2 (k \in \mathbb{N}, k \geq 3)$, 则 $2^{k+1+\frac{1}{2}} > 2 \cdot k^2$

由于 $2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 > k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) \geq 0$ 。

$2k^2 > (k+1)^2$ 所以 $2^{k+1+\frac{1}{2}} > (k+1)^2$ 。

综上, $2^{a_n} > b_n (n \in \mathbb{N})$ 成立。(理 12 分)

(文科) $S_n = \frac{\frac{3}{2} + n + \frac{1}{2}}{2} \cdot n = \frac{n(n+2)}{2}$, (文 10 分)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} n(n+2)}{n^2} = \frac{1}{2}$ 。(文 12 分)

(21) () 令 $x_1 = x_2 = \pi$,

得 $f(\pi) + f(\pi) = 2f(\pi) \cdot f(0)$ $f(0) = 1$ 。(文 3 分, 理 2 分)

$$(\quad) f(x) + f(-x) = 2f(0) \cdot f(x) = 2f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

$f(x)$ 是偶函数。(文 6 分, 理 4 分)

$$f(x) + f(\pi - x) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad f(x) = -f(\pi - x)。$$
 (文 8 分, 理 6 分)

$$(\quad) -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \text{ 时}, 0 \leq -x < \frac{\pi}{2} \quad f(x) = f(-x) > 0。$$

所以, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $f(x) > 0$ 。(理 8 分)

设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(\pi - x_2) = 2f\left(\frac{x_1 - x_2 + \pi}{2}\right) f\left(\frac{x_1 + x_2 - \pi}{2}\right)。$$

$$0 \leq \frac{x_1 - x_2 + \pi}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2 - \pi}{2} < \frac{\pi}{2}。$$

$$\therefore f\left(\frac{x_1 - x_2 + \pi}{2}\right) > 0, f\left(\frac{x_1 + x_2 - \pi}{2}\right) > 0, \text{ 所以 } f(x_1) > f(x_2), \therefore f(x) \text{ 在}$$

$[0, \pi]$ 上单调递减。(文, 理 12 分)

(22) 解: $(\quad)$ 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$, 椭圆的实半轴长为 2, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 由 $2|MF| = |PF| + |QF|$, (2 分)

$$\text{即 } 2(2 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1) + (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2), \quad x_1 + x_2 = 2。$$

(4 分)

$$\text{由 } \begin{cases} x_1^2 + 2y_1^2 = 4 \\ x_2^2 + 2y_2^2 = 4 \end{cases} \text{ 两式相减整理得: } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}。$$

设线段 PQ 的中点 $N(1, n)$, $k_{PQ} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2n}$ 。

线段 PQ 的中垂线的方程为: $y - n = 2n(x - 1)$,

整理得: $n(2x - 1) - y = 0$, 该直线过定点 $A(\frac{1}{2}, 0)$ 。

(8 分)

若 $x_1 = x_2$, 则 $P(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$, $Q(1, -\frac{\sqrt{6}}{2})$, 线段 PQ 的中垂线是 x 轴, 过点 A

$(\frac{1}{2}, 0)$ 。

综上得, 线段 PQ 的中垂线过定点 $A(\frac{1}{2}, 0)$ 。(9 分)

() $B(-\frac{1}{2}, 0)$, $-2 \leq x_1, x_2 \leq 2$, $x_1 = 2 - x_2$ $[0, 2]$ 。(10 分)

$$|PB|^2 = (x_1 + \frac{1}{2})^2 + y_1^2 = (x_1 + \frac{x_1^2}{2})^2 + 2 - \frac{x_1^2}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{9}{4}。$$

$P(0, \pm\sqrt{2})$ 时, $|PB|_{\min} = \frac{3}{2}$ 。(14 分)

大同市第一次高考模拟考试

本试卷分第 卷(选择题)和第 卷(非选择题)两部分。考试时间 120 分钟。

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么 $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

正棱锥、圆锥的侧面积公式

$$S_{\text{锥侧}} = \frac{1}{2} cl$$

其中 c 表示底面周长, l 表示斜高或母线长

棱锥、圆锥的体积公式

$$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} Sh$$

其中 S 表示底面积, h 表示高

第 卷(选择题共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

(1) (文) 若指数函数 $y=f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(2, -1)$ ，则此指数函数是()

- (A) $y=(\frac{1}{2})^x$ (B) $y=2^x$ (C) $y=3^x$ (D) $y=10^x$

(理) $\sin 15^\circ \cos 165^\circ$ 的值等于()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

(2) (文) 设集合 A 和集合 B 都是实数集 R ，映射 $f:A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素，映射到集合 B 中的元素 x^3-x+1 ，则在映射 f 下，象 1 的原象所成的集合是()

- (A) $\{1\}$
(B) $\{0, 1, -1\}$
(C) $\{0\}$
(D) $\{0, -1, -2\}$

(理) 复平面内以点 $(0, -1)$ 为圆心，1 为半径的圆的方程是()

- (A) $|z-1|=1$
(B) $|z+1|=1$
(C) $|z+i|=1$
(D) $|z-i|=1$

(3) (文) 设 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 是互相垂直的单位向量，且 $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ ， $\vec{b} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于()

- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2

(理) 直线 l 与直线 $y=1$ ， $x-y-7=0$ 分别交于 P 、 Q

两点，线段 PQ 的中点为 $(1, -1)$ ，则直线 l 的斜率为 ()

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{3}{2}$

(4) (文) 曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 - 2$ 在点 $(-1, -\frac{7}{3})$ 处切线的倾斜角为 ()

- (A) 30° (B) 45° (C) 135° (D) -45°

(理) 已知 $\vec{m} = (-5, 3)$ ， $\vec{n} = (-1, 2)$ ，且 $\lambda\vec{m} + \vec{n}$ 与 $2\vec{n} + \vec{m}$ 互相垂直，则实数 λ 的值等于 ()

- (A) $3/8$ (B) $-3/8$ (C) $8/3$ (D) $-8/3$

(5) (文) 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点作直线交抛物线于 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 两点，若 $x_1 + x_2 = 3p$ ，则 $|AB|$ 等于 ()

- (A) $2p$ (B) $4p$ (C) $6p$ (D) $8p$

(理) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ ($-2 < x < 2$) ()

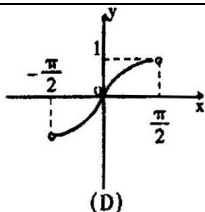
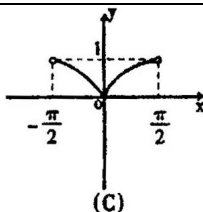
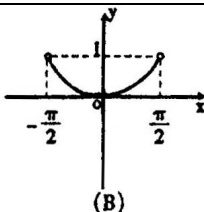
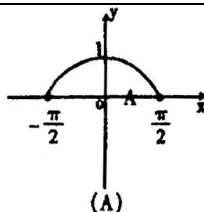
(A) 极大值为 5，极小值为 -27

(B) 极大值为 5，极小值为 -11

(C) 极大值为 5，无极小值

(D) 极小值为 -27，无极大值

(6) (文) 函数 $y = \cos x \cdot |\tan x|$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) 的大致图象是 ()



(理)同(文)第 5 题

(7) (文) 一个等差数列的项数为 $2n$ ，若 $a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}=90$ ， $a_2+a_4+\dots+a_{2n}=72$ ，且 $a_1-a_{2n}=33$ ，则该数列的公差是()

(A) 3 (B) -1 (C) -2 (D) -3

(理) 将函数 $y=f(x)\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后，再作关于 x 轴对称的曲线，得到函数 $y=1-2\sin^2 x$ 的图象，则 $f(x)$ 是()

(A) $2\cos x$ (B) $2\sin x$ (C) $\cos x$ (D) $\sin x$

(8) (文) 已知 θ 是三角形的一个内角，且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，则方程 $x^2 \sin \theta - y^2 \cos \theta = 1$ 表示()

(A) 焦点在 x 轴上的椭圆
(B) 焦点在 y 轴上的椭圆
(C) 焦点在 x 轴上的双曲线
(D) 焦点在 y 轴上的双曲线

(理)同(文)第 7 题

(9) (文) 若奇函数 $y=f(x)$ ($x \neq 0$)，当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x)=x-1$ ，则不等式 $f(x-1)<0$ 的解集是()

(A) $\{x | x < 0 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$

(B) $\{x \mid 1 < x < 2\}$

(C) $\{x \mid -1 < x < 0\}$

(D) $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } -1 < x < 0\}$

(理)同(文)第 8 题

(10) (文) 直线 l 与直线 $y=1$, $x-y-7=0$ 分别交于 P、Q 两点, 线段 PQ 的中点为 $(1, -1)$, 则直线 l 的斜率为 ()

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{3}{2}$

(理)同(文)第 9 题

(11) 一个正方体纸盒展开后如图, 在原正方体纸盒中有下列结论:

