图书在版编目(CIP)数据

最新五年高考真题汇编/北京天利考试信息网编.
—拉萨:西藏人民出版社,2004.7
ISBN 7-223-01712-0

Ⅰ.最… Ⅱ.北… Ⅲ.课程-高中-试题-升学参考资料
IV.G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 049508 号

"天利38套"全国各省市高考模拟试题汇编等图书名列"开卷"全国教辅类畅销书排行榜前列。一些不法书商和许多学校每年都大量盗印本书,字迹模糊,质量低劣,损害了读者和出版社利益。读者订书时请认准本社和 天利38套 标志。

欢迎举报盗版,电话:010-64684153

最新五年高考真题汇编

作　　者　北京天利考试信息网
责任编辑　张玉平
封面设计　谭仲秋
出　　版　西藏人民出版社
社　　址　拉萨市林廓北路 20 号　　邮政编码　850000
　　北京发行部:100027　北京 4717 信箱
　　电　　话:010-64632439、64656531、64680026
印　　刷　北京市金顺印刷厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　16 开(787×1092 毫米)　　字　　数　800 千
印　　张　40
版　　次　2004 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号　ISBN 7-223-01712-0/G·733
定　　价　40.80 元(全 6 册)

目　　录

1.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷一)
2.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷二)
3.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷三)
4.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷四)
5.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)
6.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)
7.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)
8.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(辽宁卷)
9.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)
10.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(浙江卷)
11.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(福建卷)
12.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(湖北卷)
13.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)
14.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(广东卷)
15.2004 年普通高等学校招生全国统一考试(重庆卷)
16.2003 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷)
17.2003 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)
18.2002 年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷)
19.2002 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)
20.2001 年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷)
21.2000 年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷)
参考答案及解题提示

搜狐教育推荐用书

天利38套

最新五年高考真题汇编
(2000—2004)

数　学

北京天利考试信息网　编

西藏人民出版社

2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷一)

数　学

第Ⅰ卷

本卷共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

1.(理)$(1-i)^2\cdot i=$ (　　)

A.$2-2i$　　B.$2+2i$　　C.-2　　D.2

(文)设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,5\}$,则 $A\cap(C_UB)=$ (　　)

A.$\{2\}$　　B.$\{2,3\}$　　C.$\{3\}$　　D.$\{1,3\}$

2.(理)已知函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$,若 $f(a)=b$,则 $f(-a)=$ (　　)

A.b　　B.$-b$　　C.$\frac{1}{b}$　　D.$-\frac{1}{b}$

(文)已知函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$,若 $f(a)=\frac{1}{2}$,则 $f(-a)=$ (　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.2　　D.-2

3.已知 a、b 均为单位向量,它们的夹角为 60°,那么 $|a+3b|=$ (　　)

A.$\sqrt{7}$　　B.$\sqrt{10}$　　C.$\sqrt{13}$　　D.4

4.函数 $y=\sqrt{x-1}+1(x\geqslant1)$ 的反函数是 (　　)

A.$y=x^2-2x+2(x<1)$　　B.$y=x^2-2x+2(x\geqslant1)$

C.$y=x^2-2x\quad(x<1)$　　D.$y=x^2-2x\quad(x\geqslant1)$

5.$\left(2x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是 (　　)

A.14　　B.-14　　C.42　　D.-42

6.(理)设 A、B、I 均为非空集合,且满足 $A\subseteq B\subseteq I$,则下列各式中错误的是 (　　)

A.$(C_IA)\cup B=I$　　B.$(C_IA)\cup(C_IB)=I$

C.$A\cap(C_IB)=$　　D.$(C_IA)\cap(C_IB)=C_IB$

(文)设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,则$\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=$ (　　)

A. $\frac{7}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{7}{5}$　　D. $-\frac{1}{5}$

7. 椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的两个焦点为 F_1、F_2,过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交,一个交点为 P,则$|\overrightarrow{PF_2}|=$ (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. 4

8. 设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q,若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点,则直线 l 的斜率的取值范围是 (　　)

A. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$　　B. $[-2,2]$

C. $[-1,1]$　　D. $[-4,4]$

9. 为了得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$的图像,可以将函数 $y=\cos 2x$ 的图像 (　　)

A. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度　　B. 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

C. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度　　D. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

10. 已知正四面体 ABCD 的表面积为 S,其四个面的中心分别为 E、F、G、H. 设四面体 EFGH 的表面积为 T,则$\frac{T}{S}$等于 (　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

11. (理)从数字 1,2,3,4,5 中,随机抽取 3 个数字(允许重复)组成一个三位数,其各位数字之和等于 9 的概率为 (　　)

A. $\frac{13}{125}$　　B. $\frac{16}{125}$　　C. $\frac{18}{125}$　　D. $\frac{19}{125}$

(文)从 1,2,…,9 这九个数中,随机抽取 3 个不同的数,则这 3 个数的和为偶数的概率是 (　　)

A. $\frac{5}{9}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{11}{21}$　　D. $\frac{10}{21}$

12. 已知 $a^2+b^2=1$,$b^2+c^2=2$,$c^2+a^2=2$,则 $ab+bc+ca$ 的最小值为 (　　)

A. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$　　C. $-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$　　D. $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

第Ⅱ卷

本卷共 10 小题,共 90 分。

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分. 把答案填在题中横线上

13. (理)不等式 $|x+2|\geqslant|x|$ 的解集是_____.

(文)不等式 $x+x^3\geqslant 0$ 的解集是_____.

14. (理)由动点 P 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 PA、PB,切点分别为 A、B,$\angle APB=60°$,则动点 P 的轨迹方程为_____.

(文)已知等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_3=3$,$a_{10}=384$,则该数列的通项 $a_n=$_____.

15. (理)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}$($n\geqslant 2$),则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ _____, & n\geqslant 2.\end{cases}$

(文)同(理)第 14 题

16. 已知 a、b 为不垂直的异面直线,α 是一个平面,则 a、b 在 α 上的射影有可能是

①两条平行直线

②两条互相垂直的直线

③同一条直线

④一条直线及其外一点

在上面结论中,正确结论的编号是_____(写出所有正确结论的编号).

三、解答题:本大题共 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤

17. (本小题满分 12 分)

(理)求函数 $f(x)=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x}{2-\sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

(文)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n,已知 $a_{10}=30$,$a_{20}=50$.

(Ⅰ)求通项 a_n;

(Ⅱ)若 $S_n=242$,求 n.

18.（本小题满分 12 分）

（理）一接待中心有 A、B、C、D 四部热线电话．已知某一时刻电话 A、B 占线的概率均为 0.5，电话 C、D 占线的概率均为 0.4，各部电话是否占线相互之间没有影响．假设该时刻有 ξ 部电话占线，试求随机变量 ξ 的概率分布和它的期望．

（文）同（理）第 17 题

19.（本小题满分 12 分）

（理）已知 $a \in R$，求函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$ 的单调区间．

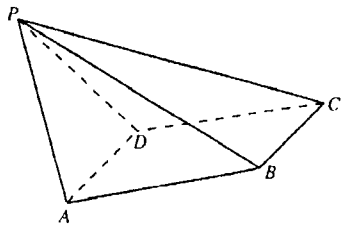
（文）已知函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$ 在 R 上是减函数，求 a 的取值范围．

20.(理)(本小题满分 12 分)

如图,已知四棱锥 P－ABCD,PB⊥AD,侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形,底面 ABCD 为菱形,侧面 PAD 与底面 ABCD 所成的二面角为 120°.

(Ⅰ)求点 P 到平面 ABCD 的距离;

(Ⅱ)求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.



(文)从 10 位同学(其中 6 女,4 男)中随机选出 3 位参加测验.每位女同学能通过测验的概率均为$\frac{4}{5}$,每位男同学能通过测验的概率均为$\frac{3}{5}$.试求:

(Ⅰ)选出的 3 位同学中,至少有一位男同学的概率;

(Ⅱ)10 位同学中的女同学甲和男同学乙同时被选中且通过测验的概率.

21.（本小题满分 12 分）

（理）设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 与直线 $l:x+y=1$ 相交于两个不同的点 A、B.

（Ⅰ）求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围；

（Ⅱ）设直线 l 与 y 轴的交点为 P，且 $\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$，求 a 的值.

（文）同（理）第 20 题

22.（本小题满分 14 分）

（理）已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1$，且

$$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k,$$

$$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k,$$

其中 $k=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）求 a_3,a_5；

（Ⅱ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（文）同（理）第 21 题

2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷二)

数　学

本卷共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式 $S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|x^2<4\}$,$N=\{x|x^2-2x-3<0\}$,则集合 $M\cap N=$ (　　)

A. $\{x|x<-2\}$　　B. $\{x|x>3\}$　　C. $\{x|-1<x<2\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

2. (理)$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2+4x-5}=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{4}$

(文)函数 $y=\frac{1}{x+5}(x\neq-5)$的反函数是 (　　)

A. $y=\frac{1}{x}-5(x\neq0)$　　B. $y=x+5(x\in R)$

C. $y=\frac{1}{x}+5(x\neq0)$　　D. $y=x-5(x\in R)$

3. (理)设复数 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,则 $1+\omega=$ (　　)

A. $-\omega$　　B. ω^2　　C. $-\frac{1}{\omega}$　　D. $\frac{1}{\omega^2}$

(文)曲线 $y=x^3-3x^2+1$ 在点(1,-1)处的切线方程为 (　　)

A. $y=3x-4$　　B. $y=-3x+2$　　C. $y=-4x+3$　　D. $y=4x-5$

4. 已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $y=-x$ 对称,则圆 C 的方程为 (　　)

A. $(x+1)^2+y^2=1$　　B. $x^2+y^2=1$

C. $x^2+(y+1)^2=1$　　D. $x^2+(y-1)^2=1$

5. 已知函数 $y=\tan(2x+\varphi)$的图像过点$(\frac{\pi}{12},0)$,则 φ 可以是 (　　)

A. $-\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $-\frac{\pi}{12}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

6. (理)函数 $y=-e^x$ 的图像 (　　)

A. 与 $y=e^x$ 的图像关于 y 轴对称

B. 与 $y=e^x$ 的图像关于坐标原点对称

C. 与 $y = e^{-x}$ 的图像关于 y 轴对称

D. 与 $y = e^{-x}$ 的图像关于坐标原点对称

(文)正四棱锥的侧棱长与底面边长都是 1,则侧棱与底面所成的角为 ( )

A. 75° B. 60° C. 45° D. 30°

7. (理)已知球 O 的半径为 1,A、B、C 三点都在球面上,且每两点间的球面距离均为 $\frac{\pi}{2}$,则球心 O 到平面 ABC 的距离为 ( )

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(文)同(理)第 6 小题.

8. (理)在坐标平面内,与点 A(1,2)距离为 1,且与点 B(3,1)距离为 2 的直线共有 ( )

A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

(文)已知点 A(1,2)、B(3,1),则线段 AB 的垂直平分线的方程是 ( )

A. $4x + 2y = 5$ B. $4x - 2y = 5$ C. $x + 2y = 5$ D. $x - 2y = 5$

9. (理)已知平面上直线 l 的方向向量 $e = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$,点 O(0,0)和 A(1,-2)在 l 上的射影分别是 O' 和 A',则 $\overrightarrow{O'A'} = \lambda e$,其中 $\lambda =$ ( )

A. $\frac{11}{5}$ B. $-\frac{11}{5}$ C. 2 D. -2

(文)已知向量 a、b 满足:$|a| = 1, |b| = 2, |a - b| = 2$,则 $|a + b| =$ ( )

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

10. (理)函数 $y = x\cos x - \sin x$ 在下面哪个区间内是增函数 ( )

A. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ B. $(\pi, 2\pi)$ C. $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ D. $(2\pi, 3\pi)$

(文)同(理)第 7 小题.

11. 函数 $y = \sin^4 x + \cos^2 x$ 的最小正周期为 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

12. 在由数字 1,2,3,4,5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中,大于 23145 且小于 43521 的数共有 ( )

A. 56 个 B. 57 个 C. 58 个 D. 60 个

本卷共 10 小题,共 90 分.

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分。把答案填在题中横线上

13. (理)从装有 3 个红球、2 个白球的袋中随机取出 2 个球,设其中有 ξ 个红球,则随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	0	1	2
P			

(文)已知 a 为实数,$(x + a)^{10}$ 展开式中 x^7 的系数是 -15,则 $a =$ ____.

14. 设 x,y 满足约束条件:$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant y, \\ 2x - y \leqslant 1, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是_____.

15. 设中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2 - 2y^2 = 1$ 有公共的焦点,且它们的离心率互为倒数,则该椭圆的方程是_____.

16. 下面是关于四棱柱的四个命题:

①若有两个侧面垂直于底面,则该四棱柱为直四棱柱

②若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱

③若四个侧面两两全等，则该四棱柱为直四棱柱

④若四棱柱的四条对角线两两相等，则该四棱柱为直四棱柱

其中，真命题的编号是_____（写出所有真命题的编号）.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17.（理）（本小题满分 12 分）

已知锐角三角形 ABC 中，$\sin(A+B)=\frac{3}{5}$，$\sin(A-B)=\frac{1}{5}$.

（Ⅰ）求证 $\tan A=2\tan B$；

（Ⅱ）设 $AB=3$，求 AB 边上的高.

（文）（本小题满分 12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_2=9$，$a_5=21$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）令 $b_n=2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（理）（本小题满分 12 分）

已知 8 支球队中有 3 支弱队，以抽签方式将这 8 支球队分为 A、B 两组，每组 4 支，求

（Ⅰ）A、B 两组中有一组恰有两支弱队的概率；

（Ⅱ）A 组中至少有两支弱队的概率.

（文）同（理）第 17 小题.

19.（理）（本小题满分 12 分）

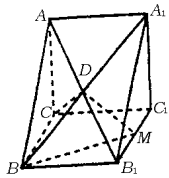
数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}S_n$（n = 1，2，3，…）. 证明：

（Ⅰ）数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等比数列；

（Ⅱ）$S_{n+1}=4a_n$.

（文）同（理）第 18 小题.

20.（本小题满分 12 分）



如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=1$，$CB=\sqrt{2}$，侧棱 $AA_1=1$，侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D，B_1C_1 的中点为 M.

（Ⅰ）求证 $CD\perp$ 平面 BDM；

（Ⅱ）求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.

21.（理）（本小题满分 12 分）

给定抛物线 $C:y^2=4x$，F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.

（Ⅰ）设 l 的斜率为 1，求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小；

（Ⅱ）设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$，若 $\lambda\in[4,9]$，求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

（文）（本小题满分 12 分）

若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间 $(1,4)$ 内为减函数，在区间 $(6,+\infty)$ 上为增函数，试求实数 a 的取值范围.

22. **(理)(本小题满分** 14 **分)**

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$**,**$g(x)=x\ln x$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$**的最大值;**

(Ⅱ)设 $0<a<b$**,证明** $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

(文)同(理)第 21 **小题**.

2004年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷三)

数　学

第Ⅰ卷

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

正棱台、圆台的侧面积公式

$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$

其中 c'、c **分别表示上、下底面周长，**l **表示斜高或母线长**

球的体积公式

$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R **表示球的半径**

一、选择题

1. **设集合** $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in R,y\in R\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in R,y\in R\}$，**则集合** $M\cap N$ **中元素的个数为** (　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2. **函数** $y=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ **的最小正周期是** (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

3. **(理)设数列** $\{a_n\}$ **是等差数列，且** $a_2=-6$，$a_8=6$，S_n **是数列** $\{a_n\}$ **的前** n **项和，则** (　　)

A. $S_4<S_5$　　B. $S_4=S_5$

C. $S_6<S_5$　　D. $S_6=S_5$

(文)记函数 $y=1+3^{-x}$ **的反函数为** $y=g(x)$，**则** $g(10)=$ (　　)

A.2　　B.-2　　C.3　　D.-1

4. **(理)圆** $x^2+y^2-4x=0$ **在点** $P(1,\sqrt{3})$ **处的切线方程为** (　　)

A. $x+\sqrt{3}y-2=0$　　B. $x+\sqrt{3}y-4=0$

C. $x-\sqrt{3}y+4=0$　　D. $x-\sqrt{3}y+2=0$

(文)等比数列 $\{a_n\}$ **中，**$a_2=9$，$a_5=243$，**则** $\{a_n\}$ **的前** 4 **项和为** (　　)

A.81　　B.120　　C.168　　D.192

5. **(理)函数** $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$ **的定义域是** (　　)

A. $[-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2}]$　　B. $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$

C. $[-2,-1)\cup(1,2]$　　D. $(-2,-1)\cup(1,2)$

(文)同(理)第 4 **小题**

6. **(理)设复数** z **的辐角的主值为** $\frac{2\pi}{3}$，**虚部为** $\sqrt{3}$，**则** $z^2=$ (　　)

A. $-2-2\sqrt{3}i$　　B. $-2\sqrt{3}-2i$

C. $2+2\sqrt{3}i$　　D. $2\sqrt{3}+2i$

(文) $(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^6$ **的展开式中的常数项为** (　　)

A. 15　　B. -15　　C. 20　　D. -20

7. **(理)设双曲线的焦点在** x **轴上,两条渐近线为** $y=\pm\frac{1}{2}x$**,则该双曲线的离心率** $e=$ (　　)

A. 5　　B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{5}{4}$

(文)同(理)第 6 **小题**

8. **不等式** $1<|x+1|<3$ **的解集为** (　　)

A. $(0,2)$　　B. $(-2,0)\cup(2,4)$

C. $(-4,0)$　　D. $(-4,-2)\cup(0,2)$

(文)同(理)第 7 **小题**

9. **正三棱锥的底面边长为** 2**,侧面均为直角三角形,则此三棱锥的体积为** (　　)

A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

(文)同(理)第 8 **小题**

10. **(理)在** $\triangle ABC$ **中,** $AB=3$**,** $BC=\sqrt{13}$**,** $AC=4$**,则边** AC **上的高为** (　　)

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

(文)同(理)第 9 **小题**

11. **(理)设函数** $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x<1,\\ 4-\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ **则使得** $f(x)\geqslant 1$ **的自变量** x **的取值范围为** (　　)

A. $(-\infty,-2]\cup[0,10]$　　B. $(-\infty,-2]\cup[0,1]$

C. $(-\infty,-2]\cup[1,10]$　　D. $[-2,0]\cup[1,10]$

(文)同(理)第 10 **小题**

12. **将** 4 **名教师分配到** 3 **所中学任教,每所中学至少** 1 **名教师,则不同的分配方案共有** (　　)

A. 12 **种**　　B. 24 **种**　　C. 36 **种**　　D. 48 **种**

第Ⅱ卷

二、填空题:本大题共 4 **小题,每小题** 4 **分,共** 16 **分。把答案填在题中横线上**

13. **(理)用平面** α **截半径为** R **的球,如果球心到平面** α **的距离为**$\frac{R}{2}$**,那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为**_____.

(文)函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ **的定义域是**_____.

14. **(理)函数** $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ **在区间**$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **上的最小值为**_____.

(文)同(理)第 13 **小题**

15. **(理)已知函数** $y=f(x)$ **是奇函数,当** $x\geqslant 0$ **时,** $f(x)=3^x-1$**.设** $f(x)$ **的反函数是** $y=g(x)$**,则** $g(-8)=$_____.

(文)函数 $y=\sin x-\frac{1}{2}\cos x(x\in R)$ **的最大值为**_____.

16. (理)设 P 是曲线 $y^2 = 4(x - 1)$ 上的一个动点,则点 P 到点(0,1)的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值是_____.

(文)设 P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点,则点 P 到直线 $3x - 4y - 10 = 0$ 的距离的最小值为_____.

三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤

17. (本小题满分 12 分)

(理)已知 α 为锐角,且 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$,求 $\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}$ 的值.

(文)解方程 $4^x - 2^{x+2} - 12 = 0$.

18. (理)(本小题满分 12 分)

解方程 $4^x + |1 - 2^x| = 11$.

(文)同(理)第 17 小题

19. **(理)(本小题满分 12 分)**

某村计划建造一个室内面积为 800 m^2 的矩形蔬菜温室.在温室内,沿左、右两侧与后侧内墙各保留 1 m 宽的通道,沿前侧内墙保留 3m 宽的空地.当矩形温室的边长各为多少时,蔬菜的种植面积最大?最大种植面积是多少?

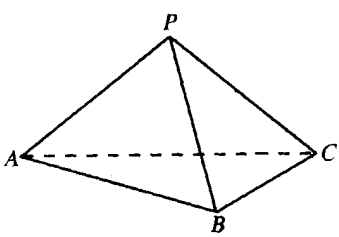
(文)设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列,S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $S_3^2 = 9S_2$,$S_4 = 4S_2$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. **(理)(本小题满分 12 分)**

三棱锥 P—ABC 中,侧面 PAC 与底面 ABC 垂直,PA = PB = PC = 3.

(Ⅰ)求证 $AB \perp BC$;

(Ⅱ)设 $AB = BC = 2\sqrt{3}$,求 AC 与平面 PBC 所成角的大小.



(文)同(理)第 19 小题

21. **(理)(本小题满分 12 分)**

设椭圆 $\frac{x^2}{m+1}+y^2=1$ **的两个焦点是** $F_1(-c,0)$**与** $F_2(c,0)(c>0)$**,且椭圆上存在点** P**,使得直线** PF_1 **与直线** PF_2 **垂直.**

(Ⅰ)求实数 m **的取值范围;**

(Ⅱ)设 L **是相应于焦点** F_2 **的准线,直线** PF_2 **与** L **相交于点** Q**.若** $\frac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$**,求直线** PF_2 **的方程.**

(文)题干同(理)第 20 小题

(Ⅰ)同(理)第 20 小题(Ⅰ)

(Ⅱ)如果 $AB=BC=2\sqrt{3}$**,求侧面** PBC **与侧面** PAC **所成二面角的大小.**

22. **(理)(本小题满分 14 分)**

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足

$S_n = 2a_n + (-1)^n, n \geqslant 1.$

(Ⅰ)写出数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项 a_1, a_2, a_3;

(Ⅱ)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅲ)证明:对任意的整数 $m > 4$,有 $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \cdots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$.

(文)同(理)第 21 小题

2004年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷四)

数　学

一、选择题

1. (文)已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$,集合 $M=\{0,3,5\}$,$N=\{1,4,5\}$,则集合 $M\cap(\complement_U N)=$ (　)

A. $\{5\}$　　B. $\{0,3\}$　　C. $\{0,2,3,5\}$　　D. $\{0,1,3,4,5\}$

(理)已知集合 $M=\{0,1,2\}$,$N=\{x\mid x=2a,a\in M\}$,则集合 $M\cap N=$ (　)

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,2\}$

2. 函数 $y=e^{2x}(x\in R)$的反函数为 (　)

A. $y=2\ln x(x>0)$　　B. $y=\ln(2x)(x>0)$

C. $y=\frac{1}{2}\ln x(x>0)$　　D. $y=\frac{1}{2}\ln(2x)(x>0)$

3. (文)正三棱柱侧面的一条对角线长为 2,且与底面成 45° 角,则此三棱柱的体积为 (　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(理)过点 $(-1,3)$ 且垂直于直线 $x-2y+3=0$ 的直线方程为 (　)

A. $2x+y-1=0$　　B. $2x+y-5=0$

C. $x+2y-5=0$　　D. $x-2y+7=0$

4. (文)函数 $y=(x+1)^2(x-1)$ 在 $x=1$ 处的导数等于 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(理)$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^2=$ (　)

A. $\sqrt{3}+i$　　B. $-\sqrt{3}-i$　　C. $\sqrt{3}-i$　　D. $-\sqrt{3}+i$

5. (文)为了得到函数 $y=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象,可以把函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象 (　)

A. 向左平移 3 个单位长度　　B. 向右平移 3 个单位长度

C. 向左平移 1 个单位长度　　D. 向右平移 1 个单位长度

(理)不等式 $\frac{x(x+2)}{x-3}<0$ 的解集为 (　)

A. $\{x\mid x<-2$,或 $0<x<3\}$　　B. $\{x\mid -2<x<0$,或 $x>3\}$

C. $\{x\mid x<-2$,或 $x>0\}$　　D. $\{x\mid x<0$,或 $x>3\}$

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1+a_2+a_3=-24$,$a_{18}+a_{19}+a_{20}=78$,则此数列前 20 项和等于 (　)

A. 160　　B. 180　　C. 200　　D. 220

7. (文)已知函数 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 与 $y=kx$ 的图象有公共点 A,且点 A 的横坐标为 2,则 $k=$ (　)

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

(理)对于直线 m、n 和平面 α,下列命题中的真命题是 (　)

A. 如果 $m\subset a$，$n\not\subset a$，m、n 是异面直线，那么 $n\parallel a$

B. 如果 $m\subset a$，$n\not\subset a$，m、n 是异面直线，那么 n 与 a 相交

C. 如果 $m\subset a$，$n\parallel a$，m、n 共面，那么 $m\parallel n$

D. 如果 $m\parallel a$，$n\parallel a$，m、n 共面，那么 $m\parallel n$

8. (文)已知圆 C 的半径为 2，圆心在 x 轴的正半轴上，直线 $3x+4y+4=0$ 与圆 C 相切，则圆 C 的方程为 (　　)

A. $x^2+y^2-2x-3=0$　　B. $x^2+y^2+4x=0$

C. $x^2+y^2+2x-3=0$　　D. $x^2+y^2-4x=0$

(理)已知椭圆的中心在原点，离心率 $e=\frac{1}{2}$，且它的一个焦点与抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点重合，则此椭圆方程为 (　　)

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$

C. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

9. 从 5 位男教师和 4 位女教师中选出 3 位教师，派到 3 个班担任班主任(每班 1 位班主任)，要求这 3 位班主任中男、女教师都要有，则不同的选派方案共有 (　　)

A. 210 种　　B. 420 种　　C. 630 种　　D. 840 种

10. (文)函数 $y=2\sin(\frac{\pi}{3}-x)-\cos(\frac{\pi}{6}+x)$ $(x\in R)$ 的最小值等于 (　　)

A. -3　　B. -2　　C. -1　　D. $-\sqrt{5}$

(理)已知球的表面积为 20π，球面上有 A、B、C 三点，如果 $AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，则球心到平面 ABC 的距离为 (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

11. (文)同(理)10

(理)$\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边. 如果 a、b、c 成等差数列，$\angle B=30^\circ$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$，那么 b = (　　)

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$　　D. $2+\sqrt{3}$

12. (文)同(理)11

(理)设函数 $f(x)$ $(x\in R)$ 为奇函数，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f(x+2)=f(x)+f(2)$，则 $f(5)=$ (　　)

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 5

二、填空题，本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上

13. $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式中 x^5 的系数为_____.

14. (文)已知函数 $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x+\pi}{A}$ $(A>0)$ 的最小正周期为 3π，则 $A=$_____.

(理)向量 a、b 满足 $(a-b)\cdot(2a+b)=-4$，且 $|a|=2$，$|b|=4$，则 a 与 b 夹角的余弦值等于_____.

15. (文)同(理)14

(理)函数 $f(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$ $(x\in R)$ 的最大值等于_____.

16. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 1, \\ y\leqslant x, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $x=2x+y$ 的最大值是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答中应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17. 已知 a 为第二象限角，且 $\sin a=\frac{\sqrt{15}}{4}$，求 $\frac{\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2a+\cos 2a+1}$ 的值.

18. (文)(本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2=6$，$a_5=162$.

(Ⅰ)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(Ⅱ)设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，证明 $\frac{S_n\cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2}\leqslant 1$.

(理)求函数 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2$ 在 $[0,2]$ 上的最大值和最小值.

19. (文)(本小题满分 12 分)

已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线，l_2 为该曲线的另一条切线，且 $l_1\perp l_2$.

(Ⅰ)求直线 l_2 的方程；

(Ⅱ)求由直线 l_1、l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

(理)某同学参加科普知识竞赛，需回答三个问题. 竞赛规则规定：每题回答正确得 100 分，回答不正确得 -100 分. 假设这名同学每题回答正确的概率均为 0.8，且各题回答正确与否相互之间没有影响.

(Ⅰ)求这名同学回答这三个问题的总得分 ξ 的概率分布和数学期望；

(Ⅱ)求这名同学总得分不为负分(即 $\xi\geqslant 0$)的概率.

20. (文)某同学参加科普知识竞赛,需回答 3 个问题.竞赛规则规定:答对第一、二、三个问题分别得 100 分、100 分、200 分,答错得零分.假设这名同学答对第一、二、三个问题的概率分别为 0.8,0.7,0.6,且各题答对与否相互之间没有影响.

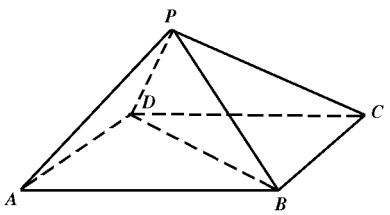
(Ⅰ)求这名同学得 300 分的概率;

(Ⅱ)求这名同学至少得 300 分的概率.

(理)如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,$AB=8$,$AD=4\sqrt{3}$,侧面 PAD 为等边三角形,并且与底面所成二面角为 $60°$.

(Ⅰ)求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;

(Ⅱ)证明 $PA\perp BD$.



21. **(本小题满分 12 分)**

(文)同(理)20.

(理)双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>1,b>0)$**的焦距为** $2c$**,直线** l **过点**$(a,0)$**和**$(0,b)$**,且点**$(1,0)$**到直线** l **的距离与点**$(-1,0)$**到直线** l **的距离之和** $s\geqslant\frac{4}{5}c$**.求双曲线的离心率** e **的取值范围**.

22. **(本小题满分 14 分)**

(文)同(理)21.

(理)(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$**,将满足** $f'(x) = 0$ **的所有正数** x **从小到大排成数列** $\{x_n\}$.

(Ⅰ)证明数列 $\{f(x_n)\}$ **为等比数列;**

(Ⅱ)记 S_n **是数列** $\{x_n f(x_n)\}$ **的前** n **项和,求** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$.

2004 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

数　学

一、填空题(本大题满分 48 分),本大题共有 12 题,只要求直接填写结果,每个空格填对得 4 分,否则一律得零分.

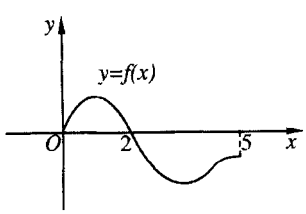
1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$,则 $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

2. 设抛物线的顶点坐标为(2,0),准线方程为 $x = -1$,则它的焦点坐标为 _____.

3. 设集合 $A = \{0, \log_2(a+3)\}$,集合 $B = \{a, b\}$,若 $A \cap B = \{2\}$,则 $A \cup B =$ _____.

4. 设等比数列 $\{a_n\}$($n \in N$)的公比 $q = -\frac{1}{2}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) = \frac{8}{3}$,则 $a_1 =$ _____.

5. 设奇函数 $f(x)$的定义域为$[-5,5]$.若当 $x \in [0,5]$时,$f(x)$的图像如右图,则不等式 $f(x) < 0$ 的解是 _____.



6. (理)已知点 $A(1,-2)$,若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a} = \{2,3\}$ 同向,$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}$,则点 B 的坐标为 _____.

(文)已知点 $A(-1,-5)$和向量 $\vec{a} = \{2,3\}$,若 $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$,则点 B 的坐标为 _____.

7. (理)在极坐标系中,点 $M(4,\frac{\pi}{3})$到直线 $l: \rho(2\cos\theta + \sin\theta) = 4$ 的距离 $d =$ _____.

(文)当 x、y 满足不等式组 $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ y \geqslant 3 \\ x + y \leqslant 8 \end{cases}$ 时,目标函数 $k = 3x - 2y$ 的最大值为 _____.

8. 圆心在直线 $2x - y - 7 = 0$ 上的圆 C 与 y 轴交于两点 $A(0,-4)$,$B(0,-2)$,则圆 C 的方程为 _____.

9. 若在二项式$(x+1)^{10}$的展开式中任取一项,则该项的系数为奇数的概率是 _____.(结果用分数表示)

10. 若函数 $f(x) = a|x-b| + 2$ 在$[0,+\infty)$上为增函数,则实数 a、b 的取值范围是 _____.

11. 教材中"坐标平面上的直线"与"圆锥曲线"两章内容体现出解析几何的本质是 _____.

12. 若干个能惟一确定一个数列的量称为该数列的"基本量".设 $\{a_n\}$是公比为 q 的无穷等比数列,下列 $\{a_n\}$的四组量中,一定能成为该数列"基本量"的是第 _____组.(写出所有符合要求的组号)

①S_1 与 S_2;　②a_2 与 S_3;　③a_1 与 a_n　④q 与 a_n.

其中 n 为大于 1 的整数，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

二、选择题(本大题满分 16 分)，本大题共有 4 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得 4 分，不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内)，一律得零分.

13. 在下列关于直线 l、m 与平面 α、β 的命题中，真命题是 (　　)

A. 若 $l\subset\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\alpha$　　B. 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$，则 $l\perp\alpha$

C. 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $l\parallel\alpha$　　D. 若 $\alpha\cap\beta=m$ 且 $l\parallel m$，则 $l\parallel\alpha$

14. (理)已知 $y=f(x)$ 是周期为 2π 的函数，当 $x\in[0,2\pi)$ 时，$f(x)=\sin\frac{x}{2}$，则 $f(x)=\frac{1}{2}$ 的解集为 (　　)

A. $\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z\}$

B. $\{x\mid x=2k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in Z\}$

C. $\{x\mid x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in Z\}$

D. $\{x\mid x=2k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3},k\in Z\}$

(文)三角方程 $2\sin(\frac{\pi}{2}-x)=1$ 的解集为 (　　)

A. $\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z\}$　　B. $\{x\mid x=2k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in Z\}$

C. $\{x\mid x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in Z\}$　　D. $\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3},k\in Z\}$

15. (理)若函数 $f(x)$ 的图像可由函数 $y=\lg(x+1)$ 的图像绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到，则 $f(x)=$ (　　)

A. $10^{-x}-1$　　B. 10^x-1　　C. $1-10^{-x}$　　D. $1-10^x$

(文)若函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\lg(x+1)$ 的图像关于直线 $x-y=0$ 对称，则 $f(x)=$ (　　)

A. 10^x-1　　B. $1-10^x$　　C. $1-10^{-x}$　　D. $10^{-x}-1$

16. 某地 2004 年第一季度应聘和招聘人数排行榜前 5 个行业的情况列表如下：

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215 830	200 250	154 676	74 570	65 280

行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124 620	102 935	89 115	76 516	70 436

若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况，则根据表中数据，就业形势一定是 (　　)

A. 计算机行业好于化工行业

B. 建筑行业好于物流行业

C. 机械行业最紧张

D. 营销行业比贸易行业紧张

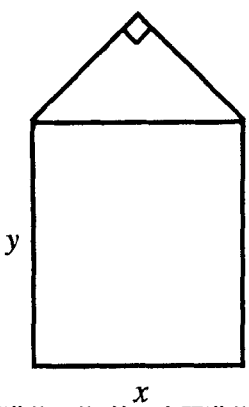
三、解答题(本大题满分 86 分),本大题共有 6 题,解答下列各题必须写出必要的步骤.

17.(本题满分 12 分)

已知复数 z_1 满足$(1+i)z_1=-1+5i$,$z_2=a-2-i$,其中 i 为虚数单位,$a\in R$.若$|z_1-\bar{z}_2|<|z_1|$,求 a 的取值范围.

18.(本题满分 12 分)

某单位用木料制作如图所示的框架,框架的下部是边长分别为 x、y(单位:m)的矩形,上部是等腰直角三角形.要求框架围成的总面积为 $8m^2$,问 x、y 分别为多少(精确到 0.001m)时用料最省?



19.(本题满分 14 分),本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 8 分.

记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$的定义域为 A,$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ $(a<1)$的定义域为 B.

(1)求 A;

(2)若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

20.（理）（本题满分 14 分），本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知二次函数 $y=f_1(x)$ 的图像以原点为顶点且过点 $(1,1)$，反比例函数 $y=f_2(x)$ 的图像与直线 $y=x$ 的两个交点间距离为 8，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

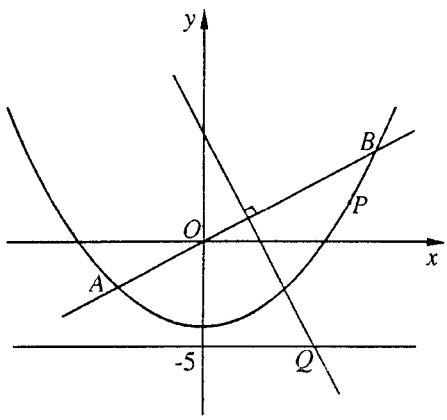
(1)求函数 $f(x)$ 的表达式；

(2)证明：当 $a>3$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=f(a)$ 有三个实数解.

（文）如图，直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与抛物线 $y=\frac{1}{8}x^2-4$ 交于 A、B 两点，线段 AB 的垂直平分线与直线 $y=-5$ 交于点 Q.

(1)求点 Q 的坐标；

(2)当 P 为抛物线上位于线段 AB 下方（含点 A、B）的动点时，求△OPQ 面积的最大值.



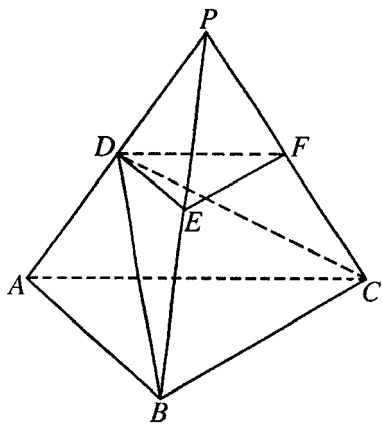
21.（本题满分 16 分），本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分.

如图，P - ABC 是底面边长为 1 的正三棱锥，D、E、F 分别为棱 PA、PB、PC 上的点，截面 DEF // 底面 ABC，且棱台 DEF - ABC 与棱锥 P - ABC 的棱长和相等.（棱长和是指多面体中所有棱的长度之和）

（1）证明：P - ABC 为正四面体；

（2）若 $PD = \frac{1}{2}PA$，求二面角 D - BC - A 的大小（结果用反三角函数值表示）；

（3）设棱台 DEF - ABC 的体积为 V，是否存在体积为 V 且各棱长均相等的平行六面体，使得它与棱台 DEF - ABC 有相同的棱长和？若存在，请具体构造出这样的一个平行六面体，并给出证明；若不存在，请说明理由.



22.（本题满分 18 分），本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分，第 3 小题满分 4 分.

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，…，$P_n(x_n,y_n)$（$n\geqslant 3$，$n\in N$）是二次曲线 C 上的点，且 $a_1=|OP_1|^2$，$a_2=|OP_2|^2$，…，$a_n=|OP_n|^2$ 构成了一个公差为 d（$d\neq 0$）的等差数列，其中 O 是坐标原点. 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

（1）（理）若 C 的方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$，$n=3$，点 $P_1(10,0)$ 且 $S_3=255$，求点 P_3 的坐标；（只需写出一个）

（2）（理）若 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 $P_1(a,0)$，对于给定的自然数 n，当公差 d 变化时，求 S_n 的最小值；

（3）（理）请选定一条除椭圆外的二次曲线 C 及 C 上一点 P_1，对于给定的自然数 n，写出符合条件的点 P_1，P_2，…，P_n 存在的充要条件，并说明理由.

（1）（文）若 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$，$n=3$，点 $P_1(3,0)$ 及 $S_3=162$，求点 P_3 的坐标；（只需写出一个）

（2）（文）若 C 的方程为 $y^2=2px(p\neq 0)$，点 $P_1(0,0)$，对于给定的自然数 n，证明：$(x_1+p)^2$，$(x_2+p)^2$，…，$(x_n+p)^2$ 成等差数列；

（3）同（理）（2）

2004 年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.共 150 分.考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷(选择题共 40 分)

参考公式:

三角函数的积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

正棱台、圆台的侧面积公式

$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$

其中 c',c 分别表示上、下底面周长,l 表示斜高或母线长

球体的表面积公式

$S_{球}=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

一、选择题 本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (理)设全集是实数集 R,$M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,$N=\{x\mid x<1\}$,则 $\bar{M}\cap N$ 等于 (　　)

A. $\{x\mid x<-2\}$　　B. $\{x\mid -2<x<1\}$

C. $\{x\mid x<1\}$　　D. $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$

(文)设 $M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,$N=\{x\mid x<1\}$,则 $M\cap N$ 等于 (　　)

A. $\{x\mid 1<x<2\}$　　B. $\{x\mid -2<x<1\}$

C. $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$

2. 满足条件 $|z-i|=|3+4i|$ 的复数 z 在复平面上对应点的轨迹是 (　　)

A. 一条直线　　B. 两条直线　　C. 圆　　D. 椭圆

3. 设 m,n 是两条不同的直线,α,β,γ 是三个不同的平面,给出下列四个命题:

①若 $m\perp\alpha$,$n\parallel\alpha$,则 $m\perp n$;

②若 $\alpha\parallel\beta$,$\beta\parallel\gamma$,$m\perp\alpha$,则 $m\perp\gamma$;

③若 $m\parallel\alpha$,$n\parallel\alpha$,则 $m\parallel n$;

④若 $\alpha\perp\gamma$,$\beta\perp\gamma$,则 $\alpha\parallel\beta$.

其中正确命题的序号是 (　　)

A.①和②　　B.②和③

C.③和④　　D.①和④

4. (理)如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点,若 P 到直线 BC 与直线 C_1D_1 的距离相等,则动点 P 的轨迹所在的曲线是 (　　)

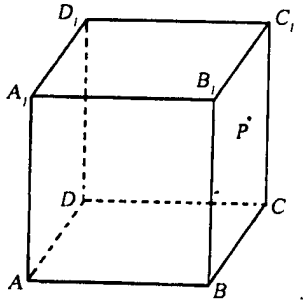
A. 直线　　B. 圆

C. 双曲线　　D. 抛物线

(文)已知 a,b,c 满足 $c<b<a$,且 $ac<0$,那么下列选项中一定成立的是 (　　)

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)<0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)>0$



5. (理)函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间[1,2]上存在反函数的充分必要条件是 (　　)

A. $a\in(-\infty,1]$　　B. $a\in(2,+\infty)$

C. $a\in[1,2]$

D. $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

(文)从长度分别为 1,2,3,4 的四条线段中,任取三条的不同取法共有 n 种.在这些取法中,以取出的三条线段为边可组成的三角形的个数为 m,则 $\frac{m}{n}$ 等于 (　　)

A.0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. (理)如果 a,b,c 满足 $c<b<a$,且 $ac<0$,那么下列选项中不一定成立的是 (　　)

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$　　C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

(文)同(理)第 4 题

7. (理)从长度分别为 1,2,3,4,5 的五条线段中,任取三条的不同取法共有 n 种.在这些取法中,以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为 m,则 $\frac{m}{n}$ 等于 (　　)

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{2}{5}$

(文)函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间[1,2]上存在反函数的充分必要条件是 (　　)

A. $a\in(-\infty,1]$　　B. $a\in[2,+\infty)$

C. $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$　　D. $a\in[1,2]$

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\in P,\\-x,x\in M,\end{cases}$ 其中 P,M 为实数集 R 的两个非空子集,又规定 $f(P)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$,$f(M)=\{y\mid y=f(x),x\in M\}$.给出下列四个判断:

①若 $P\cap M=\varnothing$,则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$;

②若 $P\cap M\neq\varnothing$,则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$;

③若 $P\cup M=R$,则 $f(P)\cup f(M)=R$;

④若 $P\cup M\neq R$,则 $f(P)\cup f(M)\neq R$.

其中正确判断有 (　　)

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

第Ⅱ卷(非选择题 共 110 分)

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.把答案填在题中横线上.

9. (理)函数 $f(x)=\cos 2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$ 的最小正周期是_____.

(文)函数 $f(x)=\sin x\cos x$ 的最小正周期是_____.

10. (理)方程 $\lg(4^x+2)=\lg 2^x+\lg 3$ 的解是_____.

(文)方程 $\lg(x^2+2)=\lg x+\lg 3$ 的解是_____.

11. (理)某地球仪上北纬 $30°$ 纬线的长度为 12π cm,该地球仪的半径是_____cm,表面积是_____cm^2.

(文)圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 的圆心坐标是_____,如果直线 $x+y+a=0$ 与该圆有公共点,那么实数 a 的取值范围是_____.

12. (理)曲线 C:$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=-1+\sin\theta \end{cases}$($\theta$ 为参数)的普通方程是_____,如果曲线 C 与直线 $x+y+a=0$ 有公共点,那么实数 a 的取值范围是_____.

(文)同(理)第 11 小题

13. 在函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中,若 a,b,c 成等比数列且 $f(0)=-4$,则 f(x)有最_____值(填'大'或'小'),且该值为_____.

14. 定义'等和数列':在一个数列中,如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数,那么这个数列叫做等和数列,这个常数叫做该数列的公和.

已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列,且 $a_1=2$,公和为 5,那么 a_{18} 的值为_____,

(理)这个数列的前 n 项和 S_n 的计算公式为_____.

(文)且这个数列的前 21 项和 S_{21} 的值为_____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 80 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

在△ABC 中,$\sin A+\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,AC=2,AB=3,求 tgA 的值和△ABC 的面积.

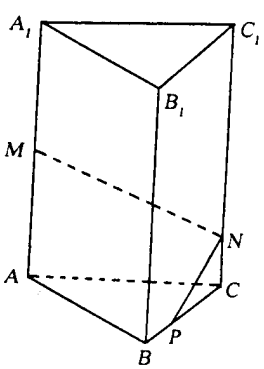
16. (理)(本小题满分 14 分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=3$,$AA_1=4$.M 为 AA_1 的中点,P 是 BC 上一点,且由 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到 M 的最短路线长为 $\sqrt{29}$,设这条最短路线与 CC_1 的交点为 N.求:

(Ⅰ)该三棱柱的侧面展开图的对角线长;

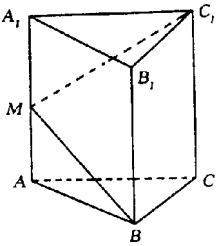
(Ⅱ)PC 和 NC 的长;

(Ⅲ)平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角(锐角)的大小(用反三角函数表示).



(文)(本小题满分 14 分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=2$,$AA_1=2$,由顶点 B 沿棱柱侧面经过棱 AA_1 到顶点 C_1 的最短路线与 AA_1 的交点记为 M.求:



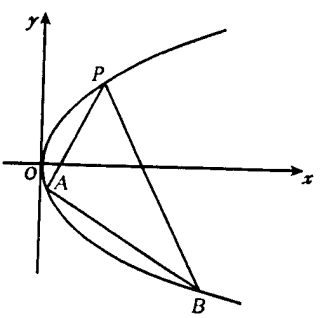
(Ⅰ)三棱柱的侧面展开图的对角线长;

(Ⅱ)该最短路线的长及$\frac{A_1M}{AM}$的值;

(Ⅲ)平面 C_1MB 与平面 ABC 所成二面角(锐角)的大小.

17. (理)(本小题满分 14 分)

如图,过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一定点 $P(x_0,y_0)(y_0>0)$,作两条直线分别交抛物线于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.



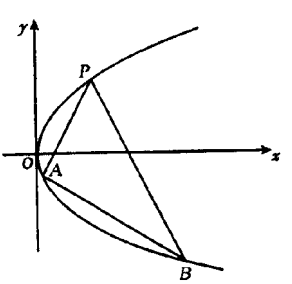
(Ⅰ)求该抛物线上纵坐标为$\frac{p}{2}$的点到其焦点 F 的距离;

(Ⅱ)当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时,

求$\frac{y_1+y_2}{y_0}$的值,并证明直线 AB 的斜率是非零常数.

(文)(本小题满分 14 分)

如图,抛物线关于 x 轴对称,它的顶点在坐标原点,点 $P(1,2)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$均在抛物线上.



(Ⅰ)写出该抛物线的方程及其准线方程;

(Ⅱ)当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时,求 y_1+y_2 的值及直线 AB 的斜率.

18. **(理)(本小题满分 14 分)**

$f(x)$是定义在$[0,1]$上的增函数,满足 $f(x)=2f(\frac{x}{2})$且 $f(1)=1$,在每个区间$(\frac{1}{2^i},\frac{1}{2^{i-1}}]$($i=1,2,\cdots$)上,$y=f(x)$的图像都是斜率为同一常数 k 的直线的一部分.

(Ⅰ)求 $f(0)$及 $f(\frac{1}{2})$,$f(\frac{1}{4})$的值,并归纳出 $f(\frac{1}{2^i})$($i=1,2,\cdots$)的表达式;

(Ⅱ)设直线 $x=\frac{1}{2^i}$,$x=\frac{1}{2^{i-1}}$,x 轴及 $y=f(x)$的图像围成的梯形的面积为a_i($i=1,2,\cdots$),记 $S(k)=\lim\limits_{n\to}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$,求 $S(k)$的表达式,并写出其定义域和最小值.

(文)(本小题满分 14 分)

函数 $f(x)$定义在$[0,1]$上,满足 $f(x)=2f(\frac{x}{2})$且 $f(1)=1$.在每个区间$(\frac{1}{2^i},\frac{1}{2^{i-1}}]$($i=1,2,\cdots$)上,$y=f(x)$的图像都是平行于 x 轴的直线的一部分.

(Ⅰ)求 $f(0)$及 $f(\frac{1}{2})$,$f(\frac{1}{4})$的值,并归纳出 $f(\frac{1}{2^i})$($i=1,2,\cdots$)的表达式;

(Ⅱ)设直线 $x=\frac{1}{2^i}$,$x=\frac{1}{2^{i-1}}$,x 轴及 $y=f(x)$的图像围成的矩形的面积为a_i($i=1,2,\cdots$),求 a_1,a_2 及 $\lim\limits_{n\to}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$的值.

19.（本小题满分 12 分）

某段城铁线路上依次有 A，B，C 三站，AB = 5 km，BC = 3 km. 在列车运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟，8 时 12 分到达 C 站. 在实际运行时，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停留 1 分钟，并在行驶时以同一速度 v km/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

（Ⅰ）分别写出列车在 B，C 两站的运行误差；

（Ⅱ）若要求列车在 B，C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，求 v 的取值范围.

20.（本小题满分 13 分）

给定有限个正数满足条件 T：每个数都不大于 50 且总和 L = 1275. 现将这些数按下列要求进行分组，每组数之和不大于 150 且分组的步骤是：

首先，从这些数中选择这样一些数构成第一组，使得 150 与这组数之和的差 r_1 与所有可能的其他选择相比是最小的，r_1 称为第一组余差；

然后，在去掉已选入第一组的数后，对余下的数按第一组的选择方式构成第二组，这时的余差为 r_2；如此继续构成第三组（余差为 r_3）、第四组（余差为 r_4）、…，直至第 N 组（余差为 r_N）把这些数全部分完为止.

（Ⅰ）判断 $r_1, r_2, \cdots, r_N$ 的大小关系，并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数；

（Ⅱ）当构成第 n（$n < N$）组后，指出余下的每个数与 r_n 的大小关系，并证明 $r_{n-1} < \dfrac{150n - L}{n - 1}$；

（Ⅲ）对任何满足条件 T 的有限个正数，证明：$N \leqslant 11$.

2004年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分,考试用时120分钟.

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

参考公式:

如果事件A、B互斥,那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

如果事件A、B相互独立,那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

柱体(棱柱、圆柱)的体积公式

$V_{柱体}=Sh$.

其中S表示柱体的底面积,

h表示柱体的高.

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.(理)i是虚数单位,$\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3}=$　(　)

A.$1+i$　　B.$-1-i$　　C.$1+3i$　　D.$-1-3i$

(文)设集合$P=\{1,2,3,4,5,6\}$,$Q=\{x\in R\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}$,那么下列结论正确的是　(　)

A.$P\cap Q=P$　　B.$P\cap Q\supsetneq Q$　　C.$P\cup Q=Q$　　D.$P\cap Q\subsetneq P$

2.不等式$\frac{x-1}{x}\geqslant 2$的解集为　(　)

A.$[-1,0)$　　B.$[-1,+\infty)$

C.$(-\infty,-1]$　　D.$(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

3.(理)若平面向量$\vec{b}$与向量$\vec{a}=(1,-2)$的夹角是180°,且$|\vec{b}|=3\sqrt{5}$,则$\vec{b}=$　(　)

A.$(-3,6)$　　B.$(3,-6)$　　C.$(6,-3)$　　D.$(-6,3)$

(文)对任意实数a,b,c,在下列命题中,真命题是　(　)

A.“$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件　　B.“$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

C.“$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件　　D.“$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件

4.(理)设P是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$上一点,双曲线的一条渐近线方程为$3x-2y=0$,$F_1$、$F_2$分别是双曲线的左、右焦点.若$|PF_1|=3$,则$|PF_2|=$　(　)

A.1或5　　B.6　　C.7　　D.9

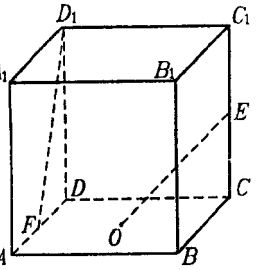
(文)同(理)第3题

5.(理)若函数$f(x)=\log_a x(0<a<1)$在区间$[a,2a]$上的最大值是最小值的3倍,则$a=$　(　)

A.$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{2}$

(文)同(理)第4题

6.(理)如图,在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,O 是底面 ABCD 的中心,E、F 分别是 CC_1、AD 的中点.那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于 ( )



A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

(文)同(理)第 5 题

7.(理)若 $P(2,-1)$ 为圆 $(x-1)^2+y^2=25$ 的弦 AB 的中点,则直线 AB 的方程是 ( )

A. $x-y-3=0$ B. $2x+y-3=0$

C. $x+y-1=0$ D. $2x-y-5=0$

(文)若过定点 $M(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线与圆 $x^2+4x+y^2-5=0$ 在第一象限内的部分有交点,则 k 的取值范围是 ( )

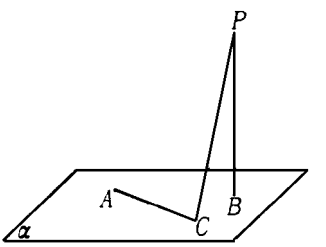
A. $0<k<\sqrt{5}$ B. $-\sqrt{5}<k<0$ C. $0<k<\sqrt{13}$ D. $0<k<5$

8.(理)已知数列 $\{a_n\}$,那么"对任意的 $n\in N^*$,点 $P_n(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上"是"$\{a_n\}$ 为等差数列"的 ( )

A.必要而不充分条件 B.充分而不必要条件

C.充要条件 D.既不充分也不必要条件

(文)如图,定点 A 和 B 都在平面 α 内,定点 $P\notin\alpha$,$PB\perp\alpha$,C 是 α 内异于 A 和 B 的动点,且 $PC\perp AC$.那么,动点 C 在平面 α 内的轨迹是 ( )



A.一条线段,但要去掉两个点

B.一个圆,但要去掉两个点

C.一个椭圆,但要去掉两个点

D.半圆,但要去掉两个点

9.(理)函数 $y=2\sin(\frac{\pi}{6}-2x)(x\in[0,\pi])$ 为增函数的区间是 ( )

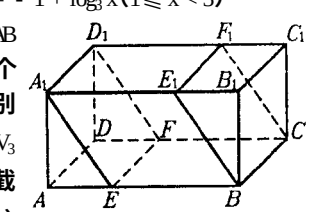
A. $[0,\frac{\pi}{3}]$ B. $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ C. $[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$ D. $[\frac{5\pi}{6},\pi]$

(文)函数 $y=3^{x+1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是 ( )

A. $y=1+\log_3 x(x>0)$ B. $y=-1+\log_3 x(x>0)$

C. $y=1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$ D. $y=-1+\log_3 x(1\leqslant x<3)$

10.(理)如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=6$,$AD=4$,$AA_1=3$.分别过 BC、A_1D_1 的两个平行截面将长方体分成三部分,其体积分别记为 $V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$,$V_2=V_{EBE_1A_1-FCF_1D_1}$,$V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$.若 $V_1:V_2:V_3=1:4:1$,则截面 A_1EFD_1 的面积为 ( )



A.$4\sqrt{10}$ B.$8\sqrt{3}$

C.$4\sqrt{13}$ D.16

(文)同(理)第 9 题

11.(理)函数 $y=3^{x^2-1}(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是 ( )

A. $y=\sqrt{1+\log_3 x}\,(x\geqslant\frac{1}{3})$ B. $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\,(x\geqslant\frac{1}{3})$

C. $y=\sqrt{1+\log_3 x}\left(\frac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$　　D. $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\left(\frac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$

(文)同(理)第 10 题

12. 定义在 R 上的函数 $f(x)$既是偶函数又是周期函数.若 $f(x)$的最小正周期是 π,且当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,$f(x)=\sin x$,则 $f(\frac{5\pi}{3})$的值为　　(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

13. 某工厂生产 A、B、C 三种不同型号的产品,产品数量之比依次为 2:3:5.现用分层抽样方法抽出一个容量为 n 的样本,样本中 A 种型号产品有 16 件.那么此样本的容量 $n=$_____.

