黄冈兵法·同步学案

初二代数

主　编　南秀山
副主编　余梦　余曙光
编　者　刘葆华等

陕西师范大学出版社

MU LU

目　录

第八章　因式分解

8.1　提公因式法

学点探究分析

重点　因式分解的意义和要求，提公因式的方法.

难点　确定公因式的方法.

探究点　对因式分解意义和要求的辨析能力，准确而熟练地把某些多项式用提公因式法因式分解.

学习方法技巧

1. 对因式分解的意义的理解

要从三个方面去理解：

(1) 因式分解是对多项式而言的，一个单项式本身就是数与字母的积，不需要因式分解. 如 $4x^2y=2x^2\cdot 2y$ 只是一种恒等变形，不是因式分解.

(2) 因式分解与整式乘法是互逆的，例如，$(m+n)(m-n)=m^2-n^2$ 是整式乘法，$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ 是因式分解.

(3) 因式分解实质上是整式的一种恒等变形，变形前后，式子的值始终保持不变.

2. 因式分解的要求

(1) 因式分解的结果必须是几个整式的积的形式，而不是几个整式的积与某项的和差形式. 如 $(3x^2+6xy-12x)=3x(x+2y-4)$，$m^2+8m-9=(m-1)(m+9)$ 都是因式分解；而 $am+bm+c=m(a+b)+c$，右端不是积的形式，而是加的形式，所以不是因式分解；再如 $x+3=\frac{1}{x}(x^2+3x)(x\neq 0)$，右端虽是积的形式，但 $\frac{1}{x}$ 是分式，而因式分解只针对整式而言，故也不是因式分解.

(2) 因式分解的结果必须是每一个因式在有理数范围内不能再分解为止. 如① $m^5-m=(m^4-1)$；② $m^5-m=m(m^2+1)(m^2-1)$；③ $m^5-m=$

$m(m-1)(m+1)(m^2+1)$．应用整式乘法公式检查①、②、③均成立，但③才是把多项式 m^5-m 分解因式的结果．

（3）最终分解结果仅相差一个数字因数的，可看作分解结果相同．如① $4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$；② $4x^2-1=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$．但习惯上写成①的形式．

3．公因式的求法

多项式中每一项都含有的因式，叫公因式．

如 $3ma+3mb$ 中，每一项都有 $3m$，所以 $3m$ 是这个多项式的公因式．

公因式的构成如下：

（1）系数：各项系数的最大公约数；

（2）字母：各项都含有的相同字母；

（3）指数：相同字母的最低次幂．

如 $9x^3y^3z-12x^2y+15x^3y^3$ 中，9，-12，15 的最大公约数是 3；各项都有的相同字母是 x，y；x 的最低次幂是 2，y 的最低次幂是 1，所以公因式是 $3x^2y$．

能力升级捷径

【例 1】　下列各式中由等号的左边到右边的变形，是因式分解的是（　　）

A．$(x+3)(x-3)=x^2-9$

B．$x^2+x-5=(x-2)(x+3)+1$

C．$a^2b+ab^2=ab(a+b)$

D．$x^2+1=x\left(x+\frac{1}{x}\right)$

思维技巧　本题考查因式分解的意义，培养学生对概念的辨析能力，养成严谨认真的学习态度．解答本题时要对每个选择项按因式分解的定义进行审查．

解　A 是整式乘法运算；B 中等号的右边不是整式积的形式；C 满足因式分解定义．所以是因式分解；D 中等号右边两项的乘积，不是整式积的形式．故应选 C．

激活思维　1．本题考查的是本节的第一个知识点，易错选 D，解题关键是透彻理解因式分解的定义．

2．与本题类似的其他变形有：

下列从左到右的变形：（1）$15x^2y=3x\cdot 5xy$；（2）$(a+b)(a-b)=a^2-$

b^2；(3) $a^2-2a+1=(a-1)^2$；(4) $x^2+3x+1=x\left(x+3+\frac{1}{x}\right)$．其中是因式分解的个数是（　　）

A. 0个　　　B. 2个　　　C. 1个　　　D. 3个

解　选C.

【例2】 把下列各式分解因式：

(1) $-3x^2-6xy+x$；　　　(2) $x^{2n}-x^n$.

思维技巧　应寻找所有项的公因式，再提公因式，公因式的系数应取所有项系数的最大公约数，字母取相同字母，并且相同字母取最低次幂.如果第一项系数是负数，一般应提出“－”号，括号内每项都要改变符号.特别注意.提出后的剩余因式不能漏项，准确确定系数.

解　(1) $-3x^2-6xy+x=-x(3x+6y-1)$；

(2) $x^{2n}-x^n=x^n(x^n-1)$.

激活思维　1. 通常项的系数为“1”省略不写，但单项式单独成项时，不能漏掉，如(1)中$(3x+6y-1)$不能写成$(3x+6y)$；

2. 提出公因式，剩余因式是原多项式的该项与公因式的商，如(2)中x^{2n}提出x^n剩下的应是x^n而不是x^2.

3. 与本题类似的其他变形有：

已知　$a+b=13$，$ab=40$，求a^2b+ab^2的值.

解　$a^2b+ab^2=ab(a+b)$

当$a+b=13$，$ab=40$时

原式$=40\times13=520$

【例3】 把$\frac{1}{2}a^2(x-2a)^2-\frac{1}{4}a(2a-x)^3$分解因式.

思维技巧　题中两部分的系数都是分数，为了尽量使提取公因式后的括号内的各项系数为整数，就应提取各系数分母的最小公倍数的倒数，即为$\frac{1}{4}$.同时，提公因式是指提取公因式中相同的字母及其最低次幂，由于字母可以表示数、单项式、多项式，故本题中相同的字母是指$(x-2a)$，最低次幂是2.

解　$\frac{1}{2}a^2(x-2a)^2-\frac{1}{4}a(2a-x)^3$

$=\frac{1}{2}a^2(x-2a)^2+\frac{1}{4}a(x-2a)^3$

$=\frac{1}{4}a(x-2a)^2(2a+x-2a)$

$=\frac{1}{4}ax(x-2a)^2$

激活思维　1. 要注意以 n 的奇偶来决定 $(a-b)^n$ 变为 $(b-a)^n$ 后是否需要在括号前添负号，$(2a-x)^3=-(x-2a)^3$，所以 $-\frac{1}{4}a(2a-x)^3=\frac{1}{4}a(x-2a)^3$.

2. 当公因式的构成比较复杂时，要按系数，单个字母及次数，代数式的顺序分步确定，特别要注意括号外是否改变了符号.

3. 与本题类似的其他变形有：

把　$x^3(x+y-z)(y+z-a)+x^2z(z-x-y)+x^2y(z-x-y)\cdot(x-z-a)$ 分解因式.

解　$x^3(x+y-z)(y+z-a)+x^2z(z-x-y)+x^2y(z-x-y)(x-z-a)$

$=x^3(x+y-z)(y+z-a)-x^2z(x+y-z)-x^2y(x+y-z)(x-z-a)$

$=x^2(x+y-z)[x(y+z-a)-z-y(x-z-a)]$

$=x^2(x+y-z)(xy+xz-xa-z-xy+yz+ya)$

$=x^2(x+y-z)(xz-xa-z+yz+ya)$

【例 4】　在一条宽阔的马路上，整齐排列着 10 个花坛，每个花坛的形状都像操场上的跑道圈那样两端呈半圆形，连接两个半圆的边缘部分是直的. 已知每个花坛的宽都是 6m，每个花坛边缘直的部分的长分别是 36m、25m、30m、28m、25m、32m、24m、24m、22m 和 32m，试求出这些花坛的总面积.

思维技巧　把生活中的实例转化为数学知识来求解是“数学建模”思想的运用，花坛的形状应归类到数学中的几何图形，进而求出面积. 可以把每个花坛都看作是一个长方形与两个半圆的和，即一个长方形与一个圆的和，圆的半径为 3m.

解法一　计算出每个花坛的面积，然后把 10 个面积的数值相加（计算略）.

解法二　$(36\times6+\pi\cdot3^2)+(25\times6+\pi\cdot3^2)+(30\times6+\pi\cdot3^2)+(28\times6+\pi\cdot3^2)+(25\times6+\pi\cdot3^2)+(32\times6+\pi\cdot3^2)+(24\times6+\pi\cdot3^2)+(24\times6+\pi\cdot3^2)+(22\times6+\pi\cdot3^2)+(32\times6+\pi\cdot3^2)$

$=(36\times6+25\times6+30\times6+28\times6+25\times6+32\times6+24\times6+24\times6+22\times6+32\times6)+10\times\pi\cdot3^2$

$=(36+25+30+28+25+32+24+24+22+32)\times6+10\times\pi\cdot3^2$

$=278\times6+90\pi\approx1951\ (m^2)$

激活思维　1. 两种解法的繁简程度相差很多，解法二所以简便是因为在局部上使用提公因式进行了因式分解；并运用加法的交换律与结合律去求 10 个花坛的边长和.

2. 凭借想像力，设想每个花坛的两端部分离开中间部分各组成一个圆，

而10个花坛的中间部分顺次首尾相接，形成一个很长的长方形，这样重新组合并不改变总面积.

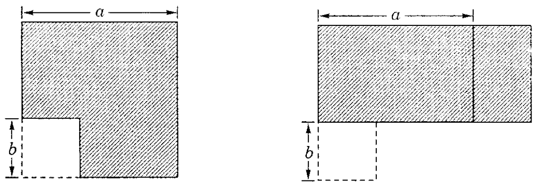
3．本题实际上是一道算术题，如果将题目中的宽度和每个花坛边缘直的部分的长分别改为 mm 和 a_1m，a_2m，a_3m，…，a_{10}m，那么就完全成为代数题了. 由此可以看出，提公因式的正确性既是因为它逆用乘法分配律，又是因为它是从许许多多的实际问题的解决中抽象概括出来的办法，其正确性得到过无数次检验.

4．与本题类似的其他变形有：

(1)（陕西省 2002 年）如图 8－1①所示，在边长为 a 的正方形中挖掉一个边长为 b 的小正方形（$a>b$），把余下的部分剪拼成一个矩形（如图 8－1②所示），通过计算两个图形（阴影部分）的面积，验证了一个等式，则这个等式是（　）

A．$(a+2b)(a-b)=a^2+ab-2b^2$　　B．$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C．$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　　D．$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$



图①　　　　图②

图 8－1

解　选 D.

(2) 已知：$a-b-c=16$，求 $a(a-b-c)+b(c-a+b)+c(b+c-a)$ 的值.

解　$a(a-b-c)+b(c-a+b)+c(b+c-a)$

$=a(a-b-c)-b(a-b-c)-c(a-b-c)$

$=(a-b-c)(a-b-c)$

$=(a-b-c)^2$

∵　$=a-b-c=16$，　∴　原式 $=16^2=256$.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. **多项式** $8x^{2n}-4x^{n}$ **提取公因式后,括号内的代数式是(　　)**

A. $4x^{n}$　　B. $2x^{n}-1$

C. $4x^{n}-1$　　D. $2x^{n-1}-1$

2. **把多项式** $m^{2}(a-2)+m(2-a)$ **分解因式等于(　　)**

A. $(a-2)(m^{2}+m)$　　B. $(a-2)(m^{2}-m)$

C. $m(a-2)(m-1)$　　D. $m(a-2)(m+1)$

3. $-x(a-x)(x-b)-mn(a-x)(b-x)$ **的公因式是(　　)**

A. $x(a-x)$　　B. $x(b-x)$

C. $-(a-x)(b-x)$　　D. $-m(n-1)(a-x)(b-x)$

4. **因式分解** $(x-y)^{2}-(y-x)$ **应为(　　)**

A. $(x-y)(x-y-1)$　　B. $(y-x)(x-y-1)$

C. $(y-x)(y-x-1)$　　D. $(y-x)(y-x+1)$

5. **若** $-2a^{n-1}-4a^{n+1}$ **的公因式是** M**,则** M **等于(　　)**

A. $2a^{n-1}$　　B. $-2a^{n}$

C. $-2a^{n-1}$　　D. $-2a^{n+1}$

6. **多项式** $(x+y-z)(x-y+z)-(y+z-x)(z-x-y)$ **的公因式是(　　)**

A. $x+y-z$　　B. $x-y+z$

C. $y+z-x$　　D. **不存在**

7. **计算** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{1999}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2000}$ **的结果为(　　)**

A. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2000}$　　B. $-\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

8. **多项式** $3(x-y)^{2}-2(y-x)^{2}$ **分解因式,正确的是(　　)**

A. $(x-y)^{2}(3x-3y+2)$　　B. $(y-x)(3x-3y+2)$

C. $(y-x)^{2}(3x-3y)$　　D. $(x-y)^{2}(3x-3y-2)$

9. **分解因式** $a(a-b-c)+b(c-a+b)+c(b-a+c)$ **的结果是(　　)**

A. $(b+c-a)^2$　　B. $(a-b-c)(a+b-c)$

C. $-(a-b-c)^2$　　D. $(a-b-c)^2$

10. **下列各式分解因式正确的是（　　）**

A. $10ab^2c+6ac^2+2ac=2ac(5b^2+3c)$

B. $(a-b)^3-(b-a)^2=(a-b)^2(a-b+1)$

C. $x(b+c-a)-y(a-b-c)-a+b-c=(b+c-a)(x+y-1)$

D. $(a-2b)(3a+b)-5(2b-a)^2=(a-2b)(11b-2a)$

11. **要使** $16(x-y)^3-24xy(y-x)=8(x-y)$（　　）**成立，则括号内应填上（　　）**

A. $2x^2-xy+2y^2$　　B. $2x-2y+3xy$

C. $2x^2-7xy+2y^2$　　D. $2x-2y-3xy$

二、填空题

12. **当** n **为______数时，**$(a-b)^n=(b-a)^n$ **当** n **为______数时，**$(a-b)^n=-(b-a)^n$.**（填"奇"或"偶"）**

13. $ab^2(x-y)^m+a^2b(x-y)^{m+1}=ab(x-y)^m$____________.

14. **如果多项式** $x^2+ax-42$ **分解因式后得到** $(x-6)(x+7)$**，则** $a=$____________.

15. $(a-b)^2(x-y)-(b-a)(y-x)^2=(a-b)(x-y)$__________.

16. **分解因式** $2a(b+c)-3(b+c)=$______________.

17. **已知** $a-2=b+c$**，则代数式** $a(a-b-c)-b(a-b-c)-c(a-b-c)=$______________.

18. **多项式** $18x^{n+1}-24x^n$ **的公因式是______，提公因式后，另一个因式是**______________.

19. **（淄博市　2002 年）观察数表**

1

1　-1

1　-2　1

1　-3　3　-1

1　-4　6　-4　1

1　-5　□　-10　5　-1

1　-6　□　-20　15　-6　1

……

根据其中的规律，在数表中的□内填入适当的数.

20. **多项式** $15x^{m+1}-12x^{m+2}+27x^{2m+1}$**的公因式是______，提公因式**

后，另一个因式是______.

三、分解因式

21．$x(a-b)(b-c)(c-a)-y(b-a)(c-b)(a-c)$；

22．$15x(a-b)^2-3y(b-a)$；

23．$(y+1)(y^2-1)-(y+1)^3$；

24．$2(1-x^2)+6a(x-1)^3$；

25．$(a+b)(2x-y)-(a+b)(x-2y)$；

26．$(x-m)^3(x-n)+(x-m)^2(n-x)$；

27．$x(a-b)+y(b-a)-z(a-b)$；

28．$(2x+3)(x-2y)+(x-2y)(x-1)+(2y-x)$；

29．$a(x+y-z)-b(z-x-y)-c(x-z+y)$；

30．$-a(b-a)^2-ab(a-b)^2+ac(b-a)^2$；

31．$ax(a-b+1)-ay(a-b+1)-az(b-a-1)$；

32．$(a-b)(a+b-1)+a-b$；

33．$(a-3)^2-(2a-6)$；

34．$-m^2n(x-y)^n+mn^2(x-y)^{n+1}$；

35．$-8x^{2n+2}y^{n+2}+12x^{n+1}y^{2n+3}$.

四、利用因式分解计算

36．$29\times19.99+41\times19.99+30\times19.99$；

37．$23\frac{3}{5}\times25-12\frac{2}{5}\times25+8\frac{4}{5}\times25$；

38．$1999\times1999+2000+1999$；

39．$9^3-9^2-8\times9^2$；

40．$(-2)^n+2(-2)^{n-1}$；

41．$39\times37-13\times3^4$.

五、先化简，再求值

42．已知：$x^2+x-1=0$．试求 x^3+2x^2+2001 的值.

43．已知 $2x-y=\frac{1}{3}$，$xy=2$，求 $2x^4y^3-x^3y^4$ 的值.

44．已知 $a-2=b+c$，求 $a(a-b-c)-b(a-b-c)-c(a-b-c)$ 的值.

探究能力测试

45．利用因式分解计算：$\frac{2^{2002}}{2^{2002}-2^{2003}}$.

46. 设 n 为自然数,试判断 $3+3a+a(a+1)$ 是质数还是合数?并说明理由.

47. 一化工厂生产化学药品 ab^2 袋,另一化工厂生产同种化学药品 ba^2 袋,而第三家化工厂生产此种化学药品 $\frac{ab}{2}$ 袋,则这三家化工厂总计生产此种化学药品多少袋?(a、b 为化工厂生产数量保密代码)

48. 证明:$81^7-27^9-9^{13}$ 能被 45 整除.

8.2 运用公式法

学点探究分析

重点　平方差公式与完全平方公式.

难点　灵活运用公式进行变形与分解.

探究点　运用公式法分解因式的关键是弄清各公式的形式和特点,熟练地掌握公式,并根据所给多项式的特点选择适当的公式进行因式分解.运用公式法进行因式分解是热点,在题目中出现的频率较高,故熟练掌握乘法公式的反用,是学好本节的一个关键.运用公式法在实际应用中也有较好的运用,不仅应用于代数式化简、求值、证明恒等式和解方程等代数内容,而且在几何、三角方面也有应用;对于实际问题等应用创新题,它也是解决问题的有力的工具.因此,它又是学好本节的又一关键.

学习方法技巧

1. 掌握公式的形式和特点

(1) 平方差公式　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.其特点是:左边是两个数 a,b 的平方差,右边为这两个数的和与差的积,根据左边的特点,运用公式的条件为:①所给多项式有两项;②两项符号相反;③这两项分别可以化为一个数(或整式)的平方的形式.如 $(x-3)^2-4y^2=(x-3)^2-(2y)^2=(x-3+2y)(x-3-2y)$.

(2) 完全平方公式　$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,其特点是:左边首尾两项和是两个数的平方和,而中间的一项是这两个数的积的 2 倍,其符号可正可负,右边为这两个数的和或差的平方.根据特点,故运用公式的条件是:①所给多项式有三项;②其中有两项的符号相同,并且这两项可化为两个数(或整式)的平方;③另一项为这两个数(或整式)的乘积的 2 倍.如 $4a^2-12ab+9b^2=(2a)^2-2\cdot(2a)\cdot(3b)+(3b)^2=(2a-3b)^2$.

2. 理解公式的运用

在运用公式法分解因式时，首先要弄清公式中的字母既可以是数，也可以是单独字母，也可以是单项式，还可以是多项式，这样增加了运用公式的难度，而在许多情况下，不一定能直接使用公式，需要经过适当组合、变形，方可用公式分解，从而要求运用公式要灵活. 运用公式法一般可按以下步骤进行：

(1) 先看各项有没有公因式，如果有，就先提公因式，包括提系数，首项负号.

(2) 观察项数，根据需要把多项式中的某一整体当作一项，像 $(x+y)^2$ $(a-b)^2$，可以当作两项. 如果是二项式，就考虑用平方差公式 ;如果是三项式，就考虑用完全平方公式.

(3) 如果分解出来的因式还能分解，就必须继续分解彻底.

(4) 合理变形，巧妙运用. 如分解因式 $(x-y)^2-4(x-y-1)$ 时，将此多项式变形为 $(x-y)^2-4(x-y)+4$ 后，就可以运用完全平方公式进行分解.

能力升级捷径

【例 1】 把下列各式分解因式：

(1) $16-\frac{1}{25}m^2$；　(2) $(a+b)^2-1$；

(3) $-(x+2)^2+16(x-1)^2$；　(4) $-\frac{1}{4}xy^3+0.09xy$.

思维技巧　运用公式法分解因式，其关键在对于公式的识别和把要分解的多项式"对号入座"上. 首先应考虑有无公因式可提 ;其次，相当于公式中的字母 a、b 的，往往是以多项式或单项式出现的，我们应将其看作一个"整体"来替换公式中的字母，从而套用公式分解因式. (1) 中把 $16-\frac{1}{25}m^2$ 可写成 $4^2-\left(\frac{m}{5}\right)^2$；(2) 把"1"看成"$1^2$"，即可利用平方差公式分解因式；(3) 根据加法交换律，$-(x+2)^2+16(x-1)^2$ 可写成 $[4(x-1)]^2-(x+2)^2$；(4) 先提公因式 xy，得 $xy\left(-\frac{1}{4}y^2+0.09\right)$，然后利用平方差公式把 $-\frac{1}{4}y^2+0.09$ 继续进行分解因式.

解　(1) $16-\frac{1}{25}m^2=4^2-\left(\frac{1}{5}m\right)^2=\left(4+\frac{1}{5}m\right)\left(4-\frac{1}{5}m\right)$

(2) $(a+b)^2-1$

$=[(a+b)+1][(a+b)-1]$

$=(a+b+1)(a+b-1)$

(3) $-(x+2)^2+16(x-1)^2$

$= [4(x-1)]^2-(x+2)^2$

$= [4(x-1)+(x+2)][4(x-1)-(x+2)]$

$= (5x-2)(3x-6)$

$= 3(x-2)(5x-2)$

(4) $-\frac{1}{4}xy^3+0.09xy$

$= xy\left[0.3^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right]$

$= xy\left(0.3+\frac{1}{2}y\right)\left(0.3-\frac{1}{2}y\right)$

激活思维 1. **应用平方差公式分解的多项式必须是二项式，而这两项都必须是完全平方式，并且这两项的符号相反，只有符合这些条件的多项式才能用平方差公式分解，并且每个因式都必须分解到不能分解为止，所以** $3x-6$ **应继续分解为** $3(x-2)$.

2. **与本题类似的其他变形有：**

(宁波市 2002) 分解因式：$x^3-4x=$________.

解 x^3-4x

$= x(x^2-4)$

$= x(x+2)(x-2)$

【例 2】 把下列各式分解因式：

(1) $a^2-14a+49$；

(2) $9a^2+12a+4$；

(3) $-\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2$；

(4) $\frac{m^2(n+m)^2}{9}+\frac{2m(n+m)^3}{3}+(n+m)^4$.

激活思维 有些题虽不能提公因式，又不能用平方差，但从项及其系数或指数综合分析，可以找出其特点. 如 (1) 可直接用完全平方公式；(2) 将 $9a^2$ **看作** $(3a)^2$，$4=2^2$，$12a=2\times3a\times2$，**视** $3a$ **为一个整体，显然可以直接应用完全平方公式分解因式；(3) 先提公因式，按** x **降幂排列后，括号里恰是一个完全平方式；(4) 先提公因式** $(m+n)^2$，**视** $(m+n)$ **为整体，即可应用完全平方式分解.**

解 (1) $a^2-14a+49=(a-7)^2$

(2) $9a^2+12a+4=(3a)^2+2\cdot3a\cdot2+2^2=(3a+2)^2$

(3) $-\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)=-\frac{1}{2}(x-y)^2$

(4) $\frac{m^2(n+m)^2}{9}+\frac{2m(m+n)^3}{3}+(m+n)^4$

$=(m+n)^2\left[\frac{m^2}{9}+\frac{2}{3}m\cdot(m+n)+(m+n)^2\right]$

$=(m+n)^2\cdot\left[\frac{1}{3}m+(m+n)\right]^2$

$=(m+n)^2\cdot\left(\frac{4}{3}m+n\right)^2$

激活思维　1. **应用完全平方公式分解的多项式必须是三项式,其中首末两项和是两个数的平方和的形式,而中间的一项是这两个数的积的** 2 **倍.运用公式时,必须弄清哪一项相当于公式中的对应项,这对于准确掌握和运用公式很有好处.**

2. **把完全平方式分解因式时,要根据第二项(乘积项)的符号来选择运用哪一个完全平方式.当乘积项为正号时,应选用和的平方公式:**$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$**;当乘积项为负号时,应选用差的平方公式:**$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

3. **与本题类似的其他变形有:**

分解因式,若 $a^2+ma+\frac{1}{9}=(a+n)^2$**,则** $m=$______**,**$n=$______.

解　$\because\ n^2=\frac{1}{9}$**,**$\therefore\ n=\pm\frac{1}{3}$.

故　$a^2+ma+\frac{1}{9}=\left(a\pm\frac{1}{3}\right)^2$**,从而得** $m=\pm\frac{2}{3}$.

【例3】　把下列各式分解因式:

(1) $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$;

(2) $-1+a^4$;

(3) $(x+y)^2+4(x-y)^2-4(x^2-y^2)$.

思维技巧　**将几个公式综合运用进行因式分解是本节的难点.排除难点的办法是:首先要把每个公式的形式进行分析,掌握每个公式左、右两边的特点;应仔细观察,先从要分解的多项式的项数入手,如果是二次三项式就考虑用完全平方公式;如果是二项式考虑用平方差公式,然后再去验证要分解的多项式是否满足公式的特点.如第(2)式中,利用加法交换律后产生了平方差公式,分解后又产生了平方差公式;(1)式中,先利用平方差,再利用完全平方;(3)式中的最后一项用平方差公式分解后,看作中间项,就不难看出所给式子是一个完全平方式.**

解　(1)　$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

$= (a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)$

$= (a+b)^2(a-b)^2$

(2) $-1+a^4$

$= a^4-1=(a^2+1)(a^2-1)=(a^2+1)(a+1)(a-1)$

(3) $(x+y)^2+4(x-y)^2-4(x^2-y^2)$

$= (x+y)^2-4(x+y)(x-y)+4(x-y)^2$

$= [(x+y)-2(x-y)]^2$

$= (3y-x)^2$

激活思维 1. 把多项式中的各项的位置作适当的变换，这也是公式的一种变换形式，更是公式法的要求，要养成善于观察、分析题目结构特点的思维方法;把一个普通的公式加以变化，由特殊到一般，设想它的各种可能结构;再从具体的题目中去印证. 这样，就可以举一反三，灵活运用.

2. 与本题类似的其他变形有：

(长沙市 2002 年) 图 8-2 为杨辉三角系数表，它的作用是指导读者按规律写出形如 $(a+b)^n$ (其中 n 为正整数) 展开式的系数，请你仔细观察右图中的规律，填出 $(a+b)^4$ 展开式中所缺的系数，

$(a+b)=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

则 $(a+b)^4=a^4+$ ____ $a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

解 4.

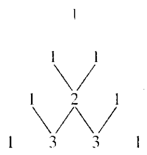


图 8-2

【例 4】 **求证** $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 是一个完全平方式.

思维技巧 不能轻易地把前四个一次因式的乘积展开，那样会出现高次项、多项的混乱情形，不利于证明;但前四个一次因式展开又是必然的，故可部分展开，注意到 $1+4=2+3$，若利用乘法结合律，把 $(x+1)(x+4)$ 和 $(x+2)(x+3)$ 分别展开后就会出现 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$ 的形式，这就不难发现 (x^2+5x) 作为一个整体 a 同时存在于两个因式中，用换元法即得 $(a+4)(a+6)+1=a^2+10x+25$，易见完全平方式.

证明一 原式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25$

$= (x^2+5x+5)^2$ ∴ 原命题成立

证明二　原式 $=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

令　$a=x^2+5x+4$，则 $x^2+5x+6=a+2$，

原式 $=a(a+2)+1$

$=a^2+2a+1$

$=(a+1)^2$

即 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+5x+5)^2$

证明三　原式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

令　$m=\frac{1}{2}[(x^2+5x+4)+(x^2+5x+6)]=x^2+5x+5$

原式 $=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)+1$

$=(m-1)(m+1)+1=m^2=(x^2+5x+5)^2$

激活思维　1. 因式分解有着广泛的应用，更融合了许多数学思维方法，如换元法，有些题目需要变形凑成某个公式的形式，再用公式法分解因式，因此需要养成较强的观察能力、熟练的变形技能和良好的思维及学习习惯. 关键在于如何选用公式，如何通过变形满足乘法公式所需的条件.

2. 与本题类似的其他变形有：

已知 $a+b=5$，$ab=3$，求代数式 $a^3b-2a^2b^2+ab^3$ 的值.

解　$a^3b-2a^2b^2+ab^3$

$=ab(a^2-2ab+b^2)$

$=ab[(a+b)^2-4ab]$

将 $a+b=5$，$ab=3$ 代入上式得

原式 $=3\times[5^2-4\times3]=3\times13=39$

【例 5】　设 $x+2z=3y$，试判断 $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 的值是不是定值？如果是定值，求出它的值；否则请说明理由.

思维技巧　满足 $x+2z=3y$ 的 x、y、z 有无穷多组值. 求出任一组数代入（*）式：$x^2-9y^2+4z^2+4xz$，都能得到一个数，如果存在两组 x、y、z 的值，代入（*）式后所得的两个值不同，那么（*）式的值就不是定值.

但是，如果尝试几组 x、y、z 的值代入（*）值都是一样，那么就可以猜测对于任意一组 x、y、z 的值代入（*）都是定值. 当然，猜想的正确性要经过论证才能确定，所以要设法进行论证. 应把 $x+2z=3y$ 这一条件中字母间的关系特征和 $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 中字母间的关系作比较，寻找两者之间的共同点、巧合点，恰当运用条件. 尝试运用条件来化简多项式，以达到降次、消元的效果，从而断定最后结果是否为定值.

解　由 $x+2z=3y$，得　$x-3y=-2z$

$\therefore\quad x^2-9y^2+4z^2+4xz$

$=(x-3y)(x+3y)+4z^2+4xz$

$=-2z(x+3y)+4z^2+4xz$

$=4z^2+2xz-6yz$

$=4z^2+2z(x-3y)$

$=4z^2+2z(-2z)$

$=4z^2-4z^2=0$

当 $x+2z=3y$ 时，$x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 的值为定值 0.

激活思维　1. 这种题目，其本质就是整式的恒等变形，恰当地运用条件，能够发现字母间关系中的巧合，这是对关于数和式的特征熟练把握的能力的一种训练和考查. 有了这种能力，便有了分析和把握问题实质、透彻理解数学问题的一种本领.

2. 本题还可用 $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 除以 $x+2z-3y$ 正好等于 0，一般地，如果等于一个常数，那也说明是定值，否则就不是定值.

如果用 $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 去除以 $x+2z$，再根据被除式 = 除式 × 商式 + 余式，可得：$x^2+4xz-9y^2+4z^2=(x+2z)^2-9y^2=9y^2-9y^2=0$.

③ 与本题类似的其他变形有：

运用适当的方法化简算式

$(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$

解　$(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{16}+1)\div(2^2-1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)\div(2^2-1)$

$=(2^{64}-1)\div(2^2-1)$

$=\dfrac{1}{3}(2^{64}-1)$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 将 $x^{m+3}-x^{m+1}$ 分解因式，结果是（　　）

A. $x^m(x^3-x)$　　B. $x^m(x^3-1)$

C. $x^{m+1}(x^2-1)$　　D. $x^{m+1}(x-1)(x+1)$

2. 下列代数式中是完全平方式的是（　　）

①x^2-4x+4　②$6x^2+3x+1$　③$4x^2-4x+1$

④$x^2+4xy+2y^2$　⑤$9x^2+16y^2-20xy$

A. ①③　B. ②④　C. ③④　D. ①⑤

3. 多项式①$16x^5-x$,②$(x-1)^2-4(x-1)+4$,③$(x+4)^4-4x\cdot(x+1)^2+4x^2$,④$-4x^2-1+4x$,分解因式后,结果中含有相同因式的是(　)

A. ①②　B. ③④　C. ①④　D. ②③

4. 下列各式中,①$-x^2-xy-y^2$,②$\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$,③$-4ab-a^2+4b^2$,④$4x^2+9y^2-12xy$,⑤$3x^2-6xy+3y^2$,能用完全平方公式分解的有(　)

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

5. 下列各式中不能运用平方差公式的是(　)

A. $-a^2+b^2$　B. $-x^2-y^2$

C. $49x^2y^2-z^2$　D. $16m^4-25n^2p^2$

6. 下列各式是完全平方式的是(　)

A. $16x^2-4xy+y^2$　B. m^2+mn+n^2

C. $9p^2-24pq+16q^2$　D. $u^2+2uv+\frac{1}{4}v^2$

7. (青海省 2002) 下列各式中,相等关系一定成立的是(　)

A. $(x-y)^2=(y-x)^2$　B. $(x+6)(x-6)=x^2-6$

C. $(x+y)^2=x^2+y^2$　D. $6(x-2)+x(2-x)=(x-2)(x-6)$

8. $(a+b)^2-100$ 分解因式的结果是(　)

A. $(a+b-10)(a+b+10)$　B. $(a+b-100)(a+b-100)$

C. $(a+b-10)(a-b+10)$　D. $(a-b-10)^2$

9. $-16x^2+441$ 分解因式为(　)

A. $(4x+21)(4x-21)$　B. $(16x+21)(x-21)$

C. $(21+4x)(21-4x)$　D. 以上答案均不对

10. $k-12xy^2+9x^2$ 是一个完全平方式,那么 k 应为(　)

A. 2　B. 4　C. $2y^2$　D. $4y^4$

11. 分解因式,若 $a^2+ma+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$,则 m 的值等于(　)

A. -2　B. 2　C. 1　D. -1

12. 若 $x^2+2(m-3)x+16$ 是完全平方式,则 m 的值等于(　)

A. -5　B. 3　C. 7　D. 7 或 -1

13. 若 n 为任意整数，$(n+11)^2-n^2$ 的值总可以被 k 整除，则 k 等于（　　）

A. 11　　B. 22　　C. 11 或 22　　D. 11 的倍数

14. $(x^m-y^n)^2$ 是下列哪个因式分解的结果（　　）

A. $x^{2m}-y^{2n}$　　B. $x^{2m}-2x^my^n+y^{2n}$

C. $x^{2m}-x^my^n+y^{2n}$　　D. $x^m-2x^my^n-y^n$

15. $9(a-b)^2+12(a^2-b^2)+4(a+b)^2$ 因式分解为（　　）

A. $(5a+b)^2$　　B. $(b-5a)^2$　　C. $(5b-a)^2$　　D. $(5a-5b)^2$

二、填空题

16. $(\_\_\_\_\_)^2+20pq+25q^2=(\_\_\_\_\_)^2$.

17. $x^2+\frac{b}{a}x+\_\_\_\_\_\_=(\_\_\_\_\_\_)^2$.

18. 若 $9x^2+kx+16$ 是一个完全平方式，则 $k=$______.

19. 已知 $a+b=1$，$ab=-12$，则 a^2+b^2 的值为______.

20. 运用平方差公式可证明 两个偶数的平方差一定能被正整数______整除.

三、分解因式

21. $16x^2y^2z^2-9$；

22. $25(m+n+2)^2-16(m-n-2)^2$；

23. $80a^2(a+b)-45b^2(a+b)$；

24. $a^2(x-y)+b^2(y-x)$；

25. $(x^2-x)^2+6(x^2-x)+9$；

26. $3p(x+1)^3y^2+6p(x+1)^2y+3p(x+1)$；

27. $(m+5n)^2-2(5n+m)(n-3m)+(3m-n)^2$

四、解答题

28. 已知 $x^2+2x+y^2+6y+10=0$，求 x、y 的值.

29. 已知 $\begin{cases}x=a+b,\\ y=a-b.\end{cases}$ 求 $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2$ 的值.

30. 若 a，b，c 为三角形三边.

求证：$(a^2+b^2-c^2)\leqslant 4a^2b^2$.

探究能力测试

31. 若 $100(a-b)^2+(2k+4)(b^2-a^2)+400(a+b)^2$ 是完全平方式，

初二代数

求 k 的值.

32. 屏幕上有一个长方形,它的大小随某种因素的变化而变化,可以用式子 $x^4+2x^3+7x^2+6x+8\ (x>0)$ 来表示. 它的长与宽都可以表示为关于 x 的二次三项式,试求出这个长方形的长的表达式.

33. 如图 8－3 所示有 F_1、F_2 两力臂,力臂 F_1、F_2 的分解可用 a、b、c 代替,F_2 的力臂长为 b 和 c 的和且与 a 的 2 倍的积,F_1 的力臂长为 b 与 c 的和的 3 倍,试用因式分解法比较力臂 F_1 与 F_2 的大小 (已知 $1.5<b+c<a<3$).

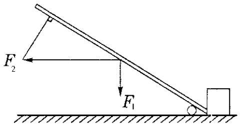


图 8－3

34. 某商场有四层,第一层有商品 $(a+b)^2$ 种,第二层有商品 $a(a+b)$ 种,第三层有商品 $(a+b)b$ 种,第四层有商品 $(a+b)^3$ 种,则这商场共有商品多少种?

35. 图 8－4 是一个边长为 $(a+b+c)$ 的正方体;图 8－5 是边长分别为 a,b,c 的三个正方体;图 8－6 是一个长为 $(a+b)$,宽为 $(b+c)$,高为 $(a+c)$ 的长方体. 用因式分解的方法证明:图 8－4 中的正方体的体积减去图 8－5 中"三个正方体体积之和"的差是图 8－6 中长方体体积的 3 倍.

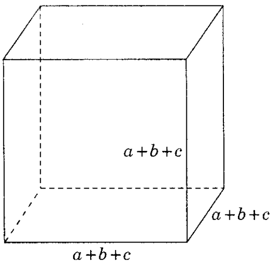


图 8－4

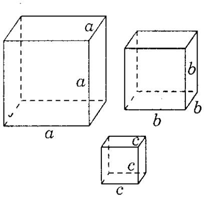


图 8－5

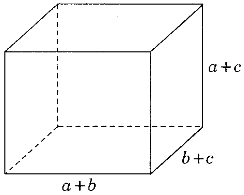


图 8－6

8.3　分组分解法

学点探究分析

重点　设计分组，使其能够具有公因式或运用公式来分解.

难点　合理分组.

探究点　分组分解法，是因式分解的最重要的方法之一，首先着手多项式的部分因式分解，创造条件，最后达到多项式完全分解，即由局部到整体的变形过程. 至于哪些项分为一组合适，除了需要较强的观察能力外，还需要有厚实的基础知识和熟练的等价变形技能. 在这一节里，数学思维中的转化思想应用广泛，经常运用转化思想，将复杂问题转化为简单问题，将生疏的问题转化为熟悉的问题；另外，运用整体思想可以使解题思路清晰，步骤简捷，解法简便. 所以，良好的数学思想的培养是学好数学的关键.

学习方法技巧

1. 掌握分组分解法的分组原则与思路

分组分解法不是一种独立的分解因式的方法，它是为提公因式法或运用公式法分解因式创造条件，即先把多项式的各项适当分组，以达到最后能提公因式或运用公式分解因式的目的. 分组分解法的原则是分组后可以直接提公因式或运用公式，这就要求在分组时要预见到分组后能否继续进行因式分解. 因此，合理选择分组方法是运用分组分解法的关键.

如果将一个多项式的项分组后，各组都能直接运用公式或提公因式进行分解，并且各组在分解后，它们之间又能运用公式或有公因式，那么这个

多项式也可以用分组分解法来分解因式.

2. 分组分解法的分解要领

分组分解法的关键是要有预见性,要预见分组以后,各组之间能提公因式或能运用公式分解因式.

(1)四项式的分组分解法:四项式一般只能分成两组,分组的方法有两种:二、二分组,每组两项,即等项分组;三、一分组,一组有三项,一组有一项,即不等项分组,但要达到组内能提取公因式.对于四项式分组时,不一定一次就能分组成功,要不断试验,注意观察,通常可以按相同的系数或相同的系数比进行分组.

(2)超过四项的分组方法:若多项式的项数超过四项,则要求分组的技巧更高,当分组后能继续运用公式的多项式,首先要认真观察哪些项结合在一起可以运用公式,接着还要看组与组之间能否再继续分解.如因式分解 $x^3+x^2-xy+y^2+y^3$,首先观察项数是五项,选择分组,而分组只能是两项一组,其余三项一组.分组后能运用公式,这样很快确定出分组方法是 (x^3+y^3) 与 (x^2-xy+y^2).

(3) $x^2+(p+q)x+pq$ 型多项式的分解方法:对于二次项系数为 1 的二次三项式 x^2+px+q,如果能把常数项 q 分解为两个因数 a,b 的积,并且 $a+b$ 为一次项系数 p,那么它就可以运用公式

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

分解因式.这种方法的特征是"拆常数项,凑一次项".公式中的 x 可以表示单项式,也可以表示多项式.当常数项为正数时,把它分解为两个同号因数的积,因式的符号与一次项系数的符号相同;当常数项为负数时,把它分解为两个异号因数的积,其中绝对值较大的因数的符号与一次项系数的符号相同.

能力升级捷径

【例 1】　分解因式:$x^2+xy-3x-3y$.

思维技巧　运用分组分解法分解因式,要求按分组的原则,首先对题目进行观察,从每一项的字母系数和符号特点中找出正确的分组方案.此四项式可以"二、二分组",把前两项和后两项分两组,分别提出 x,-3,另一个因式正好都是 $x+y$,可以分解.此题也可按第一、三项分为一组,二、四项为一组.

解法一　$x^2+xy-3x-3y$

$$=(x^2+xy)+(-3x-3y)$$

$$=x(x+y)-3(x+y)$$

$=(x+y)(x-3)$

解法二 $x^2+xy-3x-3y$

$=(x^2-3x)+(xy-3y)$

$=x(x-3)+y(x-3)$

$=(x-3)(x+y)$

激活思维 1．仔细观察所给多项式的特点，你会发现运用分组分解法分解因式，有时也是有规律可循的．例如，此题的前两项为二次项，后两项为一次项，可考虑按次数分组；从系数方面看，此多项式的各项系数有一定比例关系，这样的多项式，可考虑按系数分组．

2．分组时，要注意符号问题，项与项之间交换位置时，要连同它们的符号一起交换．

3．与本题类似的其他变形有：

①分解因式：$7x^2-3y+xy-21x$．

解法一 $7x^2-3y+xy-21x$

$=(7x^2-21x)+(-3y+xy)$

$=7x(x-3)+y(x-3)$

$=(7x+y)(x-3)$

解法二 $7x^2-3y+xy-21x$

$=(7x^2+xy)+(-3y-21x)$

$=x(7x+y)-3(7x+y)$

$=(7x+y)(x-3)$

②分解因式：$2x^3+x^2-6x-3$

解法一 $2x^3+x^2-6x-3$

$=(2x^3+x^2)-(6x+3)$

$=x^2(2x+1)-3(2x+1)$

$=(2x+1)(x^2-3)$

解法二 $2x^3+x^2-6x-3$

$=(2x^3-6x)+(x^2-3)$

$=2x(x^2-3)+(x^2-3)$

$=(x^2-3)(2x+1)$

【例2】 分解因式：

(1) x^2-x-4y^2+2y； (2) $x^2-y^2-x+\frac{1}{4}$．

思维技巧 分组分解法比较灵活，有些题目的分组方法不是唯一的；不

初二代数

同题目的分组原则又不相同，所以要把握两个原则：①分组后各组内能分解因式；②组与组之间还可再分解因式．(1)中单从系数看不成比例．故不可分．若将一、二两项为一组，三、四两项为一组，各组提取公因式后，两组之间无法继续分解．继续尝试可找出正确的分组应为第一、三两项为一组，二、四两项为一组；(2)中只有一项含有字母 y，且该项无论与哪一项搭配都无法继续分解，故考虑让 $(-y^2)$ 作为一组，另三项分为一组．

解　(1)　x^2-x-4y^2+2y

$=(x^2-4y^2)+(-x+2y)$

$=(x+2y)(x-2y)-(x-2y)$

$=(x-2y)(x+2y-1)$

(2)　$x^2-y^2-x+\frac{1}{4}$

$=\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-y^2$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2$

$=\left(x-\frac{1}{2}+y\right)\left(x-\frac{1}{2}-y\right)$

激活思维　1．分组后容易发生符号错误，在运用公式或交换项的位置时，应注意符号的变化．

2．分组方法不同，但目的相同，即能继续分解，或组内运用公式和提公因式，或组与组之间能提取公因式和运用公式．应注意分解因式一定要分解到不能再继续分解为止．

3．与本题类似的其他变形有：

(1)（北京市海淀区 2001 年）分解因式：a^2-2a-b^2+2b．

解　a^2-2a-b^2+2b

$=(a^2-b^2)-(2a-2b)$

$=(a+b)(a-b)-2(a-b)$

$=(a-b)(a+b-2)$

(2)（宁夏 2002 年）分解因式：$a^2-b^2-c^2+2bc$．

解　$a^2-b^2-c^2+2bc$

$=a^2-(b^2+c^2-2bc)$

$=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$

(3)（福建省宁德市 2001 年）分解因式：$a^2-2ab+b^2-c^2$．

解　$a^2-2ab+b^2-c^2$

$= (a^2 - 2ab + b^2) - c^2$

$= (a - b)^2 - c^2 = (a - b + c)(a - b - c)$

【例 3】 分解因式 $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 2) - 30.$

思维技巧　本例中 $(x^2 + 2x)$ **这个整体频繁出现，且多项式没有化成最简形式，应先化成最简形式再用形如** $x^2 + (p + q)x + pq$ **型多项式来分解因式. 对** $(x^2 + 2x)$ **可采用换元法也可直接整体使用.**

解　方法一　原式 $= (x^2 + 2x)^2 + 5(x^2 + 2x) + 6 - 30$

$= (x^2 + 2x)^2 + 5(x^2 + 2x) - 24$

$= (x^2 + 2x + 8)(x^2 + 2x - 3)$

$= (x^2 + 2x + 8)(x + 3)(x - 1)$

方法二　设 $y = x^2 + 2x$

原式 $= (y + 3)(y + 2) - 30$

$= y^2 + 5y - 24$

$= (y + 8)(y - 3)$

$\therefore$ **原式** $= (x^2 + 2x + 8)(x^2 + 2x - 2) = (x^2 + 2x + 8)(x + 3)(x - 1)$

激活思维　1. **在较复杂的多项式的因式分解中，应注意观察，利用换元法可将较复杂的式子的形式化成简单的多项式，有利于进行因式分解.**

2. **对高次数的因式应注意要分解到不可再分为止.**

3. **与本题类似的其他形式有：**

(1) **(湖州市 2001 年) 分解因式：**$(x + y)^2 - (x + y) - 2.$

解　设 $x + y = a$**，则**

原式 $= a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1)$

又 $\because\ x + y = a$　$\therefore$ **原式** $= (x + y - 2)(x + y + 1)$

(2) **分解因式：**$(x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3) - 60.$

解　原式 $= [(x - 1)(x + 2)][(x - 2)(x + 3)] - 60$

$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6) - 60$

$= (x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) - 48$

$= (x^2 + x - 12)(x^2 + x + 4)$

$= (x + 4)(x - 3)(x^2 + x + 4)$

【例 4】 分解因式 $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a).$

思维技巧　每个括号所在的项与项之间既不能直接运用公式，又无公因式可提，必须打开括号，实施重组，先把题中的两个括号展开重新分组，看能否凑成与第三个括号相同的公因式，如把前两个括号展开得 $a^2b - ab^2 +$

$b^2c-bc^2+ca(c-a)$，重新组合，即可产生公因式 $c-a$ 或 $a-c$.

解　$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ca(c-a)$

$=(a^2b-bc^2)+(-ab^2+b^2c)+ca(c-a)$

$=b(a+c)(a-c)-b^2(a-c)-ca(a-c)$

$=(a-c)[b(a+c)-b^2-ca]$

$=(a-c)(ba+bc-b^2-ca)$

$=(a-c)[(ba-b^2)+(bc-ca)]$

$=(a-c)[b(a-b)-c(a-b)]$

$=(a-c)(a-b)(b-c)$

激活思维　1. 此题如果把三个括号都去掉再重新分组，由于所含项数太多，不便观察，所以最好去掉两个括号再重新分组. 可以尝试把第一和第三个括号去掉再重新分组 或把后两个括号去掉再重新分组.

2. 分解过程的括号若没有作用，可打开之后进行调整分组.

3. 与本题类似的其他变形有：

分解因式：$(1-a^2)(1-b^2)-4ab$.

解　$(1-a^2)(1-b^2)-4ab$

$=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$

$=1-2ab+a^2b^2-(a^2+b^2+2ab)$

$=(1-ab)^2-(a+b)^2$

$=(1-ab+a+b)(1-ab-a-b)$

【例 5】　如果二次三项式 x^2-ax-8（a 是整数）在整数范围内可以分解因式，那么 a 可以取哪些值？

思维技巧　由于 a 是整数，而且 x^2-ax-8 在整数范围内可以分解因式，因此可以肯定 x^2-ax-8 能用形如 $x^2+(p+q)x+pq$ 型的多项式进行分解，其关键在于将 -8 分解为两个数的积，且使这两个数的和等于 $-a$，由此可以求出所有可能的 a 的值.

解　$\because a$ 是整数，x^2-ax-8 在整数范围内可以分解因式.

又当 $-8=-1\times8$ 时，$-a=-1+8=7$；

当 $-8=1\times(-8)$ 时，$-a=1+(-8)=-7$；

当 $-8=-2\times4$ 时，$-a=-2+4=2$；

当 $-8=2\times(-4)$ 时，$-a=2+(-4)=-2$.

$\therefore$　a 的可取值为 7，-7，2，-2.

激活思维 1. 如果题中“在整数范围内分解因式”改为“在实数范围内分解因式”，还能用同样方法分解吗？

2. 如果题中二次三项式改为 x^2-8x-a，那么只要将 -8 拆分为两个整数的和，这两个整数的积就等于 $-a$，这样可以求得 a 有无数个解：0，-7，-12，-15，9，20，33，….

3. 与本题类似的其他变形有：

证明：对于任意自然数 n，$3^{n+2}-2^{n+3}+3^n-2^{n+1}$ 一定是 10 的倍数.

证明 $3^{n+2}-2^{n+3}+3^n-2^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
&=(3^{n+2}+3^n)-(2^{n+3}+2^{n+1})\\
&=3^n(3^2+1)-2^{n+1}(2^2+1)\\
&=10\times3^n-5\times2^{n+1}\\
&=10\times3^n-10\times2^n\\
&=10(3^n-2^n)
\end{aligned}
$$

$\because$ $10(3^n-2^n)$ 是 10 的倍数

$\therefore$ $3^{n+2}-2^{n+3}+3^n-2^{n+1}$ 一定是 10 的倍数

【例 6】 利用因式分解计算：

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$

思维技巧 这是因式分解的具体运用，关键在于从所给条件出发，通过观察、分析、比较、概括、猜想探索出每个括号之间的规律，然后通过因式分解找出它们的共同点加以化简，应该知道，每个括号里的式子都满足平方差公式的结构要求，若加以分解，则可变为两个分数的积，又每个括号里分解出的两个分数之间又可约分，故题目可以解出.

解 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$

$$
\begin{aligned}
&=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\\
&=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{10}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{11}{10}\times\frac{9}{10}\\
&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{9}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{9}\times\frac{9}{10}\right)\times\frac{11}{10}\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{11}{10}=\frac{11}{20}.
\end{aligned}
$$

初二代数

激活思维　1．题中利用因式分解把每个括号里都拆成两个分数之积，结果在这个分数连乘的算式中，发现了一些互为倒数的因数可相互约分．难点是判断哪些因数没有约分，规律是：凡是形如 $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的分数都能与它后面的第三项约分，凡是形如 $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 的因数都与它前面的第三项约分，没有约分的因数肯定成对出现．(一般处在对称位置上)

2．与本题类似的其他变形有：

计算：$100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+2^2-1^2$

解　$100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+2^2-1^2$

$=(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)+(96+95)(96-95)+\cdots+(2+1)(2-1)$

$=199+195+191+\cdots+7+3$

$=25\times(199+3)$

$=25\times202$

$=5050$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1．把 $m^2-a^2+4ab-4b^2$ 分解因式为(　　)

A．$(m+a-2b)(m-a+2b)$

B．$(m-a-2b)(m-a+2b)$

C．$(m+a-2b)(m+a+2b)$

D．$(m+a-2b)^2$

2．把多项式 $4x^2-2x-y^2-y$ 用分组分解法分解因式，正确的分组方法应该是(　　)

A．$(4x^2-y)-(2x+y^2)$　　B．$(4x^2-y^2)-(2x+y)$

C．$4x^2-(2x+y^2+y)$　　D．$(4x^2-2x)-(y^2+y)$

3．用分组分解法把 $2x^2+4xy-6x+3-x-2y$ 分解因式，下列分组正确的是(　　)

A．$(2x^2+4xy-6x)-(2y+x-3)$

B．$(2x^2+4xy)-(x+2y)-(6x-3)$

C．$(2x^2-x)+(4xy-6x)-(2y-3)$

D. 以上答案都正确

4. $-(3x-1)(x+2y)$是下列哪个多项式分解的结果（　　）

A. $3x^2+6xy-x-2y$　　B. $3x^2-6xy+x-2y$

C. $x+2y+3x^2+6xy$　　D. $x+2y-3x^2-6xy$

5. 如果多项式 x^3+3x^2-3x+k 有一个因式为$(x+3)$，则 k 的值应为（　　）

A. 6　　B. -6

C. 9　　D. -9

6. $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ 因式分解的结果是（　　）

A. $(y-z)(x+y)(x-z)$　　B. $(y-z)(x-y)(x+z)$

C. $(y+z)(x-y)(x+z)$　　D. $(y+z)(x+y)(x-z)$

7. 把多项式 $x^2-2xy+y^2+2x-2y-8$ 分解因式的结果是（　　）

A. $(x-y-4)(x-y+2)$　　B. $(x-y-1)(x-y-8)$

C. $(x-y+4)(x-y-2)$　　D. $(x-y+1)(x-y-8)$

8. 已知 $x^2+ax-12$ 能分解成两个整系数的一次因式的乘积，则符合条件的整数 a 的个数为（　　）

A. 3个　　B. 4个　　C. 6个　　D. 8个

二、填空题

9. $ax+ay-bx-by=(ax+ay)-(\quad)$

$=(\quad)(\quad)$.

10. 若 m,n 满足 $|m+2|+(n-4)^2=0$，分解因式：$(x^2+y^2)-(mxy+n)=$__________.

11. $4a^2-b^2-4c^2+4bc=(\quad)-(\quad)=(\quad)(\quad)$.

12. 若 $x=1+y$，则多项式 $x^2-2xy+y^2-3x+3y+2=$______.

三、分解因式

13. x^2-y^2+x+y　　14. $4x^2+10x-15y-9y^2$

15. $x^3+x-y-y^3$　　16. $a^2-2ab+b^2-c^2$

17. $4x^2-y^2-6y-9$　　18. $4ab+1-a^2-4b^2$

19. $3a^2-6ab+3b^2-5a+5b$　　20. $a^2b^2c^2-7abc-18$

21. $x^4-13x^2y^2+36y^4$

四、解答题

22. 已知 $x+y=\frac{3}{4}$，$x-y=\frac{1}{4}$，求 $x^2+xy-3x-3y$ 的值.

初二代数

23. 当 $a=2\frac{1}{2}$，$b=\frac{2}{5}$ 时，求 $ab-a-b+1$ 的值.

24. 已知△ABC 的三边 a，b，c，并且满足 $a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)=0$.

求证：△ABC 为等腰三角形.

探究能力测试

25. 已知△ABC 的三边为 a，b，c，且 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$，证明此三角形为等边三角形.

26. 若 $3x^2-x=1$，求 $6x^3+7x^2-5x+2001$ 的值.

27. M 国股民吉姆星期六买进某公司股票 1000 股，每股 27 元，付了 5‰的手续费和 1‰的交易税，问吉姆收益多少钱？

28. 给出下列算式：

$1\times2\times3\times4+1=5^2$

$2\times3\times4\times5+1=11^2$

$3\times4\times5\times6+1=19^2$

……

观察上面一系列算式，你能发现有什么规律？证明你得出的结论.

29. 阅读下面材料并完成填空.

你能比较两个数 2001^{2002} 和 2002^{2001} 的大小吗？为了解决这个问题，先把问题一般化，即比较 n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小（$n\geqslant1$ 的整数）. 然后，从分析 $n=1$，$n=2$，$n=3$，…，这些简单情形入手，从中发现规律，经过归纳，猜想出结论.

(1) 通过计算，比较下列①～③各组两个数的大小：(在横线上填“$>$”“$<$”或“$=$”)

①$1^2$ ______ 2^1；　②$2^3$ ______ 3^2；　③$3^4$ ______ 4^3；　④$4^5>5^4$；

⑤$5^6>6^5$；　⑥$6^7>7^6$；　⑦$7^8>8^7$；…

(2) 从第 (1) 小题的结果经过归纳，可以猜想出 n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小关系是：____.

(3) 根据上面归纳猜想得到的一般结论，可以得到 2001^{2002} ______ 2002^{2001}.（填“$>$”“$<$”或“$=$”）

小结与复习

学点探究分析

重点　用提公因式法、公式法及分组分解法分解因式.

难点　灵活运用各种方法分解因式.

探究点　因式分解基本方法的掌握以及特殊多项式因式分解的技巧是灵活解题能力的保证,同时也是一种逆向思维的训练.因式分解在代数式化简、求值、证明恒等式和解方程,以及在几何、三角方面的应用,在猜想探索题、应用开放题等实际能力题目的考查中,都有广泛的运用.

学习方法技巧

1.养成两种数学思想方法

(1)转化思想是初中数学中常见的一种数学思想方法,它的应用十分广泛,在解数学题时,经常运用转化思想,将复杂问题转化为简单的问题,将生疏的问题转化为熟悉的问题,如把 $(x+y)^4-14(x+y)^2+49$ 分解因式,如果设 $(x+y)^2=m$,就可把这个问题转化为熟悉而简单的问题:把 $m^2-14m+49$ 分解因式.

(2)整体思想:整体思想也是常见的一种数学思想方法,运用整体思想可以使解题思路清晰,步骤简捷,解法简便,如把 $5(x+y)^2+23(x+y)-10$ 分解因式时,若把括号展开,整理后再分解会相当烦琐,但若把 $(x+y)$ 看成一个整体 m,那么就相当于分解 $5m^2+23m-10$.

2.掌握相应的数学方法

本章所应用的数学方法有:①提公因式法;②运用公式法;③ $x^2+(p+q)x+pq$ 型多项式的分解法;④分组分解法;⑤换元法等.其中要深刻理解换元的思想,这可以帮助我们及时、准确地发现多项式中究竟把哪一个看成整体,才能构成二次三项式,以便顺利地进行分解.同时要注意已分解的两个因式是否能继续分解,如能分解,要分解到不能再分解为止.

3.因式分解的一般步骤

可归纳为一“提”、二“套”、三“分”、四“查”.

(1)一“提”:先看多项式的各项是否有公因式,若有必须先提出来.

(2)二“套”:若多项式的各项无公因式(或已提出公因式),第二步则看能不能用公式法和是不是二次三项式.

(3)三“分”:若以上两步都不行,则应考虑分组分解法,将能用上述方法

进行分解的项分到一组，使之分组后能“提”或能“套”.

(4) 四“查”：可以用整式乘法检查因式分解的结果是否正确.

只有养成良好的思维习惯，解题时才能事半功倍，快捷简便.

能力升级捷径

【例 1】　有如下判断：

①如果一个多项式中的每一项都含有因式 $2ab^2$，那么就可以通过提取 $2ab^2$ 完成这个多项式的因式分解.

②把一个多项式通过提取公因式化为一个单项式与一个多项式的乘积的形式，那么原来的多项式与提取公因式后作为一个因式的多项式的项数相同.

③能利用分组分解法进行因式分解的多项式都是四项式.

④把一个四项式用分组分解法分解因式，应该适当地把某两项结合为一组，把另外两项结合为一组. 所谓“结合”，就是要能保证继续提取公因式.

以上判断中，正确的个数为（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

思维技巧　仔细观察如下两个多项式，就能认识到结论①是不正确的：$2a^3b^2+2a^2b^2+2a^2b^3$ 与 $2a^3b^2-4a^2b^3+2ab^4$，在上面第一个多项式中，各项都含有因式 $2ab^2$，但应提取的公因式却是 $2a^2b^2$，而不是 $2ab^2$；把第二个多项式提取 $2ab^2$ 后，并没有完成因式分解，应继续分解为 $2ab^2(a-b)^2$. 结论③也是不正确的，如多项式 $ax-ay+bx-by+cx-cy$ 和多项式 $x-y+x^2-2xy+y^2$，它们的项数都多于 4，但是都可以用分组分解法分解；至于结论④，也是错误的，例如把多项式 $a^2-2ab+b^2-c^2$ 分解因式，就不是等项结合.

解　选 A.

激活思维　1. 要防止由于考虑不周而发生的错误，分析这样的题目有益于提高思维的周密性.

2. 说明结论①、③、④不正确所用的方法是“举反例”，使用这一方法的关键，在于能举出适当的反例，能提高思维的广阔性.

3. 在进行因式分解时要注意一些问题，比如，运用提公因式法时，要把能够提取的因式全部提出，提公因式后还要考虑再运用其他方法继续分解；又比如，在观察一个多项式能否运用分组分解法分解因式时，思路要开阔，不能只注意多项式的项数是否为 4，不能只考虑等项分组.

4. 与本题类似的其他变形有：

下列各式因式分解错误的是（　　）

A. $9-6(x-y)+(x-y)^2=(3-x+y)^2$

B. $4(a-b)^2-12a(a-b)+9a^2=(a+2b)^2$

C. $(a+b)^2-2(a+b)(a-c)+(a-c)^2=(b+c)^2$

D. $(m-n)^2-2(m-n)+1=(m-n+1)^2$

解 选 D

【例 2】 分解因式：

(1) $(a+b+c+d)^2-(a-b-c-d)^2$；

(2) $(a-b)^2-2(a^2-b^2)+(a+b)^2$；

(3) $ax^2+ay^2-2axy-az^2$；

(4) $x^2+11xy+18y^2$.

思维技巧 以上几个小题的共同特点是题目比较长，因此，既要从整体上把握所给式子的特点，又要观察每个题目的特征，逐一选择正确的方法去分解.

从整体上把握所给式子的特点，在这里就是把每个小括号看作是另外某个字母，可使结构变得简单. 如第 (1) 题中可以把 $a+b+c+d$ 视为 m，$a-b-c-d$ 视为 n，原题就变为 m^2-n^2，立即可知可用平方差公式分解；(2) 中把每个小括号都利用完全平方公式展开，也不失为一条思路，对于三项式如不能套用完全平方公式就要考虑把末项分解；而 (3) 中，如何正确分组则是关键.

解 (1) $(a+b+c+d)^2-(a-b-c-d)^2$

$=[(a+b+c+d)+(a-b-c-d)][(a+b+c+d)-(a-b-c-d)]$

$=2a\cdot(2b+2c+2d)=4a(b+c+d)$

(2) $(a-b)^2-2(a^2-b^2)+(a+b)^2$

$=(a-b)^2-2(a+b)(a-b)+(a+b)^2$

$=[(a-b)-(a+b)]^2=(a-b-a-b)^2=(-2b)^2=4b^2$

(3) $ax^2+ay^2-2axy-az^2$

$=a(x^2+y^2-2xy-z^2)$

$=a[(x^2-2xy+y^2)-z^2]$

$=a[(x-y)^2-z^2]$

$=a(x-y+z)(x-y-z)$

(4) $x^2+11xy+18y^2$

$=(x+2y)(x+9y)$

激活思维　1．在上面的分析与解题过程中，几次把一个代数式看作是一个整体，一个字母，这种想法极有应用价值，体现了“整体思想”，这里再举一例：

解方程组 $\begin{cases}x+y=16,\\10x+20y=250.\end{cases}$ 可以将第二个方程化为 $10(x+y)+10y=250$，然后将 $x+y=16$ 代入，得 $160+10y=250$，$y=9$. 这种处理方程组的方法叫“整体代入法”，其基本想法与本例题的分析如出一辙.

2．第(3)题中四项式可分成一项和三项两组，一般先用完全平方公式分解三项的一组，接着再用平方差公式分解，即“四项式一、三分，最后要用平方差”.

3．在考试中，常以选择题和填空题考查学生，应力求选择适当的角度与灵活的方法去解题.

4．与本题类似的其他变形有：

把下列各式分解因式：

(1)(上海市 2000 年) x^2-y^2-x+y；

(2)(河北省 2000 年) $2x^3y+8x^2y^2+8xy^3$；

(3)(吉林省 2000 年) x^3-4xy^2；

(4)(黑龙江省 2000 年) $9a^2-b^2+2b-1$；

(5)(苏州市 2000 年) $ma^2-4ma+4m$.

解　(1) 原式 $=(x+y)(x-y)-(x-y)$

$=(x-y)(x+y-1)$

(2) 原式 $=2xy(x^2+4xy+4y^2)$

$=2xy(x+2y)^2$

(3) 原式 $=x(x^2-4y^2)$

$=x(x+2y)(x-2y)$

(4) 原式 $=(3a)^2-(b-1)^2$

$=(3a+b-1)(3a-b+1)$

(5) 原式 $=m(a^2-4a+4)$

$=m(a-2)^2$

【例 3】　分解因式：

(1) $(n^2+3n+1)^2-1$；

(2) $(a+1)(a-1)(a+3)(a+5)-20$.

思维技巧　运用整体思想，直接运用公式法或其他方法分解因式，如(1)有时应观察式子特点，不必完全展开，适当使用换元法或整体思想简化

的运算,如(2).总之,应先观察式子本身的特点,再决定方法.

解　(1)原式$=(n^2+3n+1+1)(n^2+3n+1-1)$

$=(n^2+3n+2)(n^2+3n)$

$=n(n+1)(n+2)(n+3)$

(2)原式$=[(a-1)(a+5)]\cdot[(a+1)(a+3)]-20$

$=(a^2+4a-5)(a^2+4a+3)-20$

$=(a^2+4a)^2-2(a^2+4a)-15-20$

$=(a^2+4a)^2-2(a^2+4a)-35$

$=[(a^2+4a)-7]\cdot[a^2+4a+5]$

$=(a^2+4a-7)(a^2+4a+5)$

激活思维　1. 对较复杂的式子,应先观察式子的特点,再选择方法.适当使用换元法,如(2)中(a^2+4a)可设作整体y.分解因式变成积的形式时,应对每个因式检查,要分解到不可分解为止.

2. 与本题类似的其他变形有:

分解因式:$(x+y)(x+y+2xy)+(xy+1)(xy-1)$

解　设　$x+y=m$,$xy=n$,

原式$=m(m+2n)+(n+1)(n-1)$

$=(m+n)^2-1$

$=(m+n+1)(m+n-1)$

$=(x+y+xy+1)(x+y+xy-1)$

$=(x+1)(y+1)(x+y+xy-1)$

【例4】　已知x^4+6x^2+x+12有一个因式是x^2+ax+4,求a的值和这个多项式的其他因式.

思维技巧　因为x^4+6x^2+x+12是四次多项式,且有一个因式是x^2+ax+4,根据多项式的乘法原则可知另一个因式是x^2+bx+3(a,b是待定常数),推理出这一点是解题的关键,然后利用恒等关系式,a,b即可求.

解　设另一个多项式为x^2+bx+3,则

x^4+6x^2+x+12

$=(x^2+ax+4)(x^2+bx+3)$

$=x^4+(a+b)x^3+(3+4+ab)x^2+(3a+4b)x+12$

$\because x^4+6x^2+x+12$与$x^4+(a+b)x^3+(3+4+ab)x^2+(3a+4b)x+12$是同一个多项式,所以其对应项系数分别相等.即有

$$\begin{cases} a+b=0, & ① \\ 3+4+ab=6, & ② \\ 3a+4b=1. & ③ \end{cases}$$

由①、③解得，$a=-1, b=1$，

代入②，等式成立.

$\therefore a=-1$，另一个因式为 x^2+x+3.

激活思维　1. 这种解题方法叫待定系数法，是因式分解中较为常用的方法，在其他知识中也经常运用.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 如果 $(x-a)(x-4)-1$ 能够分解成两个多项式 $(x+b)$、$(x+c)$ 的乘积 (b, c 为常数)，则 a 应是多少？

解　由题意，得

$$x^2-(a+4)x+4a-1=x^2+(b+c)x+bc$$

$$\therefore \begin{cases} b+c=-a-4, & ① \\ bc=4a-1. & ② \end{cases}$$

由①×4+②，得 $bc+4(b+c)=-17$.

$\therefore\ bc+4(b+c)+16=-1$，即 $(b+4)(c+4)=-1$

又 $\because b$、c 是整数，

$\therefore \begin{cases} b+4=1, \\ c+4=-1 \end{cases}$　或　$\begin{cases} b+4=-1, \\ c+4=1. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} b=-3, \\ c=-5 \end{cases}$　或　$\begin{cases} b=-5, \\ c=-3. \end{cases}$

代入①得，$a=4$.

(2) 已知多项式 $2a^4+a^3-8a^2-19a-60$ 分解因式后含有因式 $(a-3)$ 和 $(2a+5)$，把原多项式进行因式分解.

解　由题意得　$(2a+5)(a-3)\cdot A=2a^4+a^3-8a^2-19a-60$

$\therefore\ A=(2a^4+a^3-8a^2-19a-60)\div(2a^2-a-15)$

$\quad =a^2+a+4$.

$\therefore\ 2a^4+a^2-8a^2-19a-60=(a-3)(2a+5)(a^2+a+4)$.

【例 5】　设 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=0$，求证：$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$.

思维技巧　观察 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$，此题的证明关键是求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 之值，应从题设 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=0$ 中，将其分解因式，求出

$x^2+\frac{1}{x^2}$的值.

证明 $\because$ $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$

$\because$ $x^3+\frac{1}{x^3}=0$,而 $x+\frac{1}{x}\neq 0$

$\therefore$ $x^2+\frac{1}{x^2}-1=0$,即 $x^2+\frac{1}{x^2}=1$ (1)

又$\because$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ (2)

把(1)代入(2),得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=1+2=3$

激活思维 1. 由于 x 与$\frac{1}{x}$的积为 1,所以根据 $x+\frac{1}{x}$的变化,不仅用于证明,而且在求值上的应用也十分灵活,一般来说,可求出 $x^n+\frac{1}{x^n}$的值.

2. 与本题类似的其他变形有:

已知:$x+\frac{1}{x}=-3$,求①$x^2+\frac{1}{x^2}$,②$x^4+\frac{1}{x^4}$的值.

解 $\because$ $x+\frac{1}{x}=-3$

$\therefore$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=(-3)^2=9$

$\therefore$ $x^2+\frac{1}{x^2}=9-2=7$

又 $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$

$=7^2-2=47$

【例 6】 已知 $\begin{cases}2001x+2001y=1000, & ①\\ x+3y=2001. & ②\end{cases}$ 试求 $2x^2+8xy+6y^2$ 的值.

思维技巧 从方程组中求出 x、y 的值,再代入计算,显然太繁,故不可能;应注意"逆向思维",观察 $2x^2+8xy+6y^2$,我们发现,此多项式可分解为 $2(x+y)(x+3y)$. 显然,$x+3y$ 可由方程②整体代入,至于 $x+y$ 的值,也可以从第一个方程中获得.

解 由条件可知:$x+y=\frac{1000}{2001}$,$x+3y=2001$

$\therefore 2x^2+8xy+6y^2=2(x^2+4xy+3y^2)=2(x+y)(x+3y)$

$$=2\times\frac{1000}{2001}\times2001=2000.$$

激活思维　1. 通过上题的解法又一次向我们体现了整体代入的简捷，同时，有的题目的求解并不一定按由已知到求解的顺序去解，逆向思维，分析欲求的式子，观察特征，寻求突破口也是一种必须养成的习惯.

2. 与本题类似的其他变形有：

已知多项式 $ax^2+7xy-3y^2$ 能分解为 $(3x+by)(cx+3y)$，求证：$a=6$，$b=-1$，$c=2$.

解　$\because$　$ax^2+7xy-3y^2=(3x+by)(cx+3y)$

$ax^2+7xy-3y^2=3cx^2+(9+bc)xy+3by^2$

根据多项式恒等的条件，得

$3b=-3$　　$\therefore b=-1$

$9+bc=7$　　即　$c=2$

又　$a=3c=3\times2=6$

$\therefore$　$a=6$，$b=-1$，$c=2$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. (益阳市 2001 年) 将多项式 $x^2-y^2+ax-ay$ 分解因式得(　　)

A. $(x+y)(x-y)+a(x-y)$

B. $(x-y)(x+y-a)$

C. $(x+y)(x-y+a)$

D. $(x-y)(x+y+a)$

2. (临沂市 2001 年) 如果 $4x-3$ 是多项式 $4x^2+5x+a$ 的一个因式，则 a 等于(　　)

A. -6　　B. 6　　C. -9　　D. 9

3. (安徽省 2000 年) 下列多项式中能用公式进行因式分解的是(　　)

A. x^2+4　　B. x^2+2x+4　　C. $x^2-x+\frac{1}{4}$　　D. x^2-4y

4. (四川省 2000 年) 把多项式 $2xy-x^2-y^2+1$ 分解因式的结果是(　　)

A. $(x-y+1)(y-x+1)$　　B. $(x+y-1)(y-x-1)$

C. $(x+y-1)(x-y+1)$　　D. $(x-y+1)(x-y-1)$

5. 代数式 a^8-b^8 的因式有（　）个

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

6. 如果 $a^2+8ab+m^2$ 是一个完全平方式，则 m 的值是（　）

A. b^2　　B. $2b$　　C. $16b^2$　　D. $4b$

7. 若 $(2x)^n-81=(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$，那么 n 的值是（　）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 对于任何整数 m，多项式 $(4m+5)^2-9$ 都能（　）

A. 被 8 整除　　B. 被 m 整除

C. 被 $(m-1)$ 整除　　D. 被 $(2m-1)$ 整除

二、填空题

9. 把一个多项式化为______的形式，叫做把这个多项式因式分解.

10. 把一个多项式分解因式时，如果多项式的各项有公因式，那么应先______.

11. 因式分解 $x^2+5xy+6y^2+x+3y=$______.

12. 因式分解 $x^{n+2}+x^{2n+2}-6x^2=$______.（n 为自然数）

13. 多项式 x^2-mx-4 有一个因式是 $x+1$，则多项式的另一个因式是 $=$______.

14. 若 $|p+2|$ 与 $q^2-8q+16$ 互为相反数，分解因式 $(x^2+y^2)-(pxy+q)=$______.

15. 计算 $2^{1999}-5\times2^{1998}+6\times2^{1997}+2000=$______.

16. 如果 $a^3-3k=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，那么 $k=$______.

17. $c^2-(\_\_\_)^2=(c+a-b)(c-a+b)$.

18. $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(\_\_\_)^2(\_\_\_)^2$.

19. 若多项式 x^2+ax-b 因式分解为 $(x+1)(x-2)$，则 $a^b=$____.

20. 计算 $\dfrac{2^{1999}}{2^{1998}-2^{2000}}$ 的结果是____.

三、分解因式

21. x^2-7x-8；

22. $m^3+2(m-2)(m+1)$；

23. $ab(c+d)(c-d)+cd(a+b)(a-b)$；

24. $3(ab+cd)-(bc+9ad)$；

25. $1-xy(1-xy)-x^3y^3$；

26. $2(a^3+3)-a(3a+4)$；

27. $5m^2(a+b)-a-b$；

28. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$；

29. $x^2+\frac{7}{4}x+\frac{5}{8}$；

30. $abc+5a^2+(a+bc)(a-bc)$；

31. $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$；

32. $(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$.

四、用简便方法计算

33. $57\times99+44\times99-99$；

34. 103^2-97^2.

五、解答题

35. 已知：$p^2+pq+q^2=1$.

求：代数式 $p(p+1)(p-1)-q(q+1)(q-1)$ 的值.

36. 已知 a、b、c 分别为$\triangle ABC$ 的三边，求证：$(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2<0$.

37. 求证 相邻两个自然数的平方差等于这两个数的和.

38. 已知 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$，求证 $a-b-c$.

探究能力测试

39. 有若干个大小相同的小球一个挨一个摆放，刚好摆成一个等边三角形（如图 8－7）；将这些球换一种摆法，仍一个挨一个摆放，又刚好摆成一个正方形（如图 8－8）. 试问 这种小球最少有多少个？

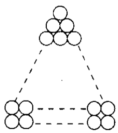


图 8－7

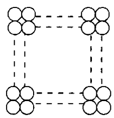


图 8－8

40. 写出一个二项式，再把它分解因式.（要求：二项式含有 m 和 n，系数，次数不限，并能先用提取公因式法再用公式法分解）

41. 时刻表上的计算题：

小明的爸爸去苏杭旅游，带回一张从杭州到无锡的旅游列车运行时刻表（如下），爸爸说："对照同一列车（原来称游 12，现在称游 204）时刻的变化，

可以分析出车速调整的情况."并让小明回答:在杭州——上海,上海——苏州,苏州——无锡的 3 个区间中,哪一个区间车速提高最大,提高了多少?(取整数)

站名＼车次	游 12	游 204	km
杭州	7:40(开)	8:42(开)	0
上海	11:19(到) 11:42(开)	11:10(到) 11:32(开)	201
苏州	12:52(到) 13:08(开)	12:38(到) 12:46(开)	285
无锡	13:44(止)	13:22(止)	327

小明通过认真思考,很快回答了爸爸的问题.同学们,你能解决吗?

42. 计算 $\dfrac{2001^3-2\times2001^2-1999}{2001^3+2001^2-2002}$.

43. 阅读后,请解答:

已知 $x>0$,符号 $[x]$ 表示大于或等于 x 的最小正整数,如 $[0.3]=1$;$[3.2]=4$;$[5]=5$;…

(1) 填空:$\left[\dfrac{1}{2}\right]=$______;$[6.01]=$_____;若 $[x]=3$,则 x 的取值范围是________________.

(2) 某市的出租车收费标准规定如下:5km 以内(包括 5km)收费 6 元;超过 5km 的,每超过 1km,加收 1.2 元(不足 1km 的按 1km 计算).用 x 表示所行的千米数,y 表示行 $x$km 应付车费,则乘车费可按如下的公式计算:

当 $0<x\leqslant5$(单位:km)时,$y=6$(元);

当 $x>5$(单位:km)时,$y=6+1.2\times(x-5)$(元).

其乘客乘车后付费 21.6 元,求该乘客所行的路程 x(km)的取值范围.

单元综合测试

基础能力测试

测试时间 40 分钟　　测试分值 100 分

一、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

1. $-16xy^2(y-x)^3$ 与 $20xy^3(x-y)^4$ 的公因式是______.

2. 把多项式 $a^2-(b+c)^2$ 分解因式结果等于______.

3. 分解因式 $(x+y)^2-2x-2y+1=$______.

4. 分解因式 $a^2-4ab+4b^2-c^2=$______.

5. 分解因式 $m^3+6m^2+9m=$______.

6. 利用因式分解计算 $2000^2-1999\times2001=$______.

7. 已知 $a+b=-5$,$ab=6$,则代数式 $a^2b+ab^2=$__________.

8. 多项式 x^2+kx+9 是完全平方式,则 $k=$________.

9. 若多项式 $x^2+4x+y^2-6y+13$ 的值等于 0,则 $x+y=$__________.

10. 观察式子:$x^2-1=(x-1)(x+1)$,$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$,$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$,…若 n 为不小于 1 的正整数,那么多项式 $x^n-1=$________________.

二、选择题(每小题 3 分,共 18 分)

11. 若多项式 $P=-(2x-y)(2x+y)$,则 P 为(　　)

A. $4x^2-y^2$　　B. $4x^2+y^2$

C. $-4x^2-y^2$　　D. y^2-4x^2

12. 计算 $\dfrac{2001}{2001^2-2000\times2002}$ 的结果为(　　)

A. 2000　　B. 2001　　C. 2002　　D. 2003

13. 下列各式分解因式正确的是(　　)

A. $1-\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{1}{4}(x+1)(x-2)$

B. $(x-y)^3-(y-x)=(x-y)(x-y+1)$

C. $4x-2x^2-2=-2(x-1)^2$

D. $x^3-y^3-x+y=(x+y)(x-y-1)$

14．已知 $x^2-px-10=(x+3)(x+a)$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$p<0, a<0$　　B．$p>0, a<0$

C．$p<0, a>0$　　D．$p>0, a>0$

15．下列多项式中能用公式法分解因式的多项式共有（　　）

①a^2+ab+b^2，②$4a^2+4a+1$，③a^2-b^2+2ab，④$-x^2-4y^2$，⑤$x^2-2xy+4y^2$

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

16．若 $a+b=3, a^3+b^3=0$，那么 a, b 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

三、解答题（共 52 分）

17．分解因式：（每小题 5 分，共 20 分）

(1) $2x^{n+a}-6x^n+4x^{n-1}$；

(2) $(x-1)(x-2)-20$；

(3) m^2-n^2-4m+4；

(4) a^3+3a^2+3a+2．

18．长方形的周长是 16cm，两邻边长为 x, y，均为整数，且满足 $x-y-x^2+2xy-y^2+2=0$，求长方形面积．（6 分）

19．若 $x+y=1, xy=-\frac{1}{2}$ 利用因式分解求代数式 $x(x+y)(x-y)-x(x+y)^2$ 的值．（6 分）

20．先阅读下列题目的解法，然后解答问题．

题目：分解因式 x^3-3x^2+4．

解：原式 $=x^3-2x^2-x^2+4$（先把 $-3x^2$ 拆成两项 $-2x^2$ 和 $-x^2$）

$=(x^3-2x^2)-(x^2-4)$

（适当分组）

$=x^2(x-2)-(x+2)(x-2)$

（运用提取公因式和公式法）

$=(x-2)(x^2-x-2)$

（提取公因式）

$=(x-2)^2(x+1)$

（继续分解因式）

仿照上述方法把多项式 x^3+x+30 分解因式．（10 分）

21．分别写出一个二项式、三项式、四项式，使它们都有一个因式 $x+1$，并将它们分别分解因式．（10 分）

初二代数

发展能力测试

测试时间 60 分钟　测试分值 120 分

一、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

1. 已知 $a+b=5$,$ab=6$,则 a^3+b^3 的值 = ________.

2. 多项式 x^2-mx-4 有一个因式 $x+1$,则多项式的另一个因式是 ________.

3. 多项式 $x^2+2(k-3)x+49$ 是一个完全平方式,则 $k=$ ______.

4. 若 $(2x)^n-81=(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$,则 $n=$ ______.

5. 已知 $m+n=0$,则代数式 $m^3+m^2n+mn^2+n^3$ 的值 = ______.

6. 如果 $xy=\frac{1}{2}$,那么代数式 $(x+y)^2-(x-y)^2=$ ________.

7. 一个长方形的面积为 $6x^2+13x+5(x>0)$,其中一边长为 $2x+1$,则另一边的长为 ________.

8. 利用因式分解计算 $7\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+7$ 的结果为 ________.

9. 若 $x+y=1$,那么 $x^3+3xy+y^3$ 的值为 ________.

10. 多项式 x^2-2x+5 的最小值等于 ________.

二、选择题(每小题 3 分,共 24 分)

11. 把多项式 $9(x-y)^2+12(x^2-y^2)+4(x+y)^2$ 因式分解后等于(　　)

A. $(3x-2y)(3x+2y)$　　B. $(5x+y)^2$

C. $(5x-y)^2$　　D. $(5x-2y)^2$

12. 若多项式 $x^2+mx+n=(x-2)(x+3)$,则 m^2+n^2 的值为(　　)

A. 1　　B. 36　　C. 37　　D. 以上均不对

13. 如果 $0<x<1$,则 x^3 与 x^2 的大小关系是(　　)

A. $x^3<x^2$　　B. $x^3=x^2$

C. $x^3>x^2$　　D. 不能确定

14. 把多项式 a^3-2a^2+a-2 分解因式,不同的分组方式有(　　)

A. 1 种　　B. 2 种　　C. 3 种　　D. 4 种

15. 若多项式 $2x^3-x^2-13x+k$ 有一个因式 $(2x+1)$,则 $k=$(　　)

A. 6　　B. 0　　C. -1　　D. -6

16. 已知 $2x-y=3$,那么 $4x^2-4xy+y^2-4x+2y+1999$ 的值为

(　　)

A. 2000　　B. 2001　　C. 2002　　D. 2003

17. 对于任意的正整数 n,多项式 n^3-n 一定是(　　)

A. 5 的倍数　　B. 6 的倍数

C. 7 的倍数　　D. 8 的倍数

18. 已知 $x=a+b$,$y=a-b$,则 $(x^3+y^3)^2-(x^3-y^3)^2$ 等于(　　)

A. $(a^2-b^2)^3$　　B. $2(a^2-b^2)^3$

C. $3(a^2-b^2)^3$　　D. $4(a^2-b^2)^3$

三、解答题(共 66 分)

19. 分解因式(每题 5 分,共 20 分)

(1) x^7-xy^6;

(2) $(ab+1)^2-(a+b)^2$;

(3) $m-m^3-mn^2+2m^2n$;

(4) x^4-5x^2+4.

20. 分解因式 x^2+ax+b,甲看错了 a 的值,分解的结果是 $(x+6)(x-1)$,乙看错了 b 的值,分解的结果为 $(x-2)(x+1)$,求多项式 x^2+ax+b 分解因式的正确结果. (6 分)

21. 若 $1+w+w^2=0$,求 $w^{1980}+w^{1981}+\cdots+w^{2000}$的值. (10 分)

22. 已知 $a=2000$,$b=2001$,$c=2002$,求代数式 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ 值. (10 分)

23. 已知一个长方形的周长为 16,它的两边长为 x,y,都是正整数,且满足 $x-y-x^2+2xy-y^2+2=0$,求这个长方形的面积. (10 分)

24. 观察下列式子,然后解答问题:(10 分)

$1\times3+1=4=2^2$;$3\times5+1=16=4^2$;$5\times7+1=36=6^2$;…

(1) 请用含 n 的等式表示上述等式的规律(n 为正整数).

____

(2) 请你证明你写出的等式.

第九章　分　式

9.1　分　式

学点探究分析

重点　分式的概念.

难点　分式的概念.

探究点　填空题、选择题中对分式的定义、分式有(无)意义、分式的值为零等意义和条件的考查;以及在应用时对分式的框架的其他知识,如函数自变量的取值范围、根式有意义的条件等知识的理解和运用.

学习方法技巧

1. 运用类比的方法加强对概念的理解

分式是分数的继续与拓展,分数则是分式的特例,两者有许多相似之处,因此,在学习中可运用类比的思想,对照分数的有关知识来学习分式,这也是掌握本章关键知识的有效方法.

分式的概念包括三个方面:①分式是两个整式相除的商式,其中分子为被除式,分母为除式,分数线起除号作用;②分式的分母中必须含有字母,而分子中可以含有字母,也可以不含字母,这是区别整式的重要依据;③在任何情况下,分式的分母的值都不能为零,否则分式无意义.这里,分母是指整个除式而言,而不只是就分母中某一个字母来说的,也就是说,分式的分母不为零是隐含在此分式中而无须注明的条件.像分式$\frac{1}{a-3}$中,$a\neq3$是隐含在$\frac{1}{a-3}$中的,否则$\frac{1}{a-3}$就失去意义.