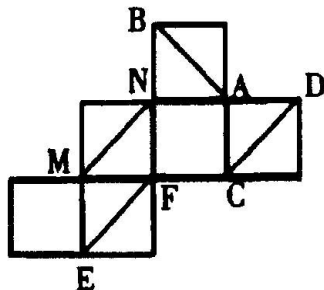
AB EF

AB 与 CM 成 60° 角

EF 与 MN 是异面直线;

MN CD

其中, 正确结论的序号是 ()



(A)

(B)

(C)

(D)

(12) 调查 100 名携药品出国旅游者，其中 75 人带有感冒药，80 人带有胃药，那么既带感冒药又带胃药的人数最大值 m ，和最小值 n 为()

(A) $\begin{cases} m=75 \\ n=55 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} m=80 \\ n=75 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} m=80 \\ n=55 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} m=25 \\ n=20 \end{cases}$

第 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线上。

(13) (文) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\cdots+2n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$ _____

(理) $\int (2\sin x + 3^x) dx =$ _____

(14) (文) 袋中装有 3 个黑球，2 个白球，一次取出 3 个球，其中恰有 2 个白球的概率为 _____ (用数字作答)

(理) 一个工人负责看管 3 台机床，如果在 1 小时内这些机床不需要人去照顾的概率第一台是 0.7，第二台是 0.8，第三台是 0.6，且各台机床是否需要照顾相互之间没有影响，则在这个小时内至少有一台机床需要人去照顾的概率是 _____ (用数字作答)

(15) (文) 三棱锥 $O-ABC$ 中， OA 、 OB 、 OC 两两垂直， $OC=1$ ， $OA=x$ ， $OB=y$ ， $x+y=4$ ，则三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值是 _____

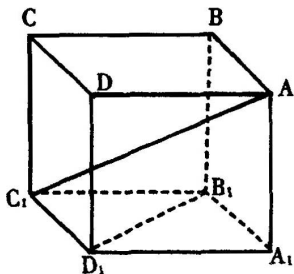
(理) 如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，给出三个论断：

四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱；

底面 $ABCD$ 是菱形；

$AC_1 \perp B_1D_1$ ；

以其中两个论断作为条件，余下一个论断作为结论，可以得到三个命题，其中正确命题的个数为



(16) (文) 已知函数 $y = \sin x + \cos x$ ，给出以下四个命题：

若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，则 $y \in (0, \sqrt{2}]$ ；

直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 是函数 $y = \sin x + \cos x$ 图象的一条对称轴；

在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上函数 $y = \sin x + \cos x$ 是增函数

函数 $y = \sin x + \cos x$ 的图象可由 $y = \sqrt{2} \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位而得到其中正确命题的序号为

(理) 设数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 均为等差数列 (公差均不为

零) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n}}{n \cdot a_{3n}} =$ _____

三、解答题:本大题共 6 小题,共 74 分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

(文) ABC 的内角满

足: $\lg(\sin B) + \lg(\sin C) = 2\lg(\cos \frac{A}{2})$

证明: ABC 是等腰三角形。

(理)解关于 x 的不等式 $ax^2 - (a^2 + 1)x + a > a$ ($a \neq 0$)

(18) (本小题满分 12 分)

(文) 从甲、乙两种棉花苗中各抽 10 株，测得它们的株高分别如下(单位:cm)

甲:	25	41	40	37	22	14	19	39	21	42
乙:	27	16	44	27	44	16	40	40	16	40

估计两种棉花苗总体的长势:

() 哪种棉花的苗长得高一些?

() 哪种棉花的苗长的整齐一些?

(理) 甲、乙两名射手在一次射击中的得分为两个

相互独立的随机变量 ζ 与 η ，且 ζ 、 η 分布列为

ζ	1	2	3
p	a	0.1	0.6

η	1	2	3
p	0.3	b	0.3

求：() a、b 的值

() 计算 ζ 、 η 的期望与方差，并以此分析甲、乙的技术状况

注意：考生在 19 甲、19 乙两题中选一题作答，如果两题都答，只以 19 甲计分。

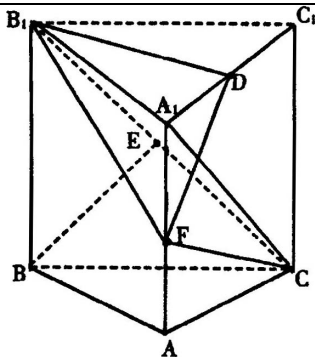
(19 甲) (本小题满分 12 分)

如图：直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是以 ABC 为

直角的等腰直角三角形， $AC=2a$ ， $BB_1=3a$ ，D 是 A_1C_1 中点，E 是 B_1C 的中点，

() 求 $\cos\langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CA_1} \rangle$

() 在线段 AA_1 上是否存在点 F，使 $CF \perp$ 平面 B_1DF ，若存在求出 $|\overrightarrow{AF}|$ ，若不存在，说明理由。

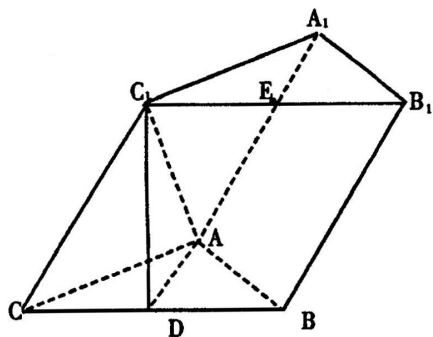


(19 乙) (本小题满分 12 分)

如图：斜三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，
 $AB = a$ ， $CC_1 = 2a$ ，点 C_1 在平面 ABC 上的射影是 BC 的中点 D ，
 且 CC_1 与底面 ABC 所成的角为 60° 。

() 求二面角 C_1-ACB 的大小；

() 若 E 为 B_1C_1 的中点，求点 E 到平面 ADC_1 的距离。



(20) (本小题满分 12 分)

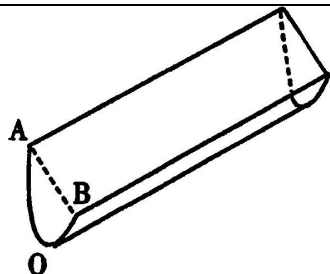
(文) 已知: 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + m$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有极大值 $28/3$, 确定常数 m 的取值, 并求出这个函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的极小值。

(理) 平地上有一条水沟, 沟沿是两条长 100m 的

平行线段，沟宽 AB 为 2m ，与沟沿垂直的平面与沟的交线是一段抛物线，抛物线的顶点为 O ，对称轴与地面垂直，沟深 1.5m ，沟中水深 1m 。

() 求水面宽；

() 如图所示形状的几何体称为柱体，已知柱体的体积为底面积乘以高，沟中的水有多少立方米？



(21) (本小题满分 12 分)

某地区 1995 年底沙漠面积为 95 万公顷，为了解该地区沙漠面积的变化情况，进行了连续 5 年的观测，并将每年底的观测结果记录如下表：

观测时间	该地区沙漠比原有沙漠面积增加数
1996 年底	0.2000 万公顷
1997 年底	0.4000 万公顷
1998 年底	0.6001 万公顷
1999 年底	0.7999 万公顷
2000 年底	1.0001 万公顷

试根据此表所给的信息进行预测

() 如果不采取任何措施，那么到 2010 年底，该地区的沙漠面积将大约变为多少万公顷？

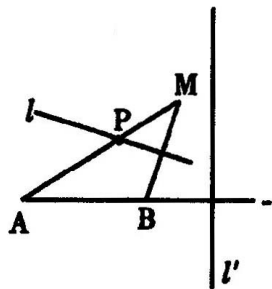
() 如果从 2000 年底后，采取植树造林等措施，每年改造 0.6 万公顷沙漠，那么到哪一年年底该地区沙漠面积减少到 90 万公顷？

(22) (本小题满分 14 分)

(文) 如图: A、B 是两个定点，且 $|AB|=4$ ，动点 M 到 A 点的距离是 6，线段 MB 的垂直平分线 l 交 MA 于点 P，直线 l' 垂直于直线 AB，且 B 到 l' 的距离为 $\frac{5}{2}$ 。若以 AB 所在直线为 x 轴，AB 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系。

() 求证: 点 P 到点 B 的距离与到直线 l' 的距离之比为定值；

() 若 P 点到 A 、 B 两点的距离之积为 m ，当 m 取最大值时，求 P 点坐标。



(22) (本小题满分 14 分)

(理) 若 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数，且对一切 $x > 0$ 满足 $f(x/y) = f(x) - f(y)$

() 求 $f(1)$ 的值

() 若 $f(6)=1$, 解不等式 $f(x+3)-f(1/x)<2$

参考答案

一、选择题

(1)文 A , 理 B (2)文 B , 理 C (3)C (4)B (5)
文 B , 理 C (6)文 C , 理 B (7)文 D , 理 A (8)B
(9)文 A , 理 B (10)文 C , 理 A (11)D (12)A