14. (理)如果过两点 A(a,0)和 B(0,a)的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点,那么实数 a 的取值范围是_____.

(文)已知向量 $\vec{a}=(1,1)$,$\vec{b}=(2,-3)$,若 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直,则实数 k 等于_____.

15. (理)若 $(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2004}x^{2004}(x\in R)$,则 $(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots+(a_0+a_{2004})=$_____.(用数字作答)

(文)同(理)第 14 题

16. (理)从 1,3,5,7 中任取 2 个数字,从 0,2,4,6,8 中任取 2 个数字,组成没有重复数字的四位数,其中能被 5 整除的四位数共有_____个.(用数字作答)

(文)从 0,1,2,3,4,5 中任取 3 个数字,组成没有重复数字的三位数,其中能被 5 整除的三位数共有_____个.(用数字作答)

三、解答题:本大题共 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求 $\tan\alpha$ 的值;

(Ⅱ)求 $\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

18.（本小题满分 12 分）

（理）从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛．设随机变量 ξ 表示所选 3 人中女生的人数．

（Ⅰ）求 ξ 的分布列；

（Ⅱ）求 ξ 的数学期望；

（Ⅲ）求“所选 3 人中女生人数 $\xi \leqslant 1$”的概率．

（文）从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛．

（Ⅰ）求所选 3 人都是男生的概率；

（Ⅱ）求所选 3 人中恰有 1 名女生的概率；

（Ⅲ）求所选 3 人中至少有 1 名女生的概率．

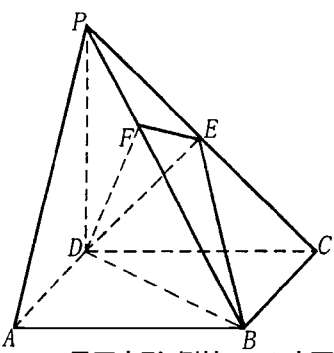
19.（本小题满分 12 分）

（理）如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，侧棱 PD⊥底面 ABCD，PD＝DC，E 是 PC 的中点，作 EF⊥PB 交 PB 于点 F．

（Ⅰ）证明 PA∥平面 EDB；

（Ⅱ）证明 PB⊥平面 EFD；

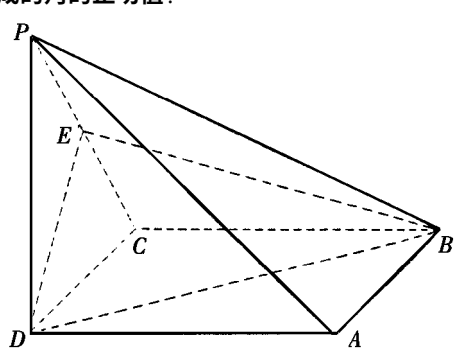
（Ⅲ）求二面角 C－PB－D 的大小．



（文）如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，侧棱 PD⊥底面 ABCD，PD＝DC，E 是 PC 的中点．

（Ⅰ）证明 PA∥平面 EDB；

（Ⅱ）求 EB 与底面 ABCD 所成的角的正切值．



20.(本小题满分 12 分)

(理)已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 在 $x=\pm 1$ 处取得极值.

(Ⅰ)讨论 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值;

(Ⅱ)过点 $A(0,16)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线,求此切线方程.

(文)设 $\{a_n\}$ 是一个公差为 $d(d\neq 0)$ 的等差数列,它的前 10 项和 $S_{10}=110$ 且 a_1,a_2,a_4 成等比数列.

(Ⅰ)证明 $a_1=d$;

(Ⅱ)求公差 d 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21.(本小题满分 12 分)

(理)已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 和数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件:

$a_1=a$,$a_n=f(a_{n-1})(n=2,3,4,\cdots)$,$a_2\neq a_1$,

$f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})(n=2,3,4,\cdots)$,

其中 a 为常数,k 为非零常数.

(Ⅰ)令 $b_n=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$,证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(Ⅱ)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅲ)当 $|k|<1$ 时,求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(文)已知函数 $f(x)=ax^3+cx+d(a\neq 0)$ 是 R 上的奇函数,当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极值 -2.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间和极大值;

(Ⅱ)证明对任意 $x_1,x_2\in(-1,1)$,不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<4$ 恒成立.

22.（本小题满分 14 分）

椭圆的中心是原点 O，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，相应于焦点 $F(c,0)(c>0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A，$|OF|=2|FA|$，过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点.

（Ⅰ）求椭圆的方程及离心率；

（Ⅱ）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 PQ 的方程；

（Ⅲ）（理）设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda>1)$，过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另一点 M，证明 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.

2004 年普通高等学校招生全国统一考试(辽宁卷)

数　学

第Ⅰ卷(选择题　共 60 分)

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 互相独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题 本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. **若** $\cos\theta>0$，**且** $\sin2\theta<0$，**则角** θ **的终边所在象限是**　(　)

A. **第一象限**　B. **第二象限**

C. **第三象限**　D. **第四象限**

2. **对于** $0<a<1$，**给出下列四个不等式**　(　)

①$\log_a(1+a)<\log_a(1+\frac{1}{a})$　②$\log_a(1+a)>\log_a(1+\frac{1}{a})$

③$a^{1+a}<a^{1+\frac{1}{a}}$　④$a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$

其中成立的是　(　)

A.①**与**③　B.①**与**④　C.②**与**③　D.②**与**④

3. **已知** α、β **是不同的两个平面，直线** $a\subset\alpha$，**直线** $b\subset\beta$. **命题** $p:a$ **与** b **无公共点；命题** $q:\alpha/\!/\beta$. **则 p 是 q 的**　(　)

A. **充分而不必要的条件**　B. **必要而不充分的条件**

C. **充要条件**　D. **既不充分也不必要的条件**

4. **设复数 z 满足** $\frac{1-z}{1+z}=i$，**则** $|1+z|=$　(　)

A.0　B.1　C.$\sqrt{2}$　D.2

5. **甲、乙两人独立地解同一问题，甲解决这个问题的概率是** p_1，**乙解决这个问题的概率是** p_2，**那么恰好有 1 人解决这个问题的概率是**　(　)

A. p_1p_2　B. $p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$

C. $1-p_1p_2$　D. $1-(1-p_1)(1-p_2)$

6. **已知** $A(-2,0)$、$B(3,0)$，**动点** $P(x,y)$ **满足** $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2$，**则点 P 的轨迹是**　(　)

A. **圆**　B. **椭圆**　C. **双曲线**　D. **抛物线**

7. **已知函数** $f(x)=\sin(\pi x-\frac{\pi}{2})-1$，**则下列命题正确的是**　(　)

A. $f(x)$**是周期为 1 的奇函数**

B. $f(x)$是周期为 2 的偶函数

C. $f(x)$是周期为 1 的非奇非偶函数

D. $f(x)$是周期为 2 的非奇非偶函数

8. 已知随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$	$\frac{2}{3^6}$	$\frac{2}{3^7}$	$\frac{2}{3^8}$	$\frac{2}{3^9}$	m

则 $P(\xi = 10) =$ （ ）

A. $\frac{2}{3^9}$　　B. $\frac{2}{3^{10}}$　　C. $\frac{1}{3^9}$　　D. $\frac{1}{3^{10}}$

9. 已知点 $F_1(-\sqrt{2},0)$、$F_2(\sqrt{2},0)$，动点 P 满足 $|PF_2| - |PF_1| = 2$. 当点 P 的纵坐标是 $\frac{1}{2}$ 时，点 P 到坐标原点的距离是 （ ）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

10. 设 A、B、C、D 是球面上的四个点，且在同一平面内，$AB = BC = CD = DA = 3$，球心到该平面的距离是球半径的一半，则球的体积是 （ ）

A. $8\sqrt{6}\pi$　　B. $64\sqrt{6}\pi$　　C. $24\sqrt{2}\pi$　　D. $72\sqrt{2}\pi$

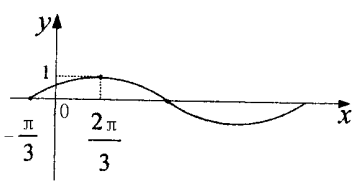
11. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像（部分）如下图所示，则 ω 和 φ 的取值是 （ ）

A. $\omega = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}$

B. $\omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{3}$

C. $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{6}$

D. $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$



12. 有两排座位，前排 11 个座位，后排 12 个座位，现安排 2 人就座，规定前排中间的 3 个座位不能坐，并且这 2 人不左右相邻，那么不同排法的种数是 （ ）

A. 234　　B. 346　　C. 350　　D. 363

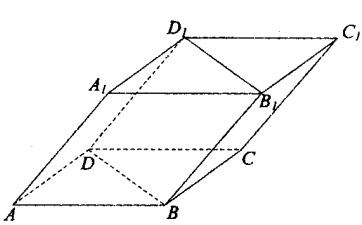
第 II 卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题 本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.

13. 若经过点 $P(-1,0)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ 相切，则此直线在 y 轴上的截距是_____.

14. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{(x - \pi)\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}} =$ _____.

15. 如图，四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD 为正方形，侧棱与底面边长均为 2a，且 $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60°$，则侧棱 AA_1 和截面 B_1D_1DB 的距离是_____.

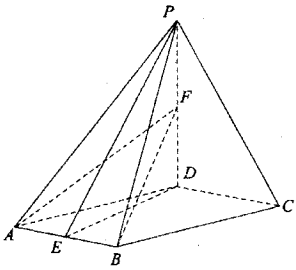


16. 口袋内装有 10 个相同的球，其中 5 个球标有数字 0，5 个球标有数字 1，若从袋中摸出 5 个球，那么摸出的 5 个球所标数字之和小于 2 或大于 3 的概率是_____.（以数值作答）

三、解答题 本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 12 分）

已知四棱锥 P - ABCD，底面 ABCD 是菱形，∠DAB = 60°，PD ⊥ 平面 ABCD，PD = AD，点 E 为 AB 中点，点 F 为 PD 中点.



（Ⅰ）证明平面 PED ⊥ 平面 PAB；

（Ⅱ）求二面角 P - AB - F 的平面角的余弦值.

18.（本小题满分 12 分）

设全集 $U=R$

（Ⅰ）解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0(a\in R)$；

（Ⅱ）记 A 为（Ⅰ）中不等式的解集，集合

$$B=\{x\mid \sin(\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=0\}.$$

若 $(C_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

设椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A、B，O 是坐标原点，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，点 N 的坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 当 l 绕点 M 旋转时，求：

（Ⅰ）动点 P 的轨迹方程；

（Ⅱ）$|\overrightarrow{NP}|$ 的最小值与最大值.

20.（本小题满分 12 分）

甲方是一农场，乙方是一工厂．由于乙方生产须占用甲方的资源，因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入．在乙方不赔付甲方的情况下，乙方的年利润 x（元）与年产量 t（吨）满足函数关系 $x = 2000\sqrt{t}$．

若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元（以下称 s 为赔付价格），

（Ⅰ）将乙方的年利润 ω（元）表示为年产量 t（吨）的函数，并求出乙方获得最大利润的年产量；

（Ⅱ）甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y = 0.002t^2$（元），在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下，甲方要在索赔中获得最大净收入，应向乙方要求的赔付价格 s 是多少？

21.（本题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\frac{1}{6}$，又当 $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{8}$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）设 $0<a_1<\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in N^*$，证明 $a_n<\frac{1}{n+1}$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(e^x+a)(a>0)$.

（Ⅰ）求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$；

（Ⅱ）假设对任意 $x\in[\ln(3a),\ln(4a)]$，

不等式 $|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$ 成立，求实数 m 的取值范围.

9 2004年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)

数　学

第一卷(选择题　共60分)

一、选择题 本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1. 设集合 $P=\{1,2,3,4\}$,$Q=\{x\mid |x|\leqslant 2, x\in R\}$,则 $P\cap Q$ 等于　(　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 函数 $y=2\cos^2 x+1(x\in R)$ 的最小正周期为　(　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

3. 从4名男生和3名女生中选出4人参加某个座谈会,若这4人中必须既有男生又有女生,则不同的选法共有　(　)

A. 140种　　B. 120种

C. 35种　　D. 34种

4. 一平面截一球得到直径是6 cm的圆面,球心到这个平面的距离是4 cm,则该球的体积是　(　)

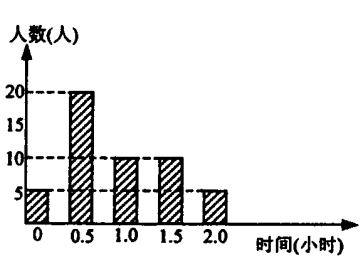
A. $\frac{100\pi}{3}$ cm^3　　B. $\frac{208\pi}{3}$ cm^3

C. $\frac{500\pi}{3}$ cm^3　　D. $\frac{416\sqrt{13}\pi}{3}$ cm^3

5. 若双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条准线与抛物线 $y^2=8x$ 的准线重合,则双曲线的离心率为　(　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

6. 某校为了了解学生的课外阅读情况,随机调查了50名学生,得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据,结果用右侧的条形图表示.根据条形图可得这50名学生这一天平均每人的课外阅读时间为　(　)



A. 0.6小时　　B. 0.9小时　　C. 1.0小时　　D. 1.5小时

7. $(2x+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3 的系数是 ( )

A.6 B.12 C.24 D.48

8. 若函数 $y=\log_a(x+b)(a>0,a\neq 1)$ 的图像过两点 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$，则 ( )

A. $a=2,b=2$ B. $a=\sqrt{2},b=2$

C. $a=2,b=1$ D. $a=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$

9. 将一颗质地均匀的骰子(它是一种各面上分别标有点数 1,2,3,4,5,6 的正方体玩具)先后抛掷 3 次，至少出现一次 6 点向上的概率是 ( )

A. $\frac{5}{216}$ B. $\frac{25}{216}$

C. $\frac{31}{216}$ D. $\frac{91}{216}$

10. 函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在闭区间 $[-3,0]$ 上的最大值、最小值分别是 ( )

A.1,-1 B.1,-17

C.3,-17 D.9,-19

11. 设 $k>1$，$f(x)=k(x-1)(x\in R)$. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A 点，它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像与 y 轴交于 B 点，并且这两个函数的图像交于 P 点. 已知四边形 OAPB 的面积是 3，则 k 等于 ( )

A.3 B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{6}{5}$

12. 设函数 $f(x)=-\frac{x}{1+|x|}(x\in R)$，区间 $M=[a,b](a<b)$，集合 $N=\{y\mid y=f(x),x\in M\}$，则使 $M=N$ 成立的实数对 (a,b) 有 ( )

A.0 个 B.1 个

C.2 个 D. 无数多个

第二卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上

13. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(x\in R)$ 的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是_____.

14. 以点 $(1,2)$ 为圆心，与直线 $4x+3y-35=0$ 相切的圆的方程是_____.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{2}$（对于所有 $n \geqslant 1$），且 $a_4 = 54$，则 a_1 的数值是_____.

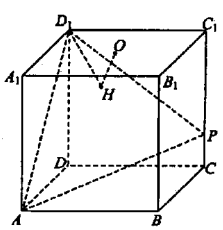
16. 平面向量 a，b 中，已知 $a = (4, -3)$，$|b| = 1$，且 $a \cdot b = 5$，则向量 $b =$ _____.

三、（第 17 小题）、解答题：本题满分 12 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{2}$，求 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})$ 的值.

四、（第 18 小题）、解答题：本题满分 12 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

在棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，点 P 在棱 CC_1 上，且 $CC_1 = 4CP$.



（Ⅰ）求直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）；

（Ⅱ）设 O 点在平面 D_1AP 上的射影是 H，求证：$D_1H \perp AP$；

（Ⅲ）求点 P 到平面 ABD_1 的距离.

五、(第 19 小题)、解答题:本题满分 12 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤

制订投资计划时,不仅要考虑可能获得的盈利,而且要考虑可能出现的亏损.

某投资人打算投资甲、乙两个项目.根据预测,甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 100% 和 50%,可能的最大亏损率分别为 30% 和 10%.投资人计划投资金额不超过 10 万元,要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元.问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元,才能使可能的盈利最大?

六、(第 20 小题)、解答题:本题满分 12 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤

设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(Ⅰ)若首项 $a_1=\frac{3}{2}$,公差 $d=1$,求满足 $S_k^2=(S_k)^2$ 的正整数 k;

(Ⅱ)求所有的无穷等差数列 $\{a_n\}$,使得对于一切正整数 k 都有 $S_k^2=(S_k)^2$ 成立.

七、(第 21 小题)、解答题:本题满分 12 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤

已知椭圆的中心在原点,离心率为$\frac{1}{2}$,一个焦点是 F(- m,0)(m 是大于 0 的常数).

(Ⅰ)求椭圆的方程;

(Ⅱ)设 Q 是椭圆上的一点,且过点 F、Q 的直线 l 与 y 轴交于点 M.若$|\overrightarrow{MQ}| = 2|\overrightarrow{QF}|$,求直线 l 的斜率.

八、(第 22 小题)、解答题:本题满分 14 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤

已知函数 $f(x)(x\in R)$ 满足下列条件:对任意的实数 x_1,x_2 都有

$$\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$$

和

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|,$$

其中 λ 是大于 0 的常数.

设实数 a_0,a,b 满足

$$f(a_0)=0 \quad 和 \quad b=a-\lambda f(a).$$

(Ⅰ)证明 $\lambda\leqslant 1$,并且不存在 $b_0\neq a_0$,使得 $f(b_0)=0$;

(Ⅱ)证明 $(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$;

(Ⅲ)证明 $[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

10 2004年普通高等学校招生全国统一考试(浙江卷)

数　学

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $U=\{1,2,3,4\}$, $M=\{1,2\}$, $N=\{2,3\}$,则 $\complement_U(M\cup N)=$ (　　)

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2\}$　　C. $\{1,3,4\}$　　D. $\{4\}$

2. (理)点 P 从(1,0)出发,沿单位圆 $x^2+y^2=1$ 逆时针方向运动 $\frac{2\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点,则 Q 的坐标为 (　　)

A. $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　B. $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$　　C. $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$　　D. $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

(文)直线 $y=2$ 与直线 $x+y-2=0$ 的夹角是 (　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为2,若 a_1,a_3,a_4 成等比数列,则 $a_2=$ (　　)

A. -4　　B. -6　　C. -8　　D. -10

4. (理)曲线 $y^2=4x$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线方程是 (　　)

A. $y^2=8-4x$　　B. $y^2=4x-8$　　C. $y^2=16-4x$　　D. $y^2=4x-16$

(文)已知向量 $\vec{a}=(3,4)$, $\vec{b}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$,则 $\tan\alpha=$ (　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

5. (理)设 $z=x-y$,式中变量 x 和 y 满足条件 $\begin{cases}x+y-3\geqslant 0,\\ x-2y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 z 的最小值为 (　　)

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

(文)同(理)第2题

6. (理)已知复数 $z_1=3+4i$, $z_2=t+i$,且 $z_1\cdot\bar{z}_2$ 是实数,则实数 $t=$ (　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

(文)同(理)第4题

7. 若 $(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式中存在常数项,则 n 的值可以是 (　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 12

8. (理)在 $\triangle ABC$ 中,"$A>30°$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的 (　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(文)"$\sin A=\frac{1}{2}$"是"$A=30°$"的 (　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9.(理)若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2,线段 F_1F_2 被抛物线 $y^2=2bx$ 的焦点分成 5:3 的两段,则此椭圆的离心率为 (　　)

A.$\frac{16}{17}$　　B.$\frac{4\sqrt{17}}{17}$　　C.$\frac{4}{5}$　　D.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(文)若函数 $f(x)=\log_a(x+1)(a>0,a\neq1)$ 的定义域和值域都是[0,1],则 $a=$ (　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\sqrt{2}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.2

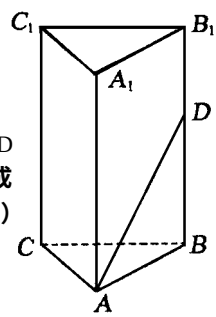
10.如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,已知 $AB=1$,D 在棱 BB_1 上,且 $BD=1$,若 AD 与平面 AA_1C_1C 所成的角为 α,则 $\alpha=$ (　　)

A.$\frac{\pi}{3}$

B.$\frac{\pi}{4}$

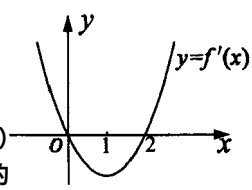
C.$\arcsin\frac{\sqrt{10}}{4}$

D.$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$

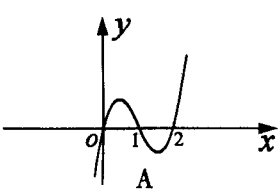


第 10 题

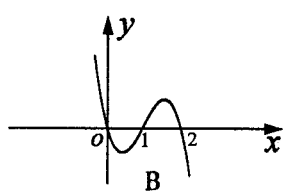
11.(理)设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数,$y=f'(x)$ 的图像如图所示,则 $y=f(x)$ 的图像最有可能的是 (　　)



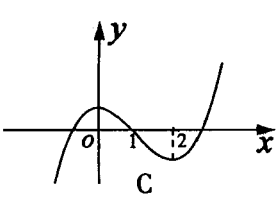
第 11 题



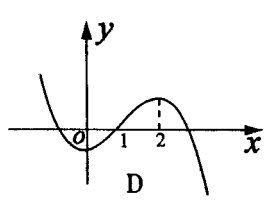
A



B



C



D

(文)同(理)第 9 题

12.若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 R 上的函数,且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解,则 $g[f(x)]$ 不可能是 (　　)

A.$x^2+x-\frac{1}{5}$　　B.$x^2+x+\frac{1}{5}$　　C.$x^2-\frac{1}{5}$　　D.$x^2+\frac{1}{5}$

第 Ⅱ 卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,满分 16 分.把答案填在题中横线上.

13.(理)已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则不等式 $x+(x+2)\cdot f(x+2)\leqslant5$ 的解集是_____.

(文)已知 $f(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0,\\ 0, x<0,\end{cases}$ 则不等式 $xf(x)+x\leqslant 2$ 的解集是_____.

14.(理)已知平面上三点 A、B、C 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{BC}|=4$, $|\overrightarrow{CA}|=5$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值等于_____.

(文)已知平面上三点 A、B、C 满足 $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{BC}|=1$, $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值等于_____.

15.(理)设坐标平面内有一个质点从原点出发,沿 x 轴跳动,每次向正方向或负方向跳 1 个单位,经过 5 次跳动质点落在点(3,0)(允许重复过此点)处,则质点不同的运动方法共有_____种(用数字作答).

(文)已知平面 $\alpha\perp$ 平面 β, $\alpha\cap\beta=l$, P 是空间一点,且 P 到平面 α、β 的距离分别是 1、2,则点 P 到 l 的距离为_____.

16.(理)已知平面 α 和平面 β 交于直线 l, P 是空间一点, $PA\perp\alpha$,垂足为 A, $PB\perp\beta$,垂足为 B,且 $PA=1$, $PB=2$,若点 A 在 β 内的射影与点 B 在 α 内的射影重合,则点 P 到 l 的距离为_____.

(文)同(理)第 15 题

三、解答题 本大题共 6 小题,满分 74 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17.(本题满分 12 分)

(理)在△ABC 中,角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c,且 $\cos A=\frac{1}{3}$.

(Ⅰ)求 $\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A$ 的值;

(Ⅱ)若 $a=\sqrt{3}$,求 bc 的最大值.

(文)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_n=\frac{1}{3}(a_n-1)$ $(n\in N^*)$.

(Ⅰ)求 a_1, a_2;

(Ⅱ)求证数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

18.(本题满分 12 分)

(理)盒子中有大小相同的球 10 个,其中标号为 1 的球 3 个,标号为 2 的球 4 个,标号为 5 的球 3 个.第一次从盒子中任取 1 个球,放回后第二次再任取 1 个球(假设取到每个球的可能性都相同).记第一次与第二次取到球的标号之和为 ξ.

(Ⅰ)求随机变量 ξ 的分布列;

(Ⅱ)求随机变量 ξ 的期望 $E\xi$.

(文)同(理)第 17 题

19.(本题满分 12 分)

如图,已知正方形 ABCD 和矩形 ACEF 所在的平面互相垂直,$AB=\sqrt{2}$,$AF=1$,M 是线段 EF 的中点.

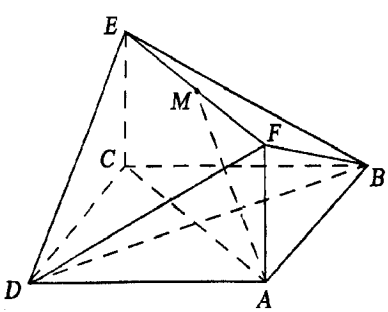
(Ⅰ)求证 AM∥平面 BDE;

(Ⅱ)(理)求二面角 A - DF - B 的大小;

(Ⅲ)(理)试在线段 AC 上确定一点 P,使得 PF 与 BC 所成的角是 60°.

(Ⅱ)(文)求证 AM⊥平面 BDF

(Ⅲ)(文)同(理)(Ⅱ)



20.(本题满分 12 分)

(理)设曲线 $y=e^{-x}(x\geqslant 0)$在点 $M(t,e^{-t})$处的切线 l 与 x 轴、y 轴所围成的三角形面积为 $S(t)$.

(Ⅰ)求切线 l 的方程;

(Ⅱ)求 $S(t)$的最大值.

(文)(本题满分 12 分)

某地区有 5 个工厂,由于用电紧缺,规定每个工厂在一周内必须选择某一天停电(选哪一天是最可能的).假定工厂之间的选择互不影响.

(Ⅰ)求 5 个工厂均选择星期日停电的概率;

(Ⅱ)求至少有两个工厂选择同一天停电的概率.

21.(本题满分 12 分)

(理)已知双曲线的中心在原点,右顶点为 $A(1,0)$,点 P、Q 在双曲线的右支上,点 $M(m,0)$到直线 AP 的距离为 1.

(Ⅰ)若直线 AP 的斜率为 k,且 $|k|\in[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$,求实数 m 的取值范围;

(Ⅱ)当 $m=\sqrt{2}+1$ 时,$\triangle APQ$ 的内心恰好是点 M,求此双曲线的方程.

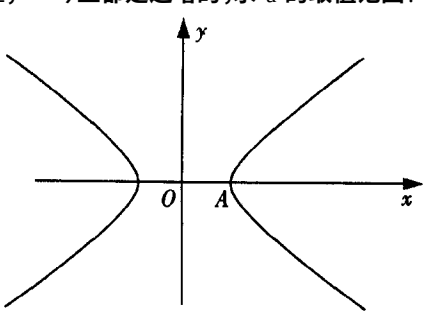
(文)(本题满分 12 分)

已知 a 为实数,$f(x)=(x^2-4)(x-a)$.

(Ⅰ)求导数 $f'(x)$;

(Ⅱ)若 $f'(-1)=0$,求 $f(x)$在$[-2,2]$上的最大值和最小值;

(Ⅲ)若 $f(x)$在$(-\infty,-2]$和$[2,+\infty)$上都是递增的,求 a 的取值范围.



22.（本题满分 14 分）

（理）如图，△OBC 的三个顶点坐标分别为（0，0）、（1，0）、（0，2），设 P_1 为线段 BC 的中点，P_2 为线段 CO 的中点，P_3 为线段 OP_1 的中点，对于每一个正整数 n，P_{n+3} 为线段 P_nP_{n+1} 的中点，令 P_n 的坐标为（x_n，y_n），

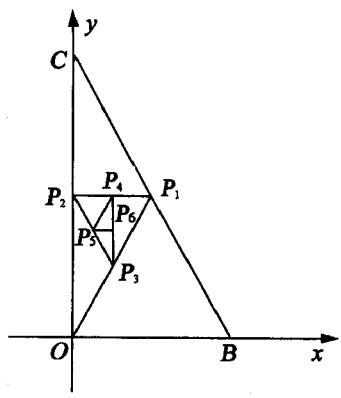
$a_n = \frac{1}{2}y_n + y_{n+1} + y_{n+2}$.

（Ⅰ）求 a_1，a_2，a_3 及 a_n；

（Ⅱ）证明 $y_{n+4} = 1 - \frac{y_n}{4}$，$n \in N^*$；

（Ⅲ）若记 $b_n = y_{4n+4} - y_{4n}$，$n \in N^*$，证明 $\{b_n\}$ 是等比数列.

（文）同（理）第 21 题（满分 14 分）



11 2004年普通高等学校招生全国统一考试(福建卷)

数　学

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.(理)复数$(\frac{1-i}{1+i})^{10}$的值是　(　)

A.-1　B.1　C.-32　D.32

(文)设集合U={1,2,3,4,5},A={1,3,5},B={2,3,5},则$\complement_U(A\cap B)$等于　(　)

A.{1,2,4}　B.{4}　C.{3,5}　D.

2.$\tan15°+\cot15°$等于　(　)

A.2　B.$2+\sqrt{3}$　C.4　D.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3.(理)命题p:若a、b∈R,则|a|+|b|>1是|a+b|>1的充分而不必要条件.

命题q:函数$y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

则　(　)

A."p或q"为假　B."p且q"为真　C.p真q假　D.p假q真

(文)命题p:若a、b∈R,则|a|+|b|>1是|a+b|>1的充要条件.

命题q:函数$y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

则　(　)

A."p或q"为假　B."p且q"为真　C.p真q假　D.p假q真

4.已知F_1、F_2是椭圆的两个焦点,过F_1且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于A、B两点,若$\triangle ABF_2$是正三角形,则这个椭圆的离心率是　(　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　B.$\frac{\sqrt{2}}{3}$　C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.(理)已知m、n是不重合的直线,α、β是不重合的平面,有下列命题:

①若$m\subset\alpha$,$n\parallel\alpha$,则$m\parallel n$;　②若$m\parallel\alpha$,$m\parallel\beta$,则$\alpha\parallel\beta$;

③若$\alpha\cap\beta=n$,$m\parallel n$,则$m\parallel\alpha$且$m\parallel\beta$;④若$m\perp\alpha$,$m\perp\beta$,则$\alpha\parallel\beta$.

其中真命题的个数是　(　)

A.0　B.1　C.2　D.3

(文)设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$\frac{a_5}{a_3}=\frac{5}{9}$,则$\frac{S_9}{S_5}=$　(　)

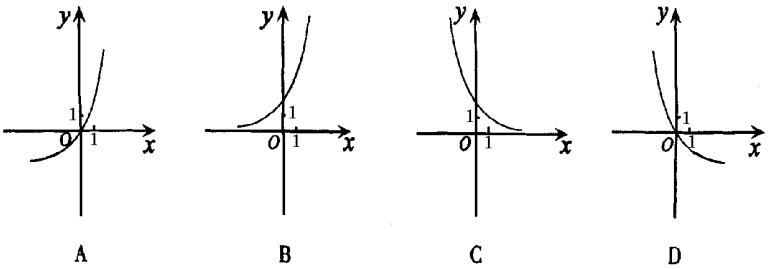
A.1　B.-1　C.2　D.$\frac{1}{2}$

6.(理)某校高二年级共有六个班级,现从外地转入4名学生,要安排到该年级的两个班级且每班安排2名,则不同的安排方案种数为　(　)

A.$A_6^2C_4^2$　B.$\frac{1}{2}A_6^2C_4^2$　C.$A_6^2A_4^2$　D.$2A_6^2$

(文)同(理)第5题

7. 已知函数 $y=\log_2 x$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，则函数 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图像是 （ ）



A　　B　　C　　D

8. 已知 a、b 是非零向量且满足 $(a-2b)\perp a$，$(b-2a)\perp b$，则 a 与 b 的夹角是 （ ）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

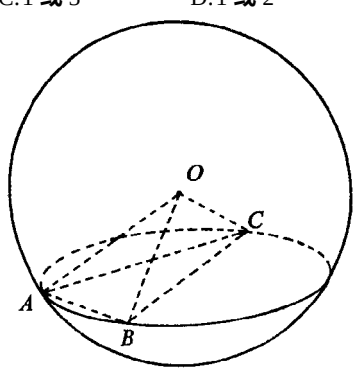
9. （理）若 $(1-2^x)^9$ 展开式的第 3 项为 288，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}\right)$ 的值是 （ ）

A.2　　B.1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{5}$

（文）已知 $\left(x-\frac{a}{x}\right)^8$ 展开式中常数项为 1120，其中实数 a 是常数，则展开式中各项系数的和是 （ ）

A. 2^8　　B. 3^8　　C.1 或 3^8　　D.1 或 2^8

10. 如图，A、B、C 是表面积为 48π 的球面上三点，$AB=2$，$BC=4$，$\angle ABC=60°$，O 为球心，则直线 OA 与截面 ABC 所成的角是 （ ）



A. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$

B. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. （理）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+2)$，当 $x\in[3,5]$ 时，$f(x)=2-|x-4|$，则 （ ）

A. $f(\sin\frac{\pi}{6})<f(\cos\frac{\pi}{6})$　　B. $f(\sin 1)>f(\cos 1)$

C. $f(\cos\frac{2\pi}{3})<f(\sin\frac{2\pi}{3})$　　D. $f(\cos 2)>f(\sin 2)$

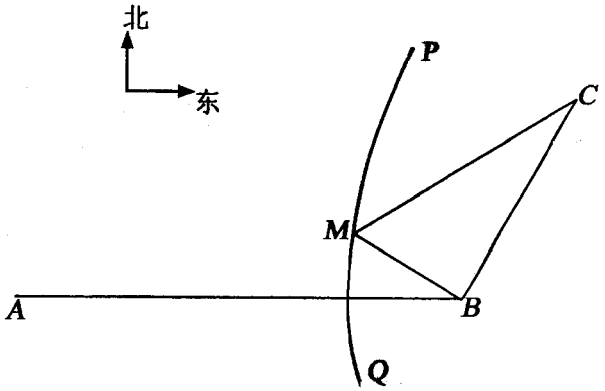
（文）定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+2)$，当 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)=x-2$，则 （ ）

A. $f(\sin\frac{1}{2})<f(\cos\frac{1}{2})$　　B. $f(\sin\frac{\pi}{3})<f(\cos\frac{\pi}{3})$

C. $f(\sin 1)<f(\cos 1)$　　D. $f(\sin\frac{3}{2})>f(\cos\frac{3}{2})$

12. （理）如图，B 地在 A 地的正东方向 4 km 处，C 地在 B 地的北偏东 30°方向 2 km 处，河流的沿岸 PQ（曲线）上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2 km. 现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头，向 B、C 两地转运货物. 经测算，从 M 到 B、M 到 C 修建公路的费用分别是 a 万元/km、$2a$

万元/km,那么修建这两条公路的总费用最低是 ( )



A.$(2\sqrt{7}-2)$a 万元　　B.5a 万元

C.$(2\sqrt{7}+1)$a 万元　　D.$(2\sqrt{3}+3)$a 万元

(文)如图(同理图),B 地在 A 地的正东方向 4 km 处,C 地在 B 地的北偏东 30°方向 2 km 处,河流的沿岸 PQ(曲线)上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远2 km.现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头,向 B、C 两地转运货物.经测算,从 M 到 B、C 两地修建公路的费用都是 a 万元/km、那么修建这两条公路的总费用最低是 ( )

A.$(\sqrt{7}+1)$a 万元　　B.$(2\sqrt{7}-2)$a 万元

C.$2\sqrt{7}$a 万元　　D.$(\sqrt{7}-1)$a 万元

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.

13. 直线 $x+2y=0$ 被曲线 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ 所截得的弦长等于_____.

14. (理)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & (x\neq 0)\\ a & (x=0).\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则实数 a 的值为_____.

(文)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-1 & (x\geqslant 0),\\ \dfrac{1}{x} & (x<0).\end{cases}$ 若 $f(a)>a$,则实数 a 的取值范围是_____.

15. (理)某射手射击 1 次,击中目标的概率是 0.9.他连续射击 4 次,且各次射击是否击中目标相互之间没有影响.有下列结论:

①他第 3 次击中目标的概率是 0.9;

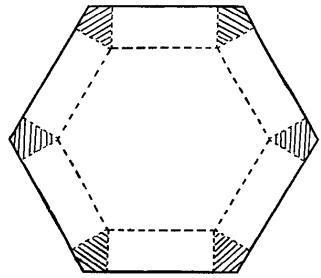
②他恰好击中目标 3 次的概率是 $0.9^3\times 0.1$;

③他至少击中目标 1 次的概率是 $1-0.1^4$.

其中正确结论的序号是_____(写出所有正确结论的序号).

(文)一个总体中有 100 个个体,随机编号为 0,1,2,…,99,依编号顺序平均分成 10 个小组,组号依次为 1,2,3,…,10.现用系统抽样方法抽取一个容量为 10 的样本,规定如果在第 1 组随机抽取的号码为 m,那么在第 k 组中抽取的号码个位数字与 m+k 的个位数字相同.若 m=6,则在第 7 组中抽取的号码是_____.

16. 如图，将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形，再沿虚线折起，做成一个无盖的正六棱柱容器．当这个正六棱柱容器的底面边长为_____时，其容积最大．



三、解答题 本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=a\cdot b$，其中向量 $a=(2\cos x,1)$，$b=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$，$x\in R$．

（Ⅰ）若 $f(x)=1-\sqrt{3}$ 且 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，求 x；

（Ⅱ）若函数 $y=2\sin 2x$ 的图像按向量 $c=(m,n)$（$|m|<\frac{\pi}{2}$）平移后得到函数 $y=f(x)$ 的图像，求实数 m、n 的值．

18.（本小题满分 12 分）

甲、乙两人参加一次英语口语考试，已知在备选的 10 道试题中，甲能答对其中的 6 题，乙能答对其中的 8 题．规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试，至少答对 2 题才算合格．

（Ⅰ）（理）求甲答对试题数 ξ 的概率分布及数学期望；

（文）分别求甲、乙两人考试合格的概率；

（Ⅱ）求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率．

19.（理）（本小题满分 12 分）

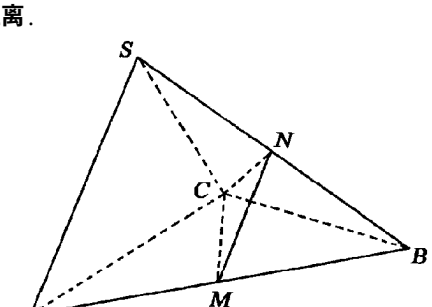
在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形，平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，

$SA=SC=2\sqrt{3}$，M、N 分别为 AB、SB 的中点．

（Ⅰ）证明：$AC\perp SB$；

（Ⅱ）求二面角 $N-CM-B$ 的大小；

（Ⅲ）求点 B 到平面 CMN 的距离．



(文)(本小题满分 12 分)

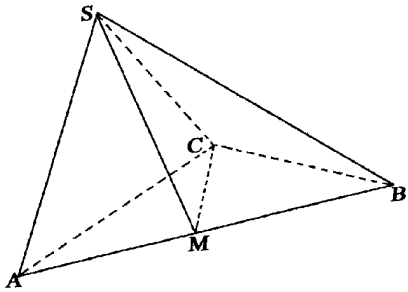
在三棱锥 S - ABC 中,△ABC 是边长为 4 的正三角形,平面 SAC ⊥ 平面 ABC,

SA = SC = $2\sqrt{2}$,M 为 AB 的中点.

(Ⅰ)证明:AC ⊥ SB;

(Ⅱ)求二面角 S - CM - A 的大小;

(Ⅲ)求点 B 到平面 SCM 的距离.



20. (本小题满分 12 分)

某企业 2003 年的纯利润为 500 万元,因设备老化等原因,企业的生产能力将逐年下降.若不进行技术改造,预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元.今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造,预测在未扣除技术改造资金的情况下,第 n 年(今年为第一年)的利润为 $500(1+\frac{1}{2^n})$ 万元(n 为正整数).

(Ⅰ)设从今年起的前 n 年,若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元,进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元(须扣除技术改造资金),求 A_n、B_n 的表达式;

(Ⅱ)依上述预测,从今年起该企业至少经过多少年,进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润?

21. (理)(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=\frac{2x-a}{x^2+2}$ (x∈R)在区间[-1,1]上是增函数.

(Ⅰ)求实数 a 的值所组成的集合 A;

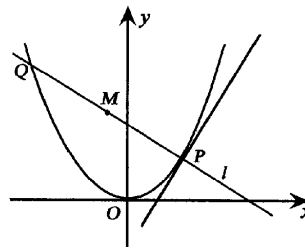
(Ⅱ)设关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的两根为 x_1、x_2.试问:是否存在实数 m,使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 a∈A 及 t∈[-1,1]恒成立?若存在,求出 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.

(文)(本小题满分 12 分)

如图,P 是抛物线 C: $y=\frac{1}{2}x^2$ **上一点,直线 l 过点 P 并与抛物线 C 在点 P 的切线垂直,l 与抛物线 C 相交于另一点 Q.**

(Ⅰ)当点 P 的横坐标为 2 时,求直线 l 的方程;

(Ⅱ)当点 P 在抛物线 C 上移动时,求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程,并求点 M 到 x 轴的最短距离.

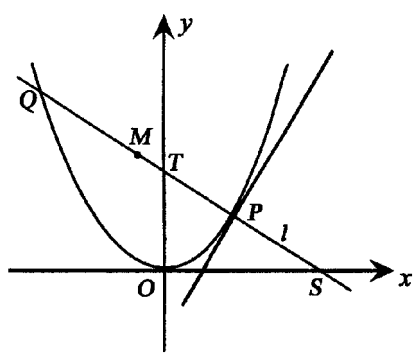


22. **(理)(本小题满分 14 分)**

如图,P 是抛物线 C: $y=\frac{1}{2}x^2$ **上一点,直线 l 过点 P 且与抛物线 C 交于另一点 Q.**

(Ⅰ)若直线 l 与过点 P 的切线垂直,求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程.

(Ⅱ)若直线 l 不过原点且与 x 轴交于点 S,与 y 轴交于点 T,试求 $\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$ **的取值范围.**



(文)(本小题满分 14 分)

已知 $f(x)=4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3$ $(x\in R)$ **在区间** $[-1,1]$ **上是增函数.**

(Ⅰ)求实数 a 的值组成的集合 A;

(Ⅱ)设关于 x 的方程 $f(x)=2x+\frac{1}{3}x^3$ **的两个非零实根为** x_1、x_2. **试问:是否存在实数 m,使得不等式** $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ **对任意** $a\in A$ **及** $t\in[-1,1]$ **恒成立?若存在,求出 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.**

2004年普通高等学校招生全国统一考试(湖北卷)

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.共150分.考试用时120分钟.

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.(理)与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是　(　)

A. $2x-y+3=0$　　B. $2x-y-3=0$

C. $2x-y+1=0$　　D. $2x-y-1=0$

(文)设 $A=\{x\mid x=\sqrt{5k+1},k\in N\}$,$B=\{x\mid x\leqslant 6,x\in Q\}$,则 $A\cap B$ 等于　(　)

A. $\{1,4\}$　　B. $\{1,6\}$　　C. $\{4,6\}$　　D. $\{1,4,6\}$

2.(理)复数 $\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^5}{1+\sqrt{3}i}$ 的值是　(　)

A. -16　　B. 16　　C. $-\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

(文)已知点 $M_1(6,2)$ 和 $M_2(1,7)$,直线 $y=mx-7$ 与线段 M_1M_2 的交点 M 分有向线段 M_1M_2 的比为 $3:2$,则 m 的值为　(　)

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. 4

3.(理)已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,则 $f(x)$ 的解析式可取为　(　)

A. $\dfrac{x}{1+x^2}$　　B. $-\dfrac{2x}{1+x^2}$　　C. $\dfrac{2x}{1+x^2}$　　D. $-\dfrac{x}{1+x^2}$

(文)已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数为3,则 $f(x)$ 的解析式可能为　(　)

A. $f(x)=(x-1)^3+3(x-1)$　　B. $f(x)=2(x-1)$

C. $f(x)=2(x-1)^2$　　D. $f(x)=x-1$

4.(理)已知 a,b,c 为非零的平面向量.甲:$a\cdot b=a\cdot c$,乙:$b=c$,则(　)

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

(文)两个圆 C_1:$x^2+y^2+2x+2y-2=0$ 与 C_2:$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 的公切线有且仅有　(　)

A. 1条　　B. 2条　　C. 3条　　D. 4条

5.(理)若 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$,则下列不等式①$a+b<ab$;②$|a|>|b|$;③$a<b$;④$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$ 中,正确的不等式有　(　)

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

(文)若函数 $y = a^x + b - 1$($a > 0$ 且 $a \neq 1$)的图像经过第二、三、四象限，则一定有　　(　　)

A. $0 < a < 1$ 且 $b > 0$　　B. $a > 1$ 且 $b > 0$

C. $0 < a < 1$ 且 $b < 0$　　D. $a > 1$ 且 $b < 0$

6.(理)已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在椭圆上．若 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个顶点，则点 P 到 x 轴的距离为(　　)

A. $\frac{9}{5}$　　B.3　　C. $\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{9}{4}$

(文)四面体 ABCD 四个面的重心分别为 E、F、G、H，则四面体 EFGH 的表面积与四面体 ABCD 的表面积的比值是　　(　　)

A. $\frac{1}{27}$　　B. $\frac{1}{16}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{8}$

7.(理)函数 $f(x) = a^x + \log_a(x + 1)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值之和为 a，则 a 的值为　　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C.2　　D.4

(文)同(理)第 4 题

8.(理)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = a\left[2 - (\frac{1}{2})^{n-1}\right] - b\left[2 - (n+1)(\frac{1}{2})^{n-1}\right]$

($n = 1,2,\cdots$)，其中 a、b 是非零常数．则存在数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 使得(　　)

A. $a_n = x_n + y_n$，其中 $\{x_n\}$ 为等差数列，$\{y_n\}$ 为等比数列

B. $a_n = x_n + y_n$，其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等差数列

C. $a_n = x_n \cdot y_n$，其中 $\{x_n\}$ 为等差数列，$\{y_n\}$ 为等比数列

D. $a_n = x_n \cdot y_n$，其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等比数列

(文)已知 $x \geqslant \frac{5}{2}$，则 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}$ 有　　(　　)

A. 最大值 $\frac{5}{4}$　　B. 最小值 $\frac{5}{4}$

C. 最大值 1　　D. 最小值 1

9.(理)函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 有极值的充要条件是　　(　　)

A. $a > 0$　　B. $a \geqslant 0$　　C. $a < 0$　　D. $a \leqslant 0$

(文)同(理)第 8 题

10.(理)设集合 $P = \{m \mid -1 < m < 0\}$，$Q = \{m \in R \mid mx^2 + 4mx - 4 < 0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$，则下列关系中成立的是　　(　　)

A. $P \subsetneqq Q$　　B. $Q \subsetneqq P$　　C. $P = Q$　　D. $P \cap Q =$

(文)若 $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$，则下列结论中不正确的是　　(　　)

A. $\log_a b \cdot \log_b a$

B. $|\log_a b + \log_b a| > 2$

C. $(\log_b a)^2 < 1$

D. $|\log_a b| + |\log_b a| > |\log_a b + \log_b a|$

11.(理)已知平面 α 与 β 所成的二面角为 80°，P 为 α、β 外一定点，过点 P 的一条直线与 α、β 所成的角都是 30°，则这样的直线有且仅有　　(　　)

A.1 条　　B.2 条　　C.3 条　　D.4 条

(文)将标号为 1，2…，10 的 10 个球放入标号为 1，2，…，10 的 10 个盒子

内，每个盒内放一个球，恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放入方法种数为 （ ）

A. 120　　B. 240　　C. 360　　D. 720

12. 设 $y = f(t)$ 是某港口水的深度 y（米）关于时间 t（时）的函数，其中 $0 \leqslant t \leqslant 24$，下表是该港口某一天从 0 时至 24 时记录的时间 t 与水深 y 的关系：

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

经长期观察，函数 $y = f(t)$ 的图像可以近似地看成函数 $y = k + A\sin(\omega t + \varphi)$ 的图像，下面的函数中，最能近似表示表中数据间对应关系的函数是 （ ）

A. $y = 12 + 3\sin\frac{\pi}{6}t, t \in [0,24]$

B. $y = 12 + 3\sin(\frac{\pi}{6}t + \pi), t \in [0,24]$

C. $y = 12 + 3\sin\frac{\pi}{12}t, t \in [0,24]$

D. $y = 12 + 3\sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}), t \in [0,24]$

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. （理）设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi = k) = \frac{a}{5^k}$，a 为常数，则 $k = 1,2\cdots$，则 $a =$ _____.

（文）$\tan 2\,010°$ 的值为_____.

14. （理）将标号为 1，2，…10 的 10 个球放入标号为 1，2，…，10 的 10 个盒子内，每个盒内放一个球，恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放入的方法共有_____种.（以数字作答）

（文）已知 $(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{3}})^n$ 的展开式中各项系数的和是 128，则展开式中 x^5 的系数是_____.（以数字作答）

15. （理）设 A、B 为两个集合，下列四个命题：

① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$，有 $x \notin B$；

② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$；

③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$；

④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$，使得 $x \notin B$.

其中真命题的序号是_____.（把符合要求的命题序号都填上）

（文）某校有老师 200 人，男学生 1 200 人，女学生 1 000 人. 现用分层抽样的方法从所有师生中抽取一个容量为 n 的样本；已知从女学生中抽取的人数为 80 人，则 $n =$ _____.

16. （理）某日中午 12 时整，甲船自 A 处以 16 km/h 的速度向正东行驶，乙船自 A 的正北 18 km 处以 24 km/h 的速度向正南行驶，则当日 12 时 30 分时两船之间距离对时间的变化率是_____ km/h.

（文）同（理）第 15 题

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 12 分）

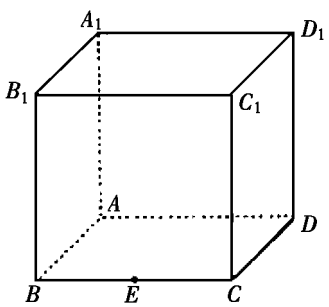
已知 $6\sin^2 a + \sin a\cos a - 2\cos^2 a = 0$，$a \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$，求 $\sin(2a + \frac{\pi}{3})$ 的值.

18. (理)(本小题满分 12 分)

如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是棱 BC 的中点，点 F 是棱 CD 上的动点.

(Ⅰ)试确定点 F 的位置，使得 $D_1E \perp$ 平面 AB_1F；

(Ⅱ)当 $D_1E \perp$ 平面 AB_1F 时，求二面角 $C_1 - EF - A$ 的大小(结果用反三角函数值表示).

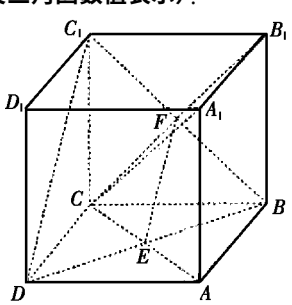


(文)(本小题满分 12 分)

如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，AC 与 BD 交于点 E，C_1B 与 CB_1 交于点 F.

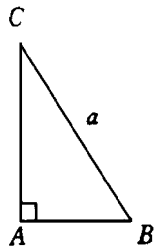
(Ⅰ)求证：$A_1C \perp$ 平面 BDC_1；

(Ⅱ)求二面角 $B - EF - C$ 的大小(结果用反三角函数值表示).



19.（本小题满分 12 分）

如图，在 Rt△ABC 中，已知 BC = a 若长为 2a 的线段 PQ 以点 A 为中点，问$\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角 θ 取何值时$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$的值最大？并求出这个最大值.



20.（本小题满分 12 分）

直线 l：y = kx + 1 与双曲线 C：$2x^2 - y^2 = 1$ 的右支交于不同的两点 A、B

（Ⅰ）求实数 k 的取值范围；

（Ⅱ）是否存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由.

21.（理）（本小题满分 12 分）

某突发事件，在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3，一旦发生，将造成 400 万元的损失. 现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用，单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元，采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率分别为 0.9 和 0.85，若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用，联合采用或不采用，请确定预防方案使总费用最少.