2. 扩大知识点间的联系

分式与负指数的关系是进一步理解分式的概念的依据.分式$\frac{A}{B}$写成负指数就是$A\cdot B^{-1}$,它们只存在形式上的不同,但实质是相同的,都是分式.

分式中的分母或分子含有新的分式时,注意使分式有意义的字母的取值是使每个分数线下的式子均不为零.

分式与方程、不等式等知识的有机结合,是理解和运用分式概念及分式有意义的条件的"催化剂".

能力升级捷径

【例1】 下列各式,哪些是整式,哪些是分式?

$\frac{1}{x}$,$\frac{a}{3}$,$\frac{x}{x-y}$,$\frac{ab}{a}$,$\frac{x+2}{x-2}$,$\frac{x+1}{\pi}$,$\frac{1}{4}(x-y)$,$\frac{1}{y}(a+b)$,$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$.

思维技巧 正确地理解与区分整式和分式的概念是解题的关键,整式是指单项式和多项式,分式是指形如$\frac{A}{B}$,且A,B都是整式,B中含有字母,所以判断一个有理式是否为分式,就是看分母中否含有字母,若有,则为分式;反之,则为整式.

解 整式有:$\frac{a}{3}$,$\frac{x+1}{\pi}$,$\frac{1}{4}(x-y)$;

分式有:$\frac{1}{x}$,$\frac{x}{x-y}$,$\frac{ab}{a}$,$\frac{x+2}{x-2}$,$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$,$\frac{1}{y}(a+b)$.

激活思维 1. π为圆周率,是一个数,不能看作字母.

2. 与本题类似的其他变形有:

在代数式$3x+\frac{1}{2}$,$\frac{x}{2}$,$\frac{1}{2}(m+n)$,$\frac{3}{a+3}$,$\frac{1}{x}-1$,$\frac{x-y}{x}$中,分式的个数是( )

A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 5个

解 分母里含有字母的有理式有$\frac{x}{x}$,$\frac{3}{a+3}$,$\frac{1}{x}-1$,$\frac{x-y}{x}$共4个,故选C.

【例2】 当x取何值时,下列分式有意义:

(1) $\frac{x+2}{(x+1)(x-4)}$;

(2) $\frac{2x}{x^2+2}$.

思路技巧 要使分式有意义只需让分式的分母不为0,而当分式的分母等于零时,分母无意义.因此,若求x取何值时,分式有意义,可先求x取何值时,分式无意义.

解 (1) 要使$\frac{x+2}{(x+1)(x-4)}$有意义,必有$(x+1)(x-4)\neq 0$

$\therefore\quad x \neq -1$ 且 $x \neq 4$

(2) 要使$\dfrac{2x}{x^2+2}$有意义，必有 $x^2+2 \neq 0$，

$\therefore\quad x$ 为任意有理数.

激活思维　1. 对任意分式，要使它有意义，即要使它的分母不为零，求得分母中字母应满足的条件，特别注意 $x \neq -1$，$x \neq 4$ 的表达用“且”而不是“或”.

2. 与本题类似的其他变形有：

当 x 为何值时，分式$\dfrac{x^2-6x+5}{|x|+1}$有意义？

解　$\because\quad |x| \geqslant 0$，$\therefore\quad |x|+1 \geqslant 1$，即对任何数 $|x|+1 \neq 0$，

$\therefore\quad x$ 为任意数时，分式$\dfrac{x^2-6x+5}{|x|+1}$都有意义.

【例 3】　当 x 为何值时，下列分式的值为零.

(1) $\dfrac{|x|-2}{4-2x}$；

(2) $\dfrac{2x-6}{x^2-2x-3}$.

思维技巧　分式的值为零的条件是：分母等于零，分子等于零，但必须明确，只有在分式有意义的前提下，才能讨论它的值等于多少？本题就是要找到一个数 x，使分子等于零而分母不等于零，同时，分式的值为零并不表示分式没有意义.

解　(1) $\because\quad \begin{cases} |x|-2=0 \\ 4-2x \neq 0 \end{cases}$，$\therefore\quad x=-2$

当 $x=-2$ 时，分式$\dfrac{|x|-2}{4-2x}$的值为 0.

(2) $\because\quad \begin{cases} 2x-6=0 \\ x^2-2x-3 \neq 0 \end{cases}\quad \therefore\quad \begin{cases} x=3 \\ (x-3)(x+1) \neq 0 \end{cases}$

$\therefore\quad x$ 无论取何有理数，原式的值都不可能为 0.

激活思维　1. 在解有关分式的值为零这类问题时，由分子等于零求出字母的取值后，一定要代入分母中进行检验，否则容易出错.

2. 始终要抓住分式$\dfrac{A}{B}$中，A 可以取任何数，但 $B \neq 0$. 也许分式$\dfrac{A}{B}$中的字母取定后，它的值可以是零或 ± 1 等等，但分式中的字母不能取使分母为零的数.

3. 与本题类似的其他变形有：

分式$\frac{|2a|-1}{|a|-1}$,当 a 取何值时有意义?无意义?值为零?

解　由分母$|a|-1=0$,得 $a=\pm1$,

∴　当 $a=\pm1$ 时,$\frac{|2a|-1}{|a|-1}$无意义.当 $a\neq\pm1$ 时,$\frac{|2a|-1}{|a|-1}$有意义.

分子$|2a|-1=0$ 得 $a=\pm\frac{1}{2}$,

又当 $a=\frac{1}{2}$时,分母$|a|-1\neq0$ 当 $a=-\frac{1}{2}$时,分母$|a|-1\neq0$,

∴　当 $a=\pm\frac{1}{2}$时,分式$\frac{|2a-1|}{|a|-1}$的值为零.

【例 4】　当 x 满足什么条件时,分式$\frac{7}{-3x-5}$的值为正数?

思维技巧　要列举所有使分式的值为正的 x 的值是不可能的,于是不妨换个角度思考,抓住分式结构特征:分子是一个正数;分母可变形为$-(3x+5)$,要保证分式的值为正,只须保证分母$-(3x+5)$为正即可.

解　∵　$7>0$,又　分式$\frac{7}{-3x-5}$的值为正,

∴　$-3x-5>0$,∴　$x<-\frac{5}{3}$.

即　当 $x<-\frac{5}{3}$时,分式$\frac{7}{-3x-5}$的值为正数.

激活思维　1. 求分式的值和讨论分式中字母的取值范围是理解分式概念的基本题型,要明确所以然,并且计算准确.

2. 与本题类似的其他变形有:

填空:

(1) (江西省 2000 年)当 $x=$______时,分式$\frac{x-3}{x+3}$的值为零.

(2) (河南省 2000 年)当 $x=$______时,分式$\frac{1+2x}{1-2x}$的值为零.

(3) (南京市 2000 年)如果分式$\frac{x}{x+2}$的值是零,那么(　　)

A. $x=2$　　B. $x=-2$　　C. $x=0$　　D. x 的值不存在

(4) (南昌市 2001 年)当 $x=$______时,分式$\frac{x^2-1}{x+1}$无意义;当 $x=$______时,分式$\frac{x^2-1}{x+1}$的值为零.

解　(1) $x=3$;　(2) $x=-\frac{1}{2}$;　(3) C;　(4) $x=-1$;$x=1$.

【例 5】　学校用一笔钱买奖品,若以 1 支钢笔和 2 本日记本为一份奖

初二代数

品，则可买 60 份奖品.若以 1 支钢笔和 3 本日记本为一份奖品，则可买 50 份奖品.问这笔钱全部用来买笔或日记本，可买多少？

思维技巧　应用题自然离不开设未知数，分析题意，表示未知量，找出等量关系列方程，求解.故可设钢笔 x 元/支，日记本 y 元/本，则这笔钱可表示为：$60(x+2y)$ 元或 $50(x+3y)$ 元，这笔钱全部用于买钢笔，可买 $\frac{60(x+2y)}{x}$ 支.这笔钱全部用于买日记本，可买 $\frac{60(x+2y)}{y}$ 本.若求具体结果，只要首先得出 x、y 之间的关系，代入求值即可.

解　设钢笔每支 x 元，日记本每本 y 元，则 $60(x+2y)=50(x+3y)$

则　　$x=3y$

于是，这笔钱全用于买钢笔，可买

$$\frac{60(x+2y)}{x}=100\text{（支）}$$

这笔钱全用于买日记本，可买

$$\frac{60(x+2y)}{y}=300\text{（本）}$$

激活思维　1. 本题涉及分式列式和求值两个知识点，通过列方程得出 $x=3y$ 是关键环节.

2. 与本题类似的其他变形有：

（北京市海淀区 2002 年）某市为了进一步缓解交通拥堵现象，决定修建一条从市中心到飞机场的轻轨铁路，为使工程能提前 3 个月完成，需要将原定的工作效率提高 12%.问原计划完成这项工程需用几个月？

解　设原计划完成这项工程需用 x 个月，则实际完成这项工程用 $(x-3)$ 个月.

根据题意，得

$$(1+12\%)\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x-3}$$

方程的两边都乘以 $x(x-3)$，约去分母，整理得

$$0.12x=3.36$$

解得　$x=28$

经检验，$x=28$ 是原方程的根

故原计划完成这项工程需用 28 个月

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 有理式①$\frac{2}{x}$,②$\frac{x+y}{5}$,③$\frac{1}{2-a}$,④$\frac{x}{\pi-1}$中,是分式的有(　　)

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ①②③④

2. 当 $x=-2$ 时,分式①$\frac{x-3}{x-2}$,②$\frac{x-2}{x+2}$,③$\frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}$,④$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x-3)}$中,有意义的有(　　)

A. 只有①　　B. 只有④　　C. ①③　　D. 有②④

3. 要使分式$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-3)}$有意义,只需(　　)

A. $x\neq1$ 或 $x\neq-3$　　B. $x\neq-1$ 或 $x\neq3$

C. $x\neq1$ 且 $x\neq-3$　　D. $x\neq-1$ 且 $x\neq3$

4. 分式$\frac{x+a}{3x-1}$中,当 $x=-a$ 时,下列结论正确的是(　　)

A. 分式的值为零

B. 分式无意义

C. 若 $a\neq-\frac{1}{3}$时,分式的值为零

D. 若 $a\neq\frac{1}{3}$时,分式的值为零

5. 使分式$\frac{x}{|x|-1}$无意义,x 取值为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

6. 在①$-\frac{\pi}{2}$,②$\frac{1}{2}abx^2$,③$\frac{y-2}{x}$,④$\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{x}$,⑤$\frac{\pi}{\pi x}$中,是分式的是(　　)

A. ①②③　　B. ③④⑤　　C. ①③④　　D. ②④⑤

7. 要使分式$\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$有意义,a 取值应是(　　)

A. $a\neq0$　　B. $a\neq0$ 且 $a\neq1$

C. $a\neq1$ 或 $a\neq1$　　D. $a\neq1$

二、填空题

8. 如果$\frac{A}{B}$表示一个分式,那么 A、B 表示______,且 B 式______.

9. 在$-3x$,$\frac{x}{y}$,$\frac{2}{3}x^2y-7xy^2$,$-\frac{1}{8}x$,$\frac{3}{5+y}$,$\frac{x-y}{5}$六个有理式中,属于整式集合的有______,属于分式集合的有______.

10. 要使分式$\frac{a+1}{2a-3}$有意义,a 的值应取______;要使分式$\frac{2a-4}{a+1}$的值为0,a 的值应取______.

11. 分式$\frac{|x|}{1-|x|}$,当 x 等于______时其值为 0;当 x 等于______时,分式无意义;当 x ______时,分式的值为正数.

12. $(m-3)\div(m+2)$写成分式为______,且当 $m\neq$______时,分式才有意义.

13. 分式$\frac{x^2-1}{2x-2}$写成除式应当______,且当 x ______时,分式有意义.

14. 当 x ______时,分式$\frac{1}{5-x}$的值为正.

15. 当 x ______时,分式$\frac{-x^2}{x^2+1}$的值为负.

16. 当 x ______时,分式$\frac{1-x}{2x-5}$无意义;当 x ______时,分式的值为 1.

17. 当 $x=a\left(a\neq-\frac{1}{4}\right)$时,分式$\frac{x-5}{4x+1}$的值等于______.

18. 当 x ______时,分式$\frac{2x+y}{2x-y}$有意义.

19. 当$|x|=\frac{1}{2}$,分式$\frac{|2x|-2}{1+2x}$的值______.

20. 若代数式$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}$无意义,则 x 的取值条件是______.

三、x 等于什么数时,下面各分式没有意义?

21. $\frac{2+|x|}{3-|x|}$;　　22. $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

四、x 为何值时下列分式的值为零?

23. $\frac{x+3}{(x-3)(x-4)}$;　24. $\frac{|x|-1}{x-2}$.

五、解答题

25. 若$\left|\frac{x-1}{2x-3}\right|+\left(\frac{3y+1}{y+4}\right)^2=0$,求代数式$\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{3y-1}$的值.

26. 已知分式$\dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2-(x+y)^2}$

(1) 在什么条件下此分式有意义？

(2) 在什么条件下分式的值为正或为负？

(3) 分式的值能否为零？

探究能力测试

27. 有一大堆同样大小的玻璃小球，现要确定其总个数，怎样做比较简便（使用工具不限）？

28. 一个其值不可能为零的分式，字母 x 的取值范围是 $x\neq1$，若分子为"$x-2$"，你能写出一个符合上面条件的分式吗？

29. 请你阅读下列计算过程，再回答所提出的问题：

$\dfrac{x-3}{x^2-1}-\dfrac{3}{1-x}$

$=\dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3}{x-1}$ (A)

$=\dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$ (B)

$=x-3-3(x+1)$ (C)

$=-2x-6$ (D)

(1) 上述计算过程中，从哪一步开始出现错误：______.

(2) 从 B 到 C 是否正确？______. 若不正确，错误的原因是______.

(3) 请你正确解答.

9.2 分式的基本性质

学点探究分析 重点 分式的基本性质.

难点 分式基本性质的正确运用，分式的变号法则.

探究点 灵活运用分式的基本性质，联系分式的意义、不等式、等式的性质等知识在恒等变形等方面的运用.

学习方法技巧 1. 分式的基本性质是分式恒等变形的依据，正确理解和熟练掌握这一基本性质是学好分式的关键. (1) 基本

性质中的 A,B,M 表示的是整式.其中 $B\neq0$ 是已知条件中隐含着的条件，一般在解题过程中不需要强调；$M\neq0$ 是在解题过程中另外附加的条件，在运用分式的基本性质时，必须重点强调 $M\neq0$ 这个前提条件.

例如 $\frac{a}{b}=\frac{ab}{b^2}$，由已知条件 $\frac{a}{b}$ 有意义，可以知道 $b\neq0$，因此，在用 b 去乘以分式的分子、分母时，不需要特别强调 $b\neq0$ 这个条件.

再如，$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$，这个变形是在已知分式 $\frac{x+1}{x-1}$ 的分子、分母上都乘以同一个整式 $x+1$ 得到的，是在 $x+1\neq0$ 这个条件下才能进行的，所以 $x+1\neq0$ 这个条件必须另外附加强调.

(2) 应用分式的基本性质时，要深刻理解“都”与“同”这两个字的含义，避免犯只乘分子或只乘分母的错误，也要避免只乘分子或分母中部分项的错误.

2. 分式的变号法则中，对分子、分母、分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变.应注意，同时改变的是“两个”符号，即不是改变一个符号，也不是“三个”符号同时改变.分子、分母变号时，是针对整个分子、分母，而不是只改变分子、分母中的部分项.

能力升级捷径

【例 1】 下列分式的恒等变形是否正确，为什么？

(1) $\frac{b}{a}=\frac{ab}{a^2}$；　　　(2) $\frac{b}{a}=\frac{bc}{ac}$.

思维技巧　分式的恒等变形是以分式的基本性质为依据的，正确与否，应该严格地用基本性质去衡量，判断时要特别注意基本性质中的 $M\neq0$ 的条件.

解　(1) ∵ 由已知分式 $\frac{b}{a}$ 中隐含着 $a\neq0$ 的条件，所以可以用 a 分别乘以分式的分子与分母，分式的值不变. ∴ (1) 是正确的.

(2) ∵ 字母 c 可取任意数，当然包括零，当 $c=0$ 时，分子、分母都乘以 c，就会使分式没有意义，所以 (2) 只有在 $c\neq0$ 时才是正确的.

激活思维　1. 与分式的基本性质这一知识点相关的题型，主要是不改变分式的值而改变分式的形式.运用分式的基本性质解题，在分子分母上同时乘以或除以一个整式时，一定要注意这个整式不能为零.

2. 与本题类似的其他变形有：

当 m 取何值时，等式 $\frac{x+m}{2x-3}=\frac{(x+m)(2m+2)}{(2x-3)(m-2)}$ 成立？

解　根据分式的性质：

$$\begin{cases}2m+2=m-2,\\2m+2\neq 0,\\m-2\neq 0.\end{cases}$$

$\therefore\quad m=-4.$

【例 2】　分别写出下列等式中括号里面的分子或分母：

(1) $\dfrac{2n}{m+2}=\dfrac{(\quad)}{3(m+2)^2}$；　　(2) $\dfrac{ab+b^2}{ab^2+b}=\dfrac{a+b}{(\quad)}$.

思维技巧　本题要求熟悉分式的基本性质，对比等式两边的分子（或分母）确定从左到右的变化，对于(1)，先观察分母，等式左边是 $m+2$，右边是 $3(m+2)^2$，可以确定从左到右是由左边的分母乘以 $3(m+2)$ 得到的，而 $3(m+2)\neq 0$ 在分式 $\dfrac{2n}{m+2}$ 中已隐含，根据分式的基本性质，为使分式的值不变，右边的分式也应由左边的分子乘以 $3(m+2)$ 得到；同样，(2)式的右边的分子、分母应是左边的分子、分母同除以 b（$b\neq 0$ 在 $ab^2+b\neq 0$ 中已隐含）得到.

解　(1) $\dfrac{2n}{m+2}=\dfrac{6n(m+2)}{3(m+2)^2}$；　　(2) $\dfrac{ab+b^2}{ab^2+b}=\dfrac{a+b}{(ab+1)}$.

激活思维　1. 多项式乘法与因式分解的扎实基础是正确解题的保证，应特别注意(1)、(2)中的隐含条件 $m+2\neq 0$ 和 $b\neq 0$.

2. 与本题类似的其他变形有：

下列分式变形，正确的是（　　）

A. $\dfrac{-x-1}{x^2-2}=\dfrac{-(x-1)}{x^2-2}$　　B. $\dfrac{-(a+b)}{c}=\dfrac{-a+b}{c}$

C. $\dfrac{-a+b}{c}=-\dfrac{a+b}{c}$　　D. $\dfrac{1}{1-a^2}=-\dfrac{1}{a^2-1}$

解　选 D.

【例 3】　不改变分式的值，把下列各式的分子与分母中的各项系数化为整数.

(1) $\dfrac{0.03x-0.2y}{0.08x+0.5y}$；　　(2) $\dfrac{m+\frac{1}{3}n}{\frac{2}{5}m-2n}$.

思维技巧　要使分子、分母中各项系数都化为整数，可根据分式的基本性质，将分子、分母都乘以同一个不为 0 的数，那么这个数应该是什么？这是正确解题的关键. 方法是：当分子、分母中的各项系数是分数时，这个数应该是分子、分母中各项系数各个分母的最小公倍数；当分子、分母中的系数

是小数时，这个数应该是分子、分母中各项系数的最小公倍数.

解　(1) $\dfrac{0.03x-0.2y}{0.08x+0.5y}=\dfrac{(0.03x-0.2y)\times100}{(0.08x+0.5y)\times100}=\dfrac{3x-20y}{8x+50y}$；

(2) $\dfrac{m+\frac{1}{3}n}{\frac{2}{5}m-2n}=\dfrac{\left(m+\frac{1}{3}\right)\times15}{\left(\frac{2}{5}m-2n\right)\times15}=\dfrac{15m+5n}{6m-30n}$.

激活思维　1. 根据分式的基本性质，将分式的分子和分母都乘以同一个数，就可以使它们各项的系数化为整数，且这个分式的值不变，这个数应取分子、分母中各项系数的分母的最小公倍数. 这种运算在分式里经常使用.

2. 在将分子、分母都乘以(或除以)同一个不等于0的数进行分式恒等变形时，要乘遍分子、分母的每一项，防止出现漏乘现象，如$\dfrac{0.1x-0.3x}{0.5x+x}\neq\dfrac{x-3x}{5x+x}$，因为在这个变形中，分母中漏乘了一项，导致分式的值发生了变化.

3. 与本题类似的其他变形有：

在①$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{ab}$；②$\dfrac{a}{b}=\dfrac{ab}{b^2}$；③$\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}$；④$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a(x^2+1)}{b(x^2+1)}$这几个等式中，从左至右的变形一定正确的有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

错解　①、②、③、④四个变形分别是把原式的分子分母同乘以a、b、c、x^2+1，都符合分式的基本性质，所以选D.

错误原因　②中由左边$\dfrac{a}{b}$有意义，可知$b\neq0$，④中无论x取何值，(x^2+1)总不为0. 所以②、④变形一定正确；①、③中a和c都有可能为0，所以变形不一定正确.

正确答案　B.

【例4】　不改变分式的值，使分子和分母中最高次项的系数是正数，并把分子和分母中的多项式按x的降幂排列.

(1) $\dfrac{2x+1-x^2}{-3-2x}$；　　(2) $-\dfrac{x^3-3x+1}{2-x^2}$.

思维技巧　题目中要求分子、分母最高次项的系数为正数，而对分式本身的符号不作要求，故应根据符号法则，改变分子、分母、分式中两处符号即可.

解　(1) $\dfrac{2x+1-x^2}{-3-2x}=\dfrac{-(2x+1-x^2)}{-(-3-2x)}=\dfrac{x^2-2x-1}{2x+3}$；

(2) $-\dfrac{x^3-3x+1}{2-x^2}=-\left[-\dfrac{x^3-3x+1}{-2(2-x^2)}\right]=\dfrac{x^3-3x+1}{x^2-2}$.

激活思维 1. 两个整式乘除,所得分式的符号法则与有理数除法的符号法则相类似,也同样遵循"同号得正,异号得负"的原则,通常在"不改变分式的值"的前提下,对原式要认真分析,尤其是符号,分数的分数线不但表示除号,而且同时具有"去括号"的作用.

2. 与本题类似的其他变形有:

不改变分式本身的符号和分式的值,使下列各组中第二个分式的分母和第一个分式的分母相同:

(1) $\dfrac{1+x}{x^3+x-1}$,$\dfrac{2x-7}{1-x-x^3}$;

(2) $\dfrac{5x}{(x-1)(x-3)}$,$\dfrac{3+x}{(x-1)(3-x)}$.

解 (1) $\dfrac{2x-7}{1-x-x^3}=\dfrac{2x-7}{-x^3-x+1}$

$=\dfrac{2x-7}{-(x^3+x-1)}$

$=\dfrac{-(2x-7)}{x^3+x-1}$

$=\dfrac{-2x+7}{x^3+x-1}$

(2) $\dfrac{3+x}{(x-1)(3-x)}=\dfrac{3+x}{-(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{-(3+x)}{(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{-x-3}{(x-1)(x+3)}$

【例 5】 已知$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5$,求$\dfrac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y^2}$的值.

思维技巧 首先应排除一种错误的想法,若试图从已知条件$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5$中求出 x 以及 y 的具体值,然后代入求值的分式,显然是行不通的.那么如何求出值来呢?待求的分式也不能化简.所以应该着眼于找已知与未知之间的"桥梁"即共同点,这就需要利用分式的基本性质把已知条件变形.

解法一 由$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5$ 可知 $x\neq0$,$y\neq0$,故在等式两边同乘以 xy 得

$x+y=5xy$.

故 $\dfrac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}=\dfrac{2(x+y)-3xy}{(x+y)+2xy}=\dfrac{2\times5xy-3xy}{5xy+2xy}$

$=\frac{7xy}{7xy}=1$ （$\because$ $xy\neq 0$，$\therefore$ 分子、分母同除以 xy）

解法二　$\because$ $xy\neq 0$，将所求分式的分子分母同除以 xy.

$$\frac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{(2x-3xy+2y)\div xy}{(x+2xy+y)\div xy}$$
$$=\frac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-3}{2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$
$$=\frac{2\times 5-3}{2+5}=1.$$

激活思维　1. 利用分式基本性质变形时，必须注意所乘的或所除的整式不能为零，运用整体代入法求值是本题的关键.

2. 交代 $x\neq 0$，$y\neq 0$ 很重要，一方面，这是应用分式基本性质的要求，另一方面是以后解分式方程检验增根的理论依据.

3. 与本题类似的其他变形有：

a 为何值时，$\frac{|a-1|}{a^2+2a-3}=\frac{1}{a+3}$成立？

解　$\because$ $\frac{|a-1|}{a^2+2a-3}=\frac{|a-1|}{(a+3)(a-1)}$，

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -3$ 时，分式$\frac{|a-1|}{a^2+2a-3}$与$\frac{1}{a+3}$都有意义.

当$|a-1|=a-1$ 时，由分式的基本性质可知：

$\frac{|a-1|}{(a+3)(a-1)}=\frac{a-1}{(a+3)(a-1)}=\frac{1}{a+3}$.

则$|a-1|=a-1$，$\therefore$ $a-1\geqslant 0$.

解不等式组：$\begin{cases}a-1\geqslant 0,\\ a\neq 1,\\ a\neq -3.\end{cases}$　得　$a>1$.

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$\frac{|a-1|}{a^2+2a-3}=\frac{1}{a+3}$成立.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 下列各式中，变形不正确的是（　　）

A. $\frac{-2}{3y}=-\frac{2}{3y}$　　　B. $\frac{-y}{-6x}=\frac{y}{6x}$

C. $\dfrac{3x}{-4y}=-\dfrac{3x}{4y}$　　　　D. $-\dfrac{-8x}{3y}=\dfrac{8x}{-3y}$

2. 与$\dfrac{-x+y}{-x-y}$相等的是( )

A. $\dfrac{x-y}{x+y}$　　　　B. $\dfrac{x+y}{x-y}$

C. $\dfrac{-(x+y)}{x-y}$　　　　D. $-\dfrac{x-y}{x+y}$

3. 下列各式变形正确的是( )

A. $\dfrac{5a}{3b}=-\dfrac{5a^2}{3b^2}$　　　　B. $-\dfrac{c}{-a+b}=\dfrac{c}{a+b}$

C. $\dfrac{6a-5}{7-b}=\dfrac{5-6a}{b-7}$　　　　D. $\dfrac{a-b}{a}=\dfrac{a^2-b^2}{a(a+b)}$

4. 下列各式中正确的是( )

A. $\dfrac{c}{-a+b}=-\dfrac{c}{a+b}$　　　　B. $\dfrac{c}{-a+b}=\dfrac{-c}{b-a}$

C. $\dfrac{c}{-a+b}=\dfrac{-c}{a-b}$　　　　D. $\dfrac{c}{-a+b}=-\dfrac{-c}{a-b}$

5. 在下列各式中正确的是( )

A. $\dfrac{b}{a}=\dfrac{b^2}{a^2}$　　　　B. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$

C. $\dfrac{2y}{2x+y}=\dfrac{y}{x+y}$　　　　D. $\dfrac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y}{\frac{1}{6}xy}=\dfrac{3x-2y}{xy}$

6. 下面有三个式子：

$\dfrac{-a-b}{c}=-\dfrac{a-b}{c}$，$\dfrac{-a+b}{c}=-\dfrac{a-b}{c}$，$\dfrac{-a+b}{c}=-\dfrac{a+b}{c}$，其中正确的有( )

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

7. 在分式①$\dfrac{b-a}{a+b}$；②$-\dfrac{b-a}{a-b}$；③$\dfrac{b-a}{-a-b}$；④$-\dfrac{a-b}{-a-b}$中，与$\dfrac{a-b}{a+b}$相等的是( )

A. ①②　　B. ③④　　C. ①②③④　　D. ②③

二、填空题

8. 不改变分式的值，使分式的分子与分母都不含负号：

(1) $-\dfrac{-5x}{y}=$______　　　　(2) $-\dfrac{-a}{-2b}$______.

9. 不改变分式的值，使分式的分子与分式本身都不含负号：

(1) $-\frac{a-2b}{2a-b}=$______；　　(2) $-\frac{-(a+b)}{2a-b}=$______.

10. 不改变分式的值，使分式的分子与分母的最高次项系数为正数：

(1) $\frac{-3x-1}{2x-1}=$______；　　(2) $-\frac{-1-2x+3x^2}{3-2x}=$______.

三、不改变分式的值，使下列各分式分子与分母的最高次项的系数是正数，并将分子与分母的式子按降幂排列.

11. $\frac{2-a-a^2}{-a^3+2a^2-1}$；　　12. $\frac{4-x}{-x^2+3x-2}$；

13. $\frac{4x^2-2+x^3}{-1+3x-2x^2}$；　　14. $\frac{1-x^3}{x^2-x+1}$；

15. $\frac{5-x^3+8x^2}{2x-3-7x^3-10x^2}$.

四、解答题

16. 将分式$\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{2}{ab}-\frac{4}{a}}$中的分子、分母都化为整式，且使最高次项的系数为正数.

17. 若 $xa^2-4x+1=0$，求 $x^2+\frac{1}{x^2}$的值.

探究能力测试

18. 给出下列算式：

$3^2-1^2=8=8\times1$，$5^2-3^2=16=8\times2$

$7^2-5^2=24=8\times3$，$9^2-7^2=32=8\times4$，

…　　　　…

观察上面一系列算式，你能发现什么规律，并用代数式来表述这个规律.

19. (南昌市 2001 年) 如图 9－1，是某风景区的旅游路线示意图，其中 B，C，D 为风景点，E 为两条路的交叉点，图中数据为相应两点间的路程 (单位：km). 一学生从 A 处出发，以 2km/h 的速度步行游览，每个景点的逗留时间为 0.5h.

(1) 当他沿着路线 $A—D—C—E—A$ 游览回到 A 处时，共用了 3h，求 CE 的长；

(2) 若此学生打算从 A 处出发，步行速度与在景点的逗留时间保持不变，且在 4h 内看完 3 个景点返回 A 处，请你为他设计一条步行路线，并说明

这样设计的理由.(不考虑其他因素)

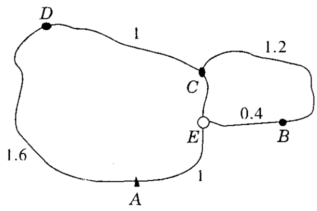


图 9-1

20. 阅读下面材料:

在计算 $2+5+8+11+14+17+20+23+26+29$ 时,我们发现,从第一个数开始,后面的每个数与它的前面一个数的差都是一个相等的常数.具有这种规律的一列数,除了直接相加外,我们还可以用下面的公式来计算它们的和 S. $S=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$(其中:n 表示数的个数,a_1 表示第一个数,a_n 表示最后一个数).那么 $2+5+8+11+14+17+20+23+26+29=\frac{10(2+29)}{2}=155$.

用上面的知识解答下面的问题.

某集团总公司决定将下属的一个分公司对外招商承包,有符合条件的两企业 A、B,分别拟定上缴利润方案如下:

A. 每年结算一次上缴利润,第一年上缴利润 1 万元,以后每年比前一年增加 1 万元;

B. 每半年算一次上缴利润,第一个半年上缴 0.3 万元,以后每半年比前半年增加 0.3 万元.

(1) 如果承包 4 年,你认为应该承包给哪家企业,总公司获利多?

(2) 如果承包 n 年,请用含 n 的代数式分别表示两企业上缴利润的总金额.(单位:万元)

9.3　分式的乘除法

学点探究分析

重点　约分、分式的乘除的法则.

难点　分子或分母为多项式分式的乘、除法.

探究点　约分计算及约分化简后求值;乘除混合运算;将乘除运算与后面要学习的分式的加减综合,进行加减乘除混合运算是中考命题的热点,分式的有关知识在考查观察能力、探索能力、推理能力、归纳能力等创新题型中也有相当的比例.

学习方法技巧

1. 透彻理解,把握细小环节

(1) 对于最简分式,要掌握两点:一是最简分式是对一个独立的分式而言的,标记是只有一个分数线,如 $1-\dfrac{1}{a+2}$,$\dfrac{1+\dfrac{1}{3}a}{m-1}$都不是最简分式;二是有关分式的运算中,其结果一定要运算到最简分式或整式为止.

(2) 对于约分,也要切记两点:其一是:约分是一个运算过程,类似于小学算术里的约分,既可将分式的分子、分母同除以最大公因式进行约分,也可以将分子、分母同除以部分公因式进行逐步约分.如$\dfrac{3mn^4}{9mn^7}$一次约分,分子分母同除以 $3mn^4$;分步约分,可以先约系数,再约 m,再约 n;二是:约分是对分子、分母整体进行的,也就是说约分时,分子的整体和分母的整体都要除以同一个公因式.当分子或分母是多项式时,要用分子、分母的公因式去除整个多项式,不能只除某一项,更不能减去某一项,例如$\dfrac{2a+x}{3b+x}=\dfrac{2a}{3b}$是错误的.

2. 掌握运算法则及顺序,把握技巧

(1) 在分式除法运算中,除式(或被除式)是整式时,可以看作分母是 1 的式子,然后依照分式除法法则计算;

(2) 要注意运算顺序,对于分式乘除法来讲,乘法和除法是同级运算,而在同级运算中,如果没有附加条件(如括号等),那么就应按照由左到右的顺序进行计算.例如:计算 $a\div b\cdot\dfrac{1}{b}$,正确的解法是:$a\div b\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{b^2}$.

(3) 为了避免因运算顺序不对而造成错误，一般对于分式的乘除混合运算，最好先把算式中的除式的分子、分母颠倒位置，将除法化成乘法后再计算.

能力升级捷径

【例 1】 约分：

(1) $\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}$；　(2) $\frac{3ab(a-b)^6}{12a(b-a)^3}$；

(3) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$；　(4) $\frac{(3a-2a^2)(3-2a-a^2)}{(a^2+a)(2a^2-5a+3)}$.

思维技巧 (1)、(2) 两式的分子、分母都是单项式或几个因式乘积的形式，所以可以直接约去分子、分母的系数的最大公约数和分子、分母中相同因式的最低次幂；(3) 式的分子、分母是多项式，应该先分解因式，再约分，而 (4) 题的分子、分母看似没有因式，实质应进一步分解因式，且要把每一个因式的最高次系数化为正数.

解 (1) $\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}=-\frac{7a^2b^5\cdot 3ac}{7a^2b^5\cdot 8b^5d}=-\frac{3ac}{8b^5d}$

(2) $\frac{3ab(a-b)^6}{12a(b-a)^3}=\frac{3a(a-b)^3\cdot b(a-b)^3}{3a(a-b)^3\cdot(-4)}=-\frac{1}{4}b(a-b)^3$

(3) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-2}{x+2}$

(4) $\frac{(3a-2a^2)(3-2a-a^2)}{(a^2+a)(2a^2-5a+3)}$

$=\frac{[-a(2a-3)]\cdot[-(a^2+2a-3)]}{a(a+1)(2a-3)(a-1)}$

$=\frac{a(2a-3)(a-1)(a+3)}{a(a+1)(2a-3)(a-1)}=\frac{a+3}{a+1}$

激活思维 1. 分子运算的结果一般把分子和分母均按照字母降幂排列，且尽量使最高次项的系数为正.

2. 与本题类似的其他变形有：

(天津市 2000 年) 在公式 $P=\frac{Fs}{t}$ 中，已知 P、F、t 都是正数，则 s 等于 (　　)

A. $\frac{Pt}{F}$　　B. $\frac{Ft}{P}$　　C. $\frac{FP}{t}$　　D. PFt

解 选 A.

【例 2】 下列分式 $\frac{12b^2c}{4a}$，$\frac{5(x+y)^2}{y+x}$，$\frac{a^2b^2}{3(a+b)}$，$\frac{4a^2-b^2}{2a-b}$，$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$，$\frac{a-b}{b-a}$

初二代数

中，最简分式的个数是（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

思维技巧　最简分式就是分式的分子和分母没有公因式，也可理解为分式的分子和分母的最大公因式为1．所以判断一个分式是否为最简分式，关键是要看分式的分子和分母的最大公因式是否为1．经过观察可知，第一个分式中，分子和分母有公因式4；第二个分式中分子、分母有公因式$x+y$；第三个、第五个分式中，分子、分母的最大公因式为1；第四个分式中，分子、分母有公因式$2a-b$；第六个分式的分子、分母有公因式$a-b$，约分后为-1．

解　选B．

激活思维　1．中学中的最简分式是小学学习中的最简分数的扩充．最简分式首先系数要最简；一个分式是否为最简分式，关键看分子与分母是否互质，但表面不易判断，应将分子、分母分解因式．

2．与本题类似的其他变形有：

下列约分正确的个数有（　　）

(1) $\dfrac{26c^6b}{12abc^2}=\dfrac{13c^3}{6a}$；　(2) $\dfrac{(a-b)^6}{(b-a)^7}=\dfrac{1}{a-b}$；

(3) $\dfrac{15-2x-x^2}{x^2+x-12}=\dfrac{x+5}{x+4}$；　(4) $\dfrac{-xy}{0.2x}=\dfrac{-y}{0.2}$．

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

解　选A．

【例3】　计算：(1) $\dfrac{-a^2b}{3c}\cdot\left(\dfrac{-6cd}{5ab^2}\right)$；

(2) $\dfrac{a^2+7a-8}{4a-a^3}\cdot\dfrac{a^2-4}{3a+24}$；

(3) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{xy-y^2}\div\dfrac{xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$．

思维技巧　当分式运算中有乘除法运算时，应把乘除法运算都转化为乘法运算来进行．在运算过程中要注意正确地运用符号法则来确定结果的符号．(2)、(3)两式都需要先分解因式再计算．

解　(1) $\dfrac{-a^2b}{3c}\cdot\left(\dfrac{-6cd}{5ab^2}\right)=\dfrac{(-a^2b)(-6cd)}{3c\cdot 5ab^2}=\dfrac{2ad}{5b}$

(2) $\dfrac{a^2+7a-8}{4a-a^3}\cdot\dfrac{a^2-4}{3a+24}=\dfrac{(a+8)(a-1)}{-a(a^2-4)}\cdot\dfrac{a^2-4}{3(a+8)}=-\dfrac{a-1}{3a}$

(3) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{xy-y^2}\div\dfrac{xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$

$$=\frac{(x+y)^2}{y(x-y)}\div\frac{y(x+y)}{(x-y)^2}$$
$$=\frac{(x+y)^2}{y(x-y)}\cdot\frac{(x-y)^2}{y(x+y)}$$
$$=\frac{(x+y)(x-y)}{y^2}=\frac{x^2-y^2}{y^2}$$

激活思维 1. **分式的除法运算,常常转化为乘法运算.根据乘法法则,应先把分子、分母分别相乘,化成一个分式后再进行约分.但在实际演算时,这样做很烦琐,因此,可根据情况先约分,再相乘,这样做简单易行,又不易出错.**

2. **与本题类似的其他变形有:**

(南京市 2000 年)化简:$(ab-b^2)\div\frac{a^2-b^2}{a+b}$.

解 $(ab-b^2)\div\frac{a^2-b^2}{a+b}$
$$=b(a-b)\div\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}$$
$$=b(a-b)\times\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}$$
$$=b$$

【例 4】 计算:

(1) $\frac{6x^{2n}-24}{x^{2n+3}+6x^{n+3}+9x^3}\div\frac{3x^n+6}{x^{n+2}+3x^3}\cdot\frac{x^n+3}{x^n-2}$;

(2) $\frac{[(a+b)^{-2}\cdot(a-2b)^3]^{-3}}{[(a+b)^2\cdot(a-2b)^{-1}]^2}$. **(结果中只含有正整数指数)**

思维技巧 **在分式的乘、除及乘方的混合运算中,应把除法转化为乘法,利用乘法的交换律、结合律及约分化简.如若含有乘方运算,先乘方,再乘除,并注意符号.**

解 (1) **原式**$=\frac{6(x^n+2)(x^n-2)}{x^3(x^n+3)^2}\cdot\frac{x^2(x^n+3)}{3(x^n+2)}\cdot\frac{x^n+3}{x^n-2}$
$$=\frac{2}{x}$$

(2) **原式**$=\frac{(a+b)^6\cdot(a-2b)^{-9}}{(a+b)^4\cdot(a-2b)^{-2}}$
$$=(a+b)^2\cdot(a-2b)^{-7}$$
$$=\frac{(a+b)^2}{(a-2b)^7}$$

激活思维 1. **(1)题在较复杂的分式运算中,可以先将分式的分子、分**

母分解因式，化除法为乘法，再约分．⑵ 题中，先用幂的运算分式，再用同底数幂的乘除法完成约分，再化简．

2．与本题类似的其他变形有：

⑴ 计算：

① $\left(\dfrac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4xy+4y^2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{4y^2-x^2}{x+2y}\right)^3$；

② $\left[-\dfrac{xy}{(x-y)^2}\right]^4\cdot\left(\dfrac{x^2-xy}{x}\right)^3\cdot\dfrac{x^4}{y^{10}}\div\left(\dfrac{x}{xy-y^2}\right)^5$．

解　①原式 $=\dfrac{(x+2y)^6}{(x-2y)^6}\cdot\dfrac{-(x+2y)^3(x-2y)^3}{(x+2y)^3}$

$=-\dfrac{(x+2y)^6}{(x-2y)^3}$

②原式 $=\dfrac{x^4y^4}{(x-y)^8}\cdot\dfrac{x^3(x-y)^3}{x^3}\cdot\dfrac{x^4}{y^{10}}\cdot\dfrac{y^5(x-y)^5}{x^5}$

$=\dfrac{x^3}{y}$

⑵ 计算：

① $\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\dfrac{-b^2}{2a}\right)^3\div(-ab^4)$；

② $\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\div(x+y)\cdot\left(\dfrac{x}{x-y}\right)^3$

解　①原式 $=\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\left(\dfrac{-b^6}{8a^3}\right)\cdot\left(\dfrac{-1}{ab^4}\right)$

$=\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{b^6}{8a^3}\cdot\dfrac{1}{ab^4}=\dfrac{1}{8a^2}$

② 原式 $=\dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{1}{x+y}\cdot\dfrac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\dfrac{x(x+y)}{y^2(x-y)}=\dfrac{x^2+xy}{xy^2-y^3}$

【例 5】　先化简，再求值．

$\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}\right)^2\div\left[\dfrac{x^3-3x^2+2x}{(x-1)(x^2+x+1)}\right]^2\cdot\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^3$，其中 $x=-\dfrac{2}{3}$．

思维技巧　解有条件的分式求值问题，习惯是先化简，后求值，就是要先按顺序进行运算，将算式化成一个最简分式或一个整式时，再把值代入．在运算过程中，应先把括号里的分子、分母的多项式分解因式，再乘方．

解　原式 $=\left[\dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2+x+1}\right]^2\div\left[\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right]^2\cdot\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^3$

$$=\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x^2+x+1)}\div\frac{x^2(x-1)^2(x-2)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}\cdot\frac{x^3}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x^2+x+1)^2}\cdot\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2(x-2)^2}\cdot\frac{x^3}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{x}{x+2}$$

$\therefore$ 当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，$\frac{x}{x+2}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}+2}=-\frac{1}{2}$

激活思维 1. **求值前的化简过程比较复杂，用到的知识点较多.如因式分解、分式的约分、乘除法法则、分式的乘方法则(即商的乘方法则)等，此外还有积的乘方法则.**

2. **解这类题的关键是能熟练地进行分解因式，以及对"符号"的正确处理.运算结果一定要化成最简分式或整式.**

3. **与本题类似的其他变形有：**

(1) (重庆市 2001 年)先化简，再求值：$\frac{x-y}{x+2y}\div\frac{x^2-y^2}{x^2+4xy+4y^2}-2$.其中 $x=2,y=1$.

解 原式 $=\frac{x-y}{x+2y}\cdot\frac{(x+2y)^2}{(x-y)(x+y)}-2$

$=\frac{x+2y}{x+y}-2$

当 $x=2,y=1$ 时，

原式 $=\frac{2+2}{2+1}-2=-\frac{2}{3}$

(2) 已知 $\frac{4x+3}{x}=0$，求 $\frac{(2x-x^2)(x^2+4x+3)}{(x^3+x^2)(x^2+x-6)}$ 的值.

解 原式 $=\frac{x(2-x)(x+3)(x+1)}{x^2(x+1)(x+3)(x-2)}=-\frac{1}{x}$，

$\because$ $\frac{4x+3}{x}=0$

$\therefore$ $\begin{cases}4x+3=0,\\x\neq0,\end{cases}$ $\therefore$ $x=-\frac{3}{4}$

$\therefore$ 原式 $=-\frac{1}{x}=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$

初二代数

综合能力测试

基础能力测试

一、判断题(正确的打“√”,错误的打“×”)

1. $\left(\dfrac{2x^2}{3y}\right)^2=\dfrac{2x^4}{3y^2}$ (　　)

2. $\left(-\dfrac{y}{3x}\right)^2=-\dfrac{y^2}{9x^2}$ (　　)

3. $\left(\dfrac{a+b}{a}\right)^3=\dfrac{a^3+b^3}{a^3}$ (　　)

4. 若$\dfrac{x+1}{x-1}\div\dfrac{x-2}{x-3}$有意义,则 $x\neq1$ 且 $x\neq3$ (　　)

5. $\left(-\dfrac{1}{x-y}\right)^n=\dfrac{1}{(x-y)^n}$ (　　)

二、选择题

6. 计算$\dfrac{a^2+a-2}{a^2+3a+2}\cdot5(a+1)^2$的结果应是(　　)

A. $5a^2-1$　　B. $5a^2-5$

C. $5a^2+10a+5$　　D. a^2+2a+1

7. 下列分式运算,结果正确的是(　　)

A. $\dfrac{m^4}{n^5}\cdot\dfrac{n^4}{m^3}=\dfrac{m}{n}$　　B. $\left(\dfrac{3x}{4y}\right)^3=\dfrac{3x^3}{4y^3}$

C. $\left(\dfrac{2a}{a-b}\right)^2=\dfrac{4a^2}{a^2-b^2}$　　D. $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$

8. 如果 $x=a-b$,$y=a+b$,计算$-\dfrac{(y-x)^2}{xy}$的值为(　　)

A. $\dfrac{2b}{a^2-b^2}$　　B. $-\dfrac{2b}{a^2-b^2}$　　C. $-\dfrac{4b^2}{a^2-b^2}$　　D. $\dfrac{4b^2}{a^2-b^2}$

9. (重庆市 1998 年)已知 $a-b\neq0$,且 $2a-3b=0$,那么代数式$\dfrac{2a+b}{a-b}$的值是(　　)

A. -12　　B. 0　　C. 8　　D. 8 或 -12

10. 已知$\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{7}$,则$\dfrac{x^2-3xy+2y^2}{2x^2-3xy+7y^2}$的值是(　　)

A. $\dfrac{28}{103}$　　B. $\dfrac{4}{103}$　　C. $\dfrac{20}{103}$　　D. $\dfrac{7}{103}$

三、填空题

11. $\frac{2b}{a}\cdot\frac{-a^2}{4bc^2}=$________.

12. $\frac{2x+2y}{5a^2b}\cdot\frac{10ab^2}{x^2-y^2}=$______.

13. $\left(-\frac{y}{3x}\right)^2\cdot\left(-\frac{2x^2}{y}\right)^3=$________.

14. $\left(\frac{x^2}{y}\right)^3\div\left(-\frac{x}{y^2}\right)^2=$________.

15. 若代数式$\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}$有意义，则 x 的取值范围是________.

16. $\left[\left(-\frac{b^2}{a}\right)^3\right]^4=$________.

17. 若 n 为正整数，则化简 $\left(-\frac{ab^3}{x^2}\right)^{2n+1}=$________.

18. $\left(\frac{x^2}{-y}\right)^5\cdot\left(\frac{y^2}{-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{xy}\right)^7=$________.

四、计算题

19. $\left(-\frac{c^3}{a^2b}\right)^2\cdot\left(\frac{-a^2}{bc}\right)^3\div\left(\frac{ac}{b}\right)^4$；

20. $\frac{9x^2+3x}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^3+27}{x^2-3x}\div\frac{x^2-3x+9}{x^2-9}$；

21. $\left(\frac{3a^3}{x+y}\right)^3\cdot(x^2-y^2)\div\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^2$；

22. $\frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2-2xz}\div\frac{x^2-y^2-z^2+2yz}{x^2+y^2-z^2+2xy}$；

23. $\frac{x^2-y^2}{x^2-(y-z)^2}\div\frac{x^2+2xy+y^2}{(x-y)^2-z^2}\cdot\frac{x^2+xy-xz}{x^2-xy}$；

24. $\frac{a^2-b^2+a+b}{a^2-b^2+a-b}\div\frac{a^2-2ab+b^2-1}{a^2+2ab+b^2-1}\cdot\frac{a^2-2ab+b^2-a+b}{a^2+2ab+b^2-a-b}$；

25. $\left(-\frac{2a^2m}{3bn^2}\right)^5\div\left(-\frac{4bm^2}{9a^2n}\right)^4\div\left(-\frac{3a^6}{4b^3mn}\right)^3$；

26. $\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-9}\right)^2\div\left(\frac{x^2-4}{x^2+3x}\right)^3\div\left(\frac{x^2-2x}{x^2-x-6}\right)^2\div\frac{3x+x^2}{4-x^2}$.

五、解答题

27. 先化简，再求值：

$\left(\frac{x^2-4}{x^2+x+1}\right)^2\div\left(\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-1}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{x+2}\right)^3$，其中 $x=-\frac{2}{3}$.

28. 已知 $2x-2y=xy$，求$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$的值.

29. 已知 x 为整数，且分式$\frac{2x-2}{x^2-1}$的值为整数，求 x 的可能值.

探究能力测试

30. 已知 $x+y=12$，$xy=9$，求$\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2y+2xy^2}$的值.

31. 为赴韩国观看中国足球队参加世界杯比赛，8 名球迷分别乘坐两辆小汽车一起赶往飞机场. 其中一辆小汽车在距机场 15km 的地方出了故障，此时，距规定到达机场的时间仅剩 42min，但唯一可以使用的交通工具只有一辆小汽车，连司机在内限乘坐 5 人. 这辆汽车分两批送这 8 人去机场，平均速度为 60km/h. 现拟两种方案，问是否都能使 8 名球迷在规定的时间内赶到机场？

(1) 小汽车送走第一批人后，第二批人在原地等待汽车返回接送；

(2) 小汽车送走第一批人的同时，第二批人以 5km/h 的平均速度往机场方向步行，待途中遇返回的汽车时上车前行.

9.4　分式的加减法

学点探究分析

重点　通分，分式的加减法法则.

难点　最简公分母的确定和灵活运用法则进行四则混合运算.

探究点　最简公分母的意义，分式的加减法法则，分式的加减混合运算是各地历届中考命题的热点，考查综合运算能力与实际问题结合，考查观察与推理能力.

学习方法技巧

1. 通分、约分与最简公分母

通分的根据是分式的基本性质，通分后的分式分母相同，分式分别与原来的分式相等.“取各分母所有因式的最高次”应理解为“各分母中凡出现的字母(或含字母的式子)为底数的幂的因式都要选取，对于相同底数幂的因式应选取指数最大的”.

通分的关键是确定几个分式的最简公分母，如果确定的公分母不是最

简的，就会使运算过程变得烦琐.在求出最简公分母后，还要确定分子、分母应乘以的因式，这个因式就是最简公分母除以原分母所得的商.

通分与约分既有区别又有联系.通分与约分的根据都是分式的基本性质，它们是对分式的基本性质的不同运用.通分是把分式的分子、分母都乘以同一个不等于零的整式，使分式的值不变；约分是把分式的分子、分母都除以同一个不等于零的整式，使分式的值不同.通分与约分是一个互逆的运算过程.

2. 分式的加减法

分式的加减运算法则和分数的加减运算法则，实质上是相同的，但分式的分子常常是一个多项式，“把分子相加减”就是把各个分式的“分子整体”相加减，各分子都应加括号，尤其是相减时，避免产生符号错误.分子相加减实质是整式的加减.

异分母的分式加减，必须转化为同分母的分式加减，然后按照同分母的分式加减法的法则计算.“转化”的关键是通分.异分母的分式加减综合性较强，运算时要用到前面的一系列知识，如整式的四则运算、因式分解、符号变换法则、约分、通分等.其一般步骤为：①通分，将异分母的分式化成同分母的分式；②写成“分母不变，分子相加减”的形式；③分子去括号，合并同类项；④分子、分母约分，将结果化成最简分式或整式.

3. 分式混合运算

分式的混合运算，要按运算顺序进行.运算过程中，要灵活运用交换律、结合律、分配律，运算结果必须是最简分式或整式.

分式运算比较复杂，要求有很高的技巧，如计算$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{2}{a^2+1}$，若三项一起通分计算，很麻烦，可以前两项先通分计算，然后再与最后一项计算.分式的加减运算与加法的交换律、结合律相结合，增加了运算的技巧性.同时，本节中，正确确定最简公分母、正确通分、正确计算等都应引起重视.

能力升级捷径

【例1】 将下列各式通分：$\frac{3}{4a^2b}$，$-\frac{5}{6b^2c}$，$\frac{1}{2ac^2}$.

思维技巧 这三个分式的分母都是单项式，从观察可以得到它们的最小公倍数是$12a^2b^2c^2$.它的得来按三步确定：一步定系数4，6，2的最小公倍数12，二步定字母a、b、c；三定各字母a、b、c的最高次幂a^2，b^2，c^2，再把它们的积作为三个分式的最简公分母$12a^2b^2c^2$，这里特别要注意：最简公分母

通常取正的.

解　∵　最简公分母是 $12a^2b^2c^2$.

$\therefore\quad \frac{3}{4a^2b}=\frac{3\times 3bc^2}{4a^2b\times 3bc^2}=\frac{9bc^2}{12a^2b^2c^2}$；

$-\frac{5}{6b^2c}=-\frac{5\times 2a^2c}{6b^2c\times 2a^2c}=\frac{10a^2c}{12a^2b^2c^2}$；

$\frac{1}{2ac^2}=\frac{1\times 6ab^2}{2ac^2\times 6ab^2}=\frac{6ab^2}{12a^2b^2c^2}$.

激活思维　1. 最简公分母确定后，把最简公分母分别除以原各分式的分母，进而确定每个分式分子、分母应该同乘的式子.

2. 与本题类似的其他变形有：

(上海市 1999 年) 分式$\frac{1}{x^2-3x}$与$\frac{2}{x^2-9}$的最简公分母是__________.

解　$x^2-3x=x(x-3)$，

$x^2-9=(x+3)(x-3)$.

∴　最简公分母是 $x(x+3)(x-3)$.

【例 2】　将下列各式通分：

$\frac{x+2}{2x+2}$，$\frac{x}{x^2-x-2}$，$\frac{3}{8-4x}$

思维技巧　因为各分式的分母是多项式，故应将各分母分解因式，第一个分式的分母是 $2x+2=2(x+1)$，第二个分式的分母为 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$，第三个分式的分母为 $8-4x=-4(x-2)$，所以这三个分式的最简公分母是 $4(x+1)(x-2)$.

解　∵　最简公分母是 $4(x+1)(x-2)$，

$\therefore\quad \frac{x+2}{2x+2}=\frac{(x+2)\cdot 2(x-2)}{2(x+1)\cdot 2(x-2)}=\frac{2(x+2)(x-2)}{4(x+1)(x-2)}$，

$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{x\cdot 4}{(x-2)(x+1)\times 4}=\frac{4x}{4(x+1)(x-2)}$，

$\frac{3}{8-4x}=\frac{3(x+1)}{-4(x-2)(x+1)}=\frac{-3(x+1)}{4(x+1)(x-2)}$.

激活思维　1. 通分所取的公分母必须是最简公分母，当分母中有多项式，就要把它因式分解，再求最简公分母. 当两个分式的分母中某个因式只差一个符号时，应根据变号法则，变成相同的因式.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) (北京市石景山区 2000 年) 计算：$\left(1+\frac{n}{m}\right)\div\left(1-\frac{n}{m}\right)$.

解　$\left(1+\frac{n}{m}\right)\div\left(1-\frac{n}{m}\right)$

$=\frac{m+n}{m}\div\frac{m-n}{m}$

$=\frac{m+n}{m}\times\frac{m}{m-n}$

$=\frac{n+n}{m-n}$

(2) 通分：$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}$，$\frac{b+c}{(b-a)(a-c)}$，$\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$.

解　∵　最简公分母是 $(a-b)(b-c)(a-c)$，

$\therefore\quad \frac{a+b}{(b-c)(c-a)}=-\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$；

$\frac{b+c}{(b-a)(a-c)}=-\frac{(b+c)(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$；

$\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}=\frac{(a+c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$

【例 3】 计算：

(1) $\frac{5a+6b}{3a^2bc}+\frac{3b-4a}{3ba^2c}-\frac{a+3b}{3cba^2}$；

(2) $\frac{3y-x}{x^2-y^2}-\frac{x+2y}{x^2-y^2}-\frac{3x-4y}{y^2-x^2}$.

思维技巧　(1) 实质是同分母分式相加减，根据乘法交换律有 $3a^2bc=3ba^2c=3cba^2$，由法则可知：分母不变，分子相加减，还应注意把分子看成一个整体用括号括起来，再加减；(2) 因为 $y^2-x^2=-(x^2-y^2)$，所以，只要把分母和这个分式本身的符号同时变号，就可以将第三个分式化为与前两个分式是同分母的分式，然后依照法则，分母不变，分子相加减.

解　(1) $\frac{5a+6b}{3a^2bc}+\frac{3b-4a}{3ba^2c}-\frac{a+3b}{3cba^2}$

$=\frac{5a+6b+3b-4a-a-3b}{3a^2bc}=\frac{2}{a^2c}$

(2) $\frac{3y-x}{x^2-y^2}-\frac{x+2y}{x^2-y^2}-\frac{3x-4y}{y^2-x^2}$

$=\frac{3y-x}{x^2-y^2}-\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{3x-4y}{x^2-y^2}$

$=\frac{(3y-x)-(x+2y)+(3x-4y)}{x^2-y^2}$

$=\frac{3y-x-x-2y+3x-4y}{x^2-y^2}=\frac{x-3y}{x^2-y^2}$

激活思维　1. **分子相加减时，要把各个分子看作一个整体，加上括号，且结果必须是最简分式或整式.**

2. **与本题类似的其他变形有：**

(南京市 2001 年) 计算：$\frac{1}{a-2}+\frac{4}{4-a^2}$.

解　$\frac{1}{a-2}+\frac{4}{4-a^2}$

$=\frac{1}{a-2}-\frac{4}{a^2-4}$

$=\frac{1}{a-2}-\frac{4}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{a+2}{(a-2)(a+2)}-\frac{4}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{a+2-4}{(a-2)(a+2)}$

$=\frac{a-2}{(a-2)(a+2)}$

$=\frac{1}{a+2}$

【例 4】　计算：

(1) $\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}-\frac{3x}{4y^2-9x^2}$；

(2) $\frac{x^3}{x-1}-x^2-x-1$；

(3) $\frac{a+2}{a+1}-\frac{a+3}{a+2}-\frac{a+4}{a+3}+\frac{a+5}{a+4}$.

思维技巧　**(1) 式应先确定最简公分母，即对各分母分解因式，由于** $6x-4y=2(3x-2y)$，$6x+4y=2(3x+2y)$，$4y^2-9x^2=-(9x^2-4y^2)=-(3x+2y)(3x-2y)$，**可以确定最简公分母是** $2(3x+2y)(3x-2y)$，**其中第三个分式中分母的符号与分式本身的符号必须同时改变；(2) 式中的整式部分** $-x^2-x-1$ **应先变成** $-(x^2+x+1)$，**看成**$\frac{x^2+x+1}{1}$，**再参与确定最简公分母.**

解　**(1) 原式**$=\frac{1}{2(3x-2y)}-\frac{1}{2(3x+2y)}+\frac{3x}{(3x+2y)(3x-2y)}$

$=\frac{(3x+2y)-(3x-2y)+6x}{2(3x+2y)(3x-2y)}$

$=\frac{6x+4y}{2(3x+2y)(3x-2y)}$

$=\frac{2(3x+2y)}{2(3x+2y)(3x-2y)}=\frac{1}{3x-2y}$

⑵ 解法一

原式$=\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^2(x-1)}{x-1}-\frac{x(x-1)}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}$

$=\frac{x^3-x^2(x-1)-x(x-1)-(x-1)}{x-1}$

$=\frac{x^3-x^3+x^2-x^2+x-x+1}{x-1}$

$=\frac{1}{x-1}$

解法二

原式$=\frac{x^3}{x-1}-(x^2+x+1)$

$=\frac{x^3}{x-1}-\frac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\frac{x^3-(x^3-1)}{x-1}$

$=\frac{1}{x-1}$

⑶ 原式$=1+\frac{1}{a+1}-\left(1+\frac{1}{a+2}\right)-\left(1+\frac{1}{a+3}\right)+1+\frac{1}{a+4}$

$=1+\frac{1}{a+1}-1-\frac{1}{a+2}-1-\frac{1}{a+3}+1+\frac{1}{a+4}$

$=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+4}$

$=\frac{1}{(a+1)(a+2)}-\frac{1}{(a+3)(a+4)}$

$=\frac{(a^2+7a+12)-(a^2+3a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$

$=\frac{4a-10}{(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$

激活思维 1. 异分母的分式相加减,先通分变为同分母分式.

2. 若代数式中含有整式,则视其分母为 1 进行通分,有时将几个单项式看成一个整体更为简便.

3. 当分子的次数大于或等于分母的次数时,可采用多项式除法,将其分离为整式与其分式部分的和,往往会使解题比较简便.

4. 与本题类似的其他变形有:

(苏州市 2000 年)化简 $\left(\frac{x^2-4}{x^2-x-6}+\frac{x+2}{x-3}\right)\div\frac{x+1}{x-3}$.

解 $\left(\frac{x^2-4}{x^2-x-6}+\frac{x+2}{x-3}\right)\div\frac{x+1}{x-3}$

$=\left[\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)}+\frac{x+2}{x-3}\right]\div\frac{x+1}{x-3}$

$=\left(\frac{x-2}{x-3}+\frac{x+2}{x-3}\right)\div\frac{x+1}{x-3}$

$=\frac{2x}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x+1}$

$=\frac{2x}{x+1}$

【例5】 计算：

(1) $\left[\frac{4x}{x+2}-\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{4x^2-8x+16}{x^2-4}\right]\div\frac{16}{x+2}$；

(2) (四川省1998年)

$\left[\frac{2}{(m+n)^3}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m^2+2mn+n^2}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)\right]\div\frac{m-n}{m^3n^3}$.

思维技巧　分式的加减乘除混合运算，按照常规运算顺序，先算乘除后算加减，有括号先算括号里面的，但也不能拘泥于此. 有时可运用乘法分配律等.

解　(1) 原式 $=\left[\frac{4x}{x+2}-\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{4(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}\right]\cdot\frac{x+2}{16}$

$=\left[\frac{4x}{x+2}-\frac{4(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}\right]\cdot\frac{x+2}{16}$

$=\frac{x}{4}-\frac{x^2+2x+4}{4(x+2)}$

$=\frac{x(x+2)-(x^2+2x+4)}{4(x+2)}$

$=-\frac{1}{x+2}$

(2) 原式 $=\left[\frac{2}{(m+n)^3}\cdot\frac{n+m}{mn}+\frac{1}{(m+n)^2}\cdot\frac{n^2+m^2}{m^2n^2}\right]\cdot\frac{m^3n^3}{m-n}$

$=\left[\frac{2(m+n)}{(m+n)^3mn}\cdot m^2n^2+\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2m^2n^2}\cdot m^2n^2\right]\cdot\frac{mn}{m-n}$

$=\left[\frac{2mn}{(m+n)^2}+\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}\right]\cdot\frac{mn}{m-n}$

$=\frac{m^2+2mn+n^2}{(m+n)^2}\cdot\frac{mn}{m-n}$

$=\frac{(m+n)^2}{(m+n)^2}\cdot\frac{mn}{m-n}$

$=\frac{mn}{m-n}$

激活思维　1. 在解题过程中,运用了一些技巧性的方法,先把中括号外因式 m^3n^3 中的一部分因式 m^2n^2 用乘法分配律分配给中括号内的两个分式相乘,使中括号内的两个分式形成同分母分式相加,形成的分子刚好是两数和的完全平方式,再与分母约分,这种解法给人非常完美的感受,是数学美在解题中的展现.

2. 与本题类似的其他变形有：

用简便方法计算：

(1) $\left[\frac{2}{3x^2}-\frac{2}{x^2+y^2}\left(\frac{x^2+y^2}{3x^2}-x^2-y^2\right)\right]\div\frac{x^2-y^2}{x^2}$；

(2) $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$.

解　(1) 原式 $=\left[\frac{2}{3x^2}-\frac{2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{3x^2}+\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]\div\frac{x^2-y^2}{x^2}$

$$=\left(\frac{2}{3x^2}-\frac{2}{3x^2}+2\right)\cdot\frac{x^2}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{2x^2}{x^2-y^2}$$

(2) 原式 $=\frac{(1+a)+(1-a)}{(1+a)(1-a)}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$

$$=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$$

$$=\frac{2(1+a^2)+2(1-a^2)}{(1+a^2)(1-a^2)}+\frac{4}{1+a^4}$$

$$=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}$$

$$=\frac{4(1+a^4)+4(1-a^4)}{(1-a^4)(1+a^4)}$$

$$=\frac{8}{1-a^8}$$

【例 6】　先化简,再求值.

$\left[\frac{a^3+2a^2+4a}{(a-2)(a^2+2a+4)}-\frac{10}{a^2+a-6}\right]\div\left(1-\frac{21}{a^2-4}\right)\cdot\frac{a+3}{a-2}$，其中 $a=\frac{1}{2}$.

思维技巧　必须先把算式化成一个最简分式或整式,再求代数式的值.按照题中指明的运算顺序,应先算两个括号内的减法,再算除、乘,其中,注意随时约分,可灵活运用乘法的交换律、结合律,使算法简便.

解　原式$=\left[\dfrac{a(a^2+2a+4)}{(a-2)(a^2+2a+4)}-\dfrac{10}{(a+3)(a-2)}\right]\div\dfrac{a^2-4-21}{(a+2)(a-2)}\cdot\dfrac{a+3}{a-2}$

$=\left[\dfrac{a(a+3)}{(a-2)(a+3)}-\dfrac{10}{(a+3)(a-2)}\right]\div\dfrac{a^2-25}{(a+2)(a-2)}\cdot\dfrac{a+3}{a-2}$

$=\dfrac{a^2+3-10}{(a+3)(a-2)}\cdot\dfrac{(a+2)(a-2)}{(a+5)(a-5)}\cdot\dfrac{a+3}{a-2}$

$=\dfrac{(a+5)(a-2)}{(a+3)(a-2)}\cdot\dfrac{(a+2)(a+3)}{(a+5)(a-5)}=\dfrac{a+2}{a-5}$

当 $a=\dfrac{1}{2}$ **时，原式**$=\dfrac{a+2}{a-5}=\dfrac{\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}-5}=-\dfrac{5}{9}$

激活思维　1. **化简的关键是按顺序、法则计算，要养成严谨、细心的习惯**.

2. **与本题类似的其他变形有：**

(1) **(山西省** 2001 **年)先化简，再求值：**

$\left(\dfrac{m-n}{m^2-2mn+n^2}-\dfrac{mn+n^2}{m^2-n^2}\right)\cdot\dfrac{mn}{n-1}$**，其中** $m=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$**，**$n=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$.

解　原式$=\left[\dfrac{m-n}{(m-n)^2}-\dfrac{n(m+n)}{(m+n)(m-n)}\right]\cdot\dfrac{mn}{n-1}$

$=\left(\dfrac{1}{m-n}-\dfrac{n}{m-n}\right)\cdot\dfrac{mn}{n-1}$

$=\dfrac{1-n}{m-n}\cdot\dfrac{mn}{n-1}$

$=-\dfrac{mn}{m-n}$

$\because$　$m=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=-\sqrt{3}-2$

$n=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=-\sqrt{3}+2$

$\therefore$　**原式**$=-\dfrac{mn}{m-n}$

$=-\dfrac{(-\sqrt{3}-2)(-\sqrt{3}+2)}{(-\sqrt{3}-2)-(-\sqrt{3}+2)}$

$=-\dfrac{1}{4}$

(2) **(河北省** 2001 **年)先化简，再求值：**

$\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}$，其中 $x=\sqrt{2}$.

解　原式 $=\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{(x^2-4x+4)-(x^2+4x+4)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{-8x}{x^2-4}$

当 $x=\sqrt{2}$**时，原式**$=\frac{-8\times\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-4}=4\sqrt{2}$

(3) (河南省 2001 年) 已知 x、y 是方程组 $\begin{cases}x+2y=4,\\x-y=-5\end{cases}$ 的解，求代数式

$\frac{x}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y}-2$ 的值.

解　由方程组 $\begin{cases}x+2y=4,\\x-y=-5\end{cases}$ 得 $x=-2$，$y=3$

原式$=\frac{x}{(x-y)^2}\cdot\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y}-2$

$=\frac{x}{x-y}+\frac{1}{y}-2$

当 $x=-2$，$y=3$ **时，原式的值为** $-1\frac{4}{15}$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 已知 $x\neq0$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$ 等于（　）

A. $\frac{1}{2x}$　　B. $\frac{1}{6x}$　　C. $\frac{5}{6x}$　　D. $\frac{11}{6x}$

2. 若 $4x=5y$ $(y\neq0)$，则 $\frac{x^2-y^2}{y^2}$ 的值等于（　）

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{9}{16}$　　D. $-\frac{9}{25}$

3. 已知：$x^2-4xy+4y^2=0$，那么 $\frac{x-y}{x+y}$ 的值等于（　）

初二代数

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3y}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3y}$

4. 已知：$m=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$，$n=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$，那么 m^2-n^2 等于（　）

A. 4　　B. -4　　C. 0　　D. $\frac{2y^2}{x^2}$

5. 化简$\frac{2y-3z}{2yz}+\frac{2z-3x}{3zx}+\frac{9x-4y}{6xy}$得到（　）

A. 零　　B. 零次多项式

C. 一次多项式　　D. 不为零的分式

6. 已知$\frac{a-b}{a}=\frac{3}{5}$，那么$\frac{a}{b}$等于（　）

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $-\frac{2}{5}$　　D. $-\frac{5}{2}$

二、填空题

7. 根据______，把几个异分母的分式分别化成______分母的分式，叫做分式的通分.

8. 通分的关键是______几个分式的______.

9. 如果分式的分母的系数都是整数，通分时通常取它们的系数的____________作为最简公分母的________.

10. 分式的加减法与______的加减法一样，分为同分母的______相加减与______的分式加减.

11. 同分母的分式相加减，______不变，把分子______.

12. 异分母的分式相加减，先______，变为______的分式，然后再________________.

13. 计算：$\frac{2}{3a^2}+\frac{3}{4b}-\frac{5}{6ab}=$________.

14. 分式$\frac{3a}{a^2-b^2}$的分母经通分后变为 $2(a-b)^2(a+b)$，则分子应变为______.

15. 分式：①$\frac{x^2+y^2}{x-y}+\frac{2xy}{y-x}$，②$\frac{x^2-y^2}{4xy}-\frac{x^2+y^2}{4xy}$，③$\frac{a^2}{a-b}+\frac{a^2-a+b^2}{b-a}$计算的结果是整式的有______.（只填序号）

三、计算题

16. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}-\frac{5x-11}{x-1}$；

17. $\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{2}{(x+3)(x+5)}+\cdots+\frac{2}{(x+1997)(x+1999)}$；

18. $\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}$；

19. $\dfrac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{2c-a-b}{(c-b)(c-a)}$；

20. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}$；

21. $\dfrac{x^{3n}}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}}{x^n+1}-\dfrac{1}{x^n-1}+\dfrac{1}{x^n+1}$；

22. $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{4x^3}{1+x^4}-\dfrac{8x^7}{1+x^8}$；

23. $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x-5}{x-4}$.

四、计算题

24. $\left(\dfrac{a^2+6}{a^2-1}-\dfrac{a+1}{a-1}+1\right)\div\dfrac{a^3+8}{a^4+3a^3+2a^2}$；

25. $\dfrac{x-y}{x^3-y^3}\cdot\left(x+y+\dfrac{x^2}{y}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$；

26. $\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\left(1-\dfrac{4}{x}\right)$；

27. $\left(1-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}\right)-\dfrac{8}{a+1}$；

28. $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x-3}{1-x}+\dfrac{2}{x^2-x}\right)\div\left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)$；

29. $\left(\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)\div\dfrac{3}{x^2-5x+4}$；

30. **(湖北黄石市 1999 年)** $\dfrac{4a^2-8a}{a^2-a-2}\div\left(\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}\right)$；

31. **(湖北孝感市 1999 年)** $\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}\right)\div\dfrac{x^2-1}{x}$；

32. **已知** x **为整数，且** $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{2x+18}{x^2-9}$ **为整数，则所有符合条件的** x **的值的和为（　　）**

A. 12　　B. 15　　C. 18　　D. 20

33. **已知** $(2x-1)^2+(x-2y)^2=0$，

求 $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}+\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right)$ **的值**.

探究能力测试

34. **(西宁市 1999 年)**

阅读下列题目的计算过程：

$$\frac{x-3}{x^2-1}-\frac{2}{1+x}=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} \quad \text{(A)}$$

$=x-3-2(x-1)$ (B)

$=x-3-2x+2$ (C)

$=-x-1.$ (D)

(1) 上述计算过程中从哪一步开始出现错误？请写出该步的代号________；

(2) 错误的原因：____________；

(3) 本题目正确的结论：______________.

35. 某市消费者协会对一家百货商场进行了抽样质量检测．其做法是对商品按种类进行如下编号，00001，00002，00003，…，00010，00011，00012，…，00100，00101，00102，…．共抽得商品若干种，它们标号的倒数之和是$\frac{100}{101}$．请根据$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$的数学模型，求出消费者协会对这家百货商场最少抽样了多少品种的商品进行了质量检查．试问这家百货商场最少有多少品种商品出售？

9.5　含有字母系数的一元一次方程

学点探究分析

重点　含有字母系数的一元一次方程的解法．

难点　“系数化为 1”的理解与分类讨论．

探究点　公式变形以及根据已知等式经过观察、猜想、归纳，推理出公式的能力．

学习方法技巧

1．掌握概念，注意区分

(1) 含有字母系数的一元一次方程，它首先是一元一次方程，但它不同于前面学的数字系数的一元一次方程(如 $7x=8$ 中，7 是未知数 x 的系数，是具体数字)，它的未知数的系数是字母已知数，如 $(3a-2b)x=p+q$ 中，x 为未知数，$(3a-2b)$ 是含有字母 a、b 的系数，叫字母系数．

(2) 正确区分系数与常数项．系数是指未知数的系数，常数项中不能含

未知数,如 $3x=a$ 就不是含字母系数的一元一次方程,虽然 a 是字母,但它是常数项,而 $ax=3$ 是含字母系数的方程.

2. 熟悉解法,灵活运用

含有字母已知数的方程的解法与含有数字已知数的方程的解法相同,即去分母,去括号,移项,合并同类项,系数化为 1.这些步骤的依据是等式的性质.当字母已知数作为系数时,它可能是零,因此,在最后一步"系数化 1"时,应注意:用含有字母的式子去乘或除方程的两边时,这个式子的值不能是零.也就是说,在解含有字母的已知数的方程时,有的字母的取值是受限制的.如某方程通过去分母、去括号、移项、合并同类项后变为 $(a-b)x=m$ 时,字母系数在给出了限制条件 $a-b\neq 0$ 时,才能进行"系数化 1"这一步,即在方程两边同除以 $a-b$,并能保证方程有意义,且有唯一解 $x=\frac{m}{a-b}$.

归纳起来一句话:方程两边不能随便乘(或除)以一个不知是否是零的数或式子.

能力升级捷径

【例 1】 解方程 $mx+1=nx+k$.

思维技巧 由课本知识知,题中 x 为未知数,m,n,k 表示已知数.考虑到用含有字母的式子去乘或除方程的两边,这个式子的值不能为零,所以要先把方程 $mx+1=nx+k$ 通过移项、合并同类项等步骤变形为一元一次方程的最简形式 $(m-n)x=k-1$,题目的条件中没有 $m-n$,$k-1$是否为零,所以要对 $m-n$,$k-1$ 的取值加以讨论.

解 移项,得

$$mx-nx=k-1$$

合并同类项,得

$$(m-n)x=k-1.$$

对方程 $(m-n)x=k-1$ 进行讨论:

(1) 当 $m-n\neq 0$ 时,$m-n$ 可以作为除式,方程两边同除以 $m-n$,得

$$x=\frac{k-1}{m-n}$$

(2) 当 $m-n=0$,$k\neq 1$ 时,

无论 x 取何值,方程左边 $(m-n)x$ 等于零,而方程右边 $k-1$ 总是非零常数.

所以,方程 $(m-n)x=k-1$ 不论 x 为何值,方程的左边的值与方程右边的值都不相等.

所以,方程无解.

(3) 当 $m-n=0$,$k=1$ 时,

无论 x 取何值时,方程 $(m-n)x=k-1$ 都成立.

所以,方程有无穷多个解.

激活思维　1. 含有字母系数的方程的解的过程中要特别注意“用含有字母的式子去乘或除方程的两边,这个式子的值不能等于零”. 这个问题涉及含有字母系数的一元一次方程是否有解.

2. 与本题类似的其他变形有:

解下列关于 x 的方程

$\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$.

解　$\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$.

移项整理,得

$$\frac{m^2+n^2+2mn}{mn}x=\frac{m^2-n^2}{mn}.$$

$$(m+n)^2x=(m+n)(m-n)$$

当 $m+n\neq0$ 时,$x=\frac{m-n}{m+n}$;

当 $m+n=0$ 时,$0\cdot x=0$.

$\therefore$　方程有无数个解.

【例 2】　解关于 x 的方程 $\frac{x+a}{x-a}=\frac{2x+m}{2x-m}$ $(2a-m\neq0,am\neq0)$

思维技巧　首先应去分母,去括号,移项,合并同类项,化成一般形式,求解,最后还要看,能否满足分式成立.

解　去分母得　$(x+a)(2x-m)=(x-a)(2x+m)$

去括号得　$2x^2-mx+2ax-am=2x^2+mx-2ax-am$

移项得　$2x^2-mx+2ax-am-2x^2-mx+2ax+am=0$

合并得　$(4a-2m)x=0$

$\because$　$2a-m\neq0$

$\therefore$　$x=0$

当 $x=0$ 时,原式中 $x-a\neq0$,($\because$ $am\neq0$). $2x-m\neq0$,$\therefore$ $x=0$

激活思维　1. 原题中隐含着 $x-a\neq0$,$2x-m\neq0$,是求解中始终应注意的. 应明确所有字母中,哪个是未知数.

2. 与本题类似的其他变形有:

解关于 x 的方程：$\frac{x+1}{a+b}+\frac{x-1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$ $(a\neq0)$

解 去分母，得

$$(a-b)(x+1)+(a+b)(x-1)=2a.$$

去括号，得

$$(a-b)x+(a-b)+(a+b)x-(a+b)=2a.$$

移项，得

$$(a-b)x+(a+b)x=2a+(a+b)-(a-b).$$

合并同类项，得

$$[(a-b)+(a+b)]x=2(a+b).$$

即 $2ax=2(a+b)$.

$\because$ $a\neq0$，$\therefore$ 方程两边同除以 $2a$.

得 $x=\frac{a+b}{a}$

【例3】 已知：$c=\frac{ab-a}{d-1}-a$，$c+a\neq0$，且 $d\neq1$，试用 a，b，c 来表示 d.

思维技巧 求 d，即把 d 看成未知数，而把 a，b，c 看成是字母已知数，可先去分母，转化为关于 d 的一元一次方程来解，也可先把"$-a$"移至左边，再取倒数形式或两边同时乘以 $(d-1)$.

解法一 等式两边同时乘以 $d-1$，得

$$c(d-1)=ab-a-a(d-1),$$

$\therefore$ $(c+a)d=ab-a+a+c$，

即 $(c+a)d=ab+c$，

$\because$ $c+a\neq0$，

$\therefore$ $d=\frac{ab+c}{c+a}$

解法二 移项，得

$$a+c=\frac{ab-a}{a-1},$$

去分母，同乘以 $(d-1)$，再同除以 $a+c$，

$$d-1=\frac{ab-a}{a+c},$$

$\therefore$ $d=\frac{ab-a}{a+c}+1$，

即 $d=\frac{ab-a+a+c}{a+c}=\frac{ab+c}{a+c}$

初二代数

激活思维　1. 解方程时，并不一定按照“去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1”的顺序进行，有些变形步骤可能用不到，要根据具体的方程形式灵活安排求解步骤.

2. 与本题类似的其他变形有：

已知 $x=\frac{2y+3}{3y-2}$，试用含 x 的代数式表示 y，并证明：$(3x-2)(3y-2)=13$.

解　(1) 去分母，得 $3xy-2x=2y+3$，

移项得　$3xy-2y=2x+3$，

合并同类项，得　$(3x-2)y=2x+3$，

$\because$　$3x-2=3\cdot\frac{2y+3}{3y-2}-2=\frac{6y+9}{3y-2}-\frac{6y-4}{3y-2}=\frac{13}{3y-2}\neq 0$，

$\therefore$　方程两边都除以 $3x-2$，得 $y=\frac{13}{3y-2}$.

证明 (2)　$\because$　$x=\frac{2y+3}{3y-2}$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad (3x-2)(3y-2)&=\left(3\cdot\frac{2y+3}{3y-2}-2\right)(3y-2)\\&=\left(\frac{6y+9}{3y-2}-\frac{6y-4}{3y-2}\right)(3y-2)\\&=\frac{13}{3y-2}\cdot(3y-2)=13\end{aligned}$$

【例 4】　当 a，b 分别为何值时，代数式 $ax-3+2x+b$ 的值恒为零.

思维技巧　代数式的值恒为零，即不论此代数式中的字母取任何值都不能改变这个代数式的值，在此题中，要先读懂题意，a，b 一旦取定某个值后，代数式的值恒为零，意味着 a，b 有一个确定的值，即为常数，代数式恒为零，但代数式中还有未知数 x，所以 x 的取值不能改变代数式的值，即 x 的系数为零，代数式恒等.

解　依题意，得

$$ax-3+2x+b=0,$$

即　$(a+2)x=3-b$，

$\because$　代数式的值恒为零，

$\therefore$　$\begin{cases}a+2=0,\\3-b=0\end{cases}$　$\therefore$　$a=-2$，$b=3$

激活思维　1. 要此代数式的值永远为零，即对于任意 x，它的值为零，也就是方程 $(a+2)x=3-b$ 有无数个解.

2. 与本题类似的其他变形有：

已知 a、b 为已知数，若关于 x 的方程 $a(a-4)kx-b(b+6)=9-4kx$，无论 k 取何值时，它的根总是 2，求 $\frac{a^4b}{(a+b)^8}$ 的值.

解　将 $x=2$ 代入原方程并整理得

$$2(a-2)^2\cdot k=(b+3)^2.$$

∵　无论 k 取何值，上面等式永远成立，

∴　$\begin{cases}a-2=0,\\b+3=0.\end{cases}$　∴　$a=2$，$b=-3$.

当 $a=2$，$b=-3$ 时，$\frac{a^4b}{(a+b)^8}=\frac{2^4\cdot(-3)}{(2-3)^8}=-48$.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 关于 x 的方程 $ax=3x-5$ 有负数解，则 a 应满足的条件是（　　）

A. $a<3$　　B. $a>3$　　C. $a\geqslant3$　　D. $a\leqslant3$

2. 关于 x 的方程 $(a^2-1)x=a^2-a-2$ 无解，则 a 的值是（　　）

A. $a\neq\pm1$　　B. $a=\pm1$　　C. $a=1$　　D. $a=-1$

3. 关于 x 的方程 $ax-a^3=b^3-bx$ 的解是（　　）

A. $x=a^2-ab+b^2$　　B. $x=a^2+ab+b^2$

C. 有无数个解　　D. 以上均不对

4. 关于 x 的方程 $ax=0$ 的解是（　　）

A. $x=0$　　B. 无数个解

C. $x=0$ 或无数个解　　D. 无解

5. 关于 x 的方程 $(a+1)x=1$，下列结论正确的是（　　）

A. 此方程无解　　B. $x=\frac{1}{a+1}$

C. 当 $a\neq=1$ 时，此方程的解为任意数

D. 以上结论均不对

6. 对于 x 的方程 $ax=b$，下列说法中，不正确的是（　　）

A. $a=0$ 时，方程无解

B. $a\neq0$ 时，$x=\frac{b}{a}$

C. $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，方程无解

D. $a=0$ 且 $b=0$ 时，方程有无数个解

7. 若方程 $mx-n=2x-3$ 的解是 $x=\dfrac{n-3}{m-2}$，则必有（　　）

A. $m\neq0$　　B. $m\neq2$　　C. $n\neq1$　　D. $n\neq3$

8. 若 $(a-b)x=a-b$ 的解是 $x=1$，则 a 与 b 的关系是（　　）

A. $a\neq0, b\neq0$　　B. $a=b$

C. $a\neq b$　　D. a, b 为任意数

二、填空题

9. 由 $v^2=2as\ (a\neq0)$，用 v, a 表示 $s=$__________.

10. 由公式 $A=\pi r(r+l)\ (r>0)$，用 A, r 表示的 $l=$__________.

11. 公式 $\dfrac{U-V}{R}=\dfrac{V}{S}$ 中的 $V=$________.

12. 在 $Ax+By=C$ 中若 $A\neq0$，用 y 的代数式表示 x，则 $x=$________.

13. $ax+c^2=cx+a^2$ 的解是________.

三、解下列关于 x 的方程

14. 已知 $\dfrac{5a^2+5b^2}{a^2-2ab+b^2}$ 有意义，解关于 x 的方程 $\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)x=\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}-2x$.

四、解答题

15. 若关于 x 的方程 $(m^2-1)x=m+1$ 有无数个解，求 $m^{2002}+m^{2003}$ 的值.

16. 如果 a, b 为已知数，关于 x 的一次方程 $\dfrac{3kx+a}{3}=2+\dfrac{x-bk}{6}$，无论 k 取何值，它的根总是 1，求 a, b 的值？

探究能力测试

17. （大连市 2000 年）阅读下列材料：

"$\because\ \dfrac{1}{1\times3}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right), \dfrac{1}{3\times5}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right), \dfrac{1}{5\times7}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right), \cdots, \dfrac{1}{17\times19}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{19}\right)$，

$$\therefore\ \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19}\right)$

$=\frac{9}{19}$."

解答问题：

在和式$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots$中，第 5 项为________，第 n 项为________，上述求和的想法是：通过逆用________法则，将和式中的各分数转化为两个实数之差，使得除首末两项外的中间各项都______，从而达到求和的目的.

18. 一列正整数：1，3，5，7，9，…，从左到右第 50 个数是 $1+2\times(50-1)=99$；另一列正整数：5，9，13，17，…，它从左到右第 100 个数是 $5+4\times(100-1)=401$．第三列正整数第一个数是 2，相邻两个数的差（$d\leqslant10$）相等（后面的数减去前面的数），且差为正整数，试问 9997 是这一列数的第几个数（从左到右）？你能否写出这一列数的前 5 个数.