二、填空题

$$(13) \text{文 } 1, \text{理 } -2\cos + \frac{3x}{1n3} + C \quad (14) \text{文 } \frac{3}{10}, \text{理 } 0.664$$

$$(15) \text{文 } \frac{2}{3}, \text{理 } 1 \quad (16) \text{文 } \quad , \text{理 } \frac{2}{9}$$

三、解答题

(17) (文) 证明: 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=\pi$

$$\text{依题设得: } \sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos A) \quad (3$$

分)

$$2\sin B \cdot \sin C = 1 + \cos A$$

$$\cos A = \cos(\pi - B - C) = -\cos(B+C) = -$$

$$\cos B \cos C + \sin B \sin C \quad (6 \text{ 分})$$

$$2\sin B \cdot \sin C = 1 + \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

$$\sin B \sin C + \cos B \cos C = 1$$

$$\text{即 } \cos(B-C) = 1 \quad (10 \text{ 分})$$

$$0 < B < \pi, \quad 0 < C < \pi$$

$$-\pi < B-C < \pi$$

从而由前式 $B-C=0$ 即 $B=C$

$\triangle ABC$ 是等腰三角形 (12 分)

(理) 解: 原不等式化为 $(ax-1)(x-a) > 0$ (4 分)

$$(1) a < -1 \text{ 时, 由于 } \frac{1}{a} > a \quad a < x < \frac{1}{a} \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) a = -1 \text{ 时, 解集为 } \varnothing \quad (6 \text{ 分})$$

$$(3) -1 < a < 0 \text{ 时, 由于 } \frac{1}{a} < a \quad \frac{1}{a} < x < a \quad (8 \text{ 分})$$

$$(4) 0 < a < 1 \text{ 时, 由于 } \frac{1}{a} > a \quad x < a \text{ 或 } x > \frac{1}{a} \quad (10 \text{ 分})$$

(5) $a=1$ 时, $x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 1$ (11 分)

(6) $a>1$ 时, 由于 $a>\frac{1}{a} < \frac{1}{a}$ 或 $x>a$ (12 分)

(18) (文) 解:

$$\begin{aligned} (\quad) \bar{X}_{\text{甲}} &= \frac{1}{10} (25+41+40+37+22+14+19+39+21+42) \\ &= \frac{1}{10} \times 300 = 30 \text{ (3 分)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\text{乙}} &= \frac{1}{10} (27+16+44+27+44+16+40+40+16+40) \\ &= \frac{1}{10} \times 310 = 31 \end{aligned}$$

$\bar{X}_{\text{乙}} > \bar{X}_{\text{甲}}$ 从棉花株长样本的平均值来看, 乙种棉花的苗长得高一些 (6 分)

$$\begin{aligned} (\quad) S_{\text{甲}}^2 &= \frac{1}{10} [(25-30)^2 + (41-30)^2 + (40-30)^2 + (37-30)^2 \\ &\quad + (22-30)^2 + (14-30)^2 + (19-30)^2 + (39-30)^2 + (21-30)^2 + (42-30)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} (25+121+100+49+64+256+121+81+81+144) \\ &= \frac{1}{10} \times 1042 = 104.2 \text{ (9 分)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{乙}}^2 &= \frac{1}{10} [2 \times (27-31)^2 + 3 \times (16-31)^2 + 2 \times (44-31)^2 + 3 \\ &\quad \times (40-31)^2] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} [2 \times 16 + 3 \times 225 + 2 \times 169 + 3 \times 81]$$

$$= \frac{1}{10} (32+675+338+243)$$

$$= \frac{1}{10} \times 1288 = 128.8$$

$$S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$$

甲种棉花的苗株高比较平稳，即苗的长势比较整齐(12分)

(理)()由离散型随机变量的分布列性质可知

$$a+0.1+0.6=1 \quad a=0.3$$

同理 $0.3+b+0.3=1 \quad b=0.4$ (5分)

$$() E \zeta = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.6 = 2.3$$

$$E \eta = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.3 = 2$$

$$D \zeta = (x_1 - E \zeta)^2 P_1 + (x_2 - E \zeta)^2 P_2 + (x_3 - E \zeta)^2 P_3 \\ = (1-2.3)^2 \times 0.3 + (2-2.3)^2 \times 0.1 + (3-2.3)^2 \times 0.6$$

$$\times 0.6$$

$$= 0.81$$

同理 $D \eta = 0.6$

由计算结果 $E \zeta > E \eta$ 说明在一次射击中甲的平均得分比乙高，但 $D \zeta > D \eta$ ，说明甲得分的稳定性不如乙，因此甲、乙两人技术都不够全面。

(19 甲)()以 B 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 B-xyz (1分)

$$AC=2a, \quad \angle ABC=90^\circ$$

$$AB=BC=\sqrt{2}a$$

$$B(0, 0, 0), A(\sqrt{2}a, 0, 0),$$

$$C(0, \sqrt{2}a, 0), B_1(0, 0, 3a)$$

$$A_1(\sqrt{2}a, 0, 3a), C_1(0, \sqrt{2}a, 3a),$$

$$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 3a\right),$$

$$E\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{3}{2}a\right) \quad (3 \text{分})$$

$$\therefore \vec{CA_1} = (\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a, 3a)$$

$$\vec{BE} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$$

(3分)

$$\therefore |\vec{CA_1}| = \sqrt{13}a$$

$$|\vec{BE}| = \frac{\sqrt{11}}{2}a$$

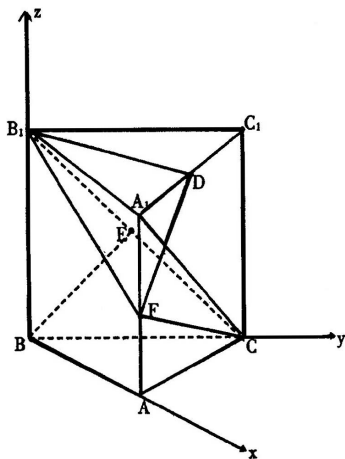
$$\vec{CA_1} \cdot \vec{BE} = 0 - a^2 + \frac{9}{2}a^2$$

$$= \frac{7}{2}a^2$$

$$\therefore \cos \langle \vec{BE}, \vec{CA_1} \rangle =$$

$$\frac{\vec{CA_1} \cdot \vec{BE}}{|\vec{CA_1}| |\vec{BE}|} = \frac{7\sqrt{143}}{143}$$

(6分)



() 假设存在 F 点 , 使

CF 平面 B_1DF ,

不妨设 $AF=b$, 则 $F(\sqrt{2}a, 0, b)\sqrt{2}=(\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a, b)$

$\vec{B_1F}=(\sqrt{2}a, 0, b-3a)$ $\vec{B_1D}=(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$ (8 分)

$$\vec{CF} \cdot \vec{B_1D} = a^2 - a^2 + 0 = 0$$

$\vec{CF} \perp \vec{B_1D}$ 恒成立

由 $\vec{B_1F} \cdot \vec{CF} = 2a^2 + b(b-3a) = b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$

得 $b=a$ 或 $b=2a$

所以当 $|\vec{AF}|=a$ 或 $|\vec{AF}|=2a$ 时 , CF 平面 B_1DF (12

分)

(19 乙) () 过 C_1 点作 $C_1F \perp CA$ 于 F , 连结 DF

$C_1D \perp$ 平面 ABC $DF \perp AC$

所以 C_1FD 是二面角 C_1-AC-B 的平面角 ,

C_1CD 是 C_1C 与平面 ABC 所成的角 ,

即 $C_1CD=60^\circ$ (2 分)

在 Rt C_1CD 中 , $C_1D=CC_1 \cdot$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3} ,$$

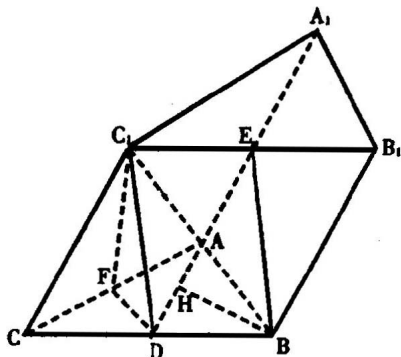
$$CD=CC_1 \cdot \cos 60^\circ = a \quad CB=2a ,$$

在 Rt ABC 中 , $AC = \sqrt{CB^2 - AB^2} = \sqrt{3}a$

由 $CDF \sim CBA$ 得 $DF = \frac{1}{2}a$

在 Rt C_1DF 中 , $\tan C_1FD = \frac{C_1D}{DF} = \frac{\sqrt{3}a}{\frac{1}{2}a} = 2\sqrt{3}$ (4 分)

二面角 C_1-AC-B 的平面角大小为 $\arctan 2\sqrt{3}$ (6



所以点 E 到平面 ADC_1 的距离等于点 B 到平面 ADC_1 的距离 (8 分)

BH 平面 C_1DA

在 $\triangle ABC$ 中 $AD=DB=AB=a$ $BH=a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

所以点 E 到平面 ADC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (12 分)

(20) (文) 解: 因为 $f'(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ (4 分)