（总费用 = 采取预防措施的费用 + 发生突发事件损失的期望值）

（文）（本小题满分 12 分）

为防止某突发事件发生，有甲、乙、丙、丁四种相互独立的预防措施可供采用，单独采用甲、乙、丙、丁预防措施后此突发事件不发生的概率（记为 P）和所需费用如下表：

预防措施	甲	乙	丙	丁
P	0.9	0.8	0.7	0.6
费用（万元）	90	60	30	10

预防方案可单独采用一种预防措施或联合采用几种预防措施. 在总费用不超过 120 万元的前提下，请确定一个预防方案，使得此突发事件不发生的概率最大.

22. **(理)(本小题满分 14 分)**

已知 $a>0$**,数列** $\{a_n\}$**满足** $a_1=a$**,** $a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ $n=1,2,\cdots$

(Ⅰ)已知数列 $\{a_n\}$**极限存在且大于零,求** $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ **(将** A**用** a **表示)**

(Ⅱ)设 $b_n=a_n-A$**,** $n=1,2,\cdots$**,证明** $b_{n+1}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$**;**

(Ⅲ)若 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$**对** $n=1,2,\cdots$**都成立,求** a **的取值范围.**

(文)(本小题满分 14 分)

已知 $b>-1$**,** $c>0$**,函数** $f(x)=x+b$ **的图像与函数** $g(x)=x^2+bx+c$ **的图像相切.**

(Ⅰ)求 b **与** c **的关系式(用** c **表示** b**);**

(Ⅱ)设函数 $F(x)=f(x)g(x)$**在(**$-\quad$**,**$+\quad$**)内有极值点,求** c **的取值范围.**

2004年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)

数　学

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．(理)复数 $(1+\frac{1}{i})^4$ 的值是　　(　　)

A．4i　　B．-4i　　C．4　　D．-4

(文)函数 $y=\lg(1-\frac{1}{x})$ 的定义域是　　(　　)

A．$\{x\mid x<0\}$　　B．$\{x\mid x>1\}$

C．$\{x\mid 0<x<1\}$　　D．$\{x\mid x<0$，或 $x>1\}$

2．(理)如果双曲线 $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{12}=1$ 上一点 P 到右焦点的距离等于 $\sqrt{13}$，那么点 P 到右准线的距离是　　(　　)

A．$\frac{13}{5}$　　B．13　　C．5　　D．$\frac{5}{13}$

(文)设直线 $ax+by+c=0$ 的倾斜角为 α，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 a、b 满足　　(　　)

A．$a+b=1$　　B．$a-b=1$　　C．$a+b=0$　　D．$a-b=0$

3．设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的反函数，若 $[1+f^{-1}(a)][1+f^{-1}(b)]=8$，则 $f(a+b)$ 的值为　　(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．$\log_2 3$

4．(理)把正方形 ABCD 沿对角线 AC 折起，当以 A、B、C、D 四点为顶点的三棱锥体积最大时，直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为　　(　　)

A．90°　　B．60°　　C．45°　　D．30°

(文)同(理)第 2 小题．

5．(理)某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点．公司为了调查产品销售的情况，需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本，记这项调查为①；在丙地区中有 20 个特大型销售点，要从中抽取 7 个调查其销售收入和售后服务等情况，记这项调查为②．

则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是 ( )

A. 分层抽样法,系统抽样法　　B. 分层抽样法,简单随机抽样法

C. 系统抽样法,分层抽样法　　D. 简单随机抽样法,分层抽样法

(文)同(理)第 4 小题.

6. (理)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\leqslant 0,\\ 2, & x>0.\end{cases}$ 若 $f(-4)=f(0)$, $f(-2)=-2$,则关于 x 的方程 $f(x)=x$ 的解的个数为 ( )

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

(文)同(理)第 5 小题.

7. (理)设 $a>0$, $b>0$,则以下不等式中不恒成立的是 ( )

A. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$　　B. $a^3+b^3\geqslant 2ab^2$

C. $a^2+b^2+2\geqslant 2a+2b$　　D. $\sqrt{|a-b|}\geqslant\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(文)若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上都是减函数,则 a 的取值范围是 ( )

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $(-1,0)\cup(0,1]$

C. $(0,1)$　　D. $(0,1]$

8. (理)数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\frac{1}{5}$, $a_n+a_{n+1}=\frac{6}{5^{n+1}}$, $n\in N^*$,则 $\lim\limits_{n\to}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$ ( )

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{4}{25}$

(文)已知向量 $a=(\cos\theta,\sin\theta)$,向量 $b=(\sqrt{3},-1)$,则 $|2a-b|$ 的最大值、最小值分别是 ( )

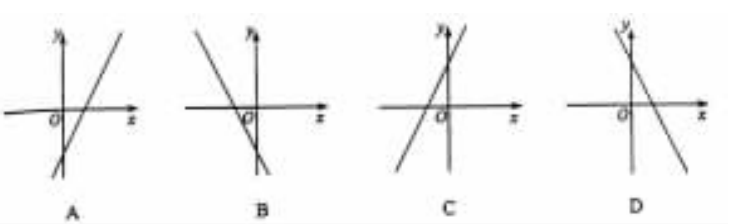
A. $4\sqrt{2}$, 0　　B. 4, $2\sqrt{2}$　　C. 16, 0　　D. 4, 0

9. (理)设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in R, y\in R\}$, $A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$, $B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$,那么点 $P(2,3)\in A\cap(C_UB)$ 的充要条件是 ( )

A. $m>-1$, $n<5$　　B. $m<-1$, $n<5$

C. $m>-1$, $n>5$　　D. $m<-1$, $n>5$

(文)若函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图像的顶点在第四象限,则函数 $f'(x)$ 的图像是 ( )



10. 从正方体的八个顶点中任取三个点为顶点作三角形,其中直角三角形的个数为 (　　)

A.56　　B.52　　C.48　　D.40

11. 农民收入由工资性收入和其他收入两部分构成.2003 年某地区农民人均收入为 3150 元(其中工资性收入为 1800 元,其他收入为 1350 元),预计该地区自 2004 年起的 5 年内,农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长,其他收入每年增加 160 元.根据以上数据,2008 年该地区农民人均收入介于 (　　)

A.4200 元 ~ 4400 元　　B.4400 元 ~ 4600 元

C.4600 元 ~ 4800 元　　D.4800 元 ~ 5000 元

12. (理)设 $f(x)$、$g(x)$ 分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数,当 $x<0$ 时,$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$,且 $g(-3)=0$,则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是 (　　)

A.$(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　B.$(-3,0)\cup(0,3)$

C.$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$　　D.$(-\infty,-3)\cup(0,3)$

(文)设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$,$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$,$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$,那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是 (　　)

A.$m>-1,n<5$　　B.$m<-1,n<5$

C.$m>-1,n>5$　　D.$m<-1,n>5$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

13. (理)已知向量 $a=(\cos\theta,\sin\theta)$,向量 $b=(\sqrt{3},-1)$,则 $|2a-b|$ 的最大值是_____.

(文)过点 $P(-1,2)$ 且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线平行的直线方程是_____.

14. (理)同时抛掷两枚相同的均匀硬币,随机变量 $\xi=1$ 表示结果中有正面向上,$\xi=0$ 表示结果中没有正面向上,则 $E\xi=$_____.

(文)$(x^2+\frac{1}{x})^9$ 的展开式中的常数项为_____.(用数字作答)

15. (理)若 $(x^3+\frac{1}{x\sqrt{x}})^n$ 的展开式中的常数项为 84,则 $n=$_____.

(文)F_1、F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点,在 C 上满足 $PF_1\perp PF_2$ 的点 P 的个数为_____.

16. (理)设 F 是椭圆 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{6}=1$ 的右焦点,且椭圆上至少有 21 个不同的点 $P_i(i=1,2,3,\cdots)$,使 $|FP_1|,|FP_2|,|FP_3|,\cdots$ 组成公差为 d 的等差数

列，则 d 的取值范围为_____.

(文)若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1|$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图像有两个公共点，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题 本大题共 6 小题，共 74 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.(理)(本小题满分 12 分)

已知 $\sin(\frac{\pi}{4}+2\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-2\alpha)=\frac{1}{4}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，求 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1$ 的值.

(文)(本小题满分 12 分)

已知 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=2$，求 $\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$ 的值.

18.(理)(本小题满分 12 分)

甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件，已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{12}$，甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\frac{2}{9}$.

(Ⅰ)分别求甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率；

(Ⅱ)从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，求至少有一个一等品的概率.

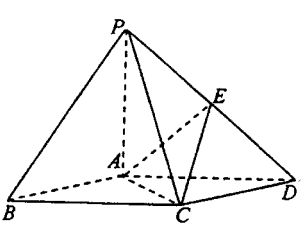
(文)(本小题满分 12 分)

如图，在底面是菱形的四棱锥 P-ABCD 中，$\angle ABC=60°$，$PA=AC=a$，$PB=PD=\sqrt{2}a$，点 E 是 PD 的中点.

(Ⅰ)证明 PA⊥平面 ABCD，

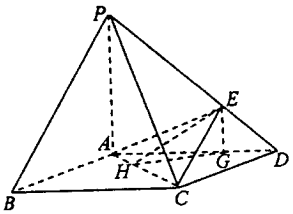
PB∥平面 EAC；

(Ⅱ)求以 AC 为棱，EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的正切值.



19.（理）（本小题满分 12 分）

如图，在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，$PA=AC=a$，$PB=PD=\sqrt{2}a$，点 E 在 PD 上，且 $PE:ED=2:1$.



（Ⅰ）证明 $PA\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求以 AC 为棱，EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的大小；

（Ⅲ）在棱 PC 上是否存在一点 F，使 $BF\parallel$ 平面 AEC？证明你的结论.

（文）同（理）第 18 小题.

20.（理）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2e^{ax}$，其中 $a\leqslant 0$，e 为自然对数的底数.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值.

（文）（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a 且公比 q 不等于 1 的等比数列，S_n 是其前 n 项和，$a_1,2a_7,3a_4$ 成等差数列.

（Ⅰ）证明 $12S_3,S_6,S_{12}-S_6$ 成等比数列；

（Ⅱ）求和 $T_n=a_1+2a_4+3a_7+\cdots+na_{3n-2}$.

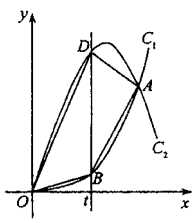
21.（理）（本小题满分 12 分）

如图，过抛物线 $x^2=4y$ 的对称轴上任一点 $P(0,m)(m>0)$ 作直线与抛物线交于 A、B 两点，点 Q 是点 P 关于原点的对称点.

（Ⅰ）设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ，证明 $\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$；

（Ⅱ）设直线 AB 的方程是 $x-2y+12=0$，过 A、B 两点的圆 C 与抛物线在点 A 处有共同的切线，求圆 C 的方程.

（文）（本小题满分 12 分）



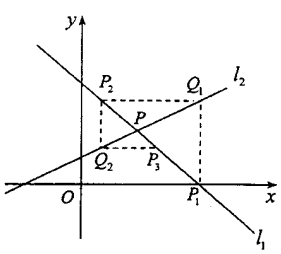
如图，已知曲线 $C_1:y=x^3(x\geqslant 0)$ 与曲线 $C_2:y=-2x^3+3x(x\geqslant 0)$ 交于点 O、A，

直线 $x=t(0<t<1)$ 与曲线 C_1、C_2 分别相交于点 B、D.

（Ⅰ）写出四边形 ABOD 的面积 S 与 t 的函数关系 $S=f(t)$；

（Ⅱ）讨论 $f(t)$ 的单调性，并求 $f(t)$ 的最大值.

22.（本小题满分 14 分）



如图，直线 $l_1:y=kx+1-k(k\neq 0,k\neq\pm\frac{1}{2})$ 与 $l_2:y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 相交于点 P. 直线 l_1 与 x 轴交于点 P_1，过点 P_1 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_1，过点 Q_1 作 y 轴的垂线交直线 l_1 于点 P_2，过点 P_2 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_2，…，这样一直作下去，可得到一系列点 $P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots$. 点 $P_n(n=1,2,\cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{x_n\}$.

（Ⅰ）证明 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，$n\in N^*$；

（Ⅱ）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）比较 $2|PP_n|^2$ 与 $4k^2|PP_1|^2+5$ 的大小.

（文）同（理）第 21 小题.

2004 年普通高等学校招生全国统一考试(广东卷)

数　学

本试卷分选择题和非选择题两部分,满分 150 分。考试用时 120 分钟。

参考公式:

三角函数的积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

锥体的体积公式 $V_{锥体} = \frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示底面积,h 表示高

函数求导公式

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$　$(v \neq 0)$

$f'_x(\varphi(x)) = f'(u)\varphi'(x)$

其中 $u = \varphi(x)$

球体的体积公式 $V_{球体} = \frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

第一部分　选择题(共 60 分)

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知平面向量 $a=(3,1)$,$b=(x,-3)$,且 $a \perp b$,则 $x=$　(　)

A.3　　B.1　　C.-1　　D.-3

2. 已知 $A=\{x||2x+1|>3\}$,$B=\{x|x^2+x-6\leqslant 0\}$,则 $A\cap B=$　(　)

A.$(-3,-2]\cup(1,+\infty)$　　B.$(-3,-2]\cup[1,2)$

C.$[-3,-2)\cup(1,2]$　　D.$(-\infty,-3]\cup(1,2]$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{3x+2}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}, & \text{当 } x>2 \text{ 时,}\\ a, & \text{当 } x\leqslant 2 \text{ 时.}\end{cases}$ 在点 $x=2$ 处连续,则 $a=$

(　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}+\frac{3}{n+1}-\cdots+\frac{2n-1}{n+1}-\frac{2n}{n+1})$ 的值为　(　)

A.-1　　B.0　　C. $\frac{1}{2}$　　D.1

5. 函数 $f(x)=\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\sin^2(x-\frac{\pi}{4})$ 是　(　)

A. 周期为 π 的奇函数　　B. 周期为 π 的偶函数

C. 周期为 2π 的奇函数　　D. 周期为 2π 的偶函数

6. 一台 X 型号自动机床在一小时内不需要工人照看的概率为 0.8000,有四台这种型号的自动机床各自独立工作,则在一小时内至多有 2 台机床需要工人照看的概率是　(　)

A.0.1536　　B.0.1808　　C.0.5632　　D.0.9728

7. 在棱长为 1 的正方体上,分别用过共顶点的三条棱中点的平面截该正方体,则截去 8 个三棱锥后,剩下的凸多面体的体积是　(　)

A. $\frac{6}{7}$　　B. $\frac{5}{6}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$

8. 若双曲线 $2x^2 - y^2 = k(k > 0)$ 的焦点到它相对应的准线的距离是 2，则 $k =$ （　）

A.1　　B.4　　C.6　　D.8

9. 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时，函数 $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x \sin x - \sin^2 x}$ 的最小值是 （　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C.2　　D.4

10. 变量 x、y 满足下列条件：

$$\begin{cases} 2x + y \geqslant 12, \\ 2x + 9y \geqslant 36, \\ 2x + 3y = 24, \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$$

则使得 $z = 3x + 2y$ 的值最小的 (x, y) 是 （　）

A. $(4.5, 3)$　　B. $(3, 6)$　　C. $(9, 2)$　　D. $(6, 4)$

11. 若 $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$，则 （　）

A. $f(0) > f(-1) > f(1)$　　B. $f(0) > f(1) > f(-1)$

C. $f(1) > f(0) > f(-1)$　　D. $f(-1) > f(0) > f(1)$

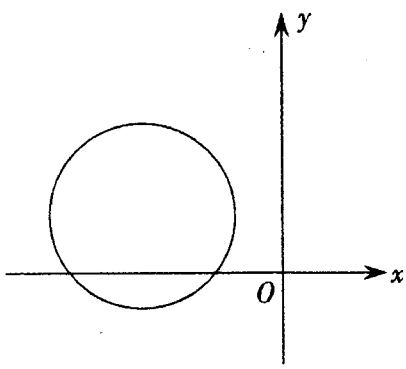
12. 如右下图，定圆半径为 a，圆心为 (b, c)，则直线 $ax + by + c = 0$ 与直线 $x - y + 1 = 0$ 的交点在 （　）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限



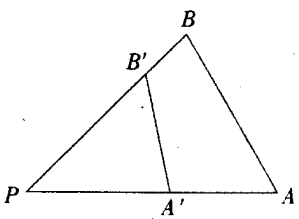
第二部分　非选择题(共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.

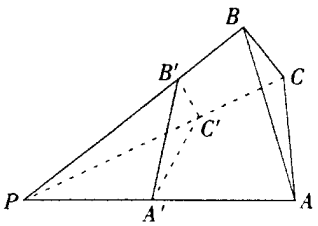
13. 某班委会由 4 名男生与 3 名女生组成.现从中选出 2 人担任正副班长,其中至少有 1 名女生当选的概率是_____(用分数作答).

14. 已知复数 z 与 $(z+2)^2-8i$ 均是纯虚数,则 $z=$_____.

15. 由图(1)有面积关系:$\dfrac{S_{\triangle PA'B'}}{S_{\triangle PAB}}=\dfrac{PA'\cdot PB'}{PA\cdot PB}$,则由图(2)有体积关系:$\dfrac{V_{P-A'B'C'}}{V_{P-ABC}}=$_____.



图(1)



图(2)

16. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x+1}-1)(x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____.

三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

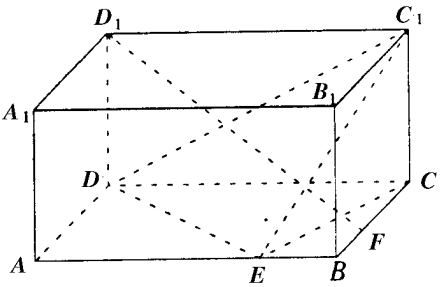
已知 α,β,γ 成公比为 2 的等比数列($\alpha\in[0,2\pi]$),且 $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$ 也成等比数列.求 α、β、γ 的值.

18.（本小题满分 12 分）

如右下图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=4$，$AD=3$，$AA_1=2$. E、F 分别是线段 AB、BC 上的点，且 $EB=FB=1$.

（Ⅰ）求二面角 $C-DE-C_1$ 的正切值；

（Ⅱ）求直线 EC_1 与 FD_1 所成角的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\left|1-\frac{1}{x}\right|$，$x>0$.

（Ⅰ）证明：当 $0<a<b$，且 $f(a)=f(b)$ 时，$ab>1$；

（Ⅱ）点 $P(x_0,y_0)(0<x_0<1)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，求曲线在点 P 处的切线与 x 轴和 y 轴的正向所围成的三角形面积表达式（用 x_0 表示）.

20.（本小题满分 12 分）

某中心接到其正东、正西、正北方向三个观测点的报告：正西、正北两个观测点同时听到了一声巨响，正东观测点听到该巨响的时间比其他两观测点晚 4s. 已知各观测点到该中心的距离都是 1020m. 试确定该巨响发生的位置.（假定当时声音传播的速度为 340m/s；相关各点均在同一平面上）

21.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x) = x - \ln(x + m)$，其中常数 m 为整数.

（Ⅰ）当 m 为何值时，$f(x) \geqslant 0$；

（Ⅱ）定理：若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $g(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$，使 $g(x_0) = 0$.

试用上述定理证明：当整数 $m > 1$ 时，方程 $f(x) = 0$ 在 $[e^{-m} - m, e^{2m} - m]$ 内有两个实根.

22.（本小题满分 14 分）

设直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 相交于 A、B 两点，l 又与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 相交于 C、D 两点，C、D 三等分线段 AB. 求直线 l 的方程.

2004年普通高等学校招生全国统一考试(重庆卷)

数　学

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

第一部分(选择题　共60分)

一、选择题 本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是　(　)

A. $[1,+\infty)$　B. $(\frac{2}{3},+\infty)$　C. $[\frac{2}{3},1]$　D. $(\frac{2}{3},1]$

2. (理)设复数 $z=1+\sqrt{2}i$，则 $z^2-2z=$　(　)

A. -3　B. 3　C. $-3i$　D. $3i$

(文)设 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则 $\frac{f(2)}{f(\frac{1}{2})}=$　(　)

A. 1　B. -1　C. $\frac{3}{5}$　D. $-\frac{3}{5}$

3. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心到直线 $x-y=1$ 的距离是　(　)

A. 2　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. 1　D. $\sqrt{2}$

4. 不等式 $x+\frac{2}{x+1}>2$ 的解集是　(　)

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

5. $\sin163^\circ\sin223^\circ+\sin253^\circ\sin313^\circ=$　(　)

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 若向量 a 与 b 的夹角为 60°，$|b|=4$，$(a+2b)\cdot(a-3b)=-72$，则向量 a 的模是　(　)

A. 2　B. 4　C. 6　D. 12

7. (理)一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是　(　)

A. $a<0$　B. $a>0$　C. $a<-1$　D. $a>1$

(文)已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 成立的　(　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

8. (理)设 P 是 60° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 内一点，$PA\perp$ 平面 α，$PB\perp$ 平面 β，A、

B 分别为垂足，PA = 4，PB = 2，则 AB 的长是 （ ）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{7}$　　D. $4\sqrt{2}$

（文）设有不同直线 m、n 和不同平面 α、β，给出下列四个命题：

① $\left.\begin{matrix}\alpha // \beta \\ m \subset \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow m // \beta$　② $\left.\begin{matrix}m // n \\ m // \beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow n // \beta$　③ $\left.\begin{matrix}m \subset \alpha \\ n \subset \beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow m, n$ 异面　④ $\left.\begin{matrix}\alpha \perp \beta \\ m // \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow m \perp \beta$

其中假命题有 （ ）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

9. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1 > 0$，$a_{2003} + a_{2004} > 0$，$a_{2003} \cdot a_{2004} < 0$，则使前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 n 是 （ ）

A. 4005　　B. 4006　　C. 4007　　D. 4008

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在双曲线的右支上，且 $|PF_1| = 4|PF_2|$，则此双曲线的离心率 e 的最大值为 （ ）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. 2　　D. $\frac{7}{3}$

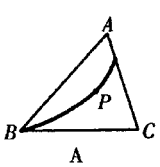
11. （理）某校高三年级举行的一次演讲比赛共有 10 位同学参赛，其中一班有 3 位，二班有 2 位，其他班有 5 位．若采取抽签的方式确定他们的演讲顺序，则一班的 3 位同学恰好被排在一起（指演讲序号相连），而二班的 2 位同学没有被排在一起的概率为 （ ）

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{20}$　　C. $\frac{1}{40}$　　D. $\frac{1}{120}$

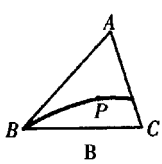
（文）已知盒中装有 3 只螺口与 7 只卡口灯泡，这些灯泡的外形与功率都相同且灯口向下放着．现需要一只卡口灯泡使用，电工师傅每次从中任取一只并不放回，则他直到第 3 次才取得卡口灯泡的概率为 （ ）

A. $\frac{21}{40}$　　B. $\frac{17}{40}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{7}{120}$

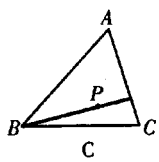
12. （理）若三棱锥 A - BCD 侧面 ABC 内一动点 P 到底面 BCD 的距离与到棱 AB 的距离相等，则动点 P 的轨迹与△ABC 组成的图形可能是 （ ）



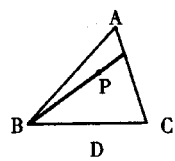
A



B

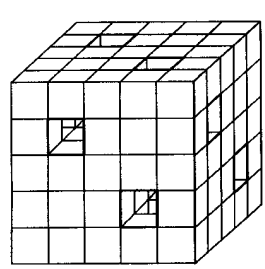


C



D

（文）如图，棱长为 5 的立方体无论从哪一面看，都有两个直通的边长为 1 的正方形孔，则这个有孔立方体表面积（含孔内各面）是 （ ）



A. 258　　B. 234

C. 222　　D. 210

第二部分(非选择题 共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.

13. 若在$(1+ax)^5$展开式中 x^3 的系数为 -80,则 $a=$_____.

14. (理)曲线 $y=2-\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=\frac{1}{4}x^3-2$ 在交点处的切线夹角是_____.(以弧度数作答)

(文)已知$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2(x>0,y>0)$,则 xy 的最小值是_____.

15. (理)如图,P_1 是一块半径为 1 的半圆形纸板,在 P_1 的左下端剪去一个半径为$\frac{1}{2}$的半圆后得图形 P_2,然后依次剪去更小半圆(其直径为前一被剪掉半圆的半径)得图形 $P_3,P_4,\cdots,P_n,\cdots$.记纸板 P_n 的面积为 S_n,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_____.

(文)已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$,则过点 $P(2,4)$的切线方程是_____.

16. (理)对任意实数 k,直线 $y=kx+b$ 与椭圆$\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\theta\\ y=1+4\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta<2\pi)$恒有公共点,则 b 的取值范围是_____.

(文)毛泽东在《送瘟神》中写道:"坐地日行八万里".又知地球的体积大约是火星的 8 倍,则火星的大圆周长约为_____万里.

三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)求函数 $y=\sin^4x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4x$ 的最小正周期和最小值,并写出该函数在$[0,\pi]$上的单调递增区间.

18. (理)(本小题满分 12 分)

设一汽车在前进途中要经过 4 个路口,汽车在每个路口遇到绿灯(允许通行)的概率为$\frac{3}{4}$,遇到红灯(禁止通行)的概率为$\frac{1}{4}$.假定汽车只在遇到红灯或到达目的地时才停止前进,ξ 表示停车时已经通过的路口数,求:

(Ⅰ)ξ 的概率分布列及期望 $E\xi$;

(Ⅱ)停车时最多已通过 3 个路口的概率.

(文)(本小题满分 12 分)

设甲、乙、丙三人每次射击命中目标的概率分别为 0.7、0.6 和 0.5.

(Ⅰ)若三人各向目标射击一次,求至少有一人命中目标的概率及恰有两人命中目标的概率;

(Ⅱ)若甲单独向目标射击三次,求他恰好命中两次的概率.

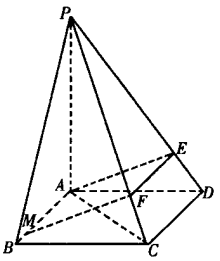
19.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 P - ABCD 的底面是正方形，PA⊥底面 ABCD，AE⊥PD，EF∥CD，AM = EF.

（Ⅰ）证明 MF 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线；

（Ⅱ）（理）若 PA = 3AB，求直线 AC 与平面 EAM 所成角的正弦角.

（Ⅱ）（文）若 PA = 3AB，求二面角 E - AB - D 的平面角的正弦值.



20.（理）（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x) = x(x-1)(x-a)\ (a>1)$.

（Ⅰ）求导数 $f'(x)$，并证明 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1、x_2；

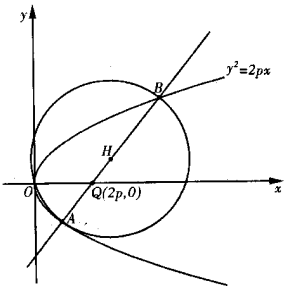
（Ⅱ）若不等式 $f(x_1) + f(x_2) \leqslant 0$ 成立，求 a 的取值范围.

（文）（本小题满分 12 分）

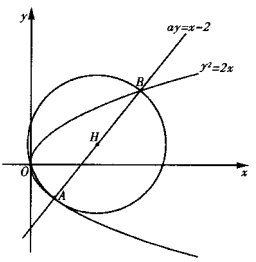
某工厂生产某种产品，已知该产品的月产量 x（吨）与每吨产品的价格 P（元/吨）之间的关系为 $P = 24200 - \frac{1}{5}x^2$，且生产 x 吨的成本为 $R = 50000 + 200x$ 元. 问该厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大？最大利润是多少？（利润 = 收入 - 成本）

21. **(理)(本小题满分 12 分)**

设 $p>0$ 是一常数,过点 $Q(2p,0)$ 的直线与抛物线 $y^2=2px$ 交于相异两点 A、B,以线段 AB 为直径作圆 H(H 为圆心).试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上;并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程.



(文)(本小题满分 12 分)设直线 $ay=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于相异两点 A、B,以线段 A作圆 H(H 为圆心).试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上;并求 a 的值,使圆 H 的面积最小.B 为直径



22. **(理)(本小题满分 14 分)**

设数列 $\{a_n\}$ **满足** $a_1 = 2, a_{a+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ $(n = 1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明 $a_n > \sqrt{2n+1}$ **对一切正整数** n **成立;**

(Ⅱ)令 $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}}(n = 1,2,\cdots)$**,判定** b_n **与** b_{n+1} **的大小,并证明理由.**

(文)(本小题满分 14 分)

设 $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{3}, a_{n+2} = \frac{5}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n$ $(n = 1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)令 $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,2,\cdots)$**,求数列** $\{b_n\}$ **的通项公式;**

(Ⅱ)求数列 $\{na_n\}$ **的前** n **项和** S_n.

2003 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷)

数　　学

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

参考公式

如果事件 A、B 互斥,那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径.

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1.(文)不等式$\sqrt{4x-x^2}<x$的解集是　　(　　)

A.$(0,2)$　　B.$(2,+\infty)$

C.$(2,4]$　　D.$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

(理)$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=$　　(　　)

A.$\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$　　B.$-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

C.$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　D.$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

2.(文)抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程是 $y=2$,则 a 的值为　　(　　)

A.$\dfrac{1}{8}$　　B.$-\dfrac{1}{8}$

C.8　　D.-8

(理)已知 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$,$\cos x=\dfrac{4}{5}$,则 $\tan 2x=$　　(　　)

A.$\dfrac{7}{24}$　　B.$-\dfrac{7}{24}$

C.$\dfrac{24}{7}$　　D.$-\dfrac{24}{7}$

3.(文)同(理)第 1 题

(理)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0.\end{cases}$

若 $f(x_0)>1$，则 x_0 的取值范围是 （ ）

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

4. (文)同(理)第 2 题

(理) O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则 P 的轨迹一定通过△ABC 的 （ ）

A. 外心　　B. 内心

C. 重心　　D. 垂心

5. (文)等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，$a_n=33$，则 n 为 （ ）

A. 48　　B. 49

C. 50　　D. 51

(理)函数 $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$，$x\in(1,+\infty)$ 的反函数为 （ ）

A. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，$x\in(0,+\infty)$　　B. $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$，$x\in(0,+\infty)$

C. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，$x\in(-\infty,0)$　　D. $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$，$x\in(-\infty,0)$

6. (文)双曲线虚轴的一个端点为 M，两个焦点为 F_1、F_2，$\angle F_1MF_2=120°$，则双曲线的离心率为 （ ）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(理)棱长为 a 的正方体中，连结相邻面的中心，以这些线段为棱的八面体的体积为 （ ）

A. $\frac{a^3}{3}$　　B. $\frac{a^3}{4}$

C. $\frac{a^3}{6}$　　D. $\frac{a^3}{12}$

7. (文)同(理)第 3 题

(理)设 $a>0$，$f(x)=ax^2+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $[0,\frac{\pi}{4}]$，则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 （ ）

A. $[0,\frac{1}{a}]$　　B. $[0,\frac{1}{2a}]$

C. $[0,|\frac{b}{2a}|]$　　D. $[0,|\frac{b-1}{2a}|]$

8. (文)同(理)第 4 题

(理)已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，则 $|m-n|=$ （ ）

A. 1　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{8}$

9. (文)同(理)第 5 题

(理)已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7},0)$，直线 $y=x-1$ 与其相交

于 M、N 两点，MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$，则此双曲线的方程是 （ ）

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

10.（文）同（理）第 6 题

（理）已知长方形的四个顶点 A(0,0)，B(2,0)，C(2,1) 和 D(0,1)．一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后，依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4（入射角等于反射角）．设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$．若 $1<x_4<2$，则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （ ）

A. $(\frac{1}{3},1)$　　B. $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　　C. $(\frac{2}{5},\frac{1}{2})$　　D. $(\frac{2}{5},\frac{2}{3})$

11.（文）已知长方形的四个顶点 A(0,0)，B(2,0)，C(2,1) 和 D(0,1)．一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后，依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4（入射角等于反射角）．若 P_4 与 P_0 重合，则 $\tan\theta=$ （ ）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

（理）$\lim\limits_{n\to}\frac{C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_n^2}{n(C_2^1+C_3^1+C_4^1+\cdots+C_n^1)}=$ （ ）

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. 6

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为 （ ）

A. 3π　　B. 4π　　C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. 6π

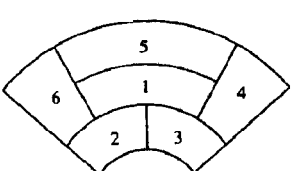
第 II 卷（非选择题，共 90 分）

二、填空题 本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上

13. $(x^2-\frac{1}{2x})^9$ 展开式中 x^9 的系数是_____．

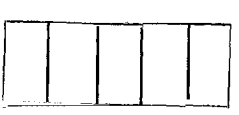
14. 某公司生产三种型号的轿车，产量分别为 1200 辆，6000 辆和 2000 辆．为检验该公司的产品质量，现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验，这三种型号的轿车依次应抽取_____，_____，_____辆．

15.（文）在平面几何里，有勾股定理："设 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 互相垂直，则 $AB^2+AC^2=BC^2$．"拓展到空间，类比平面几何的勾股定理，研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系，可以得出的正确结论是："设三棱锥 A-BCD 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两相互垂直，则_____．"



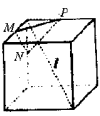
（理）某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分（如图）．现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有_____种．（以数字作答）

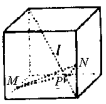
16.（文）将 3 种作物种植在如图的 5 块试验田里，每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物，不同的种植方法共有_____种．（以数字作答）

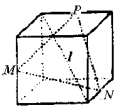


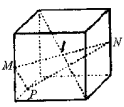
（理）下列五个正方体图形中，l 是正方体的一条对角线，点 M、N、P 分

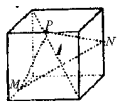
别为其所在棱的中点，能得出 $l \perp$ 面 MNP 的图形的序号是_____.
（写出所有符合要求的图形序号）


①


②


③


④


⑤

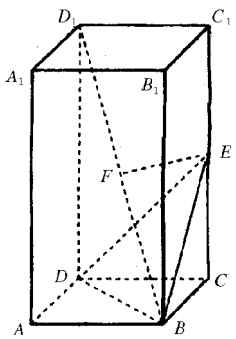
三、解答题 本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17.（本小题满分 12 分）

（文）已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$，$AB = 1$，$AA_1 = 2$，点 E 为 CC_1 中点，点 F 为 BD_1 中点.

（Ⅰ）证明 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线；

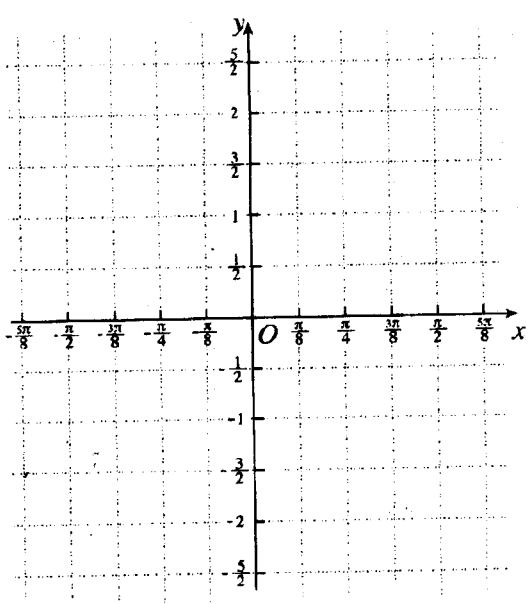
（Ⅱ）求点 D_1 到面 BDE 的距离.



（理）已知函数 $f(x) = 2\sin x(\sin x + \cos x)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值；

（Ⅱ）在给出的直角坐标系中，画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的图像.



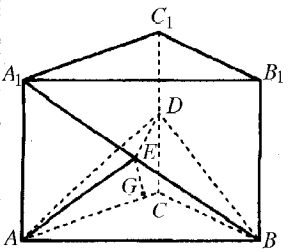
18.（本小题满分 12 分）

（文）已知抛物线 C_1：$y = x^2 + 2x$ 和 C_2：$y = -x^2 + a$. 如果直线 l 同时是 C_1 和 C_2 的切线，称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线，公切线上两个切点之间的线段，称为公切线段.

（Ⅰ）a 取什么值时，C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线？写出此公切线的方程；

（Ⅱ）若 C_1 和 C_2 有两条公切线，证明相应的两条公切线段互相平分.

（理）如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，$\angle ACB = 90°$. 侧棱 $AA_1 = 2$，D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G.



（Ⅰ）求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）；

（Ⅱ）求点 A_1 到平面 AED 的距离.

19.（本小题满分 12 分）

（文）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$（$n \geqslant 2$）.

（Ⅰ）求 a_2，a_3；

（Ⅱ）证明 $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

（理）设 $a > 0$，求函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x + a)$（$x \in (0, +\infty)$）的单调区间.

20.（本小题满分 12 分）

（文）有三种产品，合格率分别是 0.90，0.95 和 0.95，各抽取一件进行检验.

（Ⅰ）求恰有一件不合格的概率；

（Ⅱ）求至少有两件不合格的概率.

（精确到 0.001）

（理）A、B 两个代表队进行乒乓球对抗赛，每队三名队员，A 队队员是 A_1，A_2，A_3，B 队队员是 B_1，B_2，B_3. 按以往多次比赛的统计，对阵队员之间胜负概率如下：

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场，每场胜队得 1 分，负队得 0 分. 设 A 队、B 队最

后所得总分分别为 ξ、η.

(Ⅰ)求 ξ、η 的概率分布；

(Ⅱ)求 $E\xi$，$E\eta$.

21.(本小题满分 12 分)

(文)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 R 上的偶函数，其图像关于点 $M(\frac{3\pi}{4},0)$ 对称，且在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是单调函数.求 φ 和 ω 的值.

(理)已知常数 $a>0$，向量 $c=(0,a)$，$i=(1,0)$.经过原点 O 以 $c+\lambda i$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0,a)$ 以 $i-2\lambda c$ 为方向向量的直线相交于点 P，其中 $\lambda\in R$.试问：是否存在两个定点 E、F，使得 $|PE|+|PF|$ 为定值.若存在，求出 E、F 的坐标；若不存在，说明理由.

22.(本小题满分 14 分)

(文)同(理)第 21 题

(理)设 a_0 为常数，且 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}(n\in N_+)$.

(Ⅰ)证明对任意 $n\geqslant 1$，$a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^n]+(-1)^n\cdot 2^n a_0$；

(Ⅱ)假设对任意 $n\geqslant 1$ 有 $a_n>a_{n-1}$，求 a_n 的取值范围.

17 2003年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

数　学

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题,只要求直接填写结果,每个空格填对得4分,否则一律得零分

1. 函数 $y=\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T=$ _____.

2. 若 $x=\frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x+\alpha)=1$ 的解,其中 $\alpha\in(0,2\pi)$,则 $\alpha=$ _____.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_5=3$,$a_6=-2$,则 $a_4+a_5+\cdots+a_{10}=$ _____.

4. (文)已知定点 $A(0,1)$,点 B 在直线 $x+y=0$ 上运动,当线段 AB 最短时,点 B 的坐标是_____.

(理)在极坐标系中,定点 $A\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,点 B 在直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=0$ 上运动,当线段 AB 最短时,点 B 的极坐标是_____.

5. 在正四棱锥 P-ABCD 中,若侧面与底面所成二面角的大小为 $60°$,则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于_____.(结果用反三角函数值表示)

6. 设集合 $A=\{x\mid|x|<4\}$,$B=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$,则集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$ _____.

7. 在△ABC 中,$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$,则∠ABC = _____.(结果用反三角函数值表示)

8. 若首项为 a_1,公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和,则首项 a_1,公比 q 的一组取值可以是$(a_1,q)=$ _____.

9. 某国际科研合作项目成员由11个美国人、4个法国人和5个中国人组成.现从中随机选出两位作为成果发布人,则此两人不属于同一个国家的概率为_____.(结果用分数表示)

10. 方程 $x^3+\lg x=18$ 的根 $x\approx$ _____.(结果精确到0.1)

11. 已知点 $A\left(0,\frac{2}{n}\right)$,$B\left(0,-\frac{2}{n}\right)$,$C\left(4+\frac{2}{n},0\right)$,其中 n 为正整数.设 S_n 表示△ABC 外接圆的面积,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ _____.

12. 给出问题:F_1、F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$ 的焦点,点 P 在双曲线上.若点

P 到焦点 F_1 的距离等于 9，求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下：双曲线的实轴长为 8，由 $||PF_1| - |PF_2|| = 8$，即 $|9 - |PF_2|| = 8$，得 $|PF_2| = 1$ 或 17.

该学生的解答是否正确？若正确，请将他的解题依据填在下面空格内；若不正确，将正确结果填在下面空格内.

_____

_____.

二、选择题（本大题满分 16 分）本大题共有 4 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得 4 分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分

13. 下列函数中，既为偶函数又在 $(0,\pi)$ 上单调递增的是 （ ）

A. $y = tg|x|$

B. $y = \cos(-x)$

C. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

D. $y = \left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|$

14. 在下列条件中，可判断平面 α 与 β 平行的是 （ ）

A. α、β 都垂直于平面 γ

B. α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等

C. l，m 是 α 内两条直线，且 $l // \beta$，$m // \beta$

D. l，m 是两条异面直线，且 $l // \alpha$，$m // \alpha$，$l // \beta$，$m // \beta$

15. （文）在 P(1,1)、Q(1,2)、M(2,3) 和 $N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 四点中，函数 $y = a^x$ 的图像与其反函数的图像的公共点只可能是点 （ ）

A. P　　B. Q　　C. M　　D. N

（理）设 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数，不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N，那么“$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$”是“M = N”的 （ ）

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

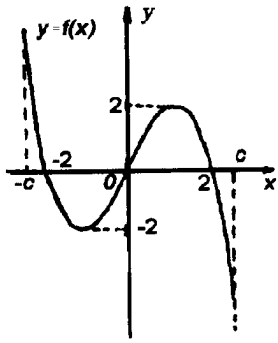
16. f(x) 是定义在区间 [-c, c] 上的奇函数，其图像如图所示，令 g(x) = af(x) + b，则下列关于函数 g(x) 的叙述正确的是 （ ）

(文)A. 若 $a<0$,则函数 $g(x)$的图像关于原点对称

B. 若 $a=-1,-2<b<0$,则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根

C. 若 $a\neq 0,b=2$,则方程 $g(x)=0$ 有两个实根

D. 若 $a\geqslant 1,b<2$,则方程 $g(x)=0$ 有三个实根



(理)A. 若 $a<0$,则函数 $g(x)$的图像关于原点对称

B. 若 $a=1,0<b<2$,则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根

C. 若 $a=-2,b=0$,则函数 $g(x)$的图像关于 y 轴对称

D. 若 $a\neq 0,b=2$,则方程 $g(x)=0$ 有三个实根

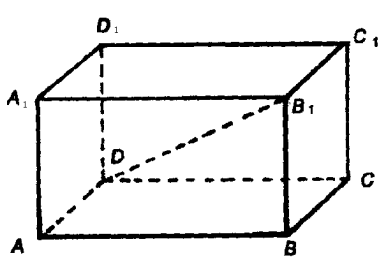
三、解答题(本大题满分 86 分)本大题共有 6 题,解答下列各题必须写出必要的步骤

17.(本题满分 12 分)

已知复数 $z_1=\cos\theta-i,z_2=\sin\theta+i$,求 $|z_1\cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

18.(本题满分 12 分)

已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1A\perp$ 平面 $ABCD$,$AB=4,AD=2$. 若 $B_1D\perp BC$,直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 30°,求平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.



19.（本题满分 14 分）

（文）已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\log_2\frac{1+x}{1-x}$，求函数 $f(x)$ 的定义域，并讨论它的奇偶性和单调性.

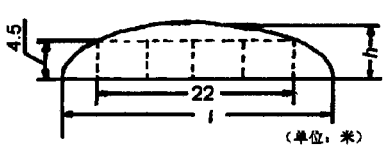
（理）已知数列 $\{a_n\}$（n 为正整数）是首项为 a_1，公比为 q 的等比数列.

（Ⅰ）求和：$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2$，$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论，并加以证明.

20.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第Ⅰ小题满分 6 分，第Ⅱ小题满分 8 分.

如图，某隧道设计为双向四车道，车道总宽 22 米，要求通行车辆限高 4.5 米，隧道全长 2.5 千米，隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.



（Ⅰ）若最大拱高 h 为 6 米，则隧道设计的拱宽 l 是多少？

（Ⅱ）若最大拱高 h 不小于 6 米，则应如何设计拱高 h 和拱宽 l，才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小？

（半个椭圆的面积公式为 $S=\frac{\pi}{4}lh$，柱体体积为：底面积乘以高. 本题结果均精确到 0.1 米）

21. (本题满分 16 分)本题共有 3 个小题,第Ⅰ小题满分 4 分,第Ⅱ小题满分 5 分,第Ⅲ小题满分 7 分.

在以 O 为原点的直角坐标系中,点 A(4,-3)为△OAB 的直角顶点.已知 $|AB|=2|OA|$,且点 B 的纵坐标大于零.

(Ⅰ)求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标;

(Ⅱ)求圆 $x^2-6x+y^2+2y=0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程;

(Ⅲ)是否存在实数 a,使抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点?若不存在,说明理由;若存在,求 a 的取值范围.

22. (文)(本题满分 18 分)本题共有 3 个小题,第Ⅰ小题满分 4 分,第Ⅱ小题满分 8 分,第Ⅲ小题满分 6 分.

已知数列 $\{a_n\}$(n 为正整数)是首项为 a_1,公比为 q 的等比数列.

(Ⅰ)求和:$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2$,$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3$;

(Ⅱ)由(Ⅰ)的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论,并加以证明;

(Ⅲ)设 $q\neq 1$,S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,求:

$$S_1C_n^0-S_2C_n^1+S_3C_n^2-S_4C_n^3+\cdots+(-1)^nS_{n+1}C_n^n.$$

(理)(本题满分 18 分)本题共有 3 个小题,第Ⅰ小题满分 5 分,第Ⅱ小题满分 6 分,第Ⅲ小题满分 7 分.

已知集合 M 是满足下列性质的函数 f(x)的全体:

存在非零常数 T,对任意 $x \in R$,有 $f(x+T) = T f(x)$ 成立.

(Ⅰ)函数 $f(x) = x$ 是否属于集合 M?说明理由;

(Ⅱ)设函数 $f(x) = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图像与 $y = x$ 的图像有公共点,证明:$f(x) = a^x \in M$;

(Ⅲ)若函数 $f(x) = \sin kx \in M$,求实数 k 的取值范围.

符号意义	本试卷所用符号	等同于《实验教材》符号
正切、余切	tg、ctg	tan、cot

18 2002 年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷)

数　学

第Ⅰ卷(选择题共 60 分)

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

正棱锥、圆锥的侧面积公式

$S_{锥侧}=\frac{1}{2}cl$

其中 c 表示底面周长,l 表示斜高或母线长

球的体积公式

$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的

1. **(理)曲线** $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$**,(**$\theta$ **为参数)上的点到两坐标轴的距离之和的最大值是** (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.1　　D. $\sqrt{2}$

(文)若直线 $(1+a)x+y+1=0$ **与圆** $x^2+y^2-2x=0$ **相切.则 a 的值为** (　　)

A. 1,-1　　B. 2,-2　　C.1　　D. -1

2. **(理)复数** $(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ **的值是** (　　)

A. -i　　B. i　　C. -1　　D.1

(文)已知 m、n 为异面直线.$m\subset$**平面** α**,**$n\subset$**平面** β**,**$\alpha\cap\beta=l$**,则 l** (　　)

A. **与 m,n 都相交**　　B. **与 m、n 中至少一条相交**

C. **与 m、n 都不相交**　　D. **至多与 m、n 中的一条相交**

3. **(理)已知 m、n 为异面直线,**$m\subset$**平面** α**,**$n\subset$**平面** β**,**$\alpha\cap\beta=l$**,则 l** (　　)

A. **与 m、n 都相交**　　B. **与 m、n 中至少一条相交**

C. **与 m、n 都不相交**　　D. **至多与 m、n 中的一条相交**

(文)不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ **的解集是** (　　)

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|x<0$ **且** $x\neq-1\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. $\{x|x<1$ **且** $x\neq-1\}$

(理同文 3)

4. **(文)函数** $y=a^x$ **在**$[0,1]$**上的最大值与最小值的和为 3,则 a 的值为** (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. 4　　D. $\frac{1}{4}$

(理同文 3)

5. **在$(0,2\pi)$内,使** $\sin x > \cos x$ **成立的** x **取值范围为**　　(　　)

A. $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$　　B. $(\frac{\pi}{4},\pi)$

C. $(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$　　D. $(\frac{\pi}{4},\pi)\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$

6. **设集合** $M=\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in Z\}$, $N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in Z\}$ **则**

(　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

7. **(理)正六棱柱** $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ **的底面边长为** 1**,侧棱长为**$\sqrt{2}$**,则这个棱柱的侧面对角线** E_1D **与** BC_1 **所成的角是**　　(　　)

A. 90°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

(文)椭圆 $5x^2+ky^2=5$ **的一个集点是**$(0,2)$**,那么** $k=$　　(　　)

A. -1　　B. 1　　C. $\sqrt{5}$　　D. $-\sqrt{5}$

8. **(理)函数** $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$ **是单调函数的充要条件是(　　)**

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$　　C. $b>0$　　D. $b<0$

(文同理 7)

9. **(理)已知** $0<x<y<a<1$**,则有**　　(　　)

A. $\log_a(xy)<0$　　B. $0<\log_a(xy)<1$

C. $1<\log_a(xy)<2$　　D. $\log_a(xy)>2$

(文)函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$ **是单调函数的充要条件是(　　)**

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$　　C. $b>0$　　D. $b<0$

10. **(理)平面直角坐标系中,**O **为坐标原点,已知两点** $A(3,1)$, $B(-1,3)$**,若点** C **满足**$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$**,其中** α、$\beta\in R$**,且** $\alpha-\beta=1$**,则点** C **的轨迹方程为**　　(　　)

A. $3x+2y-11=0$　　B. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

C. $2x-y=0$　　D. $x+2y-5=0$

(文同理 9)

11. **从正方体的** 6 **个面中选取** 3 **个面,其中有** 2 **个面不相邻的选法共有**

(　　)

A. 8 **种**　　B. 12 **种**　　C. 16 **种**　　D. 20 **种**

12. **(理)据** 2002 **年** 3 **月** 5 **日九届人大五次会议《政府工作报告》:"**2001 **年国内生产总值达到** 95 933 **亿元,比上年增长** 7.3%. **"如果"十·五"期间(**2001 **年~**2005 **年)每年的国内生产总值都按此年增长率增长,那么到"十·五"末我国国内年生产总值约为**　　(　　)

A. 115 000 **亿元**　　B. 120 000 **亿元**　　C. 127 000 **亿元**　　D. 135 000 **亿元**

(文)平面直角坐标系中,O **为坐标原点,已知两点** $A(3,1)$, $B(-1,3)$**,若点** C **满足**$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$**,其中** α、$\beta\in R$**,且** $\alpha+\beta=1$**,则点** C **的轨迹方程为**　　(　　)

A. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$　　B. $3x+2y-11=0$

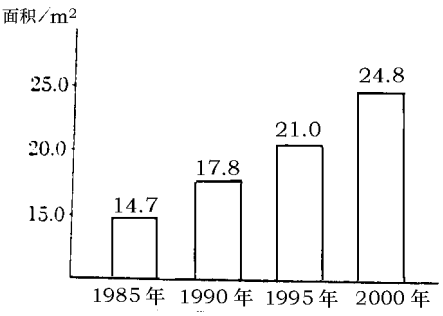
C. $2x-y=0$　　D. $x+2y-5=0$

第Ⅱ卷(非选择题共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上

13. 函数 $y=\frac{2x}{1+x}(x\in(-1,+\infty))$图像与其反函数图像的交点坐标为_____.

(文)据新华社 2002 年 3 月 12 日电,1985 年到 2000 年间,我国农村人均居住面积如图所示,其中,从_____年到_____年的五年间增长最快.



14. 椭圆 $5x^2-ky^2=5$ 的一个焦点是(0,2),那么 $k=$_____.

(文)已知 $\sin2\alpha=-\sin\alpha(\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi))$,则 $\cot\alpha=$_____.

15. 直线 $x=0,y=0,x=2$ 与曲线 $y=(\sqrt{2})^x$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积等于_____.

(文)甲、乙两种冬小麦试验品种连续 5 年的平均单位面积产量如下(单位:t/hm²):

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

其中产量比较稳定的小麦品种是_____.

16. (理)已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$,那么 $f(1)+f(2)+f(\frac{1}{2})+f(3)+f(\frac{1}{3})+f(4)+f(\frac{1}{4})=$_____.

(文)设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,下列函数

①$y=-|f(x)|$;　②$y=xf(x^2)$;

③$y=-f(-x)$;　④$y=f(x)-f(-x)$中必为奇函数的有_____.(要求填写正确答案的序号)

17. (本小题满分 12 分)

(理)已知 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5},\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2}$.求 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})$的值.

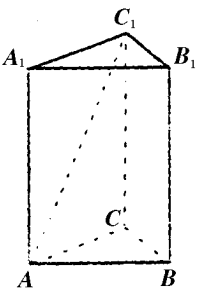
(文)(本小题满分 12 分)

在等比数列 $\{a_n\}$中,已知 $a_6-a_4=24,a_3\cdot a_5=64$.求 $\{a_n\}$前 8 项的和 S_8.

注意 考生在(18 甲)、(18 乙)两题中选一题作答,如果两题都答,只以(18 甲)计分

18. (甲)(本小题满分 12 分)

(理)如图,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a,侧棱长为$\sqrt{2}a$.

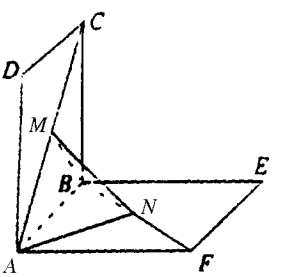


(Ⅰ)建立适当的坐标系,并写出点 A、B、A_1、C_1 的坐标:

(Ⅱ)求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

(乙)(本小题满分 12 分)

(理)如图,正方形 ABCD、ABEF 的边长都是 1,而且平面 ABCD、ABEF 互相垂直.点 M 在 AC 上移动.点 N 在 BF 上移动,若 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$.