9.6 探究性活动：$a=bc$ 型数量关系

学点探究分析

重点　认识实际问题中 $a=bc$ 型的数量关系.

难点　探究出实际问题中 $a=bc$ 型数量关系.

学习方法技巧

1. $a=bc$ 型数量关系的探究：粗细均匀的电线总质量 a、总长度 b 和单位长度质量 c 之间的数量关系是 $a=bc$，一大捆粗细均匀的电线只要测出总重量和单位长度的质量就可以算出总长度.这比直接量总长要简便得多.

可见，$a=bc$ 型数量关系不仅在实际生活中存在，而且有巨大的作用.

2. $a=bc$，当 $b\neq0$ 时，$c=\frac{a}{b}$，当 $c\neq0$ 时，$b=\frac{a}{c}$.这三个式子是同一种数量关系的三种不同形式，由其中一个式子可以得出另两个式子.

3. 实际问题中，常见的 $a=bc$ 型数量关系.

(1) 总价＝单价×货物数量；

(2) 利息＝利率×本金；

(3) 路程＝速度×时间；

⑷ 工作量 = 效率 × 时间；

⑸ 质量 = 密度 × 体积；

……

能力升级捷径

【例】 物理学中研究物质的密度时，已知 $\rho_{铜}=8.9\times10^3 kg/m^3$，假设某物体体积为 $V m^3$，则这个物体的质量是 m kg.

思维技巧　$m=\rho V$

解　$m=\rho V=8.9\times10^3 V$

激活思维　1. 考查 $a=bc$ 型数量关系，解题关键是弄清数量之间的关系.

2. 与本题类似的其他变形有：

⑴ 一辆汽车以 30 km/h 的速度行驶，行驶路程 s (km) 与行使的时间 t (h) 有怎样的关系呢？请表示出来.

解　$s=30t$.

⑵ 一种储蓄的年利率为 2.25%，写出利息 y (元) 与存入本金 x (元) 之间的关系 (假定存期一年).

解　$y=2.25\%x$.

⑶ 一个长方形面积为 800m²，长与宽之比为 2∶1，求长与宽.

解　设宽为 xm，则长为 $2x$m，依题意，得

$$x\cdot 2x=800.$$

$\therefore\quad x=\pm20.$

$\because\quad x>0,\quad\therefore\quad x=20, 2x=40$

答：长为 40m，宽 20m.

综合能力测试

一、填空题

1. 某人每分钟打 200 个字母，则 5min 打__________个字母.

2. 某单位有 400t 煤，若每天用 10t，则用______天.

3. 如果矩形面积一定，长增大 2 倍时，宽__________.

4. 如果 $a=kb$，当 $a=5$ 时，$b=10$，则 $k=$________.

5. 若 $ax=b$，当 $a\neq0$ 时，$x=$____________.

6. 要使 $ab=0$，则 a 与 b 的取值为______.

二、解答题

7. 有一大捆粗细均匀的电缆，现要确定其总长度的值，怎样做比较简捷？

8. 阅读下列南宁市中学生研究性学习某课题组的统计材料：

材料一：2002 年南宁市摩托车全年排放有害污染物一览表

有害污染物	排放量	占市区道路行驶机动车（含摩托车）排放有害污染物总量
一氧化碳	11342t	50%
氮氧化物	2380t	
非甲烷烃	2044t	

根据上表填空：

Ⅰ. 2002 年南宁市区机动车（含摩托车）全年排放的有害污染物共______t.（保留两个有效数字，用科学记数法表示）

材料二：2002 年元月 10 日，南宁市人民政府下达了停止办理摩托车入户手续文件，此时市区居民摩托车拥有量已达 32 万辆. 据统计每 7 辆摩托车排放的有害污染物总量等于一辆公交车排放的污染物，而每辆摩托车的运送能力是一辆公交车运送能力的 8%.

根据上述材料解答下列问题：

Ⅱ. 假设 2002 年起 n 年内南宁市的摩托车平均每年退役 a 万辆，同时增加公交车的数量，使新增公交车的运送能力总量等于退役的摩托车原有的运送能力总量.

(1) 求增加公交车的数量 y 与时间 n（年）之间的函数关系. 填空：$y=$______.（不要求写出 n 的取值范围）

(2) 若经过 5 年剩余的摩托车与新增公交车排放污染物的总量等于 32 万辆摩托车排放污染物总量的 60%. 试求 a 的值.（精确到 0.1）

9.7　可化为一元一次方程的分式方程及其应用

学点探究分析

重点　分式方程的解法，在应用中找出相等关系列出分式方程.

难点　分式方程的增根问题.

探究点　对分式方程的理解，解方程的能力，分式方程的变形及综合运用，联系市场经济，最优方案等实际问题的应用能力.

学习方法技巧

1. 巧解方程

解分式方程比分式运算更具有技巧性，它是方程知识与分式的有机结合. 如解分式方程：$x-\frac{1}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}$. 方法一是方程两边同时乘以 $x-1$，去分母转化为整式方程求解，这种方法要复杂些，方法二是方程两边同时加上 $\frac{1}{x-1}$，转化为最简方程 $x=1$，但这种解法与等式性质 1：在等式两边同加上同一个整式，所得的结果仍是整式不相符，方程两边同加的是分式 $\frac{1}{x-1}$，因此，这种变形既是去分母，但也有可能产生增根，因而得到 $x=1$ 是原方程的增根，故原方程无解，现可归纳出几个重要结论：

(1) 解分式方程的方法具有多样性，技巧性；

(2) 不管用什么方法解分式方程（或方程组）都必须检验；

(3) 解分式方程（或分式方程组）其指导思想是转化为整式方程（或整式方程组）来解.

2. 增根与验根

解分式方程比解整式方程的步骤多一步检验，这个检验不是检查过程是否有失误，分式方程的检验是检验是否出现增根，增根是在解方程的正常变形中造成的.

解分式方程产生增根的原因就是在解分式方程的第一步中去分母造成的，根据等式的性质，等式的两边同乘以（或除以）同一个非零数，所得的结果仍是等式，这就是说，方程两边不能乘以（或除以）零，解方程的过程，如果在方程的两边同时乘以的式子有可能为零，就有可能产生增根，增根是整式方程的根，但不是原分式方程的根.

3. **巧设未知数**

列方程(组)解应用题,在弄清题意后,接着就是设未知数,设未知数对后面列方程起着关键作用.对于一道应用题,首先考虑设直接未知数,如果设直接未知数不奏效,就应考虑设间接未知数 就是把一个不是题目中最后要求的未知量设为未知数,求出该数后,再求出要求的数,如果设一个未知数其等量关系不好确定,还可多设几个未知数,即辅助未知数,一般来说,几个未知数就决定几个等量关系、几个方程.如果上面两种方法都不容易列出方程(组),就应采用辅助未知数.如:一艘轮船航行于两码头之间,顺速为每小时 20km,逆速为 16km,求往返平均速度.设平均速度为 $x$km/h,两码头之间的距离为 $s$km,则 $x\left(\frac{s}{20}+\frac{s}{16}\right)=2s$.其中 s 在本题中起到了辅助作用,它是辅助未知数.

能力升级捷径

【例 1】 解方程 $x+1+\frac{3}{x-2}=3+\frac{3}{x-2}$.

思维技巧 观察这个方程,可以发现题目结构的特殊性,即方程的左、右两边的一个分式是相同的,所以可以在方程的两边同时减去这一个分式而化为整式方程来解.

解 方程两边同时减去 $\frac{3}{x-2}$,得

$$x+1=3.$$

$\therefore\quad x=2.$

把 $x=2$ 代入分母,得

$$x-2=2-2=0.$$

$\therefore\quad x=2$ 是增根,必须舍去.

故原方程无解.

激活思维 1. 增根就是在方程的变形中产生的不适合原方程的根,这种根就是原方程的增根,本题中 $x=2$ 是原方程的增根,而又再没有求得适合原方程的 x 的值,因此原方程不存在适合它的未知数的值.

2. 与本题类似的其他变形有:

解方程 $\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$

解 去分母,得

$$(x-2)^2-16=(x+2)^2$$

整理,得

$x=-2.$

经检验　$x=-2$ 是原方程的增根.

∴　原方程无解.

【例 2】　解方程：$\dfrac{5x}{x^2+x-6}+\dfrac{2x-5}{x^2-x-12}=\dfrac{7x-10}{x2-6x+8}$

思维技巧　一般地说，解分式方程的关键是去分母，将分式方程转化为整式方程. 因此需要确定最简公分母，但这不同于分式加减法确定最简公分母的目的，这里是去分母不是通分. 本题中的最简公分母，只有先对各个分母分解因式后才可确定.

解　方程变形为　$\dfrac{5x}{(x-2)(x+3)}+\dfrac{2x-5}{(x+3)(x-4)}=\dfrac{7x-10}{(x-2)(x-4)}$

同乘以最简公分母　$(x-2)(x+3)(x-4)$ 得

$$5x(x-4)+(2x-5)(x-2)=(7x-10)(x+3)$$

整理得　$40x=20$

∴　$x=\dfrac{1}{2}$

检验：把 $x=\dfrac{1}{2}$ 代入 $(x-2)(x+3)(x-4)\neq0$

∴　$x=\dfrac{1}{2}$ 是原方程的解.

激活思维　1. 解分式方程和分式的加减运算有相同点，更有不同点. 相同点是对各分母因式分解，以确定最简公分母；不同点是分式加减运算过程中，分母一般是去不掉的，而分式方程却能去分母，转化为整式方程.

2. 解分式方程必须验根，验根是求解过程中不可缺少的步骤，千万不能漏掉.

3. 与本题类似的其他变形有：

解关于 x 的方程

$$\frac{x+a}{b(x+b)}+\frac{x+b}{a(x+a)}=\frac{a+b}{ab}\ (a\neq0,b\neq0,a\neq b)$$

解　方程两边都乘以 $ab(x+a)(x+b)$，约分得

$$a(x+a)^2+b(x+b)^2=(a+b)(x+a)(x+b),$$

整理，得

$$(a-b)^2x=-(a-b)^2(a+b),$$

∵　$a\neq b$，∴　$x=-(a+b)$.

检验：当 $x=-(a+b)$ 时，$ab(x+a)(x+b)=a^2b^2$，

而 $a\neq0,b\neq0$，则 $a^2b^2\neq0$.

∴ $x=-(a+b)$是原方程的解.

【例3】 a为何值时,方程$\frac{x}{x-3}=2+\frac{a}{x-3}$会产生增根?

思维技巧 方程会产生增根,由题目条件可知必须有最简公分母$x-3=0$,即$x=3$,也就是说,当$x=3$时,方程会产生增根.因此,只需把方程中的a看成常数(已知数),x看成未知数,解可化为一元一次方程的分式方程,解出的x的值用含a的代数式表示,然后使$x=3$,转化为含a的方程,进而求出a的值.

解 方程两边同乘以$x-3$,得

$$x=2(x-3)+a.$$

∵ $x=3$是原方程的增根,但它是上面整式方程的根,

∴ $x=3$应满足 $x=2(x-3)+a$,

将$x=3$代入,得

$$3=2(3-3)+a,\therefore\ a=3.$$

激活思维 1.增根就是原方程分母为零时的根,像本题中增根就是$x=3$增根是分式方程的增根,是分式方程转化为整式方程后的整式方程的根.

2.与本题类似的其他变形有:

(1) a为何值时,分式方程 $\frac{3}{x+1}=a$无解?

解 去分母,得

$$3=a(x+1).\qquad ①$$

Ⅰ.由于方程①不能有$x=-1$的根,∴ 原分式方程不可能有增根而造成无解;

Ⅱ.将①整理:$ax=3-a$,当$a=0$时,$3-a\neq0$,此时①无解,即$a=0$时①无解,

∴ $a=0$时,分式方程$\frac{3}{x+1}=a$无解.

(2) 若方程$\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-5}=\frac{k}{x^2-11x+30}$的解不大于13,求$k$的取值范围?

解 去分母,得

$$(x-5)^2-(x-6)^2=k.$$

整理,得 $$2x=k+11.$$

∴ $x=\frac{k+11}{2}$.

依题意，有 $\begin{cases} x=\dfrac{k+11}{2}\leqslant 13, & ① \\ x\neq 6, & ② \\ x\neq 5. & ③ \end{cases}$

由①，得　$k\leqslant 15$；

由②，得　$x=\dfrac{k+11}{2}\neq 6$，∴　$k\neq 1$；

由③，得　$x=\dfrac{k+11}{2}\neq 5$，∴　$k\neq -1$.

综合，得 k 的取值范围是

$$k\leqslant 5 \text{ 且 } k\neq \pm 1.$$

【例 4】　解方程

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}$$

思维技巧　如果直接去分母，就要在方程两边同乘以最简公分母 $(x+2)(x+7)(x+3)(x+6)$，这样会使计算比较复杂，注意到方程中的每个分式的分子都比分母小 1，因此在本题中可以先化简每一个分式，或者先移项等，使问题进一步简化.

解　解法一　移项组合

原方程经移项，重新组合，得

$$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+5}{x+6}-\frac{x+6}{x+7}.$$

两边分别通分，并化简，得

$$\frac{-1}{(x+2)(x+3)}=\frac{-1}{(x+6)(x+7)}.$$

去分母，得

$$x^2+13x+4=x^2+5x+6.$$

解得　$x=-4\dfrac{1}{2}$.

经验验，$x=-4\dfrac{1}{2}$ 是原分式方程的根.

解法二　分离分式法

原方程变形为

$$1-\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x-7}=1-\frac{1}{x+3}+1-\frac{1}{x+6}.$$

即　$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}.$$

通分，得 $\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{(x+6)(x+7)}$.

去分母，解整式方程，得 $x=-4\frac{1}{2}$.

经检验，$x=-4\frac{1}{2}$是原分式方程的根.

解法三　换元法

通分整理，得

$$\frac{2x^2+16x+19}{x^2+9x+14}=\frac{2x^2+16x+27}{x^2+9x+18}.$$

令　$2x^2+16x+19=y$，$x^2+9x+14=z$.

则原方程变为

$$\frac{y}{z}=\frac{y+8}{z+4},$$

即　$yz+4y=yz+8z$，

$\therefore$　$y=2z$，

即　$2x^2+16x+19=2(x^2+19x+14)$.

解这个整式方程，得 $x=-4\frac{1}{2}$.

经检验，$x=-4\frac{1}{2}$是原分式方程的根.

激活思维　1. 本题的创新点在于本题的三种技巧解法，当然本题也可以用常规解法来解，但太麻烦，常规解法是最基本的，要熟练掌握；而技巧解法是对那些“特殊结构”的方法而言，要发现解题技巧一方面要学会观察，并善于灵活运用已学过的知识和方法；另一方面，要多做练习，不断总结和体会，逐步形成并提高自己的能力.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 已知$\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{3}$，求$\frac{x^4}{x^8+x^4+1}$的值.

解　由已知得 $\frac{x^4+1}{x^2}=3$，即 $x^2+\frac{1}{x^2}=3$.

$\therefore$　$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=9$，　$\therefore$　$x^4+\frac{1}{x^4}=7$.

又　$\because$　$\frac{x^8+x^4+1}{x^4}=x^4+1+\frac{1}{x^4}$

$=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+1$

$=8$，

$\therefore\quad \dfrac{x^4}{x^8+x^4+1}=\dfrac{1}{8}$.

(2) 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{4}, & ①\\ \dfrac{x}{x+y+z}=\dfrac{2}{4x-5}. & ②\end{cases}$

解　设 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{4}=k$，则 $x=2k$，$y=-3k$，$z=4k$，代入②，得

$$\frac{2k}{2k-3k+4k}=\frac{2}{4\times 2k-5}.$$

解得　$k=1$，　$\therefore$　$x=2$，$y=-3$，$z=4$.

经检验 $\begin{cases}x=2,\\ y=-3,\\ z=4\end{cases}$ 是原方程组的解.

$\therefore\quad \begin{cases}x=2,\\ y=-3,\\ z=4\end{cases}$

(3) 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x+y}{3}-\dfrac{3}{x-y}=-\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2}{x-y}=3.\end{cases}$

解　设 $x+y=u$，$\dfrac{1}{x-y}=v$，原方程组可转化为

$\begin{cases}\dfrac{1}{3}u-3v=-\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{2}u+2v=3\end{cases}$，即　$\begin{cases}2u-18v=-1,\\ u+4v=6.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}u=4,\\ v=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

将 $u=4$，$v=\dfrac{1}{2}$ 代入 $x+y=u$，$\dfrac{1}{x-y}=v$ 中，得

$\begin{cases}x+y=4,\\ x-y=2.\end{cases}$ 解之，得　$\begin{cases}x=3,\\ y=1.\end{cases}$

经检验 $\begin{cases}x=3,\\ y=1\end{cases}$ 是原方程组的解. $\therefore$　$\begin{cases}x=3,\\ y=1.\end{cases}$

【例 5】　(广西壮族自治区 1999 年) 为了方便广大游客到昆明参加“世博会”，铁道部临时增开了一列南宁——昆明的直达快车. 已知南宁——昆明两地相距 828km，一列普通列车与一列直达快车都由南宁开往昆明，直达

快车的平均速度是普通快车平均速度的 1.5 倍. 直达快车比普通快车晚出发 2h,比普通快车早 4h 到达昆明,求两车的平均速度?

思维技巧　这是一道实际生活中的行程问题的应用题,基本量是路程、速度和时间,基本关系是路程 = 速度 × 时间,应根据题意,找出追及问题中的等量关系,即普通快车走完一段路所用的时间 $\left(\frac{828-6x}{x}\right)$ 与直达快车由南宁到达昆明所用时间相等.

解　设普通快车的平均速度为 $x$km/h,则直达快车的平均速度为 1.5km/h,依题意,得

$$\frac{828-6x}{x}=\frac{828}{1.5x}.$$

解得　$x=46$.

经检验,$x=46$ 是方程的根,且符合题意.

∴　$x=46$,$1.5x=69$.

答:普通快车的平均速度为 46km/h,直达快车的平均速度为69km/h.

激活思维　1. 列分式方程与列整式方程一样,注意找出应用题中数量间的相等关系,设好未知数,列出方程. 不同之处是:所列方程是分式方程,最后进行检验,既要检验其是否为所列分式方程的解,又要检验是否符合题意,即实际意义.

2. 与本题类似的其他变形有:

(北京市东城区 2001 年) 商场出售的 A 型冰箱每台售价 2190 元,每日耗电量为 1 度,而 B 型节能冰箱每台售价虽比 A 型冰箱高出 10%,但每日耗电量却为 0.55 度. 现将 A 型冰箱打折出售 (打一折后的售价为 $\frac{1}{10}$),问商场至少打几折,消费者购买才合算 (按使用期为 10 年,每年 365 天,每度电 0.40 元计算)?

解　设商将 A 型冰箱打 x 折出售,消费者购买才合算.

依题意,有 $2190\times\frac{x}{10}+365\times10\times1\times0.4\leqslant2190\times(1+10\%)+365\times10\times0.55\times0.4=2190\times\left(\frac{x}{10}-1.1\right)\leqslant365\times10\times0.4\times(0.55-1)$.

解这个不等式,得

$x\leqslant8$.

答:商场应将 A 型冰箱至少打八折出售.

【例 6】　(天津市 1999 年) 某工程由甲、乙两队合做 6 天完成,厂家需付

甲、乙两队共 8700 元，乙、丙两队合做 10 天完成，厂家需付乙、丙两队共 9500 元；甲、丙两队合做 5 天完成全部工程的 $\frac{2}{3}$，厂家需付甲、丙两队共 5500 元.

(1) 求甲、乙、丙各队单独完成全部工程各需多少天？

(2) 若工期要求不超过 15 天完成全部工程，问由哪队单独完成此项工程花钱最少？请说明理由.

思维技巧　这是一道联系实际生活的工程问题的应用题，涉及工期和工钱两种未知量. 对于工期，一般情况下把整个工作量看成 1，设出甲、乙、丙各队完成这项工程所需时间分别为 x 天、y 天、z 天，可列出分式方程组，但在求解时，应把 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ 分别看成一个整体，即把 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ 看成一个新的未知数，就可把分式方程组转化为整式方程组来解，至于第 (2) 题，求解方法类似于第 (1) 题.

解　(1) 设甲队单独做 x 天完成，乙队单独做 y 天完成，丙队单独做 z 天完成，依题意可得：

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1, \\ 10\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1, \\ 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

设 $\frac{1}{x}=A$，$\frac{1}{y}=B$，$\frac{1}{z}=C$，则原方程组变形为

$$\begin{cases} 6(A+B)=1, & ① \\ 10(B+C)=1, & ② \\ 5(A+C)=\frac{2}{3}. & ③ \end{cases}$$

①$\times\frac{1}{6}$+②$\times\frac{1}{10}$+③$\times\frac{1}{5}$，得

$$A+B+C=\frac{1}{5}. \qquad ④$$

④－①$\times\frac{1}{6}$，得　$C=\frac{1}{30}$.

④－②$\times\frac{1}{10}$，得　$A=\frac{1}{10}$.

④－③$\times\frac{1}{5}$，得　$B=\frac{1}{15}$.

即 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{10},\\[2mm] \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{15},\\[2mm] \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{30}.\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}x=10,\\ y=15,\\ z=30.\end{cases}$

经检验，$\begin{cases}x=10,\\ y=15,\\ z=30\end{cases}$ 是原方程组的解.

(2) 设甲队做一天厂家需付 a 元，乙队做一天需付 b 元，丙队做一天需付 c 元，根据题意，得

$$\begin{cases}6(a+b)=8700,\\ 10(b+c)=9500,\\ 5(c+a)=5500.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=800,\\ b=650,\\ c=300.\end{cases}$

由 (1) 可知完成此工程不超过工期的只有两个队：甲队和乙队.

此工程由甲队单独完成需花钱

$$10a=8000;$$

此工程由乙队单独完成需花钱

$$15b=9750.$$

所以，由甲队单独完成此工程花钱最少.

答：(1) 此工程由甲队单独做 10 天完成，由乙队单独做需 15 天，丙队单独做 30 天完成；(2) 由甲队单独完成此工程花钱最少.

激活思维 1. 此题结合实际问题考查了三元一次方程组及分式方程的有关知识的灵活运用，还考查了如何通过观察问题、分析问题，达到用新的方法把分式方程转化为整式方程进而解决问题，说明在平时的数学学习中要培养自己善于观察，发现新问题，解决新问题的能力.

2. 与本题类似的其他变形有：

(天津市 2001 年) 某企业有 9 个生产车间，现在每个车间原有的成品一样多，每个车间每天生产的成品也一样多，有 A、B 两组检验员，其中 A 组有 8 名检验员，他们先用两天将第一、第二两个车间的所有成品 (指原有的和后来生产的) 检验完毕后，再去检验第三、第四两个车间的所有成品，又用去了 3 天时间；同时，用这 5 天时间，B 组检验员也检验完余下的 5 个车间的所有

成品.如果每个检验员的检验速度一样快,每个车间原有的成品为 a 件,每个车间每天生产 b 件成品.

(1) 试用 a、b 表示 B 组检验员检验的成品总数;

(2) 求 B 组的检验员的人数.

解　(1) 根据题意,由于每个车间原有 a 件成品,每天生产 b 件成品,则每个车间 5 天后的成品数为 $(a+5b)$ 件,故 B 组检验员检验的所有成品总数为 $5(a+5b)=5a+25b$ (件).

(2) 对于 A 组 8 名检验员:

在前两天内每天检验的成品数为$\frac{2(a+2b)}{2}$,

后检验的两个车间 5 天后的成品数为 $2(a+5b)$,8 名检验员在后三天内每天检验的成品数为$\frac{2(a+5b)}{3}$,因为检验员的检验速度相同,所以有$\frac{2(a+2b)}{2}=\frac{2(a+5b)}{3}$,即 $a=4b$.

所以,一名检验员每天检验的成品数为

$$\frac{2(a+2b)}{2\times8}=\frac{3}{4}b \text{ (件)}.$$

对于 B 组检验员:

由 (1) 知,5 个车间 5 天后的成品数为 $5(a+5b)$,则 B 组检验员每天检验的成品数为$\frac{5(a+5b)}{5}$件,即 $(a+5b)$ 件.

由题意,知 $a\neq0$,$b\neq0$,所以,B 组检验员的人数为$\frac{a+5b}{\frac{3}{4}b}=\frac{9b}{\frac{3}{4}b}=12$.

答:B 组检验员检验的成品总数为 $(5a+25b)$ 件,B 组有 12 名检验员.

【例 7】　(呼和浩特市 1998 年) 某校办工厂将总价值为 2000 元的甲种原料与总价值为 4800 元的乙种原料混合后,其平均价比原甲种原料 0.5kg 少 3 元,比乙种原料 0.5 kg 多 1 元,问混合后的单价 0.5kg 是多少元?

思维技巧　市场经济中,常遇到营销类应用性问题,与价格有关的是:单价、总价、平均价等,要了解它们之间的关系.

解　设混合后的单价为 0.5 kg x 元,则甲种原料的单价为 0.5 kg $(x+3)$ 元.混合后的总价值为 $(2000+4300)$ 元,混合后的重量为$\frac{2000+4800}{x}$斤,甲种原料的重量为$\frac{2000}{x+3}$斤,乙种原料的重量为$\frac{4800}{x-1}$斤,依题意,得

$$\frac{2000}{x+3}+\frac{4800}{x+1}=\frac{2000+4800}{x}.$$

解这个方程,得 $x=17$.

经检验,$x=17$ 是原方程的根,$\therefore\quad x=17$.

答 混合后的单价为 0.5 kg 17 元.

激活思维 1. 要弄清单价、平均单价、混合后的单价等的意义,建立两种原料混合前与混合后重量不变的关系式.

2. 营销类应用性问题,涉及进货价、售出价、利润率、单价、混合价、赢利、亏本等概念,要结合实际问题对它们表述的意义有所了解,同时要掌握好基本公式,巧妙建立关系式. 随着市场经济体制的建立,这类问题具有较强的时代气息,因而经常可见.

3. 与本题类似的其他变形有:

(浙江省嘉兴市 2001 年) 社会的信息化程度越来越高,计算机网络已进入普通百姓家. 某市电信局对计算机拨号上网的用户提供三种付费方式供用户选择 (每个用户只能选择其中一种付费方式):甲种方式是按实际用时付费,每小时付信息费 4 元,另加付电话话费每小时 1 元 2 角;乙种方式是包月制,每月付信息费 100 元,同样加付电话话费每小时 1 元 2 角;丙种方式也是包月制,每月付信息费 150 元,但不必再加付电话话费.

某用户为选择合适的付费方式,连续记录了 7 天中每天上网所花的时间 (单位:min)

	第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
上网时间	62	40	35	74	27	60	80

根据上述情况,该用户选择哪种付费方式比较合算,请你帮助选择,并说明理由 (每个月以 30 天计).

解 该用户一个月总上网时间约为

$$\frac{62+40+35+74+27+60+80}{7}\times 30\div 60=27\ (\mathrm{h}),$$

选择甲种付费方式每月应付费 $5.2\times 27=140.4$ 元;

选择乙种付费方式每月应付费 $100+1.2\times 27=132.4$ 元;

选择丙种付费方式每月应付费 150 元.

所以该用户选择乙种付费方式比较恰当.

【例 8】 (宁夏回族自治区 2000 年) 编一道可化为一元一次方程的分式方程的应用题,并解答,编题要求:①要联系实际生活,其解符合实际. ②根

据题意列出的分式方程中含两项分式，不含常数项．分式的分母均含有未知数，并且可化为一元一次方程．③题目完整，题意清楚．

思维技巧　本题考查列分式方程解应用题，逆向思维能力，应分以下三步考虑：第一，依题意，确定一个有实际意义的数字（如5，当作所列应用题的一个根），建立一个符合题设要求的等式（如$\frac{10}{5}=\frac{6}{5-2}$）；第二，把上述的5用未知数$x$来代替，变等式为分式方程，即$\frac{10}{x}=\frac{6}{x-2}$，第三，根据题意编出应用题．

解　所编应用题为：

甲、乙两人做某种机器零件，已知甲每小时比乙多做2个，甲做10个所用时间与乙做6个所用的时间相等，求甲、乙每小时各做多少个？

解　设甲每小时做x个，那么乙每小时做$(x-2)$个，根据题意，有

$$\frac{10}{x}=\frac{6}{x-2},$$

整理，得　$10x-20=6x$，

解得　$x=5$，

经检验，$x=5$是原方程的根，

$\therefore$　$x=5$，$x-2=5-2=3$．

答　甲每小时做5个，乙每小时做3个．

激活思维　1．这是一种创新题，旨在考查同学们运用数学知识设计问题进而解决问题的能力．解题时应做到：(1)题目符合编题要求；(2)要设立未知数；(3)列方程；(4)解方程；(5)作答．

2．与本题类似的其他变形有：

(镇江市1998)请先阅读下列一段文字，然后解答问题．

初中数学课本中有这样一段叙述："要比较a与b的大小，可以先求出a与b的差，再看这个差是正数、负数还是零．"由此可见，要判断两个代数式值的大小，只要考查它们的差就可以．

问题：甲、乙两人两次同时在同一粮店购买粮食(假设两次购买粮食的单价不相同)，甲每次购粮100kg，乙每次购粮用去100元．

(1)用含x，y的代数式表示：甲两次购买粮食共需付粮款______元；乙两次共购买______kg粮食．若甲两次购粮的平均单价为每千克Q_1元，乙两次购粮的平均单价为每千克Q_2元，则$Q_1=$________，$Q_2=$______．

(2)若规定：谁两次购粮的平均单价低，谁的购粮方式就更合算．请你判断甲、乙两人的购粮方式哪一个更合算些，并说明理由．

解 (1) ∵ 甲每次购买粮食 100kg,两次单价分别为每千克 x 元,y 元,∴ 甲两次购粮共需付粮款 $(100x+100y)$ 元;

∵ 乙每次购粮用去 100 元,第一次购粮 $\frac{100}{x}$kg,第二次购粮 $\frac{100}{y}$kg,共购粮 $\left(\frac{100}{x}+\frac{100}{y}\right)$kg.

甲两次购粮的平均单价为 $\frac{100x+100y}{100+100}=\frac{x+y}{2}$,即 $Q_1=\frac{x+y}{2}$;

乙两次购粮的平均单价为 $200\div\left(\frac{100}{x}+\frac{100}{y}\right)=\frac{2xy}{x+y}$,即 $Q_2=\frac{2xy}{x+y}$.

(2) ∵ $Q_1-Q_2=\frac{x+y}{2}-\frac{2xy}{x+y}=\frac{(x+y)^2-4xy}{2(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}$,

又∵ $x\neq y$,

∴ $(x-y)^2>0$,

∵ $2(x+y)>0$,

∴ $\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}>0$. 即 $Q_1-Q_2>0$.

∴ $Q_1>Q_2$ 即甲平均单价高于乙平均单价. 故乙的购粮方式更合算些.

3. (漳州市 2002 年) 先阅读表①、表②,再回答以下三个问题:

世界人口城市化发展趋势表

表①

	城镇人口 (亿)		
	1980 年	1990 年	2000 年
世界	18.1	24.2	32.1
发展中地区	9.8	14.5	21.2
发达地区	8.3	9.7	10.9

表②

	城镇人口占总人口的比例 (%)		
	1980 年	1990 年	2000 年
世界	40.9	45.9	51.3
发展中地区	30.5	36.3	42.5
发达地区	70.7	75.9	80.3

资料来源 联合国《1980 年~2000 年世界城市人口和农村人口增长》

⑴ 根据表①，1980 年、1990 年、2000 年这三年世界城镇人口的平均数为______亿（结果保留到小数点后第 1 位）；

⑵ 根据表①，计算发展中地区的城镇人口 2000 年这一年比 1990 年这一年增长百分之几（精确到 0.1%）？

⑶ 根据表②，分析城镇人口占总人口的比例每隔十年变化趋势，可以预测今后十年内（即 2001 年～2010 年）发展中地区城镇人口增长速度将更加超过发达地区.请简单说明理由.

解　⑴ 24.8.

⑵ 设发展中地区 2000 年这一年比 1990 年这一年城镇人口增长百分率为 x，依题意，得

$14.5(1+x)=21.2$　$x\approx 0.462$.

⑶ $\because$　$36.3-30.5=5.8$，$42.5-36.3=6.2$，

$\therefore$　发展中地区从 1980 年到 1990 年与 1990 年到 2000 年城镇人口占总人口的比例呈上升趋势.

$\because$　$75.9-70.7=5.2$，$80.3-75.9=4.4$，

$\therefore$　发达地区从 1980 年到 1990 年与 1990 年到 2000 年城镇人口占总人口的比例呈下降趋势.

又$\because$　$5.8>5.2$，$6.2>4.4$，

$\therefore$　从 1980 年到 1990 年与 1990 年到 2000 年发展中地区城镇人口增长的速度都超过发达地区.

$\because$　$5.8-5.2=0.6$，$6.2-4.4=1.8$，且 $1.8>0.6$，

$\therefore$　根据以上的结论，可以预测 2001 年到 2010 年发展中地区城镇人口增长的速度将更加超过发达地区.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. （南京市 1999 年）甲、乙两班学生参加植树造林，已知甲班每天比乙班多植 5 棵树，甲班植 80 棵树所用的天数与乙班植 70 棵树所用的天数相等，若设甲班每天植树 x 棵，则根据题意列出的方程是（　　）

A. $\dfrac{80}{x-5}=\dfrac{70}{x}$　　B. $\dfrac{80}{x}=\dfrac{70}{x+5}$

C. $\dfrac{80}{x+5}=\dfrac{70}{x}$　　D. $\dfrac{80}{x}=\dfrac{70}{x-5}$

2. 一项工程，甲需 6 天完成，乙需 4 天完成，求两人合作需要的天数，如

果设两人合作需 x 天完成，所列方程是（　　）

A. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=x$　　B. $6+4=x$

C. $6+4=\frac{1}{x}$　　D. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{x}$

3. 甲、乙、丙三个数依次大 1，若乙数的倒数与丙数的倒数的两倍之和与甲数的倒数的 3 倍相等，则甲、乙、丙三个数分别为（　　）

A. 1，2，3　　B. $\frac{6}{5}$，$\frac{11}{5}$，$\frac{16}{5}$

C. -6，-5，-4　　D. $-\frac{6}{5}$，$-\frac{1}{5}$，$\frac{4}{5}$

4. 在方程 $\frac{x}{5}=2$，$\frac{5}{x}=2$，$y=\frac{2}{3}x$，$\frac{1+x}{5+x}=\frac{1}{2}$，$1+3(x-2)=7-x$，$y+1=\frac{2}{y}$，$y^2-3=\frac{y}{3}$ 中，分式方程有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

5. 满足方程 $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}$ 的 x 的值是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

6. 若 $\frac{x+1}{x^2-x-2}=0$，则 x 的值为（　　）

A. -1　　B. 2　　C. -2　　D. 不存在

7. 如果方程 $\frac{x-1}{x-3}=\frac{m}{x-3}$ 有增根，则 m 等于（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题

8. 解分式方程的步骤是：①____________②____________③____________.

9. 若分式方程 $\frac{2(x-a)}{a(x-1)}=-\frac{2}{5}$ 的解是 $x=3$，则 $a=$________.

10. 已知公式 $\frac{P_1}{V_1}=\frac{P_2}{V_2}$，所有字母均不为零，用 P_1，P_2，V_1 表示 V_2，则 $V_2=$________.

11. 已知 $y=\frac{4mx}{6n-x}$，则 $x=$________.

三、解下列分式方程

12. $\frac{2}{x+2}-\frac{2-x}{2+x}=3$；

13. $\frac{7}{x^2+x}+\frac{3}{x^2-x}=\frac{6}{x^2-1}$；

14. $\frac{5(1-x)}{1+x+x^2}-\frac{6}{x^3-1}=\frac{5}{1-x}$.

四、15. 当 x 为何值时，$\frac{4-2x}{4-x}$ 的值与 $\frac{x-5}{x-4}$ 的值相等.

五、解下列关于 x 的方程

16. $\frac{x}{x+2a}-\frac{x}{x-2a}=\frac{a^2}{4a^2-x^2}$ $(a\neq0)$.

六、列方程解应用题

17. 甲、乙两人合作一件工作，4 天后，甲因另有任务，余下的工作由乙单独完成，还需 16 天，甲乙两人单独完成这项工作所用时间的比为 4∶5，问甲、乙单独完成这项工作各需要多少天？

18. 相邻两个偶数的比是 24∶25，求夹在这两个偶数之间的奇数.

19. 有一桶纯酒精，倒出 8L 后用水补满，然后再倒出 4L 后，又用水补满，这时酒精溶液中有水 10L，求这个桶的容积.

20. 一架飞机顺风飞行 1380km 和逆风飞行 1020km 所需的时间相等. 已知这架飞机的速度是每小时 360km，求风的速度.

21. 甲、乙两个车工，同时分别车 1500 个螺丝. 乙改进了操作方法，生产效率提高到等于甲的 3 倍，因此比甲少用 20 个小时完工，他们每小时各车多少个螺丝？

22. 甲、乙两地相距 160 km，一辆长途汽车从甲地开出 3 h 后，一辆小轿车也从甲地开出，结果小轿车比长途汽车晚 20 min 到达乙地，又知小轿车的速度是长途汽车的 3 倍，求小轿车与长途汽车的速度各是多少？

23. 甲、乙、丙三个修路队修一段公路. 如果甲、乙两队合修，那么 36 天可以完成 如果甲、丙两队合修，那么 45 天可以完成 如果乙、丙两队合修，那么 60 天可以完成. 求每个队独修各需多少天完成？

24. 某工程甲、乙两队合做 2 天完成全工程的 $\frac{1}{3}$，甲队独做所需天数是乙队独做所需天数的 2 倍. 现由甲队先做 4 天后，甲、乙两队合做 2 天，余下的由乙队独做，共需几天完工？

25. 甲组的工作效率比乙组高 20%，因此甲组加工 210 个零件所用的时间比乙组加工 200 个零件所用的时间少半个小时，甲、乙两组每小时各能加工多少个零件？

26. 甲、乙两人分别从 A、B 两地出发，相向而行，若同时出发，经 24min

相遇.若乙比甲提前 10min 出发,甲出发后 20min 与乙相遇,甲由 A 地到 B 地,乙由 B 地到 A 地各需多少分钟?

探究能力测试

27. A、B 两位采购员同去一家饲料公司购买两次饲料.两次饲料的价格有变化,但两位采购员的购货方式不同,其中,采购员 A 每次购买 1000kg,采购员 B 每次用去 800 元,而不管购买饲料多少.问选用谁的购货方式合算?

28. 有一台现价值为 N 元的机器,如果不加修理可以再用 n 次,经修理后,可以再用 m 次 $(m>n)$.如果修理费是 P 元,问在修理费满足什么条件的情况下,修理后再使用较为合算?(要求写出推证过程)

29. 近几年我省高速公路的建设有了较大的发展,有力地促进了我省的经济建设,在修建中的某段高速公路要招标,现有甲、乙两个工程队,若甲、乙两队合做,24 天可以完成,需费用 120 万元;若甲单独做 20 天后,剩下的工程由乙做,还需 40 天才能完成,这样需费用 110 万元.

问:(1) 甲、乙两队单独完成此项工程,各需多少天?

(2) 甲、乙两队单独完成此项工程,各需费用多少万元?

30. 某文化用品商店出售一批规格相同的钢笔,如果每支钢笔的价格增加 1 元,那么 120 元钱可以买到的钢笔数量将会减少 6 支,求现在每支钢笔的价格?

小结与复习

学点探究分析

重点　分式的运算,分式方程及其应用.

难点　分式方程的应用,分式的混合运算.

探究点　分式的混合运算,解分式方程,与分式方程有关的经济类应用题在计算技巧、综合运用知识等能力点的考查.

学习方法技巧

1. 类比思想

类比是一种在不同对象之间,或者在事物与事物之间,根据它们某些方面的相似之处进行比较,通过联想和预测,推出它们在其他方面也可能相似,从而去建立猜想和发现真理的方法.通过类比可以发现新

旧知识的相同点，利用已有知识来认识新知识.

类比的思想像一根红线贯穿于整个这一章，分式的概念、分式的基本性质、分式的通分、约分，分式的加、减、乘、除运算及混合运算，都是通过与分数概念及其有关内容的类比来研究的.

如，在分数和分式的概念中都强调了"分母不能是零"，但分数分母是一个具体数，是否为零，一目了然，而分式的分母是一个含有字母的代数式，它的值是随着式子中字母的取值的不同而变化的. 当字母的取值使分母的值为零时，分式就没有意义. 因此，在研究分式的值为零的问题时，一定要注意"分式的值为零"这句话隐含着分式有意义这个条件，只有在分式有意义(分母的值不等于零)的情况下，分式的值才能是零，所以，"分式的值为零"这个命题就等价于"分子的值等于零，且分母的值不等于零"这两个限制条件.

又如，把一个分子的次数不低于分母的次数的分式化为整式部分与分式部分的和，也是与分数的变形类比进行的. 一个假分数可以化成带分数，或者说可以化成一个整数与真分数的和. 类似地，如果一个分式的分子的次数高于或等于分母的次数，那么就可以将分式化为整式部分与分式部分的和.

2. 转化思想

转化是一种重要的数学思想方法，它的应用十分广泛. 运用转化思想，能把复杂的问题转化为简单的问题，把生疏的问题转化为熟悉的问题.

在本章的学习中，也多处运用了转化的思想，分式加减运算的基本思想是，将异分母的分式加减法转化为同分母的分式的加减法；解分式方程的基本思想是把分式方程转化为整式方程，以及把分子的次数不低于分母的次数的分式转化为整式部分与分式部分的和，等等.

3. 数学方法

本章常用的数学方法有：分解因式、通分、约分、去分母等.

通分、约分、去分母时一般都需要先分解因式，分解因式是进行分式运算和解分式方程的关键. 分解因式熟练与否，直接影响分式加减乘除运算及解分式方程的速度和准确性. 因此，能够准确而熟练地把多项式进行分解因式，并且理解，掌握通分、约分及去分母的意义和方法，是学好本章知识的必要条件.

4. 应注意的问题

① 分式的分母中必须含有字母，但"$\frac{\pi}{3}$"是整式，而不是分式.

② 明确分式的分母不为零时，分式才有意义.

③ 分式的基本性质和分数的基本性质类似,即分式(分数)的分子、分母同乘以(或除以)的整式一定不能为零,否则分式(分数)就无意义了.

④ 约分是对分子、分母的整体进行的,约分过程也是一种化简过程.

⑤ 在分式乘除法运算中,遇到分子、分母都是多项式时,能够分解因式的,一定要先分解因式,然后分子与分母进行约分,约分时防止$\frac{m+x}{n+x}=\frac{m}{n}$,$\frac{m+n}{m+n}=0$的错误.

⑥ 分式加减时只要把分母因式分解,求出最简公分母后通分,分子开始可不必因式分解.

⑦ 注意运算顺序及符号的变化,防止$x\div y\cdot\frac{1}{y}=x\div 1=x$的错误.

⑧ 分式加减法的最后结果应化为最简分式或整式.

⑨ 对于含有绝对值符号的分式,应根据绝对值的概念,先去掉绝对值符号,再化简分式.

⑩ 分式化简与解分式方程不能混淆,分式化简是恒等变形,不能随意去掉分母.

⑪ 含字母系数的一元一次方程的解法类同于一元一次方程的解法,其最大的区别是含字母系数的一元一次方程,要注意未知数前的系数,一般应不为零(题中会给出的),方程的解应是最简分式或整式.

⑫ 对于x的方程$ax=b$,不能轻易下结论得出方程的解为$x=\frac{b}{a}$,首先必须对x的系数a进行讨论:

ⅰ. 当$a\neq 0$时,方程有唯一解$x=\frac{b}{a}$;

ⅱ. 当$a=0$时,若$b\neq 0$,方程为$0\cdot x=b$ $(b\neq 0)$,易知对任何数x等式都不能成立,所以方程无解.若$b=0$,方程$0\cdot x=0$,易知对任何数x等式都成立,方程有无数个解.

⑬ 公式变形就是把一个公式从一种形式变换成另一种形式.分式变形实质就是解含有字母系数的方程,无论是解的过程,还是所得到的解,一个数和字母是不同的,数是具体的,字母是抽象的.如果将数字看作相应字母取的一个值,那么数字系数方程就是含字母系数方程的特殊情况.含字母系数方程就是数字系数方程的一般情况,这就是两者的统一性与内在联系.

⑭ 解分式方程时必须验根.把所得的整式方程的根代入最简公分母,看结果是否为零,为零的根是原方程的增根,应舍去.

⑮ 列方程解应用题的核心是通过挖掘题意中隐含条件，去寻找尽可能简捷的等量关系；其次是合理设元，设元的方法有直接设元，间接设元，设而不求，求而不设等各种技巧.

能力升级捷径

【例1】 分式$\frac{x^2-1}{(1+xy)^2-(x+y)^2}$的值能为零吗？为什么？

思维技巧　分式的值能否为零，取决于两个条件：一是分子为零，二是分母不为零.当这两条同时成立时，分式的值才能为零.在本题的分式中，当$x=1$和$x=-1$时分式的分子为0，但并不能断定分式的值为零，还必须检验分式的分母是否不等于0.

解　若分式$\frac{x^2-1}{(1+xy)^2-(x+y)^2}=0$，则$x=1$或$x=-1$.将$x=1$或$x=-1$代入$(1+xy)^2-(x+y)^2$，得到分母的值为零，故分式$\frac{x^2-1}{(1+xy)^2-(x+y)^2}$的值不可能为零.

激活思维　1. 本题的易错点是不检验分母不为零这个隐含条件.解题关键是求出$x=1$或$x=-1$后检验分母是否为0.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 若分式$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$有意义，求x的取值范围.

解　当$\begin{cases}x\neq 0,\\ 1+\frac{1}{x}\neq 0\end{cases}$时，分式有意义

∴　当$x\neq 0$且$x\neq -1$时，分式有意义.

(2) 已知分式$-\frac{6(a+3)}{a^2-9}$的值为正整数，求整数a的值.

解　分两种情况考虑：

(1) 若$a=-3$，则$a^2-9=0$，分式无意义.

(2) 若$a\neq -3$，则$-\frac{6(a+3)}{a^2-9}=-\frac{6(a+3)}{(a+3)(a-3)}=-\frac{6}{a-3}$.

∵　$\frac{6}{3-a}$为正整数，

∴　6必为$3-a$的正整数倍.

∴　$a=2,1,0$.

综上所述，$a=2,1,0$.

(3) 已知 x 为整数，且$\frac{2}{x+3}+\frac{2}{3-x}+\frac{2x+18}{x^2-9}$为整数，求所有符合条件的 x 的值的和.

解 $\frac{2}{x+3}+\frac{2}{3-x}+\frac{2x+18}{x^2-9}=\frac{2x-6-2x-6+2x+18}{x^2-9}$

$$=\frac{2x+6}{x^2-9}=\frac{2}{x-3}.$$

$\because$ $\frac{2}{x-3}$为整数，$\therefore$ $x-3$ 为 2 的约数，则 $x-3=\pm1$ 或 ±2，所以 $x=4$或 $x=2$ 或 $x=5$ 或者 $x=1$，所以所有符合条件的 x 的值的和为 $4+2+5+1=12$.

【例 2】 分式$\frac{a+3}{a-3}\div\frac{a+2}{a-4}$有意义的条件是（ ）

A. $a\neq3$ 且 $a\neq-2$

B. $a\neq3$ 且 $a\neq4$

C. $a\neq3$ 且 $a\neq-3$

D. $a\neq-2$ 且 $a\neq3$ 且 $a\neq4$

思维技巧 本题需从三个方面考虑：(1) 分式$\frac{a+3}{a-3}$有意义；(2) 分式$\frac{a+2}{a-4}$有意义；(3) 分式$\frac{a+2}{a-4}$值不为零，并且这三个条件必须同时满足.

解 由$\frac{a+3}{a-3}$有意义得 $a\neq3$；

由$\frac{a+2}{a-4}$有意义得 $a\neq4$；

由$\frac{a+2}{a-4}$值不为零得 $a\neq-2$ 且 $a\neq4$；

综合以上，应选 D.

激活思维 1. 两个分式求商时，一定要视为繁分式来处理.

2. 若分式$\frac{x^2}{3x-7}$的值为负，求 x 的取值范围.

解 $\because$ $x^2\geqslant0$

$\therefore$ 只有当 $\begin{cases}x^2>0\\3x-7<0\end{cases}$ 时，分式的值为负，

$\therefore$ 当 $x<\frac{7}{3}$且 $x\neq0$ 时，分式的值为负.

【例 3】 已知 $x+\frac{1}{x}=2$，那么 $x^n+\frac{1}{x^n}$（n 是任一自然数）等于多少？猜

想并证明你的结论.

思维技巧　应先设法求出 $x^2+\frac{1}{x^2}$，$x^3+\frac{1}{x^3}$，$x^4+\frac{1}{x^4}$ 等几个值，从中发现规律，再进行猜想并证明.

由 $x+\frac{1}{x}=2$，得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=4$，整理后得 $x^2+\frac{1}{x^2}=2$；

由 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$，整理后得 $x^3+\frac{1}{x^3}=2$；

由 $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$，整理后得 $x^4+\frac{1}{x^4}=2$.

因此有理由猜想 $x^n+\frac{1}{x^n}=2$ (n 是任一自然数)

解　对任一自然数 n，$x^n+\frac{1}{x^n}=2$，证明如下：

设 $x^n+\frac{1}{x^n}=P_n$.

则 $P_n\cdot P_1=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$

$=P_{n+1}+P_{n-1}$.

由 $P_1=x+\frac{1}{x}=2$，

得 $P_2=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=2$.

由 $P_n\cdot P_1=P_{n+1}+P_{n-1}$，　得 $P_{n+1}=2P_n-P_{n-1}$.

$\therefore$　$P_3=2P_2-P_1=2$，$P_4=2P_3-P_2=2$，

$P_5=2P_4-P_3=2$，…，

$Pk=2P_{k-1}-P_{k-2}=2$，

因此，对一切自然数 11，都有 $P_n=2$，

即　$x^n+\frac{1}{x^n}=2$.

激活思维　1. 这种证明 $x^n+\frac{1}{x^n}=2$ 的方法称为递推法，这种方法在以后高中阶段的学习中将作深一层的研究.

2. 本例是很特殊的题目，除了上述的解法外，实际上还有以下特殊的解法：

由于 $x+\frac{1}{x}=2$，必有 $x\neq 0$，则 $x^2+1=2x$，$(x-1)^2=0$，得 $x=1$，因此对于一切自然数 n，都有

新教材同步学案

$$x^n+\frac{1}{x^n}=1+1=2.$$

3. 与本题类似的其他变形有：

已知 $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，求$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值.

解 由$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，有$\frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}$，

$\therefore\quad (a+b)^2=ab.$ (1)

$\therefore\quad \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}.$ (2)

将(1)代入(2)，得

原式$=\frac{ab-2ab}{ab}=-1.$

【例4】 已知 $abc=1$，

求证：$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1.$

思维技巧 直接用法则计算，显然不胜其烦，由分母中的 ab，bc 和 ca 想到将三个分式的分子和分母分别都乘以 c、a、b，则能用上已知条件 $abc=1$，再进行一次类似的变形，三个分式可分别变形为 $\frac{1}{bc+b+1}$，$\frac{1}{ac+c+1}$，$\frac{1}{ab+a+1}$，这虽然不能使运算量减少，但可把它们变为同分母的分式.

证明 $\because\quad abc=1$，$\therefore\quad a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$，将第2个分式的分子、分母都乘以 a，将第3个分式的分子、分母都乘以 ab，得

$$\begin{aligned}&\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\\&\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}\\&=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1.\end{aligned}$$

激活思维 1. 本题上面解法极为灵活地运用了分式的基本性质，免去了繁杂的多项式乘法，却也实现了化异分母分式相加为同分母分式相加. 在审题和变形的过程中，细心观察，将各分式的分母进行比较，也是找到上面解法的重要原因.

2. 与本题类似的其他变形有：

已知 $a+b+c=0$，求证：$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0.$

证明　证法一

$\because\quad a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$

$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3$

$=\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+3$

$\because\quad a+b+c=0.$

$\therefore$　**原式**$=-\frac{b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}+3$

$=-3+3=0$

$\therefore$　**原命题成立**.

证法二

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$

$=a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+$

$c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{c}\right)+3$

$=a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3+3$

$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c).$

$\because\quad a+b+c=0$，

$\therefore$　**原式左边**$=0=$**右边**.

即命题成立.

证法三

对 $a+b+c=0$，**两边乘以** ab、bc、ca **得**

$a^2b+ab^2+abc=0$；$a^2c+abc+ac^2=0$；

$abc+bc^2+b^2c=0.$

三式相加得　$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a-ac^2+bc^2+3abc=0.$

式子两边同除以 abc $(abc\neq0)$.

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0.$

【例 5】　(天津市 2000 年)一批货物准备运往某地，有甲、乙、丙三辆卡车可雇用.已知甲、乙、丙三辆车每次运货量不变，且甲、乙两车单独运这批货物分别运 $2a$ 次、a 次能运完；若甲、丙两车合运相同次数运完这批货物时，甲车共运了 180t；若乙、丙两车合运相同次数运完这批货物时，乙车共运

了 270t.

问：(1) 乙车每次所运货物量是甲车每次所运货物量的几倍；

(2) 现甲、乙、丙合运相同次数把这批货物运完时，货主应付车主运费各多少元？(按每运 1t 付运费 20 元计算)

思维技巧　本题考查分式方程的应用，解题思路是先求出乙车与甲车每次运货量的比，再设出甲车每次运货量是乙车的 n 倍，列出方程.

解　(1) 设这批货物共有 Tt，甲车每次运 $t_{甲}$ t，乙车每次运 $t_{乙}$ t.

$\because\ 2a\cdot t_{甲}=T$，$a\cdot t_{乙}=T$.

$\therefore\ t_{甲}:t_{乙}=1:2$，

即乙车每次运货量是甲车的 2 倍.

(2) 设甲车每次运货量是丙车每次运货量的 n 倍，乙车每次运货量是丙车每次运货量的 $2n$ 倍.

则 $$180+\frac{180}{n}=270+\frac{270}{2n}.$$

解得，$n=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 这批货物总量为 $180+180\times2=540$ (t).

$\because$ 甲车运 180t，丙车运 $540-180=360$ (t)，

$\therefore$ 丙车每次运货量也是甲车的 2 倍.

$\therefore$ 甲车车主应得运费；

$$540\times\frac{1}{5}\times20=2160\ (元)，$$

乙、丙车主各得运费：

$$540\times\frac{2}{5}\times20=4320\ (元).$$

答　(1) 乙车每次运货量是甲车每次运货量的 2 倍；

(2) 应付甲车车主运费 2160 元，付乙、丙两车车主运费各 4320 元.

激活思维　1. 解题关键在于求出三车每次运货量的比.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) (辽宁省 2000 年) A、B 两地相距 80km，一辆公共汽车从 A 地出发，开往 B 地，2h 后，又从 A 地同方向开出一辆小汽车，小汽车的速度是公共汽车的 3 倍，结果小汽车比公共汽车早 40min 到达 B 地，求两种车的速度.

解　设公共汽车的速度为 $x$km/h，则小汽车速度为 $3x$km/h.

依题意，得 $\dfrac{80}{x}-2-\dfrac{40}{60}=\dfrac{80}{3x}$.

解之，得 $x=20$.

经检验：$x=20$ 是所列方程的解．$\therefore\ 3x=60$.

(2)（宁波市2000年）甲、乙、丙、丁四名打字员承担一项打字任务．若由这四人中的某一人单独完成全部打字任务，则甲需要24h，乙需要20h，丙需要16h，丁需要12h.

① 如果甲、乙、丙、丁四人同时打字，那么需要多长时间完成？

② 如果按甲、乙、丙、丁、甲、乙、丙、丁、…的次序轮流打字，每一轮中每人各打1h，那么需要多少时间完成？

③ 能否把(2)题所说的甲、乙、丙、丁的次序作适当调整，其余都不变，使完成这项打字任务的时间至少提前半小时？（答题要求：如认为不能，需说明理由；如认为能，需至少说出一种轮流的次序，并求出相应能提前多长时间完成打字任务）

解　① 设需 x 时完成，根据题意得

$$\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{20}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}\right)x=1.$$

解这个方程，得 $\dfrac{19}{80x}x=1$.

$\therefore\ x=\dfrac{80}{19}$.

答　需$\dfrac{80}{19}$小时.

② 经 n 轮甲、乙、丙、丁的轮流打字所完成的任务为$\dfrac{19}{80}n$，根据题意，得

$$\frac{19}{80}n\leqslant 1,$$

$\therefore\ n\leqslant\dfrac{80}{19}$.

因为 n 是正整数，所以 n 的最大值是4.

经4轮后，剩下的打字任务为

$$1-\frac{19}{80}\times 4=\frac{1}{20}.$$

因为$\dfrac{1}{20}>\dfrac{1}{24}$，第5轮甲工作1小时后，还剩下

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{24}=\frac{1}{120}$$

再由乙做，需时

$$\frac{1}{120} \div \frac{1}{20} = \frac{1}{6}.$$

∴　共需时 $4 \times 4 + 1 + \frac{1}{6} = 17\frac{1}{6}$ (h).

答　需 $17\frac{1}{6}$ 小时完成.

③ 能.

按丁、乙、丙、甲的次序轮流.

经 4 轮后，剩下的打字任务仍是 $\frac{1}{20}$，再由丁做，需时

$$\frac{1}{20} \div \frac{1}{12} = \frac{3}{5}.$$

完成打字任务的时间为

$$4 \times 4 + \frac{3}{5} = 16\frac{3}{5} \text{ (h)}.$$

提前时间为

$$17\frac{1}{6} - 16\frac{3}{5} = \frac{17}{30} \text{ (h)}.$$

所以按丁、乙、丙、甲的次序轮流，能提前 $\frac{17}{30}$ 小时完成打字任务，提前时间超过半小时.

(注：第③题答案中，提前时间超过半小时的轮流次序不唯一，凡得出下列轮流次序之一的都正确：丁、乙、丙、甲；丁、乙、甲、丙；丁、丙、乙、甲；丁、丙、甲、乙；丁、甲、乙、丙；丁、甲、丙、乙)

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. (天津市 1999 年) 如果 $F = \frac{GmM}{a^2}$ ($G \neq 0, M \neq 0$)，那么 $m =$ ____.

2. (天津市 1999 年) 已知 $\frac{2m-n}{n} = \frac{1}{3}$，那么 $m : n =$ ________.

3. (黑龙江省 1999 年) 已知 $x = 1$，则分式 $\frac{x^2-2x-9}{2x^2-4x-15}$ 的值为____.

4. (苏州市 1999 年) 当________时，分式 $\frac{x^2-4}{2(x+2)}$ 有意义.

初二代数

5. (河南省 2000 年)如果分式$\frac{1+2x}{1-2x}$的值为零,那么 x 的值是____.

6. (淮阴市 1998 年)不改变分式的值,使它的分子、分母的最高次项的系数都是正数,则$\frac{1-a-a^2}{1+a^2-a^3}=$________.

7. (北京市宣武区 2001 年)计算:$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=$__________.

8. (重庆市 2001 年)若关于 x 的方程 $\frac{ax+1}{x-1}-1=0$ 有增根,则 a 的值为________.

9. (湖北省黄冈市 2001 年)化简$(ab-b^2)\div\frac{a^2-b^2}{a+b}$的结果是______.

二、选择题

10. (武汉市 1999 年)计算$\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\div\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$的结果为(　　)

A. 1　　B. $x+1$　　C. $\frac{x+1}{x}$　　D. $\frac{1}{x-1}$

11. (内蒙古自治区 2000 年)下列各式中,正确的是(　　)

A. $\frac{a+m}{b+m}=\frac{a}{b}$　　B. $\frac{a+b}{a+b}=0$

C. $\frac{bc-1}{ac-1}=\frac{b-1}{c-1}$　　D. $\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y}$

12. (厦门市 2000 年)如果分式$\frac{x-1}{x+2}$的值为 0,则 x 的值是(　　)

A. -2　　B. 1　　C. -1　　D. 1 或 -2

13. (南京市 1999 年)甲、乙两班学生参加植树造林,已知甲班每天比乙班多植 5 棵树,甲班植 80 棵树所用的天数与乙班植 70 棵树所用的天数相等,若设甲班每天植树 x 棵,则根据题意列出的方程是(　　)

A. $\frac{80}{x-5}=\frac{70}{x}$　　B. $\frac{80}{x}=\frac{70}{x+5}$

C. $\frac{80}{x+5}=\frac{70}{x}$　　D. $\frac{80}{x}=\frac{70}{x-5}$

14. (嘉兴市 2001 年)如果 $y=\frac{x}{x-1}$,那么用 y 的代数式表示 x 为(　　)

A. $x=-\frac{y}{y+1}$　　B. $x=-\frac{y}{y-1}$

C. $x=\frac{y}{y+1}$　　D. $x=\frac{y}{y-1}$

15. (北京市东城区 2001 年)第二十届电视剧飞天奖今年有 a 部作品参赛,比去年增加了 40% 还多 2 部,设去年参赛的作品有 b 部,则 b 是(　　)

A. $\dfrac{a+2}{1+40\%}$　　　　B. $a(1+40\%)+2$

C. $\dfrac{a-2}{1+40\%}$　　　　D. $a(1+40\%)-2$

三、计算与化简

16. (福州市 2000 年) $\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}-\dfrac{x}{x^2-2x}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)$

17. (金华市 1999 年) $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{a^2-a}{a^2-2a-3}\div\dfrac{a}{a-3}$

四、化简求值

18. (黄冈市 1999 年) $\dfrac{1+x}{x^2+x-2}\div\left(x-2+\dfrac{3}{x+2}\right)$,其中 $x=3$.

19. (四川省 1996 年)已知 $3a^{-1}+2=0\ (a\neq0)$,求 $\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{1}{a}\div\dfrac{a-2}{2}$ 的值.

五、解方程

20. $\dfrac{7}{x^2+x}+\dfrac{3}{x^2-x}=\dfrac{6}{x^2-1}$

六、列方程解应用题

21. 轮船顺水航行 80km 所需时间和逆水航行 60km 所需时间相同,已知水流速度为 3 km/h,求轮船在静水中的速度.

22. 甲乙两队合作一项工程需 16 天完成,两队合作 4 天后,甲队因有其他任务,由乙队单独完成,结果乙队又做了 33 天. 问甲、乙两队单独做这项工程各需多少天?

探究能力测试

23. (武汉市 2000 年)今年入夏以来,湖北部分地区旱情严重. 为缓解甲、乙两地旱情,某水库计划向甲、乙两地送水,甲地需水量为 180 万立方米,乙地需水量为 120 万立方米,现已送水两次:第一次往甲地送水 3 天,往乙地送水 2 天,共送水 84 万立方米,第二次往甲地送水 2 天,往乙地送水 3 天,共送水 81 万立方米,问:完成往甲地、乙地送水任务还要多少天?

24. (福建省龙岩市 2001 年)为了支持北京申奥,红、绿两支宣传北京申奥万里行车队在距北京 3000km 处会合,并同时向北京进发,绿队走完 2000km 时,红队走完 1800km,随后,红队的速度比原来提高 20%,两车队继

续同时向北京进发.

(1) 求红队提速前红、绿两队的速度比;

(2) 问红、绿两支车队能否同时到达北京?说明理由;

(3) 若红、绿两支车队不能同时到达北京,那么,哪支车队先到达北京?求出第一支车队到达北京时两车队的距离.(单位:km)

单元综合测试

基础能力测试

测试时间 40 分钟　　测试分值 100 分

一、填空题 (每小题 3 分,共 30 分)

1. 已知分式$\dfrac{x^2-1}{(x-2)(x-1)}$当 $x=$______时分式无意义,当 $x=$______时,分式的值为 0.

2. 等式$\dfrac{am}{bm}=\dfrac{a}{b}$成立的条件是______.

3. 化简分式$\dfrac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}$的结果为________.

4. 分式$\dfrac{x}{x^2-1}$,$\dfrac{1}{x+1}$,$\dfrac{1+x}{1-x}$的最简公分母是________.

5. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-$__________.

6. 计算 $2a+2+\dfrac{5}{a-1}=$________.

7. 方程$\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x+1}=\dfrac{9x+5}{x(x-1)}$的解是________.

8. 化简分式$\left(x-\dfrac{y^2}{x}\right)\div\left(y-\dfrac{x^2}{y}\right)=$________.

9. 已知分式方程$\dfrac{1}{x-2}+3=\dfrac{k-x}{2-x}$有增根,则 $k=$________.

10. 若$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z}{5}\neq 0$,则$\dfrac{x+y-3z}{2y-z}$的值等于________.

二、选择题 (每小题 3 分,共 18 分)

11. 下列各分式中,最简分式是(　　)

A. $\dfrac{18b}{27a}$　　B. $\dfrac{y^2-x^2}{x+y}$　　C. $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$　　D. $\dfrac{x^2}{x}$

12. 下列等式成立的个数是(　　)

① $\dfrac{2m}{-x+1}=-\dfrac{2m}{x-1}$,

② $\dfrac{m^2-n^2}{m-n}=m+n$,

③ $\frac{x+2}{x-3}=\frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+1)}$

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

13. 已知 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-5$，则$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$的值为（　）

A. $-\frac{6}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $-\frac{5}{14}$　　D. $-\frac{14}{5}$

14. 若有 m 人，a 天内可完成某项任务，则有 $m+r$ 人完成此项工程所需天数是（　）

A. $a+r$　　B. $\frac{am}{m+r}$　　C. $\frac{a}{m+r}$　　D. $\frac{m+r}{am}$

15. 若 $x\neq0$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$等于（　）

A. $\frac{1}{2x}$　　B. $\frac{1}{6x}$　　C. $\frac{11}{6x}$　　D. $\frac{5}{6x}$

16. 如果 $x+1>0$，则$\frac{|x|}{x}$的值等于（　）

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 以上答案都不对

三、解答题（共 52 分）

17. 计算题：（每小题 6 分，共 12 分）

（1）$\frac{a^2-4}{a^2+2a-8}\div(a^2-4)\cdot\frac{a^2-4a+4}{a-2}$；

（2）$\frac{3x-2}{x^2-x-2}+\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$.

18. 求值题，（每小题 6 分，共 12 分）

（1）已知 $x=-1$，$y=-3$，化简后求值 $\left(\frac{4}{x^2-y^2}+\frac{x+y}{xy^2-x^2y}\right)\div\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2y+2xy^2}$；

（2）如果 $a^2-3a+1=0$，求$\frac{a^3}{a^6+1}$的值.

19. 解方程，（每小题 6 分，共 12 分）

（1）$\frac{3x}{x-1}-\frac{x^2-2}{x^2-x}=\frac{2x+1}{x}$；

（2）$\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$.

20. 阅读某同学化简分式

$\frac{1}{x^2-4x+4}\div\frac{x+2}{x^3-8}\cdot\frac{4-x^2}{x^2+2x+4}-1$ 的解答过程.（6 分）

解：原式 $=\frac{1}{(x-2)^2}\times\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x+2}\cdot\frac{(2-x)(2+x)}{x^2+2x+4}-1$ （第 1 步）

$=1-1$ （第 2 步）

$=0$ （第 3 步）

回答：①上述过程中第一步使用的具体公式是________，第 2 步的运算方法是________.

②上述运算过程是否有错误？答：________. 如果有错误是第________步. 其正确的答案是________.

21. 甲乙两人从相距 36km 的 A、B 两地同时出发相向而行，甲从 A 地出发至 2km 时发现有物品忘在 A 地，便立即返回，取了物品后又立即从 A 地向 B 地行去，这样两人恰好在 A、B 的中点相遇，又知甲比乙每小时多走 0.5km，求甲乙两人的速度.（10 分）

发展能力测试

测试时间 60 分钟　　测试分值 120 分

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 当 $m=$______时，分式 $\frac{1}{m^2-1}+\frac{2}{m+1}-\frac{1}{m-1}$ 的值为 0.

2. 化简 $\left(-\frac{x^2}{y}\right)^2\cdot\left(\frac{-y^2}{x}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{xy}\right)^4$ 的结果等于________.

3. 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值等于________.

4. 化简繁分式 $\dfrac{\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}}{\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}}$ 的结果等于________.

5. 若 $x^2+x-3=0$，则 $x^2+x-\frac{1}{x^2+x}=$________.

6. 若 a，b 都是正数，且 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}$，则 $\frac{ab}{a^2-b^2}=$________.

7. 已知 $x=1+\frac{2}{a}$，$y=1-\frac{1}{a}$，用含 x 的代数式表示 $y=$________.

8. 如果 $x\neq1$，则 $\frac{|x-1|}{x-1}$ 的值等于________.

9. 已知分式 $\frac{x-b}{x+a}$，当 $x=-2$ 时，分式无意义，当 $x=4$ 时分式的值为 0，则 $a+b=$________.

10. 当 $a=1\frac{1}{2}$ 时,分式 $\frac{a^2-1}{a^2-2a+1}+\frac{2a-a^2}{a-2}\div a$ 的值为__________.

二、选择题(每小题3分,共24分)

11. 下列等式中① $\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x-y}$,② $\frac{b-a}{c-a}=\frac{a-b}{a-c}$,③ $\frac{|b-a|}{a-b}=-1$,④ $\frac{-x+y}{-x-y}=\frac{x-y}{x+y}$,其中成立的共有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

12. 已知 $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ $(r_1+r_2\neq0)$ 则用 r_1,r_2 表示 R 等于(　　)

A. $\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}$　　B. r_1r_2　　C. r_1+r_2　　D. $\frac{r_2}{1+\frac{r_2}{r_1}}$

13. 若 $x+\frac{1}{x}=2$,,则 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 的值为(　　)

A. -1　　B. -2　　C. -3　　D. 以上均不对

14. 分式方程 $\frac{x+1}{x^2-2x}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x-2}$ 的解是(　　)

A. 0或1　　B. -1或2　　C. 1　　D. 1或2

15. 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$,则 $\frac{a+2ab+b}{2a-3ab+2b}$ 的值为(　　)

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. 以上均不对

16. 已知 $\frac{-x+13}{x^2-2x-15}=\frac{A}{x-5}-\frac{B}{x+3}$,则 $A\cdot B$ 的值 = (　　)

A. 11　　B. 2　　C. 3　　D. 以上均不对

17. 甲乙两人各走70km,甲比乙快2.5h 如果甲、乙两人各走2h的路程,乙比甲少走1km,设甲每小时走 $x$km,乙每小时走 $y$km,依题意得到的方程组是(　　)

A. $\begin{cases}\frac{70}{x}-\frac{70}{y}=\frac{5}{2}\\2y-2x=1\end{cases}$　　B. $\begin{cases}\frac{70}{y}-\frac{70}{x}=\frac{5}{2}\\2x-2y=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}\frac{70}{x}-\frac{70}{y}=\frac{5}{2}\\2x-2y=1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}\frac{70}{y}-\frac{70}{x}=\frac{5}{2}\\2y-2x=1\end{cases}$

18. 若 $x<y<0$,则分式 $\frac{y+1}{x-1}-\frac{x}{y}$ 的值总是(　　)

A. 正数　　B. 负数　　C. 零　　D. 非负数

三、解答题(共66分)

19.化简:(每小题6分,共12分)

(1) $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right)\div\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}-\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$;

(2) $\dfrac{1}{a^2-\dfrac{a^3-1}{a+\dfrac{1}{a+1}}}$.

20.求值:(每小题8分,共16分)

(1) 已知$\frac{x^2+1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$,求$A$、$B$、$C$的值.

(2) 分式方程$\frac{1}{x-2}+\frac{k}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}$有增根,求$k$的值.

21.解方程$5+\frac{96}{x^2-16}+\frac{3x-1}{4-x}=\frac{2x-1}{x+4}$.(8分)

22.阅读下列解题过程,然后解题.(10分)

①题目:已知$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$($a,b,c$互不相等),求$x+y+z$的值.

解:设$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$

$x=k(a-b)$,$y=k(b-c)$,

$z=k(c-a)$.

于是$x+y+z=k(a-b+b-c+c-a)=k\cdot 0=0$

故 $x+y+z$的值为0.

②仿照上述方法解答下面问题:

已知$\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}$($x+y+z\neq 0$),求$\frac{x+y-z}{x+y+z}$的值.

23.华联商厦进货员在苏州发现一种A牌衬衫,预料能畅销市场,就用8万元购进所有A牌衬衫,还急需2倍的A牌衬衫,经人介绍又在上海用176000元购进所需衬衫,只是单价比苏州贵4元,商厦按每件58元销售,销路很好,最后剩下的150件按八折销售很快售完,问商厦这笔生意赚了多少元钱?(10分)

24.已知$4x^3-4x^2y-xy^2+y^3=0$,求$\frac{x^2+y^2}{xy}$的值.(10分)

第十章　数的开方

10.1　平方根

学点探究分析

重点　平方根与算术平方根的概念.

难点　求一个数的平方根,对算术平方根的理解.

探究点　对平方根,算术平方根的定义及性质的考查,学生进行开平方运算时,被开方数为非负数等特点的理解程度是中考的热点.

学习方法技巧

1. 注重概念的理解

因为任何数的平方都不是负数,所以负数没有平方根;平方与开平方是互为逆运算关系,由于任意一个数的平方均具有非负性,所以负数是不能进行开平方运算的.例如对于 -16 来说,在初中阶段,我们找不到一个数 x 使等式 $x^2=-4$ 成立,所以在学习"数的开方"中的开平方时,必须理解并识别在什么情况下可进行开平方运算,什么情况下不能进行开平方运算,掌握平方根与算术平方根的鉴别与表示,以及符号 $\sqrt{a}$ 的意义.

应注意分清以下几点:

(1) 只要一个数的平方等于 a,那么这个数的相反数的平方也一定等于 a,因此正数有两个平方根,而且这两个平方根互为相反数.

(2) 因为零的平方得零,零的相反数也是零,所以零的平方根只有一个而且是零.

(3) 因为任何一个数的平方不可能是负数,所以负数没有平方根.

(4) $+\sqrt{a}$ 表示正数 a 的正的平方根,$-\sqrt{a}$ 表示正数 a 的负的平方根,并且 $(\pm\sqrt{a})^2=a$,所以,$\pm\sqrt{a}$ 表示正数 a 的平方根,$+\sqrt{a}$ 常省略"+",写为 $\sqrt{a}$.

⑸ 在$\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$，$\pm\sqrt{a}$，被开方数 a（或式）永远是一个非负数，即$a\geqslant 0$.

⑹ 正数 a 的平方根 $\pm\sqrt{a}$ 中的正的平方根$\sqrt{a}$叫做正数 a 的算术平方根，因此，$\sqrt{a}$是算术平方根的专用表示符号，它表示两种符号：①表示对根号内的非负数进行开方，是运算符号；②表示非负数开平方所得的平方根中的算术平方根，是性质符号.

2. 平方根与算术平方根

平方根与算术平方根是两个不同的概念，它们既有区别，又有联系，要注意区分.

区别有四点：

⑴ 定义不同；

⑵ 个数不同：一个正数有两个平方根，而一个正数的算术平方根只有一个；

⑶ 表示方法不同：正数 a 的平方根表示为 $\pm\sqrt{a}$，正数 a 的算术平方根表示为$\sqrt{a}$；

⑷ 取值范围不同：正数的算术平方根一定是正数；正数的平方根则一正一负，两者互为相反数.

联系有三点：

⑴ 具有包含关系：平方根包含算术平方根，算术平方根是平方根中的一种；

⑵ 存在的条件相同：平方根和算术平方根都只有非负数才有；

⑶ 0 的平方根、算术平方根均为 0.

能力升级捷径

【例 1】 求下列各数的平方根和算术平方根：

⑴ 0.0016；

⑵ $\dfrac{81}{289}$；

⑶ $(-5)^2$；

⑷ 0.

思维技巧　只有非负数才有平方根，正数有两个平方根，互为相反数，0 的平方根是 0，算术平方根是正的平方根.

初二代数

解　(1) ∵ $(\pm 0.04)^2=0.0016$　∴　0.0016 平方根为 ± 0.04，算术平方根为 0.04.

(2) ∵ $\left(\pm\frac{9}{17}\right)^2=\frac{81}{289}$　∴　$\frac{81}{289}$的平方根为$\pm\frac{9}{17}$，算术平方根为$\frac{9}{17}$.

(3) ∵　$(-5)^2=25$，又 ∵　$(\pm 5)^2=25$，∴ 平方根为 ± 5，算术平方根为 5.

(4) ∵　$0^2=0$，∴ 0 的平方根、算术平方根为 0.

激活思维　1. 要判定一个数有无平方根，平方根有几个，关键是要确定这个数是正数，还是负数，或是零. 因为正数有两个平方根，且这两个平方根互为相反数；零的平方根只有一个，即零；负数没有平方根.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 下列说法对不对？为什么？

① 4 有一个平方根；

② 只有正数有平方根；

③ 任何数都有平方根；

④ 若 $a\geqslant 0$ 时，a 有两个平方根，它们互为相反数.

解　① 不对，应该说 4 有两个平方根，这两个平方根互为相反数，记作 $\pm\sqrt{4}$；

② 不对，应该是只有正数和零才有平方根；

③ 不对，因为任何数这个范围包括负数，而负数没有平方根；

④ 对，一个正数 a 有两个平方根，这两个平方根互为相反数，0 有一个平方根，是 0，0 的相反数也是 0.

(2) 用符号表示下列各数的平方根：

① 9；② $\frac{1}{16}$；③ 0.04；④ a^2.

解　① 9 的平方根表示为 $\pm\sqrt{9}$；

② $\frac{1}{16}$的平方根表示为 $\pm\sqrt{\frac{1}{16}}$；

③ 0.04 的平方根表示为 $\pm\sqrt{0.04}$；

④ a^2 的平方根表示为 $\pm\sqrt{a^2}$.

【例 2】　求下列各数的平方根：

(1) 324；(2) $2\frac{23}{49}$；(3) 0.64；(4) $(-16)^2$；(5) $-(-4)^3$.

思维技巧 根据平方根的定义：平方与开平方互为逆运算，所以可以通过平方运算来求一个数的平方根. 其中 $2\frac{23}{49}=\frac{121}{49}$ 等于类似的其他形式的数，应分别先求出它们的实际值.

解 (1) $\because$ $(\pm 18)^2=324$，

$\therefore$ 324 的平方根是 ± 18，即 $\pm\sqrt{324}=\pm 18$.

(2) $\because$ $2\frac{23}{49}=\frac{121}{49}$，又 $\left(\pm\frac{11}{7}\right)^2=\frac{121}{49}$，

$\therefore$ $2\frac{23}{49}$ 的平方根是 $\pm\frac{11}{7}$，即 $\pm\sqrt{2\frac{23}{49}}=\pm\frac{11}{7}$.

(3) $\because$ $(\pm 0.8)^2=0.64$，

$\therefore$ 0.64 的平方根是 ± 0.8，即 $\pm\sqrt{0.64}=\pm 0.8$.

(4) $\because$ $(-16)^2=256$，$(\pm 16)^2=256$，

$\therefore$ $(-16)^2$ 的平方根是 ± 16，即 $\pm\sqrt{(-16)^2}=\pm 16$.

(5) $\because$ $-(-4)^3=4^3=64$，$(\pm 8)^2=64$，

$\therefore$ $-(-4)^3$ 的平方根是 ± 8，即 $\pm\sqrt{-(-4)^3}=\pm 8$.

激活思维 1. 运用平方运算求一个非负数的平方根是常用的方法. 求一个正数的平方根时，如果被开方数是小数，要注意小数点的位置，也可以先将小数化成分数，再求它的平方根；如果被开方数是带分数，应先将带分数化成假分数；负指数幂的意义与负数的意义，乘方运算等不能混淆.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 下列说法正确的是（　　）

A. 因为 2 的平方是 4，所以 4 的平方根是 2

B. 因为 -2 的平方是 4，所以 4 的平方根是 -2

C. 因为 $(-2)^2$ 的底数是 -2，所以 $(-2)^2$ 没有平方根

D. 因为 -4 是负数，所以 -4 没有平方根

解 因为 $(\pm 2)^2=4$，所以 4 的平方根应为 ± 2，故 A、B 均不完整，是错误的；又因为 $(-2)^2=4$，所以 $(-2)^2$ 的平方根即是 4 的平方根应为 ± 2，故 C 错误；因为没有一个数的平方根是负数，所以 -4 没有平方根是正确的，故

初二代数

选 D.

(2) 如果一个正实数的平方根是 $a+3$ 与 $2a-15$,那么这个正实数是多少?

解　本题考查学生对一个正实数的两个平方根的关系的理解.因为一个正数的两个平方根互为相反数,所以 $(a+3)+(2a-15)=0$,解得 $a=4$,把 $a=4$ 代入 $a+3$ 得 $a+3=7$,即两个平方根分别为 7 和 -7.故原数为 49.

【例 3】　求下列各数的算术平方根:

(1) 144;(2) $-(-196)$;(3) $8+\left(-\frac{1}{6}\right)^2$.

思维技巧　求一个正数的算术平方根与求一个正数的平方根方法类似,区别在于算术平方根是指正的平方根.

解　∵　$12^2=144$,

∴　144 的算术平方根是 12,即

$$\sqrt{144}=12.$$

(2) ∵　$-(-196)=196$,$14^2=196$,

∴　$-(-196)$的算术平方根是 14,即

$$\sqrt{-(-196)}=14.$$

(3) $8+\left(-\frac{1}{6}\right)^2=8+\frac{1}{36}=\frac{289}{36}$,$\left(\frac{17}{6}\right)^2=\frac{289}{36}$,

∴　$8+\left(-\frac{1}{6}\right)^2$ 的算术平方根是$\frac{17}{6}$,即

$$\sqrt{8+\left(-\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{17}{6}.$$

激活思维　1. 根据平方根的定义,求一个非负数 a 的平方根,首先要找出平方等于 a 的数,写出平方式;从平方式确定 a 的平方根的值,并表示出平方根的结果,而算术平方根则是平方根的绝对值.

2. 与本题类似的其他变形有:

(1) $\sqrt{16}$的算术平方根是(　　)

A. ± 4　　B. 4　　C. ± 2　　D. 2

解　$\sqrt{16}$表示 16 的算术平方根,所以$\sqrt{16}=4$.因此,本题的实质是求 4 的算术平方根.因 4 的算术平方根是 2,故选 D.

(2) 求下列各数的算术平方根：

① 1.21；② 4^{-1}；③ $(-\sqrt{4})^2$；④ $\sqrt{16}$.

解 ① ∵ $1.1^2=1.21$，∴ 1.21 的算术平方根是 1.1，即

$$\sqrt{1.21}=1.1.$$

② ∵ $4^{-1}=\frac{1}{4}$，且 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，∴ 4^{-1}的算术平方根是$\frac{1}{2}$，即

$$\sqrt{4^{-1}}=\frac{1}{2};$$

③ ∵ $\sqrt{4}$表示 4 的算术平方根，∴ $\sqrt{4}=2$，$(-\sqrt{4})^2=(-2)^2=4$. 而 $2^2=4$，∴ $(-\sqrt{4})^2$ 的算术平方根是 2，即$\sqrt{(-\sqrt{4})^2}=2$；

④ $\sqrt{16}$表示 16 的算术平方根，∴ $\sqrt{16}=4$. ∴ $\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{4}=2$.

【例 4】 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{225}$；(2) $-\sqrt{0.0004}$；(3) $\pm\sqrt{12\frac{1}{4}}$；(4) $-\sqrt{(-0.1)^2}$；(5) $\sqrt{41^2-40^2}$；(6) $\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}$.

思维技巧 本题除了分清各小题所表示的含义外，还要掌握好运算顺序，求$\sqrt{225}$的值就是求 225 的算术平方根；求$-\sqrt{0.0004}$即求 0.0004 的算术平方根的相反数；求$\pm\sqrt{12\frac{1}{4}}$是求 $12\frac{1}{4}$ 的平方根；求$-\sqrt{(-0.1)^2}$就是求 $(-0.1)^2$ 的算术平方根的相反数；求$\sqrt{41^2-40^2}$就是求 41^2-40^2 的算术平方根；求$\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}$就是求 0.81，0.04 的算术平方根之差.

解 (1) $\sqrt{225}=15$；

(2) $-\sqrt{0.0004}=-0.02$；

(3) $\pm\sqrt{12\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\pm\frac{7}{2}$；

(4) $-\sqrt{(-0.1)^2}=-\sqrt{0.01}=-0.1$；

(5) $\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{(41+40)(41-40)}=\sqrt{81\times1}=\sqrt{81}=9$；

(6) $\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}=0.9-0.2=0.7$.

激活思维 1. 在解答上述问题时，应注意避免以下错误：$\sqrt{225}=\pm15$；$-\sqrt{(-0.1)^2}=-(-0.1)=0.1$；$\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{41^2}-\sqrt{40^2}=41-40=1$.

2. 必须明确$\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$，$\pm\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）三者的区别：$\sqrt{a}$表示a的算术平方根；$-\sqrt{a}$表示a的算术平方根的相反数（或a的负的平方根），$\pm\sqrt{a}$表示a的平方根.

3. 算术平方根$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）是非负数，到目前为止，我们已学过三种非负数：①绝对值$|a|$；②平方数a^2；③算术平方根$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）.

4. 与本题类似的其他变形有：

(1)（黄冈市2000年）$\sqrt{25}$的算术平方根是________.

解　$\sqrt{5}$.

(2) 下列说法正确的是（　　）

A. 1的平方根是1　　　　B. 0的平方根是0

C. -1的平方根是-1　　　　D. $(-1)^2$的平方根是-1

解　选B.

【例5】　求下列各式的值：

(1) $x^2-196=0$；(2) $16(x+2)^2-81=0$；(3) $4x^2-4x-63=0$.

思维技巧　根据平方根的定义，若$x^2=a^2$，则$x=\pm\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$），其中(2)中应把$(x+2)$看作一个整体，先求出$(x+2)$的值，再求x的值；(3)中则应先根据$(4x^2-4x)$把含x的部分配成一个完全平方的形式，然后用类似(2)的方法去求解.

解　(1) $\because\ x^2-196=0$，$\therefore\ x^2=196$，

又$\because\ (\pm 14)^2=196$，$\therefore\ x=\pm 14$.

(2) $16(x+2)^2-81=0$变形为：$(x+2)^2=\dfrac{81}{16}$，

又$\because\ \left(\pm\dfrac{9}{4}\right)^2=\dfrac{81}{16}$，$\therefore\ x+2=\pm\dfrac{9}{4}$，

$\therefore\ x=\dfrac{1}{4}$或$-\dfrac{17}{4}$.

(3) 由$4x^2-4x-63=0$得　$(4x^2-4x+1)-64=0$，

$\therefore\ (2x-1)^2-64=0$，即$(2x-1)^2=64$，

又$\because\ (\pm 8)^2=64$，$\therefore\ 2x-1=\pm 8$，

$\therefore\ x=\dfrac{9}{2}$　或　$-\dfrac{7}{2}$.

激活思维　1. 本题实质是解方程的问题，而这里的方程是含x的二次

方程,由此可见,开平方法是解二次方程的最基本方法,这在以后初三的课程里要专门学习.