令 $f'(x)=0$ 解得 $x=-2$ 或 $x=2$ (6 分)

由于 $x \in (-\infty, -2)$ $f(x) \nearrow$

x	$(-2, 2)$	$f(x) \searrow$
---	-----------	-----------------

$$x \in (2, +\infty) \text{ f } (x) \nearrow$$

当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 取极大值为 $f(-2)$ (8 分)

故 $f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - 4 \times (-2) + m = 28/3$ (9 分)

解得 $m=4$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$ (10 分)

当 $x=2$ 时, $f(x)$ 有极小值, 为 $f(x) = -\frac{4}{3}$ (12 分)

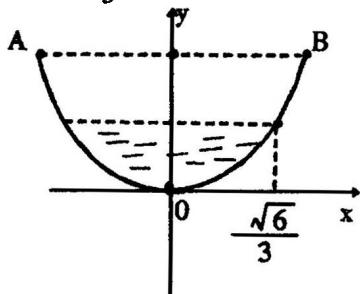
(理) (1) 如图建立直角坐标系。设抛物线方程为 $y=ax^2$, ($a>0$) (2 分)

则由抛物线过点 $B(1, 3/2)$, 可得 $a=3/2$

于是抛物线方程为 $y = \frac{3}{2}x^2$ (4 分)

当 $y=1$ 时, $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

由此知水面宽为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (m) (6 分)



(2) 柱体的底面积

$$S = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} (1 - \frac{3}{2}x^2) dx = 2 \left(\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} dx - \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} x^2 dx \right) \quad (8 \text{ 分})$$

$$= 2 \left(x \Big|_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \right) \quad (10 \text{ 分})$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{9} (m^2) \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{柱体体积为 } 100 \cdot \frac{4}{9} \sqrt{6} = \frac{400}{9} \sqrt{6} (m^3)$$

$$\text{即水沟中有水 } \frac{400}{9} \sqrt{6} m^3 (12 \text{ 分})$$

(21)解: (1) 由表观察知, 沙漠面积增加数 y 与年份数 x 之间的关系近似地为一條直线 $y=kx+b$ (1 分)

将 $x=1$ $y=0.2$, $x=2$, $y=0.4$, 代入求得 $k=0.2$
 $b=0$

$$y=0.2x, x \in N (5 \text{ 分})$$

因为原沙漠面积为 95 万公顷, 则到 2010 年底沙漠面积大约变为 $95+0.2 \times 15=98$ (万公顷) (6 分)

(2) 设从 1996 年底算起, 第 x 年年底该地区沙漠面积能减少到 90 万公顷,

$$\text{由题意得 } 95+0.2x-0.6(x-5)=90 (10 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } x=20$$

故到 2015 年底该地区沙漠面积减少到 90 万公顷。(12 分)

(22) (文) 解: (1) $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$

B 点到 l' 的距离为 $5/2$

$$l' : x=9/2$$

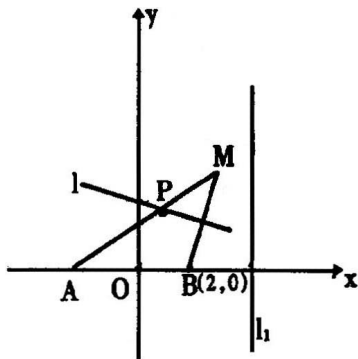
$$\text{由题意 } |PA| + |PM| = |PA| + |PB| = 6,$$

$$\text{且 } |AB|=4 (4 \text{ 分})$$

点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上 (6 分)

$l' : x=9/2$ 恰为椭圆的右准线, 且右焦点为 $B(2, 0)$

若 P 到 l' 的距离为 d ，则 $\frac{|PB|}{d} = e = 2/3$ 为定值。(8 分)



$$(2) m = |PA| \cdot |PB| \leq \left(\frac{|PA| + |PB|}{2} \right)^2 = \left(\frac{6}{2} \right)^2 = 9 \quad (12 \text{ 分})$$

当 $|PA| = |PB|$ ，即 $P(0, -\sqrt{5})$ 或 $(0, \sqrt{5})$ 时， m 的最大值。(14 分)

(理) (1) 令 $x=y>0$ ，则 $f(1)=f\left(\frac{x}{x}\right)=f(x)-f(x)=0$ (4 分)

$$(2) \quad f(6)=1 \quad 2=2f(6)$$

$$f(x+3)-f\left(\frac{1}{x}\right) < 2f(6) \quad f\left(\frac{x+3}{\frac{1}{x}}\right) < 2f(6) \quad (6 \text{ 分})$$

$$f[x(x+3)] < f(6) + f(6)$$

$$f[x(x+3)] - f(6) < f(6) \quad (8 \text{ 分})$$

$$f\left[\frac{x(x+3)}{6}\right] < f(6)$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \\ x+3 > 0 \\ \frac{x(x+3)}{6} < 6 \end{cases} \quad (12 \text{ 分})$$

$$\text{即 } 0 < x < \frac{-3+3\sqrt{17}}{2} \quad (14 \text{ 分})$$

泸州市高三教学质量检测

本试卷分第 卷(选择题)和第 卷(非选择题)两部分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷(选择题 60 分)

参考公式:

三角函数积化和差公式:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$, 其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长, l 表示斜高或母线长。

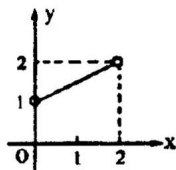
台体的体积公式

$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + S + \sqrt{S'S})h$, 其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积, h 表示高。

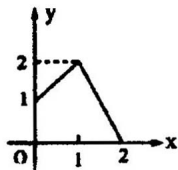
一、选择题:本大题共 12 小题;每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合

题目要求的。

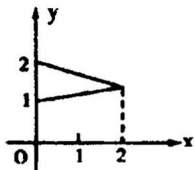
(1) 设集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{y | 1 \leq y \leq 2\}$, 在下列图形中, 能表示从 A 到 B 的映射的是 ()



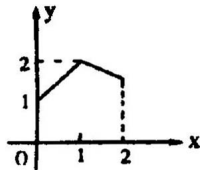
(A)



(B)



(C)



(D)

(2) 已知 $a \in (\frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{6})$, 则 $\cos a$ 与 $\operatorname{ctg} a$ 的大小关系是 ()

(A) $\cos a > \operatorname{ctg} a$ (B) $\cos a \geq \operatorname{ctg} a$

(C) $\cos a < \operatorname{ctg} a$ (D) $\cos a \leq \operatorname{ctg} a$

(3) 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 ()

(A) 若 $n \perp \alpha$, 则 n 平行于 α 内的所有直线

(B) 若 $m \subset \alpha, n \subset \beta$, 且 $n \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$

(C) 若 $n \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

(D) 若 $m \subset \alpha, n \subset \beta$, 且 $m \perp n$, 且 $\alpha \perp \beta$

(4) (文) 直线 $x - \sqrt{2}y - 3 = 0$ 把圆 $x^2 + y^2 = 4$ 分成两段弧, 其劣弧所对的圆心角为 ()

(A) $\frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{6}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

(理) 在极坐标系中, 曲线 $\rho = 2\cos \theta$ 关于直线 $\theta = \frac{7\pi}{4}$ 对称的曲线方程为 ()

(A) $\rho \sin \theta = 2$

(B) $\rho \sin \theta = -2$

(C) $\rho = 2 \sin \theta$

(D) $\rho = -2 \sin \theta$

(5) 已知 $-9, a_1, a_2, -1$ 成等差数列, $-9, b_1, b_2, b_3, -1$ 成等比数列, 则 $b_2(a_1 + a_2)$ 等于 ()

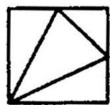
(A) 30 (B) -30 (C) ± 30 (D) 15

(6) 已知函数 $f(x) = \log_a |x+1|$ 在 $(-1, 0)$ 上有 $f(x) > 0$, 且 $g(x) = x^2 - 3ax + 1$ 在 $[1, 2]$ 上为增函数, 则 a 的取值范围是 ()

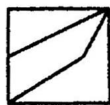
(A) $a > 1$ (B) $0 < a < 1$

(C) $0 < a \leq \frac{2}{3}$ (D) $\frac{2}{3} \leq a < 1$

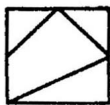
(7) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AA_1, C_1D_1 的中点, G 是正方形 BCC_1B_1 的中心, 则空间四边形 $AGFE$ 在该正方体的面上的射影图形不可能是 ()



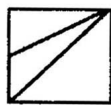
(A)



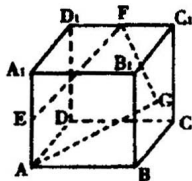
(B)



(C)



(D)



(8) 某团支部进行换届选举, 从甲、乙、丙、丁四人中选出三人分别担任书记、副书记和组织委员, 规定上届任职的甲不能任原职, 则不同的任职结果的种数是 ()

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20

(9) (文) 函数 $f(x) = \lg(10^x + 1) - \frac{1}{2}x$ 为 ()