(Ⅰ)求 MN 的长;

(Ⅱ)当 a 为何值时,MN 的长最小;

(Ⅲ)当 MN 长最小时,求面 MNA 与面 MNB 所成的二面角 α 的大小.

(文)已知 $\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$,$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.求 $\sin\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

(理)某单位 6 个员工借助互联网开展工作,每个员工上网的概率都是 0.5(相互独立).

(Ⅰ)求至少 3 人同时上网的概率;

(Ⅱ)至少几人同时上网的概率小于 0.3?

（文同理 18）

20.（本小题满分 12 分）

（理）已知 $a>0$，函数 $f(x)=\frac{1-ax}{x}$，$x\in(0,+\infty)$．设 $0<x_1<\frac{2}{a}$，记曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l．

（Ⅰ）求 l 的方程；

（Ⅱ）设 l 与 x 轴交点为 $(x_2,0)$．证明：

（文）某单位 6 个员工借助互联网开展工作，每个员工上网的概率都是 0.5（相互独立）．

（Ⅰ）求至少 3 人同时上网的概率；

（Ⅱ）至少几人同时上网的概率小于 0.3？

21.（本小题满分 12 分）

（理）已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列．

（Ⅰ）点 P 的轨迹是什么曲线？

（Ⅱ）若点 P 坐标为 (x_0,y_0)，记 θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角，求 $\tan\theta$．

（文）已知 $a>0$，函数 $f(x)=x^3-a$，$x\in[0,+\infty)$．设 $x_1>0$，记曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l．

（Ⅰ）求 l 的方程；

（Ⅱ）设 l 与 x 轴交点为 $(x_2,0)$．证明：

（ⅰ）$x_2\geqslant a^{\frac{1}{3}}$；

（ⅱ）若 $x_1>a^{\frac{1}{3}}$，则 $a^{\frac{1}{3}}<x_2<x_1$．

22.（本小题满分 14 分）

（理）已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的数列，满足 $a_1=0$，$a_2=3$，$a_{n+1}a_n=(a_{n-1}+2)(a_{n-2}+2)$，$n=3,4,5,\cdots$.

（Ⅰ）求 a_3；

（Ⅱ）证明 $a_n=a_{n-2}+2$，$n=3,4,5,\cdots$；

（Ⅲ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 S_n.

（文）已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列.

（Ⅰ）点 P 的轨迹是什么曲线？

（Ⅱ）若点 P 坐标为 (x_0,y_0)，θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角，求 $\tan\theta$.

19 2002年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

数　学

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题,只要求直接填写结果,每个空格填对得4分,否则一律得零分。

1. 若 $z\in C$,且$(3+z)i=1$(i为虚数单位),则 $z=$_____。

2. 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 120°,且 $|\vec{a}|=2$,$|\vec{b}|=5$,则$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=$_____。

3. 方程 $\log_3(1-2\cdot3^x)=2x+1$ 的解 $x=$_____。

4. 若正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$ cm,体积为 4cm^3,则它的侧面与底面所成的二面角的大小是_____。

5. 在二项式$(1+3x)^n$和$(2x+5)^n$的展开式中,各项系数之和分别记为 a_n、b_n,n是正整数,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-2b_n}{3a_n-4b_n}=$_____。

6. (文)已知圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 和圆外一点 $P(-2,0)$,过点 P 作圆的切线,则两条切线夹角的正切值是_____。

(理)已知圆$(x+1)^2+y^2=1$和圆外一点 $P(0,2)$,过点 P 作圆的切线,则两条切线夹角的正切值是_____。

7. 在某次花样滑冰比赛中,发生裁判受贿事件,竞赛委员会决定将裁判由原来的9名增至14名,但只任取其中7名裁判的评分作为有效分。若14名裁判中有2人受贿,则有效分中没有受贿裁判的评分的概率是_____。(结果用数值表示)

8. (文)抛物线$(y-1)^2=4(x+1)$的焦点坐标是_____。

(理)曲线$\begin{cases}x=t^2-1\\y=2t+1\end{cases}$(t为参数)的焦点坐标是_____。

9. (文)某工程由下列工序组成,则工程总时数为_____天。

工序	a	b	c	d	e	f
紧前工序	—	—	a、b	c	c	d、e
工时数(天)	2	3	2	5	4	1

(理)若 A、B 两点的极坐标为 $A(4,\dfrac{\pi}{3})$、$B(6,0)$,则 AB 中点的极坐标是_____。(极角用反三角函数值表示)

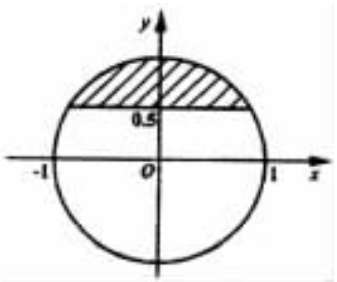
10. 设函数 $f(x)=\sin2x$,若 $f(x+t)$是偶函数,则 t 的一个可能值是_____。

11. 若数列 $\{a_n\}$中,$a_1=3$,且 $a_{n+1}=a_n^2$(n是正整数),则数列的通项 $a_n=$_____。

12. 已知函数 $y=f(x)$(定义域为 D,值域为 A)有反函数 $y=f^{-1}(x)$,则方程$f(x)=0$有解 $x=a$,且 $f(x)>x$ $(x\in D)$的充要条件是 $y=f^{-1}(x)$满足_____。

二、选择题(本大题满分 16 分)本大题共有 4 题,每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论,其中有且只有一个结论是正确的,必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内,选对得 4 分,不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内),一律得零分。

13. **如图,与复平面中的阴影部分(含边界)对应的复数集合是** (　　)



A. $\left\{z \middle| |z|=1, \mathrm{Re}z \geq \frac{1}{2}, z \in C\right\}$

B. $\left\{z \middle| |z| \leq 1, \mathrm{Re}z \geq \frac{1}{2}, z \in C\right\}$

C. $\left\{z \middle| |z|=1, \mathrm{Im}z \geq \frac{1}{2}, z \in C\right\}$

D. $\left\{z \middle| |z| \leq 1, \mathrm{Im}z \geq \frac{1}{2}, z \in C\right\}$

(理) A. $\left\{z \middle| |z|=1, \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{5}{6}\pi, z \in C\right\}$

B. $\left\{z \middle| |z| \leq 1, \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{5}{6}\pi, z \in C\right\}$

C. $\left\{z \middle| |z|=1, \mathrm{Im}z \geq \frac{1}{2}, z \in C\right\}$

D. $\left\{z \middle| |z| \leq 1, \mathrm{Im}z \geq \frac{1}{2}, z \in C\right\}$

14. **已知直线 l、m,平面 α、β,且 $l \perp \alpha$,$m \subset \beta$。给出下列四个命题:**

(1)若 $\alpha // \beta$,则 $l \perp m$　(2)若 $l \perp m$,则 $\alpha // \beta$

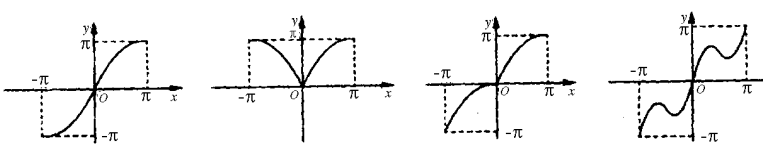
(3)若 $\alpha \perp \beta$,则 $l // m$　(4)若 $l // m$,则 $\alpha \perp \beta$

其中正确命题的个数是 (　　)

A.1 个　　B.2 个

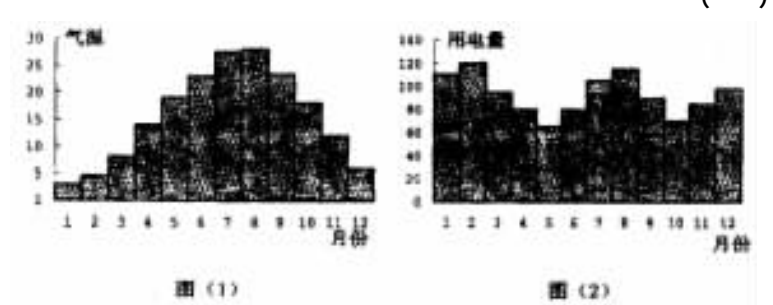
C.3 个　　D.4 个

15. **函数 $y = x + \sin|x|$,$x \in [-\pi, \pi]$ 的大致图象是** (　　)



A　　B　　C　　D

16. **一般地,家庭用电量(千瓦时)与气温(　)有一定的关系。图(1)表示某年 12 个月中每月的平均气温,图(2)表示某家庭在这年 12 个月中每月的用电量。根据这些信息,以下关于该家庭用电量与气温间关系的叙述中,正确的是** (　　)



图(1)　　图(2)

A. **气温最高时,用电量最多**

B. **气温最低时,用电量最少**

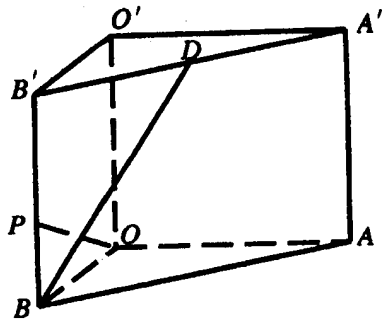
C. **当气温大于某一值时,用电量随气温增高而增加**

D. **当气温小于某一值时,用电量随气温降低而增加**

三、解答题(本大题满分 86 分)本大题共有 6 题,解答下列各题必须写出必要的步骤。

17. (本题满分 12 分)

如图,在直三棱柱 ABO - A'B'O' 中,OO' = 4,OA = 4,OB = 3,∠AOB = 90°。D 是线段 A'B' 的中点,P 是侧棱 BB' 上的一点。若 OP ⊥ BD,求 OP 与底面 AOB 所成角的大小。(结果用反三角函数值表示)



18. (本题满分 12 分)

已知点 A($-\sqrt{3}$,0)和 B($\sqrt{3}$,0),动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2,点 C 的轨迹与直线 $y = x - 2$ 交于 D、E 两点。求线段 DE 的长。

19. (本题满分 14 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 6 分,第 2 小题满分 8 分。

(文)已知函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 2$,$x \in [-5,5]$。

(1)当 $a = -1$ 时,求函数 $f(x)$的最大值与最小值;

(2)求实数 a 的取值范围,使 $y = f(x)$在区间$[-5,5]$上是单调函数。

(理)已知函数 $f(x) = x^2 + 2x \cdot \operatorname{tg}\theta - 1$,$x \in [-1,\sqrt{3}]$,其中 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。

(1)当 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 时,求函数 $f(x)$的最大值与最小值;

(2)求 θ 的取值范围,使 $y = f(x)$的区间$[-1,\sqrt{3}]$上是单调函数。

20.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 10 分。

某商场在促销期间规定：商场内所有商品按标价的 80% 出售；同时，当顾客在该商场内消费满一定金额后，按如下方案获得相应金额的奖券：

消费金额（元）的范围	[200，400）	[400，500）	[500，700）	[700，900）	…
获得奖券的金额（元）	30	60	100	130	…

根据上述促销方法，顾客在该商场购物可以获得双重优惠。例如，购买标价为 400 元的商品，则消费金额为 320 元，获得的优惠额为：$400 \times 0.2 + 30 = 110$（元）。设购买商品得到的优惠率 $= \frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$。试问：

（1）若购买一件标价为 1000 元的商品，顾客得到的优惠率是多少？

（2）对于标价在 [500，800]（元）内的商品，顾客购买标价为多少元的商品，可得到不小于 $\frac{1}{3}$ 的优惠率？

21. **(本题满分 16 分)本题共有 3 个小题,第 1 小题满分 4 分,第 2 小题满分 6 分,第 3 小题满分 6 分。**

已知函数 $f(x) = a \cdot b^x$ **的图象过点** $A(4, \frac{1}{4})$ **和** $B(5,1)$**。**

(1)求函数 $f(x)$**的解析式;**

(2)记 $a_n = \log_2 f(n)$**,**n **是正整数,**S_n **是数列** $\{a_n\}$ **的前** n **项和,解关于** n **的不等式** $a_n S_n \leq 0$**;**

(3)(文)对于(2)中的 a_n **与** S_n**,整数** 96 **是否为数列** $\{a_n S_n\}$ **中的项?若是,则求出相应的项数;若不是,则说明理由。**

(理)对于(2)中的 a_n **与** S_n**,整数** 10^4 **是否为数列** $\{a_n S_n\}$ **中的项?若是,则求出相应的项数;若不是,则说明理由。**

22. (本题满分 18 分)本题共有 3 个小题,第 1 小题满分 4 分,第 2 小题满分 6 分,第 3 小题满分 8 分。

规定 $C_x^m = \frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$,其中 $x \in R$,m 是正整数,且 $C_x^0 = 1$,这是组合数 C_n^m(n、m 是正整数,且 $m \leq n$)的一种推广。

(1)求 C_{-15}^3 的值;

(2)(文)设 $x > 0$。当 x 为何值时,$\frac{C_x^3}{(C_x^1)^2}$ 取得最小值?

(理)组合数的两个性质:

① $C_n^m = C_n^{n-m}$ ② $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$

是否都能推广到 C_x^m($x \in R$,m 是正整数)的情形?若能推广,则写出推广的形式并给出证明;若不能,则说明理由。

(3)(文)同(理)(2)

(理)已知组合数 C_n^m 是正整数,证明:当 $x \in Z$,m 是正整数时,$C_x^m \in Z$。

20 2001 年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷)

数　　学(文理合卷)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.共 150 分.考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$

正棱锥、圆锥的侧面积公式

$S_{锥侧}=\frac{1}{2}cl$

其中 c 表示底面周长,l 表示斜高或母线长

棱锥、圆锥的体积公式

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示底面积,h 表示高

一、选择题 本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (理)函数 $y=3\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$ 的周期、振幅依次是 (　　)

A. 4π、3　　B. 4π、-3　　C. π、3　　D. π、-3

(文)设 $A=\{x\mid x^2-x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+x=0\}$,则 $A\cap B$ 等于 (　　)

A. 0　　B. $\{0\}$　　C. $\varnothing$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. 若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $S_n=n^2$,则 $\{a_n\}$ 是 (　　)

A. 等比数列,但不是等差数列　　B. 等差数列,但不是等比数列

C. 等差数列,而且也是等比数列　　D. 既非等比数列又非等差数列

3. 过点 A(1,-1)、B(-1,1)且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是 (　　)

A. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$　　B. $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　D. $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

4. 若定义在区间(-1,0)内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$,则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(0,\frac{1}{2}]$　　C. $(\frac{1}{2},+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

5. (理)若向量 $a=(1,1)$,$b=(1,-1)$,$c=(-1,2)$,则 $c=$ (　　)

A. $-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b$　　B. $\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b$　　C. $\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b$　　D. $-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b$

(文)若向量 $a=(3,2)$,$b=(0,-1)$,则向量 $2b-a$ 的坐标是 (　　)

A. $(3,-4)$　　B. $(-3,4)$　　C. $(3,4)$　　D. $(-3,-4)$

6. 设 A、B 是 x 轴上的两点,点 P 的横坐标为 2 且 $|PA|=|PB|$.若直线 PA 的方程为 $x-y+1=0$,则直线 PB 的方程是 (　　)

A. $x+y-5=0$　　B. $2x-y-1=0$

C. $2y - x - 4 = 0$　　D. $2x + y - 7 = 0$

7. 若 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha + \cos\alpha = a$，$\sin\beta + \cos\beta = b$，则　（　）

A. $a < b$　　B. $a > b$　　C. $ab < 1$　　D. $ab > 2$

8. (理)函数 $y = 1 + 3x - x^3$ 有　（　）

A. 极小值 -1，极大值 1　　B. 极小值 -2，极大值 3

C. 极小值 -2，极大值 2　　D. 极小值 -1，极大值 3

(文)若椭圆经过原点，且焦点为 $F_1(1,0)$，$F_2(3,0)$，则其离心率为（　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

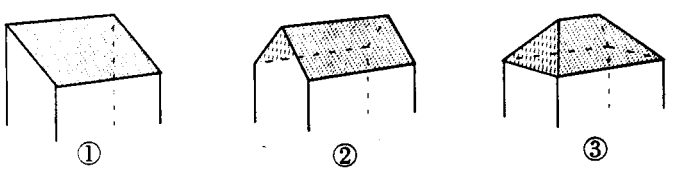
9. 某赛季足球比赛的计分规则是：胜一场，得 3 分；平一场，得 1 分；负一场，得 0 分．一球队打完 15 场，积 33 分．若不考虑顺序，该队胜、负、平的情况共有　（　）

A. 3 种　　B. 4 种　　C. 5 种　　D. 6 种

10. 设坐标原点为 O，抛物线 $y^2 = 2x$ 与过焦点的直线交于 A、B 两点，则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$　（　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. 3　　D. -3

11. 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法：①单向倾斜；②双向倾斜；③四向倾斜．记三种盖法屋顶面积分别为 P_1、P_2、P_3．

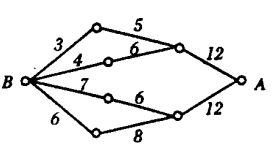


若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α，则　（　）

A. $P_3 > P_2 > P_1$　　B. $P_3 > P_2 = P_1$

C. $P_3 = P_2 > P_1$　　D. $P_3 = P_2 = P_1$

12. 如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联，连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量．现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递．则单位时间内传递的最大信息量是　（　）



A. 26　　B. 24

C. 20　　D. 19

第Ⅱ卷(非选择题，共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上

13. (理)若复数 $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$，则 $\arg\frac{1}{z}$ 等于_____．

(文)定义在 R 上的函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ 的最大值是_____．

14. (理)一个袋子里装有大小相同的 3 个红球和 2 个黄球．从中同时取出 2 个，则其中含红球个数的数学期望是_____．(用数字作答)

(文)一个工厂有若干个车间，今采用分层抽样方法从全厂某天的 2048 件产品中抽取一个容量为 128 的样本进行质量检查．若一车间这一天生产 256 件产品，则从该车间抽取的产品件数为_____．

15. 在空间中，

①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线.

②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中，逆命题为真命题的是_____.（把符合要求的命题序号都填上）

16. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列，则 q = _____.

三、解答题 本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17. （本小题满分 12 分）

（理）解关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x-a^2}<0\ (a\in R)$.

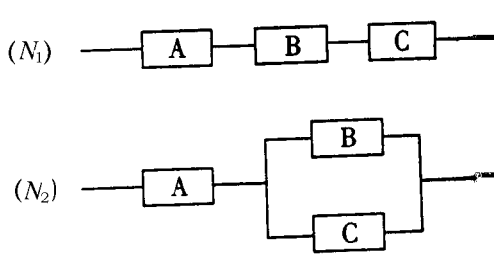
（文）已知等差数列前三项为 a，4，3a，前 n 项的和为 S_n，$S_k=2550$.

（Ⅰ）求 a 及 k 的值；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}\right)$.

18. （本小题满分 12 分）

（理）如图，用 A、B、C 三类不同的元件连接成两个系统 N_1、N_2. 当元件 A、B、C 都正常工作时，系统 N_1 正常工作；当元件 A 正常工作且元件 B、C 至少有一个正常工作时，系统 N_2 正常工作. 已知元件 A、B、C 正常工作的概率依次为 0.80，0.90，0.90. 分别求系统 N_1、N_2 正常工作的概率 P_1、P_2.



(文)设计一幅宣传画,要求画面面积为 4840 cm^2,画面的宽与高的比为 λ ($\lambda < 1$),画面的上下各有 8 cm 空白,左、右各有 5 cm 空白.怎样确定画面的高与宽尺寸,能使宣传画所用纸张的面积最小?

19.(本小题满分 12 分)

(理)设 $a > 0$,$f(x) = \frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x}$ 是 R 上的偶函数.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

文同理 18

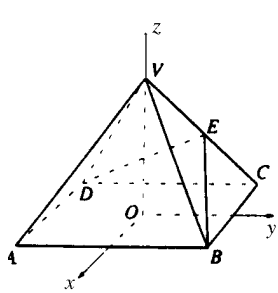
注意 考生在(20 甲)、(20 乙)两题中选一题作答,如果两题都答,只以(20 甲)计分

20.(甲)(本小题满分 12 分)

如图,以正四棱锥 V - ABCD 底面中心 O 为坐标原点建立空间直角坐标系 O - xyz,其中 Ox // BC,Oy // AB. E 为 VC 中点,正四棱锥底面边长为 2a,高为 h.

(Ⅰ)求 $\cos\langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE} \rangle$;

(Ⅱ)记面 BCV 为 α,面 DCV 为 β,若 $\angle BED$ 是二面角 α - VC - β 的平面角,求 $\angle BED$.

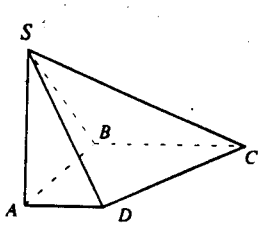


(乙)(本小题满分 12 分)

如图,在底面是直角梯形的四棱锥 S - ABCD 中,$\angle ABC = 90°$,SA⊥面 ABCD,$SA = AB = BC = 1$,$AD = \frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求四棱锥 S - ABCD 的体积;

(Ⅱ)求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.



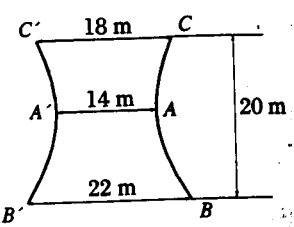
21. (本小题满分 12 分)

(理)某电厂冷却塔的外形是如图所示,双曲线的一部分绕其中轴(即双曲线的虚轴)旋转所成的曲面,其中 A、A' 是双曲线的顶点,C、C' 是冷却塔上口直径的两个端点,B、B' 是下底直径的两个端点,已知 AA' = 14 m,CC' = 18 m,BB' = 22 m,塔高 20 m.

(Ⅰ)建立坐标系并写出该双曲线方程;

(Ⅱ)求冷却塔的容积(精确到 10 m^3,塔壁厚度不计,π 取 3.14).

(文)已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 2bx$ 在点 $x = 1$ 处有极小值 - 1.试确定 a、b 的值.并求出 f(x)的单调区间.



22.（本小题满分 14 分）

设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，曲线 $x^2\sin\theta + y^2\cos\theta = 1$ 和 $x^2\cos\theta - y^2\sin\theta = 1$ 有 4 个不同的交点.

（Ⅰ）求 θ 的取值范围；

（Ⅱ）证明这 4 个交点共圆，并求圆半径的取值范围.

2000 年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷)

数　学

第Ⅰ卷(选择题共 60 分)

参考公式：

两个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

正棱锥、圆锥的侧面积公式

$$S_{锥侧}=\frac{1}{2}cl$$

其中 c 表示底面周长，l 表示斜高或母线长

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

其中 P 是事件 A 在一次试验中发生的概率

棱锥、圆锥的体积公式

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$$

其中 S 表示底面积，h 表示高

一、选择题 本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. **(理)设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid x\in R, y\in R\}$ 映射 $f: A\to B$ 把集合 A 中的元素 $(x+y, x-y)$ 映射成集合 B 中的元素 $(x+y, x-y)$，则在映射 f 下，象 $(2,1)$ 的原象是** (　　)

A. $(3,1)$　　B. $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　D. $(1,3)$

(文)设集合 $A=\{x\mid x\in Z$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in Z$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是 (　　)

A. 11　　B. 10　　C. 16　　D. 15

2. **在复平面内，把复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$，所得向量对应的复数是** (　　)

A. $2\sqrt{3}$　　B. $-2\sqrt{3}i$　　C. $\sqrt{3}-3i$　　D. $3+\sqrt{3}i$

3. **一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，这个长方体对角线的长是** (　　)

A. $2\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. 6

4. **(理)设 a、b、c 是任意的非零平面向量，且相互不共线，则**

①$(a\cdot b)c-(c\cdot a)b=0$；　②$|a|-|b|<|a-b|$；　③$(b\cdot c)a-(c\cdot a)b$ **不与 c 垂直；**　④$(3a+2b)\cdot(3a-2b)=9|a|^2-4|b|^2$ **中是真命题的有** (　　)

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ②④

(文)已知 $\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是 (　　)

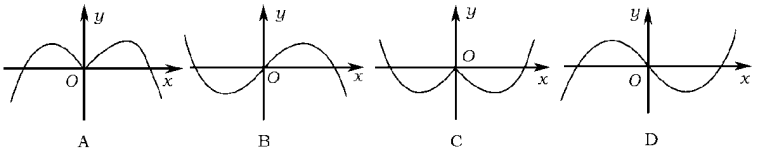
A. **若 α、β 是第一象限角，则** $\cos\alpha>\cos\beta$

B. **若 α、β 是第二象限角，则** $\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}\beta$

C. **若 α、β 是第三象限角，则** $\cos\alpha>\cos\beta$

D. **若 α、β 是第四象限角，则** $\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}\beta$

5. **函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是** (　　)



A　　B　　C　　D

6.《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过800元的部分不必纳税，超过800元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算：　　（　）

全月应纳税所得额	税率
不超过500元的部分	5%
超过500元至2000元的部分	10%
超过2000元至5000元的部分	15%
……	…

某人一月份应交纳此项税款26.78元，则他的当月工资、薪金所得介于

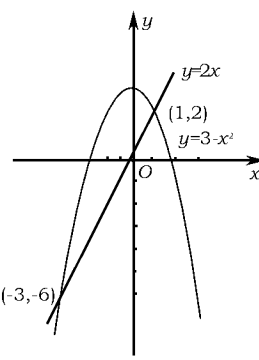
A.800～900元　　B.900～1200元　C.1200～1500元　D.1500～2800元

7. 若 $a > b > 1$，$P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$，$Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$，$R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则

（　）

A. $R < P < Q$　　B. $P < Q < R$　　C. $Q < P < R$　　D. $P < R < Q$

8.（理）右图中阴影部分的面积是　　（　）



A. $2\sqrt{3}$　　B. $9 - 2\sqrt{3}$

C. $\frac{32}{3}$　　C. $\frac{35}{3}$

（文）已知两条直线 $l_1: y = x$，$l_2: ax - y = 0$，其中 a 为实数. 当这两条直线的夹角在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 内变动时，a 的取值范围是　　（　）

A. $(0,1)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \cup (1, \sqrt{3})$　D. $(1, \sqrt{3})$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是　　（　）

A. $\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　B. $\frac{1+4\pi}{4\pi}$　　C. $\frac{1+2\pi}{\pi}$　　D. $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

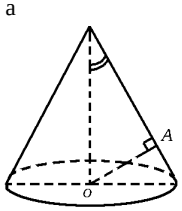
10. 过原点的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 相切，若切点在第三象限，则该直线的方程是　　（　）

A. $y = \sqrt{3}x$　　B. $y = -\sqrt{3}x$　　C. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$　　D. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 等于　　（　）

A. $2a$　　B. $\frac{1}{2a}$　　C. $4a$　　D. $\frac{4}{a}$

12. 如图，OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线，OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分，则母线与轴的夹角的余弦值为　　（　）



A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　D. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题 本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

13. (理)某厂生产电子元件,其产品的次品率为 5%,现从一批产品中任意地连续取出 2 件,其中次品数 ζ 的概率分布是

(文)乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员,派 5 名参加比赛.3 名主力队员要安排在第一、三、五位置,其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置,那么不同的出场安排共有_____种(用数字作答).

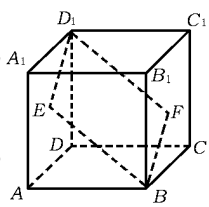
ζ	0	1	2
P			

14. 椭圆 $\frac{x}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2,点 P 为其上的动点.当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时,点 P 横坐标的取值范围是_____.

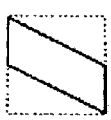
15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列,且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(n=1,2,3,\cdots)$,则它的通项公式是 $a_n=$_____.

16. 如图,E、F 分别为正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心,则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____.

(要求:把可能的图的序号都填上)



①


②

③

④

三、解答题 本大题共 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

(理)甲、乙二人参加普法知识竞答,共有 10 个不同的题目,其中选择题 6 个,判断题 4 个.甲、乙二人依次各抽一题.

(Ⅰ)甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少?

(Ⅱ)甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少?

(文)已知函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$,$x\in R$.

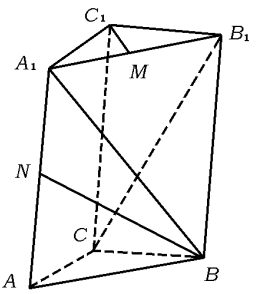
(Ⅰ)当函数 y 取得最大值时,求自变量 x 的集合;

(Ⅱ)该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in R)$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

注意 考生在(18 甲)、(18 乙)两题中选一题作答,如果两题都答,只以(18 甲)计分.

18. **(甲)(本小题满分 12 分)**

(理)如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$**,底面** $\triangle ABC$ **中,**$CA=CB=1$**,**$\angle BCA=90°$**,棱** $AA_1=2$**,M、N 分别是** A_1B_1**、**A_1A**的中点.**



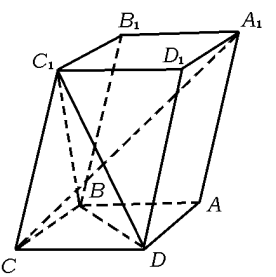
(Ⅰ)求 $\overrightarrow{BN}$**的长;**

(Ⅱ)求 $\cos<\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}>$**的值;**

(Ⅲ)求证,$A_1B\perp C_1M$.

(乙)(本小题满分 12 分)

(理)如图,已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ **的底面** $ABCD$ **是菱形,且**$\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$.



(Ⅰ)证明:$C_1C\perp BD$**;**

(Ⅱ)假定 $CD=2$**,**$CC_1=\frac{3}{2}$**,记面** C_1BD **为**α**,面** CBD **为**β**,求二面角** $\alpha-DB-\beta$ **的平面角的余弦值;**

(Ⅲ)当$\frac{CD}{CC_1}$**的值为多少时,能使** $A_1C\perp$ **平面** C_1BD**?请给出证明.**

(文)设 $\{a_n\}$**为等差数列,**S_n **为数列** $\{a_n\}$**的前** n **项和,已知** $S_7=7$**,**$S_{15}=75$**,** T_n **为数列**$\frac{S_n}{n}$**的前** n **前和,求** T_n.

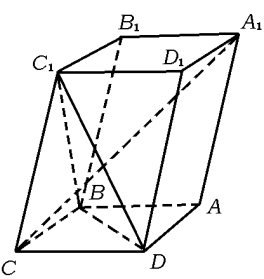
19.（本小题满分 12 分）

（理）设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）解不等式 $f(x)\leqslant 1$；

（Ⅱ）求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

如图，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60^\circ$.



（Ⅰ）证明：$C_1C\perp BD$；

（Ⅱ）假定 $CD=2$，$CC_1=\frac{3}{2}$，记面 C_1BD 为 α，面 CBD 为 β，求二面角 $\alpha-DB-\beta$ 的平面角的余弦值；

（Ⅲ）当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD？请给出证明.

20.（本小题满分 12 分）

（理）用总长 14.8m 的钢条制做一个长方体容器的框架，如果所制做容器的底面的一边比另一边长 0.5m，那么高为多少时容器的容积最大？并求出它的最大容积.

（文）设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）解不等式 $f(x)\leqslant 1$；

（Ⅱ）证明：当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

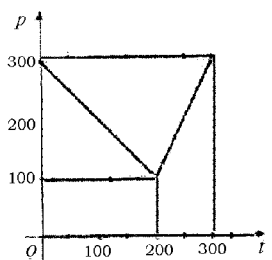
21.（本小题满分 14 分）

（理）（Ⅰ）已知数列 $\{c_n\}$，其中 $c_n = 2^n + 3^n$，且数列 $\{c_{n+1} - pc_n\}$ 为等比数列，求常数 p；

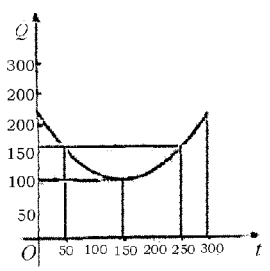
（Ⅱ）设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列，$c_n = a_n + b_n$，证明数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

（文）某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示.

图一



图二



（Ⅰ）写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $P = f(t)$；

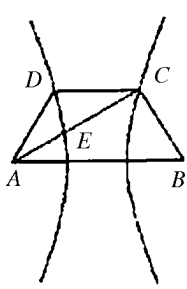
写出图二表示的种值成本与时间的函数关系式 $Q = g(t)$；

（Ⅱ）认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

（注：市场售价和种植成本的单位：元/10^2kg，时间单位：天）

22.（本小题满分 14 分）

如图，已知梯形 ABCD 中 $|AB| = 2|CD|$，点 E 满足 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{EC}$，双曲线过 C、D、E 三点，且以 A、B 为焦点，当 $\frac{2}{3} \leqslant \lambda \leqslant \frac{3}{4}$ 时，求双曲线离心率 e 的取值范围.



参考答案及解题提示

1 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷一)

1.D 2.B 3.C 4.B 5.A 6.B 7.C 8.C 9.B 10.A 11.(理)D,(文)C 12.B 13.(理)$\{x \mid x \geqslant -1\}$ (文)$\{x \mid x \geqslant 0\}$

14.(理)$x^2+y^2=4$ (文)$3\cdot 2^{n-3}$ 15.(理)$\frac{n!}{2}$ (文)同第 14 题(理)

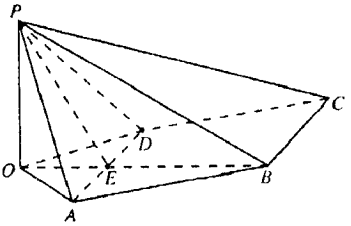
16.① ② ④ 17.(理)解:$f(x)=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x}{2-2\sin x\cos x}=\frac{1-\sin^2 x\cos^2 x}{2(1-\sin x\cos x)}=\frac{1}{2}(1+\sin x\cos x)=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}$,所以函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π,最大值是 $\frac{3}{4}$,最小值是 $\frac{1}{4}$. (文)本小题主要考查等差数列的通项公式、求和公式,考查运算能力. 解:(Ⅰ)由 $a_n=a_1+(n-1)d$,$a_{10}=30$,$a_{20}=50$,得方程组 $\begin{cases}a_1+9d=30,\\ a_1+19d=50.\end{cases}$ 得 $a_1=12$,$d=2$. 所以 $a_n=2n+10$. (Ⅱ)由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,$S_n=242$ 得方程 $12n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=242$. 解得 $n=11$ 或 $n=-22$(舍去). 18.解:$P(\xi=0)=0.5^2\times 0.6^2=0.09$, $P(\xi=1)=C_2^1\times 0.5^2\times 0.6^2+C_2^1\times 0.5^2\times 0.4\times 0.6=0.3$, $P(\xi=2)=C_2^2\times 0.5^2\times 0.6^2+C_2^1C_2^1\times 0.5^2\times 0.4\times 0.6+C_2^2\times 0.5^2\times 0.4^2=0.37$, $P(\xi=3)=C_2^2C_2^1\times 0.5^2\times 0.4\times 0.6+C_2^1C_2^2\times 0.5^2\times 0.4^2=0.2$, $P(\xi=4)=0.5^2\times 0.4^2=0.04$, 于是得到随机变量 ξ 的概率分布列为:

ξ	0	1	2	3	4
P	0.09	0.3	0.37	0.2	0.04

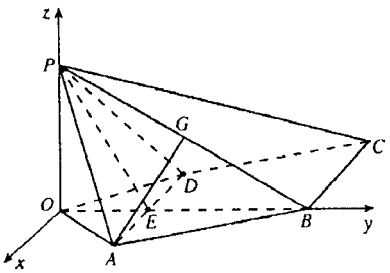
所以 $E\xi=0\times 0.09+1\times 0.3+2\times 0.37+3\times 0.2+4\times 0.04=1.8$. (文)解同第 17 题(理) 19.(理)解:函数 $f(x)$ 的导数:$f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=(2x+ax^2)e^{ax}$. (ⅰ)当 $a=0$ 时,若 $x<0$,则 $f'(x)<0$,若 $x>0$,则 $f'(x)>0$. 所以当 $a=0$ 时,函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,0)$内为减函数,在区间$(0,+\infty)$内为增函数. (ⅱ)当 $a>0$ 时,由 $2x+ax^2>0$,解得 $x<-\frac{2}{a}$ 或 $x>0$, 由 $2x+ax^2<0$,解得 $-\frac{2}{a}<x<0$. 所以当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,-\frac{2}{a})$内为增函数,在区间$(-\frac{2}{a},0)$内为减函数,在区间$(0,+\infty)$内为增函数; (ⅲ)当 $a<0$ 时,由 $2x+ax^2>0$,解得 $0<x<-\frac{2}{a}$, 由 $2x+ax^2<0$,解得 $x<0$ 或 $x>-\frac{2}{a}$. 所以当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,0)$内为减函数,在区间$(0,-\frac{2}{a})$内为增函数,在区间$(-\frac{2}{a},+\infty)$内为减函数. (文)解:求函数 $f(x)$ 的导数:$f'(x)=3ax^2+6x-1$. (ⅰ)当 $f'(x)<0$ $(x\in R)$时,$f(x)$ 是减函数. $3ax^2+6x-1<0$ $(x\in R)$ $\Leftrightarrow a<0$ 且 $\Delta=36+12a<0$ $\Leftrightarrow a<-3$. 所以,当 $a<-3$ 时,由 $f'(x)<0$,知 $f(x)$ $(x\in R)$是

减函数；（ⅱ）当 $a=-3$ 时，$f(x)=-3x^3+3x^2-x+1=-3(x-\frac{1}{3})^3+\frac{8}{9}$，由函数 $y=x^3$ 在 R 上的单调性，可知 当 $a=-3$ 时，$f(x)(x\in R)$ 是减函数；（ⅲ）当 $a>-3$ 时，在 R 上存在一个区间，其上有 $f'(x)>0$，所以，当 $a>-3$ 时，函数 $f(x)(x\in R)$ 不是减函数. 综上，所求 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

20.（理）（Ⅰ）解：如图，作 $PO\perp$ 平面 ABCD，垂足为点 O. 连结 OB、OA、OD，OB 与 AD 交于点 E，连结 PE.

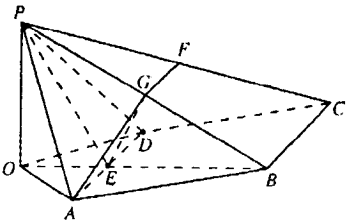


$AD\perp PB$，，$AD\perp OB$，$PA=PD$，，$OA=OD$，于是 OB 平分 AD，点 E 为 AD 的中点，所以 $PE\perp AD$. 由此知 $\angle PEB$ 为面 PAD 与面 ABCD 所成二面角的平面角，，$\angle PEB=120°$，$\angle PEO=60°$. 由已知可求得 $PE=\sqrt{3}$，，$PO=PE\cdot\sin60°=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$，即点 P 到平面 ABCD 的距离为 $\frac{3}{2}$.



（Ⅱ）解法一：如图建立直角坐标系，其中 O 为坐标原点，x 轴平行于 DA. $P(0,0,\frac{3}{2})$，$B(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$，PB 中点 G 的坐标为 $(0,\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4})$，连结 AG. 又知 $A(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$C(-2,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$. 由此得到：$\overrightarrow{GA}=(1,-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4})$，$\overrightarrow{PB}=(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$. 于是有 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，所以 $\overrightarrow{GA}\perp\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PB}$. $\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 等于所求二面角的平面角，于是 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{GA}||\overrightarrow{BC}|}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，所以所求二面角的大小为 $\pi-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

解法二：如图，取 PB 的中点 G，PC 的中点 F，连结 EG、AG、GF，则 $AG\perp PB$，$FG/\!/BC$，$FG=\frac{1}{2}BC$.



$AD\perp PB$，，$BC\perp PB$，$FG\perp PB$，，$\angle AGF$ 是所求二面角的平面角. $AD\perp$ 面 POB，，$AD\perp EG$. 又 $PE=BE$，，$EG\perp PB$，且 $\angle PEG=60°$. 在 Rt$\triangle$PEG 中，$EG=PE\cdot\cos60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，在 Rt$\triangle$GAE 中，$AE=\frac{1}{2}AD=1$，于是 $\tan\angle GAE=\frac{EG}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\angle AGF=\pi-\angle GAE$，所以所求二面角的大小为 $\pi-\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$.（文）解：（Ⅰ）随机选出的 3 位同学中，至少有一位男同学的概率为 $1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$；（Ⅱ）甲、乙被选中且能通过测验的概率为 $\frac{C_8^1}{C_{10}^3}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{125}$. 21.（理）解：（Ⅰ）由 C 与 l 相交于两个不同的点，故知

方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-y^2=1,\\ x+y=1,\end{cases}$ 有两个不同的实数解.消去 y 并整理得 $(1-a^2)x^2+2a^2x-2a^2=0$. ① 所以 $\begin{cases}1-a^2\neq 0,\\ 4a^4+8a^2(1-a^2)>0.\end{cases}$ 解得 $0<a<\sqrt{2}$且 $a\neq 1$. 双曲线的离心率 $e=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}$, $0<a<\sqrt{2}$且 $a\neq 1$, , $e>\frac{\sqrt{6}}{2}$且 $e\neq\sqrt{2}$, 即离心率 e 的取值范围为$(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\ )$. (Ⅱ)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(0,1)$, $\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$,, $(x_1,y_1-1)=\frac{5}{12}(x_2,y_2-1)$. 由此得 $x_1=\frac{5}{12}x_2$, 由于 x_1,x_2 都是方程①的根,且 $1-a^2\neq 0$, 所以 $\frac{17}{12}x_2=-\frac{2a^2}{1-a^2}$, $\frac{5}{12}x_2^2=-\frac{2a^2}{1-a^2}$. 消去 x_2,得 $-\frac{2a^2}{1-a^2}=\frac{289}{60}$, 由 $a>0$,所以 $a=\frac{17}{13}$. (文)解同第 20 题

(理) 22.(理)解:(Ⅰ)$a_2=a_1+(-1)^1=0$, $a_3=a_2+3^1=3$, $a_4=a_3+(-1)^2=4$, $a_5=a_4+3^2=13$, 所以,$a_3=3$,$a_5=13$. (Ⅱ)$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k=a_{2k-1}+(-1)^k+3^k$, 所以 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=3^k+(-1)^k$, 同理 $a_{2k-1}-a_{2k-3}=3^{k-1}+(-1)^{k-1}$, …… $a_3-a_1=3+(-1)$. 所以 $(a_{2k+1}-a_{2k-1})+(a_{2k-1}-a_{2k-3})+\cdots+(a_3-a_1)=(3^k+3^{k-1}+\cdots+3)+[(-1)^k+(-1)^{k-1}+\cdots+(-1)]$, 由此得 $a_{2k+1}-a_1=\frac{3}{2}(3^k-1)+\frac{1}{2}[(-1)^k-1]$, 于是 $a_{2k+1}=\frac{3^{k+1}}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k-1$. $a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k=\frac{3^k}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{k-1}-1+(-1)^k=\frac{3^k}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k-1$. $\{a_n\}$蹬通项公式为: 当 n 为奇数时,$a_n=\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2}+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\times\frac{1}{2}-1$; 当 n 为偶数时,$a_n=\frac{3^{\frac{n}{2}}}{2}+(-1)^{\frac{n}{2}}\times\frac{1}{2}-1$. (文)解同第 21 题(理)

2 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷二)

1.C 2.(理)A (文)A 3.(理)C (文)B 4.C 5.A 6.(理)D (文)C 7.(理)B (文)D 8.(理)B (文)B 9.(理)D (文)D 10.(理)B (文)B 11.B 12.C

13.(理)

ζ	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

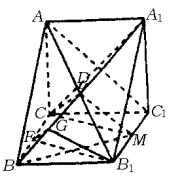
(文)$-\frac{1}{2}$ 14. 5 15. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 16.②④

17.(理)(Ⅰ)证明: $\sin(A+B)=\frac{3}{5}$,$\sin(A-B)=\frac{1}{5}$,

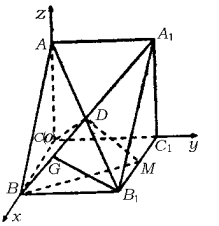
, $\begin{cases}\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5},\\ \sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin A\cos B=\frac{2}{5},\\ \cos A\sin B=\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow\frac{\tan A}{\tan B}=2$.所以 $\tan A=2\tan B$. (Ⅱ)解: $\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$,$\sin(A+B)=\frac{3}{5}$, , $\tan(A+B)=-\frac{3}{4}$,即$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{3}{4}$, 将 $\tan A=2\tan B$ 代入上式并整理得 $2\tan^2 B-4\tan B-1=0$. 解得 $\tan B=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$,舍去负值得 $\tan B=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, , $\tan A=$

$2\tan B = 2+\sqrt{6}$. 设 AB 边上的高为 CD，则 $AB = AD + DB = \frac{CD}{\tan A} + \frac{CD}{\tan B} = \frac{3CD}{2+\sqrt{6}}$，由 $AB = 3$，得 $CD = 2+\sqrt{6}$. 所以 AB 边上的高等于 $2+\sqrt{6}$.

(文)解：(Ⅰ)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，依题意得方程组 $\begin{cases} a_1 + d = 9, \\ a_1 + 4d = 21, \end{cases}$ 解得 $a_1 = 5$，$d = 4$. 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 4n + 1$. (Ⅱ)由 $a_n = 4n + 1$ 得 $b_n = 2^{4n+1}$，所以 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 2^5$，公比 $q = 2^4$ 的等比数列，于是得 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{2^5 \times (2^{4n} - 1)}{2^4 - 1} = \frac{32 \times (2^{4n} - 1)}{15}$. 18.(理)(Ⅰ)解法一：三支弱队在同一组的概率为 $\frac{C_5^1}{C_8^4} + \frac{C_5^1}{C_8^4} = \frac{1}{7}$，故有一组恰有两支弱队的概率为 $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$. 解法二：有一组恰有两支弱队的概率 $\frac{C_3^2 C_5^2}{C_8^4} + \frac{C_3^2 C_5^2}{C_8^4} = \frac{6}{7}$. (Ⅱ)解法一：A 组中至少有两支弱队的概率 $\frac{C_3^2 C_5^2}{C_8^4} + \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^4} = \frac{1}{2}$. 解法二：A、B 两组有一组至少有两支弱队的概率为 1. 由于对 A 组和 B 组来说，至少有两支弱队的概率是相同的，所以 A 组中至少有两支弱队的概率为 $\frac{1}{2}$. (文)同(理)第 17 小题. 19.(理)证明：(Ⅰ) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$，$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} S_n$，，$(n+2) S_n = n(S_{n+1} - S_n)$，整理得 $nS_{n+1} = 2(n+1) S_n$，所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} = 2\frac{S_n}{n}$. 故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 2 为公比的等比数列. (Ⅱ)由(Ⅰ)知 $\frac{S_{n+1}}{n+1} = 4 \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ 于是 $S_{n+1} = 4(n+1) \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1} = 4a_n$ $(n \geqslant 2)$. 又 $a_2 = 3$ $S_1 = 3$，故 $S_2 = a_1 + a_2 = 4$. 因此对于任意正整数 $n \geqslant 1$，都有 $S_{n+1} = 4a_n$. (文)同(理)第 18 小题. 20. 解法一：(Ⅰ)如图，连结 CA_1、AC_1、CM，则 $CA_1 = \sqrt{2}$. $CB = CA_1 = \sqrt{2}$，，$\triangle CBA_1$ 为等腰三角形. 又知 D 为其底边 A_1B 的中点，，$CD \perp A_1B$. $A_1C_1 = 1$，$C_1B_1 = \sqrt{2}$，，$A_1B_1 = \sqrt{3}$，又 $BB_1 = 1$，，$A_1B = 2$. $\triangle A_1CB$ 为直角三角形，D 为 A_1B 的中点，，$CD = \frac{1}{2} A_1B = 1$，$CD = CC_1$. 又 $DM = \frac{1}{2} AC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$DM = C_1M$，，$\triangle CDM \cong \triangle CC_1M$，$\angle CDM = \angle CC_1M = 90°$，即 $CD \perp DM$. 因为 A_1B、DM 为平面 BDM 内两条相交直线，所以 $CD \perp$ 平面 BDM. (Ⅱ)设 F、G 分别为 BC、BD 的中点，连结 B_1G、FG、B_1F，则 $FG \parallel CD$，$FG = \frac{1}{2} CD$. ，$FG = \frac{1}{2}$，$FG \perp BD$. 由侧面矩形 BB_1A_1A 的对角线的交点为 D 知 $BD = B_1D = \frac{1}{2} A_1B = 1$，所以 $\triangle BB_1D$ 是边长为 1 的正三角形，于是 $B_1G \perp BD$，$B_1G = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ，$\angle B_1GF$ 是所求二面角的平面角. 又 $B_1F^2 = B_1B^2 + BF^2 = 1 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{3}{2}$. ，$\cos\angle B_1GF = \frac{B_1G^2 + FG^2 - B_1F^2}{2B_1G \cdot FG} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 即所求



二面角的大小为 $\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 解法二 :如图,以 C 为原点建立坐标系. (Ⅰ) $B(\sqrt{2},0,0)$, $B_1(\sqrt{2},1,0)$, $A_1(0,1,1)$, $D(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $M(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$, $\vec{CD} = (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\vec{A_1B} = (\sqrt{2},-1,-1)$, $\vec{DM} = (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$,



$\vec{CD}\cdot\vec{A_1B} = 0$, $\vec{CD}\cdot\vec{DM} = 0$, , $CD \perp A_1B$, $CD \perp DM$. 因为 A_1B、DM 为平面 BDM 内两条相交直线,所以 $CD \perp$ 平面 BDM. (Ⅱ)设 BD 中点为 G,连结 B_1G,则 $G(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, $\vec{BD} = (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\vec{B_1G} = (-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{4})$, , $\vec{BD}\cdot\vec{B_1G} = 0.$, $BD \perp B_1G$. 又 $CD \perp BD$, , $\vec{CD}$与 $\vec{B_1G}$的夹角 θ 等于所求二面角的平面角. $\cos\theta = \frac{\vec{CD}\cdot\vec{B_1G}}{|\vec{CD}|\cdot|\vec{B_1G}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以所求二面角的大小等于 $\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 21.(理)解 :(Ⅰ) C 的焦点为 F(1,0),直线 l 的斜率为 1,所以 l 的方程为 $y = x - 1$. 将 $y = x - 1$ 代入方程 $y^2 = 4x$,并整理得 $x^2 - 6x + 1 = 0$. 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则有 $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = 1$.

$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = -3$.

$|\vec{OA}|\,|\vec{OB}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1x_2[x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16]} = \sqrt{41}$. $\cos(\vec{OA},\vec{OB}) = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|} = -\frac{3\sqrt{41}}{41}$, 所以 $\vec{OA}$与 $\vec{OB}$夹角的大小为 $\pi - \arccos\frac{3\sqrt{41}}{41}$. (Ⅱ)由题设 $\vec{FB} = \lambda\vec{AF}$得 $(x_2 - 1, y_2) = \lambda(1 - x_1, -y_1)$, 即 $\begin{cases} x_2 - 1 = \lambda(1 - x_1), & ① \\ y_2 = -\lambda y_1 & ② \end{cases}$ 由②得 $y_2^2 = \lambda^2 y_1^2$. $y_1^2 = 4x_1$, $y_2^2 = 4x_2$, , $x_2 = \lambda^2 x_1$. ③ 联立①、③解得 $x_2 = \lambda$,依题意有 $\lambda > 0$, , $B(\lambda, 2\sqrt{\lambda})$或 $B(\lambda, -2\sqrt{\lambda})$,又 F(1,0),得直线 l 方程为 $(\lambda - 1)y = 2\sqrt{\lambda}(x - 1)$或 $(\lambda - 1)y = -2\sqrt{\lambda}(x - 1)$. 当 $\lambda \in [4,9]$时,l 在 y 轴上的截距为 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$或 $-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$. 由 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} = \frac{2}{\sqrt{\lambda} + 1} + \frac{2}{\lambda - 1}$, 可知 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$在 [4,9] 上是递减的, , $\frac{3}{4} \leqslant \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \leqslant \frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3} \leqslant -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \leqslant -\frac{3}{4}$. 直线 l 在 y 轴上截距的变化范围为 $\left[-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right]$. (文)解 :函数 f(x)的导数 $f'(x) = x^2 - ax + a - 1$. 令 $f'(x) = 0$,解得 $x = 1$ 或者 $x = a - 1$. 当 $a - 1 \leqslant 1$ 即 $a \leqslant 2$ 时,函数 f(x)在 $(1, +\ )$上为增函数,不合题意. 当 $a - 1 > 1$ 即 $a > 2$ 时,函数 f(x)在 $(-\ ,1)$上为增函数,在 $(1, a - 1)$内为减函数,在 $(a - 1, +\ )$上为增函数. 依题意应有 当 $x \in (1,4)$时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (6, +\ )$时, $f'(x) > 0$. 所以 $4 \leqslant a - 1 \leqslant 6$. 解得 $5 \leqslant a \leqslant 7$. 所以 a 的取值范围是 [5,7]. 22.(理)(Ⅰ)解 :函数 f(x)的定义域为 $(-1, +\ )$. $f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1$. 令 $f'(x) = 0$,解得 $x = 0$. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$. 又 $f(0) = 0$,故当且仅当 $x = 0$ 时, f(x)取得最大

值,最大值为 0. (Ⅱ)证法一:$g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)=a\ln a+b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2}=a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}$. 由(Ⅰ)结论知 $\ln(1+x)-x<0(x>-1$,且 $x\neq0)$, 由题设 $0<a<b$,得 $\frac{b-a}{2a}>0$, $-1<\frac{a-b}{2b}<0$ 因此 $\ln\frac{2a}{a+b}=-\ln\left(1+\frac{b-a}{2a}\right)>-\frac{b-a}{2a}$, $\ln\frac{2b}{a+b}=-\ln\left(1+\frac{a-b}{2b}\right)>-\frac{a-b}{2b}$. 所以 $a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}>-\frac{b-a}{2}-\frac{a-b}{2}=0$. 又 $\frac{2a}{a+b}<\frac{a+b}{2b}$, $a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}<a\ln\frac{a+b}{2b}+b\ln\frac{2b}{a+b}=(b-a)\ln\frac{2b}{a+b}<(b-a)\ln2$. 综上 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln2$. 证法二:$g(x)=x\ln x$, $g'(x)=\ln x+1$. 设 $F(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\frac{a+x}{2}\right)$, 则 $F'(x)=g'(x)-2\left[g\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]'=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}$. 当 $0<x<a$ 时,$F'(x)<0$,因此 $F(x)$在$(0,a)$内为减函数. 当 $x>a$ 时,$F'(x)>0$,因此 $F(x)$在$(a,+\infty)$上为增函数. 从而,当 $x=a$ 时,$F(x)$有极小值 $F(a)$. 因为 $F(a)=0$,$b>a$,所以 $F(b)>0$, 即 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)$. 设 $G(x)=F(x)-(x-a)\ln2$, 则 $G(x)=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}-\ln2=\ln x-\ln(a+x)$. 当 $x>0$ 时,$G(x)<0$. 因此 $G(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数. 因为 $G(a)=0$,$b>a$,所以 $G(b)<0$, 即 $g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln2$.