2. 解这类题的关键是充分理解平方根的含义,且注意到一个正数的平方根有两个,这两个平方根互为相反数,如题(1);而有一些数学问题,如(2)、(3)两题,需要把某个代数式看成一个整体,或先配方成完全平方的形式,再利用平方根的定义来解.

3. 与本题类似的其他变形有:

(1) 已知 $9y^2-16=0$,且 y 是正数,求 $\sqrt{3y+5}$ 的值.

解 $\because\ 9y^2=16$,$\therefore\ y^2=\dfrac{16}{9}$,$\therefore\ y_1=\dfrac{4}{3}$,$y_2=-\dfrac{4}{3}$,

$\because\ y$ 是正数,$\therefore\ y=-\dfrac{4}{3}$ 不符合题意,舍去.

$\therefore\ y=\dfrac{4}{3}$,$\therefore\ \sqrt{3y+5}=\sqrt{3\times\dfrac{4}{3}+5}=\sqrt{9}=3$.

(2) 已知 $\sqrt{x-y+3}$ 与 $\sqrt{x+y-1}$ 互为相反数,求 x^2+y^2.

解 由题意,得 $\sqrt{x-y+3}+\sqrt{x+y-1}=0$,

$\because\ \sqrt{x-y+3}\geqslant0$,$\sqrt{x+y-1}\geqslant0$,

$\therefore\ \sqrt{x-y+3}=0$,

$\sqrt{x+y-1}=0$. $\therefore\ \begin{cases}x-y+3=0,\\x+y-1=0.\end{cases}$ $\therefore\ \begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$

$\therefore\ x^2+y^2=(-1)^2+2^2=5$.

【例 6】 x 为何值时,下面各式有意义?

(1) $\sqrt{2x}$;(2) $\sqrt{-x}$;(3) $\sqrt{x+1}$;(4) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$.

思维技巧 解本题的关键是 a 的算术平方根 $\sqrt{a}$ 中 a 是非负数,即当 $a\geqslant0$ 时,$\sqrt{a}$ 才有意义.

解 (1) 当 $2x\geqslant0$,即 $x\geqslant0$ 时,$\sqrt{2x}$ 有意义;

(2) 当 $-x\geqslant0$ 即 $x\leqslant0$ 时,$\sqrt{-x}$ 有意义;

(3) 当 $x+1\geqslant0$,即 $x\geqslant-1$ 时,$\sqrt{x+1}$ 有意义;

(4) 当 $\begin{cases}1-x\geqslant0,\\x\geqslant0\end{cases}$ 时,即 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 有意义.

激活思维 1. 使式子有意义的问题主要从三个方面考虑:① 对于平方

根或算术平方根,要求其被开方数必须大于或等于零;② 对于分式,要求其分母不等于零;③ 对于整式,式子中的字母可以取任意数.

2. 与本题类似的其他变形有:

(1) ①当 x 取何值时,$\sqrt{x+3}$有意义?

② 已知$|x-1|+(y+3)^2+\sqrt{x+y+z}=0$.

求:x、y、z 的值.

解　① 由题可知:$x+3\geqslant0$,

$\therefore\quad x\geqslant-3$.

当 $x\geqslant-3$ 时,$\sqrt{x+3}$有意义.

② $\because\quad |x-1|\geqslant0$,$(y+3)^2\geqslant0$,$\sqrt{x+y+z}\geqslant0$,

又$\because\quad |x-1|+(y+3)^2+\sqrt{x+y+z}=0$,

$\therefore\quad \begin{cases}|x-1|=0,\\(y+3)^2=0,\\\sqrt{x+y+z}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-1=0,\\y+3=0,\\x+y+z=0.\end{cases}$ $\therefore\quad \begin{cases}x=1,\\y=-3,\\z=2.\end{cases}$

(2) 已知一自然数的算术平方根是 n,则与这个自然数相邻的下一个自然数的平方根是多少?

解　因为这个自然数的算术平方根是 n,则这个自然数为 n^2,那与它相邻的下一个自然数应为 n^2+1,其平方根为$\pm\sqrt{n^2+1}$.

(3) (黄冈市 1996 年)$\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,a 和 b 满足$\sqrt{a-1}+b^2-4b+4=0$,则 c 的取值范围是______.

解　本题考查的是非负数的性质.由条件可知$\sqrt{a-1}+(b-2)^2=0$,这里$\sqrt{a-1}$和$(b-2)^2$都为非负数,显然只有当$\sqrt{a-1}$和$(b-2)^2$都为零,即 $a=1$,$b=2$ 时,原等式才成立,则此时三角形的第三边 c 的范围可由三角形的三边关系来确定.可得 $1<c<3$.

【例 7】　化简:

(1) $\sqrt{(x-1)^2}+(\sqrt{1-x})^2$;

(2) $|1-\sqrt{(1+x)^2}|$(其中 $x<-2$);

(3) $|x-y|-\sqrt{(y-1)^2}$(其中 $x<y$,$y>1$).

思维技巧 解题过程中，应注意紧紧扣住算术平方根的定义，例如(1)题中$\sqrt{1-x}$是算术平方根，所以$1-x\geqslant0$，即得$x-1\leqslant0$；又如(2)题中，因为$x<-2$，所以$1+x<-1<0$，于是$\sqrt{(1+x)^2}=|1+x|=-(1+x)$，而对于(3)，同样可根据条件确定彼此的符号.

解 (1)由$\sqrt{1-x}$可知$1-x\geqslant0$ $\therefore$ $x-1\leqslant0$

$\therefore$ $\sqrt{(x-1)^2}+(\sqrt{1-x})^2=|x-1|+1-x=-(x-1)+1-x$

$=2-2x$

(2) $\because$ $x<-2$ $\therefore$ $x+2<0$，且$x+1<0$

$\therefore$ $\sqrt{(1+x)^2}=|1+x|=-(x+1)$，

$\therefore$ $|1-\sqrt{(1+x)^2}|=|1-[-(x+1)]|=|2+x|=-2-x$

(3) $\because$ $x<y$，$\therefore$ $x-y<0$，又$\because$ $y>1$ $\therefore$ $y-1>0$

$\therefore$ $\sqrt{(y-1)^2}=|y-1|=y-1$

$\therefore$ $|x-y|-\sqrt{(y-1)^2}=-(x-y)-(y-1)=1-x$

激活思维 1. 只有非负数才有平方根，二次根号下的被开方数必须是正数或零，由此，可以确定字母的取值范围并进行化简.

2. 应注意题目中的隐含条件，如$\sqrt{1-x}$，其本身就限制着$1-x\geqslant0$.

3. 与本题类似的其他变形有：

(1) 下列各式中，无意义的是（　　）

A. $-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{(-3)^2}$　　C. $\sqrt{3^{-2}}$　　D. $\sqrt{-\frac{1}{3}}$

解 选D.

(2) 若$a<0$，比较a与$\sqrt{a}$的大小为（　　）

A. $a>\sqrt{a}$　　B. $a<\sqrt{a}$　　C. $a>\sqrt{a}$或$a<\sqrt{a}$　　D. 不能确定

解 当a为正整数时，如$a=9$，则$\sqrt{9}=3$，即$9>\sqrt{9}$，即$a>\sqrt{a}$；

当 a为正的真分数时，如$a=\frac{1}{25}$时，$\frac{1}{25}<\sqrt{\frac{1}{25}}$，

$\therefore$ $a<\sqrt{a}$；

当 $a=1$时，$1=\sqrt{1}$，即 $a=\sqrt{a}$.

故选D.

初二代数

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 下列语句正确的是（　　）

A. 一个数的平方根一定有两个

B. 一个非负数的非负平方根一定是它的算术平方根

C. 一个正数的平方根一定是它的算术平方根

D. 一个非零数的正的平方根是它的算术平方根

2. $\sqrt{16}$的平方根是（　　）

A. 4　　B. ± 4　　C. 2　　D. ± 2

3. 下列命题中，正确的个数有（　　）

①1的平方根是1；②1是1的平方根；③$(-1)^2$的平方根是-1；④一个数的平方根等于它的算术平方根，这个数只有0一个.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. 要使$\sqrt{-a^2}$有意义，则a的值为（　　）

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $a\geqslant 0$　　D. $a=0$

5. 一个自然数的算术平方根是a，则与这个自然数相邻的后续自然数的平方根是（　　）

A. $a+1$　　B. a^2+1　　C. $\pm\sqrt{a+1}$　　D. $\pm\sqrt{a^2+1}$

二、填空题

6. 若$a^2=16$，则$a=$________.

7. 在实数范围内a______时，$\sqrt{1-a}$有意义；a______时，$\sqrt{a-1}$有意义；a______时，$\sqrt{1-a}+\sqrt{a-1}$有意义，它的值是______.

8. $1\frac{9}{16}$的算术平方根是________.

9. $\sqrt{16}$的平方根是______，算术平方根是______.

10. 若$\sqrt{3x-1}+|1+y|=0$，则$x^2+y^2=$______.

11. 若$\sqrt{x}(x^2-2)=0$，则x的值为______.

12. 代数式 $-3-\sqrt{a+b}$ 的最大值为____,这时 a,b 的关系是____.

三、求下列各数的平方根与算术平方根

13. 0.0256; 14. 10^{-6}.

四、求下列各式的值

15. $\sqrt{144}+\sqrt{169}$; 16. $\sqrt{9^{-1}}-\sqrt{4^{-1}}$;

17. $\sqrt{1\frac{7}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 18. $\sqrt{25}\div\sqrt{0.04}$.

五、当 x 为何值时,下列各式有意义?

19. $\sqrt{5-x}$; 20. $\sqrt{x^2+1}$.

六、求下列各式中的 x.

21. $4x^2-25=0$; 22. $(x+2)^2=289$.

七、解答题

23. 已知 $a=10^{-2}$,$b=10^4$,且 $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$,求 x.

24. 已知一个长方形相邻两边的长分别为 15 和 8,求这个长方形的对角线的长.

25. 已知 $4x^2=2500$,且 x 为正数,求 $\sqrt{2x-1}$ 的值.

26. 如果 $\sqrt{a}$ 的平方根是 ±3,求 a.

27. 若 m 满足关系式 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y}$,试求 m 的值.

探究能力测试

28. $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c,a 和 b 满足 $\sqrt{a-1}+b^2-4b+4=0$,求 c 的取值范围.

29. 当 n 是正整数时,你能说出 $\sqrt{n^2+n}$ 的整数部分是什么吗?

30. 根据爱因斯坦的相对论,当地球过去 1 s 时,宇宙飞船内只经过 $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ s(公式内的 c 指光速 30km/s,v 指宇宙飞船速度).假定有一对 25 岁和 28 岁的亲兄弟,哥哥乘坐以光速 0.98 倍的速度飞行的宇宙飞船,作了五年科学考察后回到了地球,这个 5 年是指地面上的 5 年,所以弟弟的

年龄已是 30 岁了，请你用上述公式推算一下，哥哥在这段时间内长了几岁，此时哥哥的年龄是多少？

10.2　用计算器求平方根

学点探究分析

重点　用计算器求一个数的平方根.

难点　第二功能选择键的运用.

探究点　求一个数的算术平方根，联系实际意义来考查学生的实际运用能力，是将来的发展趋势.

学习方法技巧

1. 掌握计算器的使用方法

(1) 除了数字键、$\boxed{+}$、$\boxed{-}$、$\boxed{\times}$、$\boxed{\div}$、$\boxed{=}$、小数点等键外，还要记住几个常用键：

开机键$\boxed{\text{ON/C}}$，关机键$\boxed{\text{OFF}}$，局部清除键$\boxed{\text{CE}}$，符号转换键$\boxed{+/-}$，乘幂运算键$\boxed{y^x}$，第二功能选择键$\boxed{\text{2ndF}}$，括号键$\boxed{(}$、$\boxed{)}$.

(2) 负数的输入方法.

先按其相反数，再按符号转换键，例如 -3，按键：$\boxed{3}$ $\boxed{+/-}$.

(3) 计算器的一些键都有两种功能，如乘幂运算键$\boxed{y^x}$，它的第一种功能是计算乘方. 例如，计算 5^2，按键$\boxed{5}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$，显示器上显示结果 25，乘幂运算键$\boxed{y^x}$的第二功能是开方运算，符号是$\boxed{\sqrt[x]{y}}$，要进行开方运算时，先按第二功能选择键，例如，求$\sqrt{5}$，按键 $\boxed{5}$ $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$，显示器上显示结果 2.236068.

(4) 在输入数据时，中途有按错键的，可按$\boxed{\text{CE}}$键清除刚输入的数据.

(5) 计算器能够先乘方、开方，再乘、除，最后加、减，所以做混合运算时，按键顺序与书写顺序完全一样，例如，计算 $1+2\times3^2$，按键顺序是$\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$.

(6) 如果计算 $(8+14\times3)\div5^2$，就要使用括号键，按键顺序是：$\boxed{(}\ \boxed{8}\ \boxed{+}$ $\boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$.

2. 应注意的问题

(1) 计算器要平稳放置，以避免按键时发生晃动和滑动.

(2) 由于计算器键盘小，键、钮排列紧密，一般应该用食指按键，因使用计算器时往往还要进行书写，最好是用左手按键，按键时，用力要均匀，直至键钮接触到底部为止，不能敲击，也不能用钢笔等硬物按键.

(3) 计算开始时，按开机键 ON；停止使用时，要注意按关机键 OFF.

(4) 按下数字键后，应立即看看显示器上的显示是否正确，按下运算键等指令键后，要注意显示的数是否有一下闪动，如无闪动，说明可能是键未按到底.

(5) 每次运算前，要按一下清零键“C”(英文 clear 的第一个字母). 此外，计算过程中，如发现刚输入的一个数据有误，需要清除，可按一下局部错误清除键“CE”(英文 clear　Entry 的两个开头字母)，是清除刚输入数据的意思，这时显示器上的显示为 0，而先前输入的数据和运算仍保持有效，然后再输入正确数据 (有的计算器用 AC 表示清零键，用 C 表示局部错误清除键).

能力升级捷径

【例 1】 用计算器求 $38+26$.

思维技巧　从按键的顺序入手是解题的关键，第一步是输入数据 38，应依次按数字键 $\boxed{3}$、$\boxed{8}$；第二步应按加法运算键；第三步按数字键 $\boxed{2}$、$\boxed{6}$，输入数据 26；第四步按等号键，显示器上显示出得数 64.

解　过程如下表：

按　键	显　示
$\boxed{3}\ \ \boxed{8}$	38
$\boxed{+}$	38
$\boxed{2}\ \ \boxed{6}$	26
$\boxed{=}$	64

∴　$38+26=64$

激活思维　1. **输入一个多位数时，按键的顺序是从高位依次到低位.**

2. **与本题类似的其他变形有：**

用计算器求值：(1) $605-395$；(2) $60+4\times25$.

解　(1)

按　键	显　示
$\boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{5}$	605
$\boxed{-}$	605
$\boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{5}$	395
$\boxed{=}$	210

∴　$605-395=210$

(2)

按　键	显　示
$\boxed{6}\ \boxed{0}$	60
$\boxed{+}$	60
$\boxed{4}$	4
$\boxed{\times}$	4
$\boxed{2}\ \boxed{5}$	25
$\boxed{=}$	160

∴　$60+4\times25=160$

【例 2】　用计算器计算：(精确到 0.001)

(1) $(-0.45)^5$；　(2) $\sqrt{21.52}$.

思维技巧　**首先应注意小数** 0.45 **的输入方法，先按**$\boxed{\cdot}$**，然后输入**$\boxed{4}$、$\boxed{5}$.

解 (1)

按　键	显　示
$\boxed{.}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{+/-}$	-0.45
$\boxed{y^x}$	-0.45
$\boxed{5}$	5
$\boxed{=}$	-0.0184528

$\therefore\quad (-0.45)^5\approx -0.018$

(2)

按　键	显　示
$\boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{5}\ \boxed{2}$	21.52
$\boxed{\text{2ndF}}$	21.52
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	21.52
$\boxed{2}$	2
$\boxed{=}$	4.6389654

$\therefore\quad \sqrt{21.52}\approx 4.639$

激活思维 1. **不同性质的运算,在运算顺序和按键的顺序上也不相同,应注意区别掌握.**

2. **不同的计算器,显示器所能显示的数的数位不尽相同,一般地计算器最多能显示 10 个数位.**

3. **与本题类似的其他变形有:**

(1) 用计算器求$\sqrt{64}+\sqrt{6.48}$. **(保留四个有效数字)**

解

按　键	显　示
$\boxed{6}\ \boxed{4}$	64
$\boxed{\text{2ndF}}$	2F
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	64
$\boxed{2}$	2
$\boxed{+}$	8
$\boxed{6}\ \boxed{.}\ \boxed{4}\ \boxed{8}$	6.48
$\boxed{\text{2ndF}}$	2F
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	6.48
$\boxed{2}$	2
$\boxed{=}$	10.54558441

$\therefore\ \sqrt{64}+\sqrt{6.48}\approx 10.55$

(2) 用计算器求$\sqrt{23.04}\div\sqrt{1.354}$（结果保留四个有效数字）.

解

按　键	显　示
$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{4}$	23.04
$\boxed{\text{2ndF}}$	2F
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	2
$\boxed{2}$	4.8
$\boxed{\div}$	4.8
$\boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$	1.354

按　键	显　示
$\boxed{\text{2ndF}}$	2F
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	2
$\boxed{2}$	1.163615057
$\boxed{=}$	4.125075533

$\therefore\quad \sqrt{23.04}\div\sqrt{1.354}\approx 4.125$

【例 3】　用计算器求值：

(1) -6^2；

(2) $(-5)^4-2\times(-3)^2+\sqrt{32}$.

思维技巧　应分别掌握负数、乘方、算术平方根等运算的输入方法，在混合运算里，要严格按顺序进行.

解　上列运算可分别表示为：

(1)

按　键	显　示
$\boxed{6}$	6
$\boxed{y^x}$	6
$\boxed{2}$	2
$\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$	-36

$\therefore\quad -6^2=-36$

(2)

按　键	显　示
$\boxed{5}\ \boxed{+/-}$	-5
$\boxed{y^x}$	-5
$\boxed{4}$	4
$\boxed{-}$	625
$\boxed{2}$	2
$\boxed{\times}$	2
$\boxed{3}\ \boxed{+/-}$	-3
$\boxed{y^x}$	-3
$\boxed{2}$	2
$\boxed{+}$	607
$\boxed{3}\ \boxed{2}$	32
$\boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{y}}$	32
$\boxed{2}$	2
$\boxed{=}$	612.65685

$\therefore\quad (-5)^4-2\times(-3)^2+\sqrt{32}\approx 612.7$

激活思维　1. **输入负数时,符号转换键要放在数据之后输入.**

2. **本例两个小题不同,按键的方法也不同,第(1)小题只能先按键**$\boxed{6}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}$,**接着按**$\boxed{=}$,**得出** 36,**再按**$\boxed{+/-}$**变成** -36.**如果按键**$\boxed{6}\ \boxed{+/-}$**得出** -6,**再按**$\boxed{y^x}\ \boxed{2}$**就得** $(-6)^2=36$.**或先按**$\boxed{6}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}$**得** 6^2,**紧接着按**$\boxed{+/-}$,**就变成了** 6^{-2},**结果为** 0.277777,**也就是说,后两种按法都是错误的.**

3. **对于先加减后乘除的情况,需要按括号键.**

4. **与本题类似的其他变形有:**

(1) **用计算器求值:**$(-6)^2$.

解

按　键	显　示
$\boxed{6}$ $\boxed{+/-}$	-6
$\boxed{y^x}$	-6
$\boxed{2}$	2
$\boxed{=}$	36

(2) 用计算器求值：

$[12\times(-4)-125\div(-5)]\times(-2)^3$.

解

按　键	显　示
$\boxed{(}$	(
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	12
$\boxed{\times}$	12
$\boxed{4}$ $\boxed{+/-}$	-4
$\boxed{-}$	-48
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$	125
$\boxed{\div}$	125
$\boxed{5}$ $\boxed{+/-}$	-5
$\boxed{)}$	-23
$\boxed{\times}$	-23
$\boxed{2}$ $\boxed{+/-}$	-2
$\boxed{y^x}$	-2
$\boxed{3}$	3
$\boxed{=}$	184

综合能力测试

基础能力测试

一、填空题

1. 在计算器的键盘上，$\boxed{\text{OFF}}$ 是______键，停止使用计算器时要按这个键以______.

2. 计算器的面板由______和______组成.

3. 计算器键盘上 $\boxed{\text{ON/C}}$ 是______键，使用计算器时要先按一下这个键以______.

4. 用计算器计算，按键顺序是 $\boxed{4}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\times}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$，则计算结果是__________.

5. 用计算器求 $3.731+1.479$，按键顺序是：

$\boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{7}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ +\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{} =$________.

6. 用计算器求 $\sqrt{0.046}$，按键顺序是 $\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$________ $\boxed{=}$________________.

二、选择题

7. 求 $\sqrt{0.0239}$ 的按键顺序是（　　）

A. $\boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$

B. $\boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$

C. $\boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}$

D. $\boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$

8. 用计算器求 $(35-23\times 81)\div 34$ 的值，下列操作程序不正确的是（　　）

A. $35\ \boxed{-}\ 23\ \boxed{\times}\ 81\ \boxed{\div}\ 34\ \boxed{=}$

B. $\boxed{(}\ 35\ \boxed{-}\ 23\ \boxed{\times}\ 81\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ 34\ \boxed{=}$

C. $35\ \boxed{\div}\ 34\ \boxed{-}\ 23\ \boxed{\times}\ 81\ \boxed{\div}\ 34\ \boxed{=}$

D. $35\ \boxed{-}\ 23\ \boxed{\times}\ 81\ \boxed{=}\ \div 34\ \boxed{=}$

9. 用计算器求 $\dfrac{\sqrt{37}}{38-\sqrt{21}\times 13}$ 的值，下列操作程序正确的是（　　）

A. 37 $\boxed{2ndF}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\div}$ 38 $\boxed{-}$ 21 $\boxed{2ndF}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\times}$ 13 $\boxed{=}$

B. 37 $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 38－21 $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\times}$ 13 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

C. 37 $\boxed{2ndF}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 38 $\boxed{-}$ 21 $\boxed{2ndF}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\times}$ 13 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

D. 37 $\boxed{2ndF}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\times}$ 38 $\boxed{-}$ 21 $\boxed{2ndF}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\times}$ 13 $\boxed{\frac{1}{x}}$ $\boxed{=}$

10. (天津市 1999 年)一个到火星的计划，来回行程需要三个地球年(包括在火星上停留 449 个地球天). 已知火星和地球之间的距离是 34000000km，那么这个旅行的平均速度(单位：km/h)是(　　)(说明：地球年、天指地球上一年、一天，一年＝365 天，一天＝24 小时)

A. $\frac{(3\times365-449)\times12}{34000000}$　　B. $\frac{34000000}{(3\times365-449)\times24}$

C. $\frac{2\times34000000}{(3\times365-449)\times24}$　　D. $\frac{34000000\times24}{2\times(3\times365-449)}$

11. 某同学学习了编程后，写了一个关于实数运算的程序：当输入一个数值后，屏幕输出的结果总比该数的平方小 1. 若某同学输入$\sqrt{7}$后，把屏幕输出结果再次输入，则最后的屏幕输出结果是(　　)

A. 6　　B. 8　　C. 35　　D. 37

12. 一个同学在使用科学计算器计算 2^{32}时，由于操作时不小心误输成了 2 $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{=}$，如果不需清零重新输入，还可以继续输入修正为(　　)

A. $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{y^x}$ 31 $\boxed{=}$　　B. $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{y^x}$ 16 $\boxed{=}$

C. $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{y^x}$ 30 $\boxed{=}$　　D. $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{y^x}$ 15 $\boxed{=}$

三、用计算器求下列各式的值

13. 0.038×12^2；

14. $\sqrt{23.04}\div\sqrt{1.354}$；

15. $(-2.5)^3\times\sqrt{21.4}\div(-4)^4$；

16. $-\sqrt{81}+\sqrt{2.236}$；

17. $3^6-\sqrt{35221}$；

18. $(-3)^5\div2^4\times12+46.25\times(-1.5)$.

初二代数

探究能力测试

四、解答题

19. 飞出地球，遨游太空，长期以来就是人类的一种理想，可是地球的吸引力毕竟太大了，飞机飞得再快也得回到地面，炮弹打得再高也得落向地面. 只有当物体速度达到一定值时，才能克服地球吸引力，围绕地球旋转，这个速度我们叫做第一宇宙速度. 计算公式是：$v=\sqrt{gR}$（km/s）. 其中 $g=0.0098\text{km/s}^2$，是重力加速度，$R=6370\text{km}$，是地球半径. 请你求出第一宇宙速度.

20. 观察下面的三个等式：

$7^2=49$，

$67^2=4489$，

$667^2=444889$，

请猜测：$6667^2=$________________. （若有计算器，可以用计算器检验你的结果）

10.3　立方根

学点探究分析

重点　立方根的意义和性质.

难点　区别平方根与立方根、n 次方根的概念.

探究点　求数的平方根或立方根的运算. 在解方程、几何图形的求积或其他生活实际问题的解决中的应用.

学习方法技巧

1. 加强类比，对照分析

(1) 掌握和理解立方根，可以对照平方根及开平方来学习.

	平 方 根	立 方 根
定义	若 $x^2=a\ (a\geqslant 0)$，则 x 叫做 a 的平方根	若 $x^3=a$，则 x 叫做 a 的立方根
性	正数有两个平方根，它们互为相反数	正数有一个立方根，仍为正数
	零的平方根是零：$\pm\sqrt{0}=0$	零的立方根是 0
质	负数没有平方根	负数有一个立方根，仍为负数
表示法	$\pm\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$	$\sqrt[3]{a}$（a 为任意数）

(2) 平方根与立方根的不同点如下表：

	平 方 根	立 方 根
意义不同	如果 $x^2=a$，则 x 叫 a 的平方根	如果 $x^3=a$，则 x 叫 a 的立方根
被开方数的取值范围不同	非负数	任意数
方根个数不同	正数有两个平方根，它们互为相反数	正数只有一个正的立方根

2. 奇次方根与偶次方根的比较

被开方数	偶次方根	奇次方根
正　数	正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，如 $\pm\sqrt[n]{a}$（其中 $a>0$，n 为偶数）	正数的奇次方根有一个，仍为正数，如 $\sqrt[n]{a}$（其中 $a>0$，n 为奇数）
负　数	负数没有偶次方根，即当 n 为偶数，$a<0$ 时，$\sqrt[n]{a}$ 没有意义	负数的奇次方根有一个，仍为负数，如 $\sqrt[n]{a}$（其中 n 为奇数，$a<0$）
0	0 的偶次方根仍为 0	0 的奇次方根是 0

3. 如何求负数的立方根

我们已经知道，负数有一个负的立方根，根据这一性质可能得到：如果 $a>0$，那么 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$，求一个负数的立方根时，只要先求出这个负数的绝对值的立方根，然后再取它的相反数. 也就是说，三次根号内的负号可以

移到根号外面,例如:$\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$.这个性质,对于平方根来说是完全不能适用的.

能力升级捷径

【例 1】　下列语句中正确的有几个?

(1) 0.027 的立方根是 0.3;

(2) $\sqrt[3]{a}$不可能是负数;

(3) 如果 a 是 b 的立方根,那么 $ab\geqslant 0$;

(4) 一个数的平方根与其立方根相同,则这个数是 1.

思维技巧　根据开立方和立方为互逆运算的关系,求立方根,被开方数没有符号限制.

解　(1) ∵ $(0.3)^3=0.027$,∴ (1)正确

(2) ∵ 负数的立方仍是负数,∴ $\sqrt[3]{a}$当 a 为负数时,其值为负,(2)错误

(3) ∵ a 是 b 的立方根,∴ $a^3=b$,∴ a 与 b 同号或同时为 0,∴ $a\cdot b\geqslant 0$,∴ (3)正确

(4) ∵ 除 1 外 0 的平方根和立方根也相同,∴ (4)错误

∴ 上题中正确的为(1)、(3).

激活思维　1. 运用立方运算求一个数的立方根是常用的方法.求带分数的立方根,先将带分数化为假分数.由负数的立方根的性质,可以把负数 $-a\ (a>0)$ 的立方根 $\sqrt[3]{-a}$ 转化为求正数的立方根,然后再取它的相反数.即 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.例如:$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-\sqrt[3]{4^3}=-4$.这个性质,对于平方根来说是完全不能适用的.因为负数没有平方根.

2. 与本题类似的其他变形有:

(1) (山西省 2001 年) $\sqrt{64}$的立方根是________.

解　2.

(2) (山东省 2001 年)下列选项中假命题是(　　)

A. 9 的算术平方根是 3　　　B. $\sqrt{16}$的平方根是 ± 2

C. 27 的立方根是 ± 3　　　D. 立方根等于 -1 的数是 -1

解　选 C.

【例 2】　求下列各式的值:

(1) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$；　　(2) $\sqrt[3]{1-0.973}$；

(3) $-\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}}$；　　(4) $\sqrt[3]{12\times20\times25\times36}$.

思维技巧　1. 怎样求负数的立方根的问题，可运用公式$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$ ($a>0$)，可将求负数的立方根转化为求正数的立方根，再转化为相反数的形式，若根号内有若干项和（或差），可将它转化为分数（或分式）的形式来求立方根.

解　(1) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$

(2) $\sqrt[3]{1-0.973}=\sqrt[3]{0.027}=0.3$

(3) $-\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}}=-\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=-\frac{5}{3}$

(4) $\sqrt[3]{12\times20\times25\times36}=\sqrt[3]{3\times4\times4\times5\times5^2\times4\times3^2}=\sqrt[3]{3^3\times4^3\times5^3}$

$=3\times4\times5=60$

激活思维　1. 立方根的根指数3不能省略，也不要在计算过程中漏写，如$-\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}=\sqrt{2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{4}{3}$，这是一个比较典型的错例，必须引起注意.

2. 当被开方数较复杂时，必须先进行整理后再进行求值.

3. 与本题类似的其他变形有：

(1) 下列说法正确的是（　　）

A. $\sqrt{81}$的平方根是±3　　B. 1的立方根是±1

C. $\sqrt{1}=\pm1$　　D. $\sqrt{x}>0$

解　选A.

(2) 求下列各式的值.

① $\sqrt[3]{0.008}$；　　② $\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$；

③ $-4\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$；　　④ $\sqrt[3]{10\frac{21}{125}-16}$.

解　① $\sqrt[3]{0.008}=0.2$；

② $\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}=-\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=-\frac{5}{4}$；

③ $-4\sqrt[3]{-15\dfrac{5}{8}}=-4\sqrt[3]{-\dfrac{125}{8}}=-4\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=10$；

④ $\sqrt[3]{10\dfrac{21}{125}-16}=\sqrt[3]{-\dfrac{729}{125}}=-\dfrac{9}{5}$.

【例 3】　求下列各式中的 x.

(1) $8x^3+125=0$；　　　(2) $(x+5)^3=-27$；

(3) $(x-\dfrac{1}{2})^3+10^{-3}=0$.

思维技巧　求 x 的关键是将这些方程化成 $x^3=a$ 的形式，然后再分别开立方解出 x. (1) 中可将求解的等式变形为 $x^3=-\dfrac{125}{8}$，实质上是问什么数的立方等于 $-\dfrac{125}{8}$，由立方根定义即可求出.对于 (2)、(3) 可视括号为一个整体求解.

解　(1) ∵　$8x^3=-125$　$x^3=-\dfrac{125}{8}$，

∴　$x=\sqrt[3]{-\dfrac{125}{8}}=-\dfrac{5}{2}$

(2) 两边开立方得：$x+5=\sqrt[3]{-27}$，

即　$x+5=-3$，

∴　$x=-8$

(3) 将原式化为 $(x-0.5)^3=-10^{-3}$，∴ $x-0.5=\sqrt[3]{-10^{-3}}$，

∴　$x-0.5=-0.1$，　　　∴　$x=0.4$

激活思维　1. 解题实质是解关于 x 的三次方程，两边开立方是解这类方程的基本方法.

2. 题 (2) 和题 (3) 均运用了换元 (整体) 思想，即把括号内的值 (多项式) 看成一项来处理 (或分解因式)，从而通过求立方根来达到求解 x 的目的.

3. 与本题类似的其他变形有：

(1) 求下列各式中的 x 的值：

① $(0.1+x)^3=-27000$；　　　② $\dfrac{1}{4}(2x+3)^3=54$.

解　① $0.1+x=\sqrt[3]{-27000}=-\sqrt[3]{27000}=-30$，

∴　$x=-30.1$

② $(2x+3)^3=4\times2\times27=2^3\times3^3=6^3$，

$\therefore\quad 2x+3=\sqrt[3]{6^3}=6$，故 $x=\dfrac{3}{2}$

(2) 设 $1996x^3=1997y^3=1998z^3$，$xyz>0$，且

$\sqrt[3]{1996x^2+1997y^2+1998z^2}=\sqrt[3]{1996}+\sqrt[3]{1997}+\sqrt[3]{1998}$，求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

解 设 $1996x^3=1997y^3=1998z^3=a$，则 $1996x^2=\dfrac{a}{x}$，$1997y^2=\dfrac{a}{y}$，$1998z^2=\dfrac{a}{z}$，$\sqrt[3]{1996}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{x}$，$\sqrt[3]{1997}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{y}$，$\sqrt[3]{1998}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{z}$，所以条件等式变为 $\sqrt[3]{a\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)}=\sqrt[3]{a}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$，$\therefore\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$，$\therefore\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

(3) 若 $\dfrac{\sqrt{2x+y}+|x^2-9|}{\sqrt{3-x}}=0$，求 $3x+6y$ 的立方根.

解 由 $\dfrac{\sqrt{2x+y}+|x^2-9|}{\sqrt{3-x}}=0$，

知 $\begin{cases}2x+y=0, & ① \\ x^2-9=0, & ② \\ 3-x\neq 0. & ③\end{cases}$

由 $\begin{cases}x^2-9=0, & ② \\ 3-x\neq 0. & ③\end{cases}$

得 $x=-3$

把 $x=-3$ 代入①，得 $y=6$

$\therefore\ 3x+6y=3\times(-3)+6\times 6=-9+36=27$

$\therefore\ 3x+6y$ 的立方根，即为 $\sqrt[3]{27}=3$

【例4】 (1) 求 625 的 4 次方根；(2) 求 -128 的 7 次方根；(3) 求 $\dfrac{1}{64}$ 的 6 次算术根；(4) 求 0.00001 的 5 次方根.

思维技巧 应利用 n 次方根和 n 次算术根的定义求解，第 (1) 题，$\because 625=5\times125=5^4=(\pm5)^4$，$\therefore 625$ 的 4 次方根是 ±5 ;第 (2) 小题，$\because -128=-2^7=(-2)^7$，$\therefore -128$ 的 7 次方根是 -2 如此类推.

解 (1) $\because\ (\pm5)^4=625$，

$\therefore\ 625$ 的 4 次方根是 ±5

(2) ∵　$(-2)^7=-128$，

∴　-128 的 7 次方根是 -2

(3) ∵　$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$，

∴　$\frac{1}{64}$的 6 次算术根为$\frac{1}{2}$

(4) ∵　$0.1^5=0.00001$，

∴　0.00001 的 5 次方根是 0.1

激活思维　1. 这类问题的求解，关键是认真审题，注意 n 次方根与 n 次算术根的区别.

2. 与本题类似的其他变形有：

求下列各式的值：

(1) $\pm\sqrt[4]{256}$；　(2) $\sqrt[7]{0}$；　(3) $\sqrt[9]{-1}$；　(4) $\sqrt[4]{(-2)^4}$.

解　(1) ∵　$(\pm 4)^4=256$，∴　$\pm\sqrt[4]{256}=\pm 4$

(2) ∵　$0^7=0$，　∴$\sqrt[7]{0}=0$

(3) ∵　$(-1)^9=-1$，　∴$\sqrt[9]{-1}=-1$

(4) ∵　$\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{16}$，

又∵　$2^4=16$，　∴　$\sqrt[4]{(-2)^4}=2$

【例 5】　已知：$a=\frac{\sqrt[4]{b-2}+\sqrt[6]{2-b}}{b+2}+\frac{1}{2}b^3$ 且$\sqrt[4]{x-y+2}+|x+y-6|=0$，求$\sqrt[3]{abxy}$的值.

思维技巧　因为$\sqrt[4]{b-2}$，$\sqrt[6]{2-b}$分别为 $(b-2)$ 和 $(2-b)$ 的偶次方根，所以这就是解题的关键，即隐含着一个很重要的结论：$\sqrt[4]{b-2}$和$\sqrt[6]{2-b}$都是非负数，则这两个非负数对应的根号内的值也非负，即 $b-2\geqslant 0$ 且 $2-b\geqslant 0$，则$b=2$，由此，a 亦可求；另一方面，后式中的 4 次方根和绝对值均为非负数，要使和等于 0 的条件是这两个非负数均为零.

解　对于前式，可得

$$\begin{cases}b-2\geqslant 0,\\2-b\geqslant 0,\end{cases}\quad 即\ \begin{cases}b\geqslant 2,\\b\leqslant 2,\end{cases}$$

∴　$b=2$，代入前式，可得 $a=4$.

新教材同步学案

对于后式,有

$\begin{cases}\sqrt[4]{x-y+2}\geqslant 0,\\ |x+y-6|\geqslant 0,\end{cases}$ 且$\sqrt[4]{x-y+z}+|x+y-6|=0.$

$\therefore\quad x-y+2=0$ 且 $x+y-6=0$,

即为方程组 $\begin{cases}x-y+2=0,\\ x+y-6=0,\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$

$\therefore\quad abxy=4\times2\times2\times4=4^3$,

$\therefore\quad \sqrt[3]{abxy}=\sqrt[3]{4^3}=4$

激活思维 1. 如果在一个代数式中,出现两个被开方数互为相反数的算术根,即可得出这两个算术根均为零,或者对由若干个偶次根式或由绝对值参与的和为零的代数式的运算,则可利用它们的非负性推出它们同时为零,利用这一特征来求字母的值,充分挖掘了题设所隐含的条件.

2. 与本题类似的其他变形有:

(1) 若$\sqrt[3]{5x+32}=-2$,求 $x+17$ 的平方根.

解 $\because\quad \sqrt[3]{5x+32}=-2$, $\quad\therefore\quad 5x+32=(-2)^3$,即

$5x+32=-8$,$5x=-40$, $\quad\therefore\quad x=-8.$

$\therefore\quad x+17=9$,

$\therefore\quad x+17$ 的平方根为$\pm\sqrt{x+17}=\pm\sqrt{9}=\pm3.$

(2) 已知$\sqrt[3]{-x}=a$,$y^2=b$ $(y<0)$,且$\sqrt{(4a-b)^2}=8$ $\quad(b>4a)$,$\sqrt[3]{(a+b)^3}=18$,求 xy 的值.

解 $\because\quad \sqrt{(4a-b)^2}=8$, 即$|4a-b|=8$,

又 $\because\quad b>4a$, $\quad\therefore\quad 4a-b<0$,

$\therefore\quad -4a+b=8.$ ①

又 $\because\quad \sqrt[3]{(a+b)^3}=18$,即 $a+b=18.$ ②

由①、②可得方程组:

$\begin{cases}4a-b=-8,\\ a+b=18,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=16.\end{cases}$

把 $a=2$ 代入$\sqrt[3]{-x}=a$,得

$\sqrt[3]{-x}=2$, $\quad\therefore\quad x=-8.$

把 $b=16$ 代入 $y^2=b$，得

$y^2=16$，　　$\therefore\ y=\pm4$，

又　$\because\ y<0$，　　$\therefore\ y=-4$.

$\therefore\ xy=(-8)\cdot(-4)=32$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 下列说法中错误的是（　　）

A. $\sqrt[3]{a}$ 中的 a 可以是正数、负数、零

B. $\sqrt{a}$ 中的 a 不可能是负数

C. 数 a 的平方根有两个，它们互为相反数

D. 数 a 的立方根有一个

2. 下列语句中正确的是（　　）

A. $\sqrt{64}$ 的立方根是 2　　B. -3 是 27 负的立方根

C. $\frac{125}{216}$ 的立方根是 $\pm\frac{5}{6}$　　D. $(-1)^2$ 的立方根是 -1

3. 要使 $\sqrt[3]{(4-a)^3}=4-a$ 成立，那么 a 的取值范围是（　　）

A. $a\leqslant4$　　B. $-a\leqslant4$　　C. $a\geqslant4$　　D. 一切实数

4. 下列计算或命题中，正确的个数有（　　）

① ±3 都是 27 的立方根；② $\sqrt[3]{a^3}=a$；③ $\sqrt{64}$ 的立方根是 2；④ $\sqrt[3]{(\pm8)^2}=\pm4$.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

5. $\sqrt{16}$ 的平方根和立方根分别是（　　）

A. ±4，$\sqrt[3]{16}$　　B. ±2，$\pm\sqrt[3]{4}$

C. 2，$\sqrt[3]{4}$　　D. ±2，$\sqrt[3]{4}$

6. 下列说法中正确的是（　　）

A. 零不存在算术平方根

B. 一个数的算术平方根一定是正数

C. 一个数的立方根一定比这个数小

D. 一个非零数的立方根,仍然是一个非零数

7. 如果一个数的平方根是这个数本身,则这个数是( )

A. 1 B. -1 C. 0 D. $1,-1,0$

8. 如果一个数的立方根是这个数本身,则这个数是( )

A. 1 B. -1 C. 0 D. $1,-1,0$

9. 下列式子中,不正确的是( )

A. $\sqrt[3]{27\frac{8}{125}}=3\frac{2}{5}$ B. $\pm\sqrt[3]{216}=\pm 6$

C. $\sqrt[3]{0.064}=0.4$ D. $\sqrt[3]{\left(1-\frac{4}{5}\right)^3}=\frac{1}{5}$

10. 若一个数的立方根等于这个数的立方,则不满足这个条件的数必为( )

A. 1 B. 0

C. -1 D. 不为 $1,0,-1$ 的其他数

11. 计算下列各式所得结果中( )

① $\sqrt{0.25}$;② $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;③ $\sqrt[3]{27^2}$;④ $\sqrt{10000}$;⑤ $\frac{1}{\sqrt{0.0001}}$;⑥ $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

A. 大于 1 的有两个 B. 小于 1 的有两个

C. 结果相同的有两个 D. 上述结论都不对

二、填空题

12. $(a-b)^3$ 的立方根是__________.

13. $\sqrt[3]{8}$的平方根是__________.

14. $-\sqrt{64}$的立方根是______,$\sqrt[3]{729}$的平方根是______,$(-13)^3$ 的立方根是______.

15. $\sqrt[3]{(-8)^2}=$______,$\sqrt[3]{10^{-3}}=$______,$\sqrt[3]{\frac{37}{64}-1}=$______.

16. 数 a 的平方根最多有______个,最少有______个,立方根最多有______个,最少有______个.

17. 一个正数的算术平方根是 8,则这个数的立方根是______.

18. 若 $x^2=(-5)^2$,则 $(x-1)^3=$______.

19. 若$\sqrt{-x^3}$有意义,则$\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{1-x}=$______.

20. 若 $a<0$,则$\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}=$______.

21. 若 a,b 互为相反数,c,d 互为负倒数,则$\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}-\sqrt[5]{cd}=$______.

三、求下列各式中的 x

22. $8(x-1)^3=-\dfrac{125}{64}$；　　23. $\sqrt{81}+25x^3=-116$.

四、计算题

24. $\sqrt[3]{0.125}-\sqrt{3\dfrac{1}{16}}+\left|\sqrt[3]{\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2}\right|$；

25. $\sqrt{4^{-1}}+\sqrt{0.5^2}-\sqrt[3]{3.375}$；

26. $\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{0.008}-\sqrt[3]{0.000343}$；

27. $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}+\sqrt{\dfrac{1}{64}}-\sqrt[3]{1-\dfrac{189}{64}}-\sqrt{1-\dfrac{31}{256}}$.

五、x 取什么值时,下列各式有意义

28. 当 a 为什么数时,$\sqrt{a+4}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$有意义?

29. $\sqrt[3]{\dfrac{5}{|x|-2}}$.

六、解答题

30. 已知$\sqrt[3]{x}=4$,且$(y-2z+1)^2+\sqrt[4]{z-3}=0$,求$\sqrt[3]{x+y^3+z^3}$的值.

探究能力测试

31. 很久很久以前,在古希腊的某个地方发生大旱,地里的庄稼都干死了,人们找不到水喝,于是大家一起到神庙里去向神祈求.神说,我之所以不给你们水喝,是因为你们给我做的这个正方体的祭坛太小,如果你们做一个比它大一倍的祭坛放在我面前,我就会给你们降水.大家觉得好办,于是很快做了一个新祭坛送到神那里,新祭坛的边长是原来的 2 倍,可是,神愈发恼怒,他说,你们竟敢愚弄我!这个祭坛的体积根本不是原来的 2 倍.我要进一步惩罚你们!想一想,新祭坛的体积是原来的体积的多少倍?要做一个体积是原来祭坛的 2 倍的新祭坛,它的边长应是原来的多少倍?

32. 计算:

⑴ $\sqrt{10^2}$，$\sqrt{10^4}$，$\sqrt{10^6}$；

⑵ $\sqrt[3]{10^6}$，$\sqrt[3]{10^9}$，$\sqrt[3]{10^{12}}$；

你能从中找出计算的规律吗？如果将根号内的 10 换成 8 或者 0.1，是否仍然保持这种计算的规律？

33．一个正方体木块的体积是 125cm^3，现将它锯成 8 块同样大小的正方体小木块，求每个小正方体木块的表面积.

10.4　用计算器求立方根

学点探究分析

重点　用计算器求数的立方根.

难点　第二功能键 $\boxed{\text{2ndF}}$ 的运用.

探究点　联系实际问题，用计算器求立方根以及用计算器的其他运算.

学习方法技巧

1．掌握求立方根的程序

⑴ 输入被开方数；⑵ 按第二功能键 $\boxed{\text{2ndF}}$；⑶ 再按方根运算键 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$；⑷ 输入根指数 $\boxed{3}$；⑸ 按 $\boxed{=}$.

这里第 ⑵ 步不能遗漏，⑵、⑶ 两步顺序不能颠倒，当然在求 n 次方根时，还要注意，负数没有偶次方根，却有奇次方根，在求负数的奇次根时，“－”可以直接输入计算器，也可以将负号留到最后，在得数上直接填上负号.

2．掌握求数的 n 次方根的程序

⑴ 输入被开方数；⑵ 按第二功能键 $\boxed{\text{2ndF}}$；⑶ 按方根运算键 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$；⑷ 输入根指数 $\boxed{n}$；⑸ 按 $\boxed{=}$ 键.

一般地，用计算器求一个正数的 n 次方根，都可以采用上面的计算程序，求一个负数的奇次方根，可以先求它的相反数的同次方根，然后在所得结果前面直接加上负号.

能力升级捷径

【例 1】 用计算器求$\sqrt[3]{64}$.

思维技巧　按操作程序依次输入和按键,即可解出.

解

按键	显示
$\boxed{6}\boxed{4}$	64
$\boxed{\text{2ndF}}$	2F
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	64
$\boxed{3}$	3
$\boxed{=}$	4

$\therefore\quad \sqrt[3]{64}=4.$

激活思维　1. **用计算器求立方根,不需要对四位以上的数四舍五入,使之变为三位数,可以直接输入所求的数.**

2. **求大于** 100 **或小于** 0.1 **的数的立方根,不需移动小数点,亦可直接输入.**

3. **与本题类似的其他变形有:**

(1) **用计算器求**$\sqrt[3]{38504}$**的值.**

解

按键	显示
$\boxed{3}\boxed{8}\boxed{5}\boxed{0}\boxed{4}$	38504
$\boxed{\text{2ndF}}$	2F
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	38504
$\boxed{3}$	3
$\boxed{=}$	33.767736

$\therefore\quad \sqrt[3]{38504}=33.767736$

(2) **用计算器求**$\sqrt[3]{-19.8}$.

解

按键	显示
$\boxed{1}\boxed{9}\boxed{.}\boxed{8}\boxed{+/-}$	-19.8
$\boxed{2ndF}$	-19.8
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	-19.8
$\boxed{3}$	3
$\boxed{=}$	-2.7053392

$\therefore \sqrt[3]{-19.8} \approx -2.705$

【例 2】 用计算器求下列各式的值：

(1) $4\sqrt{8}$；　　　　(2) $\sqrt[5]{-273}$.

思维技巧　用计算器求数的立方根和 n 次方根的程序与求平方根的程序一致.求一个负数奇次方根可以先求它的相反数的同次方根,然后在所得结果前面加上负号,一般计算器$\boxed{\sqrt[3]{\ }}$键均在底板上,因此要先按$\boxed{2ndF}$键,再按$\boxed{\sqrt[x]{y}}$,最后按出根指数.

解　(1)

按键	显示
$\boxed{8}$	8
$\boxed{2ndF}$	8
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	8
$\boxed{4}$	4
$\boxed{=}$	1.6817928

$\therefore\ \ 4\sqrt{8} \approx 1.682$

⑵

按键	显示
$\boxed{2}\boxed{7}\boxed{3}\boxed{+/-}$	-273
$\boxed{\text{2ndF}}$	-273
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	-273
$\boxed{5}$	5
$\boxed{=}$	-3.0706656

$\therefore \sqrt[3]{-273}\approx -3.071$

激活思维　1. **输入负数时，符号转换键要放在数据后输入**.

2. **与本题类似的其他变形有：**

用计算器求值：

⑴ $\sqrt[10]{10}$；　⑵ $\sqrt[5]{-15736}$.

解

按键	显示
$\boxed{1}\boxed{0}$	10
$\boxed{\text{2ndF}}$	10
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	10
$\boxed{1}\boxed{0}$	10
$\boxed{=}$	1.2589254

$\therefore \sqrt[10]{10}\approx 1.259$

按键	显示
$\boxed{1}\boxed{5}\boxed{7}\boxed{3}\boxed{6}$	15736
$\boxed{+/-}$	-15736
$\boxed{\text{2ndF}}$	-15736
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	-15736
$\boxed{5}$	5
$\boxed{=}$	-6.908

$\therefore \sqrt[5]{-15736}\approx -6.908$

【例 3】　用计算器计算 $\sqrt[3]{\dfrac{334}{17\times 3}}$.

思维技巧　**这是一道计算器的混合运算题，对于混合运算，按键的顺序与式子书写的顺序完全相同，并且在输入负数时，符号转换键** $\boxed{+/-}$ **要放在**

数据之后输入.

解

按键	显示
$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$	334.
$\boxed{\div}$	334
$\boxed{1}\boxed{7}$	17
$\boxed{\div}$	19.647059
$\boxed{3}$	3

按键	显示
$\boxed{=}$	6.5490196
$\boxed{\text{2ndF}}$	6.5490196
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	6.5490196
$\boxed{3}$	3
$\boxed{=}$	1.87094

$\therefore\ \sqrt[3]{\dfrac{334}{17\times 3}}\approx 1.871$

激活思维　1. 分母中的“乘号”,应视为“除”,即$\dfrac{334}{17\times 3}=344\div 17\div 3$.

2. 第五步按$\boxed{3}$键后应按$\boxed{=}$键,得出被开方数 6.5490196,再按第二功能键$\boxed{\text{2ndF}}$,否则就会出错,例如按$\boxed{3}$键后紧接着按$\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ $\boxed{3}$,计算器会认为是求 3 的立方根.

3. 计算器是一种非常先进的计算工具,应该熟练掌握它的使用方法.

4. 与本题类似的其他变形有:

用计算器求$\sqrt[7]{123}+\sqrt[5]{-504}$.

解　$\because\ \sqrt[7]{123}+\sqrt[5]{-504}=\sqrt[7]{123}-\sqrt[5]{504}$,

$\therefore$　操作步骤如下:

按键	显示
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$	123
$\boxed{\text{2ndF}}$	123
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	123
$\boxed{7}$	7
$\boxed{-}$	1.988647795

按键	显示
$\boxed{5}\boxed{0}\boxed{4}$	504
$\boxed{\text{2ndF}}$	504
$\boxed{\sqrt[x]{y}}$	504
$\boxed{5}$	5
$\boxed{=}$	−1.482603919

$\therefore\ \sqrt[7]{123}+\sqrt[5]{-504}\approx -1.483$

综合能力测试

基础能力测试

一、填空题(用计算器求下列各式的值,保留四个有效数字)

1. $\sqrt[3]{387.5}=$____________.

2. $\sqrt[3]{-0.3945}=$____________.

3. $-\sqrt[4]{78436}=$____________.

4. $\sqrt[5]{392\frac{3}{7}}=$____________.

5. 已知:$\sqrt[3]{0.706}=0.8904$,$\sqrt[3]{x+3}=8.904$,则 $x=$____________.

6. 已知:$\sqrt[3]{52600}=37.47$,$\sqrt[3]{0.000005726}=0.01789$,$\sqrt[3]{x}=17.89$,$\sqrt[3]{y}=-0.03747$,则 $x=$____________,$y=$____________.

二、选择题

7. 下列各式正确的是(　　)

A. $\sqrt[3]{-376367}=72.2$　　B. $\sqrt[3]{-376367}=7.22$

C. $\sqrt[3]{-376367}=-72.2$　　D. $\sqrt[3]{-376367}=-7.22$

8. 如果 n 是 m 的立方根,那么下列结论正确的是(　　)

A. $-n$ 也是 m 的立方根　　B. $-n$ 也是 $-m$ 的立方根

C. n 也是 $-m$ 的立方根　　D. 以上都不对

9. 已知 $24.5^3=14706$,$\sqrt[3]{x}=2.45$,则 x 的值是(　　)

A. 0.014706　　B. 147.06　　C. 14.706　　D. 0.14706

10. 用计算器求 $\sqrt[5]{384+27}$ 的值,下列操作程序正确的是(　　)

A. $\boxed{3}\ \boxed{8}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{y}}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

B. $\boxed{3}\ \boxed{8}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{y}}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

C. $\boxed{3}\ \boxed{8}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{\sqrt[x]{y}}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

D. $\boxed{3}\ \boxed{8}\ \boxed{4}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{y}}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

11. 用计算器求 $\sqrt[4]{884\div 21}$ 的值,下列操作程序正确的是(　　)

A. $\boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{y}}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

B. $\boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{\sqrt[x]{y}}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

C. $\boxed{8}$ $\boxed{8}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

D. $\boxed{8}$ $\boxed{8}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

三、用计算器求下列各式的值,保留四个有效数字

12. $\sqrt[3]{0.002005}$;　　　13. $\sqrt[3]{4013\frac{2}{5}}$.

四、用计算器求下列各式的值,结果保留四个有效数字

14. $\sqrt[3]{384}-\sqrt[3]{0.235}$;

15. $\sqrt[4]{396}-25\times\sqrt[3]{378}$;

16. $\dfrac{\sqrt[3]{35}-25\times\sqrt[4]{86}}{\sqrt[5]{3}}$.

探究能力测试

五、17. **用计算器求下列各式的值.**

$\sqrt{2}$,$\sqrt[3]{2}$,$\sqrt[4]{2}$,$\sqrt[5]{2}$,$\sqrt[6]{2}$.**然后说出所得结果的大小与根指数的关系.**

18. **用计算器求下列各式的值.**

$\sqrt{\frac{1}{2}}$,$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$,$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$,$\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$,$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$.

说出结果的大小与根指数的关系.

19. **将**$\sqrt{2}$,$\sqrt[3]{3}$,$\sqrt[4]{4}$,$\sqrt[5]{5}$,$\sqrt[6]{6}$**用不等号或等号连接起来.**

10.5 实　数

学点探究分析

重点　实数的概念和分类.

难点　对无理数的意义的理解.

探究点　由于实数的概念较抽象,因此无理数和实数的意义既是这一节的重点,又是难点,把握有理数与无理数的差异,运用数形结合的方法,理解无理数的几何意义.应着重于对无理数的定义、两个实数的大小比较、实数的绝对值以及近似计算等的考查.

学习方法技巧

1. 加强对概念的理解

(1) 无理数

① 无理数定义:无限不循环小数叫做无理数.

② 我们目前所接触的无理数有如下三种形式:

第一种是开方开不尽的方根,如$\sqrt{2}$,$-\sqrt{3}$,$\sqrt[3]{9}$,$-\sqrt[5]{-6}$,…,但用根号形式表示的数却并不都是无理数,如$\sqrt{16}$,$-\sqrt[3]{27}$,….

第二种是圆周率 π,它是圆周长与该圆直径的比值,是无限不循环小数.

第三种是类似 0.1010010001…(每两个 1 之间依次多一个零),这样的小数.

当然,还有其他形式的无理数,在今后的学习中会遇到.

(2) 实数的分类

实数的定义:有理数和无理数统称实数.

实数的分类.

① 按定义分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{cases}\Bigg\}\text{有限小数或无限循环小数}\\[2ex]\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\Big\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

② 按符号分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\\text{零}\\\text{负实数}\end{cases}$$

(3) 实数的性质

① 有理数扩大到实数以后,在有理数范围内定义的一些概念(如倒数、相反数、绝对值)在实数范围内仍然适用.

② 在进行实数运算时,有理数的运算律和运算性质同样适用,在实数范围内,非负数可以进行开平方运算,负数只能开立方,不能开平方.

③ 任何两个实数都可以比较大小.

(ⅰ) 两实数的大小关系:正数大于 0,0 大于负数;两个正实数,绝对值

大的实数大;两个负实数,绝对值大的实数反而小.

(ⅱ) 不查表比较一个有理数、一个无理数的大小,可采用算术平方根比较.

④ 实数和数轴上的点一一对应,即每一个实数都可以用数轴上的一个点表示,反过来,数轴上的每一个点都可以用一个实数表示.如:我们可以用几何作图方法,在数轴上表示某些无理数如 $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$等.

(4) 对无理数的概念的理解,关键应注意以下几点:

① 无理数的个数是无限的;

② 无理数不都是用根号的形式表示的数;

③ "无限不循环小数"与"无限循环小数"的区别在于,前者不能化成分数,而后者都可化为分数(有理数),即任一有理数总可以表示成$\frac{m}{n}$的形式,其中 m,n 都是整数,且 $n\neq0$.而无理数不具备这一性质.

2. 实数的运算

在实数范围内可以进行加、减、乘、除(0 不能作除数)、乘方运算;正数和零可以进行开任意次方运算,负数只能开奇次方.

关于有理数的运算律和运算性质在实数范围内仍然成立,但要注意正数和零可以进行开平方、开立方运算;负数能开立方运算,却不能开平方运算.

凡是涉及无理数的近似计算,可根据问题的要求取近似值,将无理数用与之接近的有理数代替后进行计算.

能力升级捷径

【例 1】 判断下列说法是否正确,如果不正确,请说明理由.

(1) 无理数都是实数;

(2) 实数都是无理数;

(3) 无限小数都是无理数;

(4) 带根号的数都是无理数.

思维技巧 解题关键是正确理解无理数和实数的概念,由实数的定义"有理数和无理数统称实数"可知,无理数是实数的一个组成部分,故(1)、(2)中(2)是错误的,(1)是正确的.无理数的定义则是"无限不循环小数",则

是无限小数的一部分,故(3)错,因为无限小数包括无限循环小数和无限不循环小数.

解　(1)"无理数都是实数"是正确的;

(2)"实数都是无理数"是错误的,例如 1、0、-1、$\frac{2}{3}$、0.45…都是实数,但不是无理数;

(3)"无限小数都是无理数"是错误的,例如 $0.\dot{7}$,$0.\dot{3}\dot{2}\dot{1}$…是无限循环小数,但不是无理数;

(4)"带根号的数都是无理数"是错误的,例如 $\sqrt{0}$,$-\sqrt{1}$,$\sqrt{4}$,…都是带根号的数,但它们能开方开得尽,从而等于有理数,故不是无理数.

激活思维　1. 应注意无限小数的区分:无限小数包括无限循环小数和无限不循环小数,无限循环小数能化成分数,它是有理数;无限不循环小数不能化成分数,无限不循环小数叫做无理数.

2. 不要试图确定无理数的其他定义或标准,只有紧扣无限不循环小数是无理数这个定义,才能避免错误.无理数是无限不循环小数.一般来说,凡平方开不尽的数都是无理数,但反过来并不成立,存在着形形色色的无限不循环小数,如 π,0.202002000,…(两个 2 之间依次有一个 0,二个 0,三个 0,…)它们都是无理数,但不是开方开不尽的数,

3. 与本题类似的其他变形有:

已知四个命题

①有理数与无理数之和是无理数;②有理数与无理数之积是无理数;③无理数与无理数之和是无理数;④无理数与无理数之积是无理数.

其中正确命题的个数为(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

解　只有命题①正确,故选 A.

【例 2】　把下列各数填在相应的大括号内:

0,$\sqrt{8}$,$-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$,$\sqrt[4]{16}$,$-\sqrt{27}$,-2,0.1^{-2},$\sqrt{3}$,$|1-\sqrt{3}|$,-7^{-2},$\frac{22}{7}$,$1.212121\cdots$,$\frac{\pi}{4}$,$0.303003000\cdots$.

自然数集合{　　　　　　　　　　…};

有理数集合{ …}；

正数集合{ …}；

整数集合{ …}；

无理数集合{ …}.

思维技巧　任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数，反之也成立；而无理数是无限不循环小数.因此，判断一个数是有理数还是无理数，可以看该数是有限小数还是无限小数，是循环小数还是不循环小数即可.

解　$\because$　$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=-\frac{3}{2}$，$\sqrt[4]{16}=2$，$-\sqrt{27}=-3\sqrt{3}$，$|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$，$-7^{-2}=-\frac{1}{49}$，$0.1^{-2}=\frac{1}{0.1^2}=100$.

$\therefore$　自然数集合{0，$\sqrt[4]{16}$，0.1^{-2}，…}

有理数集合{0，$-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$，$\sqrt[4]{16}$，-2，0.1^{-2}，-7^{-2}，$\frac{22}{7}$，1.212121…}；

正数集合{$\sqrt{8}$，$\sqrt[4]{16}$，0.1^{-2}，$\sqrt{3}$，$|1-\sqrt{3}|$，$\frac{22}{7}$ 1.212121…，$\frac{\pi}{4}$，0.303003000，…}；

整数集合{0，$\sqrt[4]{16}$，-2，0.1^{-2}，…}；

无理数集合{$\sqrt{8}$，$-\sqrt{27}$，$\sqrt{3}$，$|1-\sqrt{3}|$，$\frac{\pi}{4}$，0.303003000…，…}.

激活思维　1.新教材规定 0 也是自然数.

2.对实数进行分类时，应先对某些数进行计算或化简，然后根据它的最后结果进行分类，不能仅看到用根号表示的数，就认为一定是无理数.例如，$\sqrt[4]{16}=2$，所以它是自然数，也是有理数，因为 1.212121…是无限循环小数，所以它可以化成分数；由于 π 是无理数，所以$\frac{\pi}{4}$是无理数，千万不要把$\frac{\pi}{4}$当作分数.

3.与本题类似的其他变形有：

(1)下列语句正确的是(　　)

A.不循环小数是无理数　　B.无限小数是无理数

C.没有根号的数是有理数　　D.无理数和有理数都是实数

解　A 错在只说是不循环的，没有说是无限的，如 3.1415926 是有理数；B 错在只说是无限的，没有说不循环的.如 $0.\dot{1}\dot{8}$是有理数；C 错在判定依据

不正确，如 π 没有根号但是是有理数．应选 D.

(2) 在下列实数：$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{1}{3}$，$|-3|$，$\sqrt{4}$，$0.808008\cdots$，$-\sqrt{14}$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0$ 中，有理数与无理数的个数之积等于________.

解　π 是无理数，故 $-\frac{\pi}{2}$ 为无理数；$\frac{1}{3}$ 是分数，是有理数；$|-3|=3$，应是有理数；$\sqrt{4}$ 虽然带根号，但开方结果为 2，是有理数，$0.808008\cdots$ 是无限小数，且不循环，是无理数；$-\sqrt{14}$ 带根号，且开不尽方，是无理数；$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0$ 等于 1，是有理数．所以有理数有 4 个，无理数有 3 个．$4\times3=12$.

【例 3】　比较下列各数的大小：

(1) $-\sqrt{3}$ 与 $-\sqrt{5}$；

(2) $\sqrt[3]{-35}$ 与 $\sqrt[3]{-\frac{106}{3}}$；

(3) 当 $m>n$ 时，$\frac{1}{m}$ 与 $\frac{1}{n}$ 的大小；

(4) $(a^2+1)^2$ 与 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

思维技巧　比较两个数的大小，若两个数为负数，绝对值大的反而小，例如 (1)、(2) 中的两数大小比较，常用作差比较法，即求这两个数（或两个代数式）的差，从它们差的正负去判断，如果差是正数，则前者大；反之，后者大.

解　(1) $\because$ $|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，$|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}$，而 $\sqrt{3}<\sqrt{5}$，对于两个负数，绝对值大的，本身反而小.

$\therefore$　$-\sqrt{3}>-\sqrt{5}$.

(2) $\because$　$\sqrt[3]{-35}=-\sqrt[3]{35}$，$\sqrt[3]{-\frac{106}{3}}=-\sqrt[3]{\frac{106}{3}}$，又 $\because$　$35=\frac{105}{3}<\frac{106}{3}$，

$\therefore$　$\sqrt[3]{35}<\sqrt[3]{\frac{106}{3}}$，

$\therefore$　$\sqrt[3]{-35}>\sqrt[3]{-\frac{106}{3}}$.

(3) 若 $m>0$，$n<0$，则 $\frac{1}{m}>0$，$\frac{1}{n}<0$，$\therefore$　$\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ 若 $m>0$ 且 $n>0$，(或 $m<0$ 且 $n<0$) 时，此时 $mn>0$，

$\because$　$m>n$，$\therefore$　$n-m<0$，

又 $\because$　$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}<0$，$\therefore$　$\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$；

(4) $\because\ (a^2+1)^2-(a^2+a+1)(a^2-a+1)=(a^2+1)^2-[(a^2+1)^2-a^2]=a^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$(a^2+1)^2=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$；

当 $a\neq 0$ 时，$(a^2+1)^2>(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

激活思维 1. 针对两个负数，应比较它们的绝对值；两个正数，算术根大的本身也大；对于字母参与的大小比较，除了用求差比较法外，还要进行分类讨论字母的不同取值范围对大小的影响.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 比较下列各组数的大小：

① $3\sqrt{3}$与$|-4\sqrt{2}|$； ② $3\sqrt{5}$与$2\sqrt{11}$；

③ $\sqrt{2}+\sqrt{7}$与$\sqrt{3}+\sqrt{6}$； ④ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$与$\sqrt{5}+1$.

解 ① $\because\ 3\sqrt{3}\approx 3\times 1.732=5.196$，$|-4\sqrt{2}|\approx 4\times 1.414=5.656$，

而 $5.656>5.196$，$\therefore\ 3\sqrt{3}<|-4\sqrt{2}|$.

② 解法一 分别平方得

$(3\sqrt{5})^2=45$，$(2\sqrt{11})^2=44$，$45>44$，

又 $\because\ 3\sqrt{5}>0$，$2\sqrt{11}>0$，$\therefore\ 3\sqrt{5}>2\sqrt{11}$.

解法二 $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times 5}=\sqrt{45}$，$2\sqrt{11}=\sqrt{2^2\times 11}=\sqrt{44}$，

$\because\ \sqrt{45}>\sqrt{44}$，$\therefore\ 3\sqrt{5}>2\sqrt{11}$.

③ 分别平方后，得

$(\sqrt{2}+\sqrt{7})=9+2\sqrt{4}$，$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=9+2\sqrt{18}$，

$\because$ 有理部分相等，$2\sqrt{18}>2\sqrt{14}$，

$\therefore\ (\sqrt{3}+\sqrt{6})^2>(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2$，即$\sqrt{3}+\sqrt{6}>\sqrt{2}+\sqrt{7}$；

④ 用平方法

$\because\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}$，$(\sqrt{5}+1)^2=6+2\sqrt{5}=5+(1+2\sqrt{5})$，

再比较 $2\sqrt{6}$与$1+2\sqrt{5}$的大小，

再平方得 $(2\sqrt{6})^2=24$，$(1+2\sqrt{5})^2=21+4\sqrt{5}$，

对于 3 与 $4\sqrt{5}$，有 $3=\sqrt{9}$，$4\sqrt{5}=\sqrt{80}$，

$\therefore\ 3<4\sqrt{5}$，$\therefore\ 2\sqrt{6}<1+2\sqrt{5}$，

$\therefore\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2<(\sqrt{5}+1)^2$，

∴　$\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{5}+1$.

(2) 写出所有适合下列条件的数：

① 大于 $-\sqrt{17}$ 且小于 $\sqrt{11}$ 的所有整数；

② 小于 $\sqrt{40}$ 的所有正整数.

解　① ∵　$-\sqrt{17}<-\sqrt{16}=-4$，$\sqrt{9}<\sqrt{11}$，

∴　大于 $-\sqrt{17}$ 且小于 $\sqrt{11}$ 的所有整数为：

$-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$.

② ∵　$\sqrt{36}<\sqrt{40}$，

∴　小于 $\sqrt{40}$ 的所有正整数为：

$1,2,3,4,5,6$.

【例 4】　已知 a，b 为数轴上的点（如图 10－1），求 $\dfrac{|a+b|}{a+b}$ 的值.

思维技巧　由图可知：$a>0$，$b<0$，且 $|b|>|a|$，所以 $a+b<0$，因此 $|a+b|=-(a+b)$.

解　由图可知：

$a>0$，$b<0$，且 $|b|>|a|$，

∴　$a+b<0$.

∴　$|a+b|=-(a+b)$.

∴　$\dfrac{|a+b|}{a+b}=\dfrac{-(a+b)}{a+b}=-1$.

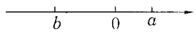


图 10－1

激活思维　1. 在实数运算过程中，脱去绝对值符号时必须根据字母的取值范围来确定所得结果的符号，方法是利用数形结合，根据数轴上对应点的位置，先判断各字母的取值范围，再由绝对值的意义进行化简.

2. 与本题类似的其他变形有：

已知实数 a，b，c 在数轴上的对应点如图 10－2所示，试化简：

$|a-b|-|b+c|+|a+c|+\dfrac{|a-c|}{a-c}$.

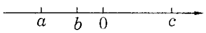


图 10－2

解　由图可知：$a<b<0$，$c>0$，$|b|<|a|<|c|$，

∴　$a-b<0$，$b+c>0$，$a+c>0$，$a-c<0$，

∴　$|a-b|-|b+c|+|a+c|+\dfrac{|a-c|}{a-c}$

$=(b-a)-(b+c)+a+c+\frac{-(a-c)}{a-c}$

$=b-a-b-c+a+c-1$

$=-1.$

【例 5】 已知 x,y 是实数，且 $|x|=y$，$|xy|+xy=0$，

求证：$|x|+|-2y|-|3y-2x|=2x.$

证明 $\because\ |xy|+xy=0$，$\therefore\ |xy|=-xy$

$\therefore\ xy\leqslant 0$

$\because\ |x|\geqslant 0$ 且 $|x|=y$

$\therefore\ y\geqslant 0$

$\therefore\ x\leqslant 0$

$\therefore\ |x|=-x=y$

$\therefore\ |x|+|-2y|-|3y-2x|=-x+2y-|3(-x)-2x|$

$=-x+2(-x)-|-5x|$

$=-3x+5x$

$=2x$

与本题类似的其他变形有：

化简下列各式：

(1) $|3-\pi|+\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$；

(2) $|3-\sqrt{(a+3)^2}|\ (a<-b).$

解 (1) $|3-\pi|+\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$

$=\pi-3+\sqrt{(\pi-4)^2}$

$=\pi-3+|\pi-4|$

$=\pi-3+4-\pi=1.$

(2) $\because\ a<-b$，$\therefore\ a+3<-3<0$，且 $a+b<0$，

$\therefore\ |3-\sqrt{(a+3)^2}|=|3+a+3|=|a+6|=-a-6.$

【例 6】 已知实数 x,y,z 满足 $|4x-4y+1|+\frac{1}{3}\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0$，求 $(y+z)x^2$ 的值.

思维技巧 本例条件中只有一个等式，要确定三个未知数 x,y,z 的

初二代数

值，就要联想到非负数，由于$|4x-4y+1|\geqslant 0$，$\sqrt{2y+z}\geqslant 0$，$\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$，由非负数的性质可知：三个非负数之和为零，则每个非负数同时为零，则可得到x,y,z的方程组，从而确定x,y,z的值.

解　由已知可得

$|4x-4y+1|+\frac{1}{3}\sqrt{2y+z}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=0$，

$\because$　$|4x-4y+1|\geqslant 0$，$\sqrt{2y+z}\geqslant 0$，$\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$，

$\therefore$　$4x-4y+1=0$，$2y+z=0$，$z-\frac{1}{2}=0$.

即x,y,z应同时满足方程组：

$\begin{cases}4x-4y+1=0,\\2y+z=0,\\z-\frac{1}{2}=0.\end{cases}$　解之得　$\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=-\frac{1}{4},\\z=\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore$　$(y+z)x^2=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$.

激活思维　1. 此题运用了非负数的一个极其重要的性质：有限个非负数之和为零，则每一个数都为零.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 设x,y是有理数，并且x,y满足等式$x^2+2y+y\sqrt{2}=17-4\sqrt{2}$，求$x+y$的值.

解　$\because$　$x^2+2y+y\cdot\sqrt{2}=17-4\sqrt{2}$，

$\therefore$　$(x^2+2y-17)+(y+4)\sqrt{2}=0$.

又$\because$　x,y都是有理数，

$\therefore$　$x^2+2y-17$和$y+4$都是有理数，

$\therefore$　$\begin{cases}x^2+2y-17=0,\\y+4=0\end{cases}$时，　$\therefore$　$\begin{cases}x=\pm 5,\\y=-4\end{cases}$

当$x=5$，$y=-4$时，$x+y=1$；

当$x=-5$，$y=-4$时，$x+y=-9$.

(2) 已知m是$\sqrt{13}$的整数部分，n是$\sqrt{13}$的小数部分，计算$(m-n)$

的值.

解　$\because \sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$，$\therefore$　$3<\sqrt{13}<4$.

$\therefore$　$\sqrt{13}$的整数部分是 $m=3$，

$\sqrt{13}$的小数部分 $n=\sqrt{13}-3$，

$\therefore$　$m-n=3-(\sqrt{13}-3)$

$=6-\sqrt{13}$.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 在实数范围内，下列判断正确的是（　　）

A. 若 $|x|=|y|$，则 $x=y$　　B. 若 $x<y$，则 $x^2<y^2$

C. 若 $|x|=(\sqrt{y})^2$，则 $x=y$　　D. 若 $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}$，则 $x=y$

2. 下列各数中，最小的正数是（　　）

A. $10-3\sqrt{11}$　　B. $3\sqrt{11}-10$

C. $51-10\sqrt{26}$　　D. $18-5\sqrt{13}$

3. 个数最少的是（　　）

A. 倒数等于本身的数　　B. 相反数等于本身的数

C. 绝对值等于本身的数　　D. 平方等于本身的数

4. 要使 $\sqrt{-(3x^2-27)^2}$ 表示实数，则 x 的取值为（　　）

A. 0　　B. 3　　C. ± 3　　D. 不存在

5. 下列命题中，正确的一个是（　　）

A. 两个无理数之和为无理数

B. 两个无理数之积为无理数

C. 一个有理数与一个无理数之和为无理数

D. 一个有理数与一个无理数之积为无理数

6. a，b 是实数，下列命题中正确的是（　　）

A. 若 $a\neq b$，则 $a^2\neq b^2$　　B. 若 $a^2>b^2$，则 $a>b$

C. 若 $|a|>|b|$，则 $a>b$　　D. 若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$

7. 若实数 a 的算术平方根大于它本身，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant 0$　　B. $a<0$　　C. $a<1$　　D. $0<a<1$

8. 已知 n 为任意整数，则 $\sqrt{(n-3)(n-2)(n-1)n+1}$ 表示的数(　　)

A. 一定是整数　　B. 是有理数，但不一定为整数

C. 一定是无理数　　D. 可能是有理数，可能是无理数

二、填空题

9. $|-3\sqrt{2}|=$________；　$|\sqrt[3]{-1}|=$________.

$|\pi-3.14|=$________；　$|\sqrt{2}-1.42|=$________.

10. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$的相反数是________；________的相反数是$\sqrt[3]{9}$.

11. 一个负数 a 的倒数等于它本身，则$\sqrt{a+2}=$________；若一个数 a 的相反数等于它本身，则$\sqrt{3a}-5\sqrt{2a^2+1}+2\sqrt[3]{a-8}=$________.

12. 当 $a>17$ 时，$|\sqrt{17}-a|=$______；$\sqrt{(\sqrt{17}-a)^2}=$________.

13. $\dfrac{|a|}{a}=-1$ 成立的条件是________.

14. 在$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{5}$，$0.01010101\cdots$，$(-\sqrt{5})^2$，$5.\dot{2}1\dot{7}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\sqrt{144}$，$2.10100100100001\cdots$，$\sqrt[3]{8}$中无理数有________个.

15. 若$|a+1|+\sqrt{b-3}=0$，则 $a=$________，$b=$________.

16. 当 a ________时，$\sqrt{a+1}$有意义；当 a ________时，$\sqrt{a-1}+\sqrt{1-a}$有意义.

17. 当 $m=-1$ 时，$\sqrt{m^2}+|m|+2m=$________.

18. 当 $x=$______且 $y=$______时，$\sqrt{x+3y+1}+|2x-y-5|=0$.

三、求下列各式中的实数 x

19. $|x|=\sqrt{7}-\sqrt{5}$；　　20. $|x-\sqrt{2}|=\sqrt{5}$.

四、比较下列各组数的大小

21. $-\sqrt{3}$和 1.7；　　22. π 和$\dfrac{22}{7}$.

五、计算下列各题

23. $\sqrt{484}-\left(\sqrt{12\dfrac{1}{4}}-\sqrt{20.25}\right)$；

24. $\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}}\times\left(-\sqrt[3]{-3+2\frac{56}{64}}\right)$；

25. $(-2)^3\times\sqrt{(-4)^2}+\sqrt[3]{(-4)^3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt[3]{27}$；

26. $|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|$；

27. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2\div\left\{\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\left[\frac{2}{15}\times\sqrt{\frac{25}{9}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{3}{20}\right]\right\}$.

六、解答题

28. 已知实数 a,b,c 在数轴上的位置如图 10－3 所示，且 $|a|=|b|$，化简 $|a|+|a+b|-\sqrt{(c-a)^2}-2\sqrt{c^2}$.

29. 已知 a 是 $\sqrt{8}$ 的整数部分，b 是 $\sqrt{8}$ 的小数部分，求 $(-a)^3+(b+2)^2$ 的值.

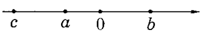


图 10－3

30. 已知 x,y 是实数，且满足 $y=\sqrt{2x-4}+\sqrt{4-2x}+3$，求 x^y.

探究能力测试

31. 比较下面两列算式结果的大小（在横线上选填“＞”“＜”“＝”）

4^2+3^2 ______ $2\times4\times3$

$(-2)^2+1^2$ ______ $2\times(-2)\times1$

$(\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ______ $2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$

2^2+2^2 ______ $2\times2\times2$

……

通过观察归纳，写出能反映这种规律的一般结论，并加以证明.

32. 一辆装满货物的卡车，高 2.5m，宽 1.6m，要开进具有图 10－4 所示形状厂门的工厂，问这辆卡车能否通过厂门？说明你的理由.（可作 CD 平行厂门，交 AB 于 E，假设 $OE=0.8$m.）

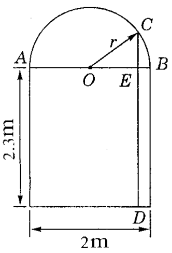


图 10－4

33. 阅读后回答问题：

数的概念是从实践中产生和发展起来的. 从解

方程看，方程 $x+5=3$ 在自然数集合中无解，在整数集合中就有一个解 $x=-2$；方程 $3x=5$ 在整数集合中无解，在有理数集合中则有一个解 $x=\frac{5}{3}$；方程 $x^2=2$ 在有理数集合中无解，在实数集合中则有两个解 $x=\pm\sqrt{2}$，但是数的范围扩充到实数集合以后，像 $x^2=-1$ 这样的方程还是无解，因为没有一个实数的平方等于 -1. 所以，为了解形如 $x^2=-1$这类方程的需要，人们引进一新数 i，叫做虚数单位，并规定：①它的平方等于 -1，即 $i^2=-1$；②实数与 i 进行四则运算时，原来的加、乘运算律仍然成立.

在这种情况下，i 可以与实数 b 相乘，再同实数 a 相加，从而得到形如"$a+b$i"的数，人们把这种数叫做复数，这样，数的范围由实数扩充到了复数.

在这种规定下，i 就是 -1 的一个平方根，因此方程 $x^2=-1$ 在复数集合中至少有一个解 $x=\mathrm{i}$.

复数 $a+b\mathrm{i}$（其中 a，b 都是实数），当 $b=0$ 时，$a+b\mathrm{i}=a$ 就是实数；当 $b\neq0$ 时，$a+b\mathrm{i}$ 叫做虚数；当 $a=0$，$b\neq0$ 时，$a+b\mathrm{i}=b\mathrm{i}$ 叫做纯虚数. a 与 b 分别叫做复数 $a+b\mathrm{i}$ 的实部与虚部. 例如，$3+4\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$5$，$-0.5\mathrm{i}$ 都是复数，它们的实部分别是 3，$-\frac{1}{2}$，5，0，虚部分别是 4，$-\sqrt{2}$，0，-0.5.

如果两个复数的实部相等，虚部互为相反数，则这两个复数互为共轭复数，就是说 $a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数，实数 a（即虚部为零的复数）的共轭复数仍是 a 本身. 例如，$3+4\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$，$5$，$-0.5\mathrm{i}$ 的共轭复数分别是 $3-4\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$，$5$，$0.5\mathrm{i}$.

(1) 填空：

① $-5+6\mathrm{i}$ 的实部是______，虚部是______.

② $-\sqrt{3}$的实部是______，虚部是______.

③ 已知 $(2x-1)+\mathrm{i}=5-(3-y)\mathrm{i}$（其中 x，y 为实数），则 $x=$______，$y=$______.

④ $-1+\mathrm{i}$ 的共轭复数是______，π 的共轭复数是______.

(2) 判断正误：

① 0，i 是纯虚数.（　）

② 实数的共轭复数一定是实数，虚数的共轭复数一定是虚数.（　）

小结与复习

学点探究分析

重点　平方根、算术平方根、立方根的意义及无理数的概念.

难点　算术平方根和实数的概念.

探究点　对平方根、算术平方根及无理数等概念的考查与实际运用;数与式的规律在实例中的归纳、推理与猜想;灵活运用运算律及公式、法则的综合考查都是热点.

学习方法技巧

1. 平方根与算术平方根

(1) 平方根:如果一个数的平方等于 a,这个数就叫做 a 的平方根.

(2) 算术平方根:正数 a 的正的平方根叫做 a 的算术平方根,零的算术平方根是零.

2. 立方根:如果一个数的立方等于 a,那么这个数就叫 a 的立方根.

3. 实数

(1) 无理数:无限不循环小数叫做无理数.

(2) 实数:有理数与无理数统称实数.

(3) 实数的分类:

① 按定义分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

② 按符号分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{正无理数}\end{cases}\\0\\\text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

(4) 实数的性质：

① 有理数的一些概念，如相反数、绝对值等，在实数范围内仍然不变.

② 有理数的运算和运算性质，在实数范围内仍然成立，今后各种运算都是在实数范围内进行. 但要注意的是：负数不能开偶次方.

③ 实数和数轴上的点是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示，反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数.

4. 用计算器求平方根或立方根的程序

(1) 输入被开方数；

(2) 按 $\boxed{\text{2ndF}}$；

(3) 按 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$；

(4) 输入根指数；

(5) 按 $\boxed{=}$.

5. 掌握思想方法

(1) 转化思想

在数学研究中，常常需要将复杂问题转化为简单问题，将生疏问题转化为熟悉问题. 事实上，许多运算一经从复杂到简单，从生疏到熟悉的转化，问题就迎刃而解. 例如，本章中用计算器求平方根和立方根以及 n 次方根，就可以解决人工很难解决的问题；求一个负数的立方根时，可以转化为求一个正数的立方根的相反数；在实数的近似计算中，遇到无理数时，可根据问题的要求取其近似值，转化为有理数进行计算.

(2) 分类思想

当被研究的问题包含多种可能情况，不能一概而论时，必须按可能的所有情况来分类讨论，从而得出各种情况下相应的结论，这种处理问题的思维方法称之为分类.

在学习平方根、算术平方根及立方根的性质时，都是将有理数按其数的性质进行分类讨论的，例如“一个正数有两个平方根，它们互相为相反数；0

有一个平方根,它是 0 本身;负数没有平方根”.

为了正确地进行分类,就必须掌握分类的原则和分类的标准:一是每一次分类要按照同一标准进行;二是分类的各子项各不相容;三是分类的各子项之和必须等于母项,实数的两种分类就是很好的证明.

能力升级捷径

【例 1】 已知某数的平方根是 $a+3$ 及 $2a-15$,求这个数.

思维技巧 由题意可知,该数有两个平方根,又因为正数有两个平方根,并且它的两个平方根互为相反数,所以这个数一定是非负数,当这个数是正数时,$a+3$ 与 $2a-15$ 是互为相反数,即 $a+3+2a-15=0$;当这个数是 0 时,应有 $a+3=0$ 且 $2a-15=0$,则 $a=-3$ 且 $a=\frac{15}{2}$,显然是矛盾的;也就是说,假设这个数是 0 是不符合题意的.

解 ∵ 负数没有平方根,

∴ 这个数一定是非负数.

若这个数为正数.则 $a+3+2a-15=0$,

解得 $a=4$,

∴ $a+3=7$,$2a-15=-7$.

∴ 这个数是 $(7)^2=(-7)^2=49$;

若这个数是 0,则 $a+3=0$,且 $2a-15=0$,

则 $\begin{cases} a=-3, \\ a=\frac{15}{2}. \end{cases}$ 矛盾.

综上所述,这个数是 49.

激活思维 1. 语句“7 是 49 的平方根”或“-7 是 49 的平方根”都是正确的,但反过来不成立.所以,在假设本题中的“这个数”是正数时,应有 $a+3$ 与 $2a-15$ 互为相反数,而不是 $a+3=2a-15$ 这种关系.

2. 与本题类似的其他变形有:

已知 $a+3$ 与 $2a-15$ 是 m 的平方根,求 m 的值.

解 当 $a+3=2a-15$ 时,得 $a=18$.

∴ $a+3=18+3=21=2a-15$,

∴ 这个数为 $21^2=441$;

初二代数

当 $a+3+2a-15=0$ 时，得　$a=4$，

$a+3=7$，$2a-15=-7$，

这个数为 $(\pm 7)^2$，即 49.

$\therefore$　这个数为 441 或 49.

【例 2】　已知 m，n 是实数，且 $\sqrt{2m+1}+|3n-2|=0$.

求实数 $m+n^2$ 的相反数的倒数的值.

思维技巧　要求 $m+n^2$ 的值，一般应求出 m，n 的值，求两个未知数的值，应有方程组. 一个等式形成方程组，只有形成非负数的和.