(A) 偶函数

(B) 奇函数

(C) 既是奇函数又是偶函数

(D) 非奇非偶函数

(理) 设 $f(x) = x^2 - \pi x$, $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \arctg 1$,

$\gamma = \arccos(-9/10)$, 则 $f(\alpha)$ 、 $f(\beta)$ 、 $f(\gamma)$ 的大小关系是 ()

(A) $f(\gamma) > f(\beta) > f(\alpha)$

(B) $f(\alpha) > f(\gamma) > f(\beta)$

(C) $f(\beta) > f(\alpha) > f(\gamma)$

(D) $f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma)$

(10) 某工厂租地建仓库，每月土地占用费 y_1 (万元) 与仓库到车站的距离成反比，而每月库存货物的运费 y_2 (万元) 与仓库到车站的距离成正比。如果在离车站 10 公里处建仓库，这两项的费用分别为 2 万元和 8 万元，要使这两项费用之和最小，仓库应建在离车站 ()

(A) 2 公里处

(B) 3 公里处

(C) 4 公里处

(D) 5 公里处

(11) 点 P 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上，PA、PB 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 分别相切于 A、B 两点，若使四边形 PAOB 的面积最小，则点 P 的坐标为 ()

(A) $(-2, 0)$

(B) $(2, 0)$

(C) $(-1, 1)$

(D) $(1, 3)$

(12) 已知正方形 $ABCD$ ， AC 与 BD 交于点 O ，将正方形沿对角线 BD 折成 60° 的二面角后，给出下面三个命题： $AC \perp BD$ ， $\triangle AOC$ 为正三角形， $\cos \angle ADC = \frac{3}{4}$ 。其中正确结论的个数是()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

第 卷(非选择题共 90 分)

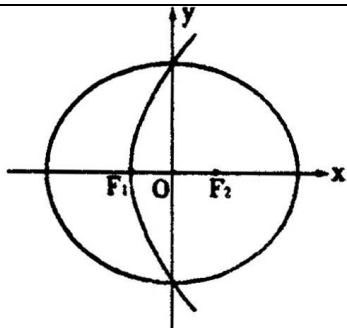
二、填空题:本大题共 4 小题;每小题 4 分,共 16 分。把答案填在题中横线上。

(13) 二项式 $(2+x)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) 展开式中某一项的系数是 10，则展开式中第三项的系数是_____。

(14) 体积为 36π 的球的内接正方体的表面积是_____。

(15) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，以 F_1 为顶点， F_2 为焦点的抛物线经过椭圆短轴的两个端点，则椭圆的离心率为_____。

(16) 给出以下四个命题： $y = \sin x$ 和 $y = \tan x$ 都是在 $[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 上的增函数； $f(x) = a \tan \frac{x}{a}$ ($a \neq 0$) 的最小正周期为 $a\pi$ ；将 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，得到 $y = 3\sin 2x$ 的图象；函数 $y = 5\sin(2x + \theta)$ 的图象关于 y 轴对称的充要条件是 $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，其中正确命题的序号是_____。



三、解答题:本大题共 6 小题;共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 11 分)

设非零复数 ω 的辐角主值为 $\frac{\pi}{4}$, 且 $\frac{\omega-2}{\omega}$ 为纯虚数。

() 求复数 ω ;

() 若 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), 求 $|z - \omega|$ 的最大值和最小值。

(18) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ($x \geq 1$) , 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = f^{-1}(a_{n-1})$ ($n \geq 2$) 。

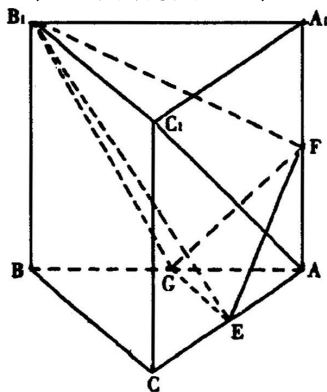
() (文) 试求 a_2 , a_3 , a_4 , 和猜想 a_n 的表达式 , 并用数学归纳法加以证明 ;

(理) 写出 a_n 的表达式 , 并用数学归纳法加以证明。

() 设 $b_n = \frac{1}{a_n + a_{n+1}}$, 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 10$, 求 n 。

(19) (本小题满分 12 分)

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC=BC=AA_1=2$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ，E、F、G 分别为 AC、 AA_1 、AB 的中点。



() 求证： $B_1C_1 \perp$ 平面 EFG；

() 求证： $FG \parallel AC_1$ ；

() 求三棱锥 B_1-EFG 的体积。

(20) (本小题满分 12 分)

某外资企业对员工的工资以年薪结算(即员工的全年工资在一年的年末一次性结算给员工)。并给员工提出两种加薪方案:一是每年的年末加 1000 元;二是每半年结束时加 300 元。供员工自由选择。

() (文) 有甲、乙、丙三人分别与该企业签订一年、两年、三年的工作合同。试问甲、乙、丙三人选择哪种加薪方案较为划算。

(理) 如果某人与该企业签订 10 年的工作合同, 试问某人选择哪种加薪方案才划算; 并计算出选择该种加薪方案比另一种加薪方案在第 10 年末总共能多得加薪多少元。

() (文) 题同 () (理)

(理) 如果第二种加薪方案是每半年结束时加 a 元, 问 a 取何值时, 第二方案总是不小于第一方案加薪。

(21) (本小题满分 13 分)

已知双曲线 C 的中心在原点, 以抛物线 $y^2 = 2\sqrt{3}x - 4$ 的顶点为双曲线 C 的右焦点, 抛物线的准线为双曲线 C 的右准线。

() 求双曲线 C 的方程;

() 设直线 $l: y=kx+1$ 与双曲线 C 交于 A 、 B 两点，试问：当 k 为何值时，以 AB 为直径的圆经过原点。以下(只理科做)是否存在这样的实数 k ，使 A 、 B 两点关于直线 $y=ax$ 对称，若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由。

(22) (本小题满分 14 分)

已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数，当 $a, b \in [-1, 1]$ ，且 $a+b \neq 0$ 时，有 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b} > 0$ 。

() 判断函数 $f(x)$ 的单调性，并给以证明；

() 解关于 x 的不等式 $f(\log_a X + \frac{1}{2}) < f(\frac{1}{\log_a x - 1})$;

() 若 $f(1)=1$ 且 $f(x) \leq m^2 - 2bm + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1]$, $b \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围。

参考答案

一、 1. D 2. A 3. C 4. D 5. A 6. C 7. B 8. B
9. A 10. D 11. C 12. D

二、 (13) 80 (14) 72 (15) $\frac{1}{3}$ (6)

三、 (17) (本小题满 11 分)

() 解: $\arg \omega = \frac{\pi}{4}$, $\omega \neq 0$, 可设 $\omega = x + xi$ (x

$R, x > 0$) (1 分)

$$\therefore \frac{\omega-2}{\omega} = \frac{(x-2)+xi}{x+xi} = \frac{(x-1)+i}{x}, (4 \text{ 分})$$

$$\frac{\omega-2}{\omega} \text{ 为纯虚数, } x=1.$$

因此 $\omega=1+i$ (6 分)

() 解: 由 $z=\cos \theta+i \sin \theta (\theta \in [0, 2 \pi])$

$$|z-\omega| = |(\cos \theta - 1) + i(\sin \theta - 1)| = \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + (\sin \theta - 1)^2} \\ = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} (\theta \in [0, 2\pi]) (9 \text{ 分})$$

当 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 时 $|z-\omega|$ 取得最大值, 其最大值为 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 即 $\sqrt{2}+1$,

当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时 $|z-\omega|$ 取得最小值, 其最小值为 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 即 $\sqrt{2}-1$ 。(11 分)

(18) (本小题满分 12 分)

() 解: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} (x \geq 1)$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1} (x \geq 0) (1 \text{ 分})$$

$$\text{从 } a_n = f^{-1}(a_{n-1}) = \sqrt{a_{n-1}^2 + 1} + 1 (n \geq 2) (2 \text{ 分})$$

$$\text{由 } a_1 = 1 \text{ 得 } a_2 = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt{3}, a_4 = \sqrt{4},$$

$$\text{由可猜想 } a_n = \sqrt{n} (n \in \mathbb{N}) (4 \text{ 分})$$

下面用数学归纳法证明

(i) 当 $n=1$ 时, $a_1=1=\sqrt{1}$, 命题成立; (5 分)

(ii) 假设当 $n=k (k \geq 1)$ 时命题成立, 即 $a_k = \sqrt{k}$,

当 $n=k+1$ 时, $a_{k+1} = \sqrt{a_k^2 + 1} = \sqrt{k+1}$, 命题也成立。

(7 分)

由学归纳法原理，综合(i)、(ii)、知 $a_n = \sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) 成立。(8分)

$$(II) \because b_n = \frac{1}{a_n + a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (10分)$$

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1 \quad (11分) \end{aligned}$$

由题设知 $\sqrt{n+1} - 1 = 10$ ， $n = 120$ 。(12分)