(文)同(理)第 21 小题.

3 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷三)

1.B 2.C 3.(理)B (文)B 4.(理)D (文)B 5.(理)A (文)D 6.(理)A (文)A 7.(理)C (文)A 8.(理)D (文)C 9.(理)C (文)D 10.(理)B (文)C 11.(理)A (文)B 12.C

13.(理)$\frac{3}{16}$ (文)$\{x\mid1<x\leqslant2\}$ 14.(理)1 (文)$\frac{3}{16}$ 15.(理)-2 (文)$\frac{\sqrt{5}}{2}$ 16.(理)$\sqrt{5}$ (文)1

17.(理)本小题主要考查同角三角函数的基本关系式、二倍角公式等基础知识以及三角恒等变形的能力.满分 12 分. 解:原式 $=\frac{\sin\alpha\cos2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha}$, 因为 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 时,$\sin\alpha\neq0$,$\cos2\alpha\neq0$, 所以 原式 $=\frac{1}{2\cos\alpha}$. 因为 α 为锐角,由 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 得 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 所以 原式 $=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

(文)本小题主要考查指数和对数的性质以及解方程的有关知识.满分 12 分. 解:$(2^x)^2-4(2^x)-12=0$. $(2^x-6)(2^x+2)=0$. $2^x=6$,$2^x=-2$(无解). 所以 $x=\log_26$. 18.(理)本小题主要考查解带绝对值的方程以及指数和对数的概念与运算.满分 12 分. 解:当 $1-2^x\geqslant0$,即 $x\leqslant0$ 时,原方程化为 $4^x-2^x+1=11$, $(2^x-\frac{1}{2})^2=\frac{41}{4}$, 解得 $2^x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{41}}{2}$. $2^x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}<0$,无解. 由 $2^x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}>1$ 知 $x>0$,舍去. 当 $1-2^x<0$,

即 $x>0$ 时，原方程化为 $4^x+2^x-1=11$，$\left(2^x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$，解得 $2^x=-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}$，$2^x=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}<0$，无解．$2^x=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}$，$x=\log_2 3>0$．故原方程的解为 $x=\log_2 3$．（文）同（理）第 18 小题．19.（理）本小题主要考查把实际问题抽象为数学问题，应用不等式等基础知识和方法解决问题的能力．满分 12 分．解：设矩形温室的左侧边长为 a m，后侧边长为 b m，则 $ab=800$．蔬菜的种植面积 $S=(a-4)(b-2)=ab-4b-2a+8=808-2(a+2b)$．所以 $S\leqslant 808-4\sqrt{2ab}=648(m^2)$．当 $a=2b$，即 $a=40(m)$，$b=20(m)$ 时，$S_{最大值}=648(m^2)$．答：当矩形温室的左侧边长为 40m，后侧边长为 20 m 时，蔬菜的种植面积最大，最大种植面积为 648 m^2．（文）本小题主要考查等差数列的通项公式，前 n 项和公式等基础知识，根据已知条件列方程以及运算能力．满分 12 分．解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 及已知条件得 $(3a_1+3d)^2=9(2a_1+d)$，①

$4a_1+6d=4(2a_1+d)$，② 由②得 $d=2a_1$，代入①有 $a_1^2=\frac{4}{9}a_1$，解得 $a_1=0$ 或 $a_1=\frac{4}{9}$．当 $a_1=0$ 时，$d=0$，舍去．因此 $a_1=\frac{4}{9}$，$d=\frac{8}{9}$．故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{4}{9}+(n-1)\cdot\frac{8}{9}=\frac{4}{9}(2n-1)$．

20. 本小题主要考查两个平面垂直的性质、直线与平面所成角等有关知识，以及逻辑思维能力和空间想像能力．满分 12 分．（Ⅰ）证明：如图 1，取 AC 中点 D，连结 PD、BD．因为 PA=PC，所以 PD⊥AC，又已知面 PAC⊥面 ABC，所以 PD⊥面 ABC，D 为垂足．因为 PA=PB=PC，所以 DA=DB=DC，可知 AC 为△ABC 的外接圆直径，因此 AB⊥BC．（Ⅱ）解：如图 2，作 CF⊥PB 于 F，连结 AF、DF．

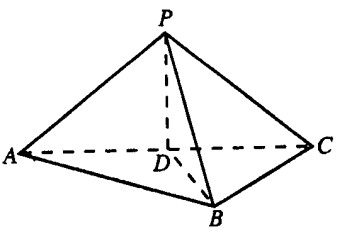


图 1

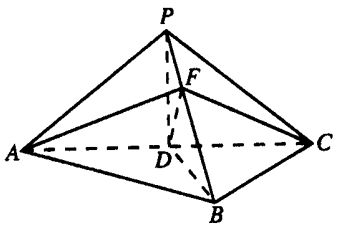


图 2

因为△PBC≌△PBA，所以 AF⊥PB，AF=CF．因此，PB⊥平面 AFC，所以面 AFC⊥面 PBC，交线是 CF，因此直线 AC 在平面 PBC 内的射影为直线 CF，∠ACF 为 AC 与平面 PBC 所成的角．在 Rt△ABC 中，$AB=BC=2\sqrt{3}$，所以 $BD=\sqrt{6}$．在 Rt△PDC 中，$DC=\sqrt{6}$，$PD=\sqrt{3}$，在 Rt△PDB 中，$DF=\frac{PD\cdot DB}{PB}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$．在 Rt△FDC 中，$\tan\angle ACF=\frac{DF}{DC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle ACF=30°$．即 AC 与平面 PBC 所成角为 30°．（文）同（理）第 19 小题．21.（理）本小题主要考查直线和椭圆的基本知识，以及综合分析和解题能力．满分 12 分．解：（Ⅰ）由题设有 $m>0$，$c=\sqrt{m}$．设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，由 $PF_1\perp PF_2$，得 $\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{y_0}{x_0+c}=-1$，化简得 $x_0^2+y_0^2=m$．① 将①与 $\frac{x_0^2}{m+1}+y_0^2=1$ 联立，解得 $x_0^2=\frac{m^2-1}{m}$，$y_0^2=$

$\frac{1}{m}$. 由 $m>0$，$x_0^2=\frac{m^2-1}{m}\geqslant 0$，得 $m\geqslant 1$. 所以 m 的取值范围是 $m\geqslant 1$.

(Ⅱ)准线 L 的方程为 $x=\frac{m+1}{\sqrt{m}}$. 设点 Q 的坐标为 (x_1,y_1)，则 $x_1=\frac{m+1}{\sqrt{m}}$.

$$\frac{|QF_2|}{|PF_2|}=\frac{x_1-c}{c-x_0}=\frac{\frac{m+1}{\sqrt{m}}-\sqrt{m}}{\sqrt{m}-x_0}. \qquad ②$$

将 $x_0=\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}$ 代入②，化简得 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|}=\frac{1}{m-\sqrt{m^2-1}}=m+\sqrt{m^2-1}$. 由题设 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$，得 $m+\sqrt{m^2-1}=2-\sqrt{3}$，无解. 将 $x_0=-\sqrt{\frac{m^2-1}{m}}$ 代入②，化简得 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|}=\frac{1}{m+\sqrt{m^2-1}}=m-\sqrt{m^2-1}$. 由题设 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$，得 $m-\sqrt{m^2-1}=2-\sqrt{3}$. 解得 $m=2$. 从而 $x_0=-\sqrt{\frac{3}{2}}$，$y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=\sqrt{2}$，得到 PF_2 的方程 $y=\pm(\sqrt{3}-2)(x-\sqrt{2})$. (文)(Ⅰ)同(理)第 20 小题(Ⅰ) (Ⅱ)解：因为 $AB=BC$，D 为 AC 中点，所以 $BD\perp AC$. 又面 $PAC\perp$ 面 ABC，所以 $BD\perp$ 平面 PAC，D 为垂足. 作 $BE\perp PC$ 于 E，连结 DE，因为 DE 为 BE 在平面 PAC 内的射影，所以 $DE\perp PC$，$\angle BED$ 为所求二面角的平面角. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{3}$，所以 $BD=\sqrt{6}$. 在 $Rt\triangle PDC$ 中，$PC=3$，$DC=\sqrt{6}$，$PD=\sqrt{3}$，所以 $DE=\frac{PD\cdot DC}{PC}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$. 因此，在 $Rt\triangle BDE$ 中，$\tan\angle BED=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，$\angle BED=60^\circ$，所以侧面 PBC 与侧面 PAC 所成的二面角为 60°. 22. 本小题主要考查数列的通项公式，等比数列的前 n 项和以及不等式的证明. 考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 满分 14 分. (Ⅰ)解：由 $a_1=S_1=2a_1-1$，得 $a_1=1$. 由 $a_1+a_2=S_2=2a_2+(-1)^2$，得 $a_2=0$. 由 $a_1+a_2+a_3=S_3=2a_3+(-1)^3$，得 $a_3=2$. (Ⅱ)解：当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2(a_n-a_{n-1})+2\times(-1)^n$，$a_n=2a_{n-1}+2\times(-1)^{n-1}$，$a_{n-1}=2a_{n-2}+2\times(-1)^{n-2}$，…，$a_2=2a_1-2$. 所以 $a_n=2^{n-1}a_1+2^{n-1}\times(-1)+2^{n-2}\times(-1)^2+\cdots+2\times(-1)^{n-1}=2^{n-1}+(-1)^n[(-2)^{n-1}+(-2)^{n-2}+\cdots+(-2)]=2^{n-1}-(-1)^n\frac{2[1-(-2)^{n-1}]}{3}=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}]$. 经验证 a_1 也满足上式，所以 $a_n=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}]$，$n\geqslant 1$. (Ⅲ)证明：由通项公式得 $a_4=2$. 当 $n\geqslant 3$ 且 n 为奇数时，$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{2}[\frac{1}{2^{n-2}+1}+\frac{1}{2^{n-1}-1}]=\frac{3}{2}\times\frac{2^{n-1}+2^{n-2}}{2^{2n-3}+2^{n-1}-2^{n-2}-1}<\frac{3}{2}\times\frac{2^{n-1}+2^{n-2}}{2^{2n-3}}=\frac{3}{2}(\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}})$. 当 $m>4$ 且 m 为偶数时，$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}=\frac{1}{a_4}+(\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6})+\cdots+(\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{a_m})<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}})=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{2^{m-4}})<\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$. 当 $m>4$ 且 m 为奇数时，$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{m+1}}<\frac{7}{8}$. 所以对任意整数 $m>4$，有 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}$. (文)同(理)第 21 小题.

4 2004年普通高等学校招生全国统一考试

(全国卷四)

1.(文)B (理)D 2.C 3.(文)A (理)A 4.(文)D (理)D 5.(文)D (理)A 6.B 7.(文)A (理)C 8.(文)D (理)A 9.B 10.(文)C (理)A 11.(文)A (理)B 12.(文)B (理)C

13.28 14.(文)$\frac{3}{2}$ (理)$-\frac{1}{2}$ 15.(文)$-\frac{1}{2}$ (理)$\frac{3}{4}$ 16.2

17. 本小题主要考查同角三角函数的基本关系式,二倍角公式以及三角函数式的恒等变形等基础知识和基本技能,满分12分.

解:$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\sin2\alpha+\cos2\alpha+1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}{4\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}$. 当$\alpha$为第二象限角,且$\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$时,$\sin\alpha+\cos\alpha\neq0$,$\cos\alpha=-\frac{1}{4}$,所以

$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\sin2\alpha+\cos2\alpha+1}=\frac{\sqrt{2}}{4\cos\alpha}=-\sqrt{2}$. 18.(文)本小题主要考查等比数列的概念、前n项和公式等基础知识,考查学生综合运用基础知识进行运算的能力,满分12分. 解:(Ⅰ)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则$a_2=a_1q$,$a_5=a_1q^4$. 依题意,得方程组$\begin{cases}a_1q=6,\\a_1q^4=162.\end{cases}$解此方程组,得$a_1=2$,$q=3$. 故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\cdot3^{n-1}$. (Ⅱ)$S_n=\frac{2(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$.

$\frac{S_n\cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2}=\frac{3^{2n+2}-(3^n+3^{n+2})+1}{3^{2n+2}-2\cdot3^{n+1}+1}\leqslant\frac{3^{2n+2}-2\sqrt{3^n\cdot3^{n+2}}+1}{3^{2n+2}-2\cdot3^{n+1}+1}=1$,即$\frac{S_n\cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2}\leqslant1$ (理)本小题主要考查函数的导数计算,利用导数讨论函数的性质,判断函数的最大值、最小值以及综合运算能力.满分12分. 解:$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x$,令$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x=0$,化简为$x^2+x-2=0$,解得$x_1=-2$(舍去),$x_2=1$. 当$0\leqslant x<1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调增加;当$1<x\leqslant2$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调减少;所以$f(1)=\ln2-\frac{1}{4}$为函数$f(x)$的极大值. 又因为$f(0)=0$,$f(2)=\ln3-1>0$,$f(1)>f(2)$. 所以$f(0)=0$为函数$f(x)$在$[0,2]$上的最小值,$f(1)=\ln2-\frac{1}{4}$为函数$f(x)$在$[0,2]$上的最大值.

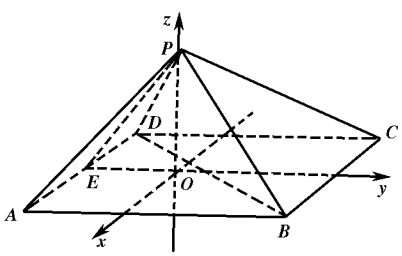
19.(文)本小题主要考查导数的几何意义,两条直线垂直的性质以及分析问题和综合运算能力.满分12分. 解:(Ⅰ)$y'=2x+1$. 直线l_1的方程为$y=3x-3$. 设直线l_2过曲线$y=x^2+x-2$上的点$B(b,b^2+b-2)$,则l_2的方程为$y=(2b+1)x-b^2-2$. 因为$l_1\perp l_2$,则有$2b+1=-\frac{1}{3}$,$b=-\frac{2}{3}$. 所以直线l_2的方程为$y=-\frac{1}{3}x-\frac{22}{9}$. (Ⅱ)解方程组$\begin{cases}y=3x-3,\\y=-\frac{1}{3}x-\frac{22}{9}.\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{1}{6},\\y=-\frac{5}{2}.\end{cases}$所以直线$l_1$和$l_2$的交点的坐标为$(\frac{1}{6},-\frac{5}{2})$. l_1、l_2与x轴交点的坐标分别为$(1,0)$、$(-\frac{22}{3},0)$. 所以所

求三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{25}{3}\times\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{125}{12}$. (理)本小题主要考查离散型随机变量的分布列、数学期望等概念,以及运用概率统计知识解决实际问题的能力.满分 12 分. 解:(Ⅰ)ξ 的可能取值为 - 300,- 100,100,300. $P(\xi=-300)=0.2^3=0.008$. $P(\xi=-100)=3\times0.2^2\times0.8=0.096$. $P(\xi=100)=3\times0.2\times0.8^2=0.384$. $P(\xi=300)=0.8^3=0.512$. 所以 ξ 的概率分布为

ξ	- 300	- 100	100	300
P	0.008	0.096	0.384	0.512

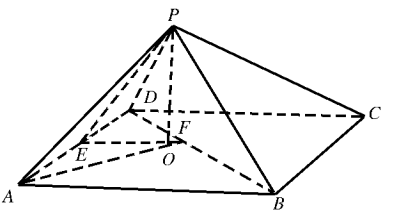
根据 ξ 的概率分布,可得 ξ 的期望 $E\xi=(-300)\times0.008+(-100)\times0.096+100\times0.384+300\times0.512=180$. (Ⅱ)这名同学总得分不为负分的概率为 $P(\xi\geqslant0)=0.384+0.512=0.896$.

20.(文)本小题主要考查相互独立事件同时发生的概率和互斥事件有一个发生的概率的计算方法,应用概率知识解决实际问题的能力.满分 12 分. 解:记"这名同学答对第 i 个问题"为事件 $A_i(i=1,2,3)$,则 $P(A_1)=0.8$, $P(A_2)=0.7$ $P(A_3)=0.6$ (Ⅰ)这名同学得 300 分的概率 $P_1=P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)=0.8\times0.3\times0.6+0.2\times0.7\times0.6=0.228$. (Ⅱ)这名同学至少得 300 分的概率 $P_2=P_1+P(A_1A_2A_3)=0.228+P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.228+0.8\times0.7\times0.6=0.564$. (理)本小题主要考查棱锥的体积、二面角、异面直线所成的角等知识和空间想象能力、分析问题能力.满分 12 分. 解:(Ⅰ)如图 1,取 AD 的中点 E,连结 PE,则 PE ⊥ AD. 作 PO ⊥ 平面 ABCD,垂足为 O,连结 OE. 根据三垂线定理的逆定理得 OE ⊥ AD, 所以∠PEO 为侧面 PAD 与底面所成二面角的平面角.



由已知条件可知∠PEO = 60°,PE = 6, 所以 $PO=3\sqrt{3}$,四棱锥 P - ABCD 的体积 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times8\times4\sqrt{3}\times3\sqrt{3}=96$. (Ⅱ)解法一:如图 1,以 O 为原点建立空间直角坐标系,通过计算可得 $P(0,0,3\sqrt{3})$, $A(2\sqrt{3},-3,0)$, $B(2\sqrt{3},5,0)$, $D(-2\sqrt{3},-3,0)$, 所以 $\overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3},-3,-3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD}=(-4\sqrt{3},-8,0)$. 因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BD}=-24+24+0=0$, 所以 PA ⊥ BD.

解法二:如图 2,连结 AO,延长 AO 交 BD 于点 F,通过计算可得 EO = 3,AE = $2\sqrt{3}$,又知 AD = $4\sqrt{3}$,AB = 8, 得 $\frac{EO}{AE}=\frac{AD}{AB}$. 所以 Rt△AEO ∽ Rt△BAD. 得 ∠EAO = ∠ABD. 所以 ∠EAO + ∠ADF = 90°, 所以 AF ⊥ BD. 因为 直线 AF 为直线 PA 在平面 ABCD 内的射影, 所以 PA ⊥ BD.



21.(文)同(理)20. (理)本小题主要考查点到直线距离公式,双曲线的基本性质以及综合运算能力.满分 12 分.

解:直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即 $bx+ay-ab=0$. 由点到直线的距离公式,且 $a>1$,得到点(1,0)到直线 l 的距离 $d_1=\frac{b(a-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 同理得到点(-1,0)到直线 l 的距离 $d_2=\frac{b(a+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $s=d_1+d_2=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{c}$. 由 $s\geqslant\frac{4}{5}c$, 得 $\frac{2ab}{c}\geqslant\frac{4}{5}c$, 即 $5a\sqrt{c^2-a^2}\geqslant 2c^2$. 于是得 $5\sqrt{e^2-1}\geqslant 2e^2$, 即 $4e^4-25e^2+25\leqslant 0$. 解不等式,得 $\frac{5}{4}\leqslant e^2\leqslant 5$.

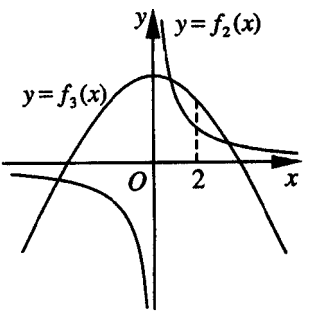
由于 $e>1>0$,所以 e 的取值范围是 $\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant e\leqslant\sqrt{5}$. 22.(文)同(理)21.

(理)本小题主要考查函数的导数,三角函数的性质,等差数列与等比数列的概念和性质,以及综合运用的能力.满分 14 分. (Ⅰ)证明:$f'(x)=-e^{-x}(\cos x+\sin x)+e^{-x}(-\sin x+\cos x)=-2e^{-x}\sin x$. 由 $f'(x)=0$,得 $-2e^{-x}\sin x=0$. 解出 $x=n\pi$,n 为整数,从而 $x_n=n\pi$,$n=1,2,3,\cdots$ $f(x_n)=(-1)^n e^{-nx}$, $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=-e^{-x}$. 所以数列 $\{f(x_n)\}$ 是公比 $q=-e^{-x}$ 的等比数列,且首项 $f(x_1)=q$. (Ⅱ)解:$S_n=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\cdots+x_nf(x_n)=\pi q(1+2q+\cdots+nq^{n-1})$, $qS_n=\pi q(q+2q^2+\cdots+nq^n)$, $S_n-qS_n=\pi q(1+q+\cdots+q^{n-1}-nq^n)=\pi q\left(\frac{1-q^n}{1-q}-nq^n\right)$, 从而 $S_n=\frac{\pi q}{1-q}\left(\frac{1-q^n}{1-q}-nq^n\right)$. $\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=\frac{\pi q}{(1-q)^2}-\frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}(1+q+\cdots+q^{n-1})-\frac{\pi q^2}{n(1-q)}(1+2q+\cdots+nq^{n-1})=\frac{\pi q}{(1-q)^2}-\frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}\frac{1-q^n}{1-q}-\frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}\left(\frac{1-q^n}{1-q}-nq^n\right)=\frac{\pi q}{(1-q)^2}-\frac{2\pi q^2}{n(1-q)^3}(1-q^n)+\frac{\pi q^{n+2}}{(1-q)^2}$. 因为 $|q|=e^{-x}<1$,$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=\frac{\pi q}{(1-q)^2}=\frac{-\pi e^x}{(e^x+1)^2}$.

5 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

1. 3 2. (5,0). 3. {1,2,5}. 4. 2. 5. $(-2,0)\cup(2,5]$. 6. (5,4). 7. (理)$\frac{2\sqrt{15}}{5}$ (文)6. 8. $(x-2)^2+(y+3)^2=5$. 9. $\frac{4}{11}$. 10. $a>0$ 且 $b\leqslant 0$. 11. 用代数的方法研究图形的几何性质. 12. ①、④ 13. B 14. C 15. A 16. B 17. 由题意得 $z_1=\frac{-1+5i}{1+i}=2+3i$, 于是 $|z_1-\bar{z}_2|=|4-a+2i|=\sqrt{(4-a)^2+4}$, $|z_1|=\sqrt{13}$. 由 $\sqrt{(4-a)^2+4}<\sqrt{13}$,得 $a^2-8a+7<0$,$1<a<7$. 18. 由题意得 $x\cdot y+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{x}{2}=8$,, $y=\frac{8-\frac{x^2}{4}}{x}=\frac{8}{x}-\frac{x}{4}$ $(0<x<4\sqrt{2})$. 于是,框架用料长度为 $l=2x+2y+2(\frac{\sqrt{2}x}{2})=(\frac{3}{2}+\sqrt{2})x+\frac{16}{x}\geqslant 2\sqrt{16(\frac{3}{2}+\sqrt{2})}=4\sqrt{6+4\sqrt{2}}$. 当 $(\frac{3}{2}+\sqrt{2})x=\frac{16}{x}$,即 $x=\frac{4}{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}}=8-4\sqrt{2}$ 时等号成立. 此时,$x\approx 2.343$,$y=2\sqrt{2}\approx 2.828$. 故

当 x 为 2.343m 时，y 为 2.828m 时，用料最省． 19.(1)由 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$，得 $\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$，，$x<-1$ 或 $x\geqslant 1$，即 $A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$． (2)由 $(x-a-1)(2a-x)>0$，得 $(x-a-1)(x-2a)<0$． $a<1$，，$a+1>2a$，，$B=(2a,a+1)$． $B\subseteq A$，，$2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant -2$，而 $a<1$，，$\frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant -2$． 故 当 $B\subseteq A$ 时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[\frac{1}{2},1)$． 20.(理)(1)由已知，设 $f_1(x)=ax^2$，由 $f_1=(1)$，得 $a=1$，，$f_1(x)=x^2$． 设 $f_2(x)=\frac{k}{x}(k>0)$，它的图像与直线 $y=x$ 的交点分别为 $A(\sqrt{k},\sqrt{k})$，$B(-\sqrt{k},-\sqrt{k})$，由 $|AB|=8$，得 $k=8$，，$f_2(x)=\frac{8}{x}$． 故 $f(x)=x^2+\frac{8}{x}$． (2)[证法一]由 $f(x)=f(a)$ 得 $x^2+\frac{8}{x}=a^2+\frac{8}{a}$，即 $\frac{8}{x}=-x^2+a^2+\frac{8}{a}$． 在同一坐标系内作出 $f_2(x)=\frac{8}{x}$ 和 $f_3(x)=-x^2+a^2+\frac{8}{a}$ 的大致图像，其

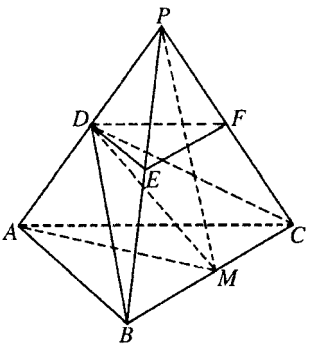


中 $f_2(x)$ 的图像是以坐标轴为渐近线，且位于第一、三象限的双曲线，$f_3(x)$ 的图像是以 $(0,a^2+\frac{8}{a})$ 为顶点，开口向下的抛物线． 因此，$f_2(x)$ 与 $f_3(x)$ 的图像在第三象限有一个交点，即 $f(x)=f(a)$ 有一个负数解． 又 $f_2(2)=4$，$f_3(2)=a^2+\frac{8}{a}-4$，当 $a>3$ 时，$f_3(2)-f_2(2)=a^2+\frac{8}{a}-8>0$，，当 $a>3$ 时，在第一象限 $f_3(x)$ 的图像上存在一点 $(2,f_3(2))$ 在 $f_2(x)$ 图像的上方．，$f_2(x)$ 与 $f_3(x)$ 的图像在第一象限有两个交点，即 $f(x)=f(a)$ 有两个正数解．因此，方程 $f(x)=f(a)$ 有三个实数解． [证法二]由 $f(x)=f(a)$，得 $x^2+\frac{8}{x}=a^2+\frac{8}{a}$，即 $(x-a)(x+a-\frac{8}{ax})=0$，得方程的一个解 $x_1=a$． 方程 $x+a-\frac{8}{ax}=0$ 化为 $ax^2+a^2x-8=0$，由 $a>3$，$\Delta=a^4+32a>0$，得 $x_2=\frac{-a^2-\sqrt{a^4+32a}}{2a}$，$x_3=\frac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$，$x_2<0$，$x_3>0$，，$x_2\neq x_1$，且 $x_2\neq x_3$． 若 $x_1=x_3$，即 $a=\frac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$，则 $3a^2=\sqrt{a^4+32a}$，$a^4=4a$，得 $a=0$ 或 $a=\sqrt[3]{4}$，这与 $a>3$ 矛盾，，$x_1\neq x_3$．

故原方程有三个实数解． (文)(1)解方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x\\ y=\frac{1}{8}x^2-4\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1=-4\\ y_1=-2\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=8\\ y_2=4\end{cases}$ 即 $A(-4,-2)$，$B(8,4)$，从而 AB 的中点为 $M(2,1)$． 由 $k_{AB}=\frac{1}{2}$，得线段 AB 的垂直平分线方程 $y-1=-2(x-2)$． 令 $y=-5$，得 $x=5$，，$Q(5,-5)$． (2)直线 OQ 的方程为 $x+y=0$．设 $P(x,\frac{1}{8}x^2-4)$． 点 P 到直线 OQ 的距离 $d=\frac{|x+\frac{1}{8}x^2-4|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}|x^2+8x-32|$，$|OQ|=5$

$\sqrt{2}$，$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|OQ|d=\frac{5}{16}|x^2+8x-32|$．　P 为抛物线上位于线段 AB 下方的点，且 P 不在直线 OQ 上，　，$-4\leqslant x<4\sqrt{3}-4$ 或 $4\sqrt{3}-4<x\leqslant 8$

函数 $y=x^2+8x-32$ 在区间$[-4,8]$上单调递增，且当 $x=-4$ 时，$|x^2+8x-32|=48$；当 $x=8$ 时，$|x^2+8x-32|=96$，　，当 $x=8$ 时，$\triangle OPQ$ 的面积取到最大值 $\frac{5}{16}\times 96=30$．　21．[证明](1)　棱锥 P－ABC 与棱台 DEF－ABC 的棱长和相等，　，$DE+EF+FD=PD+PE+PF$．　又　截面 DEF∥底面 ABC，　，$DE=EF=FD=PD=PE=PF$，$\angle DPE=\angle EPF=\angle FPD=60°$，　，P－ABC 为正四面体．　[解](2)取 BC 的中点 M，连接 PM，DM，AM．　BC⊥PM，BC⊥AM，，BC⊥平面 PAM，BC⊥DM，　则 $\angle DMA$ 为二面角 D－BC－A 的平面角．由(1)知，P－ABC 的各棱长均为 1，　，$PM=AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 D 是 PA 的中点，得 $\sin\angle DMA=\frac{AD}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，　，$\angle DMA=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$．(3)存在满足条件的直平行六面体．



棱台 DEF－ABC 的棱长和为定值 6，体积为 V．设直平行六面体的棱长均为 $\frac{1}{2}$，底面相邻两边夹角为 α，则该六面体棱长和为 $12\times\frac{1}{2}=6$，体积为 $\frac{1}{8}\sin\alpha=V$．　正四面体 P－ABC 的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{12}$，，$0<V<\frac{\sqrt{2}}{12}$，$0<8V<1$．可知 $\alpha=\arcsin(8V)$　故构造棱长均为 $\frac{1}{2}$，底面相邻两边夹角为 $\arcsin(8V)$ 的直平行六面体即满足要求．　22．(理)[解](1) $a_1=|OP_1|^2=100$，由 $S_3=\frac{3}{2}(a_1+a_3)=255$，得 $a_3=|OP_3|^2=70$．　由 $\begin{cases}\frac{x_3^2}{100}+\frac{y_3^2}{25}=1\\ x_3^2+y_3^2=70\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_3^2=60\\ y_3^2=10\end{cases}$，　，点 P_3 的坐标可以为 $(2\sqrt{15},\sqrt{10})$．　(2)[解法一]原点 O 到二次曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$　上各点的最小距离为 b，最大距离为 a．　$a_1=|OP_1|^2=a^2$，，$d<0$，且 $a_n=|OP_n|^2=a^2+(n-1)d\geqslant b^2$，　，$\frac{b^2-a^2}{n-1}\leqslant d<0$．　$n\geqslant 3$，$\frac{n(n-1)}{2}>0$，　，$S_n=na^2+\frac{n(n-1)}{2}d$ 在 $\left[\frac{b^2-a^2}{n-1},0\right)$ 上递增，故 S_n 的最小值为 $na^2+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{b^2-a^2}{n-1}=\frac{n(a^2+b^2)}{2}$．[解法二]　对每个自然数 k $(2\leqslant k\leqslant n)$，　由 $\begin{cases}x_k^2+y_k^2=a^2+(k-1)d\\ \frac{x_k^2}{a^2}+\frac{y_k^2}{b^2}=1\end{cases}$，解得 $y_k^2=\frac{-b^2(k-1)d}{a^2-b^2}$．　$0<y_k^2\leqslant b^2$，得 $\frac{b^2-a^2}{k-1}\leqslant d<0$，，$\frac{b^2-a^2}{n-1}\leqslant d<0$．　以下与解法一相同．　(3)[解法一]若双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，点 $P_1(a,0)$，则对于给定的 n，点 $P_1,P_2\cdots,P_n$ 存在的充要条件是 $d>0$．　原点 O 到双曲线

C 上各点的距离 $h\in[|a|,+\quad)$，且 $|OP_1|^2=a^2$，，点 $P_1,P_2\cdots,P_n$ 存在当且仅当 $|OP_n|^2>|OP_1|^2$，即 $d>0$. [解法二]若抛物线 $C:y^2=2px$，点 $P_1(0,0)$，则对于给定的 n，点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 存在的充要条件是 $d>0$. 理由同上. [解法三]若圆 $C:(x-a)^2+y^2=a^2(a\neq0)$，点 $P_1(0,0)$，则对于给定的 n，点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 存在的充要条件是 $0<d\leqslant\frac{4a^2}{n-1}$. 原点 O 到圆 C 上各点的最小距离为 0，最大距离为 $2|a|$，且 $|OP_1|^2=0$，$d>0$ 且 $|OP_n|^2=(n-1)d\leqslant4a^2$，即 $0<d\leqslant\frac{4a^2}{n-1}$. (文)(1) $a_1=|OP_1|^2=9$，由 $S_3=\frac{3}{2}(a_1+a_3)=162$，得 $a_3=|OP_3|^2=99$ 由 $\begin{cases}\frac{x_3^2}{9}-y_3^2=1\\x_3^2+y_3^2=99\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_3^2=90\\y_3^2=9\end{cases}$，，点 P_3 的坐标可以为 $(3\sqrt{10},3)$. (2)对每个自然数 k，$1\leqslant k\leqslant n$，由题意 $|OP_k|^2=(k-1)d$，及 $\begin{cases}y_k^2=2px_k\\x_k^2+y_k^2=(k-1)d\end{cases}$，得 $x_k^2+2px_k=(k-1)d$，

即 $(x_k+p)^2=p^2+(k-1)d$，

，$(x_1+p)^2,(x_2+p)^2,\cdots,(x_n+p)^2$ 是首项为 p^2，公差为 d 的等差数列.

(3)同(理)(2)

6 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)

1.(理)A,(文)D 2.C 3.A 4.(理)D,(文)A 5.(理)D,(文)B 6.(理)C,(文)D 7.(理)B,(文)C 8.B 9.(理)π,(文)π 10.(理) $x_1=0,x_2=1$;(文) $x_1=1,x_2=2$ 11.(理)$4\sqrt{3}$，192π,(文)(0,1) $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant1+\sqrt{2}$ 12.(理) $x^2+(y+1)^2=1$ $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant1+\sqrt{2}$,(文)$4\sqrt{3}$ 192π 13. 大 -3 14.(理)3 当 n 为偶数时，$S_n=\frac{5}{2}$；当 n 为奇数时，$S_n=\frac{5}{2}n-\frac{1}{2}$；(文)52 15. 解法一： $\sin A+\cos A=\sqrt{2}\cos(A-45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，，$\cos(A-45°)=\frac{1}{2}$. 又 $0°<A<180°$，，$A-45°=60°$，$A=105°$.，$tgA=tg(45°+60°)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$. $\sin A=\sin105°=\sin(45°+60°)=\sin45°\cos60°+\cos45°\sin60°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin A=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$. 解法二： $\sin A+\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，①，$(\sin A+\cos A)^2=\frac{1}{2}$，，$2\sin A\cos A=-\frac{1}{2}$. $0°<A<180°$，，$\sin A>0$，$\cos A<0$. $(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cos A=\frac{3}{2}$，，$\sin A-\cos A=\frac{\sqrt{6}}{2}$.② ①+②得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.①-②得 $\cos A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.，$tgA=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=-2-\sqrt{3}$.(以下同解法一) 16.(理)解(Ⅰ)正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面展开图是一个长为 9，宽为 4 的矩形，其对角线长为 $\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$.(Ⅱ)如图 1，将侧面 BB_1C_1C 绕棱 CC_1 旋转 $120°$ 使其与侧面

AA_1C_1C 在同一平面上，点 P 运动到点 P_1 的位置，连接 MP_1，则 MP_1 就是由点 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到点 M 的最短路线．设 $PC=x$，则 $P_1C=x$．在 $Rt\triangle MAP_1$ 中，由勾股定理得 $(3+x)^2+2^2=29$，求得 $x=2.$，$PC=P_1C=2.$ $\frac{NC}{MA}=\frac{P_1C}{P_1A}=\frac{2}{5}$，，$NC=\frac{4}{5}$．

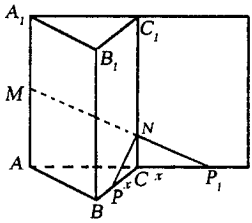


图 1

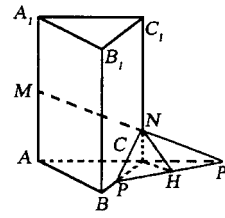
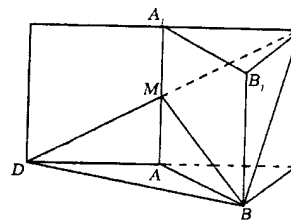


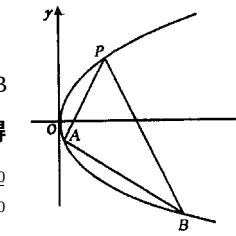
图 2

(Ⅲ)如图 2，连接 PP_1，则 PP_1 就是平面 NMP 与平面 ABC 的交线．作 $NH\perp PP_1$ 于 H，又 $CC_1\perp$ 平面 ABC，连结 CH，由三垂线定理得，$CH\perp PP_1$．，$\angle NHC$ 就是平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角的平面角(锐角)．在 $Rt\triangle PHC$ 中，$\angle PCH=\frac{1}{2}\angle PCP_1=60°$，，$CH=\frac{PC}{2}=1$．在 $Rt\triangle NCH$ 中，$tg\angle NHC=\frac{NC}{CH}=\frac{\frac{4}{5}}{1}=\frac{4}{5}$，故平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角(锐角)的大小为 $arctg\frac{4}{5}$．

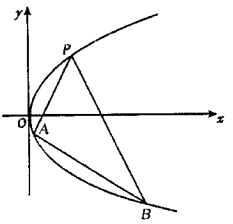
(文)解：(Ⅰ)正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面展开图是长为 6，宽为 2 的矩形，其对角线长为 $\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$．(Ⅱ)如图，将侧面 AA_1B_1B 绕棱 AA_1 旋转 120° 使其与侧面 AA_1C_1C 在同一平面上，点 B 运动到点 D 的位置，连接 DC_1 交 AA_1 于 M，则 DC_1 就是由顶点 B 沿棱柱侧面经过棱 AA_1 到顶点 C_1 的最短路线，其长为 $\sqrt{DC^2+CC_1^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$．$\triangle DMA\backsim\triangle C_1MA_1$，，$AM=A_1M_1$，故 $\frac{A_1M}{AM}=1$．(Ⅲ)连接 DB，C_1B，则 DB 就是平面 C_1MB 与平面 ABC 的交线．在 $\triangle DCB$ 中，$\angle DBC=\angle CBA+\angle ABD=60°+30°=90°$，，$CB\perp DB$，又 $C_1C\perp$ 平面 CBD，由三垂线定理得 $C_1B\perp DB.$，$\angle C_1BC$ 就是平面 C_1MB 与平面 ABC 所成二面角的平面角(锐角)．侧面 C_1B_1BC 是正方形，，$\angle C_1BC=45°$．故平面 C_1MB 与平面 ABC 所成的二面角(锐角)为 45°．



17．(理)解：(Ⅰ)当 $y=\frac{p}{2}$ 时，$x=\frac{p}{8}$，又抛物线 $y^2=2px$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，由抛物线定义得，所求距离为 $\frac{p}{8}-(-\frac{p}{2})=\frac{5p}{8}$．(Ⅱ)设直线 PA 的斜率为 k_{PA}，直线 PB 的斜率为 k_{PB}．由 $y_1^2=2px_1$，$y_0^2=2px_0$ 相减得 $(y_1-y_0)(y_1+y_0)=2p(x_1-x_0)$，故 $k_{PA}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{2p}{y_1+y_0}$ $(x_1\neq x_0)$．同理可得 $k_{PB}=\frac{2p}{y_2+y_0}$ $(x_2\neq$



x_0). 由 PA, PB 倾斜角互补知 $k_{PA} = -k_{PB}$, 即 $\frac{2p}{y_1 + y_0} = -\frac{2p}{y_2 + y_0}$, 所以 $y_1 + y_2 = -2y_0$, 故 $\frac{y_1 + y_2}{y_0} = -2$. 设直线 AB 的斜率为 k_{AB}. 由 $y_2^2 = 2px_2$, $y_1^2 = 2px_1$ 相减得 $(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1)$, 所以 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$ ($x_1 \neq x_2$). 将 $y_1 + y_2 = -2y_0$ ($y_0 > 0$) 代入得 $k_{AB} = \frac{2p}{y_1 + y_2} = -\frac{p}{y_0}$, 所以 k_{AB} 是非零常数. (文)解: (Ⅰ)由已知条件, 可设抛物线的方程为 $y^2 = 2px$. 点 P(1, 2) 在抛物线上, , $2^2 = 2p \cdot 1$, 得 $p = 2$. 故所求抛物线的方程是 $y^2 = 4x$, 准线方程是 $x = -1$. (Ⅱ)设直线 PA 的斜率为 k_{PA}, 直线 PB 的斜率为 k_{PB}, 则 $k_{PA} = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 1}$ ($x_1 \neq 1$), $k_{PB} = \frac{y_2 - 2}{x_2 - 1}$ ($x_2 \neq 1$). PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补, , $k_{PA} = -k_{PB}$. 由 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在抛物线上, 得 $y_1^2 = 4x_1$, ① $y_2^2 = 4x_2$, ②, $\frac{y_1 - 2}{\frac{1}{4}y_1^2 - 1} = -\frac{y_2 - 2}{\frac{1}{4}y_2^2 - 1}$, , $y_1 + 2 = -(y_2 + 2)$, , $y_1 + y_2 = -4$.



由① - ②得直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{y_1 + y_2} = -\frac{4}{4} = -1$ ($x_1 \neq x_2$).

18. (理)解: (Ⅰ)由 $f(0) = 2f(0)$, 得 $f(0) = 0$. 由 $f(1) = 2f(\frac{1}{2})$ 及 $f(1) = 1$, 得 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}$. 同理, $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. 归纳得 $f(\frac{1}{2^i}) = \frac{1}{2^i}$ ($i = 1, 2, \cdots$). (Ⅱ)当 $\frac{1}{2^i} < x \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2^{i-1}} + k(x - \frac{1}{2^{i-1}})$, $a_i = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-1}} + k(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i-1}})\right](\frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}) = (1 - \frac{k}{4})\frac{1}{2^{2i-1}}$ ($i = 1, 2, \cdots$). 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}(1 - \frac{k}{4})$, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列, 所以 $S(k) = \lim\limits_{n\to}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{k}{4})}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}(1 - \frac{k}{4})$. $S(k)$ 的定义域为 $0 < k \leqslant 1$, 当 $k = 1$ 时取得最小值 $\frac{1}{2}$. (文)解: (Ⅰ)由 $f(0) = 2f(0)$, 得 $f(0) = 0$. 由 $f(1) = 2f(\frac{1}{2})$ 及 $f(1) = 1$, 得 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}$. 同理, $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. 归纳得 $f(\frac{1}{2^i}) = \frac{1}{2^i}$ ($i = 1, 2, \cdots$). (Ⅱ)当 $\frac{1}{2^i} < x \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2^{i-1}}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{8}$, $a_i = \frac{1}{2^{i-1}}(\frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}) = \frac{1}{2^{2i-1}}$ ($i = 1, 2, \cdots$). 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列. 所以 $\lim\limits_{n\to}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$.

19. 解: (Ⅰ)列车在 B, C 两站的运行误差(单位: 分钟)分别是 $\left|\frac{300}{v} - 7\right|$ 和 $\left|\frac{480}{v} - 11\right|$. (Ⅱ)由于列车在 B, C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟, 所以 $\left|\frac{300}{v} - 7\right| + \left|\frac{480}{v} - 11\right| \leqslant 2$. (*)当 $0 < v \leqslant \frac{300}{7}$ 时, (*)式变形为 $\frac{300}{v} - 7 + \frac{480}{v} - 11 \leqslant 2$, 解得 $39 \leqslant v \leqslant \frac{300}{7}$; 当 $\frac{300}{7} < v \leqslant \frac{480}{11}$ 时, (*)式变形

为 $7-\frac{300}{v}+\frac{480}{v}-11\leqslant 2$，解得 $\frac{300}{7}<v\leqslant\frac{480}{11}$；当 $v>\frac{480}{11}$ 时，(*)式变形为 $7-\frac{300}{v}+11-\frac{480}{v}\leqslant 2$，解得 $\frac{480}{11}<v\leqslant\frac{195}{4}$. 综上所述，v 的取值范围是 $[39,\frac{195}{4}]$. 20. 解：(Ⅰ) $r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_N$. 除第 N 组外的每组至少含有 $\frac{150}{50}=3$ 个数. (Ⅱ)当第 n 组形成后，因为 $n<N$，所以还有数没分完，这时余下的每个数必大于余差 r_n. 余下数之和也大于第 n 组的余差 r_n，即 $L-[(150-r_1)+(150-r_2)+\cdots+(150-r_n)]>r_n$，由此可得 $r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}>150n-L$. 因为 $(n-1)r_{n-1}\geqslant r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}$，所以 $r_{n-1}>\frac{150n-L}{n-1}$. (Ⅲ)用反证法证明结论. 假设 $N>11$，即第 11 组形成后，还有数没分完，由(Ⅰ)和(Ⅱ)可知，余下的每个数都大于第 11 组的余差 r_{11}，且 $r_{11}\geqslant r_{10}$，故余下的每个数 $>r_{11}\geqslant r_{10}>\frac{150\times 11-1275}{10}=37.5$. (*)因为第 11 组数中至少含有 3 个数，所以第 11 组数之和大于 $37.5\times 3=112.5$. 此时第 11 组的余差 $r_{11}=150-$ 第 11 组数之和 $<150-112.5=37.5$，这与(*)式中 $r_{11}>37.5$ 矛盾，所以 $N\leqslant 11$.

7 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

1.D 2.A 3.(理)A (文)B 4.(理)C (文)A 5.(理)A (文)C 6.(理)B (文)A 7.A 8.B 9.(理)C (文)D 10.C 11.(理)D (文)C 12.D 13. 80 14.(理)$(-\ ,-\frac{13}{4})$ (文) -1 15.(理)2004 (文)同(理) 14 16.(理) 300 (文) 36 17.(Ⅰ)

解：$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$. 由 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{2}$，有 $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2}$. 解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$.

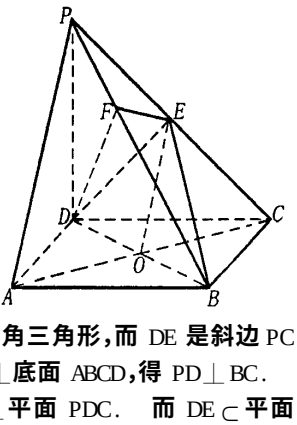
(Ⅱ)解法一：$\frac{\sin2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}=\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\tan\alpha-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$.

解法二：由(Ⅰ)，$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，得 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}\cos\alpha$. ，$\sin^2\alpha=\frac{1}{9}\cos^2\alpha$. $1-\cos^2\alpha=\frac{1}{9}\cos^2\alpha$. ，$\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$. 于是 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{4}{5}$，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{3}\cos^2\alpha=-\frac{3}{5}$. 代入得 $\frac{\sin2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{9}{10}}{1+\frac{4}{5}}=-\frac{5}{6}$. 18.(理)(Ⅰ)解：$\xi$ 可能取的值为 0，1，2. $P(\xi=k)=\frac{C_2^k\cdot C_4^{3-k}}{C_6^3}$，$k=0,1,2$. 所以，$\xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(Ⅱ)解 由(Ⅰ),ξ 的数学期望为 $E\xi = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1$.

(Ⅲ)解 由(Ⅰ),"所选 3 人中女生人数 $\xi \leqslant 1$"的概率为 $P(\xi \leqslant 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \frac{4}{5}$. (文)(Ⅰ)解 所选 3 人都是男生的概率为 $\frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$. (Ⅱ)解 所选 3 人中恰有 1 名女生的概率为 $\frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}$. (Ⅲ)解 所选 3 人中至少有 1 名女生的概率为 $\frac{C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{5}$.

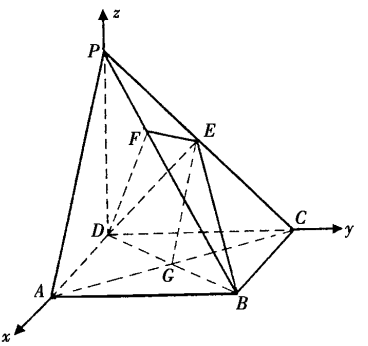


19.(理)方法一:

(Ⅰ)证明 连结 AC,AC 交 BD 于 O. 连结 EO. 底面 ABCD 是正方形,∴点 O 是 AC 的中点, 在△PAC 中,EO 是中位线,∴PA // EO. 而 EO ⊂ 平面 EDB 且 PA ⊄ 平面 EDB, 所以,PA // 平面 EDB. (Ⅱ)证明: PD ⊥ 底面 ABCD 且 DC ⊂ 底面 ABCD,∴PD ⊥ DC. PD = DC,可知△PDC 是等腰直角三角形,而 DE 是斜边 PC 的中线,∴DE ⊥ PC. ① 同样由 PD ⊥ 底面 ABCD,得 PD ⊥ BC. 底面 ABCD 是正方形,有 DC ⊥ BC,∴BC ⊥ 平面 PDC. 而 DE ⊂ 平面 PDC,∴BC ⊥ DE. ② 由①和②推得 DE ⊥ 平面 PBC. 而 PB ⊂ 平面 PBC,∴DE ⊥ PB. 又 EF ⊥ PB 且 DE ∩ EF = E,所以 PB ⊥ 平面 EFD. (Ⅲ)解 由(Ⅱ)知,PB ⊥ DF,故∠EFD 是二面角 C—PB—D 的平面角. 由(Ⅱ)知,DE ⊥ EF,PD ⊥ DB. 设正方形 ABCD 的边长为 a,则 $PD = DC = a$, $BD = \sqrt{2}a$, $PB = \sqrt{PD^2 + BD^2} = \sqrt{3}a$, $PC = \sqrt{PD^2 + DC^2} = \sqrt{2}a$, $DE = \frac{1}{2}PC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. 在 Rt△PDB 中, $DF = \frac{PD \cdot BD}{PB} = \frac{a \cdot \sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

在 Rt△EFD 中, $\sin\angle EFD = \frac{DE}{DF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$\angle EFD = \frac{\pi}{3}$. 所以,二面角 C—PB—D 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

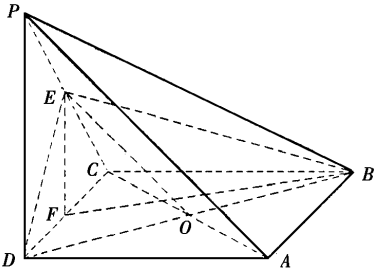
方法二 如图所示建立空间直角坐标系,D 为坐标原点. 设 DC = a. (Ⅰ)证明 连结 AC,AC 交 BD 于 G. 连结 EG. 依题意得 A(a,0,0),P(0,0,a), $E(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$. 底面 ABCD 是正方形,∴G 是此正方形的中心,故点 G 的坐标为 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ 且 $\overrightarrow{PA} = (a,0,-a)$, $\overrightarrow{EG} = (\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2})$.



∴$\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{EG}$. 这表明 PA // EG. 而 EG ⊂ 平面 EDB 且 PA ⊄ 平面 EDB,∴PA // 平面 EDB. (Ⅱ)证明 依题意得 B(a,a,0), $\overrightarrow{PB} = (a,a,-a)$. 又 $\overrightarrow{DE} = (0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$,故 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$. ∴PB ⊥ DE. 由已知 EF ⊥ PB,且 EF ∩ DE = E,所以 PB ⊥ 平面 EFD. (Ⅲ)解 设点 F 的坐标为 (x_0, y_0, z_0), $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PB}$,则 $(x_0, y_0, z_0 - a) = \lambda(a,a,-a)$. 从而

$x_0=\lambda a, y_0=\lambda a, z_0=(1-\lambda)a$. 所以 $\overrightarrow{FE}=(-x_0,\frac{a}{2}-y_0,\frac{a}{2}-z_0)=(-\lambda a,(\frac{1}{2}-\lambda)a,(\lambda-\frac{1}{2})a)$. 由条件 $EF\perp PB$ 知，$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，即 $-\lambda a^2+(\frac{1}{2}-\lambda)a^2-(\lambda-\frac{1}{2})a^2=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$. ，点 F 的坐标为 $(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{2a}{3})$，且 $\overrightarrow{FE}=(-\frac{a}{3},\frac{a}{6},-\frac{a}{6})$，$\overrightarrow{FD}=(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{2a}{3})$. ，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{FD}=-\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}=0$. 即 $PB\perp FD$，故$\angle EFD$ 是二面角 C—PB—D 的平面角. $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}=\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{18}+\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{6}$，且 $|\overrightarrow{FE}|=\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{36}+\frac{a^2}{36}}=\frac{\sqrt{6}}{6}a$，$|\overrightarrow{FD}|=\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{4a^2}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，，$\cos\angle EFD=\frac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FE}||\overrightarrow{FD}|}=\frac{\frac{a^2}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6}a\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a}=\frac{1}{2}$. ，$\angle EFD=\frac{\pi}{3}$. 所以，二面角 C—PB—D 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

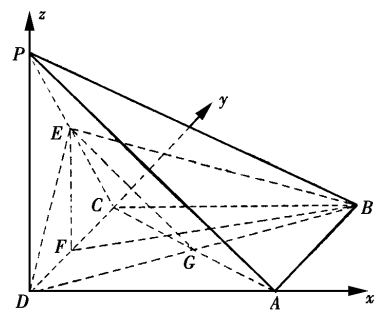
(文)方法一：(Ⅰ)证明：连结 AC，AC 交 BD 于 O. 连结 EO.