解　$\because$　$\sqrt{2m+1}\geqslant 0$，$|3n-2|\geqslant 0$

又 $\because$　$\sqrt{2m+1}+|3n-2|=0$

$\therefore$　$2m+1=0$，且 $3n-2=0$

$\therefore$　$m=-\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{2}{3}$

$\therefore$　$m+n^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=-\dfrac{1}{18}$

$\therefore$　$m+n^2$ 的相反数的倒数为 $-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{18}}=18$.

激活思维　1. 多种数学方法和性质的综合运用是解题的关键，一般来说，当未知数的个数超过方程的个数时，已知条件中一定隐含着其他结论，需要运用数学方法（配方法、换元法）去变形，再从中挖掘其他结论.

2. 与本题类似的其他变形有：

设 a，b 互为相反数，c 与 d 互为倒数，m 的倒数等于它本身，则化简 $\dfrac{cd}{m}+(a+b)m-|m|$.

解　$\because$　a 与 b 互为相反数，$\therefore$　$a+b=0$.

$\because$　c 与 d 互为倒数，$\therefore$　$cd=1$.

又 $\because$　m 的倒数于它本身，$\therefore$　$m=\pm 1$.

当 $m=1$ 时，$\dfrac{cd}{m}+(a+b)m-|m|=0$；

当 $m=-1$ 时，$\dfrac{cd}{m}+(a+b)m-|m|=-2$.

【例 3】　化简 $|x-1|+|x+1|$.

思维技巧　由 $x-1=0$，$x+1=0$，确定零点为 $x=1$，$x=-1$，其中零点

即是使绝对值符号内的式子的值等于 0 的值，这个值是一个分水岭，能以这个值为界，把式子何时为正数，何时为负数分开，所以“零点”又称“界点”. 本题应分 $x\leqslant-1$，$-1<x\leqslant1$ 和 $x>1$ 三个区域讨论，实质是把 $x-1$，$x+1$ 的值按正实数，0，负实数进行分类讨论.

解　当 $x\leqslant-1$ 时，$x-1<0$，$x+1\leqslant0$，

$\therefore$　原式 $=(1-x)+(-x-1)=-2x$；

当 $-1<x\leqslant1$ 时，$x-1\leqslant0$，$x+1>0$，

$\therefore$　原式 $=(1-x)+(x+1)=2$；

当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$x+1>0$，

$\therefore$　原式 $=(x-1)+(x+1)=2x$.

综上所述，可知 $|x-1|+|x+1|=\begin{cases}-2x & (x\leqslant-1),\\ 2 & (-1<x\leqslant1),\\ 2x & (x>1).\end{cases}$

激活思维　1. 有关绝对值的化简问题，首先应解决的是去掉绝对值的符号问题，而要去掉绝对值的符号，又必须对绝对值符号里面的数进行判定，此时常采用数形结合，或零点法进行分类讨论和判断.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 若 $|a|+a=0$，化简 $\dfrac{|a|+\sqrt{2}}{|a-\sqrt{2}|}$.

解　$\because$　$|a|+a=0$，即 $|a|=-a$，$\therefore$　$a\leqslant0$.

$\therefore$　$\dfrac{|a|+\sqrt{2}}{|a-\sqrt{2}|}=\dfrac{-a+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-a}=\dfrac{-(\sqrt{2}-a)}{\sqrt{2}-a}=-1$.

(2) 已知 a 为实数，试比较 $|a-1|$ 与 $|a+2|$ 的大小.

解　①当 $a<-2$ 时，

$|a-1|=-(a-1)=1-a$，$|a+2|=-(a+2)=-a-2$，

$\therefore|a-1|-|a+2|=1-a+a+2=3>0$，

$\therefore$　$|a-1|>|a+2|$；

② 当 $-2\leqslant a<1$ 时，

$|a-1|=-(a-1)=1-a$，$|a+2|=a+2$，

$\therefore$　$|a-1|-|a+2|=1-a-a-2=-2a-1$.

此时，若 $-2a-1>0$，即 $-2\leqslant a<-\dfrac{1}{2}$ 时，$|a-1|>|a+2|$；

若 $-2a-1<0$，即 $-\frac{1}{2}<a<1$ 时，$|a-1|<|a+2|$；

若 $-2a-1=0$，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$|a-1|=|a+2|$.

③ 当 $a\geqslant 1$ 时，$|a-1|=a-1$，$|a+2|=a+2$.

∴ $|a-1|-|a+2|=a-1-a-2=-3<0$，

∴ $|a+2|>|a-1|$.

综合可知，当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$|a-1|>|a+2|$；

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$|a-1|=|a+2|$；

当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，$|a-1|<|a+2|$.

【例 4】 已知 $(a+b+3)(a+b-3)=-5$，求 $a+b$ 的值.

思维技巧　先用换元法设 $a+b=x$，用平方差计算左边，化成 $x^2=a$ 的形式，再用开平方的定义完成.

解　设 $a+b=x$，原式变形为：

$$x^2-9=-5$$

∴ $x^2=4$

∴ $x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

∴ $a+b=2$ 或 -2

激活思维　1. 本题关键是将 $a+b$ 视作一个整体，再运用开平方的定义完成.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 要使 $\sqrt{-a^2}$ 有意义，则 a 的值为(　　)

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $a\geqslant 0$　　D. $a=0$

解　本题考查的同样是只有非负数才有算术平方根这一点，要使 $\sqrt{-a^2}$ 有意义，必须 $-a^2\geqslant 0$，但显然 $-a^2\leqslant 0$，则只有 $a=0$. 故选 D.

(2) 若 $x\cdot\sqrt{x-1}=0$，则 $x=$________.

解　当 $x=0$ 时，$\sqrt{x-1}=\sqrt{0-1}$ 无意义，当 $x=1$ 时，$1\cdot\sqrt{1-1}=0$.

∴ $x=1$.

(3) 已知 a,b,c 在数轴上的位置如图 10－5 所示，

$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$.

解 由图知，$b<a<0,c>0$，

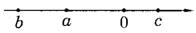


图 10－5

$\therefore\ a+b<0,c-a>,b+c<0$，

$\therefore\ \sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$

$=|a|-|a+b|+|c-a|+|b+c|$

$=-a+(a+b)+(c-a)-(b+c)$

$=-a+a+b+c-a-b-c$

$=-a.$

(4) 求下列各式中的 x.

① $\because\ |x|=\sqrt{3}$； ② $|x^2-5|=4$.

解 ① $\because\ |x|=\sqrt{3}$，$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$.

② $\because\ |x^2-5|=4$，

$\therefore\ (x^2-5)=\pm 4$.

即 $x^2-5=4$ 或 $x^2-5=-4$.

当 $x^2-5=4$ 时，$x^2=9$，$\therefore\ x=\pm 3$.

当 $x^2-5=-4$ 时，$x^2=1$，$\therefore\ x=\pm 1$.

【例 5】 下列三对等式：(1) $\sqrt{-2}=-\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$；(2) $\sqrt{(-2)^2}=-2$，$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$；(3) $(\sqrt{2})^2=2$，$(\sqrt[3]{2})^3=2$，都成立的一对是（ ）

A. (1) B. (2) C. (3) D. 没有

思维技巧 本题旨在对平方根和立方根的性质加以比较.对立方根而言，(1) $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$，(2) $\sqrt[3]{a^3}=a$，(3) $(\sqrt[3]{a})^3=a$，这三个性质都一定成立；对平方根而言，(1) $\sqrt{-a}=-\sqrt{a}$，当且仅当 $a=0$ 时成立.(2) $\sqrt{a^2}=a$，当且仅当 a 为非负数时成立，(3) $(\sqrt{a})^2=a$，当且仅当 a 为非负数时成立.

解 选 C.

激活思维 1. 本题的解题关键是透彻理解平方根与立方根的性质.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 如果一个有理数的平方根与立方根相同，那么这个数是（ ）

A. ± 1 B. 0 C. 1 D. 0 和 1

解 正数有两个平方根，只有一个立方根，所以这个数不可能为正数；负数没有平方根，所以这个数也不可能为负数，只有零的平方根和立方根都

是它本身，故选 B.

(2) 已知 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[4]{x^2-1}+2}{x+1}$，其中 x，y 都是有理数，求 $(\sqrt{2})^{x+y}$.

解　$\because$　$\sqrt{1-x^2}$ 与 $\sqrt[4]{x^2-1}$ 都有意义，

$\therefore$　$1-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1\geqslant 0$，即 $x^2=1$，$\therefore$　$x=\pm 1$，

但 $x+1\neq 0$，$\therefore$　$x\neq -1$，故 $x=1$.

$\therefore$　$y=\dfrac{0+0+2}{1+1}=1$，

则　$(\sqrt{2})^{x+y}=(\sqrt{2})^2=2$.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 已知 a，b 为实数，下列命题中，正确的是（　　）

A. $a>b$，则 $a^2>b^2$　　B. $a>|b|$，则 $a^2>b^2$

C. $|a|>b$，则 $a^2>b^2$　　D. $a^3>b^3$，则 $a^2>b^2$

2. 下列语句正确的是（　　）

A. 有绝对值最大的实数　　B. 有绝对值最小的实数

C. 有绝对值最大的有理数　　D. 有绝对值最小的无理数

3. 如果 a 是一个无理数，则 $1-a$ 是（　　）

A. 正数　　B. 负数　　C. 无理数　　D. 有理数

4. 已知实数 a，b，c 在数轴上位置如图 10－6 所示.

化简 $|a+b|-|c-b|$ 结果为（　　）

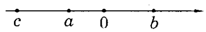


图 10－6

A. $a+c$

B. $-a-2b+c$

C. $a+2b-c$

D. $-a-c$

5. 下列各数中，是无理数的是（　　）

A. -3.14　　B. $\sqrt[3]{-125}$　　C. $|-\sqrt{6}|$　　D. $\dfrac{\sqrt[3]{-27}}{2}$

6. 实数$-\sqrt{7}$,-2,-3的大小关系是(　　)

A. $-\sqrt{7}<-3<-2$

B. $-3<-\sqrt{7}<-2$

C. $-2<-\sqrt{7}<-3$

D. $-3<-2<-\sqrt{7}$

7. 若x,y为任意实数,且$x^2=y^2$,则(　　)

A. $x=y$　　B. $x=-y$　　C. $-x=y$　　D. $x=\pm y$

8. $\sqrt{16}$的算术平方根是(　　)

A. ±4　　B. 4　　C. ±2　　D. 2

9. 若$0<x<1$,那么$x+1+\sqrt{(x-1)^2}$的化简结果是(　　)

A. $2x$　　B. 2　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

10. 下列5个数:3.1416,$\frac{1}{\pi}$,$\sqrt{\pi}$,3.14,$\pi-1$,其中是有理数的有(　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

二、填空题

11. 如果$\sqrt{a^2}=-a$,那么a的取值范围是________.

12. 若$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}-y=3$成立,则$x^y$的值等于________.

13. 若$0<a<1$,且$a+\frac{1}{a}=b$,则$\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$的值为________.

14. 已知实数a满足$a+\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}=0$,那么$|a-1|+|a+1|=$________.

15. 设$A=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,$B=\sqrt{5}+\sqrt{3}$,则A、B中数值较小的是________.

16. 在实数范围内解方程

$\sqrt{\pi-x}+\sqrt{x-\pi}+|1-2y|=5.28$,

则$x=$______,$y=$______.

17. 一个负数a的倒数等于它本身,则$\sqrt{a+2}=$________;若一个数a的相反数等于它本身,则$\sqrt{3a}-5\sqrt{2a^2+1}+2\sqrt[3]{a-8}=$________.

18. 设$|x|<\sqrt{5}$,x是整数,则x的值为______,它们的和是________,积是________.

三、解答题

19. 已知实数 a,b 满足 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a+b}=0$，求 $a^{100}+b^{101}$ 的值.

20. 已知实数 x,y 满足

$$\sqrt{x-2y-3}+(2x-3y-5)^2=0.$$

求 $x-8y$ 的平方根和立方根.

21. 计算下列各题：

①$\sqrt[3]{5\frac{21}{125}-11}-\sqrt{0.1^{-2}}+\sqrt[3]{8^2}$；

②$\frac{1}{3}\sqrt{10}-\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.（精确到 0.01）

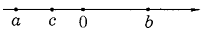


图 10－7

22. 已知实数 a,b,c 在数轴上的位置如图 10－7 所示，且 $|a|=|b|$，化简 $|a|-|a+b|-|c-a|+|c-b|-|-b|$.

23. 求 $9a^2+12ab+4b^2$ $(a<0,b<0)$ 的算术平方根.

24. 已知 a,b,c 分别是 289，361，529 的算术平方根，求整式 $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ 的值的平方根和算术平方根.

25. 已知 $\frac{(16-m^2)+4(m-2n)^2}{\sqrt{m+4}}=0$. 求 $\sqrt{mn^2}$ 的值.

26. 已知 a,b 均为有理数，并且满足等式 $5-\sqrt{2}a=2b+\frac{2}{3}\sqrt{2}-a$，求 a,b 的值.

27. 一个实心铁球重 4kg，求这个铁球的体积.（已知铁的密度为 $7.8\mathrm{g/cm^3}$，结果保留三位有效数字）

探究能力测试

28. （安徽省 2000 年）比较下面两列算式结果的大小（在横线上选填“＞”“＜”“＝”）：

4^2+3^2 ______ $2\times4\times3$；

$(-2)^2+1^2$ ______ $2\times(-2)\times1$；

$(\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ______ $2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$；

2^2+2^2 ______ $2\times2\times2$；

……

通过观察归纳，写出能反映这种规律的一般结论，并加以证明.

29. (广东省 1999 年)用 48m 长的篱笆材料，在空地上围成一个绿化场地，现有两种方案，一种是围成正方形的场地；另一种是围成圆形的场地. 试问选用哪一种方案围成的场地面积最大？并说明理由？

单元综合测试

基础能力测试

测试时间 60 分钟　测试分值 120 分

一、填空题 (每小题 3 分,共 30 分)

1. $\sqrt{9}$的平方根是______,$\sqrt[3]{-27}$的立方根是______.

2. $\frac{9}{25}$是______的算术平方根,$\frac{64}{289}$的平方根是______.

3. 已知一个数的算术平方根是它本身,则这个数是______.

4. 若 $a+1$ 是 9 的平方根,则 $a=$______.

5. 若 $a^3+2=0$,则 $a=$______.

6. 设一个数的立方根的相反数是 3,那么这个数是______.

7. 在 1 与 2 之间,有______个有理数,有______个无理数.

8. 已知$\sqrt{m^2}=2$,$\sqrt{n^2}=3$,且$|m+n|=m+n$,则 $m-n=$______.

9. 已知 a 是 5 的算术平方根,则不等式$\sqrt{5}x-a<\sqrt{5}$的非负整数解是______.

10. 若 $a<0$,化简$\sqrt[3]{a^3}+\sqrt{a^2}-|a|+a=$______.

二、选择题 (每小题 3 分,共 30 分)

11. 在 3.14159,π,$\sqrt{9}$,$-\sqrt{2}$,$\sqrt[3]{-512}$,0.1010010001…,这六个数中,无理数共有多少个(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D.5

12. 下列命题中是假命题的是(　　)

A. 任何有理数都可以写成有限小数的形式

B. 无限循环小数可以写成分数的形式

C. 无限不循环小数都是无理数

D. 无理数是无限小数

13. 个数最多的是(　　)

A. 倒数等于本身的数　　B. 相反数等于本身的数

C. 绝对值等于本身的数　　D. 平方等于本身的数

14．已知$\sqrt[3]{5.25}=1.738$，$\sqrt[3]{0.525}=0.8067$，$\sqrt[3]{-52.5}=-3.737$，则$\sqrt[3]{-5250}=$（　　）

A. 17.38　　B. −17.38　　C. 8.067　　D. −37.37

15．在$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\frac{4}{3}$，$\sqrt[5]{0.00001}=0.1$，$-\sqrt{1024}=-32$，$\sqrt{(-2)^2}=-2$中，计算正确的有几个（　　）

A. 1　　B.2　　C.3　　D.4

16．在$\sqrt[3]{-2}$，$\sqrt{a^2+1}$，$\sqrt{(2-\pi)^3}$，$\sqrt{\pi}$中，有意义的式子的个数是（　　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

17．下列说法中正确的是（　　）

A. 无理数包括正无理数，0，负无理数

B. 无理数是用根号形式表示的数

C. 无理数是开方开不尽的数

D. 无理数是无限不循环小数

18．底面为正方形的立方体水池容积是$4.86m^3$，池深1.5m，则底面边长是（　　）米

A. 3.24　　B. 1.8　　C. 0.324　　D.0.18

19．要使$\sqrt{-(3x^2-27)^2}$表示实数，则x的取值为（　　）

A. 0　　B. 3　　C. ±3　　D. 不存在

20．已知n为任意整数，则$\sqrt{(n-3)(n-2)(n-1)n+1}$表示的数（　　）

A. 一定是整数　　B. 是有理数，但不一定为整数

C. 一定是无理数　　D. 可能是有理数，可能是无理数

三、解答题（每小题10分，共60分）

21．计算$\left(-\frac{1}{3}\right)^2\div\left\{\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}-\left[\frac{2}{15}\times\sqrt{\frac{25}{9}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\div\frac{3}{20}\right]\right\}$

22．已知实数a，b满足$(2a+1)^2+\frac{1}{2}\sqrt{b+1}=0$，求$-2a-8b$的平方根和立方根.

23．已知$x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$，求下列各式的值：

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$；　(2) $x-\frac{1}{x}$.

初二代数

24. 若 $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{(x-1)^2}$，求代数式 $(x+y)^{100}$ 的值.

25. 如果 540 乘以正整数 x，其积是一个正整数的完全平方数，求最小的 x 的值并求这个完全平方数.

26. 已知 $A=\sqrt[m-n]{n-m+3}$ 是 $n-m+3$ 的算术平方根，$B=\sqrt[m-2n+3]{m+2n}$ 是 $m+2n$ 的立方根，求 $B-A$ 的平方根.

发展能力测试

测试时间 60 分钟　　测试分值 120 分

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $\sqrt{16}$ 的平方根是（　　）

A. $-\sqrt{4}$　　B. ± 2　　C. $\pm\sqrt{2}$　　D. 2

2. 要使 $\sqrt{4a+1}$ 有意义，则 a 能取的最小整数值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -4

3. 查表知 $\sqrt{392}=19.80$，若 $x^2=3.92$，则 x 为（　　）

A. 1.98　　B. 1.98 或 -1.98

C. 15.37　　D. ± 15.37

4. 若 $\sqrt{3x-1}+|1+y|=0$，则 $x^2+y^2=$（　　）

A. $\frac{10}{9}$　　B. $\frac{9}{10}$　　C. 0　　D. 以上都不是

5. 下列命题中，错误命题的个数有（　　）

①$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是分数；②无理数是无限小数；③0 是最小的自然数；④实数和数轴上的点一一对应.

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

6. 计算① $\sqrt{0.25}$，② $\sqrt{1\frac{9}{16}}$，③ $\sqrt[3]{27^2}$，④ $\sqrt[4]{10000}$，⑤ $\frac{1}{\sqrt[4]{0.0001}}$，⑥ $\sqrt{6\frac{1}{4}}$，所得的结果中说法正确的是（　　）

A. 大于 1 的有两个　　B. 小于 1 的有两个

C. 结果相等的有两个　　D. 以上均不对

7. 下列说法中正确的是（　　）

A. 无理数是开方开不尽的数

B. 8 的立方根是 ± 2

C. 绝对值等于$\sqrt{6}$的实数是$\sqrt{6}$

D. 每一个实数都有数轴上的一个点与它对应

8. a,b 是实数,下列命题中正确的是(　　)

A. 若 $a \neq b$,则 $a^2 \neq b^2$　　B. 若 $a > b$,则 $a^2 > b^2$

C. 若$|a| > |b|$,则 $a > b$　　D. 若 $a > |b|$,则 $a^2 > b^2$

9. 若式子$\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{1-x}$有意义,则 x 的取值范围是(　　)

A. $x \geqslant \frac{1}{2}$　　B. $x \leqslant 1$

C. $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$　　D. 以上均不对

10. 已知$\dfrac{(a-b)^2+|9-a^2|}{\sqrt{a+b}}=0$,则 a,b 的值分别为(　　)

A. 3,3　　B. 3,-3　　C. -3,3　　D. 以上都不对

二、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

11. 已知 a 是$\sqrt{11}$的整数部分,b 是$\sqrt{11}$的小数部分,则$(b-\sqrt{11})^a=$______.

12. 若$\sqrt{\dfrac{4}{5}}=0.8944$,则$\sqrt{0.008}=$______,$\sqrt{80}=$______.

13. $\sqrt{x}(x^2-2)=0$,则 x 的值为______.

14. 已知 a 是小于 $3+\sqrt{5}$的整数,且$|2-a|=a-2$,那么 $a=$______.

15. 若 $a<0$,则$\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}=$______.

16. 已知$|x|^3=64$,则 $x=$______.

17. x,y 为实数,且$\sqrt{(x-y+2)^2}$与$|x+y-1|$互为相反数,则 $xy=$______.

18. 已知 $3+a\sqrt{2}=2b-\frac{2}{5}\sqrt{2}$,其中 a,b 为有理数,则 $a=$______,$b=$______.

19. 在$\sqrt{2}$,$-\sqrt{9}$,π,1.414,0.306,5.1010010001…这六个数中,无理数共有______个.

20. 若$\sqrt{-x^3}$有意义,则$\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{1-x}=$________.

初二代数

三、解答题(共 60 分)

21. 计算:(每小题 5 分,共 10 分)

(1) $\sqrt[3]{\frac{216}{27}}-1-\sqrt[3]{-0.008}-\sqrt[3]{0.000216}$;

(2) $\left|\frac{40}{59}\right|-\left|\frac{5}{37}-\frac{39}{59}\right|-\left|-\frac{5}{37}\right|$.

22. 求下列各式中的 x:(每小题 5 分,共 10 分)

(1) $16x^4-1=0$;

(2) $\frac{1}{2}(2x-3)^3+32=0$.

23. 已知一个三角形的三边长为 a,b,c,且满足 $a^2+b^2=c^2$,又已知 $a=41$,$b=40$,求 c. (8 分)

24. 已知 $x+y=4$,$|x-y|=3$,求$\sqrt{2x^2+2y^2}-7$ 的值. (8 分)

25. 已知 a,b 为实数,且有 $a^2+b^2+5=2(a+2b)$,求 a^2+b^2+5 的值. (8 分)

26. 某邮局用邮票摆出了多种图案来庆贺国庆,其中想用长 3 cm,宽 2.5 cm 的 30 枚邮票摆成一个正方形,问怎样摆法?你有几种摆法?这个正方形的边长是多少?(8 分)

27. 已知,实数 a 满足$|2001-a|+\sqrt{a-2002}=a$,则 $a-2001^2$ 的值是多少?(8 分)

第十一章 二次根式

11.1 二次根式

学点探究分析

重点 知道二次根式的意义，掌握二次根式的基本性质：$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$.

难点 二次根式的定义，求二次根式被开方数中字母的取值范围及二次根式的性质的运用.

探究点 二次根式实际上是非负数的算术平方根的又一形态，对二次根式学习和研究是源于开方运算的需要，我们所熟悉的几何面积中有开方运算，故二次根式在面积计算中有广泛应用，不仅如此，二次根式在我们将要学的方程求解、函数计算中也有着极其重要的作用，而且在物理、天文、测量等许多学科中都有着广泛应用.如物理学中自由落体运动、单摆等都涉及二次根式.二次根式的计算紧密地与现实生活联系在一起，学好本章节知识并用来解决现实生活问题，是学好数学的必备素质和能力.

学习方法技巧

1. 从二次根式与算术平方根之间的关系认识二次根式及其基本性质.

式子$\sqrt{a}$是二次根式其必须的条件是$a\geqslant 0$时，即a为非负数，由于在实数范围内负数没有算术平方根，所以当$a<0$时，$\sqrt{a}$没有意义，也谈不上二次根式了，因此$\sqrt{-16}$，$\sqrt{-(x+2)^2-1}$就不是二次根式了.被开方数中如果含有字母，总要考虑字母的取值范围，使得被开方数为非负数，二次根式才有意义，因为一个非负数的算术平方根的平方，根据平方根的定义可知总等于这个非负数，所以就可以得到根式的基本性质$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$.式子$\sqrt{a}$中的$a$可以是数也可以是一个代数式，除要求$a\geqslant 0$外，它还是一个非负数的算术平方根，所以二次根式本身具有非负性，即$\sqrt{a}\geqslant 0\ (a\geqslant 0)$.由实数的知识认识二次根式，这种从旧知识到新知识的学习过程，既巩固了所学的

知识,又获得了新知识,不失为掌握知识的良好捷径.

2. 二次根式引入沟通了实数与实际问题的联系

“直角三角形的两条直线边分别是 4 和 5,它的余边是多少?”应用勾股定理和根式知识可知其斜边是$\sqrt{41}$,如果用有理数知识是难于作出解答的,根式的引入也是用数学知识解决实际问题的需要,其存在性和应用性丰富了实数理论.

能力升级捷径

【例 1】 下列根式:3,$\sqrt{2}$,$\sqrt{9}$,$\sqrt{-5}$,$\sqrt[3]{8}$,$\sqrt[3]{-8}$,$\sqrt{m^2+2m+1}$,$\sqrt{x^2+1}$,$\sqrt{n}$ $(n<0)$,$\sqrt{|x|}$中,有哪些是二次根式?

思维技巧　判断带有根号的式子是否是二次根式首先看根指数是不是 2 次,其次就看根号下面的被开方数是不是非负数,是非负数就有意义,就是二次根式;不是非负数,它无意义,当然不是二次根式.

解　二次根式有:$\sqrt{2}$,$\sqrt{9}$,$\sqrt{m^2+2m+1}$,$\sqrt{x^2+1}$,$\sqrt{|x|}$,因为它们的根指数都是 2,且被开方数能确定是非负数(特别是 $m^2+2m+1=(m+1)^2\geqslant0$).

不是二次根式的有:3,$\sqrt[3]{8}$,$\sqrt[3]{-8}$,$\sqrt{-5}$,$\sqrt{n}$ $(n<0)$,因为 3 不含“$\sqrt{\ }$”,$\sqrt[3]{8}$,$\sqrt[3]{-8}$的根指数是 3 而不是 2,$\sqrt{n}$,$\sqrt{-5}$的被开方数是负数,这两个式子无意义.

激活思维　1. 判断带根号的式子除了要抓住上述两点以外,还有一种情况,那就是开方开得尽的数(如$\sqrt{9}$)也是根式. 尽管 3 不是二次根式,而$\sqrt{9}$符合二次根式定义,是二次根式,不要误认为只有开方开不尽的式子才是二次根式.

2. 要理清楚被开方数中隐含的非负数条件. 被开方数中含有字母,字母给出了取值范围,很容易判断是不是二次根式. 被开方数如果能化成某数(式)的平方,或者在此上再加上一个正数,此被开方数也是非负的,被开方数是绝对值形式也是非负的.

3. 与本题类似的其他变形有:

x 为何值时,下列各式有意义:

①$\sqrt{2x-3}$;　　②$\sqrt{3-4x}$;

③$\sqrt{(x-3)^2}$;　　④$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$;

⑤$\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$;　　⑥已知 $y=\sqrt{x-3}-\sqrt{3-x}+6$,且求$\dfrac{y}{x}$值.

解　①当 $2x-3\geqslant 0$，即 $x\geqslant \frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{2x-3}$ 有意义；

②当 $3-4x\geqslant 0$，即 $x\leqslant -\frac{3}{4}$ 时，$\sqrt{3-4x}$ 有意义；

③∵　$(x-3)^2\geqslant 0$，　∴　x 无论取什么实数，$\sqrt{(x-3)^2}$ 总有意义；

④由 $x+1\geqslant 0$，且 $3-x\geqslant 0$，得 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}$ 有意义；

⑤由二次根式与分式定义可知当 $1-2x>0$，即 $x<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ 有意义；

⑥由 $x-3\geqslant 0$ 且 $3-x\geqslant 0$，得

$$\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x\leqslant 3\end{cases}$$

∴　$x=3$.

即　当　$x=3$ 时，$y=\sqrt{x-3}-\sqrt{3-x}+6$ 有意义.

　　当　$x=3$ 时，$y=6$，

∴　$\frac{y}{x}=2$.

【例 2】　计算下列各式值：

(1) $(\sqrt{5})^2$；　　(2) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$；

(3) $(3\sqrt{2})^2$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{m}\right)^2$.

思维技巧　(1) 可直接应用二次根式性质：$(\sqrt{a})^2=a$，(2) 中的被开方数可乘方再求算术平方根，(3)、(4) 中可看成是两个因数积的平方，等于各个因式平方的积.

解　(1) $(\sqrt{5})^2=5$

(2) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

(3) $(3\sqrt{2})^2=3^2\times(\sqrt{2})^2=18$

(4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{m}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times(\sqrt{m})^2=\frac{m}{4}$

激活思维　1. 本例题中的几道题都是正用根式基本性质 $(\sqrt{a})^2=a$，特别地 $m\sqrt{a}$ 是表示 m 与 $\sqrt{a}$ 之积，$(m\sqrt{a})^2=m^2\cdot(\sqrt{a})^2=m^2a$. 还可以把 $(\sqrt{a})^2=a$ 反过来应用，即非负数 a 可以写成一个平方形式，也即 $a=(\sqrt{a})^2$ $(a\geqslant 0)$，反过来用的时候一定要保证 a 为非负数，如在实数内分解因式 x^2

初
二
代
数

-2，可将 2 写成 $(\sqrt{2})^2$，从而 $x^2-2=x^2-(\sqrt{2})^2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 计算下列各式值：

① $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$；　② $(2\sqrt{10})^2$；　③ $(m\sqrt{n^3})^2$.

解　① $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

② $(2\sqrt{10})^2=2^2\times(\sqrt{10})^2=40$

③ $(m\sqrt{n^3})^2=m^2\cdot(\sqrt{n^3})=m^2n^3$

(2) 下列各式成立的是（　）

A. $(\sqrt{a})^2=a$　　B. $(-\sqrt{5})^2=-5$

C. $(\sqrt{3.5})^2=3.5$　　D. $\sqrt{x^2}=x$

解　$(\sqrt{a})^2=a$，必须 $a\geqslant 0$，故 A 不成立；B 中 $a=-5<0$，分式无意义，故也是错误的；由于字母 x 不知道是正是负，$\sqrt{x^2}=|x|$，故也不正确. 选 C.

(3) 在实数范围内分解因式：

①$25a^2-11$；　　②$16m^4-49$.

解　①$25a^2-11=(5a)^2-11$

$=(5a-\sqrt{11})(5a+\sqrt{11})$

②$16m^4-49=(4m^2)^2-7^2$

$=(4m^2+7)(4m^2-7)$

$=(4m^2+7)[(2m^2)^2-(\sqrt{7})^2]$

$=(4m^2+7)(2m-\sqrt{7})(2m+\sqrt{7})$

【例 3】　已知 $\sqrt{3x+y+5}+\sqrt{y-x-3}=0$，求 $\sqrt{x^2+5y}$ 的值.

思维技巧　二次根式 $\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$ 本身就是一个非负数，本题涉及的两个二次根式 $\sqrt{3x-y+5}$ 及 $\sqrt{y-x-3}$ 都是非负数. 细心的同学一定发现了“若两个非负数的和为零，则必须每个数都为零”. 事实上这两个非负数中只要有一个数不为零是正数，其和必大于零，更不用说这两个数都是正数的情况了，从这两个非负数值为零可列等式组成方程组解出 x，y 的值.

解　$\because$　$\sqrt{3x+y+5}+\sqrt{y-x-3}=0$，

又 $\because$　$\sqrt{3x+y+5}\geqslant 0$，$\sqrt{y-x-3}\geqslant 0$.

$\therefore$　$\begin{cases}\sqrt{3x+y+5}=0；\\ \sqrt{y-x-3}=0\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x=-2;\\y=1.\end{cases}$

$\therefore\quad \sqrt{x^2+5y}=\sqrt{(-2)^2+5}=\sqrt{9}=3.$

激活思维　1. 二次根式$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$是算术平方根，是一个非负数，除此外，常见的$|a|$，a^2 也具有非负性.

2. 不仅两个非负实数之和为零，则每个实数都为零，还可以推广到若干个非负实数之和为零，则每个实数都为零. 当方程仅有一个而字母个数多于一个，可考虑把这个方程化成若干个具有非负数中的算术平方根、平方、绝对值和等于 0 的形式，得方程组求出相应字母数值.

3. 与本题类似的其他变形有：

(1) $\sqrt{2a+b-4}+\sqrt{a+2b-5}=0$，求 a^b；

(2) $|a+2|+5\sqrt{b-27}=0$，求$\sqrt{a+b}$；

(3) 如果 $a+b+\left|\sqrt{c-1}-1\right|=4\sqrt{a-2}+2\sqrt{b+1}-4$，那么 $a+2b-3c=$______.

解　(1) $\because\quad \sqrt{2a+b-4}+\sqrt{a+2b-5}=0$，

又$\because\quad \sqrt{2a+b-4}\geqslant 0$，$\sqrt{a+2b-5}\geqslant 0$，

$\therefore\quad \begin{cases}2a+b-4=0;\\a+2b-5=0.\end{cases}$

解得　$\begin{cases}a=1;\\b=2.\end{cases}$

$\therefore\quad a^b=1^2=1.$

(2) $\because\quad |a+2|+5\sqrt{b-27}=0$，

又$\because\quad |a+2|\geqslant 0$，$5\sqrt{b-27}\geqslant 0$，

$\therefore\quad \begin{cases}a+2=0;\\b-27=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2;\\b=27.\end{cases}$

$\therefore\quad \sqrt{a+b}=\sqrt{-2+27}=\sqrt{25}=5.$

(3) 移项，得

$a+b+\left|\sqrt{c-1}-1\right|-4\sqrt{a-2}-2\sqrt{b+1}+4=0$

配方，得

$\left[(a-2)-4\sqrt{a-2}+2^2\right]+\left[(b+1)-2\sqrt{b+1}+1\right]+\left|\sqrt{c-1}-1\right|=0$

即 $(\sqrt{a-2}-2)^2+(\sqrt{b+1}-1)^2+|\sqrt{c-1}-1|=0.$

$\because\quad (\sqrt{a-2}-2)^2\geqslant 0$，$(\sqrt{b+1}-1)^2\geqslant 0$，$(\sqrt{c-1}-1)^2\geqslant 0.$

$\therefore \begin{cases} \sqrt{a-2}-2=0, \\ \sqrt{b+1}-1=0, \\ \sqrt{c-1}-1=0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=6, \\ b=0, \\ c=2. \end{cases}$

$\therefore \quad a+2b-3c=6+2\times0-3\times2=0$

【例 4】 若 x,y 为实数,且 $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{3-4x}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{4x-3}}+1$,求 $x+xy+x^2y$ 的值.

思维技巧　对于二次根式来说,只有被开方数为非负数时,代数式才有意义;分式的分母不为零时,代数式才有意义,根据以上要求,可以确定 x 的值.

解　由题意可知 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3-4x}\geqslant0, \\ \dfrac{2x+1}{4x-3}\geqslant0. \end{cases}$ 则可知 $\dfrac{2x+1}{4x-3}=0$

$\therefore \begin{cases} 2x+1=0 \\ 4x-3\neq0 \end{cases} \quad \therefore \quad x=-\dfrac{1}{2}, y=1$

$\therefore$ 原式 $=--\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\times1=-\dfrac{3}{4}$

激活思维　1. 二次根式成立的条件是被开方数为非负数,易形成不等式或不等式组,特殊情况下,形成方程.对二次根式中的被开方的代数式,主要从以下几个方面考虑:① 二次根式的被开方数必须是非负数;② 分母不为零;③ a°, a^{-n} (n 为正整数) 中, $a\neq0$. 一般根据以上条件建立不等式,限定未知数的范围.

2. 与本题类似的其他变形有:

(1) 求下列各代数式中字母的取值范围:

① $\sqrt{4-a}$; ② $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}-4}$; ③ $\sqrt{-(a-3)^2}$; ④ $\sqrt{m-2}+(m-4)^0+(m-3)^{-2}$.

解　① 由 $4-a\geqslant0$,得 $a\leqslant4$,即 a 的取值范围是 $a\leqslant4$

② 由 $\begin{cases} 2-x\geqslant0, \\ \sqrt{2-x}-4\neq0 \end{cases}$ 得 $x\leqslant2$ 且 $x\neq-14$,即 x 的取值范围是 $x\leqslant2$ 且 $x\neq-14$

③ $\because\ (a-3)^2\geqslant 0$，$\therefore\ -(a-3)^2\leqslant 0$，$\therefore\ a=3$，即 a 的取值是 $a=3$

④ 由$\begin{cases} m-2\geqslant 0, \\ m-4\neq 0, \\ m-3\neq 0 \end{cases}$ 得 $m\geqslant 2$ 且 $m\neq 3$，$m\neq 4$ 时，即 m 的取值范围是 $m\geqslant 2$ 且 $m\neq 3$，$m\neq 4$

(2) 求$\sqrt{a+4}-\sqrt{9-2a}+\sqrt{1-3a}+\sqrt{-a^2}$的值.

解 由二次根式定义可知

$$\begin{cases} a+4\geqslant 0, \\ 9-2a\geqslant 0, \\ 1-3a\geqslant 0, \\ -a^2\geqslant 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geqslant -4, \\ a\leqslant \dfrac{9}{2}, \\ a\leqslant \dfrac{1}{3}, \\ a=0. \end{cases}$$

$\therefore\ a=0$

$\therefore$ 原式$=\sqrt{0+4}-\sqrt{a-2\times 0}+\sqrt{1-3\times 0}+\sqrt{0}=0$

【例 5】 若 m 适合关系式 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\times\sqrt{199-x-y}$，试确定 m 的值.

思维技巧 注意到 $x-199+y$ 与 $199-x-y$ 互为相反数，而且 $x-199+y\geqslant 0$，$199-x-y\geqslant 0$ 同时成立，故有 $x-199+y=0$，$x+y=199$. 代入已知等式中，得$\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0$，又$\because$算术平方根为非负数，$\therefore\sqrt{3x+5y-2}=0$，$\sqrt{2x+3y-m}=0$，故可联立成方程组

$$\begin{cases} 3x+5y-m-2=0, \\ 2x+3y-m=0, \\ x+y=199. \end{cases}$$

解得 $m=201$

解 由二次根式定义得

$$\begin{cases} x-199+y\geqslant 0, \\ 199-x-y\geqslant 0. \end{cases}$$

$\therefore\ x+y=199$

把 $x+y=199$ 代入上式，得

$$\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0$$

$\because\ \sqrt{3x+5y-2-m}\geqslant 0$，$\sqrt{2x+3y-m}\geqslant 0$

$\therefore\ 3x+5y-2-m=0$ 且 $2x+3y-m=0$

解方程组 $\begin{cases}3x+5y-2-m=0,\\2x+3y-m=0.\\x+y=199\end{cases}$ 得 $m=201$.

激活思维 1. 以上各题有很多题目中是利用二次根式的意义,确定代数式中字母的取值,从而求出其余字母或代数式的值,或是运用"若干个非负性数之和为 0,则这几个非负性数都必须为 0"列方程组,解出字母值. 顺便说明的是在初中现阶段,非负数常以绝对值、偶次幂、算术平方根的面目出现在题目中,在多字母问题中要注意熟练应用此方法.

2. 与本题相似类的其他变形还有:

已知 a,b,c 为实数,且 $-2\sqrt{a-1}+a+|b+1|+\sqrt{(c-2)^2}=0$,求 $a+b^2+c^3$ 的值.

解 $\because$ $-2\sqrt{a-1}+a=(a-1)-2\sqrt{a-1}+1$

$=(\sqrt{a-1})^2-2\sqrt{a-1}+1$

$=(\sqrt{a-1}-1)^2$

又$\because$ $-2\sqrt{a-1}+a+|b+1|+\sqrt{(c-2)^2}=0$,

$\therefore$ $(\sqrt{a-1}-1)^2+|b+1|+\sqrt{(c-2)^2}=0$,

$\because$ $(\sqrt{a-1}-1)^2\geqslant0$,$|b+1|\geqslant0$,$\sqrt{(c-2)^2}\geqslant0$,

$\therefore$ $\begin{cases}\sqrt{a-1}-1=0,\\b+1=0,\\c-2=0.\end{cases}$

解,得

$\begin{cases}a=2,\\b=-1,\\c=2.\end{cases}$ $\therefore$ $a+b^2+c^3=2+(-1)^2+2^3=11$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 把 $4\frac{1}{4}$ 写成一个正数的平方形式( )

A. $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$　　B. $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$ 或 $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2$

C. $\left(\sqrt{\frac{17}{4}}\right)^2$　　D. $\left(\frac{17}{2}\right)^2$ 或 $\left(-\frac{17}{2}\right)^2$

2. 若$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$是二次根式,则应满足的条件是(　　)

A. a,b 均为非负数　　B. $a\geqslant0$,且 $b>0$

C. $\dfrac{a}{b}>0$　　D. $\dfrac{a}{b}\geqslant0$

3. 下列各式中是二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{-7}$　　B. $\sqrt[3]{2m}$　　C. $\sqrt{x^2+1}$　　D. $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

4. x 为实数,下列各式中一定有意义的是(　　)

A. $\sqrt{-x^2}$　　B. $\sqrt{x^2-1}$　　C. $\sqrt{x^2+2}$　　D. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$

5. 若 $m<0,n<0$,则 $(\sqrt{-m})^2+(\sqrt{-n})^2$ 的值是(　　)

A. $m-n$　　B. $-m-n$　　C. $m+n$　　D. $-m+n$

6. 能使式子$-\sqrt{-(x-2)^2}$有意义的实数 x 有(　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无数个

7. 已知$-1\leqslant a\leqslant1$,在实数范围内有意义的式子是(　　)

A. $\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}$　　B. $\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}$　　C. $\sqrt{1-a^2}$　　D. $\sqrt{1-\dfrac{1}{a}}$

8. 下列式子中,不成立的是(　　)

A. $(\sqrt{5})^2=5$　　B. $(-\sqrt{5})^2=5$

C. $-\sqrt{(-3)^2}=3$　　D. $-\sqrt{(-3)^2}=-3$

9. 使得$\sqrt{x}+\sqrt{-x}$在实数范围内有意义的 x 值有(　　)

A. 1 个　　B. 0 个　　C. 2 个　　D. 无数个

10. 已知$\sqrt{(3x+1)(2-x)}=\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{2-x}$,化简:

$|2x-5|+\sqrt{9x^2+6x+1}+|x-2|=$(　　)

A. -8　　B. 8　　C. $2x-3$　　D. $3-2x$

二、填空题

11. 式子$(\sqrt{a})^2=a$ 成立的条件是______.

12. $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=$______;$\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2=$______

13. $(\sqrt{3x-1})^2\left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)=$______.

14. 把下列非负数写成一个数的平方的形式:

① $0.5=(\quad)^2$;　② $\dfrac{2}{3}=(\quad)^2$;　③ $10=(\quad)^2$;

初二代数

④ $3a\ (a\geqslant 0)=(\quad)^2$；　⑤ $1-2x\ \left(x\leqslant\frac{1}{2}\right)=(\quad)^2$.

15. 当 x ______时，$(\sqrt{x-1})^2=1-x$.

16. x ______时，式子$\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$才有意义.

17. a ______时，式子$\frac{1}{\sqrt{5-a}}$有意义.

18. 已知 $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}+5$，则$\frac{x}{y}=$______.

三、计算题

19. $-\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}$；　20. $\left(5\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$；

21. $(m\sqrt{n^2t})^2$；　22. $\left(3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{-2}$.

四、在实数范围内分解因式

23. $3x^2-16$；　24. $a^4b^4-10a^2b^2+25$；

25. x^4-7x^2+12；　26. $x^2(x-\sqrt{3})-3(x-\sqrt{3})$.

探究能力测试

27. 在实数范围内分解因式：$y^2-2\sqrt{3}y+3=$______，$x^2-2\sqrt{2}x-6=$______.

28. 已知 a,b,c 满足$\frac{1}{2}|a-b|+2\sqrt{2b+c}+c^2-c+\frac{1}{4}=0$，求$\sqrt{-a(b+c)}$.

29. 若 x,y 为实数，$y<\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}$，化简$\frac{|1-y|}{y-1}$.

30. 已知：$\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{4-4x+x^2}=7$，求 x 的取值范围.

31. 观察下列分母有理化的计算：

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$，$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，

$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}$，…

从计算结果中找出规律，并利用这一规律计算：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2001}}\right)(\sqrt{2002}+1).$$

11.2　二次根式乘法

学点探究分析

重点　本节重点是运用积的算术平方根性质和二次根式的乘法法则进行二次根式化简与运算.

难点　本节的难点是正确分清性质与法则,它们所应具备的条件及灵活运用性质和法则进行二次根式化简的运算.

探究点　二次根式乘法运算是实数运算中的最基本运算之一,在几何计算和二次方程求解中均有广泛应用,现实中也有许多方面应用到二次根式的乘法运算,如何迅速、简便、准确灵活地运用积的算术平方根性质和二次根式乘法法则进行二次根式乘法计算是学好本节内容的关键,其中如何尽快找到二次根式被开方数积中开方开得尽的因数是准确、迅速进行二次根式乘法运算的核心.学会二次根式乘法运算也是学好实数运算的基础,对二次根式乘法的研究,有力地支持和推动了实数理论及运算的建立与发展.

学习方法技巧

1. 分清算术平方根运算性质和乘法运算法则公式

(1)积的算术平方根性质是$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$,①即是积的算术平方根等于这两个数的算术平方根的积,它的互逆过程即为二次根式乘法运算法则公式:$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$,②用文字语言叙述是:两个数的算术平方根等于这两个数积的算术平方根,要能用数学语言叙说这两个公式.

(2)上两式中的a,b均要为非负数.考虑了其作为二次根式,只有当被开方数是非负数才有意义.

(3)把上面两个算式进行推广,其结论仍然成立.

$$\sqrt{a\cdot b\cdot\ \cdots\ \cdot c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\ \cdots\ \cdot\sqrt{c}\qquad(a\geqslant 0,b\geqslant 0,\cdots c\geqslant 0)$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\ \cdots\ \cdot\sqrt{c}=\sqrt{a\cdot b\cdot\ \cdots\ \cdot c}\qquad(a\geqslant 0,b\geqslant 0,\cdots c\geqslant 0)$$

2. 要会根据具体问题选用不同的公式进行计算,使计算尽量变得较为简便、快捷.设法联系已学过的运算公式,化为积的形式进行计算,使计算量变小.

3. 对计算结果要求是被开方数中如含有开方开得尽的因数(式)应开出

来，即尽量化简，找开方开得尽的因数，可把被开方数化成因数积的形式.

4. 在考查有关概念时，我们必须考虑字母的正负性. 课本中没有特别说明的字母一般都取正，实际应用中要随问题的设置不同而作出不同的改变. 如$\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$，则默认了 $a\leqslant0$，$b\leqslant0$，这点对初学者极易混淆.

能力升级捷径

【例 1】 计算化简下列各式：

(1) $\sqrt{81\times225}$；　(2) $\sqrt{36^2+48^2}$；

(3) $\frac{1}{3}\sqrt{22050}$；　(4) $\sqrt{29^2-20^2}$；

(5) $\sqrt{(-25)\times(-16)}$；　(6) $\sqrt{125\times27}$.

思维技巧　(1) 可直接运用公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$进行计算；(2) 因 36 与 48 有最大公约数 12，故可把被开方数先提取公因式 12^2，化成两个数的积，再用公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$计算；(3) 可把 22050 化成 (质) 因数乘积的形式，再利用公式计算；(4) 中的被开方数是两数的平方差，根据这一特点，可利用平方差公式把其分解成两个数积的形式，再利用公式计算；(5) 中 $-25<0$，$-16<0$，不具备应用积的算术平方根性质公式条件 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，因两个负数的积为正，故可将 $(-25)\times(-16)$ 作如下变形：$(-25)\times(-16)=25\times16$；(6) 把 125 和 27 分解成质因数乘积的形式，把能开方开得尽的因数开出来，使计算结果尽量最简.

解　(1) $\sqrt{81\times225}=\sqrt{81}\times\sqrt{225}=9\times15=135$

(2) $\sqrt{36^2+48^2}=\sqrt{12^2\times3^2+12^2\times4^2}$

$=\sqrt{12^2\times(3^2+4^2)}$

$=\sqrt{12^2\times5^2}=\sqrt{12^2}\times\sqrt{5^2}=12\times5=60$

(3) $\frac{1}{3}\sqrt{22050}=\frac{1}{3}\sqrt{2\times5^2\times3^2\times7^2}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{7^2}$

$=35\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{29^2-20^2}=\sqrt{(29+20)\times(29-20)}=\sqrt{49\times9}=\sqrt{49}\times\sqrt{9}=7\times3$

$=21$

(5) $\sqrt{(-25)\times(-16)}=\sqrt{25\times16}=\sqrt{25}\times\sqrt{16}=5\times4=20$

(6) $\sqrt{125\times27}=\sqrt{5^3\times3^3}=\sqrt{5^2\times3^2\times15}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{15}$

$=15\sqrt{15}$

激活思维　1. 二次根式化简时，要先把被开方数分解成因数乘积的形

式,尽量分解出完全平方数而且使其尽可能大,然后把开得尽方的因数用它的算术平方根代替,移到根号外,这样得到的结果才是最简的.

2．当被开方数的两个因数是负数时,要先进行符号运算,使它满足公式中条件 $a\geqslant0,b\geqslant0$,再运用公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant0,b\geqslant0)$化简,如本题(5)题,如直接运用公式计算$\sqrt{(-25)\times(-16)}=\sqrt{-25}\times\sqrt{-16}$,那就不正确了.故在运用公式时一定要考虑到使公式成立的条件.

3．与本题类似的其他变化有:

化简下列各式:

(1) $\sqrt{121\times25}$;　　(2) $\sqrt{24\times6}$;

(3) $\sqrt{20^2-16^2}$;　　(4) $\sqrt{2700}$;

(5) $\sqrt{9\times16\times49}$;　　(6) $\sqrt{m^2n}\ (m>0,n>0)$;

(7) $\sqrt{20x^4y\cdot z^6}\quad(x>0,y>0,z>0)$;

(8) $\sqrt{9x^3y^2(x+y)^3}\quad(x>0,y>0,z>0)$;

(9) $\sqrt{4x^2-12x^3}\quad\left(0\leqslant x<\frac{1}{3}\right)$;

(10) $\sqrt{x^2y^4+x^4y^2}\ (x>0,y>0)$.

解　(1) $\sqrt{121\times25}=\sqrt{121}\times\sqrt{25}=11\times5=55$

(2) $\sqrt{24\times6}=\sqrt{4\times6^2}=\sqrt{4}\times\sqrt{6^2}=2\times6=12$

(3) $\sqrt{20^2-16^2}=\sqrt{(20-16)(20+16)}=\sqrt{4\times36}$

$=\sqrt{4}\times\sqrt{36}=2\times6=12$

(4) $\sqrt{2700}=\sqrt{3^3\times100}=\sqrt{3^2\times10^2\times3}=3\times10\times\sqrt{3}=30\sqrt{3}$

(5) $\sqrt{9\times16\times49}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}\times\sqrt{49}=3\times4\times7=84$

(6) $\sqrt{m^2n}=\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{n}=m\sqrt{n}$

(7) $\sqrt{20x^4y\cdot z^6}=\sqrt{(2x^2z^3)^2\times5y}=2x^2z^3\sqrt{5y}$

(8) $\sqrt{9x^3y^2(x+y)^3}=\sqrt{3^2\cdot x^2\cdot y^2\cdot(x+y)^2\cdot x(x+y)}$

$=3xy(x+y)\sqrt{x(x+y)}$

(9) $\sqrt{4x^2-12x^3}=\sqrt{4x^2(1-3x)}=2x\sqrt{1-3x}$

(10) $\sqrt{x^2y^4+x^4y^2}=\sqrt{x^2y^2(x^2+y^2)}=xy\sqrt{x^2+y^2}$

【例 2】　计算下列各题:

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{2}$;　　(2) $-4\sqrt{27}\times(-3\sqrt{3})$;

(3) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}\times\sqrt{10}$；　　(4) $-6\sqrt{45}\times4\sqrt{48}$；

(5) $\sqrt{\frac{3n}{m}}\times\sqrt{\frac{3m^2}{n}}$ $(m>0, n>0)$；

(6) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3+2x^2y+xy^2}$.

思维技巧　几个二次根式相乘，根指数不变，被开方数的积作为积的被开方数，但结果一定要尽量最简.为了便于计算结果化简，不要计算出被开方数乘积的结果，而将被开方数进一步分解成因数积的形式，以便发现开方开得尽的因数，把它移到根号外面，从而可大为简便.本题中(1)题可直接运用乘法；(2)、(4)要用到乘法的交换律，把"系数"放在一起乘作为积的系数.二次根式放在一起相乘；(5)、(6)中运用乘法法则公式后，要注意把能开方的字母因式移到根号外面来.

解　(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{6\times2}=2\sqrt{3}$

(2) $-4\sqrt{27}\times(-3\sqrt{3})=(-4)\times(-3)\times\sqrt{27\times3}=12\times9=108$

(3) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}\times\sqrt{10}=\sqrt{6\times15\times10}=\sqrt{2\times3\times3\times5\times2\times5}=\sqrt{2^2\times3^2\times5^2}=30$

(4) $-6\sqrt{45}\times4\sqrt{48}=-6\times4\times\sqrt{9\times5\times16\times3}=-24\times12\sqrt{15}=-288\sqrt{15}$

(5) $\sqrt{\frac{3n}{m}}\cdot\sqrt{\frac{3m^2}{n}}=\sqrt{\frac{3n}{m}\cdot\frac{3m^2}{n}}=\sqrt{9m}=3\sqrt{m}$

(6) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3+2x^2y+xy^2}=\sqrt{x\cdot x(x^2+2xy+y^2)}=\sqrt{x^2\cdot(x+y)^2}=x(x+y)$

激活思维　1. **利用二次根式乘法法则进行计算，其结果一定要进行化简.如果将各个被开方数进行质因数分解，能很快找到被开方数积中能开方的因数，从而可简化运算过程.**

2. **形如"$m\sqrt{a}\cdot n\sqrt{b}$"的二次根式相乘，可先用乘法交换律把 m、n 放在一起相乘，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 放在一起相乘，即 $m\sqrt{a}\cdot n\sqrt{b}=mn\sqrt{ab}$.计算时要注意 m、n 的符号.字母代数中，如有开方开得尽的因式，也要开出来，使计算结果最简.**

3. **与本题相似的其他变形有：**

(1) 计算下列各题：

① $\sqrt{5}\times\sqrt{15}$；　② $\sqrt{2}\times4\sqrt{24}$；

③ $\sqrt{\frac{n^3}{m}\cdot t}\cdot\sqrt{m^4nt^3}$ $(m>0, n\geqslant0, t\geqslant0)$；

④ $-5\sqrt{\frac{8}{27}}\times\sqrt{1\frac{1}{3}}\times3\sqrt{54}$；

⑤ $\left(-x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(-\frac{a}{x}\sqrt{bx}\right)\left(-2ab\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$.

解 ① $\sqrt{5}\times\sqrt{15}=\sqrt{5\times15}=5\sqrt{3}$

② $\sqrt{2}\times4\sqrt{24}=4\sqrt{2\times24}=16\sqrt{3}$

③ $\sqrt{\frac{n^3}{m}\cdot t}\cdot\sqrt{m^4nt^3}=\sqrt{\frac{n^3}{m}\cdot t\cdot m^4nt^3}=\sqrt{n^4t^4m^3}=n^2t^2m\sqrt{m}$

④ $-5\sqrt{\frac{8}{27}}\times\sqrt{1\frac{1}{3}}\times3\sqrt{54}=(-5\times3)\sqrt{\frac{8}{27}\times\frac{4}{3}\times54}$

$$=-15\sqrt{\frac{4^2\times2^2\times3}{3^2}}$$

$$=-15\times\frac{4\times2}{3}\times\sqrt{3}$$

$$=-40\sqrt{3}$$

⑤ $\left(-x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(-\frac{a}{x}\sqrt{bx}\right)\left(-2ab\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$

$=(-x)\left(-\frac{a}{x}\right)(-2ab)\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\cdot bx\cdot\frac{x}{a}}$

$=-2a^2b\cdot\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}}=-2a^2b\frac{bx}{a}=-2ab^2x$

【例 3】 把根号外面的因式移到根号内：

(1) $-3\sqrt{xy}$； (2) $(1-m)\sqrt{5m}\ (m>1)$；

(3) $-x\sqrt{-\frac{1}{x}}$； (4) $(2-x)\sqrt{\frac{3}{2x-4}}$.

思维技巧 由于非负数 a 可以写成 $a=(\sqrt{a})^2$，根据算术平方根的定义，$a=\sqrt{a^2}$，再应用二次根式的乘法法则，就可以将根号外的数移到根号内，达到移入的目的.

解 (1) $-3\sqrt{xy}=-\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{xy}=-\sqrt{9xy}$

(2) $\because\ m>1$，$\therefore\ 1-m<0$，

$\therefore\ (1-m)\sqrt{5m}=-(m-1)\sqrt{5m}=-\sqrt{(m-1)^2}\cdot\sqrt{5m}=-\sqrt{5m(m-1)^2}$

(3) $\because\ -\frac{1}{x}\geqslant0$，$\therefore\ x<0$，

$\therefore \quad -x\sqrt{-\frac{1}{x}}=\sqrt{(-x)^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{x}}=\sqrt{-x}$

(4) $\because \quad \frac{3}{2x-4}\geqslant 0$，$\therefore \quad x>2$，$\therefore \quad 2-x<0$

$$\therefore \quad (2-x)\sqrt{\frac{3}{2x-4}}=-(x-2)\sqrt{\frac{3}{2x-4}}$$

$$=-\sqrt{(x-2)^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2x-4}}=-\sqrt{\frac{3}{2}(x-2)}$$

激活思维　与本题类似的其他变形有：

把下列各式中根号外的因式适当变形后移到根号内：

(1) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$；　　(2) $-4\sqrt{\frac{3}{8}}$；

(3) $-m\sqrt{-\frac{1}{m}}$；　　(4) $(1-a)\sqrt{\frac{5}{1-a}}$；

(5) $(x-1)\sqrt{\frac{1}{1-x}}$.

解　(1) $3\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3^2\times\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$

(2) $-4\sqrt{\frac{3}{8}}=-\sqrt{4^2}\times\sqrt{\frac{3}{8}}=-\sqrt{4^2\times\frac{3}{8}}=-\sqrt{6}$

(3) $-m\sqrt{-\frac{1}{m}}=\sqrt{(-m)^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{m}}=\sqrt{(-m)^2\cdot\frac{-1}{m}}=\sqrt{-m}$

(4) $(1-a)\sqrt{\frac{5}{1-a}}=\sqrt{(1-a)^2}\cdot\sqrt{\frac{5}{1-a}}=\sqrt{(1-a)^2\cdot\frac{5}{1-a}}=\sqrt{5(1-a)}$

(5) $(x-1)\sqrt{\frac{1}{1-x}}=-(1-x)\sqrt{\frac{1}{1-x}}=-\sqrt{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x}}=-\sqrt{(1-x)^2\cdot\frac{1}{1-x}}=-\sqrt{1-x}$

【例4】　比较下列两个数大小：

(1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$和$\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $-7\sqrt{5}$和$-5\sqrt{7}$.

思维技巧　(1) 对于任意两个正数 a，b，如果 $a>b$，有$\sqrt{a}>\sqrt{b}$. 本题中的两个数，可以把根号外的数作适当变形移入根号内，利用上述结果进行大小比较.

(2) 本题也可以用平方去根号法进行比较，对于两个正数 a，b，如果 $a^2>b^2$，则 $a>b$.

解法一　(1) ∵ $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{\frac{1}{3^2}}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\frac{1}{2^2}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$，

又　$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

∴　$\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) ∵　$7\sqrt{5}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{49\times5}=\sqrt{245}$

$5\sqrt{7}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{25\times7}=\sqrt{175}$

又　$245>175$，

∴　$7\sqrt{5}>5\sqrt{7}$

∴　$-7\sqrt{5}<-5\sqrt{7}$

解法二　(1) ∵　$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

又$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，

∴　$\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) ∵　$(7\sqrt{5})^2=245$，$(5\sqrt{7})^2=175$，

又　$245>175$，

∴　$7\sqrt{5}>5\sqrt{7}$

∴　$-7\sqrt{5}<-5\sqrt{7}$

激活思维　1．两实数的大小比较通常有以下技巧：① 正数总比负数大；② 若 $a>0$，$b>0$，且 $a^2>b^2$，则 $a>b$；③若 $a>b>0$，则$\sqrt{a}>\sqrt{b}$；④ 若 $a>0$，$b>0$，$\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$；⑤ 若 $a>0$，$b>0$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则$a<b$．⑥ $a-b>0$，则 $a>b$．

2．与本题类似的其他变形有：

比较下列两数大小：

(1) $\frac{1}{5}\sqrt{200}$和 $2\sqrt{3}$；　　(2) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$与$\sqrt{5}-\sqrt{3}$．

解　(1) ∵　$\frac{1}{5}\sqrt{200}=\sqrt{\frac{1}{5^2}}\cdot\sqrt{200}=\sqrt{\frac{1}{25}\times200}=\sqrt{8}$，

$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}$，

又 ∵ $8<12$，

∴ $\frac{1}{5}\sqrt{200}<2\sqrt{3}$

(2) ∵ $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$，

$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

又 $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$，

∴ $\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{5}-\sqrt{3}$

【例 5】 计算：

(1) $(\sqrt{3}-2)^{2000}\cdot(\sqrt{3}+2)^{2001}$；

(2) $(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)^2$；

(3) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{6}+3-\sqrt{15})$.

思维技巧 类似于“多项式”与“单项式”相乘，“多项式”与“多项式”相乘.

解 (1) **原式**$=(\sqrt{3}-2)^{2000}\cdot(\sqrt{3}+2)^{2000}\cdot(\sqrt{3}+2)$

$=[(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)]^{2000}\cdot(\sqrt{3}+2)$

$=(-1)^{2000}\cdot(\sqrt{3}+2)=\sqrt{3}+2$

(2) **原式**$=[(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)+(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)]\cdot[(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)-(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)]$

$=[2(\sqrt{6}+\sqrt{3})][2(\sqrt{2}-1)]$

$=2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)\cdot 2(\sqrt{2}-1)$

$=4\sqrt{3}[(\sqrt{2})^2-1^2]$

$=4\sqrt{3}$

(3) **原式**$=(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$=\sqrt{3}\cdot[\sqrt{2}+(\sqrt{5}-\sqrt{3})][\sqrt{2}-(\sqrt{5}-\sqrt{3})]$

$=\sqrt{3}[(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2]$

$=\sqrt{3}[2-(8-2\sqrt{5})]$

$=\sqrt{3}(-6+2\sqrt{5})$

$=-6\sqrt{3}+2\sqrt{15}$

激活思维 1. **二次根式的乘法运算是实数基本运算法则之一，有理数运算扩充到实数，运算规律仍然适用，如交换律、分配律，乘法运算公式也适用，计算时能用乘法公式，则尽可能运用.**

2. **与本题类似的其他变形有：**

(1) **计算：**

① $(2\sqrt{3}+2\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$；

② $(3\sqrt{6}+\sqrt{2})(3\sqrt{3}-1)$；

③ $(\sqrt{7}+\sqrt{6})^{2000}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{2001}$；

(2) **已知** $a=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$，$b=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$，**求** $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ **值.**

解 (1) ① $(2\sqrt{3}+2\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})=2(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$=2[(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2]$

$=-4$

② $(3\sqrt{6}+\sqrt{2})(3\sqrt{3}-1)=\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1)(3\sqrt{3}-1)$

$=\sqrt{2}[(3\sqrt{3})^2-1^2]$

$=\sqrt{2}(27-1)$

$=26\sqrt{2}$

③ $(\sqrt{7}+\sqrt{6})^{2000}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{2001}$

$=(\sqrt{7}+\sqrt{6})^{2000}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{2000}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{6})$

$=[(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})]^{2000}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{6})$

$=(7-6)^{2000}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{6}$

$=1^{2000}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{6})=\sqrt{7}-\sqrt{6}$

(2) $a+b=\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{3}$

$a\cdot b=\frac{1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{2}$

$\therefore\quad \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}=\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}=\frac{(\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$

$=\frac{5}{6}\sqrt{3}$

【例 6】 已知长方形的长是 $\sqrt{140\pi}$cm，**宽是** $\sqrt{35\pi}$cm，**求与长方形面积**

相等的圆的半径.

思维技巧　设圆的半径为 $r$cm,长方形面积 = 长 × 宽,圆面积 = π × 半径^2,依题意得 $\pi\times r^2=\sqrt{140\pi}\times\sqrt{35\pi}$,从而解关于 r 的方程求 r.

解　设圆的半径为 $r$cm,依题意,得

$\pi r^2=\sqrt{140\pi}\times\sqrt{35\pi}$,∴　$\pi r^2=\sqrt{2^2\times5^2\times7^2\times\pi^2}$,∴　$r^2=70$,$r=\sqrt{70}$ (负值舍去)

答:圆的半径是 $\sqrt{70}$cm.

激活思维　1. 这是二次根式乘法在实际中的应用问题,计算结果必须检验求得的结果是否符合题意,不符合题意的要舍去.

2. 与本题类似的其他变形有:

(1) 已知长方形的长、宽、高分别为 $2\sqrt{6}$、$\sqrt{3}$、$3\sqrt{2}$cm,求其体积 V.

解　$V=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}=(2\times3)\cdot\sqrt{6\times3\times2}=6\cdot\sqrt{6^2}=36$ (cm^3)

答:长方体体积为 36cm^3.

(2) 已知等腰直角三角形 ABC 的面积为 60cm^2,求斜边 AB 上的高 AD.

解　设高 $AD=h$,由三角形知识知 $AB=2h$,故

$$\frac{1}{2}\cdot h\cdot 2h=60,$$

∴　$h^2=60$,$h=\sqrt{60}=\sqrt{2^2\times15}=2\sqrt{15}$ (cm) (舍去负值)

答:斜边 AB 上的高 $AD=2\sqrt{15}$cm.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 若把 $-4\sqrt{3}$ 根号外面的因式移入根号内,所得结果是 (　　)

A. $\sqrt{12}$　　B. $-\sqrt{12}$　　C. $\sqrt{48}$　　D. $-\sqrt{48}$

2. 把 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 的根号外的 a 适当改变后移入根号内,得 (　　)

A. $-\sqrt{-a}$　　B. $\sqrt{-a}$　　C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a}$

3. 把 $(2-x)\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 的根号外的 $(2-x)$ 适当改变后移入根号内,得 (　　)

A. $\sqrt{2-x}$　　B. $\sqrt{x-2}$　　C. $-\sqrt{2-x}$　　D. $-\sqrt{x-2}$

4. 把$-3\sqrt{\frac{a}{3}}$根号外的因式移到根号内,所得结果为(　　)

A. $-\sqrt{a}$　　B. $\sqrt{-a}$　　C. $-\sqrt{3a}$　　D. $\sqrt{3a}$

5. 等式$\sqrt{a^2x-2abx+b^2a}=(b-a)\sqrt{x}$成立的条件是(　　)

A. $a\geqslant b,x\geqslant 0$　　B. $a\geqslant b,x\leqslant 0$

C. $a\leqslant b,x\geqslant 0$　　D. $a\leqslant b,x\leqslant 0$

6. 如果$\sqrt{a^3+a^2}=-a\sqrt{a+1}$,那么实数 a 的取值范围是(　　)

A. $a<-1$　　B. $a>0$　　C. $0<a\leqslant 1$　　D. $-1\leqslant a\leqslant 0$

7. 化去式子 $x^2\sqrt{-\frac{y}{x}}$根号内的分母,结果为(　　)

A. $x\sqrt{xy}$　　B. $-x\sqrt{xy}$　　C. $-x\sqrt{-xy}$　　D. $|x|\sqrt{xy}$

8. 在二次根式$\sqrt{x^4y^5z}$中,字母的取值范围是(　　)

A. x、y、z 可取任意实数

B. x 取任意实数,y、z 同号

C. x 取任意实数,y、z 异号

D. x 取任意实数,y、z 同号或其中有零

二、填空题

9. 化简:$a\sqrt{-\frac{1}{a}}=$______.

10. 已知 $a>0,b<0$,化简$\sqrt{ab^2}=$______.

11. 把根号外的因式移到根号内:$(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}=$______.

12. 比较大小:$2\sqrt{11}$______$3\sqrt{5}$;$-3\sqrt{7}$______$-2\sqrt{15}$.

13. 若$\sqrt{1-x^2}$与$\sqrt{x^2-1}$都是二次根式,则$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=$______.

14. 化简$\frac{1}{a-b}\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}=$____________.$(a<b)$

三、化简题

15. $\pm\frac{1}{5}\sqrt{125}$;　　16. $\sqrt{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}$.

四、计算题

17. $\sqrt{10^{-1}}\cdot(-\sqrt{2^5})\cdot\sqrt{450}$;18. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{28}-\frac{3}{2}\sqrt{84}\right)\cdot\sqrt{14}$;

19. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

五、不改变式子的大小，把根号外的因式移入根号内

20. $-4\sqrt{0.2}$；

21. $(x-2)\sqrt{2-x}$.

六、比较两个二次根式的大小

22. $-\sqrt{3\frac{3}{4}}$和$-2\sqrt{0.85}$.

探究能力测试

七、解答题

23. $\sqrt{16-x^2}=\sqrt{4+x}\cdot\sqrt{4-x}$的成立条件是______.

24. 若$\sqrt{10}$的整数部分是 x，小数部分是 y，求 $(\sqrt{10}+x)y$ 的值.

25. 已知：$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$，求：$x^3+x^2y+xy^2+y^3$ 值.

26. 已知：$x=5-2\sqrt{6}$，求 $3x^4-28x^3-17x^2+2x-10$ 的值.

27. 设$\sqrt{2}=m$，试用 m 表示$\sqrt{12.5}$.

28. 阅读下面材料，并解答下列各题：

在形如 $a^b=N$ 的式子中，我们已经研究过两种情况：

①已知 a 和b，求 N，这是乘方运算；

②已知 b 和N，求 a，这是开方运算；

现在我们研究第三种情况：已知 a 和N，求 b，我们把这种运算叫做对数运算.

定义：如果 $a^b=N$ $(a>0, a\neq 0, N>0)$，则 b 叫做以a 为底N 的对数，记作 $b=\log_a N$.

例如：因为 $2^3=8$，所以 $\log_2 8=3$；

因为 $2^{-3}=\frac{1}{8}$，所以 $\log_2\frac{1}{8}=-3$.

(1)根据定义计算：

①$\log_3 81=$______；②$\log_3 3=$______；③$\log_3 1=$______；④如果 $\log_x 16=4$，那么 $x=$______.

(2)设 $a^x=M$，$a^y=N$，则 $\log_a M=x$，$\log_a N=y$ $(a>0, a\neq 1, M、N$ 均为正数).

$\because \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$，$\therefore \quad a^{x+y} = M \cdot N$. $\therefore \quad \log_a MN = x + y$，即 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$. 这是对数运算的重要性质之一，进一步地，我们可以得出：

$\log_a M_1 M_2 M_3 \cdots M_n =$ ________________________ (其中 M_1、M_2、M_3、$\cdots$、M_n 均为正数，$a>0$，$a \neq 1$)，

$\log_a \dfrac{M}{N} =$ ______ (M，N 均为正数，$a>0$，$a \neq 1$).

11.3 二次根式除法

学点探究分析

重点　本节重点是理解商的算术平方根和二次根式的除法，会用这两个公式进行二次根式除法的计算.

难点　准确、熟练地运用商的算术平方根性质和二次根式的除法法则公式进行计算变形.

探究点　二次根式的除法在几何与方程中有广泛应用，也是实数运算中最基本运算之一. 解二次根式的除法时，要选择恰当的方法，如有时选择除法法则，有时应用商的算术平方根性质，有时还要选择分母有理化，商的算术平方根与二次根式的除法公式是互逆过程，应用时应加以区分. 另外二次根式除法与二次根式乘法中各自两个公式的成立条件有很细微的差别，但又很重要，应加以区分，对二次根式的除法学习和研究，不仅客观上支持和推动实数理论及运算的建立发展，而且主观上也提高同学们计算能力和认识能力.

能力升级捷径

【例 1】　计算：

(1) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{32\times 9}{169}}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{25x^4m^3}{121y^2}}$ $(y>0)$.

思维技巧　应用商的算术平方根性质 $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geqslant 0, b>0)$，可把形如 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 的二次根式进行计算或化简，(1)、(2) 题可直接运用上面性质计算，

(3) 小题中的字母，实际上隐含了条件 $m \geqslant 0$ (否则根式无意义)，也可以用上面性质公式进行计算.

解　(1) $\sqrt{1\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$

(2) $\sqrt{\frac{32\times 9}{169}}=\frac{\sqrt{32\times 9}}{\sqrt{169}}=\frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{9}}{13}=\frac{12\sqrt{2}}{13}$

(3) $\sqrt{\frac{25x^4m^3}{121y^2}}=\frac{\sqrt{25x^4m^3}}{\sqrt{121y^2}}=\frac{5x^2m\sqrt{m}}{11y}$

激活思维　1. 上面一类型的题目中可直接用商的算术平方根的性质化简，但要注意，当被开方数是带分数时，应首先把它化成假分数.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 化去根式中的分母：

①$\sqrt{\frac{1}{5}}$；②$\sqrt{\frac{7}{24}}$；③$\sqrt{\frac{3}{8}}$；④$\sqrt{\frac{98}{176^2-112^2}}$；

⑤$\sqrt{\frac{c}{a+b}}$ $(a+b>0, c\geqslant 0)$；⑥$\sqrt{\frac{x+2}{x^3(x-2)}}$ $(x>2)$；

⑦ $ab\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$ $(a>0, b>0, a<b)$.

解　①$\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{5}{5\times 5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

②$\sqrt{\frac{7}{24}}=\sqrt{\frac{7}{2^3\times 3}}=\sqrt{\frac{42}{2^4\times 3^2}}=\frac{\sqrt{42}}{3\times 2^2}=\frac{\sqrt{42}}{12}$

③$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times 2}{2^2\times 2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2^4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

④$\sqrt{\frac{98}{176^2-112^2}}=\sqrt{\frac{98}{(176+112)(176-112)}}$

$=\sqrt{\frac{98}{288\times 64}}=\sqrt{\frac{49}{144\times 64}}$

$=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{144\times 64}}=\frac{7}{96}$

⑤$\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\sqrt{\frac{(a+b)c}{(a+b)^2}}=\frac{\sqrt{(a+b)c}}{\sqrt{(a+b)^2}}=\frac{\sqrt{(a+b)c}}{a+b}$

⑥$\sqrt{\frac{x+2}{x^3(x-2)}}=\sqrt{\frac{(x+2)(x-2)x}{x^3\cdot x\cdot (x-2)^2}}=\frac{\sqrt{(x^2-4)x}}{\sqrt{x^4(x-2)^2}}=\frac{\sqrt{x^3-4x}}{x^2(x-2)}$

⑦ $ab\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}=ab\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}=ab\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2b^2}}=\sqrt{b^2-a^2}$

(2) 等式$\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}}$的成立条件是( )

A. $-2<x\leqslant3$　　　　B. $-2\leqslant x\leqslant3$

C. $x>-2$　　　　D. $x\leqslant3$

解　根据商的算术平方根性质的限定条件,可知本题中等式成立的条件是$\begin{cases}x+2>0,\\3-x\geqslant0.\end{cases}$由此得$-2<x\leqslant3$,故选A.

【例2】 计算:

(1) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$;　　(2) $\left(-\sqrt{1\frac{2}{3}}\right)\div\sqrt{\frac{5}{24}}$;

(3) $\sqrt{3a^3b}\div\sqrt{4ab^2}\ (a>0,b>0)$;

(4) $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{c^5}}\div\left(-\sqrt{\frac{ab}{2c^3}}\right)\ (a>0,b>0,c>0)$.

思维技巧　上面题目可直接套用二次根式除法公式$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant0,b>0)$进行计算.利用二次根式除法法则计算,被开方数除以一个数,也可以乘以这个数的倒数,进行约分.

解　(1) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{24}{3}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(2) $\left(-\sqrt{1\frac{2}{3}}\right)\div\sqrt{\frac{5}{24}}=-\sqrt{\frac{5}{3}\div\frac{5}{24}}=-\sqrt{\frac{5}{3}\times\frac{24}{5}}$

$=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{3a^3b}\div\sqrt{4ab^2}=\sqrt{\frac{3a^2b}{4ab^2}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4b}}=\sqrt{\frac{3a^2b}{4b^2}}=\frac{a\sqrt{3b}}{2b}$

(4) $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{c^5}}\div\left(-\sqrt{\frac{ab}{2c^3}}\right)=-\sqrt{\frac{2a^2b^2}{c^5}\div\frac{ab}{2c^3}}=\sqrt{\frac{2a^2b^2}{c^5}\times\frac{2c^3}{ab}}$

$=\sqrt{\frac{4ab}{c^2}}=\frac{\sqrt{4ab}}{\sqrt{c^2}}=\frac{2\sqrt{ab}}{c}$

激活思维　1. 在进行二次根式运算时,如果被开方数中含有分母,应把分母化出来,简化二次根式.如(3)题.

2. 简化二次根式的被开方数,主要有两个途径:一是把非负的因式内移和外移;二是化去根号内的分母.

3. 与本题类似的其他变形有：

计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{6x^2y}}{\sqrt{2xy}}$；(2) $\sqrt{\dfrac{3mn}{t^2}}\div\left(-\sqrt{\dfrac{3}{4mn}}\right)$ $(m>0, n>0, t>0)$；

(3) $3\sqrt{2\dfrac{2}{3}}\times\left(-\dfrac{1}{8}\sqrt{15}\right)\div\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$；

(4) $\sqrt{1\dfrac{2}{3}}\div\sqrt{2\dfrac{1}{3}}\times\sqrt{1\dfrac{2}{5}}$；

(5) $\dfrac{2}{b}\sqrt{ab^5}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right)\div3\sqrt{\dfrac{b}{a}}$；

(6) $\sqrt{18}\div(\sqrt{8}\cdot\sqrt{27})$；

(7) $\left[a^2\sqrt{\dfrac{n}{m}}-\dfrac{ab}{m}\sqrt{mn}+\dfrac{n}{m}\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right]\div a^2b^2\sqrt{\dfrac{n}{m}}$.

解 (1) $\dfrac{\sqrt{6x^2y}}{\sqrt{2xy}}=\sqrt{\dfrac{6x^2y}{2xy}}=\sqrt{3x}$

(2) $\sqrt{\dfrac{3mn}{t^2}}\div\left(-\sqrt{\dfrac{3}{4mn}}\right)=-\sqrt{\dfrac{3mn}{t^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{4mn}{3}}=\sqrt{\dfrac{3mn}{t^2}\cdot\dfrac{4mn}{3}}=\dfrac{2mn}{t}$

(3) $3\sqrt{2\dfrac{2}{3}}\times\left(-\dfrac{1}{8}\sqrt{15}\right)\div\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

$=3\times\left(-\dfrac{1}{8}\right)\div\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{8}{3}}\times\sqrt{15}\div\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

$=-\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{8}{3}}\times\sqrt{15}\times\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

$=-\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{8}{3}\times15\times\dfrac{5}{2}}$

$=-\dfrac{3}{4}\sqrt{4\times25}$

$=-\dfrac{15}{2}$

(4) $\sqrt{1\dfrac{2}{3}}\div\sqrt{2\dfrac{1}{3}}\times\sqrt{1\dfrac{2}{5}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}\div\sqrt{\dfrac{7}{3}}\times\sqrt{\dfrac{7}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{5}{3}}\times\sqrt{\dfrac{3}{7}}\times\sqrt{\dfrac{7}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{7}{5}}$

$=1$

(5) $\dfrac{2}{b}\sqrt{ab^5}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right)\div3\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

$= -\frac{2}{b}\sqrt{ab^5}\cdot\left(\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right)\times\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}$

$= \left(-\frac{2}{b}\right)\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\cdot\sqrt{ab^5\cdot a^3b\cdot\frac{a}{b}}$

$= -\frac{1}{b}\sqrt{a^5b^5}$

$= -a^2b\sqrt{ab}$

(6) $\sqrt{18}\div(\sqrt{8}\times\sqrt{27}) = \sqrt{18}\div\sqrt{8\times27} = \sqrt{\frac{18}{8\times27}} = \sqrt{\frac{3}{4\times9}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(7) $\left[a^2\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{ab}{m}\sqrt{mn} + \frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}\right]\div a^2b^2\sqrt{\frac{n}{m}}$

$= \left(a^2\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{ab}{m}\sqrt{mn} + \frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\times\frac{1}{a^2b^2}\sqrt{\frac{m}{n}}$

$= \frac{a^2}{a^2b^2}\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}} - \frac{ab}{ma^2b^2}\sqrt{mn\cdot\frac{m}{n}} + \frac{n}{a^2b^2m}\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}}$

$= \frac{1}{b^2} - \frac{1}{mab}\cdot m + \frac{n}{a^2b^2m}\cdot\frac{m}{n}$

$= \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}$

$= \frac{a^2-ab+1}{a^2b^2}$

【例 3】 把下列各式中的分母有理化：

(1) $\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{15}}$； (2) $\frac{22}{\sqrt{99}}$；

(3) $(x+y)\sqrt{\frac{1}{x+y}}$； (4) $\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$；

(5) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$； (6) $\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$.

思维技巧　根据分式的基本性质，在分式的分子分母上同时乘以一个不为零的整式，分式值不变．运用这个性质，将分子分母同乘以一个恰当的二次根式，就可将分母中的根号化去．

解　(1) **原式** $= \frac{2}{3}\times\sqrt{\frac{6}{15}} = \frac{2}{3}\times\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}\times\sqrt{\frac{2\times5}{5\times5}} = \frac{2}{15}\sqrt{10}$

(2) **原式** $= \frac{22}{3\sqrt{11}} = \frac{22\sqrt{11}}{3\sqrt{11}\times\sqrt{11}} = \frac{22\sqrt{11}}{3\times11} = \frac{2}{3}\sqrt{11}$

(3) **原式** $= \sqrt{(x+y)^2\times\frac{1}{x+y}} = \sqrt{x+y}$

(4) 原式$=\frac{(x+1)(x-1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}}=\frac{(x+1)(x-1)\sqrt{x+1}}{x+1}$

$=(x-1)\sqrt{x+1}$

(5) 原式$=\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

(6) 原式$=\frac{(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})}=\frac{45+24\sqrt{10}+32}{(3\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2}=$
$\frac{77+24\sqrt{10}}{13}$

激活思维　1. 化去分母中的根号叫分母有理化，在根式计算中的结果都要分母有理化. 分母有理化之前，要先分别把分子、分母中的二次根式进行化简. 例如化简$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$时，若分母、分子都乘以$\sqrt{12}$，得$\frac{\sqrt{60}}{12}$后再约简为$\frac{\sqrt{15}}{6}$，比较麻烦 如果先将$\sqrt{12}$化简为$2\sqrt{3}$，则可在分式分子、分母同乘以$\sqrt{3}$，即可得$\frac{\sqrt{15}}{6}$，这种解法比较简单.

2. 分母有理化常有两种方法：一是给分子分母都乘以有理化因式；二是根据题目的特点，如分子、分母适当进行因式分解，然后约分. 如$\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}}$ $=\sqrt{5}$，在解题时要灵活选用.

3. 分母有理化因式不是唯一的，但以最简为宜. 如当分母是形如$a\sqrt{b}$的式子时，分母乘以$\sqrt{b}$，$\sqrt[2]{b}$，…，$\sqrt[n]{b}$均能达到化去分母中根号的目的，但以$\sqrt{b}$最简，故只需在分子、分母都乘以$\sqrt{b}$就可以了，当分母是形如$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$的式子时，根据平方差的特点，$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$乘以$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$就能达到化去分母中根号的目的. 当然其有理化因式也不止一个，但以$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$最简，故选用$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$. 分母有理化找有理化因式是关键，一般地，$a\sqrt{x}$与$\sqrt{x}$、$a\sqrt{x}+b$与$a\sqrt{x}-b$、$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$与$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$是互为有理化因式.

4. 与本题类似的其他变形有：

(1) 把下列各式分母有理化：

① $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{8}}$；② $\frac{-\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$；③ $\frac{b}{\sqrt{b}}$；

④ $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}}$；⑤ $\frac{2x+2}{\sqrt{x+1}}$；⑥ $\frac{mn+n^2}{\sqrt{m+n}}$.

解 ① $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{22}{8}}=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

② $\frac{-\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=-\sqrt{\frac{15}{5}}=-\sqrt{3}$

③ $\frac{b}{\sqrt{b}}=\frac{b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{b\sqrt{b}}{b}=\sqrt{b}$ 或 $\frac{b}{\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}}=\sqrt{b}$

④ $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}}=\frac{(\sqrt{a-b})^2}{\sqrt{a-b}}=\sqrt{a-b}$

⑤ $\frac{2x+2}{\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)}{\sqrt{x+1}}=\frac{2(\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}$

⑥ $\frac{mn+n^2}{\sqrt{m+n}}=\frac{n(m+n)}{\sqrt{m+n}}=\frac{n(\sqrt{m+n})^2}{\sqrt{m+n}}=n\sqrt{m+n}$

(2) 把下列各式的分母有理化：

① $\frac{-0.5\sqrt{6}}{0.4\sqrt{2}}$；　② $\frac{\sqrt{a^2-ab}}{\sqrt{a^2+ab}}$ $(a\geqslant b\geqslant 0)$.

解 ① $\frac{-0.5\sqrt{6}}{0.4\sqrt{2}}=\frac{-5\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{5\sqrt{12}}{4\times 2}=-\frac{5\times 2\sqrt{3}}{4\times 2}=-\frac{5}{4}\sqrt{3}$

② $\frac{\sqrt{a^2-ab}}{\sqrt{a^2+ab}}=\frac{\sqrt{a(a-b)}}{\sqrt{a(a+b)}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+b}}$

$=\frac{\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$

(3) 求下列各式的值：

① $\sqrt{\frac{x^4y}{16z^2}}$，其中 $x=0.2$，$y=0.36$，$z=0.25$；

② $\sqrt{\left(\frac{a^2+4}{a^2}\right)^2-\left(\frac{4}{a}\right)^2}$，其中 $a=2.25$.

解 ① $\sqrt{\frac{x^4y}{16z^2}}=\frac{\sqrt{x^4y}}{\sqrt{16z^2}}=\frac{x^2}{4z}\sqrt{y}$

当 $x=0.2$；$y=0.36$；$z=0.25$ 时

原式 $=\frac{0.2^2}{4\times 0.25}\sqrt{0.36}=0.04\times 0.6=0.024$；

② $\sqrt{\left(\frac{a^2+4}{a^2}\right)^2-\left(\frac{4}{a}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a^2+4}{a^2}+\frac{4}{a}\right)\left(\frac{a^2+4}{a^2}-\frac{4}{a}\right)}$

$=\sqrt{\frac{a^2+4a+4}{a^2}\cdot\frac{a^2-4a+4}{a^2}}=\sqrt{\frac{(a+2)^2(a-2)^2}{a^4}}$

$=\frac{a^2-4}{a^2}=1-\frac{4}{a^2}$

当 $a=2.25$ **时，原式** $=1-\frac{4}{2.25^2}=\frac{17}{81}$

(4) 计算：

① $\sqrt{5}\div(5-\sqrt{5})$；　② $\sqrt{\frac{x^3y^5}{abc}}\div\sqrt{\frac{a^3bx}{c^3y}}$.