(19)(本小题满分12分)

()解:在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $B_1C_1 \perp BC$ ，
又 E 、 G 为 AC 、 AB 的中点，

$EG \parallel BC$ 。(2分)

从而 $B_1C_1 \perp GE$ ，又 $GE \subset$ 平面 EFG 。

$B_1C_1 \perp$ 平面 EFG 。(3分)

()证明:连结 A_1C ， $AC = AA_1$ ，

在正方形 AA_1C_1C 中， $AC_1 \perp A_1C$ 。

又 E 、 F 分别为 AC 、 AA_1 的中点， $EF \parallel A_1C$ 。

从而 $AC_1 \perp EF$ 。(5分)

$\angle ACB = 90^\circ$ ，即 $BC \perp AC$ ，又 $GE \parallel BC$ ， $GE \perp$ 上 AC 。

又 AC_1 在底面 ABC 上的射影为 AC 。

由三垂线定理有 $AC_1 \perp EG$ ，又 $EG \cap EF = E$ ，

从而 $AC_1 \perp$ 平面 EFG 。(7分)

由 $GF \subset$ 平面 EFG 。 因此 $AC_1 \perp FG$ 。(8 分)

() 解: 由 $EG = \frac{1}{2}BC = 1$, $AF = \frac{1}{2}AA_1 = 1$, 在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $AA_1C_1C \perp$ 底面 ABC ,

又平面 $AA_1C_1C \cap$ 底面 $ABC = AC$, $GE \perp AC$,

$GE \subset$ 平面 ABC , $GE \perp$ 平面 AA_1C_1C ,

$EF \subset$ 平面 AA_1C_1C , $GE \perp EF$ 。

$$S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}EG \times EF = \frac{1}{2}。(9 \text{ 分})$$

$B_1C_1 \perp$ 平面 EFG 。

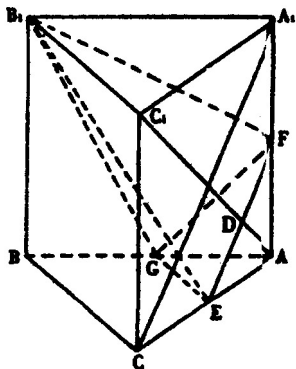
B_1 和 C_1 到平面 EFG 的距离相同。

由 () 知, C_1 到平面 EFG 的距离即 C_1D (D 为 AC_1 与 EF 的交点。)

易得三棱锥 B_1-EFG 的高

$$h = C_1D = \frac{3}{4}AC_1 = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}, (11 \text{ 分})$$

$$V_{B_1-EFG} = \frac{1}{3}S_{\triangle EFG} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}。(12 \text{ 分})$$



(20) (本小题满分 12 分)

() (文) 解: 分别算出两年末的两种方案的加薪的金额, 按第一种方案加薪:

第一年未加薪 1000 (元);

到第二年未共得加薪 $1000+2000=3000$ (元);

到第三年末共得加薪

$1000+2000+3000=6000$ (元)。 (2 分)

按第二种方案加薪:

第一年未得加薪 $300+600=900$ (元)

到第二年未共得加薪 $300+600+900+1200=3000$ (元)

到第三年末共得加薪

$300+600+900+1200+1500+1800=6300$ (元)。 (4 分)

由此可得, 甲应选择第一种方案, 乙可随意选择两种方案中的一种, 丙应选择第二种方案。 (5 分)

(理) 到第 10 年末, 依第一方案共得加薪为

$1000+2000+3000+\dots+10000=55000$ (元) (8 分)

到第 10 年末, 依第二方案共得加薪为

$300+300 \times 2+300 \times 3+\dots+300 \times 20=63000$ (元)

选择第二方案比选择第一方案总共多加薪 $63000-55000=8000$ 元 (11 分)

故某人与该企业签 10 年工作合同, 选择第二种加薪方案较为划算, 并且到第十年末, 第二种方案比第一种方案总共多加薪 8000 元。 (12 分)

() (文) 解法同 (I) (理)

(理) 第 n 年末, 依第一方案共加薪为

$$1000(1+2+3+\dots+n)=500n(n+1) \quad (8 \text{ 分})$$

第 n 年末，依第二方案共加薪为

$$a(1+2+3+\dots+2n)=an(2n+1) \quad (10 \text{ 分})$$

由题意 $an(2n+1) \geq 500n(n+1)$ 对所有正整数 n 成立，

$$\text{即 } a \geq \frac{500(n+1)}{2n+1} = 250 + \frac{250}{2n+1},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } 250 + \frac{250}{2n+1} = \frac{1000}{3}, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{故 } 250 + \frac{250}{2n+1} \leq \frac{1000}{3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

当 $a \geq \frac{1000}{3}$ 时，第二方案加薪总不小于第一方案加薪。 (12 分)

(21) (本小题满分 13 分)

() 解: 由抛物线 $y^2=2\sqrt{3}x-4$ ，知抛物线的顶点坐标与准线方程分别为

$$F_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), l_1: x=\frac{\sqrt{3}}{6}. \quad (\text{文 } 3 \text{ 分}, \text{理 } 2 \text{ 分})$$

设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) (文 4 分, 理 3 分)

$$\text{由题设有 } c=\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 而 } b^2=c^2-a^2,$$

$$\text{由此解得 } a^2=\frac{1}{3}, b=1,$$

因此，所求双曲线 C 的方程为 $3x^2-y^2=1$ 。(文 6 分, 理 4 分)

() 解: (i) 设 l 与 C 交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两

点，

由 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ 3x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 y ，得 $(3-k^2)x^2 - 2kx - 2 = 0$ ，(文 7 分，理 5 分)

由于直线 l 交双曲线 C 于不同的两点，则

$$\begin{cases} 3-k^2 \neq 0 \\ \Delta = 4k^2 + 8(3-k^2) > 0 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{6} < k < \sqrt{6} \text{ 且 } k \neq \sqrt{3} \dots\dots\dots \textcircled{1} \quad (\text{文 9 分，理 6 分})$$

由根与系数的关系有 $x_1 + x_2 = \frac{2k}{3-k^2}$ ， $x_1 x_2 = \frac{-2}{3-k^2}$ ，(10 分)

$$\text{又 } y_1 y_2 = (kx_1 + 1)(kx_2 + 1) = k^2 x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1,$$

$$OA \perp OB, \quad k_{OA} \cdot k_{OB} = -1, \text{ 即 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$(k^2 + 1)x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1 = 0,$$

$$\text{即 } (k^2 + 1) \cdot \frac{2}{k^2 - 3} + \frac{2k^2}{3 - k^2} + 1 = 0.$$

解得 $k = \pm 1$ ，显然 $k = \pm 1$ 满足条件 (文 12 分，理 8 分)

当 $k = \pm 1$ 时，以 AB 为直径的圆经过原点。(文 13 分，理 9 分)

(理) (ii) 若存在点 A 、 B 关于直线 $y = ax$ 对称，则线段 AB 被直线 $y = ax$ 垂直平分。(10 分)

$$\therefore \begin{cases} k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + 1 = a \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \\ k \cdot a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k^2}{3 - k^2} + 1 = \frac{ak}{3 - k^2} \\ ka = -1 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} ak = 3 \\ ak = -1 \end{cases}, \text{ 此方程组无解。} (12 \text{ 分})$$

故不存在 A、B 关于直线 $y=ax$ 对称。(13 分)

(22) (本小题满分 14 分)

() 证明: 设 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 且 $x_1 < x_2$,

在 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b} > 0$ 中, 令 $a=x_2, b=-x_1$ 有 $\frac{f(x_2)+f(-x_1)}{x_2-x_1} > 0$,

(2 分)

$$x_1 < x_2, \quad x_2 - x_1 > 0,$$

又 $f(x)$ 为奇函数, $f(-x_1) = -f(x_1)$,

$$\therefore \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \quad (3 \text{ 分})$$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0, \quad \text{即 } f(x_2) > f(x_1).$$

故 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为增函数。(4 分)

() 令 $t = \log_a x$, 则原不等式化为 $f(t + \frac{1}{2}) < f(\frac{1}{t-1})$ (5

分)

$f(x)$ 定义在 $[-1, 1]$ 上, 且为增函数。

$$\therefore \begin{cases} -1 \leq t + \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{t-1} \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq t < -1. \\ t + \frac{1}{2} < \frac{1}{t-1} \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq \log_a x < -1. \quad (9 \text{ 分})$$

所以不等式的解为: 当 $a > 1$ 时, 不等式的解为 $x \in [a^{-\frac{3}{2}}, a^{-1})$

当 $0 < a < 1$ 时, 不等式的解为 $x \in (a^{-1}, a^{-\frac{3}{2}}]$ 。(10 分)

() 解: $f(1)=1$, 且 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上递增,
对 $x \in [-1, 1]$, 有 $f(x) \leq f(1)=1$ 。