底面 ABCD 是正方形，，点 O 是 AC 的中点，在△PAC 中，EO 是中位线，，PA∥EO. 而 EO⊂平面 EDB 且 PA⊄平面 EDB，所以，PA∥平面 EDB. (Ⅱ)解：作 $EF\perp DC$ 交 DC 于 F，连结 BF. 设正方形 ABCD 的边长为 a. $PD\perp$底面 ABCD，，$PD\perp DC$. ，$EF\parallel PD$，F 为 DC 的中点. ，$EF\perp$底面 ABCD，BF 为 BE 在底面 ABCD 内的射影，故$\angle EBF$ 为直线 EB 与底面 ABCD 所成的角.

在 Rt△BCF 中，$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$. $EF=\frac{1}{2}PD=\frac{a}{2}$，，在 Rt△EFB 中，$\tan\angle EBF=\frac{EF}{BF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 所以 EB 与底面 ABCD 所成的角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

方法二 如图所示建立空间直角坐标系，D 为坐标原点. 设 DC = a. (Ⅰ)证明 连结 AC，AC 交 BD 于 G. 连结 EG. 依题意得 A(a，0，0)，P(0，0，a)，E(0，$\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}$). 底面 ABCD 是正方形，，G 是此正方形的中心，故点 G 的坐标为($\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}$，0) ，$\overrightarrow{PA}=(a,0,-a)$，$\overrightarrow{EG}=(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2})$. ，$\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$. 这表明 PA∥EG. 而 EG⊂平面 EDB 且 PA⊄平面 EDB，，PA∥平面 EDB. (Ⅱ)解：依题意得 B(a，a，0)，C(0，a，0). 取 DC 的中点 F(0，$\frac{a}{2}$，0)，连结 EF，BF.



$\overrightarrow{FE}=(0,0,\frac{a}{2})$，$\overrightarrow{FB}=(a,\frac{a}{2},0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,a,0)$，，$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.

，$FE\perp FB$，$FE\perp DC$.，$EF\perp$底面 $ABCD$，BF 为 BE 在底面 $ABCD$ 内的射影，故$\angle EBF$ 为直线 EB 与底面 $ABCD$ 所成的角. 在 $Rt\triangle EFB$ 中，

$|\overrightarrow{FE}|=\frac{a}{2}$，$|\overrightarrow{FB}|=\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.，$\tan\angle EBF=\frac{|\overrightarrow{FE}|}{|\overrightarrow{FB}|}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 所以，$EB$ 与底面 $ABCD$ 所成的角的正切值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. 20.(理)(Ⅰ)解：$f'(x)=3ax^2+2bx-3$，依题意，$f'(1)=f'(-1)=0$，即 $\begin{cases}3a+2b-3=0,\\3a-2b-3=0.\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=0$.，$f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，$x=1$. 若 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，则 $f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(-\infty,-1)$上是增函数，$f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数. 若 $x\in(-1,1)$，则 $f'(x)<0$，故 $f(x)$在$(-1,1)$上是减函数. 所以，$f(-1)=2$ 是极大值；$f(1)=-2$ 是极小值. (Ⅱ)解：曲线方程为 $y=x^3-3x$. 点 $A(0,16)$ 不在曲线上. 设切点为 $M(x_0,y_0)$，则点 M 的坐标满足 $y_0=x_0^3-3x_0$. 因 $f'(x_0)=3(x_0^2-1)$，故切线的方程为 $y-y_0=3(x_0^2-1)(x-x_0)$ 注意到点 $A(0,16)$ 在切线上，有 $16-(x_0^3-3x_0)=3(x_0^2-1)(0-x_0)$ 化简得 $x_0^3=-8$，解得 $x_0=-2$. 所以，切点为 $M(-2,-2)$，切线方程为 $9x-y+16=0$. (文)(Ⅰ)证明：因 a_1,a_2,a_4 成等比数列，故 $a_2^2=a_1a_4$. 而 $\{a_n\}$ 是等差数列，有 $a_2=a_1+d$，$a_4=a_1+3d$. 于是 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$，即 $a_1^2+2a_1d+d^2=a_1^2+3a_1d$. 化简得 $a_1=d$.

(Ⅱ)解：由条件 $S_{10}=110$ 和 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d$，得到 $10a_1+45d=110$.

由(Ⅰ)，$a_1=d$，代入上式得 $55d=110$，故 $d=2$，$a_n=a_1+(n-1)d=2n$. 因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$，$n=1,2,3,\cdots$. 21.(理)(Ⅰ)证明：由 $b_1=a_2-a_1\neq0$，可得 $b_2=a_3-a_2=f(a_2)-f(a_1)=k(a_2-a_1)\neq0$. 由数学归纳法可证 $b_n=a_{n+1}-a_n\neq0$ $(n\in N^*)$. 由题设条件，当 $n\geqslant2$ 时 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\frac{f(a_n)-f(a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}}=\frac{k(a_n-a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}}=k$.

因此，数列 $\{b_n\}$ 是一个公比为 k 的等比数列.(Ⅱ)解：由(Ⅰ)知，$b_n=k^{n-1}b_1=k^{n-1}(a_2-a_1)$ $(n\in N^*)$. 当 $k\neq1$ 时 $b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(a_2-a_1)\frac{1-k^{n-1}}{1-k}$ $(n\geqslant2)$. 当 $k=1$ 时 $b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(n-1)(a_2-a_1)$ $(n\geqslant2)$. 而 $b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_1$ $(n\geqslant2)$. 所以，当 $k\neq1$ 时 $a_n-a_1=(a_2-a_1)\frac{1-k^{n-1}}{1-k}$ $(n\geqslant2)$. 上式对 $n=1$ 也成立. 所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a+(f(a)-a)\frac{1-k^{n-1}}{1-k}$ $(n\in N^*)$，当 $k=1$ 时 $a_n-a_1=(n-1)(a_2-a_1)$ $(n\geqslant2)$. 上式对 $n=1$ 也成立. 所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a+(n-1)(f(a)-a)$ $(n\in N^*)$. (Ⅲ)解：当 $|k|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}[a+(f(a)-a)\frac{1-k^{n-1}}{1-k}]=a+\frac{f(a)-a}{1-k}$. (文)(Ⅰ)解：由奇函数的定义，应有 $f(-x)=-f(x)$，$x\in R$. 即 $-ax^3-cx+d=-ax^3-cx-d$，，$d=0$. 因此，$f(x)=ax^3+cx$，

$f'(x)=3ax^2+c$. 由条件 $f(1)=-2$ 为 $f(x)$ 的极值,必有 $f'(1)=0$,故 $\begin{cases}a+c=-2\\3a+c=0\end{cases}$ 解得 $a=1$, $c=-3$. 因此, $f(x)=x^3-3x$, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$, $f'(-1)=f'(1)=0$. 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在单调区间 $(-\infty,-1)$ 上是增函数. 当 $x\in(-1,1)$ 时, $f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在单调区间 $(-1,1)$ 上是减函数. 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在单调区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数. 所以, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值,极大值为 $f(-1)=2$. (Ⅱ)解:由(Ⅰ)知, $f(x)=x^3-3x$ ($x\in[-1,1]$)是减函数,且 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值 $Max=f(-1)=2$, $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值 $Min=f(1)=-2$. 所以,对任意的 $x_1,x_2\in(-1,1)$,恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<M-m=2-(-2)=4$.

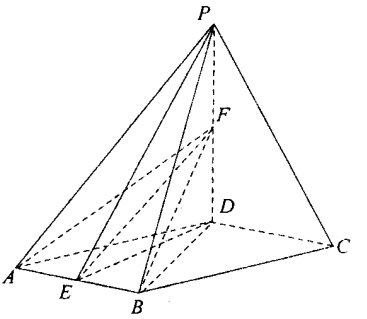
22.(Ⅰ)解:由题意,可设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ ($a>\sqrt{2}$). 由已知得 $\begin{cases}a^2-c^2=2,\\ c=2\left(\frac{a^2}{c}-c\right).\end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{6}$, $c=2$. 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$,离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$. (Ⅱ)解:由(Ⅰ)可得 $A(3,0)$. 设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-3)$. 由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x-3).\end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2-18k^2x+27k^2-6=0$. 依题意 $\Delta=12(2-3k^2)>0$,得 $-\frac{\sqrt{6}}{3}<k<\frac{\sqrt{6}}{3}$. 设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2+1}$ ① $x_1x_2=\frac{27k^2-6}{3k^2+1}$. ② 由直线 PQ 的方程得 $y_1=k(x_1-3)$, $y_2=k(x_2-3)$. 于是 $y_1y_2=k^2(x_1-3)(x_2-3)=k^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]$. ③ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, $x_1x_2+y_1y_2=0$. ④ 由①②③④得 $5k^2=1$,从而 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. 所以直线 PQ 的方程为 $x-\sqrt{5}y-3=0$ 或 $x+\sqrt{5}y-3=0$. (Ⅲ)(理)证明: $\overrightarrow{AP}=(x_1-3,y_1)$, $\overrightarrow{AQ}=(x_2-3,y_2)$. 由已知得方程组 $\begin{cases}x_1-3=\lambda(x_2-3),\\ y_1=\lambda y_2,\\ \frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{2}=1,\\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{2}=1.\end{cases}$ 注意 $\lambda>1$,解得 $x_2=\frac{5\lambda-1}{2\lambda}$. 因 $F(2,0)$, $M(x_1,-y_1)$,故 $\overrightarrow{FM}=(x_1-2,-y_1)=(\lambda(x_2-3)+1,-y_1)=\left(\frac{1-\lambda}{2},-y_1\right)=-\lambda\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda},y_2\right)$. 而 $\overrightarrow{FQ}=(x_2-2,y_2)=\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda},y_2\right)$,所以 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.

8 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(辽宁卷)

1.D 2.D 3.B 4.C 5.B 6.D 7.B 8.C 9.A 10.A 11.C 12.B 13.1 14. $-2\sqrt{\pi}$ 15.a 16. $\frac{13}{63}$

17. 本小题主要考查空间中的线面关系,四棱锥的有关概念及余弦定理等基础知识,考查空间想象能力和推理能力.满分 12 分. (Ⅰ)证明:连

接 BD. AB = AD,∠DAB = 60°, △ADB 为等边三角形. E 是 AB 中点, AB⊥DE.(2 分) PD⊥面 ABCD,AB⊂面 ABCD, AB⊥PD. DE⊂面 PED,PD⊂面 PED,DE∩PD = D, AB⊥面 PED.(4 分) AB⊂面 PAB, PED⊥面 PAB.(6 分)



(Ⅱ)解: AB⊥平面 PED,PE⊂面 PED, AB⊥PE. 连接 EF, EF⊂面 PED, AB⊥EF. ∠PEF 为二面角 P - AB - F 的平面角.(9 分) 设 AD = 2,那么 PF = FD = 1, DE = $\sqrt{3}$. 在△PEF 中,PE = $\sqrt{7}$,EF = 2,PF = 1, $\cos\angle PEF = \frac{(\sqrt{7})^2 + 2^2 - 1}{2\times 2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, 即二面角 P - AB - F 的平面角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{7}}{14}$.(12 分) 18. 本小题主要考查集合的有关概念,含绝对值的不等式,简单三角函数式的化简和已知三角函数值求角等基础知识,考查简单的分类讨论方法,以及分析问题和推理计算能力. 满分 12 分. 解:(Ⅰ)由 |x - 1| + a - 1 > 0 得 |x - 1| > 1 - a. 当 a > 1 时,解集是 R; 当 a ≤ 1 时,解集是 {x | x < a 或 x > 2 - a}.(3 分) (Ⅱ)当 a > 1 时,$C_U A = \varnothing$; 当 a ≤ 1 时,$C_U A = \{x \mid a \leqslant x \leqslant 2 - a\}$.(5 分) 因 $\sin(\pi x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}\cos(\pi x - \frac{\pi}{3}) = 2[\sin(\pi x - \frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3} + \cos(\pi x - \frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}] = 2\sin\pi x$, 由 $\sin\pi x = 0$,得 $\pi x = k\pi (k \in Z)$,即 $x = k \in Z$,所以 B = Z.(8 分) 当 $(C_U A) \cap B$ 恰有 3 个元素时,a 应满足 $\begin{cases} a < 1, \\ 2 \leqslant 2 - a < 3, \\ -1 < a \leqslant 0. \end{cases}$ 解得 $-1 < a \leqslant 0$.(12 分) 19. 本小题主要考查平面向量的概念、直线方程的求法、椭圆的方程和性质等基础知识,以及轨迹的求法与应用、曲线与方程的关系等解析几何的基本思想和综合解题能力. 满分 12 分. (Ⅰ)解法一:直线 l 过点 M(0,1),设其斜率为 k,则 l 的方程为 y = kx + 1. 记 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$,由题设可得点 A、B 的坐标 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 是方程组 $\begin{cases} y = kx + 1, & ① \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 & ② \end{cases}$ 的解.(2 分) 将①代入②并化简得,$(4 + k^2)x^2 + 2kx - 3 = 0$,所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2k}{4 + k^2}, \\ y_1 + y_2 = \frac{8}{4 + k^2}. \end{cases}$ 于是 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}) = (\frac{-k}{4 + k^2}, \frac{4}{4 + k^2})$.(6 分) 设点 P 的坐标为 (x,y),则 $\begin{cases} x = \frac{-k}{4 + k^2}, \\ y = \frac{4}{4 + k^2}. \end{cases}$ 消去参数 k 得 $4x^2 + y^2 - y = 0$. 当 k 不存在时,A、B 中点为坐标原点 (0,0),也满足方程③,所以点 P 的轨迹方程为 $4x^2 + y^2 - y = 0$. 解法二:设点 P 的坐标为 (x,y),因 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 在椭圆上,所以 $x_1^2 + \frac{y_1^2}{4} = 1$, ④ $x_2^2 + \frac{y_2^2}{4} = 1$. ⑤ ④ - ⑤得 $x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{4}(y_1^2 - y_2^2) = 0$,所以 $(x_1 - x_2)$

$(x_1+x_2)+\frac{1}{4}(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$. 当 $x_1\neq x_2$ 时,有 $x_1+x_2+\frac{1}{4}(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$, ⑥ 并且 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\\ \frac{y-1}{x}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.\end{cases}$ ⑦ 将⑦代入⑥并整理得 $4x^2+y^2-y=0$. ⑧ 当 $x_1=x_2$ 时,点 A、B 的坐标为(0,2)、(0,-2),这时点 P 的坐标为(0,0)也满足⑧,所以点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{16}}+\frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}=1$. (Ⅱ)解:由点 P 的轨迹方程知 $x^2\leqslant\frac{1}{16}$,即 $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}$. 所以 $|\overrightarrow{NP}|^2=(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}-4x^2=-3(x+\frac{1}{6})^2+\frac{7}{12}$ (10 分)

故当 $x=\frac{1}{4}$ 时,$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最小值,最小值为 $\frac{1}{4}$;当 $x=-\frac{1}{6}$ 时,$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最大值,最大值为 $\frac{\sqrt{21}}{6}$. (12 分) 20. 本小题主要考查函数的概念,运用导数求函数最大值、最小值的方法,以及运用数学知识,建立简单数学模型并解决实际问题的能力. 满分 12 分. (Ⅰ)解法一:因为赔付价格为 s 元/吨,所以乙方的实际年利润为: $w=2000\sqrt{t}-st$. (2 分) 因为 $w=2000\sqrt{t}-s(\sqrt{t})^2=-s[\sqrt{t}-\frac{1000}{s}]^2+\frac{1000^2}{s}$,所以当 $t=(\frac{1000}{s})^2$ 时,w 取得最大值.

所以乙方取得最大年利润的年产量 $t=(\frac{1000}{s})^2$(吨). (4 分) 解法二:因为赔付价格为 s 元/吨,所以乙方的实际年利润为: $w=2000\sqrt{t}-st$. (2 分) 由 $w'=\frac{1000}{\sqrt{t}}-s=\frac{1000-s\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$,令 $w'=0$ 得 $t=t_0=(\frac{1000}{s})^2$. 当 $t<t_0$ 时,$w'>0$;当 $t>t_0$ 时,$w'<0$,所以 $t=t_0$ 时,w 取得最大值. 因此乙方取得最大年利润的年产量 $t_0=(\frac{1000}{s})^2$(吨). (4 分) (Ⅱ)设甲方净收入为 v 元,则 $v=st-0.002t^2$. (6 分) 将 $t=(\frac{1000}{s})^2$ 代入上式,得到甲方净收入 v 与赔付价格 s 之间的函数关系式 $v=\frac{1000^2}{s}-\frac{2\times1000^3}{s^4}$. (8 分) 又 $v'=-\frac{1000^2}{s^2}+\frac{8\times1000^3}{s^5}=\frac{1000^2\times(8000-s^3)}{s^5}$,令 $v'=0$,得 $s=20$. 当 $s<20$ 时,$v'>0$;当 $s>20$ 时,$v'<0$,所以 $s=20$ 时,v 取得最大值. 因此甲方向乙方要求赔付价格 $s=20$(元/吨)时,获最大净收入. (12 分) 注:若将 $s=\frac{1000}{\sqrt{t}}$ 代入 v 的表达式求解,可参照上述标准给分. 21. 本小题主要考查函数和不等式的概念,考查数学归纳法,以及灵活运用数学方法分析和解决问题的能力. 满分 14 分. (Ⅰ)解:由于 $f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\frac{1}{6}$,所以 $f(\frac{a}{3})=\frac{a^2}{6}\leqslant\frac{1}{6}$,即 $a^2\leqslant1$. (3 分) ① 又 $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 时,$f(x)\geqslant\frac{1}{8}$,所以 $\begin{cases}f(\frac{1}{2})\geqslant\frac{1}{8},\\ f(\frac{1}{4})\geqslant\frac{1}{8},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{3}{8}\geqslant\frac{1}{8},\\ \frac{a}{4}-\frac{3}{32}\geqslant\frac{1}{8}.\end{cases}$ 解得 $a\geqslant1$. ② 由①

②得 $a=1$.(6 分) (Ⅲ)证法一:(ⅰ)当 $n=1$ 时,$0<a_1<\frac{1}{2}$,不等式 $0<a_n<\frac{1}{n+1}$成立; 因 $f(x)>0$,$x\in(0,\frac{2}{3})$, 所以 $0<a_2=f(a_1)\leqslant\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$,故 $n=2$ 时不等式也成立. (ⅱ)假设 $n=k(k\geqslant 2)$时,不等式 $0<a_k<\frac{1}{k+1}$成立,因为 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^2$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{3}$,知 $f(x)$在$(0,\frac{1}{3})$为增函数,所以由 $0<a_k<\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{3}$得 $0<f(a_k)<f(\frac{1}{k+1})$(8 分) 于是有 $0<a_{k+1}<\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{k+2}-\frac{k+4}{2(k+1)^2(k+2)}<\frac{1}{k+2}$,(12 分) 所以当 $n=k+1$ 时,不等式也成立. 根据(ⅰ)(ⅱ)可知,对任何 $n\in N^*$,不等式 $a_n<\frac{1}{n+1}$成立.(14 分) 证法二:(ⅰ)当 $n=1$ 时, $0<a_1<\frac{1}{2}$, 不等式 $0<a_n<\frac{1}{n+1}$成立; (ⅱ)假设 $n=k(k\geqslant 1)$时不等式成立,即 $0<a_k<\frac{1}{k+1}$,则当 $n=k+1$ 时, $a_{k+1}=a_k(1-\frac{3}{2}a_k)=\frac{1}{k+2}\cdot(k+2)a_k\cdot(1-\frac{3}{2}a_k)$(8 分) 因 $(k+2)a_k>0$, $1-\frac{3}{2}a_k>0$,所以 $(k+2)a_k\cdot(1-\frac{3}{2}a_k)\leqslant\left[\frac{1+(k+2-\frac{3}{2})a_k}{2}\right]^2=\left[\frac{1+(k+\frac{1}{2})a_k}{2}\right]^2<1$.(12 分) 于是 $0<a_{k+1}<\frac{1}{k+2}$. 因此当 $n=k+1$ 时,不等式也成立. 根据(ⅰ)(ⅱ)可知,对任何 $n\in N^*$,不等式 $a_n<\frac{1}{n+1}$成立.(14 分) 证法三:(ⅰ)当 $n=1$ 时, $0<a_1<\frac{1}{2}$, 不等式 $0<a_n<\frac{1}{n+1}$成立; (ⅱ)假设 $n=k(k\geqslant 1)$时, $0<a_k<\frac{1}{k+1}$, 则当 $n=k+1$ 时, 若 $0<a_k<\frac{1}{k+2}$,则 $0<a_{k+1}=a_k(1-\frac{3}{2}a_k)<a_k<\frac{1}{k+2}$ ①(8 分) 若 $\frac{1}{k+2}\leqslant a_k<\frac{1}{k+1}$,则 $0<a_{k+1}=a_k(1-\frac{3}{2}a_k)<\frac{1}{k+1}(1-\frac{3}{2}\times\frac{1}{k+2})=\frac{2k+1}{2k+2}\cdot\frac{1}{k+2}<\frac{1}{k+2}$ ②(12 分) 由①②知当 $n=k+1$ 时,不等式 $0<a_n<\frac{1}{n+1}$也成立. 根据(ⅰ)(ⅱ)可知,对任何 $n\in N^*$,不等式 $a_n<\frac{1}{n+1}$成立.(14 分) 22. 本小题主要考查反函数、指数函数和对数函数的基础知识,导数的概念和计算,以及运用函数的性质分析问题和解决问题的能力.满分 12 分. (Ⅰ)解:由 $y=f(x)=\ln(e^x+a)$ 得 $x=\ln(e^y-a)$,所以 $y=f^{-1}(x)=\ln(e^x-a)$ $(x>\ln a)$.(3 分) $f'(x)=[\ln(e^x+a)]'=\frac{e^x}{e^x+a}$.(5 分) (Ⅱ)解法一:由 $|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$ 得 $-\ln\frac{e^x+a}{e^x}+\ln(e^x-a)<m<\ln(e^x-a)+\ln\frac{e^x+a}{e^x}$ 即对于 $x\in[\ln(3a),\ln(4a)]$恒有 $\frac{e^x(e^x-a)}{(e^x+a)}<e^m<\frac{(e^x)^2-a^2}{e^x}$ ① 设 $t=e^x$,$u(t)=\frac{t(t-a)}{t+a}$, $v(t)=\frac{t^2-a^2}{t}$,于是不等式①化为 $u(t)<e^m<v(t)$ $t\in[3a,4a]$. ②(7 分) 当 $t_1<t_2$, t_1、$t_2\in[3a,4a]$时, $u(t_2)-u(t_1)=\frac{t_2(t_2-a)}{t_2+a}-\frac{t_1(t_1-a)}{t_1+a}=\frac{(t_2-t_1)[t_1t_2+a(t_1+t_2)-a^2]}{(t_1+a)(t_2+a)}>0$,$v(t_2)-v(t_1)=\frac{t_2^2-a^2}{t_2}-\frac{t_1^2-a^2}{t_1}=\frac{t_1t_2(t_2-t_1)+a^2(t_2-t_1)}{t_1t_2}>0$, 所以 $u(t)$, $v(t)$都

是增函数. 因此当 $t\in[3a,4a]$ 时， $u(t)$ 的最大值为 $u(4a)=\frac{12}{5}a$， $v(t)$ 的最小值为 $v(3a)=\frac{8}{3}a$， 而不等式②成立当且仅当 $u(4a)<e^m<v(3a)$，即 $\frac{12}{5}a<e^m<\frac{8}{3}a$，于是得 $\ln(\frac{12}{5}a)<m<\ln(\frac{8}{3}a)$.(12 分) 解法二：由 $|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$ 得 $\ln(e^x-a)-\ln(e^x+a)+x<m<\ln(e^x-a)+\ln(e^x+a)-x$. 设 $\varphi(x)=1n(e^x-a)-\ln(e^x+a)+x$，$\psi(x)=\ln(e^x-a)+\ln(e^x+a)-x$，于是原不等式对于 $x\in[\ln(3a),\ln(4a)]$ 恒成立等价于 $\varphi(x)<m<\psi(x)$. ③(7 分) 由 $\varphi'(x)=\frac{e^x}{e^x-a}-\frac{e^x}{e^x+a}+1$， $\psi'(x)=\frac{e^x}{e^x-a}+\frac{e^x}{e^x+a}-1$， 注意到 $0<e^x-a<e^x<e^x+a$， 故有 $\varphi'(x)>0$， $\psi'(x)>0$，从而可知 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 均在 $[\ln(3a),\ln(4a)]$ 上单调递增，因此不等式③成立当且仅当 $\varphi(\ln(4a))<m<\psi(\ln(3a))$，即 $\ln(\frac{12}{5}a)<m<\ln(\frac{8}{3}a)$.(12 分)

9 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)

1.A 2.B 3.D 4.C 5.A 6.B 7.C 8.A 9.D 10.C 11.B 12.A 13.$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$ 14.$(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 15.2 16.$(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$

17. 本小题主要考查三角函数的基本公式和三角函数的恒等变换等基本知识，以及推理能力和运算能力.满分 12 分

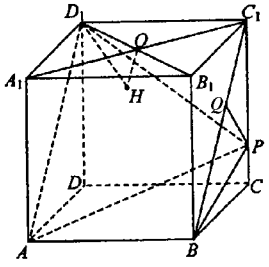
解：由已知 $\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{5}{2}$，得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

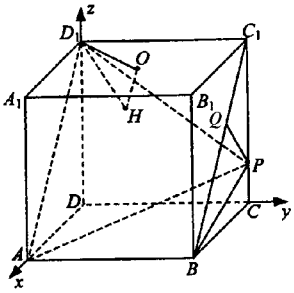
$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$， ， $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$.

从而 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{10}(4-3\sqrt{3})$.

18. 本小题主要考查线面关系和正方体性质等基本知识，考查空间想像能力和推理论证能力.满分 12 分

解法一：(Ⅰ)连结 BP. $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1， ， AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角就是$\angle APB$. $CC_1=4CP$，$CC_1=4$， ， $CP=1$. 在 $Rt\triangle PBC$ 中，$\angle PCB$ 为直角，$BC=4$，$CP=1$，故 $BP=\sqrt{17}$. 在 $Rt\triangle APB$ 中，$\angle ABP$ 为直角，$\tan\angle APB=\frac{AB}{BP}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$， ，$\angle APB=\arctan\frac{4\sqrt{17}}{17}$. 即直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 $\arctan\frac{4\sqrt{17}}{17}$. (Ⅱ)连结 A_1C_1，B_1D_1. 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形， ，$D_1O\perp A_1C_1$. 又 $AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$， ，$AA_1\perp D_1O$. $AA_1\cap A_1C_1=A_1$， ，$D_1O\perp$ 平面 A_1APC_1. 由于 $AP\subset$ 平面 A_1APC_1， ，$D_1O\perp AP$. 平面 D_1AP 的斜线 D_1O 在这个平面内的射影是 D_1H， ，$D_1H\perp AP$. (Ⅲ)连结 BC_1，在平面 BCC_1B_1 中，过点 P 作 $PQ\perp BC_1$ 于点 Q. $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，$PQ\subset$ 平面 BCC_1B_1， ，$PQ\perp AB$. ，$PQ\perp$ 平面 ABC_1D_1. ，PQ 就是点 P 到平面 ABD_1 的距离.





在 $Rt\triangle C_1PQ$ 中，$\angle C_1QP = 90°$，$\angle PC_1Q = 45°$，$PC_1 = 3$，$PQ = \frac{3}{2}\sqrt{2}$，即点 P 到平面 ABD_1 的距离为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

解法二：（Ⅰ）$AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角就是 $\angle APB$. 如图建立空间直角坐标系，坐标原点为 D. $CC_1 = 4CP$，$CC_1 = 4$，$CP = 1$，$A(4,0,0)$，$P(0,4,1)$，$B(4,4,0)$. $\overrightarrow{PA} = (4,-4,-1)$，$\overrightarrow{PB} = (4,0,-1)$. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = 16 + 0 + 1 = 17$，$\cos\angle APB = \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|} = \frac{17}{\sqrt{33}\times\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{561}}{33}$. 直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{561}}{33}$.

（Ⅱ）连结 D_1O. 由（Ⅰ）有 $D_1(0,0,4)$，$O(2,2,4)$. $\overrightarrow{D_1O} = (2,2,0)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{D_1O} = 8 - 8 + 0 = 0$，$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{D_1O}$. 平面 D_1AP 的斜线 D_1O 在这个平面内的射影是 D_1H，$D_1H\perp AP$. （Ⅲ）同解法一.

19. 本小题主要考查简单线性规划的基本知识，以及运用数学知识解决实际问题的能力. 满分 12 分

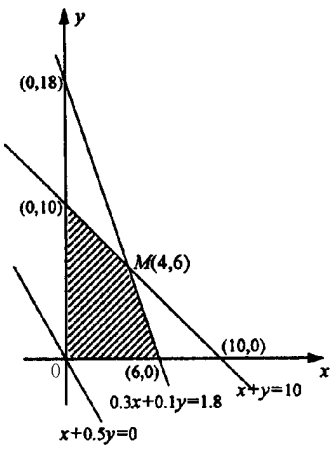
解：设投资人分别用 x 万元、y 万元投资甲、乙两个项目，由题意知

$$\begin{cases} x + y \leqslant 10, \\ 0.3x + 0.1x \leqslant 1.8 \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

目标函数 $z = x + 0.5y$. 上述不等式组表示的平面区域如图所示，阴影部分（含边界）即可行域. 作直线 l_0：$x + 0.5y = 0$，并作平行于直线 l_0 的一组直线 $x + 0.5y = z$，$z\in R$，与可行域相交，其中有一条直线经过可行域上的 M 点，且与直线 $x + 0.5y = 0$ 的距离最大，这里 M 点是直线 $x + y = 10$ 和 $0.3x + 0.1y = 1.8$ 的交点. 解方程组

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ 0.3x + 0.1y = 1.8, \end{cases}$$

得 $x = 4$，$y = 6$.



此时 $z = 1\times 4 + 0.5\times 6 = 7$（万元）. $7 > 0$，当 $x = 4$，$y = 6$ 时 z 取得最大值. 答：投资人用 4 万元投资甲项目、6 万元投资乙项目，才能在确保亏损不超过 1.8 万元的前提下，使可能的盈利最大.

20. 本小题主要考查数列的基本知识，以及运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分

解：(Ⅰ)当 $a_1=\frac{3}{2}$**，**$d=1$**时，** $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{3}{2}n+\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{1}{2}n^2+n$. **由** $S_{k^2}=(S_k)^2$**，得** $\frac{1}{2}k^4+k^2=(\frac{1}{2}k^2+k)^2$**，即** $k^3(\frac{1}{4}k-1)=0$. **又** $k\neq 0$**，所以** $k=4$. **(Ⅱ)设数列** $\{a_n\}$**的公差为** d**，则在** $S_{k^2}=(S_k)^2$ **中分别取** $k=1,2$**，得**

$$\begin{cases}S_1=(S_1)^2,\\ S_4=(S_2)^2.\end{cases}\text{即}\begin{cases}a_1=a_1^2,&(1)\\ 4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=(2a_1+\frac{2\times 1}{2}d)^2.&(2)\end{cases}$$

由(1)得 $a_1=0$ **或** $a_1=1$. **当** $a_1=0$ **时，代入(2)得** $d=0$ **或** $d=6$. **若** $a_1=0$**，**$d=0$**，则** $a_n=0$**，**$S_n=0$**，从而** $S_{k^2}=(S_k)^2$ **成立；若** $a_1=0$**，**$d=6$**，则** $a_n=6(n-1)$**，由** $S_3=18$**，**$(S_3)^2=324$**，**$S_9=216$ **知** $S_9\neq(S_3)^2$**，故所得数列不符合题意.**

当 $a_1=1$ **时，代入(2)得** $4+6d=(2+d)^2$**，解得** $d=0$ **或** $d=2$. **若** $a_1=1$**，**$d=0$**，则** $a_n=1$**，**$S_n=n$**，从而** $S_{k^2}=(S_k)^2$ **成立；若** $a_1=1$**，**$d=2$**，则** $a_n=2n-1$**，**$S_n=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$**，从而** $S_{k^2}=(S_k)^2$ **成立. 综上，共有** 3 **个满足条件的无穷等差数列：① {**a_n**}：**$a_n=0$**，即** $0,0,0,\cdots$**；② {**a_n**}：**$a_n=1$**，即** $1,1,1\cdots$**；③ {**a_n**}：**$a_n=2n-1$**，即** $1,3,5,\cdots$.

21. **本小题主要考查直线、椭圆和向量等基本知识，以及推理能力和运算能力. 满分** 12 **分**

解：(Ⅰ)设所求椭圆方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. **由已知，得** $c=m$**，**$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$**，所以** $a=2m$**，**$b=\sqrt{3}m$. **故所求的椭圆方程是** $\frac{x^2}{4m^2}+\frac{y^2}{3m^2}=1$. **(Ⅱ)设** $Q(x_Q,y_Q)$**，直线** $l:y=k(x+m)$**，则点** $M(0,km)$. **当** $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$**时，由于** $F(-m,0)$**，**$M(0,km)$**，由定比分点坐标公式，得** $x_Q=\frac{0-2m}{1+2}$

$=-\frac{2m}{3}$**，**$y_Q=\frac{km+0}{1+2}=\frac{1}{3}km$. **又点** $Q(-\frac{2m}{3},\frac{km}{3})$ **在椭圆上，所以** $\frac{\frac{4m^2}{9}}{4m^2}+\frac{\frac{k^2m^2}{9}}{3m^2}=1$. **解得** $k=\pm 2\sqrt{6}$. **当** $\overrightarrow{MQ}=-2\overrightarrow{QF}$**时，**$x_Q=\frac{0+(-2)\times(-m)}{1-2}$

$=-2m$**，**$y_Q=\frac{km}{1-2}=-km$. **于是** $\frac{4m^2}{4m^2}+\frac{k^2m^2}{3m^2}=1$**，解得** $k=0$. **故直线** l **的斜率是** $0,\pm 2\sqrt{6}$.

22. **本小题主要考查函数、不等式等基本知识，以及综合运用数学知识解决问题的能力. 满分** 14 **分**

证明：(Ⅰ)任取 $x_1,x_2\in R$**，**$x_1\neq x_2$**，则由** $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ ① **和** $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$ ② **可知** $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant|x_1-x_2|\cdot|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|^2$**，从而** $\lambda\leqslant 1$. **假设有** $b_0\neq a_0$**，使得** $f(b_0)=0$**. 则由①式知** $0<\lambda(a_0-b_0)^2\leqslant(a_0-b_0)[f(a_0)-f(b_0)]=0$**，矛盾. ，不存在** $b_0\neq a_0$**，使得** $f(b_0)=0$. **(Ⅱ)由** $b=a-\lambda f(a)$**，** ③ **可知** $(b-a_0)^2=[a-a_0-\lambda f(a)]^2=(a-a_0)^2-2\lambda(a-a_0)f(a)+\lambda^2[f(a)]^2$. ④ **由** $f(a_0)=0$ **和①式，得**$(a-a_0)f(a)=(a-a_0)[f(a)-f(a_0)]\geqslant\lambda(a-a_0)^2$. ⑤ **由** $f(a_0)=0$ **和②式知，**$[f(a)]^2=[f(a)-f(a_0)]^2\leqslant(a-a_0)^2$. ⑥ **则将⑤、⑥代入④式，得** $(b-a_0)^2\leqslant(a-a_0)^2-2\lambda^2(a-a_0)^2+\lambda^2(a-a_0)^2=(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$. **(Ⅲ)由③式，可知** $[f(b)]^2=$

$[f(b)-f(a)+f(a)]^2 = [f(b)-f(a)]^2+2f(a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2$

$\leqslant (b-a)^2-2\cdot\frac{b-a}{\lambda}[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2$ **(用②式)** $=\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}(b-a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2$

$\leqslant \lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}\cdot\lambda\cdot(b-a)^2+[f(a)]^2$ **(用①式)** $=\lambda^2[f(a)]^2-2\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2=(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

10 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(浙江卷)

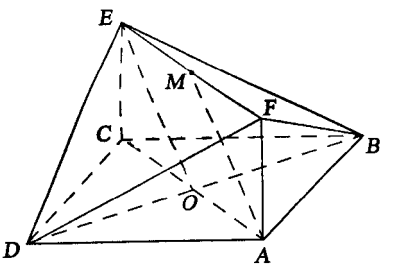
1.D 2.A 3.B 4.**(理)**C **(文)**A 5.A 6.**(理)**A **(文)**C 7.C 8.B 9.D 10.D 11.**(理)** C**(文)**D 12.B 13.**(理)**$(-\infty,\frac{3}{2}]$ **(文)**$(-\infty,1]$ 14.**(理)**-25 **(文)**-14 15.**(理)**5 **(文)**$\sqrt{5}$ 16.**(理)**$\sqrt{5}$ **(文)**5 17.

(理)本题主要考查三角函数的诱导公式、倍角公式、余弦定理及均值不等式等基础知识,考查运算能力.满分 12 分. **解:**(Ⅰ)$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A=\frac{1}{2}[1-\cos(B+C)]+(2\cos^2A-1)=\frac{1}{2}(1+\cos A)+(2\cos^2A-1)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})+(\frac{2}{9}-1)=-\frac{1}{9}$. (Ⅱ) $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A=\frac{1}{3}$, , $\frac{2}{3}bc=b^2+c^2-a^2\geqslant 2bc-a^2$, $bc\leqslant\frac{3}{4}a^2$. **又** $a=\sqrt{3}$, , $bc\leqslant\frac{9}{4}$. **当且仅当** $b=c=\frac{3}{2}$**时,**$bc=\frac{9}{4}$**,故** bc **的最大值是**$\frac{9}{4}$. **(文)本题主要考查数列的递推关系、等比数列等基础知识,考查运算及推理能力.满分 12 分.** **解:**(Ⅰ)**由** $S_1=\frac{1}{3}(a_1-1)$**,得** $a_1=\frac{1}{3}(a_1-1)$, , $a_1=-\frac{1}{2}$. **又** $S_2=\frac{1}{3}(a_2-1)$**,即** $a_1+a_2=\frac{1}{3}(a_2-1)$**,得** $a_2=\frac{1}{4}$. (Ⅱ)**当** $n>1$ **时,**$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}(a_n-1)-\frac{1}{3}(a_{n-1}-1)$, **得**$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-\frac{1}{2}$ **所以** $\{a_n\}$**是首项为**$-\frac{1}{2}$**,公比为**$-\frac{1}{2}$**的等比数列.**

18.**(理)本题主要考查相互独立事件及随机变量的分布列、数学期望等数学概念,同时考查学生的逻辑思维能力.满分 12 分.** **解:**(Ⅰ)**由题意可得,随机变量** ξ **的取值是** 2、3、4、6、7、10. **随机变量** ξ **的分布如下**

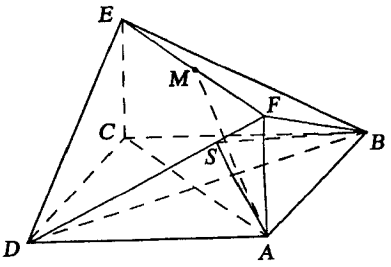
ξ	2	3	4	6	7	10
P	0.09	0.24	0.16	0.18	0.24	0.09

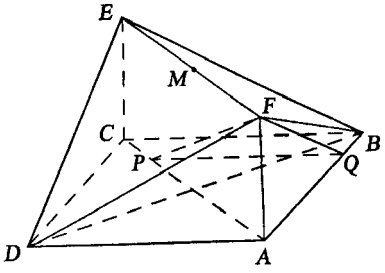
(Ⅱ)随机变量 ξ **的数学期望** $E\xi=2\times0.09+3\times0.24+4\times0.16+6\times0.18+7\times0.24+10\times0.09=5.2$. **(文)同(理)第 17 题** 19.**(理)本题主要考查空间线面关系及空间向量概念与运算等基础知识,同时考查空间想像能力和推理运算能力.满分 12 分.**

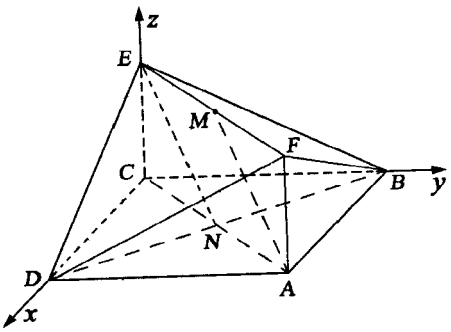


方法一 **解:**(Ⅰ)**记** AC **与** BD **的交点为** O**,连结** OE, O、M **分别是** AC、EF **的中点,**ACEF **是** **矩形,** , **四边形** AOEM **是平行四边形,** , $AM\parallel OE$. $OE\subset$**平面** BDE**,**$AM\not\subset$**平面** BDE, , $AM\parallel$**平面** BDE. (Ⅱ)**在平面** AFD **中过** A **作** $AS\perp DF$ **于** S,

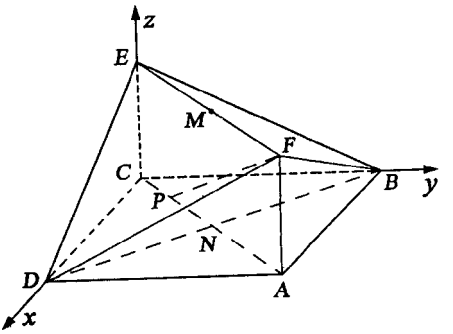
连结 BS，　AB⊥AF，AB⊥AD，AD∩AF = A，　，AB⊥平面 ADF，　，AS 是 BS 在平面 ADF 上的射影，由三垂线定理得 BS⊥DF．　，∠BSA 是二面角 A - DF - B 的平面角．在 Rt△ASB 中，AS = $\frac{\sqrt{6}}{3}$，AB = $\sqrt{2}$，　，tan∠ASB = $\sqrt{3}$，∠ASB = 60°．　，二面角 A - DF - B 的大小为 60°．　(Ⅲ)设 CP = t(0≤t≤2)，作 PQ⊥AB 于 Q，则 PQ∥AD，PQ⊥AB，PQ⊥AF，AB∩AF = A，　，PQ⊥平面 ABF，QF⊂平面 ABF，　，PQ⊥QF．　在 Rt△PQF 中，∠FPQ = 60°，　PF = 2PQ．△PAQ 为等腰直角三角形，　，PQ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$(2 - t)．　又　△PAF 为直角三角形，　，PF = $\sqrt{(2-t)^2+1}$，　，$\sqrt{(2-t)^2+1}$ = 2·$\frac{\sqrt{2}}{2}$(2 - t)．　所以 t = 1 或 t = 3(舍去)．　即点 P 是 AC 的中点．　方法二　(Ⅰ)建立如图所示的空间直角坐标系．　设 AC∩BD = N，连结 NE，　则点 N、E 的坐标分别是　($\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，0)、(0，0，1)，　，$\overrightarrow{NE}$ = (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$，- $\frac{\sqrt{2}}{2}$，1)．　又点 A、M 的坐标分别是　($\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，0)、($\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1)．　，$\overrightarrow{AM}$ = (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$，- $\frac{\sqrt{2}}{2}$，1)　，$\overrightarrow{NE}$ = $\overrightarrow{AM}$且 NE 与 AM 不共线，　，NE∥AM．　又　NE⊂平面 BDE，AM⊄平面 BDE，　，AM∥平面 BDE．　(Ⅱ)　AF⊥AB，AB⊥AD，AF∩AD = A，　，AB⊥平面 ADF．　，$\overrightarrow{AB}$ = (- $\sqrt{2}$，0，0)为平面 DAF 的法向量．　$\overrightarrow{NE}$·$\overrightarrow{DB}$ = (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$，- $\frac{\sqrt{2}}{2}$，1)·(- $\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，0) = 0，　$\overrightarrow{NE}$·$\overrightarrow{NF}$ = (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$，- $\frac{\sqrt{2}}{2}$，1)·($\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，1) = 0 得　$\overrightarrow{NE}$⊥$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{NE}$⊥$\overrightarrow{NF}$，　，$\overrightarrow{NE}$为平面 BDF 的法向量．　，cos < $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{NE}$ > = $\frac{1}{2}$．　，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{NE}$的夹角是 60°．即所求二面角 A - DF - B 的大小是 60°．　(Ⅲ)设 P(t，t，0)(0≤t≤$\sqrt{2}$)得　$\overrightarrow{PF}$ = ($\sqrt{2}$ - t，$\sqrt{2}$ - t，1)，　，$\overrightarrow{CD}$ = ($\sqrt{2}$，0，0)．　又　PF 和 CD 所成的角是 60°．　，cos60° = $\frac{|(\sqrt{2}-t)\cdot\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{2}-t)^2+(\sqrt{2}-t)^2+1}\cdot\sqrt{2}}$，　解得 t = $\frac{\sqrt{2}}{2}$或 t = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$(舍去)，　即点 P 是 AC 的中点．　(文)本题主要考查空间线面关系及空间向量等基础知识，同时考查空间想像能力和逻辑推理、运算能力．满



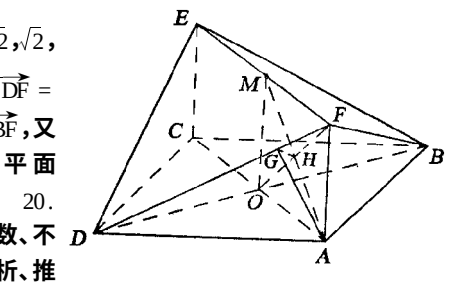


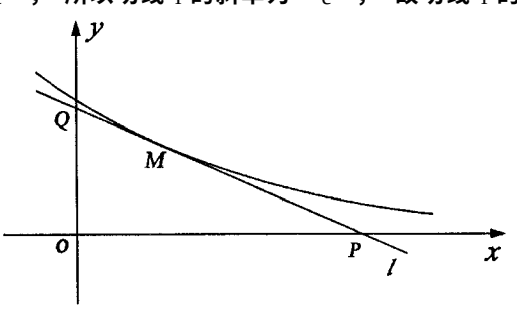


分12分. 解:方法一:(Ⅰ)(文)同(理)(Ⅰ) (Ⅱ) BD⊥AC,BD⊥AF,且AC交AF于A, , BD⊥平面AE,又因为AM⊂平面AE, , BD⊥AM. AD=$\sqrt{2}$,AF=1,OA=1, ,AOMF是正方形, ,AM⊥OF,又AM⊥BD,且OF∩BD=O. ,AM⊥平面BDF.



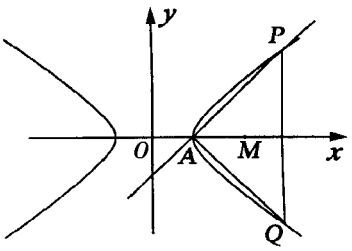
(Ⅲ)设AM∩OF=H,过H作HG⊥DF于G,连结AG, 由三垂线定理得AG⊥DF, ,∠AGH是二面角A-DF-B的平面角. AH=$\frac{\sqrt{2}}{2}$,AG=$\frac{\sqrt{6}}{3}$, ,sin∠AGH=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,,∠AGH=60°, ,二面角A-DF-B的大小为60°. 方法二 (Ⅰ)(文)同(理)(Ⅰ) (Ⅱ)(文)$\overrightarrow{AM}$=(-$\frac{\sqrt{2}}{2}$,-$\frac{\sqrt{2}}{2}$,1), D($\sqrt{2}$,0,0),F($\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$,1),, $\overrightarrow{DF}$=(0,$\sqrt{2}$,1), ,$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DF}$=0,所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{DF}$. 同理$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BF}$,又DF∩BF=F, ,AM⊥平面BDF. (Ⅲ)(文)同(理)(Ⅱ) 20. (理)本题主要考查函数、导函数、不等式等基础知识,同时考查分析、推理和对基础知识的理解运用能力.满分12分. 解:(Ⅰ)因为f'(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}, 所以切线l的斜率为-e^{-t}, 故切线l的方程为y-



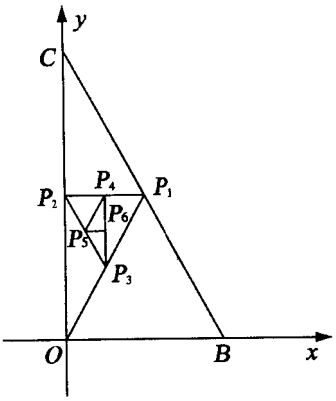


$e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$.即$e^{-t}x+y-e^{-t}(t+1)=0$. (Ⅱ)令y=0得x=t+1, 又令x=0得$y=e^{-t}(t+1)$, 所以$S(t)=\frac{1}{2}(t+1)\cdot e^{-t}(t+1)=\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$. 从而$S'(t)=\frac{1}{2}e^{-t}(1-t)(1+t)$. 当t∈(0,1)时,S'(t)>0, 当t∈(1,+)时,S'(t)<0, 所以S(t)的最大值为$S(1)=\frac{2}{e}$. (文)本题主要考查排列组合、对立事件、相互独立事件等基本知识,同时考查学生的逻辑思维能力和分析问题与解决问题的能力.满分12分. 解:(Ⅰ)设5个工厂均选择星期日停电的事件为A, 则P(A)=

$\frac{1}{7^5}=\frac{1}{16\,807}$. （Ⅱ）设5个工厂选择的停电时间各不相同的事件为B，则$P(B)=\frac{A_7^5}{7^5}=\frac{7\times6\times5\times4\times3}{7^5}=\frac{360}{2\,401}$. 因为至少有两个工厂选择同一天停电的事件是$\bar{B}$，所以$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{360}{2\,401}=\frac{2\,041}{2\,401}$. 21.本题主要考查直线、双曲线方程和性质等基础知识，考查解析几何的基本思想方法和综合解题能力.满分12分. （理）解：（Ⅰ）由条件得直线AP的方程 $y=k(x-1)$，即 $kx-y-k=0$. 因为点M到直线AP的距离为1，，$\frac{|mk-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即$|m-1|=\frac{\sqrt{k^2+1}}{|k|}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$. $|k|\in[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$，，$\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant|m-1|\leqslant2$，解得$\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\leqslant m\leqslant3$或$-1\leqslant m\leqslant1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.，m的取值范围是$[-1,1-\frac{2\sqrt{3}}{3}]\cup[1+\frac{2\sqrt{3}}{3},3]$. （Ⅱ）可设双曲线方程为$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b\neq0)$，由$M(\sqrt{2}+1,0)$，$A(1,0)$，得$|AM|=\sqrt{2}$. 又因为M是$\triangle APQ$的内心，M到AP的距离为1，所以$\angle MAP=45°$，直线AM是$\angle PAQ$的角平分线，且M到AQ、PQ的距离均为1. 因此，$k_{AP}=1$，$k_{AQ}=-1$，（不妨设P在第一象限）直线PQ方程为$x=2+\sqrt{2}$. 直线AP的方程$y=x-1$，，解得P的坐标是$(2+\sqrt{2},1+\sqrt{2})$，将P点坐标代入$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$得 $b^2=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3}$. 所以所求双曲线方程为$x^2-\frac{(\sqrt{2}+3)}{\sqrt{2}+1}y^2=1$，即$x^2-(2\sqrt{2}-1)y^2=1$. （文）本题主要考查函数、导数、不等式等基础知识，考查分析推理和知识的综合应用能力.满分12分. 解：（Ⅰ）由原式得 $f(x)=x^3-ax^2-4x+4a$，，$f'(x)=3x^2-2ax-4$. （Ⅱ）由$f'(-1)=0$得$a=\frac{1}{2}$，此时有$f(x)=(x^2-4)(x-\frac{1}{2})$，$f'(x)=3x^2-x-4$. 由$f'(x)=0$得$x=\frac{4}{3}$或$x=-1$，又$f(\frac{4}{3})=-\frac{50}{27}$，$f(-1)=\frac{9}{2}$，$f(-2)=0$，$f(2)=0$，所以$f(x)$在$[-2,2]$上的最大值为$\frac{9}{2}$，最小值为$-\frac{50}{27}$. （Ⅲ）解法一：$f'(x)=3x^2-2ax-4$的图像为开口向上且过点$(0,-4)$的抛物线，由条件得$f'(-2)\geqslant0$，$f'(2)\geqslant0$，即$\begin{cases}4a+8\geqslant0,\\8-4a\geqslant0.\end{cases}$，$-2\leqslant a\leqslant2$. 所以a的取值范围为$[-2,2]$. 解法二：令$f'(x)=0$，即$3x^2-2ax-4=0$，由求根公式得：$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+12}}{3}(x_1<x_2)$，所以$f'(x)=3x^2-2ax-4$在$(-\infty,x_1]$和$[x_2,+\infty)$上非负. 由题设可知：当$x\leqslant-2$或$x\geqslant2$时，$f'(x)\geqslant0$，从而$x_1\geqslant-2$，$x_2\leqslant2$，即$\begin{cases}\sqrt{a^2+12}\leqslant a+6,\\\sqrt{a^2+12}\leqslant6-a.\end{cases}$解不等式组得：$-2\leqslant a\leqslant2$，，a的取值范围是$[-2,2]$. 22.（理）本题主要考查数列的递推关系、等比数列等基础知识，考查知识的综合运用和解决问题的创新能力.满分14分. 解：（Ⅰ）因为 $y_1=y_2=y_4=1$，$y_3=\frac{1}{2}$，$y_5=$



$\frac{3}{4}$，所以 $a_1 = a_2 = a_3 = 2$. 又由题意可知 $y_{n+3} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}$. ，$a_{n+1} = \frac{1}{2} y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} = \frac{1}{2} y_{n+1} + y_{n+2} + \frac{y_n + y_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} y_n + y_{n+1} + y_{n+2} = a_n$，，$\{a_n\}$为常数列. ，$a_n = a_1 = 2$，$n \in N^*$. (Ⅱ)将等式 $\frac{1}{2} y_n + y_{n+1} + y_{n+2} = 2$ 两边除以 2，得 $\frac{1}{4} y_n + \frac{y_{n+1} + y_{n+2}}{2} = 1$，又 $y_{n+4} = \frac{y_{n+1} + y_{n+2}}{2}$，，$y_{n+4} = 1 - \frac{y_n}{4}$. (Ⅲ) $b_{n+1} = y_{4n+8} - y_{4n+4} = (1 - \frac{y_{4n+4}}{4}) - (1 - \frac{y_{4n}}{4}) = -\frac{1}{4}(y_{4n+4} - y_{4n}) = -\frac{1}{4} b_n$，又 $b_1 = y_8 - y_4 = -\frac{1}{4} \neq 0$，，$\{b_n\}$是公比为 $-\frac{1}{4}$ 的等比数列. (文)同(理)第 21 题



11 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(福建卷)

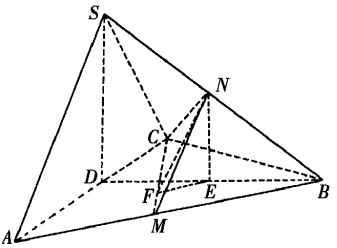
1.A 2.C 3.D 4.A 5.(理)B (文)A 6.B 7.C 8.B 9.(理)A (文)C 10.D 11.(理)D (文)C 12.B 13. $4\sqrt{5}$ 14.(理)$\frac{1}{2}$ (文)(-，-1) 15.(理)①③ (文)63 16. $\frac{2}{3}$ 17. 本小题主要考查平面向量的概念和计算，三角函数的恒等变换及其图像变换的基本技能，考查运算能力. 满分 12 分. 解：(Ⅰ)依题设，$f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 + 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$. 由 $1 + 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1 - \sqrt{3}$，得 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $-\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$，，$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{5\pi}{6}$，，$2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$，即 $x = -\frac{\pi}{4}$. (Ⅱ)函数 $y = 2\sin 2x$ 的图像按向量 $c = (m, n)$ 平移后得到函数 $y = 2\sin 2(x - m) + n$ 的图像，即函数 $y = f(x)$ 的图像. 由(Ⅰ)得 $f(x) = 2\sin 2(x + \frac{\pi}{12}) + 1$. $|m| < \frac{\pi}{2}$，，$m = -\frac{\pi}{12}$，$n = 1$. 18. 本小题主要考查概率统计的基础知识，运用数学知识解决问题的能力. 满分 12 分. 解：(Ⅰ)(理)依题意，甲答对试题数 ξ 的概率分布如下：

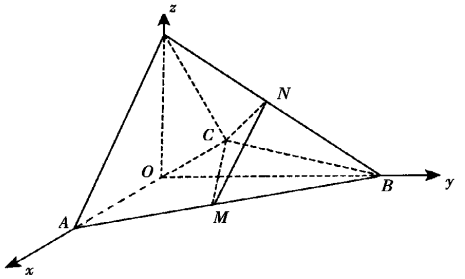
ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

甲答对试题数 ξ 的数学期望 $E\xi = 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{5}$.