解　① **解法一：**

$$\sqrt{5}\div(5-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}=\frac{5\sqrt{5}+5}{25-5}=\frac{5\sqrt{5}+5}{20}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

解法二：

$$\sqrt{5}\div(5-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$② \sqrt{\frac{x^3y^5}{abc}}\div\sqrt{\frac{a^3bx}{c^3y}}=\frac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt{abc}}\div\frac{\sqrt{a^3bx}}{\sqrt{c^3y}}$$

$$=\frac{xy^2\sqrt{xy}}{\sqrt{abc}}\times\frac{c\sqrt{cy}}{a\sqrt{abx}}$$

$$=\frac{cxy^2}{a}\cdot\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{c}}\times\frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{x}}$$

$$=\frac{cxy^2}{a}\cdot\frac{y}{ab}=\frac{cxy^3}{a^2b}$$

【例 4】　将下列各式化简或计算：

(1) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$；

(2) $\sqrt{\left(\frac{a^2+4}{a^2}\right)^2-\left(\frac{4}{a}\right)^2}\ (a>2)$；

(3) $-\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\div\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\ (a>1)$；

(4) $\frac{3}{5}\sqrt{xy^5}\div\left(-\frac{4}{15}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\sqrt{x^3y}\right)$.

思维技巧　**二次根式的除法，类似于分式的化简，利用分式的性质在分式的分子、分母同时乘以或除以同一个二次根式，结果进行分母有理化.**

解　(1) **原式** $=\frac{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=2\sqrt[3]{ab}$

(2) 原式 $=\sqrt{\left(\frac{a^2+4}{a^2}+\frac{4}{a}\right)\left(\frac{a^2+4}{a^2}-\frac{4}{a}\right)}=\sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2}\cdot\frac{(a-2)^2}{a^2}}=\frac{a^2-4}{a^2}$

(3) 原式 $=-\left(\frac{2}{3}\div\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\div\frac{a+1}{a-1}}$

$=-2\sqrt{\frac{(a+1)(a-1)}{a^2}\div\frac{a+1}{a-1}}=-\frac{2(a-1)}{a}$

(4) 原式 $=\left(\frac{3}{5}\div\frac{4}{15}\times\frac{5}{6}\right)\sqrt{xy^5\div\frac{y}{x}\cdot x^3y}$

$=\frac{15}{8}\sqrt{x^5y^5}$

$=\frac{15}{8}x^2y^2\sqrt{xy}$

激活思维 在计算化简过程中能分解因式进行约简的，应先分解因式进行约简计算，这样可简化计算. 在约分过程中要注意被约去的因式不能为 0.

2. **与本题类似的其他变形有：**

计算：

(1) $1\div(\sqrt{3}+\sqrt{2})$； (2) $(\sqrt{5}+5)\div(1+\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{5})$.

解 (1) $1\div(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(2) $(\sqrt{5}+5)\div(1+\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{5})$

$=\sqrt{5}(1+\sqrt{5})\times\frac{1}{1+\sqrt{5}}\cdot(1-\sqrt{5})$

$=\sqrt{5}(1-\sqrt{5})$

$=\sqrt{5}-5$

【例 5】 填空：(1) 等式 $\sqrt{x}\div\sqrt{1-x}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 成立的条件是________.

(2) 如果 $\sqrt{30}=a$，$\sqrt{3}=b$，则 $\sqrt{1000}$ 用 a，b 的代数式表示为________.

思维技巧 由二次根式除法法则公式 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(a\geqslant0,b>0)$ 的限制条件可知 (1) 小题中 $x\geqslant0$ 且 $1-x>0$，故 $0\leqslant x<1$；(2) 小题中 $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}}=\sqrt{10}$，即 $\sqrt{10}=\frac{a}{b}$，故 $\sqrt{1000}=\sqrt{10^3}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=(\sqrt{10})^3=\frac{a^3}{b^3}$

解　(1) 二次根式除法法则公式知

$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ 1-x>0. \end{cases}$　解得　$0\leqslant x<1$

即使$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$成立的条件是 $0\leqslant x<1$

(2) $\because \quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{30}{3}}=\sqrt{10}$

$\therefore \quad \sqrt{1000}=\sqrt{10^3}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=\left(\sqrt{10}\right)^3$

$=\left(\dfrac{a}{b}\right)^3=\dfrac{a^3}{b^3}$

激活思维　1. 二次根式除法运算中的两个公式① $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(a\geqslant 0,b>0)$，② $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a\geqslant 0,b>0)$ 中的限制条件，归根到底还是由二次根式的被开方数为非负数决定的. 实际上式子② 中若 $a\leqslant 0,b<0$，对于$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$还是有意义的，也可以运用公式② 计算，但不能直接运用. 如果直接运用，则$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$无意义，但可作如下变形使之成为满足的式子：

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}\ (a\leqslant 0,b<0)$$

另外，二次根式除法的使用条件与二次根式乘法的使用条件区别在于作为分母的 $b\neq 0$，同学们要加以区别对待.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 使式子$\sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$的成立条件是________.

解　由　$\begin{cases} 2-x\geqslant 0, \\ x+2>0 \end{cases}$　得　$-2\leqslant x\leqslant 2$

(2) 等式$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$成立，则（　）

A. $a\leqslant 0,b\leqslant 0$　　　　B. $a\geqslant 0,b\geqslant 0$

C. $a\leqslant 0,b<0$　　　　D. $a\geqslant 0,b>0$

解　选 C.

$\because \quad -a\geqslant 0,-b>0,\therefore \quad a\leqslant 0,b<0$，且当　$a\leqslant 0,b<0$ 时，$\dfrac{a}{b}\geqslant 0$，二

次根式$\sqrt{\frac{a}{b}}$有意义.

(3)使根式$\sqrt{\frac{b}{a}}$有意义的a,b是( )

A. $a \geqslant 0, b>0$　　B. $a \leqslant 0, b<0$

C. a,b同号　　D. $ab \geqslant 0$,且$a \neq 0$

解　选 D.

A、B、C中只选取满足条件的一部分a,b值,D中a,b全部能使$\sqrt{\frac{b}{a}}$有意义.

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 若$ab \neq 0$,则等式$-\sqrt{-\frac{a}{b^5}}=\frac{1}{b^3}\sqrt{-ab}$成立的条件是( )

A. $a>0, b>0$　　B. $a>0, b<0$

C. $a<0, b>0$　　D. $a<0, b<0$

2. $2\sqrt{\frac{7}{2}}$,$\sqrt{17}$,$\frac{1}{2}\sqrt{62}$的大小顺序是( )

A. $2\sqrt{\frac{7}{2}}<\sqrt{17}<\frac{1}{2}\sqrt{62}$　　B. $2\sqrt{\frac{7}{2}}<\frac{1}{2}\sqrt{62}<\sqrt{17}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{62}<2\sqrt{\frac{7}{2}}<\sqrt{17}$　　D. $\frac{1}{2}\sqrt{62}<\sqrt{17}<2\sqrt{\frac{7}{2}}$

二、填空题

3. 分母有理化:$\frac{-\sqrt{56}}{2\sqrt{14}}=$________,$\frac{4xy}{\sqrt{2xy}}=$________.

4. 化简$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=$________$(a>b)$.

三、计算题

5. $\frac{\sqrt{1.6}}{\sqrt{0.4}}$;　　6. $\sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{1\frac{1}{3}}$;

7. $3\sqrt{20} \div \left(\frac{3}{4}\sqrt{2\frac{2}{3}}\right)$;　　8. $\frac{\sqrt{15} \times \sqrt{49}}{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}$;

9. $(5\sqrt{6}-4\sqrt{3}) \div (3\sqrt{2})$.

四、把下列各式的分母有理化

10. $\dfrac{mn+n^2}{\sqrt{m+n}}$；　　11. $\dfrac{-\sqrt{18}}{0.3\sqrt{27}}$；　　12. $\dfrac{20xy}{\sqrt{5xy}}$；

13. $\dfrac{m\sqrt{m-2n}}{\sqrt{m^2+2mn}}$.

五、计算题

14. $3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{6}\div\sqrt{8}$；

15. $\sqrt{15}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{20}\div\left(-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$；

16. $\sqrt{32x}\div\sqrt{6xy}\cdot2\sqrt{x^3}$；

17. $\sqrt{xy^3}\div\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\cdot(-2\sqrt{2}x)$；

18. $3\sqrt{\frac{12}{x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{xy}}\div\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{18}{xy^3}}\right)$；

19. $\sqrt{45}\div3\sqrt{\frac{1}{5}}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$；

20. 化简　$\frac{2}{b}\sqrt{ab^5}\cdot\left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right)\div\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}\ (a>0,b>0)$.

探究能力测试

六、解答题

21. 已知 $a^2+b^2-4a-2b+5=0$，求$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2b}-\sqrt{a-b}}$的值.

22. 设 $a=\frac{1}{2}\sqrt{3-b}+\frac{1}{3}\sqrt{b-3}+2$，试求 $\sqrt{\frac{ab-1}{a+b}}\div\sqrt{a}\times\sqrt{b}$的值.

23. 比较$\sqrt{15}-\sqrt{14}$与$\sqrt{14}-\sqrt{13}$大小.

24. 化简：$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

25. 若 $x+y=2\sqrt{xy}\ (x>0,y>0)$，求$\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{3x+5y}}$的值.

26. 观察下列各式及其验证过程：

① $2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$. 验证：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$；

② $3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$. 验证：$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=\sqrt{\frac{(3^3-3)+3}{8}}=\sqrt{\frac{3(3^2-1)+3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

(1) 按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}=$____________，并验证：____________.

(2) 针对上式反映的规律，写出用 n ($n\geqslant2$，n 为自然数) 表示的等式，并给出证明.

11.4 最简二次根式

学点探究分析

重点　本节重点是最简二次根式的定义.

难点　本节的难点是最简二次根式的化简方法.

探究点　最简二次根式的引入，不仅给化简指明了方向，而且为二次根式的加减奠定了基础，在很多情况下，如果把它化简，会给解决问题带来方便，本节中考热点是考查最简二次根式的定义，常以多种形式出现，学好本节内容，应要透彻理解最简二次根式的定义，并能化简二次根式.

学习方法技巧

本节知识主要有最简二次根式定义和最简二次根式的化简方法，学好本节内容可以从以下三点去领会.

1. 最简二次根式的概念

(1) 定义：

满足下列两个条件的二次根式，叫做最简二次根式：

① 被开方数的因数是整数，因式是整式；

② 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

(2) 对定义的理解和记忆

① 被开方数不含分母；

② 被开方数中每一因式的指数都小于根指数 2，因此每一个因式的指数都为 1.

2. 化二次根式为最简二次根式的一般步骤是

① 把带分数或小数化成假分数；

② 把被开方数分解质因数或分解质因式；

③ 把根号内能开得尽方的因式（或因数）移到根号外面；

④ 化去根号的分母，或者化去分母中的根号；

⑤ 约分.

当然，对于具体题目来说，以上五个步骤不一定都要用到，要根据题目的特点作决定，以免舍简趋繁.

3. 凡是关于二次根式的计算，最后的结果都要化为最简二次根式.

能力升级捷径

【例 1】 下列各式中哪些是最简二次根式？哪些不是？并说明理由.

(1) $\sqrt{0.3}$；　(2) $\sqrt{27x}$；　(3) $\sqrt{x^2+y^2}$；　(4) $\sqrt{8a^2b}$；

(5) $\frac{\sqrt{a}}{2}$；　(6) $\sqrt{-x}\ (x\leqslant 0)$；　(7) $\sqrt{a^2+a^4}$；　(8) $\frac{x^2+y}{\sqrt{3}}$.

思维技巧　判断一个二次根式是不是最简二次根式，就看它是否满足最简二次根式的两个条件：(1) 被开方数不含分母；(2) 被开方数中每个因式的指数都为 1. 不是满足其中任何一个条件的二次根式都不是最简二次根式，需要说明的是小数也是分数，据此，可逐题进行判断.

解　只有 (3)、(5)、(6) 是最简二次根式

理由：

(1) $\sqrt{0.3}$中的 0.3 不是整数，所以$\sqrt{0.3}$不是最简二次根式；

(2) $\sqrt{27x}$中的 $27x=3^2\cdot 3x$，因式含有能开得尽方的因数，所以不是最简二次根式；

(3) $\sqrt{8a^2b}$中的 $8a^2b=(2a)^2\cdot 2b$，因式含有能开得尽方的因数，所以不是最简二次根式；

(4) $\sqrt{a^2+a^4}$中的 $a^2+a^4=a^2(1+a^2)$，因式含有能开得尽方的因数，所以不是最简二次根式；

(5) $\frac{x^2+y}{\sqrt{3}}=(x^2+y)\sqrt{\frac{1}{3}}$，被开方数含有分母，所以不是最简二次根式.

激活思维　1. $\sqrt{0.3}$中 0.3 是小数，即为$\frac{3}{10}$，所以有小数的根式必不是最简二次根式，而$\sqrt{x^2+y^2}$尽管 x、y 是 2 次方，但 x^2+y^2 作为一个因式，

其次数为 1，所以$\sqrt{x^2+y^2}$是最简二次根式，类似的$\sqrt{x^4+y^4}$，$\sqrt{x^4-y^4}$都是最简二次根式.

2. 如果被开方式是多项式，应先分解因式，再进行判定.

3. 与本题类似的其他变形有：

下列二次根式中是最简二次根式的是（　　）

① $\sqrt{0.75ab}$；② $\sqrt{8-x^2}$；③ $\sqrt{3(x^2+y^2)}$；④ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3x}}$；

⑤ $\sqrt{x^3-2x^2+x}$；⑥$\sqrt{39}$.

A. ①②⑤　　B. ②③⑥　　C. ①⑥　　D. ③⑤

解　选 B

因为：①中 0.75 是小数，故$\sqrt{0.75ab}$不是最简二次根式.

③中被开方数含有分母；

⑤中 x^3-2x^2+x 分解因式得 $x(x-1)^2$，含有因式 $(x-1)^2$ 可以开方，故也不是最简二次根式.

【例 2】　把下列各式化为最简二次根式

(1) $\frac{4}{3}\sqrt{0.32}$；　(2) $\frac{1}{5}\sqrt{35^2-15^2}$；

(3) $x^2\sqrt{\frac{y}{x}}$；　(4) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}$.

思维技巧　化简的被开方数若是一个小数，要把它写成分式，再利用二次根式的除法运算方法，把分母开出来.

解　(1) $\frac{4}{3}\sqrt{0.32}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{32}{100}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{25}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{25}}=\frac{8}{15}\sqrt{2}$

(2) $\frac{1}{5}\sqrt{35^2-15^2}=\frac{1}{5}\sqrt{(35+15)(35-15)}=\frac{1}{5}\sqrt{50\times10}=10\sqrt{5}$

(3) $x^2\sqrt{\frac{y}{x}}=x^2\sqrt{\frac{y\cdot x}{x^2}}=x^2\cdot\sqrt{\frac{xy}{x}}=x\sqrt{xy}$

(4) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}=(a+b)\cdot\sqrt{\frac{a+b}{(a+b)^2}}=(a+b)\cdot\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}=\sqrt{a+b}$

激活思维　1. 把二次根式中的分母和开方开得尽的因数开出来，实际上是进行二次根式的除法和乘法运算，分母开出来仍然放在分母位置上. 如果被开数中含有的因数是小数，则要把小数化成适当的分数，再进行化简.

2. 与本题类似的其他变形有：

把下列二次根式化成最简二次根式：

(1) $-\sqrt{6\frac{2}{3}}$；　(2) $a\cdot\sqrt{\frac{28}{a^3}}$；

(3) $2.5\sqrt{0.48}$；　(4) $ab\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$；

(5) $a^{n+1}\sqrt{\frac{b^{2n}}{a^{2n+1}}}$ $(a>0,b>0)$；

(6) $\frac{b-a}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a^3-2a^2b+ab^2}}$ $(a>b>0)$.

解　(1) $-\sqrt{6\frac{2}{3}}=-\sqrt{\frac{20}{3}}=-\sqrt{\frac{2^2\times5\times3}{3^2}}=-\frac{2}{3}\sqrt{15}$

(2) $a\cdot\sqrt{\frac{28}{a^3}}=a\cdot\sqrt{\frac{2^2\times7a}{a^3\cdot a}}=\frac{2a}{a^2}\sqrt{7a}=\frac{2}{a}\sqrt{7a}$

(3) $2.5\sqrt{0.48}=\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{48}{100}}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{12}{25}}=\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{2^2\times3}{5^2}}$

$=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{3}=\sqrt{3}$

(4) $ab\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}=ab\cdot\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}=\frac{ab}{ab}\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{b^2-a^2}$；

(5) $a^{n+1}\sqrt{\frac{b^{2n}}{a^{2n+1}}}=a^{n+1}\sqrt{\frac{ab^{2n}}{a^{2n+2}}}$

$=a^{n+1}\cdot\frac{\sqrt{a}\cdot b^n}{\sqrt{(a^{n+1})^2}}=\frac{a^{n+1}b^n}{a^{n+1}}\sqrt{a}=b^n\sqrt{a}$

(6) $\frac{b-a}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a^3-2a^2b+ab^2}}=\frac{b-a}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a(a-b)^2}}$

$=\frac{b-a}{b}\cdot\frac{b\sqrt{b}}{(a-b)\sqrt{a}}=\frac{b-a}{b}\cdot\frac{b\sqrt{ab}}{a(a-b)}=-\frac{1}{a}\sqrt{ab}$

【例3】　把下列二次根式化为最简二次根式：

(1) $\sqrt{288}$；　(2) $-\sqrt{72x^2y^3}$；　(3) $\sqrt{125a^3b^4}$

(4) $\sqrt{16a^3+32a^2}$；　(5) $2\sqrt{8x^3-16x^2+8x}$ $(x>1)$.

思维技巧　如果被开方数是比较大的整数，应先把它分解成质因数幂的积形式，再把能开方开得尽的幂开出来；像(4)、(5)小题中被开方数如果是一个多项式，应先把它因式分解，再化简.

解　(1) $\sqrt{288}=\sqrt{2^5\times3^2}=\sqrt{2^4\times3^2\times2}=2^2\times3\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

(2) $-\sqrt{72x^2y^3}=\sqrt{6^2x^2y^2\cdot2y}=-6xy\sqrt{2y}$

(3) $\sqrt{125a^3b^4}=\sqrt{5^2\times a^2b^4\cdot5a}=5ab^2\sqrt{5a}$

(4) $\sqrt{16a^3+32a^2}=\sqrt{16a^2(a+2)}=4a\sqrt{a+2}$

(5) $2\sqrt{8x^3-16x^2+8x}=2\sqrt{8x(x-1)^2}=4(x-1)\sqrt{2x}$

激活思维 1. **化简二次根式就是把二次根式化成最简二次根式，其中开出被开方数中的可开得尽的因数和化去被开方数中的分母，实际上就是进行二次根式的乘法和除法运算.**

2. **化简二次根式时，往往需要把被开方数分解因数或分解因式.**

3. **如果一个式子的分母中含有二次根式时，一般应把分母中的根式化去，也即是前面学过的要把分母有理化.**

4. **与本题类似的其他变形有：**

(1) **把下列各式化为最简二次根式：**

① $\sqrt{25m^3+50m^2}\ (m\geqslant0)$； ② $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^5}{a^6}}\ (a>b>0)$；

③ $\sqrt{16a^2b+32a^2c}$； ④ $\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\ (0<a<-b)$；

⑤ $\frac{a}{a+2b}\sqrt{\frac{a^2b+4ab^2+4b^2}{2}}$； ⑥ $\sqrt{\frac{x^2-1}{xy-y}}$；

⑦ $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}\ (x>y>0)$；

⑧ $\sqrt{\frac{x^2+25}{5x}-2}\ (x>5)$.

解 ① $\sqrt{25m^3+50m^2}=\sqrt{5^2m^2(m+2)}=5m\sqrt{m+2}$

② $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^5}{a^6}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2b^3-b^5}{a^6}}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^3(a^2-b^2)}{a^6}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{a^3}\sqrt{b(a^2-b^2)}$

$=\frac{2b}{3a^3}\sqrt{b(a^2-b^2)}\ (a>b>0)$

③ $\sqrt{16a^2b+32a^2c}=\sqrt{16a^2(b+2c)}=4a\sqrt{b+2c}$

④ $\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2b^2}}=\frac{1}{ab}\sqrt{b^2-a^2}$

⑤ $\frac{a}{a+2b}\sqrt{\frac{a^2b+4ab^2+4b^3}{a}}=\frac{a}{a+2b}\sqrt{\frac{b(a^2+4ab+4b^2)}{a}}$

$=\frac{a}{a+2b}\sqrt{\frac{ab(a+2b)^2}{a^2}}=\frac{a}{a+2b}\cdot\frac{(a+2b)\sqrt{ab}}{a}=\sqrt{ab}$

⑥ $\sqrt{\frac{x^2-1}{xy-y}}=\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{y(x-1)}}=\sqrt{\frac{x+1}{y}}=\sqrt{\frac{y(x+1)}{y^2}}$

初二代数

$=\frac{1}{y}\sqrt{y(x+1)}=\frac{\sqrt{xy+y}}{y}$

⑦ $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}=\sqrt{(x+y)^2(x-y)}=(x+y)\sqrt{x-y}$

⑧ $\sqrt{\frac{x^2+25}{5x}-2}=\sqrt{\frac{x^2-10x+25}{5x}}=\sqrt{\frac{5x(x-5)^2}{(5x)^2}}=\frac{x-5}{5x}\sqrt{5x}$

(2) 求代数式$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$的值.

① $a=1,b=-3,c=2$；

② $a=4,b=-8,c=-1$.

解　① 当 $a=1,b=-3,c=2$ 时.

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{(-3)^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{\sqrt{9-8}}{2}=\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$$

② 当 $a=4,b=-8,c=-1$ 时，

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{(-8)^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\frac{\sqrt{64+16}}{8}=\frac{\sqrt{16\times5}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

3. 求下列各式的值：

① $\sqrt{\frac{x^4y}{16z^2}}$，其中 $x=0.2,y=0.36,z=0.25$；

② $\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2}$，其中 $a=1\frac{1}{3}$.

解　① $\sqrt{\frac{x^4y}{16z^2}}=\frac{x^2}{4z}\sqrt{y}$.

$x=0.2,y=0.36,z=0.25$ 时，

原式$=\frac{0.2^2}{4\times0.25}\cdot\sqrt{0.36}=0.04\times0.6=0.024$

② $\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{a^2}+\frac{2}{a}\right)\left(\frac{a^2+1}{a^2}-\frac{2}{a}\right)}$

$=\sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2}\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2}}$

$=\frac{|a^2-1|}{a^2}=\frac{a^2-1}{a^2}$

当 $a=1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ 时，原式$=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2-1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{7}{16}$

【例 4】　分别把下列各式化简：

新教材同步学案

(1) $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}$；(2) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$；(3) $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}}$ $(a>b>0)$.

思维技巧 上面三道题目中的二次根式都不是最简二次根式，因为其被开方数中都含有分母，可考虑化去被开数中的分母. (1)小题可先进行分式减法运算，得被开方数为 $\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$，运用二次根式的除法运算法则有 $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2b^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}$，就能把被开方数中的分母化到根号外来，从而得到最简二次根式. (2)小题中分母 $(a-b)$ 不是完全平方式，可根据分式的基本性质在分式分子分母同时乘以一个因式 $(a-b)$ 使分母变成完全平方式 $(a-b)^2$，用二次根式的除法运算也可把被开数分母化出来. (3)小题中的分母是一个完全平方式，直接应用二次根式除法运算就能把被开方数中的分母化出来.

解 (1) $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2b^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}$

(2) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$

(3) $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a+b)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$

激活思维 1. 二次根式中含有分母就不是最简二次根式，计算中或化简要把被开数中的分母化出来使二次根式化成最简根式，其解题思路是如果分母是一个完全平方式(数)，就直接进行二次根式除法运算，把分母开出来 如果分母不是一个完全平方式(数)，可根据分式的基本性质，在分式的分子、分母同时乘以一个恰当的因式(数)，使分母是一个完全平方式(数)，再用二次根式除法公式就可把分母化出来. 这个因式要选得“恰当”，所得的结果就是最简二次根式，如化简 $\sqrt{\frac{1}{8}}$，在 $\frac{1}{8}$ 的分子分母同乘以 2 就“恰当”，即 $\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{2}{8\times2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，结果是最简二次根式. 若分母、分子同乘以 8，即 $\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{8}{8\times8}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8^2}}=\frac{\sqrt{8}}{8}$，虽则也能把被开方数中的分母化出来，但不是最简二次根式，显然还要对 $\sqrt{8}$ 进行化简. 请同学们思考，这个“恰当因式”应怎样确定？还须注意的是，被开方数中的分母开出来之后，仍然是作为结果的分母.

2．与本题相类似的其他变形还有：

化简：

(1) $\sqrt{\frac{1}{5}}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{x}}$；

(3) $\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}}$；　(4) $\sqrt{\frac{4}{x^2y}-\frac{4}{xy^2}}\ (y>x>0)$．

解　(1) $\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1\times5}{5^2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2) $\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{x}{x^2}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$

(3) $\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}}=\sqrt{\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}}=\sqrt{\frac{(y^3-x^3)xy}{x^3y^3\cdot xy}}=\frac{\sqrt{xy^4-x^4y}}{\sqrt{x^4y^4}}=\frac{\sqrt{xy^4-x^4y}}{x^2y^2}$

(4) $\sqrt{\frac{4}{x^2y}-\frac{4}{xy^2}}=\sqrt{\frac{4y-4x}{x^2y^2}}$

$=\frac{\sqrt{4(y-x)}}{\sqrt{x^2y^2}}=\frac{2\sqrt{y-x}}{xy}$

【例 5】　已知：$a=-\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}$．求二次根式 $\sqrt{\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{2b}}$ 的值．

思维技巧　先将二次根式化简成最简二次根式，再代入 a,b 值求出原代数式的值．

解　原式 $=\sqrt{\frac{(b-a)^3}{2b}}=(b-a)\sqrt{\frac{b-a}{2b}}=\frac{(b-a)}{2b}\sqrt{2b(b-a)}$

当 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}$ 时，

原式 $=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2\times\frac{1}{2}}\sqrt{2\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}}=\frac{5}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{5}{36}\sqrt{30}$

激活思维　1．先化简代数值，再代入求值，可使求代数式值计算过程简化．

2．与本题类似的其他变形有：

先化简，再求值．

$\frac{2}{3}x\sqrt{9x}-x^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}+6x\cdot\sqrt{\frac{x}{4}}$,其中 $x=5$,

解 $\frac{2}{3}x\sqrt{9x}-x^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}+6x\cdot\sqrt{\frac{x}{4}}$

$=\frac{2}{3}x\cdot 3\sqrt{x}-x^2\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2}+6x\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}$

$=2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+3x\sqrt{x}$

$=5x\sqrt{x}-\sqrt{x}$

当 $x=5$ **时,**

原式 $=5\times5\sqrt{5}-\sqrt{5}=24\sqrt{5}$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. **把** $\sqrt{\frac{y^3}{x^3}-\frac{y^2}{x^3}}$ **化成最简二次根式,结果正确的是( )**

A. $\frac{y}{x^2}\sqrt{x(y-1)}$　　B. $\frac{y}{x^3}\sqrt{x(y-1)}$

C. $\frac{1}{x^3}\sqrt{xy}$　　D. $\frac{y}{x}\sqrt{xy}$

2. **下列化简中,正确的是( )**

A. $3\sqrt{\frac{2b}{3}}=\sqrt{2}b$　　B. $\sqrt{\frac{b}{2a^2}}=\frac{1}{2a}\sqrt{b}$

C. $\sqrt{\frac{b}{a^2}-\frac{a}{b^2}}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sqrt{b-a}$　　D. $\sqrt{\frac{5x}{12y^3}}=\frac{1}{6y^2}\sqrt{15xy}$

3. **若** $a>0$,$b<0$,**则化简** $(\sqrt{a})^2-|b|$ **的结果为( )**

A. $a+b$　　B. $a-b$　　C. $-a+b$　　D. $-a-b$

4. **下列式子中正确的是( )**

A. $\sqrt{a^2b^2+a^4b^4}=ab\sqrt{1+a^2b^2}\ (a>0,b<0)$

B. $|a|\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=1\ (a\neq0)$

C. $\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ (ab\neq0)$

D. $-3\sqrt{a}=\sqrt{(-3)^2a}=\sqrt{9a}\ (a>0)$

5. **下列各式中,是最简二次根式的是( )**

初二代数

A. $\sqrt{5a^3}$　　B. $\frac{\sqrt{a}}{3a}$　　C. $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}$　　D. $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$

6. 下列说法错误的是（　　）

A. $\sqrt{a^2-6a+9}$是最简二次根式　　B. $\sqrt{4}$是二次根式

C. $\sqrt{a^2+b^2}$是一个非负数　　D. $\sqrt{x^2+16}$的最小值是 4

二、填空题

7. 化最简二次根式：$\sqrt{25a^3}=$________.

8. 化最简二次根式：$\sqrt{8(x^2+y^2)}=$________.

9. 若 $a>0$，将$\sqrt{\frac{-4a}{b}}$化成最简二次根式为________.

10. 如果$\sqrt{x^3+3x}=-x\sqrt{x+3}$，那么 x 的取值范围是________.

11. 把$\frac{3a^2}{3b}\sqrt{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^2}{a^4}}$ $(b>1)$化成最简根式是________.

12. $\sqrt{21}$，$\sqrt{45}$，$\sqrt{\frac{1}{x-y}}$ $(x>y)$，$\frac{1}{3}\sqrt{(x+y)(x-y)}$中是最简二次根式的是________.

三、计算题

13. $3\sqrt{2\frac{2}{3}}\times\left(-\frac{1}{8}\sqrt{15}\right)\div\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$；

14. $\sqrt{\frac{1}{m+n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{m-n}}\div\sqrt{\frac{1}{m^2-n^2}}$ $(m>n)$.

四、把下列各式化为最简二次根式

15. $(a+b)\sqrt{\frac{3(a-b)}{8(a+b)}}$ $(a>b>0)$；

16. $\sqrt{\frac{x^2y-6xy^2+9y^3}{x}}$ $(x>3y)$；

17. $\frac{x-y}{y}\sqrt{\frac{x^4y^3+x^3y^4}{x^2-2xy+y^2}}$ $(x<y)$；

18. $\frac{a}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{a^2-ab}{a^3-2a^2b+ab^2}}$ $(a>b)$.

探究能力测试

19. 化简：$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$ （n 为正整数）；

20. 当 $0<x<2y$，把$\frac{x}{x-2y}\sqrt{\frac{x^2y-4xy^2+4y^3}{x}}$化为最简二次根式.

五、解答题

21．请先观察下列各等式：

$\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$，

$\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$，

$\sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$，

……

经观察，写出满足上述各式规律的一般化的公式，并给出证明．

22．已知：$x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$，$y=-\frac{1}{2+\sqrt{14}+\sqrt{6}+\sqrt{21}}$，

(1)求证：$x+y=0$；(2)求 x^3y-xy^3 的值．

11.5　二次根式的加减法

学点探究分析

重点　本节重点是同类二次根式的定义并在领悟同类二次根式的概念的基础上，能熟练地进行二次根式的加减法计算．

难点　本节的难点是二次根式的加减法运算．

探究点　二次根式的加减是由生产、生活实践和理论上简化二次根式的需要，特别是各类方程的求解导致二次根式的运用日趋完善与成熟．为了进行二次根式的加减，又定义了同类二次根式，这样便使得二次根式的加减主要体现在同类二次根式的合并上．二次根式的加减在各类方程的求解中完善，又在各类方程求解中得到广泛应用，为实数运算发展与完善奠定了基础．

学习方法技巧

1．理解认识同类二次根式的概念

定义　如果几个二次根式，化成最简二次根式以后，它们的被开方数相同，则这几个二次根式就叫做同类二次根式．

因此，判断几个根式是否为同类二次根式，必须化为最简二次根式以后，再看被开方数是否相同．例如：$\sqrt{18}$与$\sqrt{8}$不能简单地说被开方数不同，不是同类二次根式，事实上$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，所以$\sqrt{18}$与$\sqrt{8}$是同类二次根式．又例

如，$\sqrt{75}$与$\sqrt{50}$，因为$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$，$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$，所以$\sqrt{75}$与$\sqrt{50}$不是同类二次根式.

2. 二次根式加减法就是合并同类二次根式

合并同类二次根式的方法与整式运算中合并同类项相类似，如：

合并同类项：$7a+2a-3a=(7+2-3)a=6a$；

合并同类二次根式：$7\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

$=(7+2-3)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

3. 二次根式的加减法一般可以分以下三个步骤进行：

(1) 将每一个二次根式都化简为最简二次根式；

(2) 找出其中的同类二次根式；

(3) 合并同类二次根式.

能力升级捷径

【例1】 下列各式中，哪些是同类二次根式？

$3\sqrt{18}$，$-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}$，$\sqrt{\frac{1}{ab}}$，$-\frac{1}{2}\sqrt{32}$，$7\sqrt{\frac{1}{8}}$，$5\sqrt{2\frac{10}{27}}$，$3\sqrt{x^3-x^2y}$，$2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}$，$3\sqrt{\frac{b}{a}}$

思维技巧　判断几个二次根式是不是同类二次根式，如果不是最简二次根式，应先化简再进行判断，本题应对各根式先化简后，再来判断.

解　∵　$3\sqrt{18}=3\sqrt{3^2\times 2}=9\sqrt{2}$

$-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2^2\times 3}{3^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{1}{ab}}=\sqrt{\frac{ab}{(ab)^2}}=\frac{1}{ab}\sqrt{ab}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{32}=-\frac{1}{2}\sqrt{4^2\times 2}=-2\sqrt{2}$

$7\sqrt{\frac{1}{8}}=7\sqrt{\frac{2}{8\times 2}}=\frac{7}{4}\sqrt{2}$

$5\sqrt{2\frac{10}{27}}=5\sqrt{\frac{64}{27}}=5\sqrt{\frac{64\times 3}{27\times 3}}=\frac{40}{9}\sqrt{3}$

$3\sqrt{x^3-x^2y}=3\sqrt{x^2(x-y)}=3x\sqrt{x-y}$

$2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}=2\sqrt{\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}}=2\sqrt{x-y}$

$3\sqrt{\frac{b}{a}}=3\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=\frac{3}{a}\sqrt{ab}$

$\therefore\quad 3\sqrt{18},-\frac{1}{2}\sqrt{32},7\sqrt{\frac{1}{8}}$是同类二次根式；

$-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}},5\sqrt{2\frac{10}{27}}$为同类二次根式；

$\sqrt{\frac{1}{ab}},3\sqrt{\frac{b}{a}}$为同类二次根式；

$3\sqrt{x^3-x^2y},2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x+y}}$为同类二次根式.

激活思维　1. 同类二次根式的定义中"最简"很重要，有些根式它们的被开方数不同，但化简后它们的被开方数是相同的，则它们也是同类二次根式，判断是否是同类二次根式，一定要对它们进行化简.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 下面各组里的二次根式是不是同类二次根式？

① $\sqrt{63},\sqrt{28},\sqrt{7}$；② $\sqrt{12},\sqrt{27},4\sqrt{\frac{1}{3}}$；

③ $\sqrt{18},-\sqrt{\frac{1}{50}},2\sqrt{\frac{2}{9}}$；④ $\sqrt{2a^2x^3},\sqrt{4x^3},2\sqrt{2}$.

解　①$\because\quad\sqrt{63}=\sqrt{3^2\times7}=3\sqrt{7}$

$\sqrt{28}=\sqrt{2^2\times7}=2\sqrt{7}$

$\therefore\quad\sqrt{63},\sqrt{28},\sqrt{7}$是同类二次根式

② $\because\quad\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{27}=\sqrt{3^2\times3}=3\sqrt{3}$

$4\sqrt{\frac{1}{3}}=4\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$\therefore\quad\sqrt{12},\sqrt{27},4\sqrt{\frac{1}{3}}$是同类二次根式

③ $\because\quad\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$

$-\sqrt{\frac{1}{50}}=-\frac{1}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

$2\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\therefore\quad\sqrt{18},-\sqrt{\frac{1}{50}},2\sqrt{\frac{2}{9}}$是同类二次根式

④ $\because\quad\sqrt{2a^2x^3}=\sqrt{a^2x^22x}=ax\sqrt{2x}$

$\sqrt{4x^3}=\sqrt{2^2\cdot x^2\cdot x}=2x\sqrt{x}$

∴ $\sqrt{2a^2x^3}$，$\sqrt{4x^3}$，$2\sqrt{2x}$不是同类二次根式.

⑵ (福州市2000年)下列二次根式中与$\sqrt{3}$是同类二次根式的是( )

A. $\sqrt{18}$　B. $\sqrt{0.3}$　C. $\sqrt{30}$　D. $\sqrt{300}$

解 ∵ $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{0.3}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

$\sqrt{30}$是最简二次根式

$\sqrt{300}=10\sqrt{3}$

故选D.

⑶ 下列各组二次根式中,可以化为同类二次根式的是( )

A. $a\sqrt{a}$与$\dfrac{\sqrt{3a}}{2}$　B. $2x\sqrt{x}$与$x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

C. $\sqrt{2x}$与$\sqrt{12x}$　D. $\sqrt{3a^3}$与$\sqrt{3a^4}$

解 选B.

⑷ 若最简二次根式$\dfrac{3}{4}\sqrt{4a^2+1}$与$a\sqrt{6a^2-1}$是同类二次根式,则$a$的值为( )

A. 1　B. 0　C. -1　D. 1或-1

解 由同类二次根式的定义得:

$4a^2+1=6a^2-1$

∴ $a^2=1$　∴ $a=\pm 1$.

故选D.

⑸ 若最简二次根式$\sqrt[a+b]{4b}$与$\sqrt{3a+b}$是同类二次根式,则a,b的值为( )

A. $a=0$,$b=0$　B. $a=1$,$b=1$

C. $a=0$,$b=2$　D. $a=2$,$b=0$

解 根据同类二次根式定义,先令$a+b=2$,

∴ $\sqrt[a+b]{4b}=\sqrt{4b}=2\sqrt{b}$

∴ $\begin{cases}a+b=2,\\ b=3a+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=2\end{cases}$

检验 当$a=0$,$b=2$时,$\sqrt[a+b]{4b}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,而$\sqrt{3a+b}=\sqrt{2}$,$2\sqrt{2}$与$\sqrt{2}$是同类二次根式,符合题意,∴ $a=0$,$b=2$.故选C.

新教材同步学案

【例 2】 计算：

(1) $\frac{2}{3}\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{8}-\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{18}$；

(2) $2a\sqrt{\frac{b}{a}}-b\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^3}$ $(a>0)$；

(3) $\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{a}\sqrt{a^3b}\right)-\left(3a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{9ab}\right)$；

(4) $\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}-\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

思维技巧 本题是二次根式加减法运算的题目，可先把各式中的二次根式化简，再合并同类二次根式.

解 (1) 原式 $=\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}=-\frac{5}{6}\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(2) 原式 $=2\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}=(1+a-b)\sqrt{ab}$

(3) 原式 $=(4\sqrt{ab}+\sqrt{ab})-(3\sqrt{ab}+3\sqrt{ab})=5\sqrt{ab}-6\sqrt{ab}$

$=-\sqrt{ab}$

(4) 原式 $=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}-\sqrt{\frac{xy}{y^2}}-\sqrt{\frac{xy}{x^2}}$

$=\frac{x+y}{xy}\sqrt{xy}-\frac{1}{y}\sqrt{xy}-\frac{1}{x}\sqrt{xy}$

$=\frac{x+y}{xy}\sqrt{xy}-\frac{x+y}{xy}\sqrt{xy}=0$

激活思维 1. 在二次根式的加减运算中，如果有括号，要先根据去括号法则去掉括号，当括号前面是负号时，去掉括号和它前面的负号时，括号里各项都要变号.

2. 括号前面的“系数”要写成假分数形式，不要写成带分数.

3. 与本题类似的其他变形有：

(1) 计算下列各式：

① $\sqrt{108}-\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{\frac{4}{3}}$；

② $5\sqrt{12}-9\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$；

③ $\sqrt{125}-\sqrt{28}+\sqrt{\frac{1}{20}}-\frac{1}{3}\sqrt{175}$；

④ $\sqrt{\frac{ab}{2}}-\frac{1}{a}\sqrt{8a^3b}+\frac{1}{b}\sqrt{18ab^3}$；

⑤ $\sqrt{4a-4b}+\sqrt{(a-b)^3}-\sqrt{a^3-a^2b}$；

⑥ $\sqrt{\frac{a^4}{b^4}-\frac{a^2}{b^2}}-\sqrt{\frac{ab^2+b^3}{a-b}}$ $(a>b>0)$.

解　① $\sqrt{108}-\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{\frac{4}{3}}$

$=6\sqrt{3}-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$=\left(6+\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}-(3+5)\sqrt{5}=\frac{20}{3}\sqrt{3}-8\sqrt{5}$

② $5\sqrt{12}-9\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$

$=10\sqrt{3}-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

$=(10-3+2)\sqrt{3}$

$=9\sqrt{3}$

③ $\sqrt{125}-\sqrt{28}+\sqrt{\frac{1}{20}}-\frac{1}{3}\sqrt{175}$

$=5\sqrt{5}-2\sqrt{7}+\frac{1}{10}\sqrt{5}-\frac{5}{3}\sqrt{7}$

$=\left(5+\frac{1}{10}\right)\sqrt{5}+\left(-2-\frac{5}{3}\right)\sqrt{7}$

$=\frac{51}{10}\sqrt{5}-\frac{11}{3}\sqrt{7}$

④ $\sqrt{\frac{ab}{2}}-\frac{1}{a}\sqrt{8a^3b}+\frac{1}{b}\sqrt{18ab^3}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2ab}-2\sqrt{2ab}+3\sqrt{2ab}$

$=\left(\frac{1}{2}-2+3\right)\sqrt{2ab}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{2ab}$

⑤ $\sqrt{4a-4b}+\sqrt{(a-b)^3}-\sqrt{a^3-a^2b}$

$=2\sqrt{a-b}+(a-b)\sqrt{a-b}-a\sqrt{a-b}$

$=(2+a-b+a)\sqrt{a-b}$

$=(2-b)\sqrt{a-b}$

⑥ $\sqrt{\frac{a^4}{b^4}-\frac{a^2}{b^2}}-\sqrt{\frac{ab^2+b^3}{a-b}}$

$$=\sqrt{\frac{a^2(a^2-b^2)}{b^4}}-\sqrt{\frac{b^2(a+b)}{a-b}}$$

$$=\frac{a}{b^2}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{b}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$$

$$=\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a-b}\right)\sqrt{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a^2-ab-b^3}{b^2(a-b)}\sqrt{a^2-b^2}$$

(2) 先化简,再求值:

$\frac{2}{3}x\sqrt{9x}-x^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}$ **,其中** $x=5$.

解 $\frac{2}{3}x\sqrt{9x}-x^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}$

$$=\frac{2}{3}x\cdot 3\sqrt{x}-x^2\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2}+6x\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$=2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+3x\sqrt{x}$$

$$=(5x-1)\sqrt{x}$$

当 $x=5$ **时,**

原式$=(5\times5-1)\sqrt{5}$

$$=24\sqrt{5}$$

(3) 解方程组 $\begin{cases}3x+\sqrt{2}y=10-4\sqrt{2} & ①\\ \sqrt{2}x+2y=6\sqrt{2}-4 & ②\end{cases}$

解 由 ②$\div\sqrt{2}$**得**

$$x+\sqrt{2}y=6-2\sqrt{2} \quad ③$$

由 ①$-$③**,得**

$2x=(10-4\sqrt{2})-(6-2\sqrt{2})$

$$=4-2\sqrt{2}$$

$\therefore\ x=2-\sqrt{2}$

$\therefore\ y=2\sqrt{2}-1$

$\therefore\ \begin{cases}x=2-\sqrt{2}\\ y=2\sqrt{2}-1\end{cases}$

【例 3】 已知最简根式$\sqrt[3x+2]{4x+3y}$**与**$\sqrt[y+4]{2x-y+6}$**是同类根式**.

(1) 求 x,y **的值;**

⑵ 若 $a+b=4x+2y$，$ab=by-2x$，求$\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$的值.（$a>b$）

思维技巧　根据同类（二次）根式的定义和最简根式的特点，形成方程组，求解.

解　⑴ 由题设可知 $\begin{cases}3x+2=y+4,\\4x+3y=2x-y+6.\end{cases}$　∴　$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

⑵ 由 ⑴ 可知 $\begin{cases}a+b=6\\ab=4\end{cases}$

∴　$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=20$　∵　$a>b$　∴　$a-b=2\sqrt{5}$

∴　原式$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}=\dfrac{6-2\sqrt{4}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

激活思维　1. 本题中说最简根式是同类根式. 因此，根指数和被开方数均相同，即可形成关于 x，y 的方程组.

2. 与本题类似的其他变形有：

最简二次根式$\sqrt[a+b]{3a+2b}$与$\sqrt{2a+3b}$是同类二次根式，求 $a^{2002}+a^b$ 的值.

解　因为$\sqrt[a+b]{3a+2b}$与$\sqrt{2a+3b}$是同类二次根式，并且它们是最简二次根式，所以 $a+b=2$，且 $3a+2b=2a+3b$，

由　$\begin{cases}3a+2b=2a+3b,\\a+b=2\end{cases}$　解得　$\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

∴　$a^{2002}+a^b=1^{2002}+1^1=2$

【例 4】　已知 $x=\dfrac{\sqrt{7}+2}{2}$，$y=\sqrt{7}-2$.

求代数式 $(y-2x)\sqrt{\dfrac{1}{2x-y}}-(2x+y)\sqrt{x^2-xy+\dfrac{1}{4}y^2}$的值.

思维技巧　本题并没有要求先化简，再求值. 但直接代入求值，较烦琐，注意到代数式中出现 $2x-y$ 与 $2x+y$，考虑先把 $2x-y$ 与 $2x+y$ 求出来，再整体代入并化简.

解　∵　$x=\dfrac{\sqrt{7}+2}{2}$，$y=\sqrt{7}-2$，∴　$2x-y=4$，$2x+y=2\sqrt{7}$

∴　原式$=-4\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4}}-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4}(2x-y)^2}$

$=-4\cdot\dfrac{1}{2}-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{\dfrac{16}{4}}=-2-4\sqrt{7}$

激活思维　1. 在较烦琐的二次根式运算中，可以先求得某一部分的值，

再整体代入，可以简化运算.

2．本题也可以先合并同类二次根式，再代入.今后此类问题中，往往先化简，再代入求值.

3．与本题类似的其他变形有：

化简求值：

$\sqrt{x^3+x^2y+\frac{1}{4}xy^2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^3+x^2y+xy^2}$，其中 $x=25$，$y=15$.

解 $\sqrt{x^3+x^2y+\frac{1}{4}xy^2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^3+x^2y+xy^2}$

$=\sqrt{x\left(x^2+xy+\frac{1}{4}y^2\right)}+\sqrt{x\left(\frac{1}{4}x^2+xy+y^2\right)}$

$=\sqrt{x\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2}+\sqrt{x\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2}$

$=\left(x+\frac{1}{2}y\right)\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}x+y\right)\sqrt{x}$

$=\frac{3}{2}(x+y)\sqrt{x}$

当 $x=25$，$y=15$ 时

原式 $=\frac{3(x+y)}{2}\sqrt{x}=\frac{3(25+15)}{2}\cdot\sqrt{25}=300$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1．下列各式中，计算正确的是（ ）

A. $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{7}$

B. $2+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

C. $a\sqrt{10}-b\sqrt{10}=(a-b)\sqrt{10}$

D. $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{3}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=5$

2．已知 a，b 分别是 $6-\sqrt{13}$ 的整数和小数部分，那么 $2a-b$ 的值是（ ）

A. $3-\sqrt{3}$　　B. $4-\sqrt{13}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. $2+\sqrt{13}$

3．若 $a=3-\sqrt{10}$，则代数式 a^2-6a-2 的值为（ ）

A. 0　　B. 1

C. -1　　D. $\sqrt{10}$

4. 下列计算①$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$；②$2+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$；③$5\sqrt{a}-3\sqrt{a}=2\sqrt{a}$；④$3\sqrt{2a}-\sqrt{8a}=\sqrt{2a}$；⑤$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$，其中正确的是（　）

A. ①和③　　B. ②和④

C. ③和④　　D. ③和⑤

5. 下列说法中正确的是（　）

A. 被开方数不同的二次根式一定不是同类二次根式

B. 任何二次根式都可以化成同类根式

C. $\sqrt{a^3}$与$\sqrt{\frac{1}{a}}$不是同类二次根式

D. 二次根式都能化简成最简形式

6. 若最简二次根式$\frac{3}{4}\sqrt{4a^2+1}$与$2\sqrt{6a^2-1}$是同类根式. 则 a 的值是（　）

A. 1　　B. 0

C. -1　　D. ±1

二、填空题

7. 计算：$\sqrt{27}-\sqrt{48}=$______.

8. 计算：$\sqrt{32}-2\sqrt{0.5}+\frac{1}{3}\sqrt{27}=$______.

9. 计算：$\sqrt{\frac{1}{3}}(2\sqrt{12}-\sqrt{75})=$______.

10. 若 a，b 为有理数，且$\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{\frac{1}{8}}=(a+b)\sqrt{2}$，则 $a+b=$______.

11. 若 $x-2\sqrt{32}-\left(4\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{18}\right)=-3\sqrt{2}$，则 $x=$______.

12. $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}-\sqrt{(4-\sqrt{10})^2}=$______.

13. 已知$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$\sqrt{xy}=\sqrt{15}-\sqrt{3}$，则 $x+y=$______.

三、计算题

14. $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\frac{1}{8}-\sqrt{48}\right)$；

15. $2a\sqrt{3ab^2}-\frac{b}{6}\sqrt{27a^3}+3ab\sqrt{\frac{1}{3}a}$；

新教材同步学案

16. $\left(a\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{4b}\right)-\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-b\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$；

17. $\frac{1}{3}\sqrt{16x}+2\sqrt{\frac{4}{x}}-\frac{5}{x}\sqrt{x^3}$；

18. $\sqrt{a^3b}+\sqrt{9a^3b}-\sqrt{4ab}-ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$；

19. $\frac{2x}{3}\sqrt{9x}+8x\sqrt{\frac{x}{4}}-2x^3\sqrt{\frac{1}{x^3}}$；

20. $\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}$；

21. $\frac{1}{4}\sqrt{32a}+6a\sqrt{\frac{a}{18}}-3a^2\sqrt{\frac{2}{a}}$；

22. 当 $x=\frac{1+\sqrt{1994}}{2}$时，求多项式$(4x^3-1997x^2-1994)^{2001}$的值；

23. 已知 $x=\frac{1}{4}$，求$\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{4x}+6x\sqrt{\frac{x}{9}}-2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$的值.

四、已知$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.732$，求下列各式的近似值(精确到 0.01).

24. $5\sqrt{2}-\left(\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$；

25. $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$；

26. 计算：$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c$.

探究能力测试

五、解答题

27. 若最简二次根式$\sqrt[a+b]{2a+3b}$与$\sqrt{3a-b+3}$是同类二次根式，求 a，b.

28. 已知$\frac{x^2}{x^2-2}=1-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求$\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)\div\left(\frac{x}{x^2-1}+x\right)$的值.

29. 求满足 $0<y<x$ 且$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50}$的不同整数对$(x,y)$的值.

30. 已知 a，b 是实数，且$(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+b^2}+b)=1$，问 a，b 之间有怎样的关系？请推导.

11.6　二次根式的混合运算

学点探究分析

重点　本节重点是会进行二次根式的混合运算，能把分母含有和差形式的二次根式进行分母有理化.

难点　会利用乘法公式进行二次根式的加减、乘除的混合运算.

探究点　前面对二次根式性质和加减、乘除进行了学习研究，必然会导致进行二次根式的混合运算. 有理数的有关运算法则、运算性质推广到二次根式中，便可进行二次根式的混合运算，其最终结果，是把有理数运算推广到实数运算. 如何结合题目自身特点，联系已学过的运算法则公式，对题目进行合理变形，进行二次根式的混合计算，是学好这一节内容的关键.

学习方法技巧

1. 理解二次根式的混合运算就是实数的混合运算

二次根式的混合运算顺序与实数中的运算顺序一样，先乘方，后乘除，最后加减，有括号的先算括号.

在运算过程中，每个根式可以看作是一个“单项式”，多个不同类的二次根式可以看作“多项式”，因此实数运算中的运算律（分配律、结合律、交换律等），所有的乘法公式（平方差公式、完全平方公式等）在二次根式的运算中仍然适用.

2. 知道分母有理化的意义和方法

(1) 定义：把分母中的根号化去叫做分母有理化.

(2) 有理化因式：两个含有二次根式的代数式相乘，如果它们的积不含二次根式，我们就称这两个代数式互为有理化因式.

(3) 常见的互为有理化因式：

① $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$

② $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

③ $a+\sqrt{b}$ 与 $a-\sqrt{b}$

④ $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 与 $m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$

(4) 分母有理化的方法：

用分母的有理化因式同时去乘以分子与分母.

能力升级捷径

【例 1】 计算：(1) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\cdot(5+2\sqrt{6})$；

(2) $(3-\sqrt{2})^2\cdot(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})^2\cdot(3-\sqrt{2})$；

(3) $\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}-\dfrac{y\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}$；

(4) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$；

(5) $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

思维技巧 分清运算顺序，适当使用运算律，简化运算；有时可利用乘法公式.

解 (1) 原式 $=(5-2\sqrt{6})\cdot(5+2\sqrt{6})=1$

(2) 原式 $=[(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})]\cdot[(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})]=7\times6=42$

(3) 原式 $=\dfrac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}-\dfrac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}+\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}=\dfrac{2x+2y}{x-y}$

(4) 原式 $=\dfrac{[(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2]+(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(5) 原式 $=\dfrac{2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}-\dfrac{2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}{2}-\dfrac{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}$

$=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}+2$

激活思维 1. 二次根式的运算可按实数的运算法则来进行. 如果所给的二次根式不是最简二次根式，也可以先化简再计算. 能够运用乘法公式的就应用乘法公式计算. 有些题目本身能运用乘法公式计算，但不容易一下子看出来，这就需要对原式加以恰当的恒等变形，如(5)小题. 常见的变形有移项、多项结合，提出负号等等. 还要注意，计算后的结果不是最简二次根式时，一定要化成最简二次根式.

2. 与本题类似的其他变形有：

计算：

(1) $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{\dfrac{1}{3}}-4\sqrt{1\dfrac{1}{2}}+6\sqrt{1\dfrac{1}{3}}\right)\cdot6\sqrt{\dfrac{1}{6}}$；

(2) $\left(\sqrt{x^3y}-\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy^3}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\div\sqrt{x}$；

(3) $\left(4\sqrt{\frac{x}{2}}-3\sqrt{\frac{y}{3}}\right)\left(3\sqrt{\frac{x}{2}}-4\sqrt{\frac{y}{3}}\right)$；

(4) $(4\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

(5) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$；

(6) $(3+2\sqrt{6}-\sqrt{33})(\sqrt{22}+\sqrt{6}+4)$.

解　(1) $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{\frac{1}{3}}-4\sqrt{1\frac{1}{2}}+6\sqrt{1\frac{1}{3}}\right)\cdot 6\sqrt{\frac{1}{6}}$

$=(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6}-4\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}$

$=(2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-5\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}$

$=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}-5\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$

$=4\sqrt{3}-12-15\sqrt{2}$

(2) $\left(\sqrt{x^3y}-\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy^3}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\div\sqrt{x}$

$=\frac{\sqrt{x^3y}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{\frac{y}{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{xy^3}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

$=x\sqrt{y}-\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{y}+\frac{\sqrt{y}}{y}$

$=\left(x-\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)\sqrt{y}$

$=\frac{x^2y-y+xy^2+x}{xy}\sqrt{y}$

(3) $\left(4\sqrt{\frac{x}{2}}-3\sqrt{\frac{y}{3}}\right)\left(3\sqrt{\frac{x}{2}}-4\sqrt{\frac{y}{3}}\right)$

$=(2\sqrt{2x}-\sqrt{3y})\left(\frac{3}{2}\sqrt{2x}-\frac{4}{3}\sqrt{3y}\right)$

$=2\sqrt{2x}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2x}-2\sqrt{2x}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3y}-\sqrt{3y}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3y}$

$=6x-\frac{8}{3}\sqrt{6xy}-\frac{3}{2}\sqrt{6xy}+4y$

$=6x+4y-\frac{25}{6}\sqrt{6xy}$

(4) $(4\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=(4\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=32-3=29$

(5) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

$=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=2+3+2+3$

$=10$

(6) $(3+2\sqrt{6}-\sqrt{33})(\sqrt{22}+\sqrt{6}+4)$

$=\sqrt{3}(\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{11})\cdot\sqrt{2}(\sqrt{11}+\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

$=\sqrt{6}[(\sqrt{3}+2\sqrt{2})-\sqrt{11}][(\sqrt{3}+2\sqrt{2})+\sqrt{11}]$

$=\sqrt{6}[(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2-(\sqrt{11})^2]$

$=\sqrt{6}[(\sqrt{3}+4\sqrt{6}+8)-11]$

$=24$

【例 2】 计算

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$； (2) $\dfrac{\sqrt{125}-\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$；

(3) $(7\sqrt{2}+2\sqrt{6})\div(2\sqrt{6}-7\sqrt{2})$； (4) $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}\right)^2$.

思维技巧 (1)、(2)小题只需先进行分母有理化就能算出来,(3)小题写成分数形式再进行分母有理化和计算化简,(4)小题先通分,再计算.

解 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}-\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1-\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{2}$

$=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+1$

$=0$

(2) $\dfrac{\sqrt{125}-\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5^3}-\sqrt{2^3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{5})^3-(\sqrt{2})^3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})[(\sqrt{5})^2+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2]}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$=5+\sqrt{10}+2$

$=7+\sqrt{10}$

(3) $(7\sqrt{2}+2\sqrt{6})\div(2\sqrt{6}-7\sqrt{2})$

$=\dfrac{7\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-7\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(7\sqrt{2}+2\sqrt{6})^2}{(2\sqrt{6}+7\sqrt{2})(2\sqrt{6}-7\sqrt{2})}$

$=\dfrac{98+2\cdot7\sqrt{2}\cdot2\sqrt{6}+24}{24-98}$

$=-\dfrac{61+28\sqrt{3}}{37}$

(4) $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}\right)^2=\left[\dfrac{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\right]^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{1-3}\right)^2$

$=(\sqrt{3})^2=3$

激活思维　1. **二次根式分母有理化通常有两个途径：一是利用分式性质在分子分母上同时乘以有理化因式以化去分母中的根号，二是部分题目可根据自身的特点分解因数(式)约去分母中的根号，如本题(2)小题，一般说来，都可以用有理化因式化去分母中的根号，所以找分母的有理化因式是关键.常见的**$\sqrt{a}$**与**$\sqrt{a}$，$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$**与**$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$，$a+b\sqrt{x}$**与**$a-b\sqrt{x}$**是互为有理化因式.**

2. **与本题类似的其他变形有：**

计算：

(1) $1\div(5+\sqrt{11})$；　　(2) $\left(7\sqrt{21}+\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right)\div\sqrt{7}$；

(3) $\dfrac{7\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5\sqrt{7}-\sqrt{5}}$；　　(4) $\dfrac{3+\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$；

(5) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$；

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$.

解　(1) **原式**$=\dfrac{1}{5+\sqrt{11}}$

$=\dfrac{5-\sqrt{11}}{(5+\sqrt{11})(5-\sqrt{11})}$

$=\dfrac{5-\sqrt{11}}{25-11}=\dfrac{5-\sqrt{11}}{14}$

(2) **原式**$=\left(7\sqrt{21}+\dfrac{1}{7}\sqrt{21}\right)\div\sqrt{7}$

$=\dfrac{50}{7}\sqrt{21}\times\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

$=\frac{50}{7}\sqrt{3}$

(3) 原式$=\frac{\sqrt{7}(\sqrt{35}-1)}{\sqrt{5}(\sqrt{35}-1)}=\frac{\sqrt{35}}{5}$

(4) 原式$=\frac{(3+\sqrt{7})+(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{7})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(5) 原式$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{y}-(\sqrt{x}+\sqrt{y})=-2\sqrt{y}$

(6) 原式$=\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+2+\sqrt{6}-\sqrt{5}$

$=2\sqrt{6}+\sqrt{5}+2$

【例 3】 (辽宁省 2000 年)已知 $a=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$,$b=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$,求值:$\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

思维技巧 显然直接代入求值比较麻烦,可考虑把代数式化简再求值.并且 a,b 的值是分母的两个根式且互为有理代因式,故 a,b 必然简洁且不含根式,$a+b$ 值也可以求出来.

解 由已知得

$$a+b=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{3},$$

$$ab=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\sqrt{ab}\cdot\left(\frac{\sqrt{ab}}{b}+\frac{\sqrt{ab}}{a}\right)$$

$$=a+b=\sqrt{3}$$

激活思维 1. 本题所求的代数式具有这样的特点:如果把 a,b 互换位置,代数式值没有变,像这样的式子叫"对称式".常见的对称式还有 a^2+b^2,a^3+b^3,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$,$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$,$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$,$\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}$等等,一般来说,这些对称式都能用含 $a+b$ 及 a,b 的代数式来表示,故对这些代数式的求值问题,只需对代数式适当化简变形,用 $a+b$ 及 a、b 值代入,可使计算过程简化.

2. 与本题类似的其他变形有:

(1) (河北省 2000 年)已知:$a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}$,$b=\frac{1}{\sqrt{5}+2}$,求 $\sqrt{a^2+b^2+7}$

初二代数

的值.

解　$a+b=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}$，

$ab=1$

$\therefore$　**原式**$=\sqrt{(a+b)^2-2ab+7}$

$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2\times1+7}$

$=5$

(2)（武汉市 2000 年）$\dfrac{x^2}{x^2-2}=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求 $\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)\div\left(\dfrac{x}{x^2-1}+x\right)$ 的值.

解　$\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)\div\left(\dfrac{x}{x^2-1}+x\right)=\dfrac{2x}{(1-x)(1+x)}\div\dfrac{x^3}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{2x}{(1-x)(1+x)}\cdot\dfrac{(x+1)(x-1)}{x^3}$

$=-\dfrac{2}{x^2}$

$\because$　$\dfrac{x^2}{x^2-2}=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$，　$\therefore$　$\dfrac{x^2-2}{x^2}=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$，

$\therefore$　$-\dfrac{2}{x^2}=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

$\therefore$　**原式**$=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

【例 4】（山东省 1996 年）先化简，再求值：

$$\left[\frac{4}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}\right]\div\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$$，其中 $a=3$，$b=4$.

思维技巧　根据本题的特点，可有两种解题途径：其一是先通分做加法，后做除法；其二是先有理化，再通分，做加法，再变除为乘做乘法运算. 本题采用前种方法，计算较为简便.

解　**原式**$=\left[\dfrac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}^2)}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right]\times\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$=\dfrac{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\times\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{a-b}$

当 $a=3,b=4$ 时,原式 $=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3-4}=\sqrt{3}-2$

激活思维 1. 对化简求值一类问题,代数式进行化简是关键,化简方法和途径是多变的,要结合题目中代数式自身的特点作灵活处理.

2. 与本题类似的其他变形有:

(1) (陕西省 1996 年) 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,那么代数式 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值是________.

解 ∵ $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5-2\sqrt{6}$,

$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+2\sqrt{6}$,

∴ $x+y=5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}=10$,

$xy=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=1$.

∵ $3x^2-5xy+3y^2=3(x^2+y^2)-5xy$

$=3[(x+y)^2-2xy]-5xy$

$=3(x+y)^2-11xy$,

∴将 $x+y=10$, $xy=1$ 代入,得

原式 $=3\times10^2-11\times1=289$

(2) 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$,求 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ 的值.

解 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(x+1)-x}-\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(x+1)-x}$

$=(x+1)+\sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x(x+1)}+x$

$=2x+1$.

当 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ 时,

原式 $=2\times\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+1=\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

(3) 已知 $x=\sqrt{3}-2$,求 $x^4+4x^3+3x^2-4x-4$ 的值.

解 ∵ $x=\sqrt{3}-2$,

∴ $x+2=\sqrt{3}$, $(x+2)^2=3$,即 $x^2+4x+1=0$.

又　$x^4+4x^3+3x^2-4x-4$

$=(x^2+2)(x^2+4x+1)-12x-6$，

$\because\quad x=\sqrt{3}-2$，$x^2+4x+1=0$，

$\therefore$原式$=-12x-6$

$=-12(\sqrt{3}-2)-6$

$=18-12\sqrt{3}$

(4) (北京市东城区 2001 年) 已知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$求$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+2$的值.

解　由题目条件知

$a+b=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}$，

$a\cdot b=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=1$.

$\therefore\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+2=\dfrac{b^2+a^2}{ab}+2=\dfrac{b^2+a^2+2ab}{ab}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}$

$=(2\sqrt{5})^2$

$=20$

(5) (辽宁省 2001 年) 已知 $a=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，求 a^3b+ab^3 值.

解　$\because a+b=-(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)=-2$，

$ab=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=-1$，

$\therefore a^3b+ab^3=ab(a^2+b^2)=ab[(a+b)^2-2ab]$

$=-1\cdot[(-2)^2-2(-1)]$

$=-6$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 若 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$，$b=\sqrt{2}+1$，则 a，b 的关系是 (　　)

A. 互为倒数　　B. 互为相反数

C. 相等　　D. 互为有理化因式

2. $(\sqrt{10}+3)^2\cdot(\sqrt{10}-3)$的值是 (　　)

A. $\sqrt{10}-3$　　B. 3　　C. -3　　D. $\sqrt{10}+3$

二、填空题

3. 化简：$\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\frac{1}{a}}=$________.

4. 计算：$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$________.

5. 若 $x=2-\sqrt{3}$，则 $\sqrt{x^2-2x+1}+\frac{1}{x}=$________.

6. 若 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，则 $\frac{x^3+x++1}{x^4}=$________.

7. 若 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$，则 $a-\frac{1}{a}=$________.

8. 比较大小：$\sqrt{1998}-\sqrt{2000}$________$\sqrt{1997}-\sqrt{1999}$.

9. 当 $x=$________时，二次根式 $\sqrt{x+1}$ 取得最小值，其最小值为________.

10. $\sqrt{2}+1$ 的倒数是________，$\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 的绝对值是________.

11. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1999}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2000}=$________.

三、计算题

12. $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

13. 已知 $x=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，$y=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $3x^2+5xy+3y^2$ 的值.

14. 已知：$x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-2}$ 是方程 $ax-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=0$ 的解，求 a 的值.

15. 如果 $\sqrt{x-3}+(\sqrt{3}-y)^2=0$，求 y^x 的值.

16. 已知 $x=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$y=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$，($n$ 为自然数)

问：n 为何值时，代数式 $19x^2+136xy+19y^2$ 的值为 1998.

四、计算题

17. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$；

18. $\frac{a+1+\sqrt{a^2-1}}{a+1-\sqrt{a^2-1}}+\frac{a+1-\sqrt{a^2-1}}{a+1+\sqrt{a^2-1}}$；

19. $\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a^2}+a+1}{2a}\right)\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)$.

探究能力测试

20．(广州市 2001 年)化简$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$，甲、乙两同学的解法如下：

甲：$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$；

乙：$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

对于他们的解法，正确的判断是（　　）

A. 甲、乙的解法，都正确

B. 甲的解法正确，乙的解法不正确

C. 甲的解法不正确，乙的解法正确

D. 甲、乙的解法都不正确

21．(陕西省 1998 年)化简$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a+b-\sqrt{ab}}+\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a+b+\sqrt{ab}}$.

22．已知$\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-1}=1$，求$\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-1}$的值.

23．已知 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，求$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$的值.

11.7　二次根式$\sqrt{a^2}$的化简

学点探究分析　重点　本节的重点是公式$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0)\end{cases}$的理解与运用.

难点　本节的难点是分式$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0)\end{cases}$的运用，公式$\sqrt{a^2}=|a|$与$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$的比较，公式 $a=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0)\end{cases}$中的 a 的隐含条件的挖掘.

探究点　式子$\sqrt{a^2}$按计算顺序是先平方后开方，是表示任意实数 a 的平方的算术平方根，因为非负数 a^2 的算术平方根为非负数，故$\sqrt{a^2}=|a|$，

而 $(\sqrt{a})^2$ $(a\geqslant0)$ 中的 a 的取值范围是非负数，所以 $(\sqrt{a})^2=a$，不需用绝对值符号来保证其非负性. 受课本中约定字母为非负数的影响，很多同学易忽视对$\sqrt{a^2}$及$\sqrt{a}$ $(a\geqslant0)$ 中的两个不同取值 a 的隐含条件的挖掘. 对二次根式$\sqrt{a^2}=|a|$的学习研究，可将它化简后的结果转化为绝对值问题，从而使形如$\sqrt{a^2}$的二次根式化简得到顺利解决. 对$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^2}$中 a 的取值的探讨研究，是学好本节内容的关键.

学习方法技巧

1. 从学过的算术平方根及相关知识认识理解二次根式的性质

$\sqrt{a^2}$是实数 a 的平方的算术平方根，因为是算术平方根，是一个非负数，故$\sqrt{a^2}=|a|$.

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant0),\\-a\ (a<0).\end{cases}$ 这个公式也可以写成 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a>0),\\-a\ (a\leqslant0).\end{cases}$ 还可以写成：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a>0),\\0\ (a=0),\\-a\ (a<0).\end{cases}$

2. 公式$\sqrt{a^2}=|a|$与公式 $(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geqslant0)$ 的比较

(1) 公式 $(\sqrt{a})^2=a$ 的左边是对a 先进行开平方再平方，a 是被开方数，所以必须有 $a\geqslant0$ 的条件，否则$\sqrt{a}$的实数范围内无意义；而公式$\sqrt{a^2}=|a|$的左边是对 a 先平方再开方，a^2 是被开方数，所以不论 a 取任何实数，总有 $a^2\geqslant0$，因此$\sqrt{a^2}=|a|$在实数范围内始终有意义.

(2) 只有在 $a\geqslant0$ 时，才有$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a$.

能力升级捷径

【例 1】 计算：

(1) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$；(2) $\sqrt{(\pi-3.14)^2}$；(3) $\sqrt{9a^2}$ $(a<0)$；

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+2}$ $(x\leqslant-2)$.

思维技巧 可直接运用公式$\sqrt{a^2}=|a|$，再由题目已知条件和绝对值的定义，脱去绝对值符号.

解 (1) $\because$ $\sqrt{2}-\sqrt{5}<0$,

$\therefore$ $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}=|\sqrt{2}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

(2) ∵　$\pi-3.14>0$，

$\sqrt{(\pi-3.14)^2}=|\pi-3.14|=\pi-3.14$

(3) ∵　$a<0$，

∴　$\sqrt{9a^2}=|3a|=-3a$

(4) ∵　$x\leqslant-2$，∴　$x+2\leqslant0$，

∴　$\sqrt{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}(x+2)^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}|x+2|$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-2$

激活思维　1. **公式**$\sqrt{a^2}=|a|$**中**，a **能取任意实数，要先对** a **的符号进行判定，再脱去绝对值. 由于受课本中约定的字母为正的影响，很容易出现例如**$\sqrt{9a^2}=3a$，$\sqrt{(x+2)^2}=x+2$ **之类的错误，事实** (3)、(4) **题中的** a、x **均可以取负数.**

2. **与本题类似的变形有：**

(1) (**济南市** 2001 **年**) **若**$\sqrt{(a-3)^2}=a-3$，**而** a **的取值范围是**（　　）

A. $a>3$　　B. $a\geqslant3$　　C. $a<3$　　D. $a\leqslant3$

解　∵　$\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|$，

又　$\sqrt{(a-3)^2}=a-3$，

∴　$|a-3|=a-3$，

∴　$a-3\geqslant0$，

∴　$a\geqslant3$.

故选 B.

(2) (**辽宁省** 2001 **年**) **已知** $x\leqslant1$，**化简**$\sqrt{1-2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+4}=$ __________.

解　∵　$x\leqslant1$，

∴　$\sqrt{1-2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+4}$

$=|1-x|-|x-2|$

$=(1-x)-(2-x)$

$=1$

(3) 化简:① $\sqrt{27a^2b}$ $(a<0)$;② $\sqrt{a^5b^2}$ $(a>0,b<0)$.

解 ① $\sqrt{27a^2b}$

$=\sqrt{3^2a^2\cdot 3b}=3|a|\cdot\sqrt{3b}=-3a\sqrt{3b}$

② $\sqrt{a^5b^2}$

$=\sqrt{a^4b^2\cdot a}=a^2|b|\sqrt{a}=-a^2b\sqrt{a}$

(4) 化简:

① $\sqrt{(x+4)^2}$ $(x<-4)$; ② $\sqrt{4a^2}$ $(a<0)$;

③ $\sqrt{(x+y)^2(x-y)^2}$ $(x<y<0)$.

解 ① $\because x<-4$,$\therefore x+4<0$

$\therefore\sqrt{(x+4)^2}=|x+4|=-x-4$

② $\because a<0$,$\therefore -a>0$,$\therefore\sqrt{4a^2}=\sqrt{(2a)^2}=|2a|=-2a$

③ $\because x<y<0$,$\therefore x+y<0$,$x-y<0$,

$\therefore (x+y)(x-y)>0$,

$\therefore\sqrt{(x+y)^2(x-y)^2}=|(x+y)(x-y)|=(x+y)(x-y)$

$=x^2-y^2$

【例2】 化简:$a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

思维技巧 题目中字母的取值范围,分析出字母 a 的取值范围是正确解答本题的关键.由二次根式的定义知 $-\frac{1}{a}\geqslant 0$,故本题条件中实际上隐含了条件 $a<0$.

解 由二次根式定义知 $-\frac{1}{a}\geqslant 0$,$\therefore\ a<0$.

$\therefore\ a\sqrt{-\frac{1}{a}}=a\sqrt{-\frac{a}{a^2}}=a\cdot\frac{\sqrt{-a}}{|a|}=a\cdot\frac{\sqrt{a}}{-a}$

$=-\sqrt{a}$

激活思维 1.运用公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 解答问题时,如果被开方数是字母或是含字母的平方时,一定要弄清字母的取值范围,特别是要根据题目自身来挖掘字母的取值范围,如本题,不要出现 $\sqrt{a^2}=a$ 这样的错误,这是确保正确化简 $\sqrt{a^2}$ 类型的二次根式的关键.

2. **与本题类似的其他变形有：**

(1) **先判断下列各式的正误.如果错误,要加以改正.**

① $\sqrt{x^2+2x+1}=x+1$；

② $\sqrt{x^6}=x^3$；

③ 若 $a<2$,则$\dfrac{\sqrt{(a-2)^2}}{a-2}=-1$；

④ 若 $x<0$,则$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x-1)^2}=3$.

解　①错,应改为：$\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|$.

②错.当 $x<0$ 时,$x^3<0$,$\sqrt{x^6}=\sqrt{(x^3)^2}=-x^3$.当 $x\geqslant 0$ 时,则 $\sqrt{x^6}=x^3$.应改为：$\sqrt{x^6}=|x^3|$.

③对.

④错.当 $x<0$ 时,$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x-1)^2}=|x-2|-|x-1|=(2-x)-(1-x)=1$.

(2) 如果$\sqrt{\dfrac{1}{(2a-1)^2}}=\dfrac{1}{1-2a}$,那么(　　)

A. $a\geqslant\dfrac{1}{2}$　　B. $a>\dfrac{1}{2}$　　C. $a\leqslant\dfrac{1}{2}$　　D. $a<\dfrac{1}{2}$

解　因为$\sqrt{\left(\dfrac{1}{2a-1}\right)^2}=\left|\dfrac{1}{2a-1}\right|=\dfrac{1}{1-2a}$,说明$\dfrac{1}{2a-1}<0$,也就是分母 $2a-1<0$,所以 $a<\dfrac{1}{2}$.故选 D.

(3) 化简：

① $(y-x)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-2xy+y^2}}$　$(x>y)$；

② $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}-2}$　$(0<a<1)$.

解　① $\because$ $x>y$,$\therefore$ $x-y>0$,

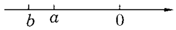
$$\therefore\ (y-x)\sqrt{\frac{x}{x^2-2xy+y^2}}=(y-x)\sqrt{\frac{x}{(x-y)^2}}$$

$$=\frac{x-y}{|x-y|}\sqrt{x}=\frac{y-x}{x-y}\sqrt{x}=-\sqrt{x}$$

② $\because$ $0<a<1$,$\therefore a<\dfrac{1}{a}$即$a-\dfrac{1}{a}<0$.

$$\therefore\ \sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|=-\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{1-a^2}{a}$$

【例 3】 (重庆市 2001 年)如果表示 a,b 两个实数的点在数轴上的位置如图 11－1 所示,那么化简 $|a-b|+\sqrt{(a+b)^2}$ 的结果等于(　　)



A. $2a$　　　　B. $2b$

C. $-2a$　　　　D. $-2b$

图 11－1

思维技巧　可先应用公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化去题目中的二次根式,得到两个绝对值的和.联系实数 a,b 在数轴上所处的位置,就能得到 $a<0,b<0,b<a$,故有 $a+b<0,a-b>0$,脱去绝对值符号,就能合并同类项算出结果来.

解　由图 11－1 知 $a<0,b<0$,且 $b<a$.

$\therefore\quad a+b<0.a-b>0.$

$$\therefore\quad |a-b|+\sqrt{(a+b)^2}=|a-b|+|a+b|$$
$$=(a-b)+[-(a+b)]$$
$$=-2b.$$

故选 D.

激活思维　1. 正确地运用公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 是解答本题的关键所在.

2. 一个数在数轴上所对应的点,如果在原点的左侧,则此数小于零;如果在原点的右侧,则此数大于零.此性质反过来也成立.另外,数轴上的点,靠左侧的点所表示的数一定比靠右侧的点所表示的实数要小.联系实数在数轴上的点的位置,得到对应实数的取值范围,确定 $a+b,a-b$ 的符号,脱去绝对值符号,是解答本题又一难点.注意代数式的符号正确变化,不可弄错.

3. 与本题类似的其他变形有:

(1) 已知实数 a,b,c 在数轴上的位置如图 11－2 所示,求代数式 $\sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt{(c-a)^2}-|-b|$ 的值.

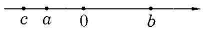


图 11－2

解　根据 a,b,c 在数轴上的位置,得 $a<0,c<a,b>0$,

$\therefore\quad a+c<0,c-b<0.$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt{(c-b)^2}-|-b|$$
$$=|a|-|a+c|+|c-b|-|b|$$
$$=(-a)-(-a-c)+(b-c)-b$$
$$=-a+a+c+b-c-b=0$$

(2) 化简下列各式:

初二代数

① $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(4-a)^2}$　$(a>4)$；

② $\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-10a+25}$　$(-3<a<5)$；

③ $\sqrt{a+\frac{1}{a}+2}-\sqrt{a+\frac{1}{a}-2}$　$(0<a<1)$.

解　① $\because$　$a>4$

$\therefore$　$a-1>0, 4-a<0$

$\therefore$　$\sqrt{(a-1)^2-(a-4)^2}=|a-1|-|4-a|=(a-1)-(a-4)=3$

② $\because$　$-3<a<5$

$a+3>0, a-5<0$

$\therefore$　$\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-10a+25}$

$=\sqrt{(a+3)^2}+\sqrt{(a-5)^2}$

$=|a+3|+|a-5|$

$=(a+3)-(a-5)=8$

③ $\because$　$0<a<1$

$\therefore$　$\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}>0, \sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}<0$

$\therefore$　$\sqrt{a+\frac{1}{a}+2}-\sqrt{a+\frac{1}{a}-2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2}$

$=\left|\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right|-\left|\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right|$

$=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$

$=2\sqrt{a}$

【例 4】　当 x 取何值时，下列等式成立：

(1) $\sqrt{x^2+6x+9}=-x-3$；

(2) $\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{4-4x+x^2}=7$；

(3) $\sqrt{x-(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}=1$.

思维技巧　$\sqrt{a^2}=|a|$，而 $|a|=a$ 还是 $-a$ 要根据 a 的取值范围而定，而本题是逆用此规律.

解　(1) $\because$ $\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|=-x-3$

$\therefore\quad x+3\leqslant 0$，$\therefore\quad x\leqslant -3$

(2) $\because\quad \sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{4-4x+x^2}=|x+5|-|2-x|$，又右边 $=7$，当且仅当 $|x+5|=x+5$，$|2-x|=x-2$ 时，即 $x+5\geqslant 0$ 且 $2-x\leqslant 0$ 时，$\therefore\quad x\geqslant 2$ 时左边 $=(x+5)-(x-2)=7$

(3) 设 $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$，则 $a>0$，

$\because\quad a^2=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}=6$

$\therefore\quad a=\sqrt{6}$，故有 $\sqrt{x-\sqrt{6}}=1$，$\therefore\quad x=\sqrt{6}+1$

激活思维 1. 正确运用公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 之后. 脱去绝对值符号，有时题目没有告诉字母的取值范围，解这类题目时，就要根据题目中隐含条件，挖掘出字母的取值范围进行运算.

2. 与本题相类似的其他变形还有：

(1) 化简：

① $\sqrt{-a^3b^2}$，$(ab<0)$；② $\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}\quad (a<b)$.

解 ① 由二次根式定义知 $-a^3b^2<0$.

$\because\quad b^2>0$，$\therefore\quad a^3<0$，$\therefore\quad a<0$.

又 $\because\quad ab<0$，$\therefore\quad b>0$.

$$\therefore\quad \sqrt{-a^3b^2}=|ab|\sqrt{-a}$$
$$=-ab\sqrt{-a}$$

② 由二次根式定义知 $-(x+a)^3(x+b)\geqslant 0$，$\because\quad (x+a)^2\geqslant 0$，

$\therefore\quad (x+a)^3(x+b)\leqslant 0$，$\therefore\quad (x+a)(x+b)\leqslant 0$

$\because\quad a<b$，$\therefore x+a<x+b$.

又 $\quad (x+a)(x+b)\leqslant 0$

$\therefore\quad x+a\leqslant 0$，$x+b\geqslant 0$.

$$\therefore\quad \sqrt{-(x+a)^3(x+b)}=|x+a|\sqrt{-(x+a)(x+b)}$$
$$=-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$$

(2) 把下列各式中根号外的数移入根号内：

① $(x-1)\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$；② $(x-y)^2\sqrt{\dfrac{1}{(y-x)^3}}$.

解 ① 由二次根式定义知 $\dfrac{1}{1-x}>0$，$\therefore\quad 1-x>0$

$\therefore\quad x-1<0$

$$\therefore\quad (x-1)\sqrt{\frac{1}{1-x}}=-(1-x)\sqrt{\frac{1}{1-x}}=-\sqrt{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1}{1-x}}$$
$$=-\sqrt{1-x}.$$

② $\because (x-y)^2>0$，

$$\therefore (x-y)^2\sqrt{\frac{1}{(y-x)^3}}=\sqrt{(x-y)^4}\cdot\sqrt{\frac{1}{(y-x)^3}}$$
$$=\sqrt{(x-y)^4\cdot\frac{1}{(y-x)^3}}=\sqrt{y-x}$$

【例 5】　若 x 为实数

(1) 如果 $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$，**则 x 的取值范围是**________.

(2) 如果 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}$. **那么 x 的取值范围是（　　）**

A. $x\geqslant1$　　B. $x\leqslant-1$　　C. $-1\leqslant x\leqslant1$　　D. $x=0$

思维技巧　对于任意实数，正数的绝对值等于它本身，0 **的绝对值是** 0，**负数的绝对值等于它的相反数. (1) 小题化简可得** $|x-3|=3-x$，**即** $x-3$ **的绝对值等于它的相反数，故有** $x-3\leqslant0$，$x\leqslant3$；**(2) 小题化简可得** $|x-1|+|x+1|$，**把** $a\geqslant$、$a\leqslant-1$ **及** $-1\leqslant a\leqslant1$ **分别代入化简后的代数式中，可知** $-1\leqslant a\leqslant1$.

解　(1) $\because\ \sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$.

又　$\because\ \sqrt{x^2-6x+9}=3-x$

$\therefore\ |x-3|=3-x$.

$\therefore\ x-3\leqslant0$.

$\therefore\ x\leqslant3$

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}$

$=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$

$=|x-1|+|x+1|$

当 $x\geqslant1$ **时，** $|x-1|+|x+1|=(x-1)+(x+1)=2x$；

当 $x\leqslant-1$ **时，** $|x-1|+|x+1|=(1-x)+(-x-1)=-2x$；

当 $-1\leqslant a\leqslant1$ **时，** $|x-1|+|x+1|=(1-x)+(x+1)=2$.

故选 C

激活思维　1. **本例题是一道知道了化简结果求字母取值范围的题目，解答时可运用公式"**$\sqrt{a^2}=|a|$**"先化去根号，再把** $|a|$ **与最终计算结果加以比较，得出取值范围 或把字母取值范围分段讨论，如 (2) 小题，从而确定字**

母 a 的取值范围.

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 若$\sqrt{(x-4)^2}=4-x$，求 x 的取值范围.

解 $\because \sqrt{(x-4)^2}=|x-4|$，又 $\sqrt{(x-4)^2}=4-x$.

$\therefore |x-4|=4-x$.

$\therefore x-4\leqslant 0.\therefore x\leqslant 4$

(2) 已知 $\sqrt{(x-5)(x-8)^2}=(8-x)\sqrt{x-5}$，且 x 为奇数，求 $\sqrt{1+2x+x^2}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2+7x-8}{x+1}}$的值.

解 $\because \sqrt{(x-5)(x-8)^2}=|x-8|\sqrt{x-5}$.

又 $\because \sqrt{(x-5)(x-8)^2}=(8-x)\sqrt{x-5}$，

$\therefore |x-8|=8-x.\therefore\ x\leqslant 8$.

又由二次根式定义知

$x-5\geqslant 0$，$\therefore\ x\geqslant 5.\ \therefore\ 5\leqslant x\leqslant 8$.

$\because x$ 为奇数. $\therefore x=5$ 或 $x=7$

$\therefore\ \sqrt{1+2x+x^2}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2+7x-8}{x+1}}=\sqrt{(1+x)^2\cdot\dfrac{(x+8)(x-1)}{x+1}}=\sqrt{(x^2-1)(x+8)}$.

当 $x=5$ 时，

原式$=\sqrt{(5^2-1)(5+8)}=\sqrt{24\times 13}=2\sqrt{78}$；

当 $x=7$ 时，

原式$=\sqrt{(7^2-1)(7+8)}=\sqrt{48\times 15}=12\sqrt{5}$

(3) 如果$\sqrt{(2x-5)^2}+\sqrt{(5+2x)^2}=10$. 求 x 的取值范围.