由题意, 对所有的 $x \in [-1, 1]$, $b \in [-1, 1]$ 。
 $f(x) \leq m^2 - 2bm + 1$ 恒成立, 应有 $m^2 - 2bm + 1 \geq 1$, 即 $m^2 - 2bm \geq 0$, (11 分)

记 $g(b) = -2mb + m^2$, 对所有 $b \in [-1, 1]$, $g(b) \geq 0$ 成立,

只需 $g(b)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值不小于零。(12 分)

(i) 若 $m > 0$, $g(b) = -2mb + m^2$ 是减函数, 故在 $[-1, 1]$ 上, 当 $m=1$ 时, 取得最小值, 且 $[g(b)]_{\text{最小值}} = g(1) = -2m + m^2 \geq 0$, 故得 $m \geq 2$ 。

(ii) 若 $m=0$, $g(b)=0$, 这时 $[g(b)]_{\text{最小值}}=0$, 即这时 $m=0$ 。

(iii) 若 $m < 0$, $g(b) = -2mb + m^2$ 是增函数, 故在 $[-1, 1]$ 上, 当 $m=-1$ 时, 取得最小值, 且 $[g(b)]_{\text{最小值}} = g(-1) = 2m + m^2 \geq 0$, 解得 $m \leq -2$ 。

综上所述, 符合条件的 x 的取值范围是 $m \leq -2$, 或 $m=0$ 或 $m \geq 2$ 。(14 分)

北京市东城区高三总复习练习(三)

本试卷分第 卷(选择题)和第 卷(非选择题)两部分。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 卷(选择题, 共 60 分)

参考公式:

三角函数和差化积公式:

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长, l 表示斜高或母线长

台体的体积公式:

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积, h 表示高。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

(1) 若互不相等的三个实数 a 、 b 、 c 成等差数列, a 、 c 、 b 成等比数列,则 $a:b:c$ 等于()

(A) $1:2:3$

(B) $3:1:2$

(C) $4:1:2$

(D) $4:1:(-2)$

(2) (理) 已知 $\sin x = -\frac{1}{4}$ ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$), 则 x 等于()

(A) $\arcsin(-\frac{1}{4})$ (B) $\pi - \arcsin \frac{1}{4}$

(C) $-\pi + \arcsin \frac{1}{4}$ (D) $\pi + \arcsin \frac{1}{4}$

(2) (文) $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{8}$ 的值是()

(A) $\sqrt{2}+1$ (B) $\sqrt{3}-2$ (C) $-1-\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}-1$

(3) 复数 $1-\sqrt{3}i$ 的共轭复数的平方等于()

(A) $-2-2\sqrt{3}i$ (B) $-2+2\sqrt{3}i$

(C) $4+2\sqrt{3}i$ (D) $4-2\sqrt{3}i$

(4) 已知异面直线 a 、 b 分别在平面 α 、 β 内, 且 $\alpha \cap \beta = c$, 那么直线 c ()

(A) 与 a 、 b 都相交

(B) 与 a 、 b 都不相交

(C) 只与 a 、 b 中的一条相交

(D) 至少与 a 、 b 中的一条相交

(5) (理) 已知圆心的极坐标为 (a, π) ($a > 0$)，则过极点的圆的极坐标方程为 ()

(A) $\rho = 2a \sin \theta$ (B) $\rho = -2a \sin \theta$

(C) $\rho = 2a \cos \theta$ (D) $\rho = -2a \cos \theta$

(5) (文) 以 $(5, 6)$ 和 $(3, -4)$ 为直径端点的圆的方程是 ()

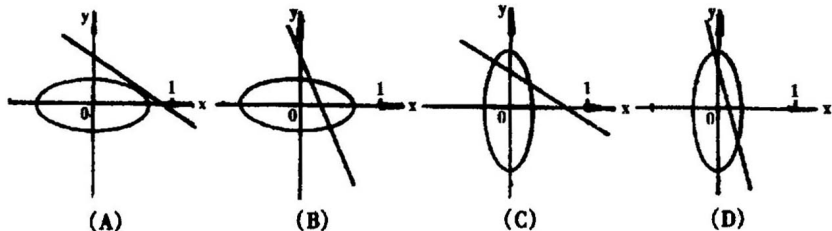
(A) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 7 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 6 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 9 = 0$

(6) 圆台母线与底面成 45° 角，侧面积为 $3\sqrt{2}\pi$ ，则它的轴截面面积是 ()

(A) 2 (B) 3 (C) $\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{2}$

(7) 在同一坐标系中，方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 和 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ (a 、 b 均为正实数) 所表示的曲线只可能是下列四个图形中的 ()

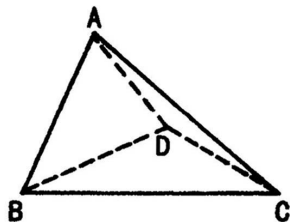
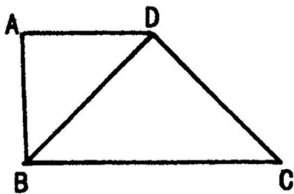


(8) 把函数 $y = f(x)$ 的图象不沿着直线 $x + y = 0$ 的方向向右下方平移 $2\sqrt{2}$ 个单位，得到函数 $y = \log_2 x$ 的图象，则 ()

(A) $f(x) = \log_2(x+2) + 2$ (B) $f(x) = \log_2(x-2) + 2$

(C) $f(x) = \log_2(x+2) - 2$ (D) $f(x) = \log_2(x-2) - 2$

(9) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD=AB$, $\angle BCD=45^\circ$, $\angle BAD=90^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 构成三棱锥 $A-BCD$ 。则在三棱锥 $A-BCD$ 中, 下列命题正确的是()



- (A) 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC
 (B) 平面 $ADC \perp$ 平面 BDC
 (C) 平面 $ABC \perp$ 平面 BDC
 (D) 平面 $ADC \perp$ 平面 ABC

(10) 在平面直角坐标系中有 6 个点, 它们的坐标分别为 $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 4)$, $(-2, -1)$, $(2, 1)$ 则这 6 个点可确定不同三角形的个数为

- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 20

(11) 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1 和 F_2 , 点 P 在椭圆上, 如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上, 那么 $|PF_1| : |PF_2|$ 的值为

- (A) 7 : 1 (B) 5 : 1
 (C) 9 : 2 (D) 8 : 3

(12) 已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,

$y=f^{-1}(x+1)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。若 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)$ ($x>0$)，则 $g(\sqrt{2})$ 等于

- (A) 1 (B) -1 (C) 3 (D) -3

第 卷(非选择题共 90 分)

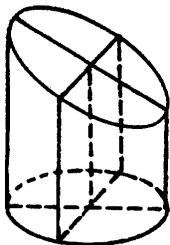
二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分。把答案填在题中横线上。

(13) $\sin 80^\circ \cos 35^\circ - \sin 10^\circ \cos 55^\circ$ 的值等于_____。

(14) 已知抛物线 $y^2=a(x+1)$ 的准线方程是 $x=-3$ ，那么抛物线的焦点坐标是_____。

(15) 已知 $f(x)=a^x$ ($a>1$)， $g(x)=b^x$ ($b>1$)，当 $f(x_1)=g(x_2)=2$ 时，有 $x_1>x_2$ ，则 a 、 b 的大小关系是_____。

(16) 一圆柱被一平面所截，截口是一个椭圆，已知椭圆的长轴长为 5，短轴长为 4，被截后几何体的最短侧面母线长为 1，则该几何体的体积等于_____。



三、解答题:本大题共 6 小题,共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

已知: $\triangle ABC$ 中, $C=120^\circ$ $c=7$, $a+b=8$ 。

求 $\cos(A-B)$ 的值。

(18) (本小题满分 12 分)

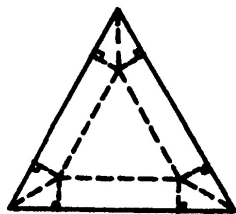
已知函数 $y=f(x)$ 对任意实数 x_1, x_2 , 都有
 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$, 且当 $x>0$ 时, $f(x)<0$ 。

() 试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性, 并给出证明;

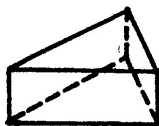
() 试判断函数 $y=f(x)$ 的单调性, 并给出证明。

(19) (本小题满分 12 分)

在边长为 a 的正三角形的三个角处各剪去一个四边形。这个四边形是由两个全等的直角三角形组成的，并且这三个四边形也全等，如图。若用剩下的部分折成一个无盖的正三棱柱形容器，如图。则当容器的高为多少时，可使这个容器的容积最大，并求出容积的最大值。



图



图

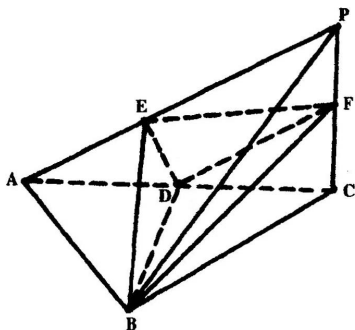
(20) (本小题满分 12 分)