(文)解：设甲、乙两人考试合格的事件分别为 A、B，则 $P(A) = \frac{C_6^2 C_4^1 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{60 + 20}{120} = \frac{2}{3}$，$P(B) = \frac{C_8^2 C_2^1 + C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56 + 56}{120} = \frac{14}{15}$. 答：甲、乙两人考试合格的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{14}{15}$. (Ⅱ)设甲、乙两人考试合格的事件分别为 A、

B，则 $P(A)=\frac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{60+20}{120}=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{C_8^2C_2^1+C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56+56}{120}=\frac{14}{15}$. 因为事件 A、B 相互独立，方法一：，甲、乙两人考试均不合格的概率为 $P(\bar{A}\cdot\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=(1-\frac{2}{3})(1-\frac{14}{15})=\frac{1}{45}$.，甲、乙两人至少有一人考试合格的概率为 $P=1-P(\bar{A}\cdot\bar{B})=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}$. 答：甲、乙两人至少有一人考试合格的概率为 $\frac{44}{45}$. 方法二：，甲、乙两人至少有一人考试合格的概率为 $P=P(A\cdot\bar{B})+P(\bar{A}\cdot B)+P(A\cdot B)=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)+P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{14}{15}+\frac{2}{3}\times\frac{14}{15}=\frac{44}{45}$. 答：甲、乙两人至少有一人考试合格的概率为 $\frac{44}{45}$. 19.（理）本小题主要考查直线与直线，直线与平面，二面角，点到平面的距离等基础知识，考查空间想象能力和逻辑推理能力. 满分 12 分. 解法一：（Ⅰ）取 AC 中点 D，连结 SD、DB，SA = SC，AB = BC，，AC⊥SD 且 AC⊥BD，，AC⊥平面 SDB. 又 SB⊂平面 SDB，，AC⊥SB. （Ⅱ）AC⊥平面 SDB，AC⊂平面 ABC，，平面 SDB⊥平面 ABC，过 N 作 NE⊥BD 于 E，则 NE⊥平面 ABC；过 E 作 EF⊥CM 于 F，连结 NF，则 NF⊥CM.，∠NFE 为二面角 N - CM - B 的平面角. 平面 SAC⊥平面 ABC，SD⊥AC，，SD⊥平面 ABC. 又 NE⊥平面 ABC，，NE∥SD. SN = NB，，$NE=\frac{1}{2}SD=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2-AD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{12-4}=\sqrt{2}$，且 ED = EB. 在正△ABC 中，由平几知识可求得 $EF=\frac{1}{4}MB=\frac{1}{2}$，在 Rt△NEF 中，$\tan\angle NFE=\frac{EN}{EF}=2\sqrt{2}$，，二面角 N - CM - B 的大小是 $\arctan 2\sqrt{2}$.（Ⅲ）在 Rt△NEF 中，$NF=\sqrt{EF^2+NE^2}=\frac{3}{2}$，，$S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}CM\cdot NF=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，$S_{\triangle CMB}=\frac{1}{2}BM\cdot CM=2\sqrt{3}$. 设点 B 到平面 CMN 的距离为 h，$V_{B-CMN}=V_{N-CMB}$，NE⊥平面 CMB，，$\frac{1}{3}S_{\triangle CMN}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle CMB}\cdot NE$，，$h=\frac{S_{\triangle CMB}\cdot NE}{S_{\triangle CMN}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 即点 B 到平面 CMN 的距离为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 解法二：（Ⅰ）取 AC 中点 O，连结 OS、OB. SA = SC，AB = BC，，AC⊥SO 且 AC⊥BO. 平面 SAC⊥平面 ABC，平面 SAC∩平面 ABC = AC，，SO⊥平面 ABC，，SO⊥BO. 如图建



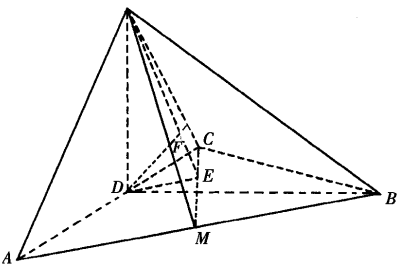


立空间直角坐标系 O - xyz. 则 A(2,0,0)，B(0,2√3,0)，C(- 2,0,0)，S(0,0,2√2)，M(1,√3,0)，N(0,√3,√2).，$\overrightarrow{AC}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{SB}=(0,2\sqrt{3},$

$-2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{SB}=(-4,0,0)\cdot(0,2\sqrt{3},-2\sqrt{2})=0$，，$AC\perp SB$.

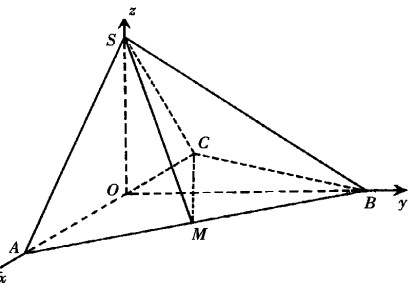
(Ⅱ)由(Ⅰ)得$\overrightarrow{CM}=(3,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,0,\sqrt{2})$，设$n=(x,y,z)$为平面$CMN$的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{CM}\cdot n=3x+\sqrt{3}y=0,\\ \overrightarrow{MN}\cdot n=-x+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$取$z=1$，则$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{6}$，，$n=(\sqrt{2},-\sqrt{6},1)$.　又$\overrightarrow{OS}=(0,0,2\sqrt{2})$为平面$ABC$的一个法向量，，$\cos\langle n,\overrightarrow{OS}\rangle=\dfrac{n\cdot\overrightarrow{OS}}{|n|\cdot|\overrightarrow{OS}|}=\dfrac{1}{3}$.，二面角$N-CM-B$的大小为$\arccos\dfrac{1}{3}$.　(Ⅲ)由(Ⅰ)(Ⅱ)得$\overrightarrow{MB}=(-1,\sqrt{3},0)$，$n=(\sqrt{2},-\sqrt{6},1)$为平面$CMN$的一个法向量，，点$B$到平面$CMN$的距离$d=\dfrac{|n\cdot\overrightarrow{MB}|}{|n|}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

(文)本小题主要考查直线与直线，直线与平面，二面角，点到平面的距离等基础知识，考查空间想象能力和逻辑推理能力. 满分12分.



解法一：(Ⅰ)取AC中点D，连结DS、DB.　$SA=SC$，$BA=BC$，，$AC\perp DS$且$AC\perp DB$，，$AC\perp$平面SDB，又$SB\subset$平面SDB，，$AC\perp SB$.　(Ⅱ)　$SD\perp AC$，平面$SAC\perp$平面ABC，，$SD\perp$平面ABC.　过D作$DE\perp CM$于E，连结SE，则$SE\perp CM$.　，$\angle SED$为二面角$S-CM-A$的平面角.　由已知有$DE\parallel\dfrac{1}{2}AM$，所以$DE=1$，又$SA=SC=2\sqrt{2}$，$AC=4$，，$SD=2$.　在$Rt\triangle SDE$中，$\tan\angle SED=\dfrac{SD}{DE}=2$，，二面角$S-CM-A$的大小为$\arctan 2$.　(Ⅲ)在$Rt\triangle SDE$中，$SE=\sqrt{SD^2+DE^2}=\sqrt{5}$，$CM$是边长为4的正$\triangle ABC$的中线，，$CM=2\sqrt{3}$.

，$S_{\triangle SCM}=\dfrac{1}{2}CM\cdot SE=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$，设点$B$到平面$SCM$的距离为$h$，由$V_{B-SCM}=V_{S-CMB}$，$SD\perp$平面$ABC$，得$\dfrac{1}{3}S_{\triangle SCM}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\triangle CMB}\cdot SD$，，$h=\dfrac{S_{\triangle CMB}\cdot SD}{S_{\triangle SCM}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.　即点$B$到平面$SCM$的距离为$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.



解法二：(Ⅰ)取AC中点O，连结OS、OB.　$SA=SC$，$BA=BC$，，$AC\perp SO$且$AC\perp BO$.　平面$SAC\perp$平面ABC，平面$SAC\cap$平面$ABC=AC$，，$SO\perp$面ABC，，$SO\perp BO$. 如图所示建立空间直角坐标系$O-xyz$. 则$A(2,0,0)$，$C(-2,0,0)$，$S(0,0,2)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$.　，$\overrightarrow{AC}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{BS}=(0,-2\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BS}=(-4,0,0)\cdot(0,-2\sqrt{3},2)=0$，，$AC\perp BS$.　(Ⅱ)由(Ⅰ)得$M(1,\sqrt{3},0)$.

，$\overrightarrow{CM}=(3,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CS}=(2,0,2)$. 设$n=(x,y,z)$为平面$SCM$的一个法向量，则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{CM}=3x+\sqrt{3}y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{CS}=2x+2z=0,\end{cases}$取$x=-1$，则$y=\sqrt{3}$，$z=1$，，$n=(-1,\sqrt{3},1)$，　又$\overrightarrow{OS}=(0,0,2)$为平面$ABC$的一个法向量，，$\cos\langle n,\overrightarrow{OS}\rangle=\dfrac{n\cdot\overrightarrow{OS}}{|n|\cdot|\overrightarrow{OS}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.　，二面角$S-CM-A$的大小为

$\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. （Ⅲ）由（Ⅰ）（Ⅱ）得$\overrightarrow{CB}=(2,2\sqrt{3},0)$，$n=(-1,\sqrt{3},1)$为平面 SCM 的一个法向量，，点 B 到平面 SCM 的距离 $d=\frac{|n\cdot\overrightarrow{CB}|}{|n|}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 20. 本小题主要考查建立函数关系式、数列求和、不等式等基础知识，考查运用数学知识解决实际问题的能力. 满分 12 分. 解：（Ⅰ）依题设，$A_n=(500-20)+(500-40)+\cdots+(500-20n)=490n-10n^2$；$B_n=500[(1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2^2})+\cdots+(1+\frac{1}{2^n})]-600=500n-\frac{500}{2^n}-100$. （Ⅱ）$B_n-A_n=(500n-\frac{500}{2^n}-100)-(490n-10n^2)=10n^2+10n-\frac{500}{2^n}-100=10[n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10]$. 因为函数 $y=x(x+1)-\frac{50}{2^x}-10$ 在$(0,+\infty)$上为增函数，当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时，$n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\leqslant 12-\frac{50}{8}-10<0$；当 $n\geqslant 4$ 时，$n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\geqslant 20-\frac{50}{16}-10>0$.，仅当 $n\geqslant 4$ 时 $B_n>A_n$. 答：至少经过 4 年，该企业进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润. 21.（理）本小题主要考查函数的单调性，导数的应用和不等式等有关知识，考查数形结合及分类讨论思想和灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分. 解（Ⅰ）$f'(x)=\frac{4+2ax-2x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x^2-ax-2)}{(x^2+2)^2}$，$f(x)$在$[-1,1]$上是增函数，，$f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立，即 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立. ① 设 $\varphi(x)=x^2-ax-2$，方法一：①$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$.

对 $x\in[-1,1]$，$f(x)$是连续函数，且只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$，，$A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$. 方法二：①$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{a}{2}<0\\ \varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0\leqslant a\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant a<0\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$. 对 $x\in[-1,1]$，$f(x)$是连续函数，且只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$，，$A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$. （Ⅱ）由$\frac{2x-a}{x^2+2}=\frac{1}{x}$，得 $x^2-ax-2=0$，$\Delta=a^2+8>0$，，x_1,x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两实根，，$\begin{cases}x_1+x_2=a,\\ x_1x_2=-2,\end{cases}$ 从而 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$.

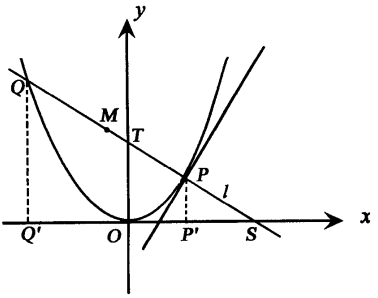
$-1\leqslant a\leqslant 1$，，$|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$. 要使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，当且仅当 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 恒成立，即 $m^2+tm-2\geqslant 0$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 恒成立. ② 设 $g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$，方法一：②$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$ 所以，存在实数 m，使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，其取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2$，或 $m\leqslant -2\}$. 方法二：当 $m=0$ 时，②显然不成立；当 $m\neq 0$ 时，② $\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<0\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$. 所以,存在实数 m,使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立,其取值范围是 $\{m|m\geqslant 2$,或 $m\leqslant -2\}$.

(文)本题主要考查直线、抛物线、不等式等基础知识,求轨迹方程的方法,解析几何的基本思想和综合解题能力.满分 12 分. 解:(Ⅰ)把 $x=2$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2$,得 $y=2$, , 点 P 坐标为(2,2). 由 $y=\frac{1}{2}x^2$, ① 得 $y'=x$, , 过点 P 的切线的斜率 $k_{切}=2$,直线 l 的斜率 $k_t=-\frac{1}{k_{切}}=-\frac{1}{2}$, , 直线 l 的方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-6=0$. (Ⅱ)设 P (x_0,y_0),则 $y_0=\frac{1}{2}x_0^2$. 过点 P 的切线斜率 $k_{切}=x_0$,当 $x_0=0$ 时不合题意, , $x_0\neq 0$. , 直线 l 的斜率 $k_t=-\frac{1}{k_{切}}=-\frac{1}{x_0}$, 直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{2}x_0^2=-\frac{1}{x_0}(x-x_0)$. ② 方法一: 联立①②消去 y, 得 $x^2+\frac{2}{x_0}x-x_0^2-2=0$. 设 $Q(x_1,y_1)$, $M(x,y)$. M 是 PQ 的中点 ,

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_0+x_1}{2}=-\dfrac{1}{x_0},\\ y=-\dfrac{1}{x_0}\left(-\dfrac{1}{x_0}-x_0\right)+\dfrac{1}{2}x_0^2=\dfrac{1}{x_0^2}+\dfrac{x_0^2}{2}+1.\end{cases}$$

消去 x_0,得 $y=x^2+\frac{1}{2x^2}+1(x\neq 0)$ 就是所求的轨迹方程. 由 $x\neq 0$ 知 $x^2>0$, , $y=x^2+\frac{1}{2x^2}+1\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{2x^2}}+1=\sqrt{2}+1$. 上式等号仅当 $x^2=\frac{1}{2x^2}$,即 $x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ 时成立, 所以点 M 到 x 轴的最短距离是 $\sqrt{2}+1$. 方法二: 设 $Q(x_1,y_1)$, $M(x,y)$, 则 $y_0=\frac{1}{2}x_0^2$, $y_1=\frac{1}{2}x_1^2$, $x=\frac{x_0+x_1}{2}$, , $y_0-y_1=\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{2}x_1^2=\frac{1}{2}(x_0+x_1)(x_0-x_1)=x(x_0-x_1)$, , $x=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=k_t=-\frac{1}{x_0}$, , $x_0=-\frac{1}{x}$, 将上式代入②并整理,得 $y=x^2+\frac{1}{2x^2}+1(x\neq 0)$ 就是所求的轨迹方程. 由 $x\neq 0$ 知 $x^2>0$, , $y=x^2+\frac{1}{2x^2}+1\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{2x^2}}+1=\sqrt{2}+1$. 上式等号仅当 $x^2=\frac{1}{2x^2}$,即 $x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ 时成立, 所以点 M 到 x 轴的最短距离是 $\sqrt{2}+1$. 22.(理)本小题主要考查直线、抛物线、不等式等基础知识,求轨迹方程的方法,解析几何的基本思想和综合解题能力.满分 14 分. 解:(Ⅰ)设 P (x_1,y_1), Q (x_2,y_2), M (x_0,y_0),依题意 $x_1\neq 0$, $y_1>0$, $y_2>0$. 由 $y=\frac{1}{2}x^2$, ① 得 $y'=x$. , 过点 P 的切线的斜率 $k_{切}=x_1$, $x_1=0$ 不合题意, , $x_1\neq 0$. , 直线 l 的斜率 $k_l=-\frac{1}{k_{切}}=-\frac{1}{x_1}$, 直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{2}x_1^2=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)$. ② 方法一: 联立①②



消去 y，得 $x^2+\frac{2}{x_1}x-x_1^2-2=0$. M 为 PQ 的中点，，

$\begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{1}{x_1},\\ y_0=\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{x_1}(x_0-x_1).\end{cases}$ 消去 x_1，得 $y_0=x_0^2+\frac{1}{2x_0^2}+1(x_0\neq 0)$，，

PQ 中点 M 的轨迹方程为 $y=x^2+\frac{1}{2x^2}+1(x\neq 0)$. 方法二：由 $y_1=\frac{1}{2}x_1^2$，$y_2=\frac{1}{2}x_2^2$，$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，得 $y_1-y_2=\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)=x_0(x_1-x_2)$，则 $x_0=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_t=-\frac{1}{x_1}$，，$x_1=-\frac{1}{x_0}$，将上式代入②并整理，得 $y_0=x_0^2+\frac{1}{2x_0^2}+1(x_0\neq 0)$，，PQ 中点 M 的轨迹方程为 $y=x^2+\frac{1}{2x^2}+1(x\neq 0)$. (Ⅲ)设直线 l：$y=kx+b$，依题意，$k\neq 0$，$b\neq 0$，则 $T(0,b)$. 分别过 P、Q 作 $PP'\perp x$ 轴，$QQ'\perp y$ 轴，垂足分别为 P'、Q'，则 $\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=\frac{|OT|}{|P'P|}+\frac{|OT|}{|Q'Q|}=\frac{|b|}{|y_1|}+\frac{|b|}{|y_2|}$. 由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2\\ y=kx+b\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-2(k^2+b)y+b^2=0$. ③ 则 $\begin{cases}y_1+y_2=2(k^2+b),\\ y_1y_2=b^2.\end{cases}$ 方法一：，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=|b|(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2})\geqslant 2|b|\sqrt{\frac{1}{y_1y_2}}=2|b|\sqrt{\frac{1}{b^2}}=2$. y_1、y_2 可取一切不相等的正数，，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$. 方法二：，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=|b|\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=|b|\frac{2(k^2+b)}{b^2}$ 当 $b>0$ 时，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=b\frac{2(k^2+b)}{b^2}=\frac{2(k^2+b)}{b}=\frac{2k^2}{b}+2>2$；当 $b<0$ 时，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=-b\frac{2(k^2+b)}{b^2}=\frac{2(k^2+b)}{-b}$. 又由方程③有两个相异实根，得 $\Delta=4(k^2+b)^2-4b^2=4k^2(k^2+2b)>0$，于是 $k^2+2b>0$，即 $k^2>-2b$.

所以 $\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}>\frac{2(-2b+b)}{-b}=2$. 当 $b>0$ 时，$\frac{2k^2}{b}$ 可取一切正数，，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$. 方法三：由 P、Q、T 三点共线得 $k_{TQ}=K_{TP}$，即 $\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{y_1-b}{x_1}$. 则 $x_1y_2-bx_1=x_2y_1-bx_2$，即 $b(x_2-x_1)=(x_2y_1-x_1y_2)$. 于是 $b=\frac{x_2\cdot\frac{1}{2}x_1^2-x_1\cdot\frac{1}{2}x_2^2}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}x_1x_2$. ，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=\frac{|b|}{y_1}+\frac{|b|}{y_2}=\frac{\left|-\frac{1}{2}x_1x_2\right|}{\frac{1}{2}x_1^2}+\frac{\left|-\frac{1}{2}x_1x_2\right|}{\frac{1}{2}x_2^2}=\left|\frac{x_2}{x_1}\right|+\left|\frac{x_1}{x_2}\right|\geqslant 2$.

$\left|\frac{x_2}{x_1}\right|$ 可取一切不等于 1 的正数，，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$. (文)本小题主要考查函数的单调性，导数的应用和不等式等有关知识，考查数形结合及分类讨论思想和灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力.满分 14 分. 解：(Ⅰ)$f'(x)=4+2ax-2x^2$，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上

是增函数，，$f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立，即 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立. ① 设 $\varphi(x)=x^2-ax-2$，方法一：① $\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$. 对 $x\in[-1,1]$，只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$，，$A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$. 方法二：① $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 0,\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{a}{2}<0,\\ \varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leqslant a\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant a<0\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$. 对 $x\in[-1,1]$，只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$，，$A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$.

(Ⅱ)由 $4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3=2x+\frac{1}{3}x^3$，得 $x=0$，或 $x^2-ax-2=0$，$\Delta=a^2+8>0$，，x_1,x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两非零实根，，$\begin{cases}x_1+x_2=a,\\ x_1x_2=-2,\end{cases}$ 从而 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$. 又 $-1\leqslant a\leqslant 1$，，$|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$. 要使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，当且仅当 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 恒成立，即 $m^2+tm-2\geqslant 0$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 恒成立. ② 设 $g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$，方法一：② $\Leftrightarrow\begin{cases}g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0,\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$. 所以，存在实数 m，使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，其取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2$，或 $m\leqslant -2\}$. 方法二：当 $m=0$ 时，②显然不成立；当 $m\neq 0$ 时，② $\Leftrightarrow\begin{cases}m>0,\\ g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m<0,\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$. 所以，存在实数 m，使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，其取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2$，或 $m\leqslant -2\}$.

12 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(湖北卷)

1.D 2.(理)A (文)D 3.(理)C (文)A 4.B 5.(理)B (文)C 6.(理)D (文)C 7.B 8.(理)C (文)D 9.(理)B (文)C

10.(理)A (文)D 11.(理)D (文)B 12.A 13.(理)4 (文)$\frac{\sqrt{13}}{3}$ 14.(理)240 (文)35 15.(理)④ (文)192 16.(理)-1.6 (文)④

17. 本小题考查三角函数的基本公式以及三角函数式的恒等变形等基础知识和基本运算技能. 解法一：由已知得 $(3\sin\alpha+2\cos\alpha)(2\sin\alpha-\cos\alpha)=0\Leftrightarrow 3\sin\alpha+2\cos\alpha=0$ 或 $2\sin\alpha-\cos\alpha=0$. 由已知条件可知 $\cos\alpha\neq 0$，所以 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. 于是 $\tan\alpha<0$，，$\tan\alpha=-\frac{2}{3}$.

$$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

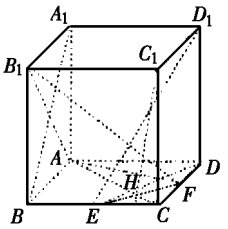
$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

将 $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$ 代入上式得 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{(-\frac{2}{3})}{1+(-\frac{2}{3})^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1-(-\frac{2}{3})^2}{1+(-\frac{2}{3})^2}=-\frac{6}{13}+\frac{5}{26}\sqrt{3}$，即为

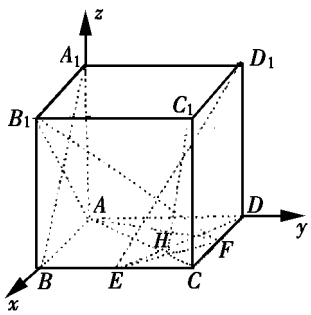
所求. 解法二 :由已知条件可知 $\cos\alpha\neq0$,则 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$,所以原式可化为

$6\tan^2\alpha+\tan\alpha-2=0$. 即$(3\tan\alpha+2)(2\tan\alpha-1)=0$. 又 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,

, $\tan\alpha<0$. , $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$. 下同解法一. 18.(理)本小题主要考查线面关系和正方体等基础知识,考查空间想像能力和推理运算能力. 解法一 :(Ⅰ)连结 A_1B,则 A_1B 是 D_1E 在面 ABB_1A_1 内的射影. $AB_1\perp A_1B$, , $D_1E\perp AB_1$. 于是 $D_1E\perp$平面 $AB_1F\Leftrightarrow D_1E\perp AF$. 连结 DE,则 DE 是 D_1E 在底面 ABCD 内的射影. , $D_1E\perp AF\Leftrightarrow$ $DE\perp AF$. ABCD 是正方形, E 是 BC 的中点, , 当且仅当 F 是 CD 的中点时,$DE\perp AF$,即当点 F 是 CD 的中点时,$D_1E\perp$平面 AB_1F. (6 分)



(Ⅱ)当 $D_1E\perp$平面 AB_1F 时,由(Ⅰ)知点 F 是 CD 的中点. 又已知点 E 是 BC 的中点,连结 EF,则 EF $/\!/$ BD.连结 AC,设 AC 与 EF 交于点 H,则 $CH\perp EF$. 连结 C_1H,则 CH 是 C_1H 在底面 ABCD 内的射影. , $C_1H\perp EF$,即$\angle C_1HC$ 是二面角 C_1-EF-C 的平面角. 在 $Rt\triangle C_1CH$ 中, $C_1C=1$,$CH=\frac{1}{4}AC$ $=\frac{\sqrt{2}}{4}$, , $\tan\angle C_1HC=\frac{C_1C}{CH}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{2}$. , $\angle C_1HC=\arctan2\sqrt{2}$,从而 $\angle AHC_1=\pi-\arctan2\sqrt{2}$. 故二面角 C_1-EF-A 的大小为 $\pi-\arctan2\sqrt{2}$. 解法二 :以 A 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系. (Ⅰ)设 DF = x,则 A(0,0,0),B(1,0,0), D(0,1,0),A_1(0,0,1),B_1(1,0,1),D_1(0,1,1), E$(1,\frac{1}{2},0)$,F(x,1,0).



, $\overrightarrow{D_1E}=(1,-\frac{1}{2},-1)$,$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{AF}=(x,1,0)$, $\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{AB_1}=1-1=0$,即 $D_1E\perp AB_1$. 于是 $D_1E\perp$平面 $AB_1F\Leftrightarrow D_1E\perp AF\Leftrightarrow\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{AF}=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0$.

即 $x=\frac{1}{2}$.故当点 F 是 CD 的中点时,$D_1E\perp$平面 AB_1F. (Ⅱ)当 $D_1E\perp$平面 AB_1F 时,F 是 CD 的中点.又 E 是 BC 的中点,连结 EF,则 EF $/\!/$ BD. 连结 AC,设 AC 与 EF 交于点 H,则 $AH\perp EF$,连结 C_1H,则 CH 是 C_1H 在底面ABCD内的射影. , $C_1H\perp EF$,即$\angle AHC$ 是二面角 C_1-EF-A 的平面角. $C_1(1,1,1)$,H$(\frac{3}{4},\frac{3}{4},0)$, , $\overrightarrow{HC_1}=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1)$,

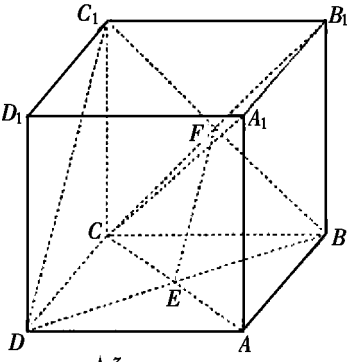
$\overrightarrow{HA}=(-\frac{3}{4},-\frac{3}{4},0)$, $\cos\angle AHC_1=\frac{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC_1}}{|\overrightarrow{HA}|\cdot|\overrightarrow{HC_1}|}=\frac{-\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{9}{8}}\times\sqrt{\frac{9}{8}}}=-\frac{1}{3}$.

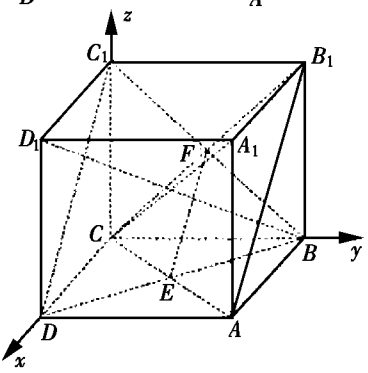
即$\angle AHC_1=\arccos(-\frac{1}{3})=\pi-\arccos\frac{1}{3}$. 故二面角 C_1-EF-A 的大小为 $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. (文)本小题主要考查线面关系和正方体等基础知识,考查空间想像能力和推理能力,满分 12 分. 解法一 :(Ⅰ) $A_1A\perp$底面 ABCD,则 AC 是 A_1C 在底面 ABCD 的射影. $AC\perp BD$, , $A_1C\perp BD$. 同理 $A_1C\perp DC_1$,又 $BD\cap DC_1=D$, , $A_1C\perp$平面 BDC_1 (Ⅱ)取 EF 的中点

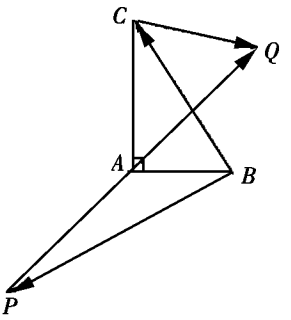
H，连结 BH，CH. $BE = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}$，，$BH \perp EF$. 同理，$CH \perp EF$. ，$\angle BHC$ 是二面角 B - EF - C 的平面角. 又 E、F 分别是 AC、B_1C 的中点，，$EF \parallel \frac{1}{2} AB_1$. ，$\triangle BEF$ 与 $\triangle CEF$ 是两个全等的正三角形. 故 $BH = CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$BF = \frac{\sqrt{6}}{4}$. 于是在 $\triangle BCH$ 中，由余弦定理，得 $\cos \angle BHC = \frac{BH^2 + CH^2 - BC^2}{2BH \cdot CH} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{4}}$ $= -\frac{1}{3}$. ，$\angle BHC = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{3}$. 故二面角 B - EF - C 的大小为 $\pi - \arccos\frac{1}{3}$. 解法二：(Ⅰ)以点 C 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 C(0,0,0)，D(1,0,0)，B(0,1,0)，A_1(1,1,1)，C_1(0,0,1)，D_1(1,0,1). ，$\overrightarrow{CA_1} = (1,1,1)$，$\overrightarrow{BD} = (1,-1,0)$，$\overrightarrow{DC_1} = (-1,0,1)$，$\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 - 1 = 0$，$\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{DC_1} = -1 + 1 = 0$. 即 $CA_1 \perp BD$，$CA_1 \perp DC_1$. 又 $BD \cap DC_1 = D$，，$A_1C \perp$ 平面 BDC_1 (Ⅱ)同(Ⅰ)可证，$BD_1 \perp$ 平面 AB_1C 则 $\langle \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{D_1B} \rangle$ 就是所求二面角的平面角补角的大小.

$\overrightarrow{A_1C} = (-1,-1,-1)$，$\overrightarrow{D_1B} = (-1,1,-1)$，，$\cos\langle \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{D_1B} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{D_1B}}{|\overrightarrow{A_1C}| \cdot |\overrightarrow{D_1B}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ 故二面角 B - EF - C 的大小为 $\pi - \arccos\frac{1}{3}$.

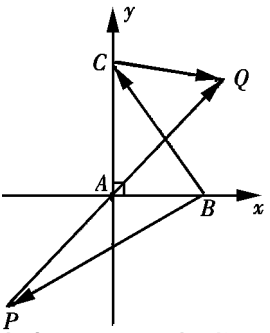
19. 本小题主要考查向量的概念，平面向量的运算法则，考查运用向量及函数知识的能力. 满分 12 分. 解法一：$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$，，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}$，，$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2 - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = -a^2 + \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ $= -a^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2 + a^2\cos\theta$ 故当 $\cos\theta = 1$，即 $\theta = 0$ ($\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$方向相同)时，$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$最大，其最大值为 0. 解法二：以直角顶点 A 为坐标原点，两直角边所在直线为坐标轴建立如图所示的平面直角坐标系. 设 |AB| = c，|AC| = b，则 A(0,0)，B(c,0)，C(0,b)，且 |PQ| = 2a，|BC| = a. 设点 P 的坐标为(x,y)，则 Q(-x,-y). ，$\overrightarrow{BP} = (x-c, y)$，$\overrightarrow{CQ} = (-x, -y-b)$，$\overrightarrow{BC} = (-c, b)$，$\overrightarrow{PQ} = (-2x, -2y)$. ，$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = (x-c)(-x) + y(-y-b) = -(x^2 + y^2) + cx - by$.







$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{cx - by}{a^2}$，$cx - by = a^2\cos\theta$．，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ} = -a^2 + a^2\cos\theta$．故当$\cos\theta = 1$，即$\theta = 0$（$\overrightarrow{PQ}$与$\overrightarrow{BC}$方向相同）时，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$最大．其最大值为 0．20．本小题主要考查直线，双曲线的方程和性质，曲线与方程的关系，及其综合应用能力．满分 12 分．解：（Ⅰ）将直线 l 的方程$y = kx + 1$代入双曲线 C 的方程$2x^2 - y^2 = 1$后，整理得 $(k^2 - 2)x^2 + 2kx + 2 = 0$．①依题意，直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同两点，故



$$\begin{cases} k^2 - 2 \neq 0, \\ \triangle = (2k)^2 - 8(k^2 - 2) > 0, \\ -\dfrac{2k}{k^2 - 2} > 0, \\ \dfrac{2}{k^2 - 2} > 0. \end{cases}$$

解得 k 的取值范围为 $-2 < k < -\sqrt{2}$．（Ⅱ）设 A、B 两点的坐标分别为（x_1，y_1）、（x_2，y_2），则由①式得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2k}{2 - k^2}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{k^2 - 2} \end{cases} \quad ②$$

假设存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F（c，0），则由 FA⊥FB 得 $(x_1 - c)(x_2 - c) + y_1y_2 = 0$．即$(x_1 - c)(x_2 - c) + (kx_1 + 1)(kx_2 + 1) = 0$．整理得 $(k^2 + 1)x_1x_2 + (k - c)(x_1 + x_2) + c^2 + 1 = 0$．③把②式及 $c = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$代入③式化简得 $5k^2 + 2\sqrt{6}k - 6 = 0$．解得 $k = -\dfrac{6 + \sqrt{6}}{5}$或 $k = \dfrac{6 - \sqrt{6}}{5} \notin (-2, -\sqrt{2})$（舍去）．可知 $k = -\dfrac{6 + \sqrt{6}}{5}$使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点．21．（理）本小题考查概率的基本知识和数学期望等概念及应用概率知识解决实际问题的能力．解：①不采取预防措施时，总费用即损失期望值为 $400 \times 0.3 = 120$（万元）；②若单独采取措施甲，则预防措施费用为 45 万元，发生突发事件的概率为 $1 - 0.9 = 0.1$，损失期望值为 $400 \times 0.1 = 40$（万元），所以总费用为 $45 + 40 = 85$（万元）；③若单独采取预防措施乙，则预防措施费用为 30 万元，发生突发事件的概率为 $1 - 0.85 = 0.15$，损失期望值为 $400 \times 0.15 = 60$（万元），所以总费用为 $30 + 60 = 90$（万元）；④若联合采取甲、乙两种预防措施，则预防措施费用为 $45 + 30 = 75$（万元），发生突发事件的概率为$(1 - 0.9)(1 - 0.85) = 0.015$，损失期望值为 $400 \times 0.015 = 6$（万元），所以总费用为 $75 + 6 = 81$（万元）．综合①、②、③、④，比较其总费用可知，应选择联合采取甲、乙两种预防措施，可使总费用最少．（文）本小题考查概率的基础知识以及运用概率知识解决实际问题的能力．解：方案 1：单独采用一种预防措施的费用均不超过 120 万元．由表可知，采用甲措施，可使此突发事件不发生的概率最大，其概率为 0.9．方案 2：联合采用两种预防措施，费用不超过 120 万元．由表可知，联合甲、丙两种预防措施可使此突发事件不发生的概率最大，其概率为 $1 - (1 - 0.9)(1 - 0.7) = 0.97$．方案 3：联合采用三种预防措施，费用不超过 120 万元，故只能联合乙、丙、丁三种预防措施，此时突发事件不发生的概率为 $1 - (1 - 0.8)(1 - 0.7)(1 - 0.6) = 1 - 0.024 = 0.976$ 综合上述三种预防方案可知，在总费用不超过 120 万

元的前提下，联合使用乙、丙、丁三种预防措施可使此突发事件不发生的概率最大．　22.（理）本小题主要考查数列、数列极限的概念和数学归纳法，考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．　解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，且 $A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\ (A>0)$，对 $a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ 两边取极限得，　$A=a+\frac{1}{A}$．解得 $A=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$．又 $A>0$，，　$A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$．　（Ⅱ）由 $a_n=b_n+A$，$a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ 得 $b_{n+1}+A=a+\frac{1}{b_n+A}$．　，　$b_{n+1}=a-A+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{1}{A}+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$．　即 $b_{n+1}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立．　（Ⅲ）令 $|b_1|\leqslant\frac{1}{2}$，得 $\left|a-\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})\right|\leqslant\frac{1}{2}$　，　$\left|\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)\right|\leqslant\frac{1}{2}$　，$(\sqrt{a^2+4}-a)\leqslant1$，解得 $a\geqslant\frac{3}{2}$．

现证明当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立．　（ⅰ）当 $n=1$ 时结论成立（已验证）．　（ⅱ）假设当 $n=k(k\geqslant1)$ 时结论成立，即 $|b_k|\leqslant\frac{1}{2^k}$，那么 $|b_k+1|=\frac{|b_k|}{|A(b_k+A)|}\leqslant\frac{1}{A|b_k+A|}\times\frac{1}{2^k}$　故只须证明 $\frac{1}{A|b_k+A|}\leqslant\frac{1}{2}$，即证 $A|b_k+A|\geqslant2$ 对 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 成立．　由于 $A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}-a}$，而当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{a^2+4}-a\leqslant1$，，$A\geqslant2$．　，$|b_k+A|\geqslant A-|b_k|\geqslant2-\frac{1}{2^k}\geqslant1$，即 $A|b_k+A|\geqslant2$．　故当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，　$|b_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k+1}}$．　即 $n=k+1$ 时结论成立．　根据（ⅰ）和（ⅱ），　可知结论对一切正整数都成立．　故 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立的 a 的取值范围为 $[\frac{3}{2},+\ )$．　（文）本小题考查导数、切线、极值等知识及综合运用数学知识解决问题的能力．满分 14 分．　解：（Ⅰ）依题意，令 $f'(x)=g'(x)$，得 $2x+b=1$．故 $x=\frac{1-b}{2}$．　由于 $f(\frac{1-b}{2})=g(\frac{1-b}{2})$，得 $(b+1)^2=4c$．　$b>-1$，$c>0$，，$b=-1+2\sqrt{c}$．　（Ⅱ）$F(x)=f(x)g(x)=x^3+2bx^2+(b^2+c)x+bc$．　，$F'(x)=3x^2+4bx+b^2+c$．　令 $F'(x)=0$，即 $3x^2+4bx+b^2+c=0$　则 $\Delta=16b^2-12(b^2+c)=4(b^2-3c)$．　若 $\Delta=0$，则 $F'(x)=0$ 有一个实根 x_0，且 $F'(x)$ 的变化如下：

x	$(-\ ,x_0)$	x_0	$(x_0,+\ )$
$P(x)$	+	0	+

于是 $x=x_0$ 不是函数 $P(x)$ 的极值点．　若 $\Delta>0$，则 $F'(x)=0$ 有两个不相等的实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，且 $F'(x)$ 的变化如下：

x	$(-\ ,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\ )$
$P(x)$	+	0	-	0	+

由此，$x=x_1$，是函数 $F(x)$ 的极大值点，$x=x_2$ 是函数 $F(x)$ 的极小值点．综上所述，当且仅当 $\Delta>0$ 时，函数 $F(x)$ 在 $(-\ ,+\ )$ 上有极值点．　由 $\Delta=4(b^2-3c)>0$ 得 $b<-\sqrt{3c}$ 或 $b>\sqrt{3c}$．　$b=-1+2\sqrt{c}$，，$-1+2\sqrt{c}<-\sqrt{3c}$ 或 $-1+2\sqrt{c}>\sqrt{3c}$．　解之得 $0<c<7-4\sqrt{3}$ 或 $c>7+4\sqrt{3}$．

故所求 c 的取值范围是$(0,7-4\sqrt{3})\cup(7+4\sqrt{3},+\quad)$.

13 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)

1.(理)D (文)D 2.(理)A (文)D 3.B 4.(理)C (文)A 5.(理)B (文)C 6.(理)C (文)B 7.(理)B (文)D 8.(理)C (文)D 9.(理)A (文)A 10.C 11.B 12.(理)D (文)A

13.(理)4 (文)$2x-y+4=0$ 14.(理)0.75 (文)84 15.(理)9 (文)2 16.(理)$[-\frac{1}{10},0)\cup(0,\frac{1}{10}]$ (文)$(0,\frac{1}{2})$

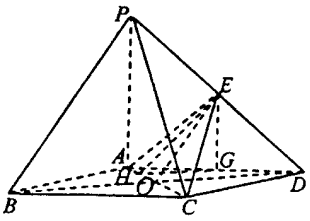
17. 解 由 $\sin(\frac{\pi}{4}+2\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}-2\alpha)=\sin(\frac{\pi}{4}+2\alpha)\cdot\cos(\frac{\pi}{4}+2\alpha)=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+4\alpha)=\frac{1}{2}\cos 4\alpha=\frac{1}{4}$, 得 $\cos 4\alpha=\frac{1}{2}$. 又 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$,所以 $\alpha=\frac{5\pi}{12}$. 于是 $2\sin^2\alpha+\tan\alpha-\cot\alpha-1=-\cos 2\alpha+\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\cos 2\alpha+\frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-(\cos 2\alpha+2\cot 2\alpha)=-(\cos\frac{5\pi}{6}+2\cot\frac{5\pi}{6})=-(-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3})=\frac{5}{2}\sqrt{3}$. (文)解 由 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$, 得 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$. 于是 $\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+1}{2\tan\alpha+1}=\frac{(\frac{1}{3})^2+1}{2\times\frac{1}{3}+1}=\frac{2}{3}$.

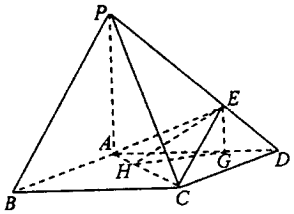
18. 解 (Ⅰ)设 A、B、C 分别为甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的事件. 由题设条件有

$$\begin{cases}P(A\cdot\overline{B})=\frac{1}{4},\\ P(B\cdot C)=\frac{1}{12},\\ P(A\cdot C)=\frac{2}{9}\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}P(A)\cdot(1-P(B))=\frac{1}{4},\ ①\\ P(B)\cdot(1-P(C))=\frac{1}{12},\ ②\\ P(A)\cdot P(C)=\frac{2}{9}.\ ③\end{cases}$$

由 ①、③ 得 $P(B)=1-\frac{9}{8}P(C)$ 代入②得 $27[P(C)]^2-51P(C)+22=0$. 解得 $P(C)=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{11}{9}$(舍去). 将 $P(C)=\frac{2}{3}$ 分别代入③、②可得 $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$. 即甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率分别是 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3}$. (Ⅱ)记 D 为从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验,至少有一个一等品的事件,则 $P(D)=1-P(\overline{D})=1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. 故从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验,至少有一个一等品的概率为 $\frac{5}{6}$. (文)(Ⅰ)证法一 因为底面 ABCD 是菱形,$\angle ABC=60°$,所以 $AB=AD=AC=a$. 在△PAB 中,由 $PA^2+AB^2=2a^2-PB^2$ 知 $PA\perp AB$. 同理,$PA\perp AD$. 所以 $PA\perp$ 平面 ABCD. 因为 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}$. 所以 $\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{EA}$、$\overrightarrow{EC}$ 共面. 又 $PB\not\subset$ 平面 EAC,所以 $PB\parallel$ 平面 EAC. 证法二 同证法一得 $PA\perp$ 平面 ABCD. 连结 BD,设 $BD\cap AC=$

O，则 O 为 BD 的中点. 连结 OE，因为 E 是 PD 的中点，所以 PB∥OE. 又 PB⊄平面 EAC，OE⊂平面 EAC，故 PB∥平面 EAC. (Ⅱ)解 作 EG∥PA 交 AD 于 G，由 PA⊥平面 ABCD 知 EG⊥平面 ABCD. 作 GH⊥AC 于 H，连结 EH，则 EH⊥AC，∠EHG 即为二面角 θ 的平面角. 又 E 是 PD 的中点，从而 G 是 AD 的中点，$EG=\frac{1}{2}a$，$AG=\frac{1}{2}a$，$GH=AG\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，所以 $\tan\theta=\frac{EG}{GH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 19.(理)(Ⅰ)证明 因为底面 ABCD 是菱形，∠ABC=60°，所以 AB=AD=AC=a. 在△PAB 中，由 $PA^2+AB^2=2a^2=PB^2$ 知 PA⊥AB. 同理，PA⊥AD. 所以 PA⊥平面 ABCD. (Ⅱ)解 作 EG∥PA 交 AD 于 G，由 PA⊥平面 ABCD 知 EG⊥平面 ABCD. 作 GH⊥AC 于 H，连结 EH，则 EH⊥AC，∠EHG 为二面角 θ 的平面角. 又 PE∶ED=2∶1，所以 $EG=\frac{1}{3}a$，$AG=\frac{2}{3}a$，$GH=AG\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，从而 $\tan\theta=\frac{EG}{GH}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta=30°$. (Ⅲ)解法一 以 A 为坐标原点，直线 AD、AP 分别为 y 轴、z 轴，过 A 点垂直平面 PAD 的直线为 x 轴，建立空间直角坐标系如图. 由题设条件，相关各点的坐标分别为 A(0,0,0)，$B(\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{1}{2}a,0)$，$C(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,0)$，D(0,a,0)，P(0,0,a)，$E(0,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a)$. 所以 $\vec{AE}=(0,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a)$，$\vec{AC}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,0)$，$\vec{AP}=(0,0,a)$，$\vec{PC}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,-a)$，$\vec{BP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,a)$. 设点 F 是棱 PC 上的点，$\vec{PF}=\lambda\vec{PC}=(\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda,\frac{1}{2}a\lambda,-a\lambda)$，其中 $0<\lambda<1$，则 $\vec{BF}=\vec{BP}+\vec{PF}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,a)+(\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda,\frac{1}{2}a\lambda,-a\lambda)=(\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1),\frac{1}{2}a(1+\lambda),a(1-\lambda))$.

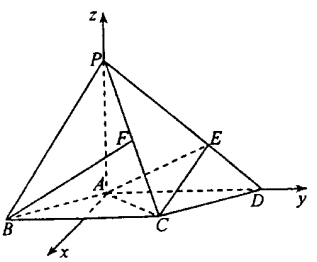




令 $\vec{BF}=\lambda_1\vec{AC}+\lambda_2\vec{AE}$ 得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}a(\lambda-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}a\lambda_1,\\ \frac{1}{2}a(1+\lambda)=\frac{1}{2}a\lambda_1+\frac{2}{3}a\lambda_2,\\ a(1-\lambda)=\frac{1}{3}a\lambda_2.\end{cases}$，即

$\begin{cases}\lambda-1=\lambda_1,\\ 1+\lambda=\lambda_1+\frac{4}{3}\lambda_2,\\ 1-\lambda=\frac{1}{3}\lambda_2.\end{cases}$ 解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\lambda_1=-\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{3}{2}$. 即 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，

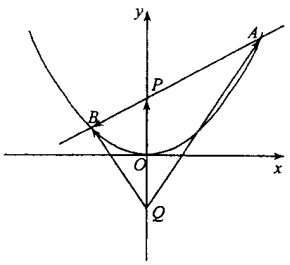
$\vec{BF}=-\frac{1}{2}\vec{AC}+\frac{3}{2}\vec{AE}$. 亦即，F 是 PC 的中点时，$\vec{BF}$、$\vec{AC}$、$\vec{AE}$ 共面. 又 BF



⊄平面 AEC,所以当 F 是棱 PC 的中点时,BF∥平面 AEC. 解法二 当 F 是棱 PC 的中点时,BF∥平面 AEC.证明如下. 证法一 取 PE 的中点 M,连结 FM,则 FM∥CE. ① 由 $EM=\frac{1}{2}PE=ED$,知 E 是 MD 的中点. 连结 BM、BD,设 $BD\cap AC=O$,则 O 为 BD 的中点. 所以 BM∥OE. ② 由①、②知,平面 BFM∥平面 AEC. 又 BF⊂平面 BFM,所以 BF∥平面 AEC. 证法二 因为 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP})=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 所以 $\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AC}$ 共面. 又 BF⊄平面 AEC,从而 BF∥平面 AEC. (文)答案:同(理)第 18 题. 20.(理)解 (Ⅰ)$f'(x)=x(ax+2)e^{ax}$. (ⅰ)当 a=0 时,令 $f'(x)=0$,得 x=0. 若 x>0,则 $f'(x)>0$,从而 f(x)在(0,+∞)上单调递增; 若 x<0,则 $f'(x)<0$,从而 f(x)在(-∞,0)上单调递减. (ⅱ)若 a<0 时,令 $f'(x)=0$,得 $x(ax+2)=0$,故 x=0 或 $x=-\frac{2}{a}$. 若 x<0,则 $f'(x)<0$,从而 f(x)在(-∞,0)上单调递减;若 $0<x<-\frac{2}{a}$,则 $f'(x)>0$,从而 f(x)在$(0,-\frac{2}{a})$上单调递增; 若 $x>-\frac{2}{a}$,则 $f'(x)<0$,从而 f(x)在$(-\frac{2}{a},+\infty)$上单调递减. (Ⅱ)(ⅰ)当 a=0 时,f(x)在区间[0,1]上的最大值是 f(1)=1. (ⅱ)当 $-2<a<0$ 时,f(x)在区间[0,1]上的最大值是 $f(1)=e^a$. (ⅲ)当 $a\leqslant -2$ 时,f(x)在区间[0,1]上的最大值是 $f(-\frac{2}{a})=\frac{4}{a^2e^2}$ (文)(Ⅰ)证明 由 $a_1,2a_7,3a_4$ 成等差数列,得 $4a_7=a_1+3a_4$,即 $4aq^6=a+3aq^3$. 变形得 $(4q^3+1)(q^3-1)=0$,所以 $q^3=-\frac{1}{4}$ 或 $q^3=1$(舍去). 由 $\frac{S_6}{12S_3}=\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{12a_1(1-q^3)}{1-q}}=\frac{1+q^3}{12}=\frac{1}{16}$, $\frac{S_{12}-S_6}{S_6}=\frac{S_{12}}{S_6}-1=\frac{\frac{a_1(1-q^{12})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}-1=1+q^6-1=q^6=\frac{1}{16}$, 得 $\frac{S_6}{12S_3}=\frac{S_{12}-S_6}{S_6}$. 所以 $12S_3$,S_6,$S_{12}-S_6$ 成等比数列. (Ⅱ)解 $T_n=a_1+2a_4+3a_7+\cdots+na_{3n-2}=a+2aq^3+3aq^6+\cdots+naq^{3(n-1)}$, 即 $T_n=a+2\cdot(-\frac{1}{4})a+3\cdot(-\frac{1}{4})^2a+\cdots+n\cdot(-\frac{1}{4})^{n-1}a$. ① ①×$(-\frac{1}{4})$得:$-\frac{1}{4}T_n=-\frac{1}{4}a+2\cdot(-\frac{1}{4})^2a+3\cdot(-\frac{1}{4})^3a+\cdots+n\cdot(-\frac{1}{4})^na$. ② ①-②有:$\frac{5}{4}T_n=a+(-\frac{1}{4})a+(-\frac{1}{4})^2a+(-\frac{1}{4})^3a+\cdots+(-\frac{1}{4})^{n-1}a-n\cdot(-\frac{1}{4})^na=\frac{a[1-(-\frac{1}{4})^n]}{1-(-\frac{1}{4})}-n\cdot(-\frac{1}{4})^na=\frac{4}{5}a-(\frac{4}{5}+n)\cdot(-\frac{1}{4})^na$. 所以 $T_n=\frac{16}{25}a-(\frac{16}{25}+\frac{4}{5}n)\cdot(-\frac{1}{4})^na$.