解 由 $2x-5=0$，得 $x=\dfrac{5}{2}$；由 $5+2x=0$，得 $x=-\dfrac{5}{2}$.

当 $x\geqslant\dfrac{5}{2}$时，

$$\begin{aligned}\sqrt{(2x-5)^2}+\sqrt{(5+2x^2)}&=|2x-5|+|5+2x|\\&=(2x-5)+(5+2x)\\&=4x；\end{aligned}$$

当 $x\leqslant-\dfrac{5}{2}$时，

$\sqrt{(2x-5)^2}+\sqrt{(5+2x)^2}=|2x-5|+|5+2x|$

$= -(2x-5)-(5+2x)=-4x$；

当 $-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$ 时.

$\sqrt{(2x-5)^2}+\sqrt{(5+2x^2)}=|2x-5|+|5+2x|=-(2x-5)+5+2x$

$=10.$

$\therefore x$ 的取值范围是 $-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$

(4) 化简：$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}+(\sqrt{x-2})^2$.

解　由根式定义知

$x-2\geqslant 0$，$\therefore\ x\geqslant 2$.

$\therefore\ \sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}+(\sqrt{x-2})^2$

$=|x-1|-|x-2|+(x-2)$

$=(x-1)-(x-2)+(x-2)$

$=x-1$

【例 6】　已知△ABC 的三边分别为 a，b，c，化简：$\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}-\sqrt{(c-a-b)^2}$.

思维技巧　应用三角形中任意两边之和大于第三边的性质可以知道 $a+b+c>0$，$a-b-c<0$，$b-c-a<0$，$c-a-b<0$，脱去绝对值符号后再进行计算.

解　$\because\ a$、b、c 是△ABC 三边，

$\therefore\ a+b+c>0$，$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$.

$\therefore\ a-b-c<0$，$b-c-a<0$，$c-a-b<0$.

$\therefore\ \sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}-\sqrt{(c-a-b)^2}$

$=|a+b+c|+|a-b-c|+|b-c-a|-|c-a-b|$

$=(a+b+c)+(b+c-a)+(c+a-b)-(a+b-c)$

$=4c$.

激活思维　1. 运用式子 $\sqrt{a^2}=|a|$ 进行运算，关键是确定 a 的符号脱去绝对值符号. 前面的例题中，都是通过代数式（特别是二次根式定义）来确定 a 的符号，本题是通过几何三角形边之间关系来确定 a 的符号的，具有一定的综合性，其解题思路新颖独特.

2. 与本题类似的其他变形有：

若 $\sqrt{a-1}+\sqrt{6-a}$ 有意义，化简 $\sqrt{1-2a+a^2}-\sqrt{a^2-14a+49}$.

解　由二次根式定义知

$\begin{cases} a-1\geqslant 0, \\ 6-a\geqslant 0. \end{cases}$ 解得　$1\leqslant a\leqslant 6.$

$\therefore\quad \sqrt{1-2a+a^2}-\sqrt{a^2-14a+49}$

$=\sqrt{(1-a)^2}-\sqrt{(a-7)^2}=|1-a|-|a-7|=(a-1)-(7-a)$

$=2a-8$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1．(南京市 1997 年)当 a 为实数时，$\sqrt{a^2}=-a$，则实数 a 在数轴上的对应点在(　　)

A．原点的右侧　　　　B．原点的左侧

C．原点或原点的右侧　　　　D．原点或原点的左侧

2．如果 $a<b$，那么$\sqrt{-(x+a)^3(x+b)^3}$等于(　　)

A．$(x+a)(x+b)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$

B．$(x+a)(x+b)\sqrt{(x+a)(x+b)}$

C．$-(x+a)(x+b)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$

D．$-(x+a)(x+b)\sqrt{(x+a)(x+b)}$

3．在实数范围内，$y=|-\sqrt{-(x-1)^2}\pm x|$的值为(　　)

A．0　　B．1　　C．± 1　　D．无法确定

4．使式子$-x\sqrt{x+a}=\sqrt{x^3+ax^2}$成立的 x 的取值范围是(　　)

A．$x\leqslant 0$　　　　B．$-a\leqslant x\leqslant 0$

C．$x\geqslant -a$　　　　D．非以上答案

5．当 $a\geqslant 0,b\leqslant 0$ 时，$\sqrt{b(\sqrt{a}+\sqrt{a-b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{a-b})}=$(　　)

A．b　　B．$-b$　　C．$\sqrt{2b}$　　D．0

6．已知实数 a,b 在数轴上表示的点如图 11－3，化简$|a+b|+\sqrt{(a-b+1)^2}$的结果是(　　)

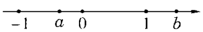


图 11－3

A．$2b-1$　　　　B．$2a+1$

C. $-2a-1$　　　　D. $-2b+1$

7. 已知实数 a 满足 $|1-a|-|a|=1$，那么 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{a^2}$ 的值是（　）

A. 1　　B. $1-2a$　　C. $2a-1$　　D. a

8. 当 $a>0$，$b>0$ 时，下列等式中成立的是（　）

A. $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}$　　B. $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{ab}$

C. $(-\sqrt{a})^2=a$　　D. $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

二、填空题

9. 已知△ABC 的三边分别是 a，b，c，则 $\sqrt{(a-b-c)^2}-|b-a+c|=$ ________.

10. 当 $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$ 时，化简 $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

11. 已知 $a=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}-\sqrt{5}$，求 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac$ 的值.

12. 当 $0<x<1$ 时，化简 $\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}$.

探究能力测试

13. 如果 $\left|a-\frac{1}{x}-x\right|+\sqrt{x^2-3+\frac{1}{x^2}}=0$，那么 $\sqrt{(a-2)^2}$ 的值是（　）

A. $\sqrt{5}-2$　　B. $2-\sqrt{5}$　　C. $\pm\sqrt{5}-2$　　D. $\sqrt{5}\pm2$

14. 设等式 $\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立，其中 a，x，y 是两两不同的实数，求代数式 $\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$ 的值.

15. a，b，c 均为实数，$\sqrt{a^2}+a=0$，$\frac{|ab|}{ab}=1$，$\sqrt{c^2}=0$. 试化简：$\sqrt{b^2}-\sqrt{(a+b)^2}+|a-c|-\sqrt{(c-b)^2}$

16. 已知 $x^2-y^2=1$，且 $x>0$，$y>0$，试求 $x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{x^2-1}$ 的值.

17. 若 $\frac{a-b}{\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}}$ 有意义，试将其化简.

小结与复习

学点探究分析　**重点**　本节的重点是二次根式的化简与运算.

难点　本节的难点是二次根式的有关性质及其使用条件.

探究点　本章的主要内容是二次根式的性质与运算,包括三部分:二次根式的有关概念、性质与运算(化简),最重要的是二次根式运算,本章学习过程中,要特别注意用到了以下思想方法:

1. 从"特殊到一般"和从"一般到特殊"的认识思想方法,从特殊情况去探索一般规律,再通过一般规律去研究特殊情况,这是数学中经常使用的重要思维方法.本章在探索二次根式的性质过程中,就是运用"从特殊到一般"的思想方法,从具体例子猜想、探索、并验证,归纳二次根式的性质.如由$\sqrt{4\times9}=6$,$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=6$,推出结论$\sqrt{4\times9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}$,推广到一般就得出二次根式的性质:积的算术平方根等于积中各因式算术平方根的积.在运用二次根式的性质化简二次根式的过程中,就是使用"由一般到特殊"的思想方法.

2. 类比思想.类比是一种在不同的对象之间,或者在事物与事物之间,根据它们某些方面(如特征、属性、关系)的相似之处进行比较,通过联想和猜测,推断出它们在其他方面也可能相似,从而去建立猜想和发现真理的方法.通过类比可以发现新旧知识的相同点,利用已有知识来认识新知识.本章学习中,合并同类二次根式的运算就是与合并同类项类比进行的.

例如:$2a-3b+a+b\xlongequal{\text{合并同类项}}(2+1)a+(-3+1)b=3a-2b$

$$2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\xlongequal{\text{合并同类二次根式}}(2+1)\sqrt{5}+(-3+1)\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{5}-2\sqrt{2}$$

又如:

$$(a+b)(a+c)\xlongequal{\text{多项式乘法}}a^2+ac+ba+bc$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3})\xlongequal{\text{二次根式相乘}}(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$$
$$=2+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$$

3. 转化思想的运用,转化是数学中常见的一种数学思想,在数学学习研

究过程中有着十分广泛的应用，在研究和解决数学问题时，经常要把复杂问题转化成简单问题加以解决，将疑难问题转化成容易问题，将未解决的问题转化为已知问题，在本章的学习研究过程中，就用到了这种思想方法，如在化简二次根式时，往往对被开方数进行因式分解，将其转化为积的算术平方根的形式，再根据积的算术平方根的性质，把能开得尽方的因式开方后移到根号外以达到化简目的. 再如要比较两个根式 $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的大小，可把 $2\sqrt{3}$ 根号外的因式移入根号内转化为 $\sqrt{12}$，把 $3\sqrt{2}$ 根号外的因式移入根号内转化为 $\sqrt{18}$，进而转化为只需要比较 $\sqrt{12}$ 与 $\sqrt{18}$ 大小，就能判别出 $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的大小，或是转化为比较 $(2\sqrt{3})^2$ 和 $(3\sqrt{2})^2$ 的大小，也能判断出 $3\sqrt{2}$ 与 $2\sqrt{3}$ 的大小. 又如要比较 $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ 与 $\sqrt{15}-\sqrt{14}$ 的大小，直接比较不容易，可转化为比较 $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ 的倒数与 $\sqrt{15}-\sqrt{14}$ 的倒数的大小，因为我们知道 $\sqrt{11}-\sqrt{10}>0$，$\sqrt{15}-\sqrt{14}>0$，正数中倒数大的反而小，$\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}=\sqrt{11}+\sqrt{10}$，$\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{14}}=\sqrt{15}+\sqrt{14}$，又 $\because \sqrt{11}+\sqrt{10}<\sqrt{15}+\sqrt{14}$，$\therefore \sqrt{11}-\sqrt{10}>\sqrt{15}-\sqrt{14}$.

学习方法技巧

1. 注意二次根式的运算技巧

二次根式运算是本章学习的重难点. 除了要熟悉各种运算方法、法则、性质公式之外，还要特别注意计算中的技巧，可使计算简便、准确、快捷. 如前面讲过的把二次根式化简，可把被开方数先分解成因数积的形式，就能把根式中开方开得尽的因数开出从来，而达到对根式化简的目的. 能用乘法公式的要用乘法公式，而且尽量做到避繁就简，为此还要对原式进行化简后再计算，或者提“公因式”进行计算. 如计算 $(\sqrt{5}+\sqrt{6})(5-\sqrt{30})$，可把因式 $(5-\sqrt{30})$ 提一个 $\sqrt{5}$ 出来即为 $\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{6})$. 再用平方差公式进行计算很简便. 又如 $(x-y)\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，就可把因式 $(x-y)$“分解”为 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，约分，计算就很简便了. 因式分解在根式计算中合理运用，会变得更容易. 某些代数式具有对称性特征，对其求值，如果用“整体代入”法求值，则显得更为巧妙. 如：已知 $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$，求代数式 $3x^2-4xy+3y^2$ 的值. 如果把“$x+y$”、“xy”当成一个整体求出来：$x+y=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}$、$xy=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}=1$，又：代数式 $3x^2-4xy+3y^2$

具有对称式特征，它可以恒等变形为 $3x^2-4xy+3y^2=3(x+y)^2-10xy$，那么把“$x+y$”、“$xy$”值整体代入计算，与直接代入 x、y 值进行计算功效就是不一样！二次根式的计算技巧很多，同学们在解题中，要联系以往学习的知识多思考多联想，定能熟而生巧，找到解题的最佳捷径.

2. 在进行二次根式的化简与运算时，往往需要先将式子中的二次根式适当化简或恒等变形. 例如，在进行除法运算时，适当化简就可能利用约分简化运算；又如，在进行加减法运算时，则必须先将各根式化成最简根式，并注意只有同类根式才能进行加减合并. 对于二次根式乘法来说，运用乘法公式有时也要对原式进行适当变形才能运用乘法算式.

3. 透彻理解基本概念、运算性质法则及应必备的限制条件

本章基本概念有二次根式定义、最简二次根式和同类二次根式的定义，二次根式定义中特别注意限制条件 $a\geqslant 0$，最简二次根式和同类二次根式不能仅背定义，要理解并能运用这两个公式对二次根式进行判别.

二次根式的加减法：二次根式相加减先把各根式化为最简二次根式，再合并同类二次根式.

二次根式的乘除法

(1) 乘法：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$

(2) 除法：

① $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{a}{b}\quad (a\geqslant 0, b>0)$；

② 分母有理化.

二次根式的混合运算：二次根式的混合运算遵循先乘方，再乘除，最后加减，有括号的先算括号里的，按顺序进行. 最后结果要化为最简二次根式.

二次根式的四个重要性质公式

① $(\sqrt{a})^2=a$，$(a\geqslant 0)$；

② $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & (a\geqslant 0),\\ -a, & (a<0)\end{cases}$；

③ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$；

④ $\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0, b>0)$.

运用这些性质公式，要注意其限制条件，这些限制性条件是解决某些问题的突破点和焦点.

能力升级捷径

【例1】 下列命题中正确的命题是（　　）

A. 当 $a\leqslant 0$ 时，$\frac{1}{\sqrt{-a}-2}$有意义

B. 仅当 $a\geqslant 2$ 时，$\sqrt{(a-2)^2}$才有意义

C. 当 $x\leqslant 2$ 时，$\sqrt{16-16+x^2}=4-2x$

D. $\sqrt{-a^3}=-a\sqrt{a}$

思维技巧　(A)由二次根式定义知，要使二次根式有意义，必须被开方数为非负数，则有 $a\leqslant 0$，但考虑到$\sqrt{-a}-2$作为分母，$\sqrt{-a}-2\neq 0$，故 $a\neq -4$，只有当 $a\leqslant 0$ 且 $a\neq -4$ 时，根式才有意义. 命题A不正确. (B)中被开方数是$(a-2)^2$，无论 a 取何实数$(a-2)^2$均为非负数. 因此，对实数 a 不必加限制条件. (C)中应用$\sqrt{a}=|a|$有$\sqrt{16-16x+4x^2}=\sqrt{(4-2x)^2}=|4-2x|=4-2x$，故化简正确. (D)中被开方数是$-a^3$，由二次根式定义要求要$-a^3\geqslant 0$，故 $a\leqslant 0$，$\sqrt{-a^3}=\sqrt{a^2(-a)}=|a|\sqrt{-a}=-a\sqrt{-a}$.

解　选C.

激活思维　1. 在考虑字母的取值范围、代数式是否有意义时，不仅要考虑二次根式中被开方数为非负数，如果分母中含有字母，还要考虑分母不为零.

2. 在运用二次根式乘法运算性质法则公式时，一定要注意限制条件和字母取值范围，特别是隐含条件.

3. 与本题类似的其他变形有：

(1) 能使式子$\sqrt{\frac{x}{x-3}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$成立的条件是（　　）

A. $\frac{x}{x-3}>0$　　B. $x\neq 3$　　C. $x\geqslant 0$　　D. $x>3$

解　$\begin{cases}x\geqslant 0,\\x-3>0.\end{cases}$　$\therefore\ x>3$. 故选D.

(2) 若等式$\sqrt{(3x+1)(2-x)}=\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{2-x}$成立，试化简：

$$|x-4|+\sqrt{9x^2+6x+1}+|x-2|.$$

解　$\because\ \sqrt{(3x+1)(2-x)}=\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{2-x}$，

$\therefore\ 3x+1\geqslant 0.2-x\geqslant 0$，$\therefore\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 2$，

$\therefore$ 原式$=|x-4|+|3x+1|+|x-2|=4-x+3x+1+2-x$

$=x+7$.

(3) 如果 x，y 是实数，且 $x<\sqrt{2-y}+\sqrt{y-2}+3$，化简$\frac{|x-3|}{3-x}+$

新教材同步学案

$\dfrac{\sqrt{x^2-8x+16}}{x-4}$.

解 由二次根式定义知

$$\begin{cases}2-y\geqslant 0,\\ y-2\geqslant 0,\end{cases}$$

$\therefore\quad y=2$

$\therefore\quad x<\sqrt{2-y}+\sqrt{y-2}+3=3.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{|x-3|}{3-x}+\frac{\sqrt{x^2-8x+16}}{x-4}&=\frac{3-x}{3-x}+\frac{\sqrt{(x-4)^2}}{x-4}\\&=1+\frac{|x-4|}{x-4}\\&=1+\frac{4-x}{x-4}\\&=1+(-1)\\&=0.\end{aligned}$$

(4) 若$\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-3}$有意义,求 x 的取值范围.

解 由二次根式的定义中被开方数为非负数知

$x-2\geqslant 0$,$\therefore\quad x\geqslant 2.$

又由分母不为零知

$\sqrt{x-2}-3\neq 0$,

$\sqrt{x-2}\neq 3$

$\therefore\quad x\neq 7$

故当 $x\geqslant 2$ 且 $x\neq 7$ 时,$\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-3}$有意义.

【例 2】 计算:$3\sqrt{\dfrac{12}{x}}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{xy}}\div\left(-\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{18}{xy^3}}\right)$

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{12}{x}\cdot\frac{3}{xy}}\div\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{18}{xy^3}}\right)\\&=\left(-\frac{3}{2}\div\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{12}{x}\cdot\frac{3}{xy}\div\frac{18}{xy^3}}\\&=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\sqrt{\frac{36}{x^2y}\cdot\frac{xy^3}{18}}\\&=-2\sqrt{\frac{2y^2\cdot x}{x\cdot x}}\end{aligned}$$

初二代数

$=-\frac{2y}{x}\sqrt{2x}$

激活思维　1．对于二次根式乘法具有性质$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$，对于二次根式除法具有性质$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,b>0)$，对于二次根式的加减法$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$，不能简单类比得到$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a\pm b}$，不具有$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a\pm b}$这个性质．

2．与本题类似的其他变形有：

(1) 下列运算正确的有（　　）个

①$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；②$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$；③$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$；④$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}\ (a>b>0)$；⑤$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

解　①是正确的；②不正确，其原因是没有注意条件；③、④均不正确，其原因是二次根式没有这种运算性质；⑤中等式左边 a 的取值范围是全体实数，等式右边 a 有条件限制$a\geqslant 0$，显然若 $a<0$ 时，等式不成立．故选 A．

(2) 若$\sqrt{a^2}=(-\sqrt{a})^2$，则 a ________0 若$\sqrt{a^2}=(\sqrt{-a})^2$，则 a ________0 若$\sqrt[3]{(-a)^3}=-\sqrt[3]{a^3}$，则 a ______．

解　$\sqrt{a^2}=(-\sqrt{a})^2$，则 $a\geqslant 0$；$\sqrt{a^2}=(\sqrt{-a})^2$，

$\because\ -a\geqslant 0$，$\therefore\ a\leqslant 0$；$\sqrt[3]{(-a)^3}=-\sqrt[3]{a^3}$，$a$ 为全体实数．

(3) 设 $a+b+c+3=2(\sqrt{a}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c-1})$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值．

解　原等式可变形为：$a+(b+1)+(c-1)+3=2\sqrt{a}+2\sqrt{b+1}+2\sqrt{c-1}$，因为不难看出 $a\geqslant 0$，$b+1\geqslant 0$，$c-1\geqslant 0$，所以可进一步变形为：

$[(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}+1]+[(\sqrt{b+1})^2-2\sqrt{b+1}+1]+[(\sqrt{c-1})^2-2\sqrt{c-1}+1]=0$，即$(\sqrt{a}-1)^2+(\sqrt{b+1}-1)^2+(\sqrt{c-1}-1)^2=0$，$\therefore\sqrt{a}-1=0$，$\sqrt{b+1}-1=0$，$\sqrt{c-1}-1=0$，$\therefore a=1$，$b=0$，$c=2$，$\therefore a^2+b^2+c^2=5$．

【例 3】　计算：

(1) $(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$；

(2) $(6+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$；

(3) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}}{b-\sqrt{ab}}\right)\div\frac{1}{\sqrt{b}}$．

思维技巧　(1)小题如果加以适当变形，可以用平方差公式进行运算；

新教材同步学案

(2) 小题中因式 $(6+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ 可提取“因式”$\sqrt{6}$,然后再用平方差公式计算;(3) 小题中分母 $(a+\sqrt{ab})$,$(b-\sqrt{ab})$ 均可“分解因式”,约简后可使计算简化.

解 (1) $(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$=[\sqrt{6}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})][\sqrt{6}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$$
$$=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$
$$=6-(3-2\sqrt{6}+2)$$
$$=1+2\sqrt{6}$$

(2) $(6+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$=\sqrt{6}(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$$
$$=\sqrt{6}[\sqrt{6}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})][\sqrt{6}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$$
$$=\sqrt{6}[(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2]$$
$$=\sqrt{6}[6-(3-2\sqrt{6}+2)]$$
$$=\sqrt{6}(1+2\sqrt{6})$$
$$=\sqrt{6}+12$$

(3) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{b}}{b-\sqrt{ab}}\right)\div\dfrac{1}{\sqrt{b}}$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}\right]\times\sqrt{b}$$
$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)\times\sqrt{b}$$
$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$
$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$
$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$
$$=\frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}+\frac{\sqrt{ab}+b}{a-b}$$
$$=\frac{a+b}{a-b}$$

激活思维 1. 在二次根式的乘法计算中,能运用公式计算的就用乘法公式计算,对于某些式子,要会巧变形,变成能运用乘法公式的形式.

2. 仅用 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$ 或 $a=(\sqrt{a})^2$，可把某些因式进行分解，如 (2)、(3) 小题，然后再用公式计算或约简，可使计算简化.

3. 与本题类似的其他变形有：

(1) 计算下列各式：

① $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}\div(\sqrt{3}+1)+\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}$；

② $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$；

③ $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\div\dfrac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$；

④ $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}-\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{b}}{b-\sqrt{ab}}\right)\div\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}$.

解　① $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}\div(\sqrt{3}+1)+\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}+\frac{2}{\sqrt{6}-2}$$

$$=(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{2(\sqrt{6}+2)}{2}$$

$$=\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{6}+2$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}+3$$

② $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$=3-2\sqrt{6}+2+\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1}$$

$$=5-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}-4$$

$$=1$$

③ $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\div\dfrac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$

$$=\left[\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{a}\cdot b\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right]\cdot\frac{a-b}{\sqrt{ab}-b}$$

$$=\left(\sqrt{ab}-\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=\left(\sqrt{ab}-\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$$

$=\sqrt{ab}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}-\dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$

$=a+\sqrt{ab}-\sqrt{ab}=a$

④ $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}-\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{b}}{b-\sqrt{ab}}\right)\div\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}$

$=\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}$

$=\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\cdot\dfrac{b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}$

$=\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}-\dfrac{2(b+\sqrt{ab})}{a-b}$

$=\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b-2b-2\sqrt{ab}}{a-b}$

$=\dfrac{a-b}{a-b}=1$

(2) 化简求值：

$\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\div\dfrac{\sqrt{b}}{a-b}$，**其中** $a=3-\sqrt{3}$.

解 $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\div\dfrac{\sqrt{b}}{a-b}$

$=\dfrac{(\sqrt{a})^2\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left[\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-(\sqrt{b})^2}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right]\times\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}$

$=\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left[\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right]\times\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}$

$=\sqrt{ab}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\times\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}$

$=\sqrt{ab}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\right)\times\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}$

$=\sqrt{ab}\cdot\dfrac{2\sqrt{a}}{a-b}\cdot\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}=2a=2(3-\sqrt{3})=6-2\sqrt{3}$

【例 4】 已知 $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，**求下列各式的值.**

(1) x^2-xy+y^2； (2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

思维技巧　若直接把 x，y **的值代入代数式中进行计算，是可以求出代数值来的，但计算量大且麻烦，一般不采用此法. 根据** x，y **值的特点，可以先**

初二代数

求得 $x+y=\sqrt{7}$，$x-y=\sqrt{5}$，$xy=\frac{1}{2}$，如果能把所求值的式子用 $x+y$，$x-y$ 及 xy 的代数式表示出来，再用 $x+y$，$x-y$ 及 xy 值代入求值比直接代入求值简单得多.

解　$\because$　$x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

$\therefore$　$x+y=\sqrt{7}$，$xy=\frac{1}{2}$

$\therefore$　(1) $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=(\sqrt{7})^2-3\times\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$

(2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(\sqrt{7})^2-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=12$

激活思维　1. 如果一个代数式中的两个字母互换，代数式不改变，这样的代数式我们称之为对称式，如 x^2+y^2 中，x 用 y 代换，y 用 x 代换，就得到 y^2+x^2，与原代数式恒等，故 x^2+y^2 就是一个对称式. 本例题中的代数式 x^2-xy+y^2、$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 都是对称式. 一般说来，关于 x、y 的对称式是可以用 $x+y$ 及 xy 的代数式表示出来的.

2. 对于含有两个字母的对称式代数式求值，可先求这两个字母和与积的值，再把代数式用这两个字母和与积表示出来，再代入求值，如本题.

3. 与本题类似的其他变形有：

(1) 已知 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，求代数式：① $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 的值；

② $\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}$ 的值.

解　$x-y=2\sqrt{3}$，$x\cdot y=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$，$x+y=4$.

$\therefore$　① $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}-\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$$

$$=\frac{4\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{4\sqrt{1}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

② $\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=\frac{y^4+x^4}{x^2y^2}$

$=\frac{x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2}{(xy)^2}$

$=\frac{(x^2+y^2)^2-2(xy)^2}{(xy)^2}$

$=\frac{[(x+y)^2-2xy]^2-2(xy)^2}{(xy)^2}$

$=\frac{(4^2-2\times1)^2-2\times1^2}{1^2}$

$=194$

(2) **已知** $A=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$，$B=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$，**求**$\frac{1}{A-1}+\frac{1}{B-1}$**的值.**

解 $A=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$，$B=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$，则 $A+B=6$，$AB=1$，

$\therefore \frac{1}{A-1}+\frac{1}{B-1}=\frac{B-1+A-1}{(A-1)(B-1)}$

$=\frac{(A+B)-2}{AB-(A+B)+1}=\frac{6-2}{1-6+1}=-1.$

【例 5】 计算$\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$ $(n>2)$

思维技巧　上面代数式可看作两个“分式”和的形式，且这两个“分式”互为倒数，若设 $n+2+\sqrt{n^2-4}=x$，$n+2-\sqrt{n^2-4}=y$，**则原式**$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2$，**然后把** $x+y$ **与** xy **代入计算，可简化计算过程.**

解　设 $x=n+2+\sqrt{n^2-4}$，$y=n+2-\sqrt{n^2-4}$，**则** $x+y=2n+4$，$xy=4n+8$.

$\therefore$ **原式**$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2$

$=\frac{(2n+4)^2}{4n+8}-2=\frac{4(n+2)^2}{4(n+2)}-2=n.$

激活思维　1. **把一个较繁杂的代数式(或其中一部分)当作一个整体用一个字母代替，然后解答问题，叫“换元法”，这种把代数式当成整体的思想就是换元思想. 换元法解题往往使问题变得更简单明朗化.**

2. 与本题类似的其他变形有：

(1) 化简：$\frac{a+1+\sqrt{a^2-1}}{a+1-\sqrt{a^2-1}}+\frac{a+1-\sqrt{a^2-1}}{a+1+\sqrt{a^2-1}}$ $(a>1)$.

解　设 $x=a+1+\sqrt{a^2-1}$，$y=a+1-\sqrt{a^2-1}$，则

$x+y=2(a+1)$，

$xy=(a+1)^2-(a^2-1)=2(a+1)$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2$

$=\frac{4(a+1)^2}{2(a+1)}-2$

$=2a+2-2$

$=2a$.

(2) 计算 $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

解法一　设 $\sqrt{2+\sqrt{3}}=a$，$\sqrt{2-\sqrt{3}}=b$，则

$ab=1$，$a^2+b^2=4$.

$\therefore\ (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4+2=6$

$\because\ a>0$，$b>0$，$\therefore\ a+b>0$.

$\therefore\ a+b=\sqrt{6}$，

$\therefore\ \sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=a+b=\sqrt{6}$.

解法二　设 $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=x$，

两边平方，得

$2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}=x^2$，

$\therefore\ x^2=6$

$\because\ x>0$，$\therefore\ x=\sqrt{6}$，$\therefore\ \sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$.

(3) 化简 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

解法一　设 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=a$，$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=b$，则

$ab=\sqrt{7^2-(4\sqrt{3})^2}=1$，$a^2+b^2=14$.

$\therefore\ (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=14+2=16$.

又 $\because\ a>0$，$b>0$，$\therefore\ a+b>0$.

$\therefore\ \sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=a+b=4$.

解法二 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}+\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$

$=\sqrt{2^2+2\times2\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}+\sqrt{2^2-2\times2\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$=|2+\sqrt{3}|+|2-\sqrt{3}|$

$=4.$

【例6】 化简$\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$.

对此题有位同学作如下解答：

解 $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}-\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$

$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})-(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$=-2\sqrt{y}.$

这位同学的解答正确吗？若不正确，请指出错误原因，并加以改正.

思维技巧 **本题是阅读理解题，解题方法是审查解答中的每一步，看是否有错误.本题的解答似乎天衣无缝，但仔细想来却忽视了**$\sqrt{x}-\sqrt{y}$**有可能为零的情形，显然是有错误的.**

解 **这位同学解答不正确，原因是**$\sqrt{x}-\sqrt{y}$**有可能是零.**

正确的解法是：

原式$=\dfrac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$

$=\sqrt{x}-\sqrt{y}-(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$=-2\sqrt{y}.$

激活思维 1.**二次根式计算中要注意字母符号及取值范围，约分时要看被约去的因式是否有可能为零.**

2.**本题的解答还可以是：**

当 $x=y$ **时，原式**$=0-|\sqrt{x}+\sqrt{y}|=-2\sqrt{y}$

当 $x\neq y$ **时，原式**$=\dfrac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}-|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$

$=\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}$

$=-2\sqrt{y}$.

3. **与本题类似的其他变形有：**

(1)阅读下面一道题的解答过程，判断是否正确，如不正确，请写出正确的解答过程.

化简$\sqrt{-a^3}-a^2\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

解　原式$=a\sqrt{-a}-a^2\cdot\frac{1}{a}\cdot\sqrt{-a}$

$=a\sqrt{-a}-a\sqrt{-a}$

$=0$.

解　上述解答有错误，正确解答如下：

原式$=\sqrt{-a\cdot a^2}-a^2\cdot\sqrt{-\frac{a}{a^2}}$

$=|a|\sqrt{-a}-a^2\cdot\left|\frac{1}{a}\right|\sqrt{-a}$

$=-a\sqrt{-a}+a\sqrt{-a}$

$=0$

(2) 化简：$\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^2b-4ab^2+4b^3}{a}}$ $(0<a<2b)$.

解　原式$=\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{b(a^2-4ab+4b^2)}{a}}$　　A

$=\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{ab(a-2b)^2}{a^2}}$　　B

$=\frac{a}{a-2b}\cdot\frac{|a-2b|}{|a|}\cdot\sqrt{ab}$　　C

$=\frac{a}{a-2b}\cdot\frac{a-2b}{a}\cdot\sqrt{ab}$　　D

$=\sqrt{ab}$　　E

问：①上述解题过程中，从哪一步开始出现错误，请写出该步的代号________；②错误的原因是________________；③本题的正确结论是________________.

解　① D

②**错因在由**$|a-2b|=a-2b$ **时忽视了** $a-2b<0$ **的条件，应是**$\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$.

新教材同步学案

③正确的结果是 $-\sqrt{ab}$.

(3) 已知一直角三角形的两直角边分别为$\sqrt{2}$cm 和$\sqrt{6}$cm. 求这个三角形的周长和面积.

解 斜边长为:

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ (\text{cm})$$

周长为:$\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\ (\text{cm})$

面积为:

$$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}$$
$$=\sqrt{3}\ (\text{cm}).$$

(4) 如图 11-4,设等腰三角形的腰为 a,底边为 b,底边上的高为 h.

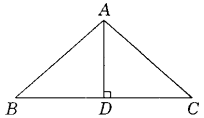


图 11-4

① 如果 $a=6+\sqrt{3}$,$b=6+4\sqrt{3}$,求 h.

② 如果 $b=2(2\sqrt{7}+1)$,$h=2\sqrt{7}-1$,求 a.

解 ① 在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$AD\perp BC$,

则 $BD=\frac{1}{2}BC$.

$\because\quad BC=b=6+4\sqrt{3}$,

$\therefore\quad BD=\frac{1}{2}(6+4\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$,

在 Rt$\triangle ADB$ 中,$\because AB^2=BD^2+AD^2$,

即 $a^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+h^2$,

$$\therefore h=\sqrt{a^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{(6+\sqrt{3})^2-(3+2\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{(6+\sqrt{3}+3+2\sqrt{3})(6+\sqrt{3}-3-2\sqrt{3})}$$
$$=\sqrt{3(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=3\sqrt{2}$$

② 在 Rt$\triangle ADB$ 中,$\because AB^2=BD^2+AD^2$,

即 $a^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+h^2$,

$$\therefore a=\sqrt{(2\sqrt{7}+1)^2+(2\sqrt{7}-1)^2}=\sqrt{58}$$

综合能力测试

基础能力测试

一、选择题

1. 当 $1<x<2$ 时,代数式 $\frac{\sqrt{(2-x)^2}}{x-2}+\frac{|1-x|}{x-1}$ 的值是(　　)

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. $\sqrt{a-1}-\sqrt{a}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}$ 的关系是(　　)

A. 互为相反数　　B. 互为倒数

C. 互为有理化因式　　D. 绝对值相等

3. 如果 $\sqrt{a-b-2\sqrt{3}}+(a+b-2\sqrt{2})^2=0$,那么 $\frac{b}{a}$ 的值是(　　)

A. 1　　B. -1　　C. $5-2\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{6}-5$

4. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}$、$(-2)^{-2}$ 与 2^0 的大小关系是(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}>2^0>(-2)^{-1}$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}>(-2)^{-1}>2^0$

C. $2^0>(-2)^{-1}>\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}$　　D. $2^0>\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}>(-2)^{-1}$

5. 若 $0<a<1$,则 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}\div\left(1+\frac{1}{a}\right)\times\frac{1}{1+a}$ 可化简为(　　)

A. $\frac{1-a}{1+a}$　　B. $\frac{a-1}{a+1}$

C. $1-a^2$　　D. a^2-1

6. 当 $x=\frac{1+\sqrt{1994}}{2}$ 时,多项式 $(4x^3-1997x-1994)^{2001}$ 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 2^{2002}　　D. -2^{2001}

7. 已知 $a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$,那么 $\frac{a^2-1}{a+1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值等于(　　)

A. $-(1+2\sqrt{3})$　　B. -1

C. $2-\sqrt{3}$　　D. 3

8. 能使 $\sqrt{-(x-4)^2}$ 是一个实数的实数 x 的个数是(　　)

A. 无穷多个　　B. 两个　　C. 一个　　D. 没有

9. 已知：$x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$，则 $x-\frac{1}{x}$ 等于（　　）

A. 2　　B. -2

C. ± 2　　D. 以上三项都不对

10. 以下几对数中，不互为倒数的是（　　）

A. $3+2\sqrt{2}$ 和 $3-2\sqrt{2}$　　B. $9+4\sqrt{5}$ 和 $9-4\sqrt{5}$

C. $7+4\sqrt{3}$ 和 $7-4\sqrt{3}$　　D. $11+8\sqrt{2}$ 和 $11-8\sqrt{2}$

11. 下面四个式子：

① $\sqrt{(a+b)^3}=a+b\sqrt{a+b}$

② $\sqrt{(3.14-\pi)^2}=3.14-\pi$

③ $\sqrt{(-2)^6\times 3}=(-2)^3\cdot\sqrt{3}$

④ $a^2+(-3)^2=(a+3)(a-3)$

其中有错误的式子是（　　）

A. ①②③④　　B. ②④　　C. ②③④　　D. ①③④

12. 如果 $5+\sqrt{7}$，$5-\sqrt{7}$ 的小数部分分别为 a，b，那么 $a+b$ 的值为（　　）

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. ± 1

13. 等腰三角形两条边长分别为 $2\sqrt{3}$ 和 $5\sqrt{2}$，那么这个三角形的周长等于（　　）

A. $4\sqrt{3}+5\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}+10\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{3}+10\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{3}+5\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{3}+10\sqrt{2}$

二、填空题

14. 当 x 为________时，代数式 $\sqrt{x^2-4x+4}$ 在实数范围内有意义.

15. 当 $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$，则 a ________ b.

16. 当 x ________时，$\sqrt{2x-1}$ 有最小值.

17. 若 $m<0$，则 $\sqrt{m^2}-\sqrt[3]{m^3}=$________.

18. $5-2\sqrt{6}$ 的倒数是________.

19. 式子 $\frac{\sqrt{x-2}}{2-\sqrt[3]{x}}$ 有意义的条件是________.

20. 若 $\sqrt{5-x-y}+|3x-2y+1|=0$，则 $\sqrt{xy}=$________.

21. 若 $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 是 x 的算术平方根，则 $x=$________.

22. 若菱形两对角线长分别为$(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})$和$(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})$，则菱形面积为________.

23. 如果x，y分别是$3-\sqrt{3}$的整数部分和小数部分，则$4xy-y^2=$________.

24. 满足$(1-\sqrt{3})x>1+\sqrt{3}$的最大整数是________.

25. 若最简根式$\sqrt[y]{x+y}$和$\sqrt{3x-2y}$是同类二次根式，则$x=$________，$y=$________.

26. 在根式$\sqrt{24}$，$\sqrt{x(a+2b)^2}$，$b\sqrt{10a}$，$\sqrt{\dfrac{2}{m}}$，$\sqrt{\dfrac{2n}{m}}$，$\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{m^2n^3p^3}$，$\sqrt{16a}$中，最简二次根式个数是________个.

三、计算题

27. $\dfrac{3\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-3}-\dfrac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$；

28. $\left(3\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{\dfrac{2}{3}}-8\sqrt{\dfrac{3}{8}}+3\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$；

29. $\left[\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot(2\sqrt{2}-3)\right]^{99}$；

30. $(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

四、解方程(组)

31. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=2\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2}x-2\sqrt{3}y=-4.\end{cases}$

五、化简求值

32. 化简$\left(\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right)\div(x-y)+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

33. 已知$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$，求代数式$x^4-7x^3+8x^2-7x+6$的值.

34. 已知：$x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，求代数式

$$1+\sqrt{1-x^2}+\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right)$$

的值.

探究能力测试

六、解答题

35．已知 $x=\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$，$y=\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}$，且 $19x^2+123xy+19y^2=1985$，求 a 值.

36．已知 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$，其中 a，b 为正数.

求证：$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ 的值在 $b>1$ 时是 b，在 $b<1$ 时是 $\dfrac{1}{b}$.

37．已知实数 $y=\sqrt{\dfrac{x-4\sqrt{3}}{x^2-x+1}}+\sqrt{\dfrac{4\sqrt{3}-x}{x^2-x+1}}$，

求 $\left(\dfrac{2y-x}{x-2y}\right)^2+\left(\dfrac{x+2y}{2y-x}\right)^2$ 的值.

38．如果以长度为 a，b，c 的三条线段可以构成三角形，那么线段 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 是否能构成三角形？请说明理由.

39．(荆门市) 阅读下列范例，按要求解答问题.

例 已知实数 a，b，c 满足 $a+b+2c=1$，$a^2+b^2+6c+\dfrac{3}{2}=0$，求 a、b、c 的值.

解法一 由已知得 $a+b=1-2c$， ①

$(a+b)^2-2ab+6c+\dfrac{3}{2}=0$. ②

将①代入②，整理得 $4c^2+2c-2ab+\dfrac{5}{2}=0$.

$\therefore\quad ab=2c^2+c+\dfrac{5}{4}$. ③

由①、③可知，a，b 是关于 t 的方程

$$t^2-(1-2c)t+2c^2+c+\frac{5}{4}=0 \qquad ④$$

的两个实数根.

$$\therefore\quad \Delta=(1-2c)^2-4\left(2c^2+c+\frac{5}{4}\right)\geqslant 0.$$

即 $(c+1)^2\leqslant 0$. 而 $(c+1)^2\geqslant 0$，$\therefore\quad c+1=0$，$c=-1$.

将 $c=-1$ 代入④，得 $t^2-3t+\dfrac{9}{4}=0$.

$\therefore\ t_1=t_2=\dfrac{3}{2}$，即 $a=b=\dfrac{3}{2}$．$\therefore\ a=b=\dfrac{3}{2}$，$c=-1$．

解法二　$\because\ a+b+2c=1$，$\therefore\ a+b=1-2c$．

设 $a=\dfrac{1-2c}{2}+t$，$b=\dfrac{1-2c}{2}-t$．　①

$\therefore\ a^2+b^2+6c+\dfrac{3}{2}=0$．$\therefore\ (a+b)^2-2ab+6c+\dfrac{3}{2}=0$．　②

将①代入②，得 $(1-2c)^2-2\left(\dfrac{1-2c}{2}+t\right)\left(\dfrac{1-2c}{2}-t\right)+6c+\dfrac{3}{2}=0$．

整理，得 $t^2+(c^2+2c+1)=0$．即 $t^2+(c+1)^2=0$．$\therefore\ t=0$，$c=-1$．

将 t，c 的值同时代入①，得 $a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$．$\therefore\ a=b=\dfrac{3}{2}$，$c=-1$．

以上解法一是构造一元二次方程解决问题．若两实数 x，y 满足 $x+y=m$，$xy=n$，则 x，y 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-mt+n=0$ 的两个实数根，然后利用判别式求解．

以上解法二是采用均值换元解决问题．若实数 x，y 满足 $x+y=m$，则可设 $x=\dfrac{m}{2}+t$，$y=\dfrac{m}{2}-t$．一些问题根据条件，若合理运用这种换元技巧，则能使问题顺利解决．

下面给出两个问题，解答其中任意一题：

(1) 用另一种方法解答范例中的问题．

(2) 选用范例中的一种方法解答下列问题：

已知实数 a，b，c 满足 $a+b+c=6$，$a^2+b^2+c^2=12$，求证：$a=b=c$．

单元综合测试

基础能力测试

测试时间 90 分钟　测试分值 120 分

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 化简 $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=$__________.

2. $-6\sqrt{\dfrac{2a-2b}{x^2}}\div\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{a-b}{2bx^2}}=$__________.

3. 化简 $\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}=$__________.

4. 若 $0<a<1$，则 $\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2}=$__________.

5. $|\sqrt{5}-\sqrt{3}|+|2-\sqrt{5}|-2|\sqrt{5}-1|=$__________.

6. $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$的一个有理化因式为__________.

7. 方程 $2\sqrt{3}x-1=\sqrt{5}x+\sqrt{15}$的解是 $x=$__________.

8. 在实数范围内分解因式 $4x^4-20x^2+25=$__________.

9. 计算 $\sqrt{(-5)^2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{-2^0}{0.2}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}=$__________.

10. 已知 $x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{3}-1$，则 $2x^2-3xy+y^2=$____________.

二、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

11. 在二次根式 $\sqrt{4+x^2}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{x^2+y^2}$，$\sqrt{a^2+6a+9}$，$\sqrt{x^3y}$，$\sqrt{x^2+x+1}$中，最简二次根式的个数共有（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

12. 计算 $\sqrt{3}\div\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $3\sqrt{6}-6$

13. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}}$成立的条件是（　　）

A. $x\geqslant 3$　　B. $x\leqslant 1$　　C. $1\leqslant x\leqslant 3$　　D. $1<x\leqslant 3$

14. 下列等式不成立的是（　　）

A. $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$　　B. $\sqrt{a^2}=|a|$

C. $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$　　D. $a\sqrt{-\frac{1}{a}}=\sqrt{-a}$

15. 下列根式中，与$\sqrt{2ab}$是同类二次根式的是（　　）

A. $a\sqrt{ab}$　　B. $3b\sqrt{\frac{a}{2b}}$

C. $2\sqrt{\frac{a}{b}}$　　D. $\frac{2}{3}\sqrt{a^2b}$

16. 若代数式$\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{4-x}}$有意义，那么 x 的取值范围有（　　）

A. $3<x\leqslant 4$　　B. $3<x<4$　　C. $3\leqslant x\leqslant 4$　　D. $3\leqslant x<4$

17. 若 $x<1$，且 $y=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}+3$，则 $y\sqrt{3y}\div\sqrt{\frac{1}{y^4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{y}}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$　　B. $16\sqrt{3}$

C. $64\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

18. 代数式 $\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{2}{a}\sqrt{a^3b}\right)-\left(3a\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{b}\sqrt{9ab^3}\right)$ 的值为（　　）

A. 正数　　B. 负数　　C. 0　　D. 1

19. 设 $T=\frac{1}{3-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}$，则（　　）

A. $T<1$　　B. $T=1$　　C. $1<T<3$　　D. $T>2$

20. 已知 $a+b=3+2\sqrt{2}$，$a-b=3-2\sqrt{2}$，则$\sqrt{a^2b^2}=$（　　）

A. 9　　B. 8　　C. 72　　D. 以上均不对

三、解答题（共 60 分）

21. 计算或化简：（每小题 5 分，共 30 分）

(1) $(\sqrt{3}-\sqrt{4.5}-\sqrt{0.12})\times\sqrt{50}+\sqrt{0.5}\times\sqrt{450}+\sqrt{96}$；

(2) $(\sqrt{5}+1)^{1999}-2(\sqrt{5}+1)^{1998}-4(\sqrt{5}+1)^{1997}+2000$；

(3) $\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}\right)-\left(3a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{9ab}\right)$；

(4) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

(5) $(\sqrt{12}-\sqrt{20})(\sqrt{15}+5)-(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$；

(6) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$.

22. 求值:(每小题 6 分,共 24 分)

(1) 如果$\sqrt{13}$的小数部分是 m,$\dfrac{1}{m}$的小数部分是n,试求 n 的值;

(2) 已知 $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$,$y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$,求$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$的值;

(3) 已知:$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,$y=\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{6}-\sqrt{10}-3}$,求 $x^2+xy-6y^2$ 的值;

(4) 已知 $xy=1$,$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$,求$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}$的值.

23. 阅读下面的文字后,回答问题:(6 分)

小明和小芳解答题目:"先化简下式,再求值:$a+\sqrt{1-2a+a^2}$,其中 $a=9$"时,得出了不同的答案:

小明的解答是:原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(1-a)=1$

小芳的解答是:原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}$

$=a+(a-1)=2a-1=2\times9-1=17$

(1) ________的解答是错误的.

(2) 错误的解答错在未能正确运用二次根式的性质:____________.

发展能力测试

测试时间 90 分钟　测试分值 120 分

一、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=$________.

2. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\div\sqrt{\dfrac{1}{b}}\right)=$________.

3. 化简:$\dfrac{x}{3}\sqrt{ax}-x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}}=$____________;$\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}=$__________.

4. 若$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2}$成立,则 x 应满足的条件为____________.

5. 已知$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$的整数部分为 a,小数部分为 b,则 $a^2+b^2=$__________.

初二代数

6. 若 $x=2-\sqrt{3}$,则$\sqrt{x^2-2x+1}+\frac{1}{x}=$__________.

7. 若 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$,则 $a-\frac{1}{a}=$__________.

8. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$__________.

9. 比较大小:$\sqrt{1998}-\sqrt{2000}$__________$\sqrt{1997}-\sqrt{1999}$

10. 若 $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{2x-1}$,则代数式 $(x+y)^{2000}=$__________.

二、选择题(每小题 3 分,共 30 分)

11. 若 $x<0$,则化简$|\sqrt{x^2}-x|$等于(　　)

A. 0　　B. $-2x$　　C. $2x$　　D. 以上均不对

12. 若 $x=\sqrt{2}-1$,则 $x+\frac{1}{x}$的值为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. -1

C. $\sqrt{2}+1$　　D. 不同于以上结果

13. 有下列说法:(1)负数和零没有算术平方根;(2)把$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$分母有理化的结果是$\sqrt{3}-1$;(3) $\sqrt{8ab^3}$ 和 $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{2b}}$ 是同类二次根式;(4)化简$\sqrt{\frac{1-2x+x^2}{x^2}}$ $(x>1)$的结果是$\frac{x-1}{x}$.其中正确的说法有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

14. 下列等式不成立的是(　　)

A. $\sqrt{(-a)^2}=|a|$　　B. $(\sqrt{a})^2=a$

C. $a\sqrt{-\frac{1}{a}}=\sqrt{-a}$　　D. $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$

15. 若$\sqrt{(1-x)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=x-1+2-x$,则 x 的范围是(　　)

A. $1<x<2$　　B. $1\leqslant x\leqslant 2$

C. $x\leqslant 1$　　D. $x>2$

16. 如果 $a>0$,$\frac{a}{b}<0$,则$\sqrt{(b-a-4)^2}-\sqrt{(a-b+1)^2}$的值是(　　)

A. -3　　B. 3　　C. $2a+2b+3$　　D. $-2a+2b-5$

17. 若 $1<x<2$,则$\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}+\frac{|x-1|}{x-1}=$(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 0　　D. ± 2

18. 已知最简根式$\sqrt[2a+3]{2a+5b}$和$\sqrt[3b+2]{a-2b+8}$是同类根式,那么 a,b 的值是（　）

A. $a=1,b=1$　　B. $a=1,b=-1$

C. $a=-1,b=-1$　　D. $a=-1,b=1$

19. 四个同学计算当 $a=5$ 时,$a-\sqrt{1-2a+a^2}$的值,得到下面四种不同的答案,其中正确的是（　）

A. -1　　B. 1　　C. 9　　D. 11

20. 实数 x,y 满足关系式 $y=1+\sqrt{|x|-1}+\sqrt{1-|x|}$,则 xy 的值为（　）

A. 1　　B. -1　　C. ± 1　　D. 不能确定

三、解答题 (共 60 分)

21. 化简:(6 分)

$$\left(\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}\cdot\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\cdot 4\sqrt{xy}.$$

22. 求值题. (每小题 7 分,共 21 分)

(1) 已知:$y=\sqrt{x-8}+\sqrt{8-x}+18$,求代数式$\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{2xy}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$的值.

(2) 已知:$\sqrt{a}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})=3\sqrt{b}\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)$,其中 $ab\neq 0$,求$\frac{a-5b+\sqrt{ab}}{a+b+\sqrt{ab}}$的值.

(3) 已知 $x=4-\sqrt{3}$. 求$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$的值.

23. 阅读下面的解答过程,然后答题. (8 分)

已知 a 为实数,化简$\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

解:$\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\frac{1}{a}}=a\sqrt{-a}-a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{-a}$　①

$=(a-1)\sqrt{-a}$　②

(1) 上述解答是否有错误?答________.

(2) 如若有错,错在________步,错误的原因是____________.

⑶ 写出正确的解答过程.

24. 如图 11－5 所示，在高 2 米，坡角为 $30°$ 的楼梯表面铺地毯，长度至少需多少米？（精确到 0.1m）（10 分）

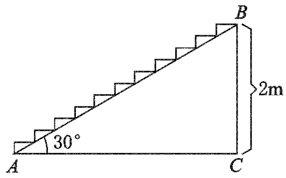


图 11－5

25. 如图 11－6 所示，直线 l 表示草原上一条河，A，B 表示草原上两个地点，A，B 到 l 的距离分别为 $AC=30$km，$BD=40$km，A，B 两村庄之间的距离为 50km. 一旅游者骑马从 A 地出发，到河边饮一次水，然后去 B 点. 若他出发时间为上午 8∶00，前进的平均速度为每小时 30km，问他能否在上午 11∶00之前到达 B 地？（15 分）

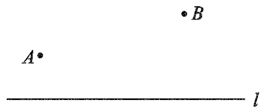


图 11－6

答案与提示

第八章

8.1 **提公因式法**

一、1. B 应注意 x 的指数中 $2n$ 与 n 的关系.

2. C $(a-2)$ 与 $(2-a)$ 互为相反数,提公因式前要把符号变为相同的.

3. C 与上一题类似,而且还要注意首项中的"$-$"号的提取.

4. C 把 $(x-y)$ 或 $(y-x)$ 看成一个整体.

5. C 难点是公因式的提取,应提取的是 a 的最低次幂 $(n-1)$,而 $(n+1)$ 中提取 $(n-1)$ 后还有 2.

6. A 仔细观察题中各括号内相同字母之间的符号关系,不难看出公因式是 $(x+y-z)$.

7. B 提取公因式 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{1999}$ 后,后一括号内应还有 $\left(1-\frac{1}{2}\right)$ 即 $\frac{1}{2}$,但应把 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{1999}$ 变为 $(-1)^{1999}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1999}$,故结果为 $-\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}$.

8. D $(y-x)^2=(x-y)^2$.

9. D 方法同第 6 题.

10. D 仔细甄别每个答案中的正误,易知 A 中有漏项,B 中符号出错,C 中符号出错.

11. A 根据左边提取 $8(x-y)$ 即可.

二、12. 偶,奇 此题的关键应把条件中的 $(a-b)^n$ 化为 $[(-1)(b-a)]^n$ 即 $(a-b)^n=(-1)^n\cdot(b-a)^n$,易知,当 n 为偶数时,$(-1)^{偶次方}=1$;当 n 为奇数时,$(-1)^{奇次方}=(-1)$.

13. $(b+ax-ay)$ 横线上应填提取公因式后的剩余部分.

14. $a=1$

15. $(a-b+x-y)$ 先将 $-(b-a)(y-x)^2$ 变为 $(a-b)(x-y)^2$.

16. $(2a-3)(b+c)$ 公因式为 $(b+c)$,提取后为 $(2a-3)(b+c)$.

17. 4 将 $a-2=b+c$ 根据题意变形可得 $a-b-c=2$,提公因式后代入即可求值.

18. $6x^n$,$3x-4$ 同样需注意指数的加减关系.

19. 10，15　可从几个方面去寻找规律 如果先不考虑符号，易知每下一行除首末的两个 1 之外，其他的数都等于上一行两数之和 ;再观察符号，会发现数的正负是相间的.

20. $3x^{m+1}$，$5-4x+9x^m$　公因式由系数和字母两部分组成.

三、21. $(a-b)(b-c)(c-a)(x+y)$　弄顺各个括号中的关系，找出相同的因式；

22. $3(a-b)(5ax-5by+y)$　掌握公因式的组成，系数以及括号内的多项式；

23. $-2(y+1)^2$　先利用平方差公式把 (y^2-1) 分解为 $(y+1)(y-1)$，故首先可提取 $(y+1)^2$，但要注意合并后的常数应写在括号前；

24. $2(1-x)(1+x-3a+6ax-3ax^2)$　提出公因式后的剩余项应化成最简形式；

25. $(a+b)(x+y)$；

26. $(x-m)^2(x-n)(x-m-1)$　当某一部分全部被提取后，还剩余 1，不能将这一项略去；

27. $(a-b)(x-y-z)$；

28. $(x-2y)(3x+1)$；

29. $(x+y-z)(a+b-c)$；

30. $-a(a-b)^2(1+b-c)$　首项系数为负时，应把负号提出；

31. $a(a-b+1)(x-y+z)$　注意括号内各多项式系数与符号的统一；

32. $(a-b)(a+b)$　把式子中的 $(+a-b)$ 视为一个整体；

33. $(a-3)(a-5)$　经观察可知，后一括号内可首先提出 2，则可提公因式 $(a-3)$；

34. $-mn(x-y)^n(m-nx+ny)$；

35. $-4x^{n+1}y^{n+2}(2x^{n+1}-3y^{n+1})$.

四、36. 1999；37. 500；38. 4000000；39. 0；40. 0. 41. 390

五、42. $\because$ $x^2+x=1$，$x^3+2x^2+2001=x(x^2+x)+x^2+2001=x+x^2+2001=2002$；43. $\dfrac{8}{3}$；44. 4.

45. 解题思路　直接去算出各部分结果是不可能的，应注意到其分母中的 $2^{2002}-2^{2003}$ 可提取公因式 2^{2002}，从而分母变形为 $2^{2002}(1-2)$，这样与分子约去 2^{2002}，即可求解.

解　$\dfrac{2^{2002}}{2^{2002}-2^{2003}}=\dfrac{2^{2002}}{2^{2002}(1-2)}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

46. 解题思路　如果一个数是合数，那么除了 1 和它本身外，还应有别的约数，故此题证明的实质是运用代数式恒等变形的知识把 $3+3a+a(a+1)$ 变形为几个整式的乘积的形式，唯一的途径是因式公解，其难点就在于不仅要着眼于整体，也要注意局部，应把 $3+3a$ 与 $a(a+1)$ 看成两个部分，它们之间能产生公因式.

解　$3+3a+a(a+1)=(3+3a)+a(a+1)=3(a+1)+a(a+1)$
$=(a+1)(3+a)$.

$\because$ a 为自然数，$\therefore$ $(a+1)(3+a)$ 是合数，$\therefore$ $3+3a+a(a+1)$ 也是合数.

47. 解题思路　不能简单地把三家化工厂的产品代码相加即可，因为结果必须化为最简形式，这正是此题的用意所在，$ab^2+ba^2+\frac{ab}{2}$ 之中有公因式可以提取.

解　$ab^2+ba^2=\frac{ab}{2}=ab(a+b+\frac{1}{2})$ 袋.

48. 解题思路　欲证 $81^7-27^9-9^{13}$ 能被 45 整除，只要证明 $81^7-27^9-9^{13}$ 中能分解出"45"这个因式即可. 应注意找出 81，27，9 中的相同点再加以转化. 由于 $81^7=(3^4)^7=3^{28}$，$27^9=(3^3)^9=3^{27}$，$9^{13}=(3^2)^{13}=3^{26}$，$81^7-27^9-9^{13}=3^{28}-3^{27}-3^{26}$，显然，$3^{26}$ 是此算式中各项的公因式，提出公因式再计算即可.

解　$\because 81^7-27^9-9^{13}=3^{28}-3^{27}-3^{26}$
$=3^{36}(3^2-3-1)=3^{26}\times 5=3^{24}\times 3^2\times 5=3^{24}\times 45$.

$\therefore$ $81^7-27^9-9^{13}$ 能被 45 整除.

8.2　运用公式法

一、1. D　注意提取公因数 x^{m+1}.

2. A　公式的灵活变形是解此题的关键.

3. C　熟练的因式分解就很容易解出此题.

如：$16x^5-x=x(16x^4-1)=x[(4x^2)^2-1]=x(4x^2+1)(4x^2-1)$
$=x(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)$；

$(x-1)^2-4(x-1)+4=[(x-1)-2]^2=(x-3)^2$；

$(x+1)^4-4x(x+1)^2+4x^2=[(x+1)-2x]^2=(1-x)^2$；

$-4x^2-1+4x=-(4x^2+1-4x)=-(2x-1)^2$

只要我们能灵活的运用公式将所给代数式变形，像这种类型的题就很容易解决.

4. C 完全平方公式的熟练应用是因式分解的一个关键之一.

5. B 平方差公式的变形运用.

6. C 考查完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

7. A 过硬的基础知识是很易解出此题的.

8. A 考查公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 的变形应用.

9. C 公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 的变形应用.

10. D $k-12xy^2+9x^2=k-2\cdot 3x\cdot 2y^2+(3x)^2$

$\therefore\quad k=4y^4$

11. D $a^2+ma+\frac{1}{4}=(a-\frac{1}{2})^2=a^2-2\times\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}=a^2-a+\frac{1}{4}$

$\therefore\quad m=-1$

12. D $x^2+2(m-3)x+16$ 是完全平方式,则 $m-3=\pm 4$

$\therefore\quad m=7$ 或 -1

13. A 利用平方差公式,将 $(n+11)^2-n^2$ 进行因式分解得:$(n+11+n)(n+11-n)=11(2n+11)$,故能被 11 整除.

14. B 把 x^m,y^n 看成一个整体,再利用公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,故 $(x^m-y^n)^2=(x^m)^2-2\cdot x^m\cdot y^n+(y^n)^2$

即 $(x^m-y^n)^2=x^{2m}-2x^my^n+y^{2n}$.

15. B 把 $(a-b)$,$(a+b)$ 看成一个整体,再利用公式 $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ 即可得.

二、16. $2p$,$2p+5q$

17. $\frac{b^2}{4a^2}$,$x+\frac{b}{2a}$

18. ± 24

19. 25 将 $a+b=1$ 两边平方得 $(a+b)^2=1$,展开得 $a^2+2ab+b^2=1$,而 $ab=-12$ 代入得 $a^2-24+b^2=1$,$\therefore\quad a^2+b^2=25$.

20. 4 设两偶数为 $2n$ 和 $2m$,则其平方差为:$(2n)^2-(2m)^2=(2n+2m)(2n-2m)=4(n+m)(n-m)$,故一定能被 4 整除.

三、21. $(4xyz+3)(4xyz-3)$;

22. $(9m+n+2)(m+9n+18)$;

23. $5(a+b)(4a+3b)(4a-3b)$;

24. $(x-y)(a+b)(a-b)$;

25. $(x^2-x+3)^2$;

26. $3p(x+1)(xy+y+1)^2$;

27. $16(m+n)^2$.

四、28. $(x+1)^2+(y+3)^2=0$，$\therefore\ x=-1$，$y=-3$，$\therefore\ xy=3$.

29. 解：$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2+x^2-y^2)(x^2+y^2-x^2+y^2)$

$$=2x^2\cdot 2y^2=4x^2y^2$$

而 $x=a+b$，$y=a-b$，$\therefore 4x^2y^2=4(a+b)^2(a-b)^2=4(a^2-b^2)^2$.

30. 证明：$(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$

$$=(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$$

$$=[(a+b)^2-c^2]\cdot[(a-b)^2-c^2]$$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

$\because$ 三角形任意两边之和大于第三边

$\therefore$ $a+b+c>0$，$a+b-c>0$，$a-b+c>0$，$a-b-c<0$

$\therefore$ $(a^2+b^2+c^2)^2-4a^2b^2<0$

$\therefore$ $(a^2+b^2-c^2)^2<4a^2b^2$.

31. **解题思路** 应从“完全平方式”中去寻求解题途径，根据完全平方式的特点，应有两项为完全平方项，另一项为前两项的积的 2 倍，根据这些特点，不难找到解法.

解：$\because 100(a-b)^2+(2k+4)(b^2-a^2)+400(a+b)^2$ 是完全平方式，

又 $100(a-b)^2+(2k+4)(b^2-a^2)+400(a+b)^2$

$$=[10(b-a)]^2+(2k+4)(b+a)(b-a)+[20(b+a)]^2$$

$$=[10(b-a)\pm 20(b+a)]^2$$

$$=[10(b-a)]^2\pm 400(b+a)(b-a)+[20(b+a)]^2.$$

$\therefore$ $(2k+4)(b^2-a^2)=\pm 400(b^2-a^2)$.

$\therefore$ $2k+4=\pm 400$

即 $k=\dfrac{-4\pm 400}{2}=-2\pm 200=-202$ 或 198.

$\therefore$ k 的值为 -202 或 198.

32. **解题思路** 如果能把表示长方形面积的式子分解为两个二次三项式的乘积的形式，就能从中解决问题，可知分解是关键，而多项式 $x^4+2x^3+7x^2+6x+8$ 若要分解因式，必须综合运用几种因式分解的方法，技巧性也比较强.

解：$x^4+2x^3+7x^2+6x+8=x^4+2x^3+x^2+6x^2+6x+8$

$=x^2(x^2+2x+1)+6x(x+1)+8$

$=x^2(x+1)^2+2\cdot 3x(x+1)+3^2-1$

$=[x(x+1)+3]^2-1$

$=(x^2+x+3-1)(x^2+x+3+1)$
$=(x^2+x+2)(x^2+x+4)$.
∴　这个长方形的长可表示为 x^2+x+4.

33. 解题思路　此题表面上是一道物理学中的有关杠杆力臂的知识，实际上是要求在掌握力臂有关知识的基础上，运用数学中的因式分解法. 做类似题一定要分清彼此之间的关系，否则，容易出错. 此题首先是运用提公因式法，再进一步分解，依据已知条件求解.

解：$2a(b+c)-3(b+c)=(2a-3)(b+c)$.
∵　$1.5<b+c$，∴　$2a>b+c$，
又∵　$1.5<a<3$，∴　$2a>3$，
∴　$(2a-3)(b+c)>0$，∴　$F_2>F_1$.

34. 解题思路　求商品的种数自然是将各层的商品数相加，但不应是简单的罗列，应用因式分解的知识化答案为最简形式.

解 这商场共有商品的种数为
$(a+b)^2+a(a+b)+(a+b)b+(a+b)^3$
$=(a+b)[a+b+a+b+(a+b)^2]$
$=(a+b)[2(a+b)+(a+b)^2]$
$=(a+b)(a+b)(2+a+b)$
$=(a+b)^2(2+a+b)$.

35. 解题思路　这是一道因式分解应用问题，如何把几何模型转化为代数运算是解题的关键. 对照图形，首先应掌握正方体与长方体的体积公式；然后用字母列出各体积的代数式，通过因式分解运算出结果.

解：图 8-4 中的正方体体积为 $(a+b+c)^3$，图 8-5 中的正方体体积分别为 a^3，b^3，c^3，图 8-6 中的正方体体积为 $(b+c)(c+a)(b+a)$.
∵　$(a^3+b^3+c^3)-a^3-b^3-c^3=[(a+b+c)^3-a^3]-(b^3+c^3)$
$=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ac)=3(b+c)(c+a)(b+a)$.

8.3　分组分解法

一、1. A　观察进行分组 $m^2-a^2+4ab-4b^2=m^2-(a^2-4ab+4b^2)$
$=m^2-(a-2b)^2=(m+a-2b)(m-a+2b)$.

2. B　在熟练的理解了因式分解后，运用分组进行分解因式，要使所分得的组中有公因式.

3. A　4. D　5. D

6. A　要使所分得的组中有公因式.

7. C　8. C

二、9. $bx+by$，$(x+y)(a-b)$

10. $(x+y+2)(x+y-2)$　$m=-2$，$n=4$，$x^2+y^2-(-2xy+4)=x^2+y^2+2xy-4=(x+y)^2-4=(x+y+2)(x+y-2)$

11. $4a^2$，$b^2-4bc+4c^2$，$(2a+b-2c)(2a-b+2c)$

12. 0　$x^2-2xy+y^2-3x+3y+2=(x-y)^2-3(x-y)+2=(x-y-1)(x-y-2)$. 而 $x=1+y$，代入得：$(1+y-y-1)(1+y-y-2)=0\times(-1)=0$.

三、13. $(x+y)(x-y+1)$；

14. $(2x-3y)(2x+3y+5)$；

15. $(x-y)(x^2+xy+y^2+1)$；

16. $(a-b+c)(a-b-c)$；

17. $(2x+y+3)(2x-y-3)$；

18. $(1+a-2b)(1-a+2b)$；

19. $(a-b)(3a-3b-5)$；

20. $(abc-9)(abc+2)$；

21. $(x+3y)(x-y)(x+2y)(x-2y)$；

四、22. $-\frac{15}{8}$　$x^2+xy-3x-3y=x(x+y)-3(x+y)=(x+y)(x-3)$，而 $x+y=\frac{3}{4}$，$x-y=\frac{1}{4}$　把两式相加得：$2x=1$　$\therefore x=\frac{1}{2}$　将 $x+y=\frac{3}{4}$，$x=\frac{1}{2}$ 代入 $(x+y)(x-3)$ 中得：$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-3\right)=-\frac{15}{8}$.

23. $-\frac{9}{10}$　$ab-a-b+1=a(b-1)-(b-1)=(b-1)(a-1)$，将 $a=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，$b=\frac{2}{5}$　代入得：$\left(\frac{2}{5}-1\right)\left(\frac{5}{2}-1\right)=-\frac{9}{10}$.

24. $a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c-ab^2+b^2c+c^2(a-b)$

$=ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b)$

$=(a-b)(ab-ac-bc+c^2)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)=0$

$\therefore$　$a=b$ 或 $b=c$ 或 $a=c$ 或 $a=b=c$

$\therefore$　$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

25. **解题思路**　要让三角形为等边三角形，即要证 $a=b=c$，亦可转证

$a-b=b-c=c-a=0$，从条件等式的特征，联想到完全平方式考虑配方.

证明　$\because a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$，

$\therefore\ 2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$，

$\therefore\ (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)=0$.

即　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

又　$(a-b)^2\geqslant 0$，$(b-c)^2\geqslant 0$，$(c-a)^2\geqslant 0$.

$\therefore\ a-b=b-c=c-a=0$，即　$a=b=c$.

$\therefore\ \triangle ABC$ 为等边三角形.

26. **解题思路**　若从条件等式中解出 x 再代入计算，用现有的知识不可能，而且太繁. 所以应从已知条件的整体去考虑，同时将多项式通过拆项、分组、提公因式，化为含 $3x^2-x-1$ 的形式，再整体代入求值，即“构造零值多项式法”.

解：$\because\ 3x^2-x=1$，$\therefore\ 3x^2-x-1=0$.

$\therefore$ 原式 $=6x^3-2x^2-2x+9x^2-3x-3+2004$

$=2x(3x^2-x-1)+3(3x^2-x-1)+2004$

$=2004$.

27. **解题思路**　这道题是当前命题热点，也属贴近生活的市场经济类的应用题型，首先应掌握股票交易的有关知识，即收益 = 卖出价 − 佣金，其次还要注意 % 与 ‰ 的区别.

解：吉姆总收益为

$1000\times27-1000\times27\times1‰-1000\times27\times5‰$

$=1000\times27(1-1‰-5‰)$

$=1000\times27\times994‰=27\times994=26838$（元）

28. **解题思路**　这是“猜想性”开放性题，它要求能够从所给条件出发，通过观察、试验、分析、归纳、比较、概括、猜想，探索出一般规律，解题的关键在于正确的归纳和猜想. 首先应认真观察每一个式子左右两边的结构特点，如 $1\times2\times3\times4+1=5^2$，$5^2$ 与 $1\times2\times3\times4+1$ 的联系何在？如何得到 5^2，5^2 是一个完全平方数，$5^2=5\times5$，那么 $1\times2\times3\times4+1$ 应等于 $5\times5-1+1$，其中“-1”与“1”正负抵消，即 $1\times2\times3\times4$ 中应有 $5\times5-1$，由此可猜想出：$2\times3=6=5+1$，$1\times4=4=5-1$，而 $(5-1)(5+1)$ 恰好等于 5^2-1，猜想出规律后，逐一验证其他式子，正确后归纳出一般结论. 其次，应掌握各个式子间的共同规律，即四个连续正整数的乘积加上 1. 做好了这两点，结论不难得出.

解：$\because 1\times2\times3\times4+1=(1\times4)(2\times3)+1$

$$
\begin{aligned}
& (5-1)(5+1)+1\\
& 5^2-1+1=5^2;\\
2\times3\times4\times5+1 & =(2\times5)(3\times4)+1\\
& =(11-1)(11+1)+1\\
& =11^2-1+1=11^2;\\
3\times4\times5\times6+1 & =(3\times6)(4\times5)+1\\
& =(19-1)(19+1)+1\\
& =19^2-1+1=19^2;
\end{aligned}
$$

……

$\therefore$ 可归纳出规律为：

$n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$.（$n$ 为正整数）

证明 $\because$ $n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$$
\begin{aligned}
&=[n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1\\
&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\
&=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\
&=(n^2+3n+1)^2.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 结论成立.

29. 解题思路　这是一道阅读材料题，根据所给材料，认真分析. 先着手于 n^{n+1}和 $(n+1)^n$ 的大小. 从分析 $n=1,2,3,\cdots$一些比较小的数字入手，从中发现规律，并加以总结，猜想出规律.

解：(1) $<,<,>$；

(2) $n^{n+1}<(n+1)^n$ $(n\leqslant2)$　$n^{n+1}>(n+1)^n$ $(n\geqslant3)$；

(3) $>$.

小结与复习

一、1. D　观察多项式，并选择适当的方法进行因式分解. 如：公式法，分组法，提取公因式等法.

2. A　根据题意设另一个因式为 $x+b$，利用十字相乘法 $\begin{array}{ccc}4 & & -3\\ & \times & \\ 1 & & b\end{array}$ 得：

$4b-3=5$ $\therefore$ $b=2$ 故 $a=-6$.

3. C　熟练的掌握公式变形应用是解此题的关键.

4. A　注意公式的变形应用. 如：提出“－”号.

$-(x^2-2xy+y^2-1)=-[(x-y)^2-1]=-(x-y+1)(x-y-1)=(x-y+1)(y-x+1)$.

5. C　**利用公式** $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$a^8-b^8=(a^4)^2-(b^4)^2$

$=(a^4+b^4)(a^4-b^4)$

$=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

6. D　**利用完全平方公式** $x^2+2xy+y^2$　$a^2+2\cdot4ab+m^2=(a+4b)^2$

$\therefore$　$m=4b$.

7. B　**由** $(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$ **得**：$16x^4=(2x)^4$　$\therefore n=4$.

8. A　**利用公式** $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ **得**：

$(4m+5)^2-3^2=(4m+5+3)(4m+5-3)=(4m+8)(4m+2)=8(m+2)(2m+1)$.

二、9. **几个整式的积**

10. **提取公因式**

11. $(x+3y)(x+2y+1)$

12. $x^2(x^n+3)(x^n-2)$

13. $x-4$

14. $(x+y+2)(x+y-2)$　$|p+2|$ **与** $q^2-8q+16$ **互为相反数，而** $q^2-8q+16=(q-4)^2$. **两个非负数的和为零**. $\therefore$　$p+2=0$，**得** $p=-2$. $q-4=0$**得** $q=4$. **将** $p=-2$，$q=4$ **代入**，$(x^2+y^2)-(-2xy+4)=x^2+2xy+y^2-4=(x+y)^2-2^2=(x+y+2)(x+y-2)$.

15. 2000　**提出公因式**：$2^{1997}(2^2-5\times2+6)+2000=2^{1997}\times0+2000=2000$.

16. $\frac{1}{3}b^3$　**熟练运用公式** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$\therefore$　$3k=b^3$**故**　$k=\frac{1}{3}b^3$.

17. $a-b$

18. $x-y$，$x+y$

19. 1　**由** $(x+1)(x-2)$ **得**：$x^2-x-2=x^2+ax-b$　**故**　$a=-1$，$b=2$

$\therefore$　$(-1)^2=1$.

20. $-\frac{2}{3}$　**提出公因数** 2^{1998}**得**　$\frac{2^{1998}\cdot2}{2^{1998}(1-2^2)}=-\frac{2}{3}$.

三、21. $(x-8)(x+1)$；　22. $(m+2)(m^2-2)$；

23. $(ab+bc)(ac-bd)$；　24. $(3a-c)(b-3d)$；

25. $(1-xy)(1+x^2y^2)$；　26. $(2a-3)(a^2-2)$；

27. $(a+b)(5m^2-1)$；　　28. $(x^2+y^2)(a^2+b^2)$；

29. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)$；　　30. $(2a+bc)(3a-bc)$；

31. $(x+4)(x-3)(x+2)(x-1)$；

32. $(x-5)(x+1)(x-1)(x-3)$.

四、33. 9900　提取公因式 99 得：$99(57+44-1)=9900$；

34. 1200　用平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 得：$(103+97)(103-97)=200\times6=1200$.

五、35. 解：$p(p+1)(p-1)-q(q+1)(q-1)$

$$=p(p^2-1)-q(q^2-1)$$
$$=p^3-p-q^3+q$$
$$=(p^3-q^3)-(p-q)$$
$$=(p-q)(p^2+pq+q^2)-(p-q)$$
$$=(p-q)(p^2+pq+q^2-1)$$

$\because$ $p^2+pq+q^2=1$　$\therefore$ $p^2+pq+q^2-1=0$

$\therefore$ $p(p+1)(p-1)-q(q+1)(q-1)=0$

36. 证明　$\because$　原式$=(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

又　$\because$　a,b,c 是三角形的三边，

$\therefore$　$a+b+c>0$，$a+b-c>0$，$a-b+c>0$，$a-b-c<0$，$\therefore$　原式<0.

37. 设这两个自然数为 n，$n+1$，则 $(n+1)^2-n^2=(n+1+n)(n+1-n)=2n+1$，$\therefore$原题得证.

38. 证明 $\because$　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$，$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0$，$\therefore$　$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$，$\therefore a-b=b-c=c-a=0$，$\therefore a=b=c$.

39. 解题思路　最少有多少小球即是小球数目的最小值，难点在于找出两种摆放图案之间的联系.经过观察，应知道，个数与面积有关，那么面积的表示法则成了解题的突破口.

解：$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$，设正方形每边有 x 个小球，则 $x^2=\frac{k(k+1)}{2}$，即 $k(k+1)=2x^2$，又$\because k$ 和 x 都是正整数，且 k，$k+1$ 是相邻的正整数，$\therefore$满足等式的最小的 k 的值为 8，$\therefore x\geqslant6$，最少有 36 个小球.

40. 解题思路　这是一道创新题，要求运用知识自编，答案不唯一，符合

初二代数

要求均可，应采用反推的方法，写出最基本的满足其中一个要求的多项式，再逐步按要求增加即可.

解　如 $m^2n-4n=n(m^2-4)=n(m+2)(m-2)$.

41．解题思路　这是一道阅读理解题，要求首先看懂火车的运行时刻表，再从中对照，找出路程与时间的关系求出前后的速度值.

解：从旅游列车运行时刻表计算每一个区间减少的时间看：

杭州——上海为：$3\frac{39}{60}-2\frac{28}{60}=1\frac{11}{60}$小时；

上海——苏州为：$1\frac{10}{60}-1\frac{6}{60}=\frac{4}{60}$小时；

苏州——无锡为：$\frac{36}{60}-\frac{36}{60}=0$ 小时.

显然，杭州——上海这个区间车速提高最大.

$201\div2\frac{28}{60}-201\div3\frac{39}{60}=26$ (km/h).

则杭州——上海的这个区间内车速每小时提高 26km.

42．解：$\frac{2001^3-2\times2001^2-1999}{2001^3+2001^2-2002}=\frac{2001^2(2001-2)-1999}{2001^2(2000+1)-2002}$

$=\frac{2001^2\times1999-1999}{2001^2\times2002-2002}=\frac{1999(2001^2-1)}{2002(2001^2-1)}=\frac{1999}{2002}$.

43．解题思路　这是一道阅读材料题，在材料中给出了一个新知识点，让我们在理解新知识点的基本上，运用新知识点解题.

解：(1) 1　7　$2<x\leqslant3$；

(2) 由题意得 $6+1.2\times(x-5)=21.6$

$\therefore (x-5)=13$，$\therefore 12<x-5\leqslant13$

$\therefore 17<x\leqslant18$.

单元综合测试

基础能力测试

一、1. $4xy^2(x-y)^3$　2. $(a+b+c)(a-b-c)$　3. $(x+y-1)^2$　4. $(a-2b+c)(a-2b-c)$　5. $m(m+3)^2$　6. 1　7. -30　8. ±6　9. 1　10. $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$

二、11. D　12. B　13. C　14. B　15. A　16. C

三、17. (1) 原式$=2x^{n-1}(x-1)(x-2)$；(2) $(x+3)(x-6)$；(3) $(m+n-2)(m-n-2)$；(4) 原式$=(a^3-1)+(3a^2+3a+3)=(a^2+a+1)(a+2)$.

18. 解：$(x-y-2)(x-y+1)=0$

① 令 $x-y-2=0$,又∵ $x+y=\frac{16}{2}=8$

∴ $x=5, y=3$

② 令 $x-y+1=0$,又∵ $x+y=\frac{16}{2}=8$

∴ x, y 无法为整数.

∴ $x=5, y=3$,面积为 15.

19. 原式 $=x(x+y)(x-y-x-y)=-2xy(x+y)=1$. 20. $x^3+x+30=(x^3+27)+(x+3)=(x+3)(x^2-3x+9)+(x+3)=(x+3)(x^2-3x+10)$. 21. 答案不唯一,如 $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$, $x^2+2x+1=(x+1)^2$, $2x^3+2x^2+x+1=(x+1)(2x^2+1)$.

发展能力测试

一、1. 35 2. $x-4$ 3. 10 或 -4 4. 4 5. 0 6. 2 7. $3x+5$ 8. 7×10^n 9. 1 10. 4

二、11. C 12. C 13. A 14. B 15. D 16. C 17. B 18. D

三、19. (1) $x(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$;(2) $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$;(3) $m(1+m-n)(1-m+n)$;(4) $(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$. 20. 由题知 $b=6\times(-1)=-6$, $a=(-2)+1=-1$,故原式 $=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. 21. $w^{1980}+w^{1981}+\cdots+w^{2000}=(w^{1980}+w^{1981}+w^{1982})+(w^{1983}+w^{1984}+w^{1985})+\cdots+(w^{1998}+w^{1999}+w^{2000})=w^{1980}(1+w+w^2)+w^{1983}(1+w+w^2)+\cdots+w^{1998}(1+w+w^2)=0$ 22. 原式 $=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ac-2ab-2bc)=\frac{1}{2}[(a^2-2ac+c^2)+(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)]=\frac{1}{2}[(a-c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2]=\frac{1}{2}(2^2+1^2+1^2)=3$. 23. 由题知:$(x-y-2)(x-y+1)=0$,所以 $x-y=2$ 或 $x-y=-1$,又由周长为 16 知 $x+y=8$,所以 $\begin{cases}x-y=2\\x+y=8\end{cases}$①或 $\begin{cases}x-y=-1\\x+y=8\end{cases}$② 解①得 $x=5, y=3$,解②得 $x=\frac{7}{2}, y=\frac{9}{2}$,因为 x, y 为正整数,所以 $x=5, y=3$. 则面积 $xy=15$. 24. (1) $(2n-1)(2n+1)+1=(2n)^2$ (2) 证略.

第九章

9.1 分式

一、1. C 理解分式的概念是解此题的关键. 分式是分母含有未知字母

的代数式.

2. C　要使分式有意义,分母就不能为零,只要掌握了这一点,解此题就很容易.

3. D　分母不能为零,分式才有意义.即:$(x+1)(x-3)\neq 0$,故 $x\neq -1$ 且 $x\neq 3$.

4. C　因为 a 是一个未知字母,必须判断分母是否为零,才能对此题作出正确判断.

5. D　分式无意义,即要求分母为 0,即 $|x|=1$ $\therefore x=\pm 1$.

6. B　掌握分式的概念.

7. B　首先考虑 $\frac{1}{a}$ 有意义,则 $a\neq 0$,再考虑 $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$ 有意义.

二、8. 整式,含有字母

9. $-3x$,$\frac{2}{3}x^2y-7xy^2$,$-\frac{1}{8}x$,$\frac{x-y}{5}$;$\frac{x}{y}$,$\frac{3}{5+y}$

10. $a\neq\frac{3}{2}$,$a=2$　要使分式有意义,分母必须不为 0,故 $2a-3\neq 0\Rightarrow a\neq\frac{3}{2}$.要使分式为 0,分母必须不为 0,且分子为 0,$\therefore 2a-4=0\Rightarrow a=2$.

11. 0,± 1,$-1<x<1$ 且 $x\neq 0$

12. $\frac{m-3}{m+2}$,-2

13. $(x^2-1)\div(2x-2)$,$x\neq 1$

14. <5　15. $\neq 0$

16. $\frac{5}{2}$,2　17. $\frac{a-5}{4a+1}$

18. $\neq\frac{y}{2}$　19. $-\frac{1}{2}$

20. $x\neq -2$ 且 $x\neq 2$

三、21. $x=\pm 3$　22. $x=0$ 或 -1

四、23. $x=-3$　24. $x=\pm 1$

五、25. 2　两个非负数之和为 0,$\therefore \frac{x-1}{2x-3}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$,$\frac{3y+1}{y+4}=0\Rightarrow 3y+1=0\Rightarrow y=-\frac{1}{3}$,将 $x=1$,$y=-\frac{1}{3}$ 代入,计算结果为 2.

26. $\frac{1-x^2}{(1+xy)^2-(x+y)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{(1+xy-x-y)-(1+xy+x+y)}=$

$\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)(1-y)(1+x)(1+y)}$

(1) 当 $x\neq\pm1$,且 $y\neq\pm1$ 时,分式有意义;

(2) $-1<y<1$ 且 $x\neq\pm1$ 时,分式值为正;

$y<-1$ 或 $y>1$ 且 $x\neq\pm1$ 时,分式值为负.

(3) 分式值不可能为 0.

27. 解题思路　由于每个玻璃小球的大小一致,所以每个小球的质量也相同,所以玻璃球的总质量 $a=$ 总个数 $b\times$ 每个小球的质量 c.

解 先取一个玻璃小球,称出它的质量 c,再称出其余玻璃小球的质量 a,则 $b=\frac{a}{c}$ (个)是其余玻璃小球的个数,所以这堆玻璃小球的总个数为 $(b+1)$ 个.

28. $\frac{x-2}{x-1}$.

29. (1) A; (2) 不正确,去掉分母;

(3) 原式 $=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}+\frac{3}{x-1}=\frac{x-3+3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{4x}{(x+1)(x-1)}=\frac{4x}{x^2-1}$.

9.2 分式的基本性质

一、1. D　分式的基本性质是在分数性质上变化而来,掌握分式的性质是解此题的关键.

2. A　3. C　4. C　5. D　6. B　7. B

二、8. (1) $\frac{5x}{y}$, (2) $-\frac{a}{2b}$　9. (1) $\frac{a-2b}{b-2a}$, (2) $\frac{a+b}{2a-b}$

10. (1) $-\frac{3x+1}{2x-1}$, (2) $\frac{3x^2-2x-1}{2x-3}$

三、11. $\frac{a^2+a-2}{a^3-2a^2+1}$;　12. $\frac{x-4}{x^2-3x+2}$;

13. $-\frac{x^3+4x^2-2}{2x^2-3x+1}$;　14. $\frac{x^3-1}{x^2-x+1}$;

15. $\frac{x^3-8x^2-5}{7x^3+10x^2-2x+3}$.

四、16. $-\frac{a+b}{4b-2}$;　17. $x+\frac{1}{x}=4$, $\therefore$ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=14$.

18. 解题思路　探寻一系列特殊等式所包含的一般规律,关键在于分清等式中的常量、变量及变化规律,然后再用数学语言予以表述. 仔细观察每个

初二代数

式子的共同点，会发现：已知等式左边是连续奇数的平方差，而右边是8的倍数；另外一个关键就在于 $3^2-1^2=8\times1$ 中的 3^2-1^2 与1的关系如何？是解开题目的突破口.

解　设 n 是自然数，那么相邻的两个奇数为 $2n-1$ 和 $2n+1$，

则有　$(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$.

19. 解题思路　这是一道几何应用题，其中(1)小题应用方程的知识求解，第(2)小题应分类讨论，但答案不唯一，应设计出最能节省时间的路线.

解：(1) 设 CE 的长为 $x$km，依题意得

$$1.6+1+x+1=2\times(3-2\times0.5).$$

解之，得 $x=0.4$.

(2) 若步行路线为 $A-D-C-B-E-A$（或 $A-E-B-C-D-A$），

则所用时间为 $\frac{1}{2}(1.6+1+1.2+0.4+1)+3\times0.5=4.1$ (h).

若步行路线为 $A-D-C-E-B-E-A$（或 $A-E-B-E-C-D-A$），

则所用时间为 $\frac{1}{2}(1.6+1+0.4+0.4\times2+1)+3\times0.5=3.9$ (h).