已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC \perp$ 底面 ABC , $AB=BC$,
 D 、 F 分别为 AC 、 PC 的中点, $DE \perp AP$ 于 E 。

() 求证: $AP \perp$ 平面 BDE ;

() 求证: 平面 $BDE \perp$ 平面 BDF ;

() 若 $AE:EP=1:2$, 求截面 BEF 分三棱锥 $P-ABC$ 所成两部分的体积比。



(21) (本小题满分 12 分)

已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 有且仅有一个交点 Q , 且与 x 轴、 y 轴分别交于 R 、 S , 求以线段 SR 为对角线的矩形 $ORPS$ 的一个顶点 P 的轨迹方程。

(22) (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, 它的前 n 项和记为 S_n , 数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 3 , 公差为 1 的等差数列。

() 求 a_n 与 S_n 的解析式 ;

() 试比较 S_n 与 $3na_n (n \in \mathbb{N})$ 的大小。

参考答案

一、 (1)D (2)D (3)B (4)D (5)D (6)B
(7)D (8)A (9)D (10)B (11)A (12)D

二、 (13) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (14) $(1, 0)$ (15) $a < b$ (16) 10π

三、 (17) 解: 由正弦定理, 得 $2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{7}{\sin 120^\circ} = \frac{14}{\sqrt{3}}$ 。
(2 分)

又由正弦定理及已知, 得方程

$$a+b=2R\sin A+2R\sin B=8,$$

$$2R(\sin A+\sin B)=8 \quad (5 \text{ 分})$$

$$\frac{14}{\sqrt{3}} \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 8,$$

$$\frac{14}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 8. \quad \text{解得 } \cos \frac{A-B}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\cos(A-B) = 2\cos^2 \frac{A-B}{2} - 1 = \frac{47}{49}. \quad (12 \text{ 分})$$

(18)解: () 在关系式 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 中,

令 $x_1=0$, 得 $f(x_1+0)=f(x_1)+f(0)$ 。解得 $f(0)=0$ 。

同样, 在已知关系式中, 令 $x_1=x$, $x_2=-x$,

得 $f(x-x)=f(x)+f(-x)$, 即 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$ 。

函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数。 (6 分)

() 任取 $x_1 > x_2$ 。

则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1-x_2)$ 。

由 $x_1-x_2 > 0$, 并由已知, 得 $f(x_1-x_2) < 0$ 。即 $f(x_1)-f(x_2) < 0$ 。

则由函数单调性的定义, 得 $y=f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的减函数。 (12 分)

(19)解: 设容器的高为 x 。

则容器底面正三角形的边长为 $a-2\sqrt{3}x$ (2 分)

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (a-2\sqrt{3}x)^2 \cdot x \quad (0 < x < \frac{a}{2\sqrt{3}}) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x \cdot (a - 2\sqrt{3}x)(a - 2\sqrt{3}x) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot 4\sqrt{3}x \cdot (a - 2\sqrt{3}x)(a - 2\sqrt{3}x) \\
&\leq \frac{1}{16} \left(\frac{4\sqrt{3}x + a - 2\sqrt{3}x + a - 2\sqrt{3}x}{3} \right)^3 \\
&= \frac{a^3}{54} \quad (10 \text{ 分})
\end{aligned}$$

当且仅当 $4\sqrt{3}x = a - 2\sqrt{3}x$, 即 $x = \frac{\sqrt{3}}{18}a$ 时 $V_{\max} = \frac{a^3}{54}$ (12分)

答: 当容器的高为 $\frac{\sqrt{3}}{18}a$ 时, 容器的容积最大, 最大容积为 $\frac{a^3}{54}$ 。

(20) () 证: $PC \perp$ 底面 ABC , $BD \subset$ 平面 ABC ,
 $PC \perp BD$ 。

由 $AB=BC$, D 为 AC 的中点, 得 $BD \perp AC$ 。

又 $PC \cap AC=C$, $BD \perp$ 平面 PAC 。(2分)

又 $PA \subset$ 平面 PAC , $BD \perp PA$ 。

由已知, $DE \perp PA$, $DE \cap BD=D$, $AP \perp$ 平面 BDE 。

(4分)

() 证: 由 $BD \perp$ 平面 PAC , $DE \subset$ 平面 PAC , 得 $BD \perp DE$ 。

由 D 、 F 分别为 AC 、 PC 的中点, 得 $DF \parallel AP$ 。

又由已知, $DE \perp AP$, $DE \perp DF$ (6分)

$BD \cap DF=D$, $DE \perp$ 平面 BDF 。

又 $DE \subset$ 平面 BDE , $平面 BDE \perp 平面 BDF$ 。(8分)

() 解: 设点 E 和点 A 到平面 PBC 的距离分别为 h_1 和 h_2 。

则 $h_1 \quad h_2 = EP \quad AP = 2 \quad 3$ (9 分)

$$\therefore \frac{V_{P-EBF}}{V_{P-ABC}} = \frac{V_{E-PBF}}{V_{A-PBC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot h_1 \cdot S_{\triangle PBF}}{\frac{1}{3} \cdot h_2 \cdot S_{\triangle PBC}} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \quad (11 \text{ 分})$$

所以截面 BEF 分三棱锥 P-ABC 所成两部分体积的比为 1 : 2 (或 2 : 1) (12 分)

(21) 解: 由已知, 直线 l 不过椭圆的四个顶点。

所以设直线 l 的方程为 $y = kx + m$ ($k \neq 0$)。 (1 分)

代入椭圆方程, 得 $b^2 x^2 + a^2 (k^2 x^2 + 2kmx + m^2) = a^2 b^2$ 。

化简后, 得 $(a^2 k^2 + b^2) x^2 + 2ka^2 mx + a^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$ 。 (3 分)

$$= (2ka^2 m)^2 - 4(a^2 k^2 + b^2)(a^2 m^2 - a^2 b^2),$$

$$= 4a^2 b^2 (a^2 k^2 + b^2 - m^2).$$

由已知, 得 $\Delta = 0$ 。即 $a^2 k^2 + b^2 = m^2$ 。 (6 分)

在直线方程 $y = kx + m$ 中,

分别令 $y = 0, x = 0$, 求得 $R(-\frac{m}{k}, 0), S(0, m)$ 。

令顶点 P 的坐标为 (x, y) ,

$$\text{由已知, 得} \begin{cases} x = -\frac{m}{k}, \\ y = m. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{y}{x}, \\ m = y. \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

代入 式并整理, 得 $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ 。即为所求。 (12 分)

(22) 解: () 由已知 $S_n^2 = 3 + (n-1) = n+2$ 。

$$a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad S_n = \sqrt{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2 \text{ 分})$$

$$a_1 = S_1 = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1},$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} \sqrt{3} & (n=1); \quad (3 \text{ 分}) \\ \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} & (n \geq 2). \quad (5 \text{ 分}) \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

() 当 $n=1$ 时, $S_1 = \sqrt{3}$, $3a_1 = 3\sqrt{3}$, 有 $S_1 < 3a_1$. (6 分)

当 $n=2$ 时, $S_2 = \sqrt{4}$, $3 \cdot 2 \cdot a_2 = 6(\sqrt{4} - \sqrt{3})$, 有 $S_2 > 3 \cdot 2 \cdot a_2$ (7 分)

当 $n=3$ 时, $S_3 = \sqrt{5}$, $3 \cdot 3 \cdot a_3 = 9(\sqrt{5} - \sqrt{4})$, 有 $S_3 > 3 \cdot 3 \cdot a_3$ (8 分)

当 $n=4$ 时, $S_4 = \sqrt{6}$, $3 \cdot 4 \cdot a_4 = 12(\sqrt{6} - \sqrt{5})$, 有 $S_4 > 3 \cdot 4 \cdot a_4$ (9 分)

当 $n=5$ 时, $S_5 = \sqrt{7}$, $3 \cdot 5 \cdot a_5 = 15(\sqrt{7} - \sqrt{6})$, 有 $S_5 > 3 \cdot 5 \cdot a_5$

猜想, 当 $n \geq 4$ 时, $S_n < 3na_n$. 证明如下: (10 分)

证明 $\sqrt{n+2} < 3n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

$$\because \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} > 0, \quad \therefore \text{只需证明 } \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} < 3n.$$

只需证明 $\sqrt{n+2}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) < 3n$.

只需证明 $(n+2) + \sqrt{(n+2)(n+1)} < 3n$.

由平均值定理, 得 $\sqrt{(n+2)(n+1)} < \frac{(n+2)(n+1)}{2} = n + \frac{3}{2}$

只需证明 $2n + \frac{7}{2} < 3n$. 只需证明 $n > 7/2$.

此不等式当 $n \geq 4$ 时成立. 所以 $S_n < 3na_n$ 当 $n \geq 4$ 时成立.

综上, 当 $n=1$ 或 $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$ 时, $S_n < 3na_n$;

当 $n=2$ 和 $n=3$ 时, $S_n > 3na_n$ 。(14 分)