∵　$4.1>4$，$3.9<4$，

所以，步行路线应为 $A-D-C-E-B-E-A$（或 $A-E-B-E-C-D-A$）.

20. 解题思路　先阅读材料，看阅读材料展示给我们的是一个怎样的新知识点，再运用新知识点解题，从该阅读材料中不难发现是等差数列求和的问题. 等差数列求和公式是 $\frac{\text{首项}+\text{尾项}}{2}\times$ 项数.

解：(1) 根据题意，企业A　4年上缴的利润为：$1+2+3+4=10$（万元）

企业B　4年上缴的利润为：$0.3+0.6+0.9+1.2+1.5+1.8+2.1+2.4=10.8$（万元）.

所以企业B比企业A上缴利润多0.8万元.

故应该承包给企业B总公司获利多.

(2) 企业A承包 n 年上缴的利润为：$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$（万元）.

企业B承包 n 年上缴的利润为：

$$\begin{aligned}&0.3+0.6+0.9+\cdots+0.3\cdot2n\\&=0.3[1+2+3+\cdots+2n]\\&=0.3\times\left[\frac{2n(1+2n)}{2}\right]\end{aligned}$$

$=0.3n(1+2n)$(万元).

9.3 分式的乘除法

一、1. × 2. × 3. × 4. ×

5. × 要分 n 为奇数、偶数两种情况.

二、6. B 7. A 8. C

9. C $2a-3b=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}b$

$$\therefore \frac{2a+b}{a-b}=\frac{2\times\frac{3}{2}b+b}{\frac{3}{2}b-b}=\frac{3b+b}{\frac{1}{2}b}=\frac{4b}{\frac{1}{2}b}=8.$$

10. C $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$,令 $x=2k$,$y=7k$ $(k\neq 0)$

故原式$=\frac{4k^2-3\times 2k\times 7k+2\times 49k^2}{8k^2-3\times 2k\times 7k+7\times 49k^2}=\frac{60k^2}{209k^2}=\frac{20}{103}$

三、11. $-\frac{a}{2c^2}$ 12. $\frac{4b}{a(x-y)}$ 13. $-\frac{8x^4}{9y}$ 14. x^4y 15. $x\neq -2$,-3,-4 的任意数 16. $\frac{b^{24}}{a^{12}}$ 17. $-\frac{a^{2n+1}b^{6n+3}}{a^{4n+2}}$ 18. $\frac{x^2}{y^{10}}$.

四、19. $-\frac{1}{a^2bc}$; 20. $9x+3$; 21. $\frac{27a^9}{x-y}$; 22. $\frac{x-y+z}{x-y-z}$; 23. $\frac{x-y-z}{x+y}$; 24. 1; 25. $\frac{8}{n^3}$; 26. 1.

五、27. 解:原式$=\frac{(x+2)^2(x-2)^2}{(x^2+x+1)^2}\cdot\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{x^2(x-1)^2(x-2)^2}\cdot\frac{x^3}{(x+2)^3}=\frac{x}{x+2}$ 当 $x=-\frac{2}{3}$ 时,原式$=-\frac{1}{2}$.

28. 解:原式$=-\frac{1}{2}$.

29. 解:$\because \frac{2x-2}{x^2-1}=\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x+1}$为整数.$\therefore$ $x+1=1$ 或 2 或 -1 或 -2. $\therefore$ $x=0$ 或 1 或 -2 或 -3 $\because$ 原式中 $x\neq\pm 1$ $\therefore$ $x=0$ 或 -2 或 -3.

30. 解题思路 这是一道有条件的代数式求值问题.习惯上是将已知条件变形,用一个字母的代数式表示其他字母,然后代入并求值.但若将所给代数式适当变形后,采取整体代入,或将已知条件也适当变形后整体代入,往往解题较为简便.

解　原式$=\frac{x+y}{xy}$，将$x+y=12$，$xy=9$整体代入得原式$=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$.

31. 解题思路　这是一道有实际生活背景的应用题，考生一见到这么一大段文字，从心里就有一种畏惧感.其实，我们只须摒除大段的生活背景文字，就可以把它抽象为一道纯粹的数学题，这样就容易多了.

解：(1) 小汽车走的路程为$15\times3=45$(km)，所需的时间为$\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$(h)，即$\frac{3}{4}\times60=45(min)>42$(min).

故这8名球迷不能在规定的时间内赶到机场.

(2) 设小汽车从出故障地点到达机场后返回与第二批人相遇所需的时间为t小时，依题意得$5t+60t=30$，解得$t=\frac{6}{13}$(h).全过程所需的时间是$t+\left(t-\frac{15}{60}\right)=\left(\frac{12}{13}-\frac{15}{60}\right)$(h)，即$\left(\frac{12}{13}-\frac{15}{16}\right)\times60=40\frac{5}{13}(min)<42$(min).

故这8名球迷能在规定的时间内赶到机场.

9.4　分式的加减法

一、1. D　通分，找出最小公分母$6x$.

2. C　$4x=5y\Rightarrow x=\frac{5}{4}y$.代入$\frac{x^2-y^2}{y^2}$中得：$\frac{9y^2}{16y^2}$，而$y\neq0$，故得$\frac{9}{16}$.

3. C　$(x-2y)^2=0\Rightarrow x=2y$代入$\frac{x-y}{x+y}$即可得.

4. B　由$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$得：$\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)=-4$.　5. A

6. B　利用比例的性质.$\frac{a-b}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow5(a-b)=3a\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$.

二、7. 分式的基本性质，相同

8. 找出，最简公分母

9. 最小公倍数，系数

10. 分数，分式，异分母

11. 分母，相加减

12. 通分，同分母，相加减

13. $\frac{9a^2-10a+8b}{12a^2b}$　14. $6a(a-b)$　15. ①

三、16. $\frac{-4x^2+15x+25}{(x+1)(x+2)(x-1)}$；　17. $\frac{1998}{(x+1)(x+1999)}$；

新教材同步学案

18. $\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}$；　　19. 0；

20. $\frac{8a^7}{a^8-b^8}$；　　21. $x^{2n}+2$；

22. $\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$；　　23. $-\frac{10x-10}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)}$.

四、24. $\frac{a^2}{a-1}$；　25. $-\frac{x}{x-y}$；　26. $\frac{1}{(x-2)^2}$；　27. $-\frac{4}{a}$；　28. $\frac{x}{x+4}$；　29. 1；　30. $a-1$；　31. $\frac{2}{(x-2)(x-1)}$；　32. A

33. 解：$2x-1=0$，∴　$x=\frac{1}{2}$　又∵　$x-2y=0$，∴　$y=\frac{1}{4}$

原式$=\frac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2}\cdot\left(\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}+\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right)=\frac{-(x^3+y^3)}{x^2y^2}+\frac{-(x^3-y^3)}{x^2y^2}=\frac{-2x^3}{x^2y^2}=-\frac{2x}{y^2}$　当 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$时，原式$=-16$

34. **解题思路**　此题是根据同学们在计算异分母分式相加减过程中易错的问题而专门设计的，涉及的知识有：公式法因式分解、分式的通分、异分母分式相加减法、分式的变号法则，能正确判断在异分母分式相加减时，是通分而不是去分母.

解：(1)(B)；(2)去分母；

(3)
$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x^2-1}-\frac{2}{1+x}&=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{x+1}\\&=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{x-3-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{x-3-2x+2}{(x+1)(x-1)}\\&=-\frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

所以本题正确的结论应是$-\frac{1}{x-1}$.

35. **解题思路**　这是一道来源于生活中的实际问题的应用，首先要明白“抽样”的含义，即从一批商品中取出一部分；其次是抓住“倒数和”等于$\frac{100}{101}$；最后要设定未知数，建立不等式或等式求解. 当然，$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$的正反运用也应熟悉.

初二代数

解：取 $x=1,2,3,4,\cdots,k$，则

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}+\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{k+1},$$

$\therefore\quad 1-\frac{1}{k+1}=\frac{100}{101}$，

$\therefore\quad k=100$；$100\times101=10100$.

9.5　含有字母系数的一元一次方程

一、1. B　$ax=3x-5\Rightarrow(a-3)x=-5$ 有负整数解，故 $a-3>0$，即：$a>3$.

2. C　先讨论形如：$ax=b$ 方程的解.

当　$a\neq0$ 时，$x=\frac{b}{a}$

当　$a=0$ 时，$\begin{cases}a=0,b\neq0\text{ 时，方程无解}\\a=0,b=0\text{ 时，方程有无数解}\end{cases}$

现在要使 $(a^2-1)x=a^2-a-2$ 无解，则 $a^2-1=0$ 且 $a^2-a-2\neq0$

$a^2-1=0\Rightarrow a=\pm1$，$a^2-a-2\neq0\Rightarrow a\neq2$，$a\neq1$，综合得：$a=1$.

3. D　$ax-a^3=b^3-bx\Rightarrow(a+b)x=b^3+a^3$

根据题 2 讨论的形如 $ax=b$，应对方程中所含的字母 a，b 进行分类讨论.

4. C　当 $a=0$ 时，有无数个解.

当 $a\neq0$ 时，$x=0$.

5. D　对于 $(a+1)x=1$，当 $a+1=0$，即：$a=-1$ 时，无解. 当 $a+1\neq0$ 即：$a\neq-1$ 时，$x=\frac{1}{a+1}$. 故选 D.

6. A　如 2 所讨论的.

7. B　$mx-n=2x-3\Rightarrow mx-2x=n-3\Rightarrow x=\frac{n-2}{m-2}$则 $m-2$ 必不为 0，即 $m\neq2$.

8. C

二、9. $\frac{v^2}{2a}$　10. $\frac{A-\pi r^2}{\pi r}$　11. $\frac{SU}{S+R}$　12. $-\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}$

13. 当 $a\neq c$ 时，$x=a+c$ 当 $a=c$ 时，x 为任意数

三、14. $\frac{5a^2+5b^2}{a^2-2ab+b^2}$有意义　$\therefore\quad a\neq b$，原方程变形为：$\frac{b^2+a^2}{ab}\cdot x=\frac{a^2-b^2}{ab}-2x$　$\therefore\quad\frac{(a+b)^2}{ab}\cdot x=\frac{a^2-b^2}{ab}$　$\therefore\quad(a+b)^2x=a^2-b^2$　$\because\quad a$

$\neq b$ ∴ $x=\dfrac{a-b}{a+b}$

四、15. $m=-1$，$m^{2002}+m^{2003}=1-1=0$.

16. **将** $x=1$ **代入方程整理成** k **的方程，得** $(6+b)k=13-2a$. **由题意得** $6+b=0$，$13-2a=0$ ∴ $a=6\dfrac{1}{2}$，$b=-6$.

17. **解题思路　本题是中考新题型，旨在考查同学们的探究能力、逆向思维能力和归纳推理能力.**

通过观察不难发现，每一项分式的分母都是两个奇数的乘积，而且每一个数都比前一项的分母多 2，**因为第** 4 **项为** $\dfrac{1}{5\times7}$，**如此类推第** 5 **项应为** $\dfrac{1}{9\times11}$；

再观察第一个数总比项数的 2 **倍少** 1，**即** $2n-1$ (n **为项数**)，**而第二个数总比项数的两倍多** 1，**即** $2n+1$，**故第** n **项为** $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；

由分式的减法知 $\dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1}-\dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

故上述求和的想法是通过分式（数）减法的逆用，使得中间项两两相消，达到求和的目的.

解：$\dfrac{1}{9\times11}$；$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ **分式（数）的减法，两两相消.**

18. **解题思路　类似于上一题，实质是等差数列的通项公式，**$a_n=a_0+(n+1)d$，d **为公差.**

解 设 9997 **是该列第** k **个数，相邻两数之差为** d，**则** $9997=2+(k-1)\cdot d$，

∵ k，d **都是正整数，**$d\leqslant10$，

∴ $k=2000$，$d=5$.

∴ **该数列前** 5 **个数为** 2，7，12，17，22，….

9.6 **探究性活动：**$a=bc$ **型数量关系**

一、1. 1000　2. 40　3. **缩小** 2 **倍**　4. $\dfrac{1}{2}$　**把** $a=5$，$b=10$ **代入得** $5=10k$，**则** $k=\dfrac{1}{2}$.　5. $\dfrac{b}{a}$　6. $a=0$ **或** $b=0$

二、7. **可用称量法. 可先取** 1 m **长的电缆，称出它的重量** c，**再称出其余电缆的总重量** a，**由** $a=bc$ **得** $b=\dfrac{a}{c}$ **是余下电缆的长度，所以这捆电缆的总**

初二代数

长度为 $(b+1)$ m.

8. Ⅰ. 3.2×10^4

Ⅱ. (1) $y=\frac{2a}{25}n$;

(2) 解:设每万辆摩托车每年排放的污染物为 b,由题意得:

$$(32-5a)b+\frac{2a}{25}\times5\times7b=32b\times60\%.$$

即 $160-25a+14a=96$ $\therefore a=5.8$ 万.

9.7 可化为一元一次方程的分式方程及其应用

一、1. D 列方程解应用题的关键是:弄清题意,设出未知数,找出数量之间的关系,并找出相等的条件,再列出方程.

现甲每天植 x 棵树,80 棵树共需 $\frac{80}{x}$ 天;乙每天植 $(x-5)$ 棵树,则 70 棵树共需 $\frac{70}{x-5}$ 天,再由题意知,$\frac{80}{x}=\frac{70}{x-5}$.

2. D 两人合作需 x 天,则两人合作的工作效率为 $\frac{1}{x}$.而由题意知,两人合作的工效也可表示为 $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$.故 $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{x}$.

3. D 设乙数为 x,则甲数为 $x-1$,丙数为 $x+1$.由题意得:$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x-1}$ 解得:$x=-\frac{1}{5}$,故甲为 $-\frac{6}{5}$,丙为 $\frac{4}{5}$.

4. C 理解掌握分式方程的定义是解决此题的关键.分母里含有未知数的方程叫分式方程.

5. C

6. D 要使 $\frac{x+1}{x^2-x-2}=0$,则要求 $x+1=0\Rightarrow x=-1$ 且 $x^2-x-2\neq0$ $\Rightarrow(x+1)(x-2)\neq0\Rightarrow x\neq-1$,$x\neq2$ $\therefore$ 不存在.

7. C 方程产生增根的原因是在方程的变形过程中,如:两边约分,两边同时平方后所得方程的解并不满足原始方程.在该题中,两边同乘以 $x-3$,而实际上 $x\neq3$,若 $x=3$,则分式方程无意义.$\therefore$ 当 $m=2$ 时,变形后所得方程的解为 $x=3$,而原方程要求 $x\neq3$,故 $x=3$ 是增根.

二、8. ①在方程的两边同乘以最简公分母,约去分母,化成整式方程;②解这个整式方程;③把整式方程的根代入最简公分母,看结果是不是零,使最简公分母为零的根是原方程的增根,必须舍去

9．5； 10．$\dfrac{V_1 p_2}{p_1}$ 11．$\dfrac{6ny}{y+4m}$

三、12．$x=-3$； 13．无解； 14．$x=\dfrac{2}{5}$．

四、15．$x=-1$ 解分式方程$\dfrac{4-2x}{4-x}=\dfrac{x-5}{x-4}$

五、16．$x=\dfrac{a}{4}$．

六、17．解 设甲单独完成这项工作所需时间为 x 天，而甲、乙两人单独完成这项工作所用时间的比为 $4:5$，则乙单独完成这项工作所用时间为 $\dfrac{5}{4}x$．根据题意列出方程：$1-4\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\frac{5}{4}x}\right)=16\times\dfrac{5}{4}x$ 得 $x=20$．

∴ 甲需 20 天，乙需 25 天．

18．解 设相邻两个偶数为 $2n-2$，$2n$，则夹在其中的奇数为 $2n-1$．由题意列出方程：$\dfrac{2n-2}{2n}=\dfrac{24}{25}$

解得 $n=25$ ∴ $2n-1=49$．

19．解 设这个桶的容积为 x L．

倒出 8L 酒精后，用水补满，此时水所占百分比为$\dfrac{8}{x}\times100\%$，再倒出 4L 溶液，则其中含水$\dfrac{8}{x}\times100\%\times4$，再用水补满．故得方程：

$$8-\frac{8}{x}\times100\%\times4+4=10 \quad 解得\ x=16.$$

20．解 设风的速度为 $x$km/h，则顺风航速为 $(360+x)$ km/h，逆风航速为 $(360-x)$ km/h．由题意得方程：

$\dfrac{1380}{360+x}=\dfrac{1020}{360-x}$ 解得：$x=54$．

21．解 设甲每小时车 x 个螺丝，乙改进方法后，每小时车 $3x$ 个．由题意列出方程：

$\dfrac{1500}{x}=\dfrac{1500}{3x}+20$ 解得 $x=50$．

故甲每小时车 50 个，乙每小时车 150 个．

22．解 设长途汽车速度为 $x$km/h，则小轿车为 $3x$km/h，根据题意，有：

$\dfrac{160}{x}=\dfrac{160}{3x}+3-\dfrac{20}{60}$ $x=40$ 故长途车速为 40km/h，小汽车为 120 km/h．

23. 解：设甲单独修需 x 天完成；乙单独修需 y 天完成；丙单独修需 z 天完成. 则甲、乙、丙的工效分别为 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$. 由题意列出方程得：

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{36}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{45}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{60}\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}x=60\\ y=90\\ z=180\end{cases}$$

即：甲独修需 60 天，乙独修需 90 天，丙独修需 180 天.

24. 解：设乙独做需要 x 天，则甲独做需要 $2x$ 天. $\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\right)\times 2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=9$，则甲独做需 18 天.

由题意得 $$\frac{1-\left[4\times\frac{1}{18}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\right)\times 2\right]}{\frac{1}{9}}=4$$

$4+2+4=10$（天）

故余下的工程由乙独做共需 10 天完成.

25. 解：设乙组工作效率为 x，则甲组为 $x(1+20\%)$. 由题意列出方程：

$$\frac{210}{x(1+20\%)}+0.5=\frac{200}{x}\quad \text{解得：}x=50.$$

故甲组每小时加工 $50\times(1+20\%)=60$ 个零件.

乙组每小时加工 50 个零件.

26. 甲由 A 地到 B 地需 40min，乙由 B 地到 A 地需 60min.

27. 解题思路　要知道何种购货方式合算，应比较他们各自所购饲料的平均单价数，单价越低越合算.

解　设两次购买的饲料单价分别为每千克 m 元和 n 元（$m>0$，$n>0$，$m\neq n$）. 购货员 A 两次购买饲料的平均单价为

$$\frac{1000m+1000n}{1000+1000}=\frac{m+n}{2}\text{（元/千克）}.$$

购货员 B 两次购买饲料的平均单价为

$$\frac{800+800}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}=\frac{2mn}{m+n}\text{（元/千克）}.$$

而 $\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}>0$，$\therefore \frac{m+n}{2}>\frac{2mn}{m+n}$.

即,购货员 A 所购买的饲料平均单价高于购货员 B 所购饲料的平均单价,所以选用购货员 B 的购买方式合算.

28. 解题思路　该台机器不加修理时,每使用一次折合使用费为 $\frac{N}{n}$ 元,修理后每使用一次折合使用费为 $\frac{N+P}{m}$ 元,当修理后每次使用费小于不加修理时每次使用费较为合算.

解: 由 $\frac{N}{n}-\frac{N+P}{m}>0$, 可得 $P<\frac{m-n}{n}N$.

$\therefore$ 当 $P<\frac{m-n}{n}N$ 时,修理后再使用较为合算.

29. (1) 设甲、乙单独完成此项工程分别需 x 天,y 天,根据题意,得

$$\begin{cases}\frac{24}{x}+\frac{24}{y}=1,\\ \frac{20}{x}+\frac{40}{y}=1.\end{cases}\quad \text{解得 } x=30,\ y=120.$$

经检验,$x=30$, $y=120$ 是方程的解.

(2) 设单独完成此项工程,甲需费用 m 万元,乙需费用 n 万元,根据题意,得

$$\begin{cases}\left(\frac{m}{30}+\frac{n}{120}\right)\times 24=120,\\ \frac{m}{30}\times 20+\frac{n}{120}\times 40=110.\end{cases}\quad \text{解得 } m=135, n=60.$$

30. 设现在每支钢笔的价格是 x 元,则有

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+1}=6,$$

解得 $x_1=4$,$x_2=-5$,但 $x_2=-5$ 不合题意,故舍去.

$\therefore$ $x=4$.

小结与复习

一、1. $\frac{Fa^2}{GM}$

2. $\frac{2}{3}$　$\frac{2m-n}{n}=\frac{1}{3}\Rightarrow 6m-3n=n\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{2}{3}$

3. $\frac{10}{17}$

4. $x\neq -2$　要使分式有意义,分母不能为 0.

5. $-\frac{1}{2}$　要使分式值为 0,要求分子为 0,分母不能为 0.

6. $\dfrac{a^2+a-1}{a^3-a^2-1}$　分子,分母同时提出一个"－"号,再利用分式的性质进行变形.

7. $\dfrac{2}{1-x^2}$

8. -1　变形得 $\dfrac{(a-1)x+2}{x-1}=0$.要使方程有增根,则 $(a-1)x+2=0$,且增根为 $x=1$,此时 $a=-1$.

9. b

二、10. C

11. D　熟练掌握分式性质是解决此题的关键.

12. B　要使$\dfrac{x-1}{x+2}=0$,则分子为 0,即:$x-1=0\Rightarrow x=1$,分母不为 0,即:$x+2\neq0\Rightarrow x\neq2$.

13. D　14. D　15. C　$b(1+40\%)+2=a\Rightarrow b=\dfrac{a-2}{1+40\%}$.

三、16. $x+2$；17. $\dfrac{a}{a+1}$.

四、18. 原式$=\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{4}$.

19. 原式$=\dfrac{1}{a}=-\dfrac{2}{3}$；

五、20. $x=1$.

六、21. 解 设轮船在静水中速度为 x km/h,得.

$$\frac{80}{x+3}=\frac{60}{x-3}$$

解得　$x=21$

经检验:$x=21$ 是原方程的解.

22. 解 设甲独做需 x 天,乙独做需 y 天.则:

$$\begin{cases}\dfrac{16}{x}+\dfrac{16}{y}=1\\[2mm]\dfrac{4}{x}+\dfrac{4+33}{y}=1\end{cases}$$

设$\dfrac{1}{x}=a$,$\dfrac{1}{y}=b$,则 $\begin{cases}16a+16b=1,\\4a+37b=1.\end{cases}$

$\therefore$　$a=\dfrac{7}{176}$,$b=\dfrac{1}{44}$

$\therefore \begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{176}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{44}. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=25\dfrac{1}{7}, \\ y=44. \end{cases}$

经检验 $\begin{cases} x=25\dfrac{1}{7}, \\ y=44 \end{cases}$ 是所列方程的解.

23. 解 设完成往甲地送水任务还需 x 天,完成往乙地送水任务还需 y 天,根据题意,得 $\begin{cases} \dfrac{180}{x+5}\times 3+\dfrac{120}{y+5}\times 2=84, \\ \dfrac{180}{x+5}\times 2+\dfrac{120}{y+5}\times 3=81. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \dfrac{45}{x+5}+\dfrac{20}{y+5}=7 \\ \dfrac{40}{x+5}+\dfrac{40}{y+5}=9. \end{cases}$

解之,得 $\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$ 经检验, $\begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$ 是原方程组的解.

24. 解:(1) 设红队提速前红、绿两支车队的速度分别为 x km/h 和 y km/h. 依题意,有

$$\frac{200}{y}=\frac{1800}{x}, \text{解得} \frac{x}{y}=\frac{9}{10}.$$

即红、绿两队的速度比为 $9:10$.

(2) 设 $x=9k$, $y=10k$,

则绿队行后 1000km 所用的时间为 $t_1=\dfrac{1000}{10k}$,红队行后 1200km 所用的时间为 $t_2=\dfrac{1200}{9k\times 1.2}=\dfrac{1000}{9k}$,

$\because t_1\neq t_2$, $\therefore$ 红、绿两队不能同时到达北京.

(3) 由 (2) 得 $t_1<t_2$, $\therefore$ 绿队先到达北京.

设绿队到达北京时,两车队相距 a km,

则有 $\dfrac{1200-a}{9k\times 1.2}=\dfrac{1000}{10k}$,

解得 $a=120$km.

单元综合测试

基础能力测试

一、1. $x=1,2$; $x=-1$　2. $m\neq 0$　3. $\dfrac{x-y-z}{x+y+z}$　4. x^2-1　5. -4

6. $\frac{2a^2+3}{a-1}$　7. $x=-\frac{2}{5}$　8. $-\frac{y}{x}$　9. 1　10. $-\frac{2}{3}$

二、11. C　12. B　13. D　14. B　15. C　16. C

三、17. (1) $\frac{1}{a+4}$；(2) $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$　18. (1) 原式 $=-\frac{1}{x+y}$，当 $x=-1$，$y=-3$ 时原式 $=\frac{1}{4}$；(2) ∵ $a+\frac{1}{a}=3$　又∵ $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3\right]=3\times(3^2-3)=18$

∴ $\frac{a^3}{a^6+1}=\frac{1}{18}$　19. (1) $x=-3$；(2) 当 $m+n\neq0$ 时，$x=\frac{m-n}{m+n}$ 当 $m+n=0$ 时，方程有无数解，即 x 为任意数.　20. ①完全平方式，平方差公式，立方差公式，约分；②有错误，2，−2.　21. 设乙每小时走 $x$km，则甲每小时走 $(x+0.5)$ km. 依题意有 $\frac{\frac{36}{2}+2}{x+0.5}=\frac{\frac{36}{2}}{x}$，所以 $x=4.5$.

发展能力测试

一、1. 2　2. $-\frac{1}{x^3}$　3. −1　4. $\frac{a-b}{ab}$　5. $\frac{8}{3}$　6. $-\frac{1}{2}$　7. $y=\frac{3-x}{2}$

8. ±1　9. 6　10. 4

二、11. B　12. D　13. D　14. C　15. A　16. B　17. B　18. B

三、19. (1) $x-y$；(2) 1　20. (1) $A=\frac{2}{3}$，$B=\frac{1}{3}$，$C=\frac{1}{3}$；(2) $k=-1$.

21. $x=8$　22. ②设 $\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=k$，则 $y+z=kx$，$z+x=ky$，$x+y=kx$，所以 $k(x+y+z)=2(x+y+z)$，又因为 $x+y+z\neq0$，所以 $k=2$，即 $x+y=2z$，故原式 $=\frac{x+y-z}{x+y+z}=\frac{2z-z}{2z+z}=\frac{1}{3}$.　23. 设苏州有 A 牌衬衫 x 件，则依题意有：$\frac{80000}{x}=\frac{176000}{2x}-4$，所以 $x=2000$ (件)，则赚钱：$(2000\times3-150)\times58+150\times58\times80\%-176000-80000=90260$ (元).

24. 解：∵ $y\neq0$　∴ $4\left(\frac{x}{y}\right)^3-4\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1=0$　设 $\frac{x}{y}=z$　∴ $4z^3-4z^2-z+1=0$　∴ $4z^2(z-1)-(z-1)=0$　∴ $(z-1)(2z+1)(2z-1)=0$　∴ $z=1$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$　∴ $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=z+\frac{1}{z}$

∴ 原式 $=2$ 或 $\frac{5}{2}$ 或 $-\frac{5}{2}$.

第十章

10.1 **平方根**

一、1. B 零的平方根只有一个,即是零.

2. D $\sqrt{16}$表示 16 的算术平方根,即$\sqrt{16}=4$.故本题的实质是求 4 的算术平方根,而 4 的平方根为 ± 2.故选 D.

3. B

4. D 要使$\sqrt{-a^2}$有意义,要求被开方数必须非负,即:$-a^2\geqslant 0$ $\therefore a=0$ 5. D

二、6. ± 4 7. $a\leqslant 1$;$a\geqslant 1$;$a=1$,0 8. $\frac{5}{4}$ 9. ± 2,2 10. $1\frac{1}{9}$ 两个非负数之和为 0,则 $3x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$,$|1+y|=0\Rightarrow y=-1$,$\therefore x^2+y^2=\frac{1}{9}+1=1\frac{1}{9}$. 11. $x=0$ 或 $x=\sqrt{2}$ 12. -3,$a+b=0$

三、13. 平方根 ± 0.16,算术平方根 0.16;

14. 平方根 $\pm 10^{-3}$,算术平方根 10^{-3}.

四、15. 25; 16. $-\frac{1}{6}$; 17. $\frac{5}{3}$; 18. 25.

五、19. $x\leqslant 5$; 20. x 为全体实数.

六、21. $x=\pm\frac{5}{2}$; 22. $x=15$ 或 $x=-19$.

七、23. $x=\pm 10$.

24. 17 利用勾股定理,对角线长为$\sqrt{15^2+8^2}$.

25. $x^2=\frac{2500}{4}$,$x>0$,$\therefore$ $x=\frac{50}{2}=25$ $\therefore$ $\sqrt{2x-1}=\sqrt{49}=7$.

26. $\sqrt{a}=(\pm 3)^2$ $\therefore$ $\sqrt{a}=9$ $\therefore$ $a=81$.

27. 由已知得 $x-199+y\geqslant 0$,$199-x-y\geqslant 0$,$\therefore x+y=199$ ①,又 $3x+5y-2-m=0$ ②,$2x+3y-m=0$ ③由①②③得 $m=201$.

28. 解题思路 掌握非负数的一个重要性质:偶次方,绝对值和算术平方根都是非负数,n 个非负数的和为零,则每一个非负数都为零.

解: $\because \sqrt{a-1}+b^2-4b+4=0$,

$\therefore$ $\sqrt{a-1}+(b-2)^2=0$.

又 $\because$ $\sqrt{a-1}\geqslant 0$,$(b-2)^2\geqslant 0$,

$\therefore$ $\sqrt{a-1}=0$,$(b-2)^2=0$,

$\therefore\quad a=1, b=2$,

由三角形的三边关系定理：$1<c<3$.

29. 解题思路　应通过特殊值归纳总结出一般规律，通过猜想，探索出结论.

解：当 $n=1$ 时，$\sqrt{n^2+n}=\sqrt{1^2+1}$，$\sqrt{1^2+1}<2$，

即 $\sqrt{1^2+1}$是大于 1 小于 2 的数，

$\therefore\sqrt{1^2+1}$的整数部分是 1；

当 $n=2$ 时，$\sqrt{n^2+n}=\sqrt{2^2+2}$，$2<\sqrt{2^2+2}<3$，即 $\sqrt{2^2+2}$是大于 2 小于 3 的数，

$\therefore\ \sqrt{2^2+2}$的整数部分是 2；

当 $n=3$ 时，$\sqrt{n^2+n}=\sqrt{3^2+3}$，$3<\sqrt{3^2+3}<4$，即 $\sqrt{3^2+3}$是大于 3 小于 4 的数，

$\therefore\ \sqrt{3^2+3}$的整数部分是 3；

如此类推，可知：$n<\sqrt{n^2+n}<n+1$，即 $\sqrt{n^2+n}$是大于 n 小于 $n+1$ 的数，

$\therefore\ \sqrt{n^2+n}$的整数部分是 n.

30. 解题思路　关键是理解地球与飞船内时间差的换算，地面上过去 1s，飞船内只过去$\sqrt{1-0.98^2}=0.199\approx0.2$(s)，相当于地面上时钟走时速度的五分之一，地面上过了 5 年，飞船内只过了一年，所以哥哥在这段时间内长了一岁.

解：哥哥的年龄是 29 岁.

10.2　用计算器求平方根

一、1. 关机，切断计算器的电源

2. 键盘，显示器

3. 开机，接通计算器的电源

4. -4

5. $\boxed{1}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{9}$，5.210

6. $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{2}$，0.214476

二、7. B　8. A　9. C　10. C　11. C　12. C

三、13. 0.5472；14. 4.125；15. -0.2823；16. -7.505；17. 541.3；18. -251.625.

四、19. $\because g=0.0098\text{km/s}^2$，$R=6370\text{km}$，

$\therefore\ v=\sqrt{gR}=\sqrt{0.0098\times6370}=7.9\ (\text{km/s})$.

20. 44448889

10.3 立方根

一、1. C 注意零的平方根只有一个，是它本身.

2. A 注意掌握和理解概念：正数有一个立方根，仍为正数；零的立方根是0；负数有一个立方根，仍为负数.

3. D 一切实数都可以开立方.

4. B 正数的立方根是正数，负数的立方根是负数.

5. D $\sqrt{16}$的平方根实际上求4的平方根和立方根.

6. D 零的算术平方根是0，零的立方根是0，负数的立方根比这个数本身大.

7. C 8. D 9. A 10. D 掌握几个特殊数，0，±1的有关平方、立方知识. 11. C

二、12. $a-b$

13. $\pm\sqrt{2}$ 14. -2，±3，-13 15. 4，$\frac{1}{10}$，$-\frac{3}{4}$ 16. 两，零，一，一

17. 4 18. 64或-216 19. 1.

20. 0 $a<0$ 故$\sqrt{a^2}=-a$，$\sqrt[3]{a^3}=a$.

21. 1 a，b互为相反数，则$a+b=0$，c，d互为负倒数，则$cd=-1$，故

$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}-\sqrt[5]{cd}=1$.

三、22. $x=\frac{3}{8}$； 23. $x=-\sqrt[3]{5}$.

四、24. -1； 25. -0.5； 26. 0.73； 27. $2\frac{1}{16}$.

五、28. $\begin{cases}a+4\geqslant0\\a\neq0\end{cases}\Rightarrow a\geqslant-4$ 且 $a\neq0$ $\therefore$ $a\geqslant-4$ 且 $a\neq0$

29. $x\neq\pm2$.

六、30. 解：$\sqrt[3]{x}=4\Rightarrow x=64$

$(y-2z+1)^2+\sqrt[4]{z-3}=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}y-2z+1=0\\z-3=0\Rightarrow z=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=5$

$\therefore\ \sqrt[3]{x+y^3+z^3}=\sqrt[3]{64+125+27}=\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$.

31. 解题思路 这是生活中的实际问题，尽管它被神化，但应能从中找

出问题的实质,即把一个正方体的边长扩大为原来边长的 2 倍,体积是否为原来的二倍?若要使体积为原来的二倍,边长应为原来的多少?这两个问题必须用数学知识去解答.作为正方体,使它是已知正方体体积的二倍,这是数学上有名的立方倍问题,有许多数学家企图用尺规作图完成,均告失败.

解 设原祭坛边长为 a,若新祭坛的边长为 $2a$,则新祭坛的体积为 $(2a)^3=8a^3$,是原来祭坛体积的 8 倍;

若设新祭坛边长为 xa 时,体积是原来的 2 倍,则有 $(xa)^3=2a^3$,即 $x^3a^3=2a^3$,

$\therefore\ x^3=2$,$\therefore\ x=\sqrt[3]{2}$.

32. (1) $\sqrt{a^m}=a^{\frac{m}{2}}\ (a\geqslant 0)$;

(2) $\sqrt[3]{a^m}=a^{\frac{m}{3}}\ (a>0)$.

33. $\frac{75}{2}$.

10.4 用计算器求立方根

一、1. 7.290 2. −0.7334 3. −16.74 4. 3.302 5. 703 6. 5726,0.0526

二、7. C 8. B 9. C 10. B 11. D

三、12. 0.1261; 13. 15.89.

四、14. 6.651; 15. −176.3; 16. 8.41.

五、17. 值略,当被开方数大于 1 时,各式的值随根指数的增大而减小;

18. 值略,当被开方数小于 1 而大于 0 时,各式的值随根指数的增大而增大;

19. 解 利用计算器计算得

$\sqrt{2}\approx 1.414$,$\sqrt[3]{3}\approx 1.442$,$\sqrt[4]{4}\approx 1.414$,$\sqrt[5]{5}\approx 1.380$,$\sqrt[6]{6}\approx 1.348$,

$\therefore\ \sqrt[3]{3}>\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\sqrt[6]{6}$.

10.5 实数

一、1. D 若 x,y 互为相反数时,有 $|x|=|y|$,但 $x\neq y$.

2. C 3. B 倒数等于本身的数有 ± 1 相反数等于本身的数有 0 绝对值等于本身的数为一切非负数 平方等于本身的数有 0,1.

4. C 要使 $\sqrt{-(3x^2-27)^2}$ 表示实数,则 $3x^2-27=0\Rightarrow x=\pm 3$.

5. C 6. D a 与 b 互为相反数时,$a\neq b$,但 $a^2=b^2$. 7. D 8. A

二、9. $3\sqrt{2}$,1,$\pi-3.14$,$1.42-\sqrt{2}$

新教材同步学案

10. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$，$-\sqrt[3]{9}$

11. 1，-9　12. $a-\sqrt{17}$，$a-\sqrt{17}$

13. $a<0$　14. 4 个

15. -1，3　16. $\geqslant -1$，$=1$　17. 0　18. 2，-1

三、19. $\pm(\sqrt{7}-\sqrt{5})$；20. $x=\sqrt{2}+\sqrt{5}$或$\sqrt{2}-\sqrt{5}$

四、21. $-\sqrt{3}<-1.7$；22. $\pi<\frac{22}{7}$.

五、23. 23；24. $\frac{5}{6}$；25. -36；26. 1；27. $\frac{1}{162}$.

六、28. 由图知：$a<0$，$c<0$，且$|c|>|a|$，$b>0$.

$\because$　$|a|=|b|$，$\therefore$　a，b 互为相反数，故 $a+b=0$.

$\therefore$　原式$=-a+0-[-(c-a)]-2(-c)=3c-2a$.

29. 0；30. 8；

31. $>$，$>$，$>$，$=$　$a^2+b^2\geqslant 2ab$

证明：$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$　$\therefore$　$a^2+b^2\geqslant 2ab$

32. 在 Rt△OEC 中，由勾股定理，$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{1^2-0.8^2}=0.6$，$CD=0.6+2.3=2.9>2.5$，则卡车能过厂门.

33. (1) ①-5，6；②$-\sqrt{3}$，0；③3，4；④$-1-\mathrm{i}$

(2) ① ×；②√

小结与复习

一、1. B　分析 a，b 为正数，负数，或一正一负时的情况，可以利用赋值法.

2. B　对实数的有关知识应熟练掌握.　3. C

4. A　由图知：$a<0$，$b>0$，$c<0$　且　$|c|>|b|>|a|$.

$\therefore$　$|a+b|-|c-b|=a+b-[-(c-b)]=a+b+c-b=a+c$

5. C　6. B　7. D　8. D　9. B　10. C

二、11. $a\leqslant 0$　12. $\frac{1}{8}$

13. $\pm\sqrt{b-2}$　令　$\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=x$，两边平方得：

$x^2=a-2+\frac{1}{a}$　而　$\frac{1}{a}+a=b$　$\therefore$　$x^2=b-2\Rightarrow x=\pm\sqrt{b-2}$.

14. 2　$\sqrt[3]{a^3}=a$　而　$a+\sqrt{a^2}+a=0\Rightarrow a=0$

$\therefore$　$|a-1|+|a+1|=2$.

15. A　$A^2=6+2+2\sqrt{12}=8+2\sqrt{12}$　$B^2=5+3+2\sqrt{15}=8+2$

$\sqrt{15}$　显然$\sqrt{15}>\sqrt{12}$　即有 $A^2<B^2$，且 A,B 均大于 0，$\therefore A<B$.

16. π，−2.14 或 3.14　17. 1，−9　18. 0，±1，±2；0；4

三、19. 2　$a+1=0\Rightarrow a=-1$，$a+b=0\Rightarrow a=-b$

$\therefore$　$b=1$，$\therefore$　$a^{100}+b^{100}=(-1)^{100}+1^{100}=1+1=2$.

20. $x=1$，$y=-1$，$x-8y$ 的平方根是 ±3，$x-8y$ 的立方根是$\sqrt[3]{9}$.

21. ①$-7\dfrac{4}{5}$；②3.10.

22. $-2c$　由图知：$a<0$，$c<0$，$b>0$. 且$|a|>|c|$　而$|a|=|b|$，则 a，b 互为相反数，$a+b=0$.

$\therefore$　原式$=-a-0-(c-a)+[-(c-b)]-b$

$=-a-c+a-c+b-b$

$=-2c$.

23. $-(3a+2b)$；

24. ±13，13；25. ±4；

26. $\because$　$5-\sqrt{2}a=2b+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}-a$　$\therefore$　$(5+a-2b)+\left(-a-\dfrac{2}{3}\right)\sqrt{2}=0$　又$\because$　a，b 均为有理数　$\therefore$　$\begin{cases}5+a-2b=0,\\ -a-\dfrac{2}{3}=0.\end{cases}$　$\therefore$　$a=-\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{13}{6}$

27. 512.8cm^3　根据物理中所学知识知 $m=\rho V$

$\therefore$　$V=\dfrac{m}{\rho}=\dfrac{4000}{7.8}=512.8$

28. 解题思路　应仔细分析每一个式子横线两边的关系，左边是两个数的完全平方，右边恰好是它们的积的两倍，这让我们想起什么？当然应该是完全平方公式.

解：归纳：一般结论是：如果 a，b 是两个实数，则有 $a^2+b^2\geqslant2ab$.

证明：$\because$　$(a-b)^2\geqslant0$，

$\therefore a^2-2ab+b^2\geqslant0$，　即　$a^2+b^2\geqslant2ab$.

29. 解：应选用围成圆形场地的方案，它的面积较大.

设 S_1，S_2 分别表示围成的正方形场地，圆形场地的面积，则

$S_1=\left(\dfrac{48}{4}\right)^2=144(\text{m}^2)$，$S_2=\pi\left(\dfrac{48}{2\pi}\right)^2=\dfrac{576}{\pi}(\text{m}^2)$.

$\because\pi<4$，$\therefore\dfrac{1}{\pi}>\dfrac{1}{4}$，$\therefore\dfrac{576}{\pi}>\dfrac{576}{4}$.

即$\frac{576}{\pi}>144$，$\therefore S_2>S_1$.

单元综合测试

基础能力测试

一、1. $\pm\sqrt{3}$，$-\sqrt[3]{3}$　2. $\frac{81}{625}$，$\pm\frac{8}{17}$　3. 1 或 0　4. 2，-4　5. $-\sqrt[3]{2}$　6. -27　7. 无数，无数

8. -1 或 -5　由已知得 $m=\pm2$，$n=\pm3$，而 $|m+n|=m+n$，则 $m+n\geqslant0$，

$\therefore m=2$，$n=3$ 或 $m=-2$，$n=3$.

9. 1，0

10. $2a$　$a<0$ 时，$\sqrt[3]{a^3}=a$，$\sqrt{a^2}=-a$，$|a|=-a$.

二、11. B　12. A　13. C　14. B　15. C　16. C　17. D　18. D

19. C　$\sqrt{-(3x^2-27)^2}$ 表示实数，即 $-(3x^2-27)^2\geqslant0$，故有 $3x^2-27=0$.

20. A　被开方数可配方为 $(n^2-3n+1)^2$，而 n 为整数，故 $(n^2-3n+1)^2$ 是一个整数的平方，所以 $\sqrt{(n-3)(n-2)(n-1)n+1}$ 表示一个整数.

三、21. -2

22. 由已知得 $\begin{cases}2a+1=0,\\ b+1=0.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ b=-1.\end{cases}$

$\therefore \pm\sqrt{-2a-8b}=\pm3$，$\sqrt[3]{-2a-8b}=\sqrt[3]{9}$.

23. (1) 5　(2) $\pm\sqrt{3}$　$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，$x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}$.

24. 1　由已知得 $\begin{cases}1-2x\geqslant0,\\ 2x-1\geqslant0.\end{cases}$

$\therefore x=\frac{1}{2}$，$\therefore y=\frac{1}{2}$.

25. 由题给条件知 $540x=n^2$（n 为正整数，）$n=\sqrt{540x}=\sqrt{2^2\cdot3^3\cdot5\cdot x}$，

$\because$ 要求 x 最小，$\therefore x=15$，此时完全平方数为 8100.

初二代数

26. $\because A$ 为 $n-m+3$ 的算术平方根，B 为 $m+2n$ 的立方根，结合条件知 $\begin{cases} m-n=2, \\ m-2n+3=3. \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} m=4, \\ n=2. \end{cases}$ 此时 $A=\sqrt{1}=1$，$B=\sqrt[3]{8}=2$，$\therefore \pm\sqrt{B-A}=\pm\sqrt{2-1}=\pm 1$.

发展能力测试

一、1. B　2. A　3. B　4. A　5. D　6. C　7. D　8. D　9. A　10. A　$a-b=0$　①，$9-a^2=0$　②，$a+b>0$　③，同时成立.

二、11. -27　12. 0.08944，8.944　13. 0 或$\sqrt{2}$　14. 2，3，4，5　15. 0　16. ± 4　17. $-\frac{3}{4}$　18. $a=-\frac{2}{5}$，$b=\frac{3}{2}$　19. 3　20. 1

三、21. (1) $\frac{57}{50}$；(2) $\frac{1}{59}$；

22. (1) $x=\pm\frac{1}{2}$；(2) $x=-\frac{1}{2}$；

23. $a=9$　24. 由题给条件得 $x-y=\pm 3$，结合 $x+y=4$，可求出 $\begin{cases} x=\frac{7}{2}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$ 代入所求式中求得值为：-2.

25. 由已知得 $(a-1)^2+(b-2)^2=0$，

$\therefore a=1$，$b=2$，代入原式得值为 10.

26. 设长方向摆 x 枚，宽方向摆 y 枚　$\therefore$　$\begin{cases} 3x=2.5y \\ xy=30 \end{cases}$

$\therefore$　$x=5$，$y=6$

27. 由已知得 $\sqrt{a-2002}=a-|2001-a|$，　①

$\because$　$a-2002\geqslant 0$，

$\therefore$　$2001-a<0$ 将①两边平方展开整理，得：

$a-2001^2=2002$.

11.1　**二次根式**

一、1. A　2. D　只须满足被开方式非负即可.　3. C　理解掌握二次根式的定义是解此题的关键.　4. C　要使被开方数恒为非负.　5. B　6. B　要使 $-\sqrt{-(x-2)^2}$ 有意义，则被开方数一定要恒为非负. $\therefore x-2=0 \Rightarrow x=2$.

7. C　8. C　9. A　10. B

二、11. $a\geqslant 0$　12. $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$　13. $3x-1$　14. ①$\pm\sqrt{0.5}$，②$\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$，③$\pm\sqrt{10}$，④$\pm\sqrt{3}a$，⑤$\pm\sqrt{1-2x}$　15. $=1$　16. $=1$　17. $a<5$　18. $\frac{2}{5}$

三、19. $-\frac{3}{2}$；20. 10；21. m^2n^2t；22. $\frac{1}{3}$.

四、23. $(\sqrt{3}x-4)(\sqrt{3}x+4)$；24. $(ab-\sqrt{5})^2(ab+\sqrt{5})^2$；

25. $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x-2)(x+2)$；26. $(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})$.

27. **解题思路**　**可把** 3 **写成** $(\sqrt{3})^2$，**把** $x^2-2\sqrt{2}x-6$ **中** -6 **拆成** $2+(-8)$，**再把** 2 **写成** $(\sqrt{2})^2$ **配成完全平方，然后再用平方差公式分解**.

解：$y^2-2\sqrt{3}y+3=y^2-2\sqrt{3}y+(\sqrt{3})^2=(y-\sqrt{3})^2$

$x^2-2\sqrt{2}x+2-8=x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2-8$

$=(x-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2$

$=(x-\sqrt{2}-2\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+2\sqrt{2})=(x-3\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

28. **解题思路**　**几个非负数之和为** 0 **时，那么该非负数一定为** 0.

解：$\frac{1}{2}|a-b|+2\sqrt{2b+c}+c^2-c+\frac{1}{4}=0$

$\therefore\quad a-b=0\Rightarrow a=b$

$2b+c=0\Rightarrow c=-2b$

$c^2-c+\frac{1}{4}=0\Rightarrow(c-\frac{1}{2})^2=0\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

$\therefore\quad b=-\frac{1}{4}\quad a=-\frac{1}{4}$

$\therefore\quad \sqrt{-a(b+c)}=\sqrt{\frac{1}{4}(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

29. **解题思路**　**由二次根式定义知** $x-1\geqslant 0$，$1-x\geqslant 0$，**故** $x=1$，**可求出** y **的值**.

解：$\because\quad x-1\geqslant 0$，**且**　$1-x\geqslant 0$，

$\therefore\quad x=1$，　$y<\frac{1}{2}$，

$\therefore\quad \frac{|1-y|}{y-1}=\frac{1-y}{y-1}=-1$.

30. $|x+5|-|2-x|=7$　**当且仅当** $|x+5|=x+5$，$|2-x|=x-2$ **时，原式成立**，$\therefore\quad x+5\geqslant 0$ **且** $2-x\leqslant 0$　$\therefore\quad x\geqslant 2$

初二代数

31. 解：原式 $=(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2002}-\sqrt{2001})(\sqrt{2002}+1)$
$=(\sqrt{2002}-1)(\sqrt{2002}+1)=2002-1=2001$.

11.2　二次根式乘法

一、1. D　注意，把根号外面的因式移入根号内时，应作相应的乘方.

2. A　$-\frac{1}{a}>0\Rightarrow a<0$

3. D　$\frac{1}{x-2}$是被开方数，故 $x-2>0\Rightarrow x>2$

$\because$　$2-x<0$　因此将 $2-x$ 移入根号得 $-\sqrt{x-2}$.

4. C

5. C　要使等式成立，则 $b-a\geqslant 0\Rightarrow b\geqslant a$，$x\geqslant 0$.

6. D　如果等式成立，显然 $-a\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant 0$　$a+1\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant -1$

$\therefore -1\leqslant a\leqslant 0$.

7. D　因为不知道 x 的具体符号，所以要带上绝对值符号.

8. D　x 是偶次方，故 x 可取任意实数，y，z 需同号时，才满足被开方数有意义，或者其中有零.

二、9. a　10. $-b\sqrt{a}$　11. $-\sqrt{1-a}$　12. $<$，$<$；13. 0　14. $-\sqrt{a}$

三、15. $\pm\sqrt{5}$；16. $2xy$.

四、17. $-12\sqrt{10}$；18. $7\sqrt{2}-21\sqrt{6}$；19. $a+b-2\sqrt{ab}$.

五、20. $-\sqrt{3.2}$；21. $-\sqrt{4-4x+x^2}$.

六、22. $<$

七、23. 解题思路　应考虑积的算术平方根性质条件，被开方数为非负数.

解：由 $4+x\geqslant 0$　且　$4-x\geqslant 0$，　得 $-4\leqslant x\leqslant 4$.

24. 解题思路　因$\sqrt{10}$的值大于 3 而小于 4，故$\sqrt{10}$的整数部分是 3，故 $x=3$；$\sqrt{10}$减去整数 3，即得其小数部分 $y=\sqrt{10}-3$.

解：依题意知：$x=3$，$y=\sqrt{10}-3$.

$\therefore$　$(\sqrt{10}+x)y=(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)=10-9=1$.

25. 解题思路　直接把 x，y 值代入代数式中求值计算比较困难. 依题目条件可求出 $x+y=\sqrt{10}$，$xy=2$，再把原代数值用 $(x+y)$ 及 (xy) 的代数式表示出来，再代入求值.

解： $x+y=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10}$，

$xy=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\times\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}=\frac{10-2}{4}=2.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x^3+x^2y+xy^2+y^3&=x^2(x+y)+y^2(x+y)\\&=(x+y)(x^2+y^2)\\&=(x+y)[(x+y)^2-2xy]\\&=\sqrt{10}\cdot[(\sqrt{10})^2-2\times2]\\&=6\sqrt{10}.\end{aligned}$$

26. **解题思路** 因为所求的代数式是4次多项式，若直接将 x 的值代入计算，则十分麻烦且易出差错.但如果将已知条件变形得出一个 x 的等式，再平方得到一个关于 x 的二次三项式的值等于0，利用此等式将所求的多项式的次数降低，则这种“凑0法”使计算变得简单容易.

解：$\because\quad x=5-2\sqrt{6}$

$\therefore\quad x-5=-2\sqrt{6}.$

两边平方得

$x^2-10x+25=24$，即 $x^2-10x+1=0.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &3x^4-28x^3-17x^2+2x-10\\=&(3x^4-30x^3+3x^2)+2(x^3-10x^2+x)-10\\=&3x^2(x^2-10x+1)+2x(x^2-10x+1)-10=-10.\end{aligned}$$

27. $\sqrt{12.5}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

$\because\quad \sqrt{2}=m\quad\therefore\quad\sqrt{12.5}=\frac{5}{m}$

28. **解题思路** 从所学的知识中引申出一系列新知识，是培养学生获取数学知识能力的捷径之一.如本例，从形如 $a^b=N$ 的等式中，从三知二必得其一的教学思路出发，介绍了乘方运算和开方运算，还有一种运算初中未讲到，现以考题形式出现，考生只要认真阅读所提供的材料，不难从对数定义及其运算性质获知：

解：(1) ①$\log_3 81=4$；②$\log_3 3=1$；③$\log 3^1=0.$

④从乘方运算与对数运算互为逆运算获知：

$\log_x 16=4$，意味着 $x^4=16$，即 $x=2.$

(2) 易推得：$\log_a M_1M_2M_3\cdots M_n=\log_a M_1+\log_a M_2+\log_a M_3+\cdots+\log_a M_n.$

$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

11.3　**二次根式除法**

一、1.B　**要使等式成立，必须满足被开方数为非负数，且等式两边根号外的符号应相等.**

即 $-\frac{a}{b^5} \geqslant 0$，$-ab \geqslant 0$，$\frac{1}{b^3} < 0 \Rightarrow b < 0 \quad \therefore \quad a > 0$

2. B　**把根号外的系数都化到根号内，再比较被开方数的大小.**

二、3. -1，$2\sqrt{2xy}$　4. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$

三、5. 2；6. $\frac{\sqrt{5}}{2}$；7. $2\sqrt{30}$；8. $\sqrt{35}$；9. $\frac{5}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

四、10. $n\sqrt{m+n}$；11. $-\frac{10}{9}\sqrt{6}$；12. $4\sqrt{5xy}$；

13. $\frac{\sqrt{m^3-4mn^2}}{m+2n}$.

五、14. $\frac{3}{4}\sqrt{6}$；15. $-9\sqrt{2}$；16. $\frac{8x}{3y}\sqrt{3xy}$；17. $4xy\sqrt{2x}$；

18. $-\frac{2y}{x}\sqrt{x}$；19. $5\sqrt{6}$；20. $-9a^2b\sqrt{ab}$.

六、21. $(a-2)^2 + (b-1)^2 = 0$，$\therefore \quad a = 2$，$b = 1$

原式 $= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$

22. **解题思路　由二次根式定义知** $3-b \geqslant 0$ **且** $b-3 \geqslant 0$，**故** $b = 3$，$a = 2$.

解：**由题设知** $3-b \geqslant 0$ **且** $b-3 \geqslant 0$，$\therefore b = 3$

$\therefore a = 2$.

$\therefore \sqrt{\frac{ab-1}{a+b}} \div \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$= \sqrt{\frac{2\times 3-1}{2+3}} \div \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$= 1 \div \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

23. **解题思路　由分数定义知，两个非负数，其倒数大的反而小，故可比较** $\sqrt{15}-\sqrt{14}$ **和** $\sqrt{14}-\sqrt{13}$ **倒数的大小，从而确定它们的大小.**

解：$\because \quad \frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{14}}{(\sqrt{15}-\sqrt{14})(\sqrt{15}+\sqrt{14})}$

$=\sqrt{15}+\sqrt{14}$，

$$\frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{13}}{(\sqrt{14}-\sqrt{13})(\sqrt{14}+\sqrt{13})}$$

$=\sqrt{14}+\sqrt{13}$，

又 $\sqrt{15}+\sqrt{14}>\sqrt{14}+\sqrt{13}$，

$\therefore$ $\sqrt{15}-\sqrt{14}<\sqrt{14}-\sqrt{13}$

24. **解：原式** $=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+$

$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\sqrt{4})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}+\cdots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{99}+\sqrt{100})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$

$=-1+\sqrt{100}=9$

25. **解题思路　将等式** $x+y=2\sqrt{xy}$ **移项，分解因式，可得** x **与** y **的关系，利用这种关系可求出代数式的值.**

解：$\because$ $x+y=2\sqrt{xy}$，$x>0$，$y>0$，

$\therefore$ $(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2=0$

$\therefore$ $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0$

$\therefore$ $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$

$\therefore$ $x=y$.

$\therefore$ $\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{3x+5y}}=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{8x}}=\sqrt{\frac{2x}{8x}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

26. $4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{4^3}{15}}=\sqrt{\frac{(4^3-4)+4}{15}}=\sqrt{\frac{4(4^2-1)+4}{15}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$

$n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$ $(n\geqslant 2)$

证明：$n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{(n^3-n)+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n(n^2-n)+n}{n^2-1}}=$ $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$.

11.4　**最简二次根式**

一、1. A　2. D　3. A　4. B　5.B

6. A　**理解最简二次根式的定义 满足被开方数的因数是整数，因式是**

整式，满足被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式叫做最简二次根式.

二、7. $5a\sqrt{a}$　掌握化二次根式为最简二次根式的一般步骤是：①把带分数或小数化成假分数；②把被开方数分解质因数或分解质因式；③把根号内能开得尽方的因式（或因数）移到根号外；④化去根号内的分母，或者化去分母中的根号；⑤约分.

8. $2\sqrt{2x^2+2y^2}$　9. $-\frac{2}{b}\sqrt{-ab}$　10. $-3\leqslant x\leqslant 0$

11. $\frac{2}{3}\sqrt{b-1}$　12. $\sqrt{21}$，$\frac{1}{3}\sqrt{(x+y)(x-y)}$

三、13. $-\frac{15}{2}$；14. 1.

四、15. $\frac{1}{4}\sqrt{6a^2-6b^2}$；16. $\frac{x-3y}{x}\sqrt{xy}$；17. $x\sqrt{x^2y+xy^2}$；18. $\frac{a\sqrt{a-b}}{(a-b)^2}$；

19.
$$\begin{aligned}&\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}\\&=\sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1}\\&=\sqrt{(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1}\\&=\sqrt{(n^2+3n+1)^2}\\&=n^2+3n+1\quad (n\text{ 为正整数})\end{aligned}$$

20. 原式 $=\frac{x}{x-2y}\cdot\sqrt{\frac{y(x^2-4xy+4y^2)}{x}}=\frac{x}{x-2y}\cdot\sqrt{\frac{y(x-2y)^2}{x}}$　$\because 0<x<2y$，$\therefore \frac{x}{x-2y}<0$

原式 $=-\sqrt{\frac{x^2}{(x-2y)^2}}\cdot\sqrt{\frac{y(x-2y)^2}{x}}=-\sqrt{\frac{x^2}{(x-2y)^2}\cdot\frac{y(x-2y)^2}{x}}=-\sqrt{xy}$.

五、21. 解题思路　先应发现规律，从等式的右边不难发现，被开方数的分母是分子的平方数减去 1，根号外的因式与分子相同，且分子、分母均为自然数，因此有如下规律：

$$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}\quad (n\text{ 为自然数})$$

通过对上式左边进行适当运算变形，即可证明这个等式成立.

证明：$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3-n}{n^2-1}+\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}$

$=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$，

即：$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$

22. 解题思路　(1) y 中的分母比较复杂，但可以像因式分解一样把分母进行“分解”，变成两个数积的形式，再化掉一个分母中的因数 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$，就能证明.

(2) 把原代数式分解因式

证明：
$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{2+\sqrt{14}+\sqrt{6}+\sqrt{21}}\\&=-\frac{1}{(2+\sqrt{6})+(\sqrt{14}+\sqrt{21})}\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}\\&=-\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{7})}\\&=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{7})}\\&=-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}\end{aligned}$$

$\therefore\quad x+y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=0$

(2) 解：
$$\begin{aligned}x^3y-xy^3&=xy(x^2-y^2)\\&=xy(x+y)(x-y)\\&=0\end{aligned}$$

11.5　二次根式的加减法

一、1. C　掌握二次根式的加减法的一般步骤：①将每一个二次根式都化简为最简二次根式；②找出其中的同类二次根式；③合并同类二次根式.

2. C　3. C　4. C

5. D　掌握同类二次根式的概念：几个二次根式化成最简二次根式以后，若被开方数相同，则它们是同类二次根式.　6. D

二、7. $-\sqrt{3}$　8. $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$　9. -1　10. $\frac{21}{4}$　11. $-\sqrt{2}$　12.

$-7+2\sqrt{10}$　13. $8+2\sqrt{3}$

三、14. $\frac{17}{4}\sqrt{2}+\frac{10}{3}\sqrt{3}$；15. $\left(\frac{3ab}{2}+1\right)\sqrt{3a}+3ab$；

16. $\frac{\sqrt{a}}{2}+3\sqrt{b}$；17. $\left(\frac{4}{x}-\frac{11}{3}\right)\sqrt{x}$；18. $4a\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}$；

19. $2x\sqrt{x}$；20. $\sqrt{ab}$；21. $(1-2a)\sqrt{2a}$；

22. $2x-1=\sqrt{1994}$　∴　$(2x-1)^2=1994$　∴　$4x^2-4x+1=1994$　∴　$4x^2-4x=1993$　$4x^3-1997x^2-1994=x(4x^2-4x)-1993x^2-1994=1993x-1993x^2-1994=-1993(x^2-x)-1994=-1993\cdot\frac{1993}{4}-1994=-995006\frac{1}{4}$；23. $\frac{1}{8}$.

四、24. 3.54；25. −2.56；26. 0.

五、27. **解题思路**　n 个最简根式是同类二次根式，则它们的被开方数相同，可列一个方程，本题还隐含了一个条件即 $\sqrt[a+b]{2a+3b}$ 的根指数次数是 2，又可列一个方程，解方程组即可求 a，b.

解：依题意知

$$\begin{cases}2a+3b=3a-b+3,\\ a+b=2.\end{cases}$$

解得　$\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$

28. ∵　$\frac{x^2-2}{x^2}=1-\sqrt{3}-\sqrt{2}$　∴　$1-\frac{2}{x^2}=1-\sqrt{3}-\sqrt{2}$　∴　$\frac{2}{x^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$　∴　$x^2=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　**原式**$=-\frac{2}{x^2}$　**代入得**：**原式**$=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$

29. **解题思路**　$\sqrt{50}$化简成最简二次根式是 $5\sqrt{2}$，因为一个有理数和一个无理数之和必为无理数和有理数加和的形式，故$\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$不可能开方开得尽，这样$\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$化简后必定是个二次根式，又$\sqrt{x}+\sqrt{y}=50\sqrt{2}$，故$\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$化简后必定是 $n\sqrt{2}$和 $m\sqrt{2}$的形式，由题目条件知 $m+n=5$，且 $m<n$，m、n 是正整数，

$$\begin{cases}\sqrt{x}=4\sqrt{2},\\ y=\sqrt{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\sqrt{x}=3\sqrt{2},\\ \sqrt{y}=2\sqrt{2}\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}x=18,\\ y=8\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=32,\\ y=2.\end{cases}$$

解　略

30. **解题思路**　可由特殊来探求一般，当 $a=0$ 时，代入原等式得 $b=0$；

新教材同步学案

当 $a=1$ 时，代入原等式可得 $b=-1$；当 $a=2$ 时，代入原等式中可求得 $b=-2$；……

由此可猜想 a 与 b 的关系是 $a+b=0$，故此，仅只需将原等式变形，得到 $a+b=0$ 即可.

解：∵ $(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+b^2}+b)=1$

∴ $\sqrt{1+b^2}+b=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}+a}$

即 $\sqrt{1+b^2}+b=\sqrt{1+a^2}-a$

移项，得

$$\sqrt{1+b^2}+a=\sqrt{1+a^2}-b$$

将上式两边平方，得

$1+b^2+a^2+2a\sqrt{1+b^2}=1+a^2+b^2-2b\sqrt{1+a^2}$，

即 $$a\sqrt{1+b^2}=-b\sqrt{1+a^2}$$

再将上式两边平方，得

$$a^2+a^2b^2=b^2+a^2b^2$$

即 $a^2=b^2$

∴ $a+b-0$ 或 $a-b=0$

当 $a-b=0$，即 $a=b$ 时，代入原等式中，得 $a=b=0$，故此时也是 $a+b=0$.

所以 a，b 之间的关系满足关系式 $a+b=0$.

11.6 二次根式的混合运算

一、1. C 将 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ 分母有理化得 $a=\sqrt{2}+1=b$

2. D $(\sqrt{10}+3)^2(\sqrt{10}-3)$

$=(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)=\sqrt{10}+3$

二、3. $(1-a)\sqrt{-a}$；

4. 9 进行分母有理化得 $\cancel{\sqrt{2}}-1+\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}}$ $=\sqrt{100}-1=9$；

5. $1+2\sqrt{3}$ $\sqrt{x^2-2x+1}+\dfrac{1}{x}=\sqrt{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x}$ 将 $x=2-\sqrt{3}$ 代入得：$\sqrt{(2-\sqrt{3}-1)^2}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+2+\sqrt{3}=-(1-\sqrt{3})+2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$+1$；6. $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$；

7. ±1　将 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{5}$　两边平方得：$a^2+2+\frac{1}{a^2}=5$　$\therefore$　$a^2+\frac{1}{a^2}=3$，令 $s=a-\frac{1}{a}$，将其两边平方得：$s^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 \Rightarrow s^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2$　$\therefore s^2=3-2=1$　$\therefore s=\pm1$　即：$a-\frac{1}{a}=\pm1$.

8. $<$；9. -1，0；

10. $\sqrt{2}-1$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}$；

11. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　将 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 进行分子有理化得 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$\therefore$ 原式 $=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^{1999}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1999}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

三、12. 0；13. 47；

14. $\frac{15+10\sqrt{2}-9\sqrt{3}-6\sqrt{6}}{2}$；

15. $3\sqrt{3}$　非负数之和为 0，则 $x-3=0 \Rightarrow x=3$，$\sqrt{3}-y=0 \Rightarrow y=\sqrt{3}$

$\therefore$　$y^x=(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}$；16. $x=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=2n+1-2\sqrt{n(n+1)}$

$y=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$

$\therefore$　$x+y=4n+2$，$xy=1$；

$19x^2+136xy+19y^2=19(x+y)^2+98xy=1998$

$\therefore$　$(x+y)^2=100$

$\therefore$　$x+y=10$ 或 -10

$\therefore$　$4n+2=10$ 或 -10

$\because$　n 为自然数

$\therefore$　$n=2$　17. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$；18. $2a$；19. -1；

20. A.　甲、乙分别用了两种途径进行分母有理化.

21. 解题思路　可把 $a\sqrt{a}$ 变形为 $a\sqrt{a}=\sqrt{a^2\cdot a}=\sqrt{a^3}=(\sqrt{a})^3$，同理 $b\sqrt{b}=\sqrt{b^2\cdot b}=\sqrt{b^3}=(\sqrt{b})^3$，从而分子分别可用立方和与立方差公式进行分解，约去分母.

解 原式$=\dfrac{\sqrt{a^2\cdot a}-\sqrt{b^2\cdot b}}{a+b-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a^2\cdot a}+\sqrt{b^2\cdot b}}{a+b+\sqrt{ab}}$

$=\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{a+b-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a+b+\sqrt{ab}}$

$=\dfrac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{a+b-\sqrt{ab}}+\dfrac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{a+b+\sqrt{ab}}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})[(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2]}{a+b-\sqrt{ab}}+$

$\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2]}{a+b+\sqrt{ab}}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})}{a+b-\sqrt{ab}}+\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b+\sqrt{ab})}{a+b+\sqrt{ab}}$

$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$=2\sqrt{a}$.

22. **解题思路** 注意到$(2x+5)-(2x-1)=6$,且能分解成$(\sqrt{2x+5})^2-(\sqrt{2x-1})^2=(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-1})$,就能求出$\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-1}$的值.

解 $\because$ $(2x+5)-(2x-1)=6$,

$\therefore$ $(\sqrt{2x+5})^2-(\sqrt{2x-1})^2=6$

$\because$ $(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-1})=6$

又 $\because$ $\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x-1}=1$,

$\therefore$ $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-1}=6$.

23. **解题思路** 所求的代数式$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$具有对称性,故只须求出$x_1+x_2$及$x_1x_2$值,把$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$变形为$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$,即可求出代数式的值.

解 $\because$ $x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=-\dfrac{b}{a}$

$x_1x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}.$$

11.7　**二次根式$\sqrt{a^2}$的化简**

一、1.D　**根据二次根式的有关知识：**$-a\geqslant0\Rightarrow a\leqslant0$

2. C　3. B　4. D　5.B

6.A　**由图知：**$-1<a<0$，$b>1$，　$\therefore |a+b|=a+b$
$\sqrt{(a-b+1)^2}=-(a-b+1)$　$\therefore$**原式**$=2b-1$.

7.B　8.C

二、9. 0；10. 2；

11. **依题意有：**$a+b=\sqrt5-\sqrt2$，$a+c=\sqrt2-\sqrt3$，$b+c=\sqrt3-\sqrt5$

原式$=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2]=\frac{1}{2}[7-2\sqrt{10}+8-2\sqrt{15}+5-2\sqrt6]=\frac{1}{2}(20-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}-2\sqrt6)=10-\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt6$；

12. $\frac{2}{x}$；

13. **解题思路　题目在已知条件中告诉了两个非负性数和为**0**，故** $a-\frac{1}{x}-x=0$ **且** $x^2-3+\frac{1}{x^2}=0$**，可得** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5$，$x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt5$，$\therefore\ a=x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt5$**，代入代数式中可求值**.

解：$\because\ |a-\frac{1}{x}-x|+\sqrt{x^2-3+\frac{1}{x^2}}=0$，

又　$\because\ \left|a-\frac{1}{x}-x\right|\geqslant0$，$\sqrt{x^2-3+\frac{1}{x^2}}\geqslant0$

$\therefore\ a-\frac{1}{x}-x=0$　**且**　$x^2-3+\frac{1}{x^2}=0$

由 $x^2-3+\frac{1}{x^2}=0$，**得**

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=5$$

$\therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5$　$\therefore\ x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt5$

$\therefore\ a=x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt5$

当 $a=\sqrt{5}$时，$\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|=\sqrt{5}-2$；

当 $a=-\sqrt{5}$时，$\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|=\sqrt{5}+2$；

故选 D.

14. **解题思路** 由二次根式定义知 $a(x-a)\geqslant 0$ ①，$a(y-a)\geqslant 0$ ②，且 $x-a\geqslant 0$，$a-y\geqslant 0$，又 a,x,y 两两互不相等，可知 $x-a>0$ ③，$a-y>0$ ④，通过①、③知 $a\geqslant 0$，又由②、④知 $a\leqslant 0$，从而可确定 $a=0$ 等式才有意义，把 $a=0$ 代入原等式中可得 x 与 y 之间关系为 $x=-y$，代入代数式中，即求出代数式的值，本题关键是通过二次根式定义概念要求，求出代数式$a=0$.

解：由二次根式定义知

$$\begin{cases} a(x-a)\geqslant 0, \\ a(y-a)\geqslant 0, \\ x-a\geqslant 0, \\ a-y\geqslant 0. \end{cases}$$

又∵ a,x,y 是两两不相等实数

∴ $x\neq a$ 且$a\neq y$， ∴ $x-a\neq 0$ 且 $a-y\neq 0$.

$$\therefore \begin{cases} a(x-a)\geqslant 0, & ① \\ a(y-a)\geqslant 0 & ② \\ x-a>0 & ③ \\ a-y>0 & ④ \end{cases}$$

由①、③知 $a\geqslant 0$；由②、④知 $a\leqslant 0$.

故仅当 $a=0$ 时，原等式$\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$在实数范围内有意义.

当 $a=0$ 时，代入原等式中得 $0=\sqrt{x}-\sqrt{-y}$.

∴ $x=-y$.

$$\therefore \frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{3(-y)^2+(-y)\cdot y-y^2}{(-y)^2-(-y)\cdot y+y^2}=\frac{y^2}{3y^2}=\frac{1}{3}$$

15. **解题思路** 先根据题目条件$\sqrt{a^2}\neq a=0$ 得$|a|=-a$，$a\leqslant 0$；同样可根据题目条件确定 b，c 符号，化简化去根号，再脱去绝对值符号进行计算.

显然 $ab\neq 0$，∴ $a\neq 0$，$b\neq 0$

解：∵ $\sqrt{a^2}+a=0$，∴ $\sqrt{a^2}=-a$，∴ $|a|=-a$，∴ $a<0$

∵ $\sqrt{c^2}=c$，∴ $|c|=c$，∴ $c\geqslant 0$

$\because \quad \frac{|ab|}{ab}=1$，$\therefore \quad |ab|=ab$，$\therefore \quad ab>0$.

又 $\because \quad a<0$，$\therefore \quad b<0$.

$\therefore \quad \sqrt{b^2}-\sqrt{(a+b)^2}+|a-c|-\sqrt{(c-b)^2}$

$=|b|-|a+b|+|a-c|-|c-b|$

$=-b-(-a-b)+(-a+c)-(c-b)$

$=-b+a+b-a+c-c+b$

$=b$.

16. **解题思路**　由 $x^2-y^2=1$ 知 $x^2-1=y^2$，$y^2+1=x^2$ 代入所求的代数式中，即可求出代数式值.

解：$\because \quad x^2-y^2=1$，$\therefore \quad x^2-1=y^2$，$x^2=y^2+1$，又 $x>0$，$y>0$，

$$\begin{aligned}\therefore \quad x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{x^2-1}&=x\sqrt{x^2}-y\sqrt{y^2}\\&=x|x|-y|y|\\&=x^2-y^2\\&=1.\end{aligned}$$

17. **解题思路**　先根据根式定义确定 $ab>0$，再根据 $2\sqrt{ab}-ab>0$ 和完全平方公式确定 $a<0$，$b<0$，把分子分解.

即　$a-b=-[-a-(-b)]=-[(\sqrt{-a})^2-(\sqrt{-b})^2]=-(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})\cdot(\sqrt{-a}-\sqrt{b})$.

解：由根式定义知

$$\begin{cases}ab\geqslant 0, & ①\\ 2\sqrt{ab}-a-b>0 & ②\end{cases}$$

且　a，b 不能同时为零，

若　$a>0$，$b>0$，则

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b\geqslant 0$

$\therefore \quad 2\sqrt{ab}-a-b\leqslant 0$，这与二次根式定义和分式分母不能为 0 的要求，$2\sqrt{ab}-a-b>0$ 相矛盾，$\therefore \quad a\leqslant 0$，$b\leqslant 0$，且 a，b 不能同时为 0.

$$\begin{aligned}\therefore \quad \frac{a-b}{\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}}&=\frac{-[(-a)-(-b)]}{\sqrt{2\sqrt{(-a)(-b)}+(-a)(-b)}}\\&=\frac{-[(\sqrt{-a})^2-(\sqrt{-b})^2]}{\sqrt{2\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}+(\sqrt{-a})^2+(\sqrt{-b})^2}}\\&=\frac{-(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})}{\sqrt{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}}\end{aligned}$$

$$=\frac{-(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}$$
$$=-\sqrt{-a}+\sqrt{-b}.$$

小结与复习

一、1. B **熟练掌握去绝对值、二次根式的相关知识,解此题就很容易了**.

2. C

3. D **两非负数之和为** 0,**故** $a-b-2\sqrt{3}=0$,

$a+b-2\sqrt{2}=0$,**联立解出** a,b **即可求出**$\frac{b}{a}$**之值**.

4. A 5. A 6. B 7. D

8. C **要使**$\sqrt{-(x-4)^2}$**是实数,则** $x-4=0$,**即** $x=4$.

9. C **将** $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$**两边平方得**:$x^2+\frac{1}{x^2}+2=8$, $\therefore$ $x^2+\frac{1}{x^2}=6$,

令 $s=x-\frac{1}{x}$,**将其两边平方得**:

$s^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$, $\therefore$ $s^2=6-2=4$ $\therefore$ $s=\pm 2$,

即 $x-\frac{1}{x}=\pm 2$,

10. D 11. A 12. C

13. D **当两腰长为** $2\sqrt{3}$,**底边长为**$5\sqrt{2}$**时,周长为** $4\sqrt{3}+5\sqrt{2}$;**当腰为** $5\sqrt{2}$,**底边长为** $2\sqrt{3}$**时,周长为** $10\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

二、14. **全体实数** 15. $\leqslant$ 16. $=\frac{1}{2}$ 17. $-2m$ 18. $5+2\sqrt{6}$ 19. $x\geqslant 2$ **且** $x\neq 8$ 20. $\frac{12}{5}$ 21. $14+4\sqrt{6}$ 22. 1 23. 1 24. -4 25. 3,2 26. 3

三、27. $-2\sqrt{3}$; 28. $-\sqrt{2}$; 29. -1; 30. $12\sqrt{2}-4\sqrt{6}$.

四、31. $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$.

五、32. 1; 33. $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$,$\therefore$ $x+\frac{1}{x}=6$ $\therefore$ $x^2-6x+1=0$

$\therefore$ **原式**$=x^2(x^2-6x+1)-x^3+7x^2-7x+6=-x(x^2-6x+1)+x^2-6x+6=5$ 34. $1+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$;

35. **解题思路 可先求出** $x+y$,xy **的值,把所求的代数式用** $x+y$ **及**

初二代数

xy 的代数式表示出来,再代入求值得关于 a 的方程,解方程可求得 a.

解: $x+y=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}=4a+2.$

$xy=1.$

$\because\ 19x^2+123xy+19y^2=19x^2+38xy+19y^2+85xy$

$=19(x+y)a^2+85xy$

$=19(4a+2)^2+85.$

又 $19x^2+123xy+19y^2=1985$,

$\therefore\ 19(4a+2)^2+85=1985$,

$\therefore\ (4a+2)^2=100$, $\therefore\ 4a+2=10$ 或 $4a+2=-10$,

$\therefore\ a=2$ 或 $a=-3$

$\therefore\ a\geqslant 0$

$\therefore\ a=2$

36. **解题思路** 把 $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ 分别代入 $(a+x)$ 及 $(a-x)$ 中,求出 $\sqrt{a+x}$ 及 $\sqrt{a-x}$ 值,再对 b 的取值进行讨论即可获证.

证明: $\because\ a+x=a+\frac{2ab}{b^2+1}=\frac{ab^2+a+2ab}{b^2+1}=\frac{a(b^2+2b+1)}{b^2+1}=\frac{a(b+1)^2}{b^2+1}$, $a-x=a-\frac{2ab}{b^2+1}=\frac{a(b-1)^2}{b^2+1}$,

$\therefore\ \sqrt{a+x}=\frac{|b+1|\sqrt{a}}{b^2+1}$, $\sqrt{a-x}=\frac{|b-1|\sqrt{a}}{b^2+1}$,

$$\therefore\ \frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{\frac{|b+1|\sqrt{a}}{b^2+1}+\frac{|b-1|\sqrt{a}}{b^2+1}}{\frac{|b+1|\sqrt{a}}{b^2+1}-\frac{|b-1|\sqrt{a}}{b^2+1}}=\frac{|b+1|+|b-1|}{|b+1|-|b-1|}.$$

当 $b>1$ 时,上式值为 $\frac{b+1+b-1}{b+1-(b-1)}=b$;

当 $b<1$ 时,上式值为 $\frac{(b+1)+(1-b)}{(b+1)-(1-b)}=\frac{1}{b}$.

37. **解题思路** 因 $x^2-x+1=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,故由二次根式定义要求 $x-4\sqrt{3}\geqslant 0$ 且 $4\sqrt{3}-x\geqslant 0$,求得 $x=4\sqrt{3}$, $y=0$,代入代数式中求值.

解 ∵ $x^2-x+1=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

$=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$

又由二次根式定义知 $\frac{x-4\sqrt{3}}{x^2-x+1}\geqslant0$ 且 $\frac{4\sqrt{3}-x}{x^2-x+1}\geqslant0$

∴ $x-4\sqrt{3}=0$，∴ $x=4\sqrt{3}$，$y=0$

∴ $\left(\frac{2y-x}{x-2y}\right)^2+\left(\frac{x+2y}{2y-x}\right)^2=2.$

38. 解题思路 是可以构成三角形的. 不妨设三边大小关系为 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}\leqslant\sqrt{c}$，设法证明 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$ 即可.

解 如果 a，b，c 可以构成三角形，不妨假设 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $a+b<c$，由于 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}>\sqrt{a+b}>\sqrt{c}$，所以 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 一定能够构成三角形.

39. (1) 由已知等式消去 c，得 $a^2+b^2+3(1-a-b)+\frac{3}{2}=0$，

即 $a^2+b^2-3a-3b+\frac{9}{2}=0$

∴ $(a-\frac{3}{2})^2+(b-\frac{3}{2})^2=0$，

∴ $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，于是由 $a+b+2c=1$，得 $c=-1$，

故 $a=b=\frac{3}{2}$，$c=-1$.

(2) 由已知得：$a+b=6-c$ ①

$(a+b)^2+c^2-2ab=12$ ②

将①代入②得：$(6-c)^2+c^2-2ab=12$，

即：$ab=c^2-6c+12$ ③

由①、③可知，a，b 是关于 t 的方程

$t^2-(6-c)t+c^2-6c+12=0$ 的两个实数根 ④

∴ $\Delta=(6-c)^2-4(c^2-6c+12)\geqslant0$

化简得 $(c-2)^2\leqslant0$，而 $(c-2)^2\geqslant0$ ∴ $c=2$

将 $c=2$ 代入④中，解得：$t_1=t_2=2$ ∴ $a=b=2$，

故 $a=b=c$.

单元综合测试

基础能力测试

一、1. $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$　2. $-15\sqrt{6}$　3. $(1-a)\sqrt{-a}$　4. 1　5. $-\sqrt{3}$　6. $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$　7. $x=\sqrt{5}+\sqrt{3}$　8. $(\sqrt{2}x+\sqrt{5})^2(\sqrt{2}x-\sqrt{5})^2$　9. 9　10. $6+2\sqrt{3}$

二、11. B　12. D　13. D　14. D　15. B　16. D

17. D　当 $x<1$ 时，$y=\frac{|x-1|}{x-1}+3=\frac{-(x-1)}{x-1}+3=2$　18. C

19. B　因 $\frac{1}{3-\sqrt{8}}=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$，类似地，各项依次可化为：$2\sqrt{2}+\sqrt{7}$，$\sqrt{7}+\sqrt{6}$，$\sqrt{6}+\sqrt{5}$，$\sqrt{5}+2$

20. D

三、21. (1) $8\sqrt{6}$；(2) 2000；(3) $-5\sqrt{ab}$；(4) $-4+2\sqrt{6}$；(5) -12；(6) $4a\sqrt{a^2-1}$　分别进行分母有理化.

22. (1) $\because 3<\sqrt{13}<4$，

$\therefore m=\sqrt{13}-3$，又 $\frac{1}{m}=\frac{3+\sqrt{13}}{14}$，而 $\frac{3}{2}<\frac{3+\sqrt{13}}{14}<\frac{7}{4}$，

$\therefore b=\frac{3+\sqrt{13}}{14}-1=\frac{\sqrt{13}-1}{14}$.

(2) 由已知得 $x+y=\sqrt{7}$，$xy=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 原式 $=12$.

(3) $\because y=\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$，

$x=\frac{2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$，

$\therefore x-2y=0$，而原式 $=(x+3y)(x-2y)=0$.

(4) $\because y=\frac{1}{2-\sqrt{5}}=-2-\sqrt{5}$，由 $xy=1$，得 $x=2-\sqrt{5}$，

$\therefore x+y=-2\sqrt{5}$，

$\therefore$ 原式 $=\frac{x+y+2}{xy+x+y+1}=\frac{-2\sqrt{5}+2}{1-2\sqrt{5}+1}=1$.

23. (1) 小明　(2) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

发展能力测试

一、1. -2；2. $\sqrt{b}$；3. $\frac{x}{3}\sqrt{ax}-x\sqrt{x}$，$(1-a)\sqrt{-a}$；4. $x\geqslant 2$；5. $13-2\sqrt{3}$；6. $1+2\sqrt{3}$ 因 $x=2-\sqrt{3}$，要注意 $\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|=1-x$；

7. ± 1 注意 $a-\frac{1}{a}=\pm\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}$；8. 9；

9. $>$ $\sqrt{1998}-\sqrt{2000}=\frac{-2}{\sqrt{1998}+\sqrt{2000}}$；10. 1.

二、11. B 12. D 13. B 14. C 15. B 16. B 17. C 18. A 19. B 20. C 由已知得 $\begin{cases}|x|-1\geqslant 0\\1-|x|\geqslant 0\end{cases}$

$\therefore$ $x=\pm 1$，进而求得 $y=1$.

三、21. $\frac{8y\sqrt{x}}{x-y}$；

22. (1) 由已知得 $x=8$，$y=18$，原式 $=\sqrt{x}-\sqrt{y}=-\sqrt{2}$；

(2) 已知化简得 $(\sqrt{a}-4\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b})=0$

$\because$ $\sqrt{a}+3\sqrt{b}>0$ $\therefore$ $\sqrt{a}-4\sqrt{b}=0$

$\therefore$ $\sqrt{a}=4\sqrt{b}$（或 $a=16b$），代入所求式得值为 $\frac{5}{7}$.

(3) 由已知得 $x-4=-\sqrt{3}$

$\therefore$ $x^2-8x+13=0$

$\therefore$ 原式 $=\frac{x^2(x^2-8x+13)+2x(x^2-8x+13)+(x^2-8x+13)+10}{(x^2-8x+13)+2}$

$=\frac{10}{2}=5$.

23. (1) 有；(2) ①忽视了 $a<0$；$\left(\because 在\sqrt{-\frac{1}{a}}中，-\frac{1}{a}>0，\therefore a<0\right)$

(3) 原式 $=-a\sqrt{-a}-a\cdot\frac{1}{-a}\sqrt{-a}=-a\sqrt{-a}+\sqrt{-a}=(1-a)\sqrt{-a}$

24. 依题意，可得，应求出 $AC+BC$.

在 Rt△中，$\angle A=30°$，$\therefore$ $AB=2\cdot BC=4$

$\therefore$ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{3}\approx 3.46$

$\therefore$ $AC+BC\approx 2+3.46=5.46\approx 5.5$ (m)

$\therefore$ 地毯应至少为 5.5 米长.

25. 解：作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连结 $A'B$ 交 l 于 P，连结 AP，则 $AP+BP$ 为最短路线，即 $A'B$ 的路线长.

分别过 A，A' 作 $AE\perp BD$ 于点 E，$A'F\perp BD$ 于点 F，则得到矩形 $AEDC$，$AEFA'$，$DFA'C$ 三个.

$\therefore\quad DE=AC=30$ (km)，$AC=A'C=DF=30$ (km)

$\therefore\quad BE=BD-DE=10$ (km)

由勾股定理：$AE=20\sqrt{6}$ (km)，$\therefore\quad A'F=AE=20\sqrt{6}$ (km).

在 $\mathrm{Rt}\triangle BF'A$ 中，$A'B=\sqrt{BF^2+A'F^2}=10\sqrt{73}$ (km)

$\therefore\quad 10\sqrt{73}\div 30\approx 2.85$ (h)

$\therefore\quad$ 他若按 $AP+BP$ 去走，一定在 11:00 前到达.

若不按，则不一定能到达.