21.(理)解(Ⅰ)依题意,可设直线 AB 的方程为 y=kx+m,代入抛物线方程 $x^2=4y$ 得 $x^2-4kx-4m=0$. ① 设 A、B 两点的坐标分别是(x_2,y_1)、(x_1,y_2),则 x_1、x_2 是方程①的两根. 所以 $x_1x_2=-4m$. 由点 P(0,m)分

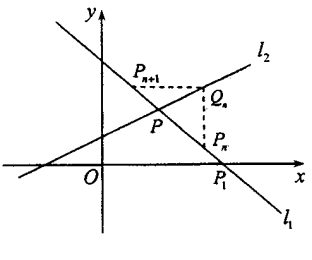
有向线段$\overline{AB}$所成的比为λ，得$\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=0$，即$\lambda=-\frac{x_1}{x_2}$. 又点 Q 是点 P 关于原点的对称点，故点 Q 的坐标是$(0,-m)$，从而$\overrightarrow{QP}=(0,2m)$. $\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB}=(x_1,y_1+m)-\lambda(x_2,y_2+m)=(x_1-\lambda x_2,y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m)$. $\overrightarrow{QP}\cdot(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})=2m[y_1-\lambda y_2+(1-\lambda)m]=2m[\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2^2}{4}+(1+\frac{x_1}{x_2})m]=2m(x_1+x_2)\cdot\frac{x_1x_2+4m}{4x_2}=2m(x_1+x_2)\cdot\frac{-4m+4m}{4x_2}=0$，



所以$\overrightarrow{QP}\perp(\overrightarrow{QA}-\lambda\overrightarrow{QB})$. (Ⅱ)由$\begin{cases}x-2y+12=0,\\x^2=4y,\end{cases}$得点 A、B 的坐标分别是$(6,9)$、$(-4,4)$. 由$x^2=4y$得$y=\frac{1}{4}x^2$，$y'=\frac{1}{2}x$，所以抛物线$x^2=4y$在点 A 处切线的斜率为$y'|_{x=6}=3$. 设圆 C 的方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则$\begin{cases}\frac{b-9}{a-6}=-\frac{1}{3},\\(a-6)^2+(b-9)^2=(a+4)^2+(b-4)^2.\end{cases}$解之得$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{23}{2}$，$r^2=(a+4)^2+(b-4)^2=\frac{125}{2}$. 所以圆 C 的方程是$(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{23}{2})^2=\frac{125}{2}$，即$x^2+y^2+3x-23y+72=0$. (文)解(Ⅰ)由$\begin{cases}y=x^3\\y=-2x^3+3x,\end{cases}$得交点 O、A 的坐标分别是$(0,0)$，$(1,1)$. $f(t)=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}|BD|\cdot|1-0|=\frac{1}{2}|BD|=\frac{1}{2}(-3t^3+3t)$，即$f(t)=-\frac{3}{2}(t^3-t)$，$(0<t<1)$. (Ⅱ)$f'(t)=-\frac{9}{2}t^2+\frac{3}{2}$. 令$f'(t)=0$解得$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当$0<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$f'(t)>0$，从而$f(t)$在区间$(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$上是增函数；当$\frac{\sqrt{3}}{3}<t<1$时，$f'(t)<0$，从而$f(t)$在区间$(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$上是减函数. 所以当$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$f(t)$有最大值为$f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22.(理)(Ⅰ)证明 设点P_n的坐标是(x_n,y_n)，由已知条件得点Q_n、P_{n+1}的坐标分别是：$(x_n,\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2})$，$(x_{n+1},\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2})$.



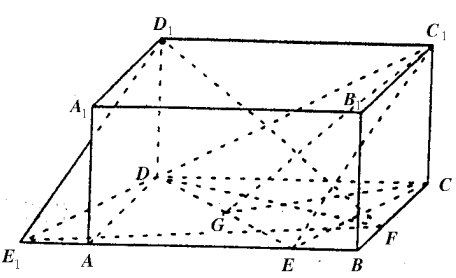
由P_{n+1}在直线l_1上，得$\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}=kx_{n+1}+1-k$. 所以$\frac{1}{2}(x_n-1)=k(x_{n+1}-1)$，即$x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，$n\in N^*$.

(Ⅱ)解 由题设知$x_1=1-\frac{1}{k}$，$x_1-1=-\frac{1}{k}\neq0$，又由(Ⅰ)知$x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，所以数列$\{x_n-1\}$是首项为$x_1-1$，公比为$\frac{1}{2k}$的等比数列. 从而$x_n-1=-\frac{1}{k}\times(\frac{1}{2k})^{n-1}$，即$x_n=1-2\times(\frac{1}{2k})^n$，$n\in N^*$. (Ⅲ)解由$\begin{cases}y=kx+1-k,\\y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\end{cases}$得点 P 的坐标为$(1,1)$. 所以$2|PP_n|^2=2(x_n-1)^2+$

$2(kx_n + 1 - k - 1)^2 = 8 \times (\frac{1}{2k})^{2n} + 2(\frac{1}{2k})^{2n-2}$，$4k^2 |PP_1|^2 + 5 = 4k^2[(1 - \frac{1}{k} - 1)^2 + (0 - 1)^2] + 5 = 4k^2 + 9$. （ⅰ）当$|k| > \frac{1}{2}$，即$k < -\frac{1}{2}$或$k > \frac{1}{2}$时，$4k^2 |PP_1|^2 + 5 > 1 + 9 = 10$. 而此时$0 < |\frac{1}{2k}| < 1$，所以$2|PP_n|^2 < 8 \times 1 + 2 = 10$. 故$2|PP_n|^2 < 4k^2 |PP_1|^2 + 5$. （ⅱ）当$0 < |k| < \frac{1}{2}$，即$k \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$时，$4k^2 |PP_1|^2 + 5 < 1 + 9 = 10$. 而此时$|\frac{1}{2k}| > 1$，所以$2|PP_n|^2 > 8 \times 1 + 2 = 10$. 故$2|PP_n|^2 > 4k^2 |PP_1|^2 + 5$. （文）答案同（理）第 21 小题.

14 2004 年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

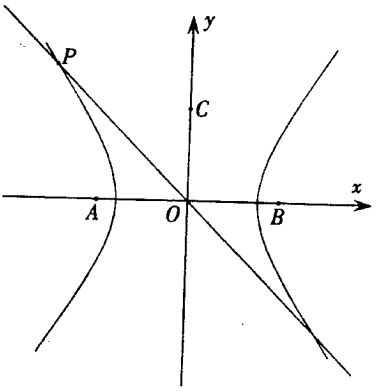
1. B　2. C　3. B　4. A　5. A　6. D　7. B　8. C　9. D　10. B　11. A　12. C　13. $\frac{5}{7}$　14. $-2i$　15. $\frac{PA' \cdot PB' \cdot PC'}{PA \cdot PB \cdot PC}$　16. $e^{2x} + 2e^x (x \in R)$　17. 本小题主要考查等比数列、三角函数的知识和运算能力. 满分 12 分. 解：α, β, γ 成公比为 2 的等比数列，∴ $\beta = 2\alpha, \gamma = 2\beta = 4\alpha$. ∴ $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ 成等比数列，∴ $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin4\alpha}{\sin2\alpha}$. 即$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin2\alpha\cos2\alpha}{\sin2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. 即$2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 = 0$. 解得$\cos\alpha = 1$ 或 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. 当 $\cos\alpha = 1$ 时，$\sin\alpha = 0$，与等比数列的首项不为零矛盾，故 $\cos\alpha = 1$ 应舍去. 当 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \alpha \in [0, 2\pi]$ 时，$\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 或 $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. 所以 $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{4\pi}{3}, \gamma = \frac{8\pi}{3}$ 或 $\alpha = \frac{4\pi}{3}, \beta = \frac{8\pi}{3}, \gamma = \frac{16\pi}{3}$. 18. 本小题主要考查二面角、异面直线所成的角、空间向量等知识和思维能力、空间想像能力、运算能力. 满分 12 分. 解法一：（Ⅰ）过 C 作 $CG \perp DE$，垂足为 G，连结 C_1G. ∵ $CC_1 \perp$ 平面 ABCD，∴ CG 是 C_1G 在平面 ABCD 上的射影，由三垂线定理得 $DE \perp C_1G$. ∴ $\angle CGC_1$ 是二面角 C - DE - C_1 的平面角. 在 $\triangle ADE$ 中，$AE = AD = 3$，$\angle DAE = 90°$，∴ $\angle ADE = 45° \Rightarrow \angle CDG = 90° - 45° = 45°$. ∴ $CG = CD \cdot \sin\angle CDG = 4 \times \sin45° = 2\sqrt{2}$. ∴ $\tan\angle CGC_1 = \frac{CC_1}{CG} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. （Ⅱ）延长 BA 至点 E_1，使 $AE_1 = 1$，连结 E_1F、DE_1、D_1E_1、DF，有 $D_1C_1 // E_1E$，$D_1C_1 = E_1E$，则四边形 $D_1E_1EC_1$ 是平行四边形. 所以 $E_1D_1 // EC_1$. 于是 $\angle E_1D_1F$ 为 EC_1 与 FD_1 所成的角. 在 $Rt\triangle BE_1F$ 中，$E_1F = \sqrt{E_1B^2 + BF^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$. 在 $Rt\triangle D_1DE_1$ 中，$D_1E_1 = \sqrt{DE_1^2 + DD_1^2} = \sqrt{AE_1^2 + AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$. 在 $Rt\triangle D_1DF$ 中，$FD_1 = \sqrt{FD^2 + DD_1^2} = \sqrt{CF^2 + CD^2 + DD_1^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24}$. 所以在 $\triangle E_1FD_1$ 中，由余弦



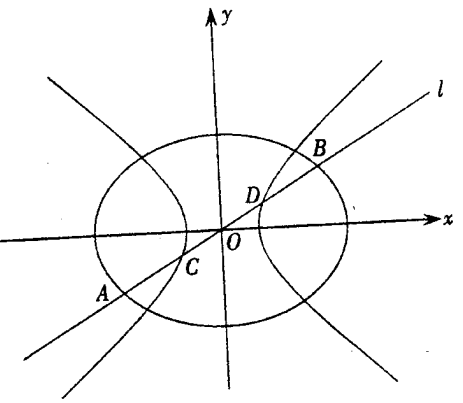
定理得： $\cos\angle E_1D_1F=\frac{D_1E_1^2+FD_1^2-E_1F^2}{2\times D_1E_1\times FD_1}=\frac{14+24-26}{2\times\sqrt{14}\times\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

解法二：(Ⅰ)以 A 为原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正向建立空间直角坐标系，则有 $D(0,3,0)$、$D_1(0,3,2)$、$E(3,0,0)$、$F(4,1,0)$、$C_1(4,3,2)$，于是，$\overrightarrow{DE}=(3,-3,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(1,3,2)$，$\overrightarrow{FD_1}=(-4,2,2)$. 设向量 $n=(x,y,z)$ 与平面 C_1DE 垂直，则有 $\left.\begin{array}{l}n\perp\overrightarrow{DE}\\ n\perp\overrightarrow{EC_1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-3y=0\\ x+3y+2z=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ $x=y=-\frac{1}{2}z$. ∴ $n=(-\frac{z}{2},-\frac{z}{2},z)=\frac{z}{2}(-1,-1,2)$，其中 $z>0$. 取 $n_0=(-1,-1,2)$，则 n_0 是一个与平面 C_1DE 垂直的向量. 向量 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$ 与平面 CDE 垂直，∴ n_0 与 $\overrightarrow{AA_1}$ 所成的角 θ 为二面角 $C-DE-C_1$ 的平面角. $\cos\theta=\frac{n_0\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|n_0|\times|\overrightarrow{AA_1}|}=\frac{-1\times0-1\times0+2\times2}{\sqrt{1+1+4}\times\sqrt{0+0+4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴ $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. (Ⅱ)设 EC_1 与 FD_1 所成的角为 β，则 $\cos\beta=\frac{|\overrightarrow{EC_1}\cdot\overrightarrow{FD_1}|}{|\overrightarrow{EC_1}|\times|\overrightarrow{FD_1}|}=\frac{1\times(-4)+3\times2+2\times2}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\times\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$. 19. 本小题主要考查函数与不等式等知识和思维能力.满分 12 分. (Ⅰ)证法一：因 $f(x)=\left|1-\frac{1}{x}\right|=\begin{cases}\frac{1}{x}-1, & x\in(0,1],\\ 1-\frac{1}{x}, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$ 故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是减函数，而在 $(1,+\infty)$ 上是增函数. 由 $0<a<b$ 且 $f(a)=f(b)$ 得 $0<a<1<b$ 和 $\frac{1}{a}-1=1-\frac{1}{b}$. 即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\Rightarrow2ab=a+b>2\sqrt{ab}$. 故 $\sqrt{ab}>1$，即 $ab>1$. 证法二：由 $f(a)=f(b)$ 得 $\left|1-\frac{1}{a}\right|=\left|1-\frac{1}{b}\right|$. 若 $1-\frac{1}{a}$ 与 $1-\frac{1}{b}$ 同号，可得 $1-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{b}\Rightarrow a=b$. 与 $0<a<b$ 矛盾. 故 $1-\frac{1}{a}$ 与 $1-\frac{1}{b}$ 必异号. 即 $\frac{1}{a}-1=1-\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$. 即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\Rightarrow2ab=a+b>2\sqrt{ab}$. 故 $\sqrt{ab}>1$，即 $ab>1$. (Ⅱ)解法一：$0<x<1$ 时，$y=f(x)=\left|1-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}-1$. ∴ $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$，$0<x_0<1$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为：$y-y_0=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$，即 $y=-\frac{x}{x_0^2}+\frac{2-x_0}{x_0}$. ∴ 切线与 x 轴、y 轴正向的交点为 $(x_0(2-x_0),0)$ 和 $(0,\frac{1}{x_0}(2-x_0))$. 故所求三角形面积表达式为： $A(x_0)=\frac{1}{2}x_0(2-x_0)\cdot\frac{1}{x_0}(2-x_0)=\frac{1}{2}(2-x_0)^2$. 解法二：设过点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$，k 为待定系数. 代入 $y=f(x)=\frac{1}{x}-1$ $(0<x<1)$ 并整理得 $kx^2+(y_0+1-kx_0)x-1=0$. 因为 P 是切点，所以方程有重根，故判别式 $\Delta=(y_0+1-kx_0)^2+4k=(\frac{1}{x_0}-kx_0)^2+4k=0$. 即 $(\frac{1}{x_0}+kx_0)^2=0\Rightarrow k=-\frac{1}{x_0^2}$ $(0<x_0<1)$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为：$y-y_0=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$，即 $y=$

$-\frac{x}{x_0^2}+\frac{2-x_0}{x_0}$. ，切线与 x 轴、y 轴正向的交点为$(x_0(2-x_0),0)$和$(0,\frac{1}{x_0}(2-x_0))$. 故所求三角形面积表达式为： $A(x_0)=\frac{1}{2}x_0(2-x_0)\cdot\frac{1}{x_0}(2-x_0)=\frac{1}{2}(2-x_0)^2$. 20. 本小题主要考查直线、双曲线等知识和实践能力.满分 12 分. 解法一 如图,以接报中心为原点 O,正东、正北方向为 x 轴、y 轴正向,建立直角坐标系.设 A、B、C 分别是西、东、北观测点,则 A(-1020,0),B(1020,0),C(0,1020). 设 P(x,y)为巨响发生点,由 A、C 同时听到巨响声， 得|PA|=|PC|,故 P 在 AC 的垂直平分线 PO 上,PO 的方程为 y=-x. 因 B 点比 A 点晚 4s 听到爆炸声,故|PB|-|PA|=340×4=1360. 由双曲线定义知 P 点在以 A、B 为焦点的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上， 依题意 a=680，c=1020， ，$b^2=c^2-a^2=1020^2-680^2=5\times340^2$. 故双曲线方程为$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{5\times340^2}=1$. 用 y=-x 代入上式,得 $x=\pm680\sqrt{5}$. |PB|>|PA|，，$x=-680\sqrt{5}$，$y=680\sqrt{5}$，即 $P(-680\sqrt{5},680\sqrt{5})$. 故|PO|=$680\sqrt{10}$(m). 答:巨响发生在接报中心的西偏北 45°距中心 $680\sqrt{10}$m 处. 解法二 如图,以接报中心为原点 O,正东、正北方向为 x 轴、y 轴正向,建立直角坐标系. 记 u=1020,则 A(-u,0),B(u,0),C(0,u). 设巨响发生在点 P(x,y),由 A,C 同时听到巨响声,得|PA|=|PC|$\Rightarrow\sqrt{(x+u)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-u)^2}\Rightarrow y=-x$. (1) 由 B 点比 A 点晚 4s 听到巨响声,设 v=|PB|-|PA|=340×4=1360. 即$\sqrt{(x-u)^2+y^2}-\sqrt{(x+u)^2+y^2}=v$. (2) 将(1)式代入(2)式得$\sqrt{(x-u)^2+x^2}-\sqrt{(x+u)^2+x^2}=v$. 整理得$(16u^2-8v^2)x^2=4u^2v^2-v^4$. 用 u=1020,v=1360 代入得 $x=\pm680\sqrt{5}$. |PB|>|PA|，，$x=-680\sqrt{5}$，$y=680\sqrt{5}$. 即 $P(-680\sqrt{5},680\sqrt{5})$. 故|PO|=$680\sqrt{10}$(m). 答:巨响发生在接报中心西偏北 45°距中心 $680\sqrt{10}$m 处. 21. 本小题主要考查函数的单调性、极值等知识和思维能力、创新意识.满分 12 分. (Ⅰ)解 函数 $f(x)=x-\ln(x+m)$,$x\in(-m,+\infty)$连续,且 $f'(x)=1-\frac{1}{x+m}$.令 f'(x)=0,得 x=1-m. 当 $x\in(-m,1-m)$时,f'(x)<0,f(x)为减函数,f(x)>f(1-m). 当 $x\in(1-m,+\infty)$时,f'(x)>0,f(x)为增函数,f(x)>f(1-m). 根据函数极值判别方法,f(1-m)=1-m 为极小值,而且对 $x\in(-m,+\infty)$都有 $f(x)\geqslant f(1-m)=1-m$. 故当整数 $m\leqslant1$时,$f(x)\geqslant1-m\geqslant0$. (Ⅱ)证明:由(Ⅰ)可知,当整数 m>1 时,f(1-m)=1-m<0. 函数 f(x)=x-ln(x+m)在$[e^{-m}-m,1-m]$上为连续减函数. $f(e^{-m}-m)=e^{-m}-m-\ln(e^{-m}-m+m)=e^{-m}>0$. 当整数 m>1 时,$f(e^{-m}-m)$与 f(1-m)异号， 由所给定理知,存在惟一的 $x_1\in(e^{-m}-m,1-m)$， 使 $f(x_1)=$



0. 而当整数 $m>1$ 时，$f(e^{2m}-m)=e^{2m}-3m>(1+1)^{2m}-3m>1+2m+\frac{2m(2m-1)}{2}-3m>0$. （ $m>1\Rightarrow 2m-1>1$.上述不等式也可用数学归纳法证明） 类似的，当整数 $m>1$ 时，$f(x)=x-\ln(x+m)$ 在 $[1-m,e^{2m}-m]$ 上为连续增函数，且 $f(1-m)$ 与 $f(e^{2m}-m)$ 异号，由所给定理知，存在惟一的 $x_2\in(1-m,e^{2m}-m)$，使 $f(x_2)=0$. 故当整数 $m>1$ 时，方程 $f(x)=0$ 在 $[e^{-m}-m,e^{2m}-m]$ 内有两个实根. 22. 本小题主要考查直线、椭圆、双曲线及定比分点等知识和思维能力、运算能力.满分 14 分. 解法一 :首先讨论 l 不与 x 轴垂直时的情况. 设直线 l 的方程为 $y=kx+b$， 如图所示，l 与椭圆、双曲线的交点为： $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$， 依题意有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$. 由



$\begin{cases} y=kx+b, \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1. \end{cases}$ 得 $(16+25k^2)x^2+50bkx+(25b^2-400)=0$. （1） 所以 $x_1+x_2=-\frac{50bk}{16+25k^2}$. 由 $\begin{cases} y=kx+b, \\ x^2-y^2=1. \end{cases}$ 得 $(1-k^2)x^2-2bkx-(b^2+1)=0$. （2） 若 $k=\pm 1$，则 l 与双曲线最多只有一个交点，不合题意.故 $k\neq\pm 1$. 所以 $x_3+x_4=\frac{2bk}{1-k^2}$. 由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}\Rightarrow x_3-x_1=x_2-x_4\Rightarrow x_1+x_2=x_3+x_4$ $\Rightarrow -\frac{50bk}{16+25k^2}=\frac{2bk}{1-k^2}\Rightarrow bk=0\Rightarrow k=0$ 或 $b=0$. ①当 $k=0$ 时，由(1)得 $x_{1,2}=\pm\frac{5}{4}\sqrt{16-b^2}$. 由(2)得 $x_{3,4}=\pm\sqrt{b^2+1}$. 由 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow x_2-x_1=3(x_4-x_3)$. 即 $\frac{10}{4}\sqrt{16-b^2}=6\sqrt{b^2+1}\Rightarrow b=\pm\frac{16}{13}$. 故 l 的方程为 $y=\pm\frac{16}{13}$. ②当 $b=0$ 时，由(1)得 $x_{1,2}=\pm\frac{20}{\sqrt{16+25k^2}}$. 由(2)得 $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$. 由 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow x_2-x_1=3(x_4-x_3)$. 即 $\frac{40}{\sqrt{16+25k^2}}=\frac{6}{\sqrt{1-k^2}}\Rightarrow k=\pm\frac{16}{25}$. 故 l 的方程为 $y=\pm\frac{16}{25}x$. 再讨论 l 与 x 轴垂直时的情况. 设直线 l 的方程为 $x=c$，分别代入椭圆和双曲线方程可解得 $y_{1,2}=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-c^2}$. $y_{3,4}=\pm\sqrt{c^2-1}$. 由 $|\overrightarrow{AB}|=3|\overrightarrow{CD}|\Rightarrow|y_2-y_1|=3|y_4-y_3|$. 即 $\frac{8}{5}\sqrt{25-c^2}=6\sqrt{c^2-1}\Rightarrow c=\pm\frac{25}{\sqrt{241}}$. 故 l 的方程为 $x=\pm\frac{25}{\sqrt{241}}$. 综上所述，直线 l 的方程是：$y=\pm\frac{16}{25}x$、$y=\pm\frac{16}{13}$ 和 $x=\pm\frac{25}{\sqrt{241}}$. 解法二 :设 l 与椭圆、双曲线的交点为： $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$， 则有

$$\begin{cases} \frac{x_i^2}{25}+\frac{y_i^2}{16}=1, & i=1,2. \\ y_j^2-y_j^2=1. & j=3,4. \end{cases}$$

由 i 的两个式子相减及 j 的两个式子相减，得：$\begin{cases}16(x_2+x_1)(x_2-x_1)+25(y_2+y_1)(y_2-y_1)=0,\\(x_4+x_3)(x_4-x_3)-(y_4+y_3)(y_4-y_3)=0.\end{cases}$

因 C、D 是 AB 的三等分点，故 CD 的中点(x_0,y_0)与 AB 的中点重合，且 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$. 于是 $x_0=\frac{x_2+x_1}{2}=\frac{x_4+x_3}{2}$，$y_0=\frac{y_2+y_1}{2}=\frac{y_4+y_3}{2}$，$x_2-x_1=3(x_4-x_3)$，$y_2-y_1=3(y_4-y_3)$. 因此

$$\begin{cases}16x_0(x_4-x_3)=-25y_0(y_4-y_3), & (1)\\ x_0(x_4-x_3)=y_0(y_4-y_3). & (2)\end{cases}$$

若 $x_0y_0\neq0$，则 $x_2=x_1\Leftrightarrow x_4=x_3\Leftrightarrow y_4=y_3\Leftrightarrow y_2=y_1$. 因 A、B、C、D 互异，故 $x_i\neq x_j$，$y_i\neq y_j$，这里 $i,j=1,2,3,4$ 且 $i\neq j$. (1)÷(2)得 $16=-25$，矛盾. 所以 $x_0y_0=0$. ①当 $x_0=0$，$y_0\neq0$ 时，由(2)得 $y_4=y_3\neq0$，这时 l 平行 x 轴. 设 l 的方程为 $y=b$，分别代入椭圆、双曲线方程得：$x_{1,2}=\pm\frac{5}{4}\sqrt{16-b^2}$，$x_{3,4}=\pm\sqrt{b^2+1}$. $x_2-x_1=3(x_4-x_3)\Rightarrow\frac{10}{4}\sqrt{16-b^2}=6\sqrt{b^2+1}\Rightarrow b=\pm\frac{16}{13}$. 故 l 的方程为：$y=\pm\frac{16}{13}$. ②当 $y_0=0$，$x_0\neq0$ 时，由(2)得 $x_4=x_3\neq0$，这时 l 平行 y 轴. 设 l 的方程为 $x=c$，分别代入椭圆、双曲线方程得：$y_{1,2}=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-c^2}$，$y_{3,4}=\pm\sqrt{c^2-1}$. $y_2-y_1=3(y_4-y_3)\Rightarrow\frac{8}{5}\sqrt{25-c^2}=6\sqrt{c^2-1}\Rightarrow c=\pm\frac{25}{\sqrt{241}}$. 故 l 的方程为：$x=\pm\frac{25}{\sqrt{241}}$. ③当 $x_0=0$，$y_0=0$ 时，这时 l 通过坐标原点且不与 x 轴垂直. 设 l 的方程为 $y=kx$，分别代入椭圆、双曲线方程得：$x_{1,2}=\pm\frac{20}{\sqrt{16+25k^2}}$，$x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$. $x_2-x_1=3(x_4-x_3)\Rightarrow k=\pm\frac{16}{25}$. 故 l 的方程为：$y=\pm\frac{16}{25}x$. 综上所述，直线 l 的方程是：$y=\pm\frac{16}{25}x$、$y=\pm\frac{16}{13}$和 $x=\pm\frac{25}{\sqrt{241}}$.

15 2004 年普通高等学校招生全国统一考试(重庆卷)

1. D　2.(理) A　(文) B　3. D　4. A　5. B　6. C　7.(理) C　(文) A　8.(理) C　(文) D　9. B　10. B　11.(理) B　(文) D　12.(理) D　(文) C

13. -2　14.(理) $\frac{\pi}{4}$　(文) 6　15.(理) $\frac{\pi}{3}$　(文) $y-4x+4=0$　16.(理) $[-1,3]$　(文) 4

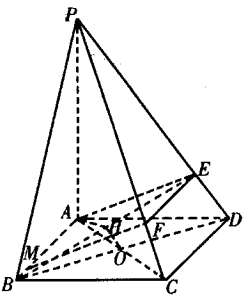
17.(本小题 12 分)解：$y=\sin^4x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)+\sqrt{3}\sin2x=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. 故该函数的最小正周期是 π；最小值是 -2；单增区间是 $[0,\frac{1}{3}\pi]$，$[\frac{5}{6}\pi,\pi]$.　18.(理)(本小题 12 分)　解：(Ⅰ)ξ 的所有可能值为 0,1,2,3,4. 用 A_k 表示“汽车通过第 k 个路口时不停(遇绿灯)”，则 $P(A_k)=\frac{3}{4}$ $(k=1,2,3,4)$，且 A_1，A_2，A_3，A_4 独立. 故 $P(\xi=0)=P(\bar{A}_1)=\frac{1}{4}$，$P(\xi=1)=P(A_1\cdot\bar{A}_2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$，$P(\xi=2)=P(A_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3)=(\frac{3}{4})^2\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$，$P(\xi=3)=P$

$(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot \bar{A}_4)=(\frac{3}{4})^3\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$，$P(\xi=4)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)=(\frac{3}{4})^4=\frac{81}{256}$. 从而 ξ 有分布列：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{256}$	$\frac{81}{256}$

$E\xi=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{16}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{27}{256}+4\times\frac{81}{256}=\frac{525}{256}$. (Ⅱ) $P(\xi\leqslant 3)=1-P(\xi=4)=1-\frac{81}{256}=\frac{175}{256}$. 答：停车时最多已通过 3 个路口的概率为 $\frac{175}{256}$. (文)(本小题 12 分) 解：(Ⅰ)设 A_k 表示“第 k 人命中目标”，k = 1，2，3. 这里，A_1，A_2，A_3 独立，且 $P(A_1)=0.7$，$P(A_2)=0.6$，$P(A_3)=0.5$. 从而，至少有一人命中目标的概率为 $1-P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-0.3\times0.4\times0.5=0.94$. 恰有两人命中目标的概率为 $P(A_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3+A_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3+\bar{A}_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3)+P(A_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3)+P(\bar{A}_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)=0.7\times0.6\times0.5+0.7\times0.4\times0.5+0.3\times0.6\times0.5=0.44$ 答：至少有一人命中目标的概率为 0.94，恰有两人命中目标的概率为 0.44.

(Ⅱ)设甲每次射击为一次试验，从而该问题构成三次重复独立试验. 又已知在每次试验中事件“命中目标”发生的概率为 0.7，故所求概率为 $P_3(2)=C_3^2(0.7)^2(0.3)=0.441$. 答：他恰好命中两次的概率为 0.441.



答(19)图

19.(本小题 12 分) (Ⅰ)证明：因 PA⊥底面，有 PA⊥AB，又知 AB⊥AD，故 AB⊥面 PAD，推得 BA⊥AE，又 AM∥CD∥EF，且 AM = EF，证得 AEFM 是矩形，故 AM⊥MF. 又因 AE⊥PD，AE⊥CD，故 AE⊥面 PCD，而 MF∥AE，得 MF⊥面 PCD，故 MF⊥PC，因此 MF 是 AB 与 PC 的公垂线. (Ⅱ)(理)解：连结 BD 交 AC 于 O，连结 BE，过 O 作 BE 的垂线 OH，垂足 H 在 BE 上. 易知 PD⊥面 MAE，故 DE⊥BE，又 OH⊥BE，故 OH∥DE，因此 OH⊥面 MAE. 连结 AH，则 ∠HAO 是所要求的线 AC 与面 MAE 所成的角. 设 AB = a，则 PA = 3a，$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 因 Rt△ADE ~ Rt△PDA，故 $ED=\frac{AD^2}{PD}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+(3a)^2}}=\frac{a}{\sqrt{10}}$，$OH=\frac{1}{2}ED=\frac{a}{2\sqrt{10}}$. 从而在 Rt△AHO 中 $\sin HAO=\frac{OH}{AO}=\frac{a}{2\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$. (Ⅱ)(文)解：因由(Ⅰ)知 AE⊥AB，又 AD⊥AB，故 ∠EAD 是二面角 E - AB - D 的平面角. 设 AB = a，则 PA = 3a. 因 Rt△ADE ~ Rt△PDA，故 $\angle EAD=\angle APD$，因此 $\sin EAD=\sin APD=\frac{AD}{PD}=\frac{a}{\sqrt{a^2+(3a)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

20.(理)(本小题 12 分) 解：(Ⅰ) $f'(x)=3x^2-2(1+a)x+a$.

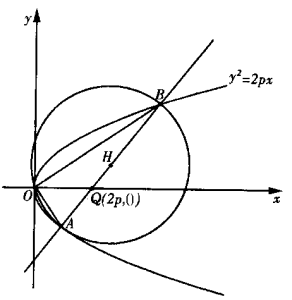
令 $f'(x)=0$ 得方程 $3x^2-2(1+a)x+a=0$. 因 $\Delta=4(a^2-a+1)\geqslant 4a>0$，故方程有两个不同实根 x_1、x_2. 不妨设 $x_1<x_2$，由 $f'(x)=3(x-x_1)(x-x_2)$ 可

判别 $f'(x)$的符号如下：当 $x<x_1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$. 因此 x_1 是极大值点，x_2 是极小值点. (Ⅱ)因 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant 0$，故得不等式 $x_1^3+x_2^3-(1+a)(x_1^2+x_2^2)+a(x_1+x_2)\leqslant 0$. 即 $(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]-(1+a)[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+a(x_1+x_2)\leqslant 0$. 又由(Ⅰ)知 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2}{3}(1+a),\\ x_1x_2=\frac{a}{3}.\end{cases}$ 代入前面不等式，两边除以 $(1+a)$，并化简得 $2a^2-5a+2\geqslant 0$. 解不等式得 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant\frac{1}{2}$(舍去). 因此，当 $a\geqslant 2$ 时，不等式 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant 0$ 成立.

(文)(本小题 12 分) 解：每月生产 x 吨时的利润为 $f(x)=(24200-\frac{1}{5}x^2)x-(50000+200x)=-\frac{1}{5}x^3+24000x-50000$ $(x\geqslant 0)$. 由 $f'(x)=-\frac{3}{5}x^2+24000=0$ 解得 $x_1=200$，$x_2=-200$(舍去). 因 $f(x)$在$[0,+\infty)$内只有一个点 $x=200$ 使 $f'(x)=0$，故它就是最大值点，且最大值为：$f(200)=-\frac{1}{5}(200)^3+24000\times 200-50000=3150000$(元).

答：每月生产 200 吨产品时利润达到最大，最大利润为 315 万元.

21.(理)(本小题 12 分) 解法一：由题意，直线 AB 不能是水平线，故可设直线方程为：$ky=x-2p$. 又设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，则其坐标满足 $\begin{cases}ky=x-2p,\\ y^2=2px.\end{cases}$

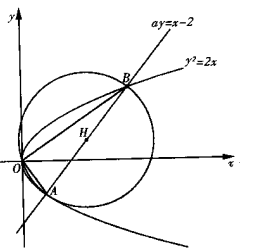


答(21)(理)图

消去 x 得 $y^2-2pky-4p^2=0$. 由此得 $\begin{cases}y_A+y_B=2pk,\\ y_Ay_B=-4p^2.\end{cases}$

$\begin{cases}x_A+x_B=4p+k(y_A+y_B)=(4+2k^2)p,\\ x_Ax_B=\frac{(y_Ay_B)^2}{(2p)^2}=4p^2.\end{cases}$ 因此 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+y_Ay_B=0$，即 $OA\perp OB$. 故 O 必在圆 H 的圆周上. 又由题意圆心 $H(x_H,y_H)$ 是 AB 的中点，故 $\begin{cases}x_H=\frac{x_A+x_B}{2}=(2+k^2)p,\\ y_H=\frac{y_A+y_B}{2}=kp.\end{cases}$ 由前已证，OH 应是圆 H 的半径，且 $|OH|=\sqrt{x_H^2+y_H^2}=\sqrt{k^4+5k^2+4p}$. 从而当 $k=0$ 时，圆 H 的半径最小，亦使圆 H 的面积最小. 此时，直线 AB 的方程为：$x=2p$. 解法二：由题意，直线 AB 不能是水平线，故可设直线方程为：$ky=x-2p$ 又设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，则其坐标满足 $\begin{cases}ky=x-2p,\\ y^2=2px.\end{cases}$ 分别消去 x，y 得 $\begin{cases}y^2-2pky-4p^2=0,\\ x^2-2p(k^2+2)x+4p^2=0.\end{cases}$ 故得 A、B 所在圆的方程 $x^2+y^2-2p(k^2+2)x-2pky=0$. 明显地，$O(0,0)$满足上面方程，故 A、B、O 三点均在上面方程所表示的圆上. 又知 A、B 中点 H 的坐标为$(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})=((2+k^2)p,kp)$，故 $|OH|=\sqrt{(2+k^2)^2p^2+k^2p^2}$. 而前面圆的方程可表示

为 $[x-(2+k^2)p]^2+(y-pk)^2=(2+k^2)^2p^2+k^2p^2$，故 $|OH|$ 为上面圆的半径 R，从而以 AB 为直径的圆必过点 O(0,0)．又 $R^2=|OH|^2=(k^4+5k^2+4)p^2$，故当 $k=0$ 时，R^2 最小，从而圆的面积最小，此时直线 AB 的方程为：$x=2p$．解法三：同解法一得 O 必在圆 H 的圆周上．又直径 $|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{x_A^2+x_B^2+y_A^2+y_B^2}=\sqrt{x_A^2+x_B^2+2px_A+2px_B}\geqslant\sqrt{2x_Ax_B+4p\cdot\sqrt{x_Ax_B}}=4p$．上式当 $x_A=x_B$ 时，等号成立，直径 $|AB|$ 最小，从而圆面积最小．此时直线 AB 的方程为 $x=2p$．(文)(本小题 12 分) 解法一：设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，则其坐标满足 $\begin{cases}ay=x-2,\\y^2=2x.\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-2ay-4=0$．则 $\begin{cases}y_A+y_B=2a,\\y_A\cdot y_B=-4.\end{cases}$



$$\begin{cases}x_A+x_B=4+a(y_A+y_B)=4+2a^2.\\x_Ax_B=\dfrac{(y_Ay_B)^2}{4}=4.\end{cases}$$

因此 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+y_Ay_B=0$，即 OA 答(21)(文)图 $\perp$OB．故 O 必在圆 H 的圆周上．又由题意圆心 $H(x_H,y_H)$ 是 AB 的中点，故 $\begin{cases}x_H=\dfrac{x_A+x_B}{2}=2+a^2,\\y_H=\dfrac{y_A+y_B}{2}=a.\end{cases}$ 由前已证，OH 应是圆 H 的半径，且 $|OH|=\sqrt{x_H^2+y_H^2}=\sqrt{a^4+5a^2+4}$．从而当 $a=0$ 时，圆 H 的半径最小，亦使圆 H 的面积最小．解法二：设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，则其坐标满足 $\begin{cases}ay=x-2,\\y^2=2x.\end{cases}$ 分别消去 x，y 得 $\begin{cases}y^2-2ay-4=0,\\x^2-2(a^2+2)x+4=0.\end{cases}$ 故得 A、B 所在圆的方程 $x^2+y^2-2(a^2+2)x-2ay=0$．明显地，O(0,0) 满足上面方程，故 A、B、O 三点均在上面方程所表示的圆上．又知 A、B 中点 H 的坐标为 $(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2})=(2+a^2,a)$，故 $|OH|=\sqrt{(2+a^2)^2+a^2}$．而前面圆的方程可表示为 $[x-(2+a^2)]^2+(y-a)^2=(2+a^2)^2+a^2$．故 $|OH|$ 为上面圆的半径 R．从而以 AB 为直径的圆必过点 O(0,0)．又 $R^2=|OH|^2=a^4+5a^2+4$．故当 $a=0$ 时，R^2 最小，从而圆的面积最小．解法三：同解法一得 O 必在圆 H 的圆周上．又直径 $|AB|=\sqrt{(x^A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{x_A^2+x_B^2+y_A^2+y_B^2}=\sqrt{x_A^2+x_B^2+2x_A+2x_B}\geqslant\sqrt{2x_Ax_B+4\sqrt{x_Ax_B}}=4$．上式当 $x_A=x_B$ 时，等号成立，直径 $|AB|$ 最小，从而圆面积最小．此时 $a=0$．22.(理)(本小题 14 分) (Ⅰ)证法一：当 $n=1$ 时，$a_1=2>\sqrt{2\times1+1}$，不等式成立．假设 $n=k$ 时，$a_k>\sqrt{2k+1}$ 成立．当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}^2=a_k^2+\dfrac{1}{a_k^2}+2>2k+3+\dfrac{1}{a_k^2}>2(k+1)+1$．，$n=k+1$ 时 $a_{k+1}>\sqrt{2(k+1)+1}$ 时成立．综上由数学归纳法可知，$a_n>\sqrt{2n+1}$ 对一切正整数成立．证法二：当 $n=1$ 时，$a_1=2>\sqrt{3}=\sqrt{2\times1+1}$，结论成立．假设 $n=k$ 时结论成立，即 $a_k>\sqrt{2k+1}$．当 $n=k+1$ 时，由函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $(x>1)$ 的单增性和归纳假设有 $a_{k+1}=a_k+\dfrac{1}{a_k}>\sqrt{2k+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$．因此只需证：$\sqrt{2k+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$

$\geqslant\sqrt{2k+3}$. 而这等价于 $\left(\sqrt{2k+1}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)^2\geqslant 2k+3 \Leftrightarrow\frac{1}{2k+1}\geqslant 0$ 显然成立. 所以当 $n=k+1$ 时,结论成立. 因此,$a_n>\sqrt{2n+1}$对一切正整数 n 均成立. 证法三:由递推公式得 $a_n^2=a_{n-1}^2+2+\frac{1}{a_{n-1}^2}$, $a_{n-1}^2=a_{n-2}^2+2+\frac{1}{a_{n-2}^2}$, … $a_2^2=a_1^2+2+\frac{1}{a_1^2}$. 上述各式相加并化简得 $a_n^2=a_1^2+2(n-1)+\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}>2^2+2(n-1)=2n+2>2n+1$ $(n\geqslant 2)$. 又 $n=1$ 时,$a_n>\sqrt{2n+1}$明显成立,故 $a_n>\sqrt{2n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. (Ⅱ)解法一:$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}\sqrt{n}}{a_n\sqrt{n+1}}=(1+\frac{1}{a_n^2})\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}<(1+\frac{1}{2n+1})\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\frac{2(n+1)\sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}=\frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}{n+\frac{1}{2}}<1$.故 $b_{n+1}<b_n$. 解法二:$b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}(a_n+\frac{1}{a_n})-\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,a_n}[\sqrt{n}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})a_n^2]\leqslant\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,a_n}[\sqrt{n}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(2n+1)]$(由(Ⅰ)的结论)$=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,a_n}[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(2n+1)]=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,a_n}[\sqrt{n(n+1)}-(n+1)]=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})<0$. 所以 $b_{n+1}<b_n$. 解法三:$b_{n+1}^2-b_n^2=\frac{a_{n+1}^2}{n+1}-\frac{a_n^2}{n}=\frac{1}{n+1}(a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2)-\frac{a_n^2}{n}=\frac{1}{n+1}(2+\frac{1}{a_n^2}-\frac{a_n^2}{n})<\frac{1}{n+1}(2+\frac{1}{2n+1}-\frac{2n+1}{n})=\frac{1}{n+1}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n})<0$. 故 $b_{n+1}^2<b_n^2$,因此 $b_{n+1}<b_n$. (文)(本小题 14 分) 解:(Ⅰ)因 $b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{5}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n-a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)=\frac{2}{3}b_n$, 故 $\{b_n\}$是公比为$\frac{2}{3}$的等比数列,且 $b_1=a_2-a_1=\frac{2}{3}$,故 $b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$. (Ⅱ)由 $b_n=a_{n+1}-a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 得 $a_{n+1}-a_1=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)=(\frac{2}{3})^n+(\frac{2}{3})^{n-1}+\cdots+(\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}=2[1-(\frac{2}{3})^n]$. 注意到 $a_1=1$,可得 $a_n=3-\frac{2^n}{3^{n-1}}$ $(n=1,2,\cdots)$. 记数列$\left\{\frac{n2^{n-1}}{3^{n-1}}\right\}$的前 n 项和为 T_n,则 $T_n=1+2\cdot\frac{2}{3}+\cdots+n\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}$,

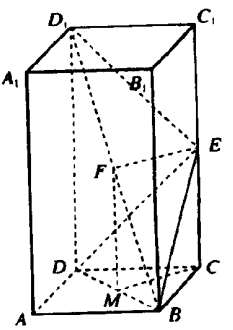
$\frac{2}{3}T_n=\frac{2}{3}+2\cdot(\frac{2}{3})^2+\cdots+n\cdot(\frac{2}{3})^n$. 两式相减得 $\frac{1}{3}T_n=1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+\cdots+(\frac{2}{3})^{n-1}-n(\frac{2}{3})^n=3[1-(\frac{2}{3})^n]-n(\frac{2}{3})^n$, 故 $T_n=9[1-(\frac{2}{3})^n]-3n(\frac{2}{3})^n=9-\frac{(3+n)2^n}{3^{n-1}}$.从而 $S_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n=3(1+2+\cdots+n)-2T_n=\frac{3}{2}n(n+1)+\frac{(3+n)2^{n+1}}{3^{n-1}}-18$.

16 2003 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷)

1. 文 C,理 B　2. 文 B,理 D　3. 文 B,理 D　4. 文 D,理 B　5. 文 C,理 B　6. 文 B,理 C　7. 文 D,理 B　8. 文 B,理 C　9. 文 B,理 D　10. 文理 C　11. 文 C,理 B　12. 文理 A　13. $-\frac{21}{2}$　14. 6,30,10

15. 文 $S^2_{\triangle ABC}+S^2_{\triangle ACD}+S^2_{\triangle ADB}=S^2_{\triangle BCD}$,理 120　16. 文 42,理 ①④⑤

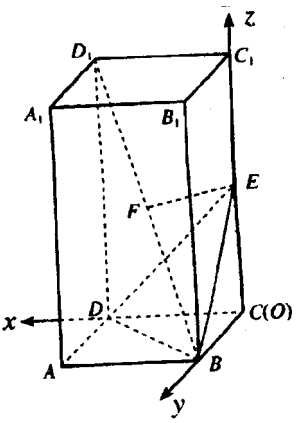
17. 本小题主要考查线面关系和四棱柱等基础知识,考查空间想象能力和推理能力. 满分 12 分.



(文)(Ⅰ)证法一 取 BD 中点 M,连结 MC,FM,

F 为 BD_1 中点,　,　$FM\parallel D_1D$ 且 $FM=\frac{1}{2}D_1D$.

又 $EC=\frac{1}{2}CC_1$ 且 $EC\perp MC$,　,　四边形 EFMC 是矩形,　,　$EF\perp CC_1$. 又 $CM\perp$面 DBD_1,　,　$EF\perp$面 DBD_1,　$BD_1\subset$面 DBD_1,　,　$EF\perp BD_1$. 故 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线.　证法二 建立如图的坐标系,得　$B(0,1,0)$,$D_1(1,0,2)$,　$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$,$C_1(0,0,2)$,$E(0,0,1)$.　,　$\overrightarrow{EF}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$,　$\overrightarrow{BD_1}=(1,-1,2)$.



,　$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0$,$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,　即 $EF\perp CC_1$,$EF\perp BD_1$. 故 EF 是 CC_1 与 BD_1 的公垂线.

(Ⅱ)解 连结 ED_1,有 $V_{E-DBD_1}=V_{D_1-DBE}$. 由(Ⅰ)知 $EF\perp$面 DBD_1,设点 D_1 到面 BDE 的距离为 d,则 $S_{\triangle DBE}\cdot d=S_{\triangle DBD_1}\cdot EF$.

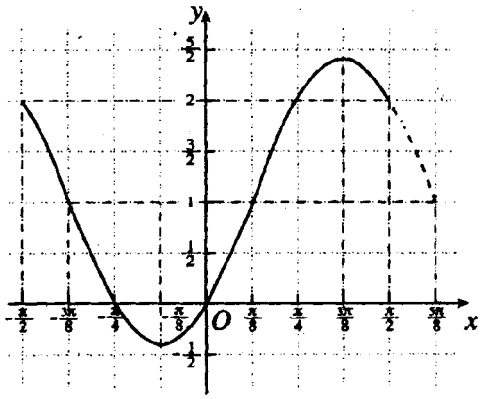
$AA_1=2$,$AB=1$,　,　$BD=BE=ED=\sqrt{2}$,$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　,　$S_{\triangle DBD_1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2=\sqrt{2}$,　$S_{\triangle DBE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　,　$d=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故点 D_1 到平面 BDE 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(理)(Ⅰ)$f(x)=2\sin^2x+2\sin x\cos x=1-\cos 2x+\sin 2x=1+\sqrt{2}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{4})=1+\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$,　所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π,最大值为 $1+\sqrt{2}$.　(Ⅱ)由(Ⅰ)知

x	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$
y	1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	1

故函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的图像是

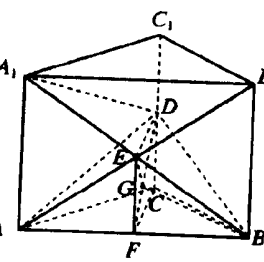
18. (文)本小题主要考查导数、切线等知识及综合运用数学知识解决问题的能力. 满分 12 分.　(Ⅰ)解 函数 $y=x^2+2x$ 的导数 $y'=2x+2$,　曲线



C_1 在点 $P(x_1, x_1^2+2x_1)$ 的切线方程是 $y-(x_1^2+2x_1)=(2x_1+2)(x-x_1)$，即 $y=(2x_1+2)x-x_1^2$. ① 函数 $y=-x^2+a$ 的导数 $y'=-2x$，曲线 C_2 在点 $Q(x_2, -x_2^2+a)$ 的切线方程是 $y-(-x_2^2+a)=-2x_2(x-x_2)$，即 $y=-2x_2x+x_2^2+a$. ② 如果直线 l 是过 P 和 Q 的公切线，则①式和②式都是 l 的方程，所以 $\begin{cases} x_1+1=-x_2, \\ -x_1^2=x_2^2+a. \end{cases}$ 消去 x_2 得方程 $2x_1^2+2x_1+1+a=0$.

若判别式 $\Delta=4-4\times2(1+a)=0$ 时，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时解得 $x_1=-\frac{1}{2}$，此时点 P 与 Q 重合. 即当 $a=-\frac{1}{2}$ 时 C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线，由①得公切线方程为 $y=x-\frac{1}{4}$. (Ⅱ)证明：由(Ⅰ)可知，当 $a<-\frac{1}{2}$ 时 C_1 和 C_2 有两条公切线. 设一条公切线上切点为 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，其中 P 在 C_1 上，Q 在 C_2 上，则有 $x_1+x_2=-1$，$y_1+y_2=x_1^2+2x_1+(-x_2^2+a)=x_1^2+2x_1-(x_1+1)^2+a=-1+a$，线段 PQ 的中点为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+a}{2}\right)$.

同理，另一条公切线段 $P'Q'$ 的中点也是 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+a}{2}\right)$. 所以公切线段 PQ 和 $P'Q'$ 互相平分. (理)本小题主要考查线面关系和直棱柱等基础知识，同时考查空间想象能力和推理运算能力. 满分 12 分.

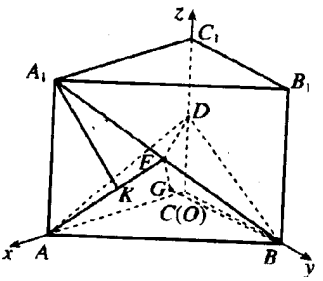


解法一：(Ⅰ)连结 BG，则 BG 是 BE 在面 ABD 的射影，即 $\angle EBG$ 是 A_1B 与平面 ABD 所成的角. 设 F 为 AB 中点，连结 EF、FC，D、E 分别是 CC_1、A_1B 的中点，又 $DC\perp$ 平面 ABC，，$CDEF$ 为矩形. 连结 DF，G 是 $\triangle ADB$ 的重心，，$G\in DF$. 在直角三角形 EFD 中，$EF^2=FG\cdot FD=\frac{1}{3}FD^2$，

$EF=1$，，$FD=\sqrt{3}$. (4 分) 于是 $ED=\sqrt{2}$，$EG=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. $FC=ED=\sqrt{2}$，，$AB=2\sqrt{2}$，$A_1B=2\sqrt{3}$，$EB=\sqrt{3}$. ，$\sin\angle EBG=\frac{EG}{EB}=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$. ，$A_1B$ 与平面 ABD 所成的角是 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. (Ⅱ)连结 A_1D，有 $V_{A_1-ADE}=V_{D-AA_1E}$. $ED\perp AB$，$ED\perp EF$，又 $EF\cap AB=F$，，$ED\perp$ 平面 A_1AB，设 A_1 到平面 AED 的距离为 h，则 $S_{\triangle AED}\cdot h=S_{\triangle A_1AE}\cdot ED$. 又

$S_{\triangle A_1AE}=\frac{1}{2}S_{\triangle A_1AB}=\frac{1}{4}A_1A\cdot AB=\sqrt{2}$，$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AE\cdot ED=\frac{\sqrt{6}}{2}$．，$h=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．即 A_1 到平面 AED 的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$．**解法二：**(Ⅰ)连结 BG，则 BG 是 BE 在面 ABD 的射影，即∠A_1BG 是 A_1B 与平面 ABD 所成的角．

如图所示建立坐标系，坐标原点为 O．设 CA=2a，则 A(2a,0,0)，B(0,2a,0)，D(0,0,1)，A_1(2a,0,2)，E(a,a,1)，G($\frac{2a}{3},\frac{2a}{3},\frac{1}{3}$)．，$\overrightarrow{GE}=(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{2}{3})$，$\overrightarrow{BD}=(0,-2a,1)$．，$\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}a^2+\frac{2}{3}=0$，解得 a=1．，$\overrightarrow{BA_1}=(2,-2,2)$，$\overrightarrow{BG}=(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$．，$\cos\angle A_1BG=\frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BA_1}||\overrightarrow{BG}|}=\frac{14/3}{2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$．$A_1B$ 与平面 ABD 所成角是 $\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}$．(Ⅱ)由(Ⅰ)有 A(2,0,0)，$A_1$(2,0,2)，E(1,1,1)，D(0,0,1)．$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{ED}=(-1,1,1)\cdot(-1,-1,0)=0$，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{ED}=(0,0,2)\cdot(-1,-1,0)=0$，，ED⊥平面 AA_1E，又 ED⊂平面 AED，，平面 AED⊥平面 AA_1E，又面 AED∩面 AA_1E=AE，，点 A_1 在平面 AED 的射影 K 在 AE 上．设$\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AE}$，则$\overrightarrow{A_1K}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AK}=(-\lambda,\lambda,\lambda-2)$．由$\overrightarrow{A_1K}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，即 $\lambda+\lambda+\lambda-2=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$．，$\overrightarrow{A_1K}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$．，$|\overrightarrow{A_1K}|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．故 A_1 到平面 AED 的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$．



19.**(文)本小题考查数列、等比数列、等比数列求和等基础知识，考查运算能力．满分 12 分．**(Ⅰ)**解：** $a_1=1$，，$a_2=3+1=4$，$a_3=3^2+4=13$．(Ⅱ)**证明：由已知** $a_n-a_{n-1}=3^{n-1}$，**故**

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3+1=\frac{3^n-1}{2},$$

所以证得 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$．**(理)本小题主要考查导数的概念和计算，应用导数研究函数性质的方法及推理和运算能力．满分 12 分．**

解：$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x+a}(x>0)$．**当** $a>0,x>0$ **时** $f'(x)>0\Leftrightarrow x^2+(2a-4)x+a^2>0$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x^2+(2a-4)x+a^2<0$．(ⅰ)**当** $a>1$ **时，对所有** $x>0$，**有** $x^2+(2a-4)x+a^2>0$，**即** $f'(x)>0$，**此时** f(x)**在**(0，+)**内单调递增．**(ⅱ)**当** $a=1$ **时，对** $x\neq1$，**有** $x^2+(2a-4)x+a^2>0$，**即** $f'(x)>0$，**此时** f(x)**在**(0,1)**内单调递增，在**(1，+)**内单调递增．又知函数** f(x)**在** x=1 **处连续，因此，函数** f(x)**在**(0，+)**内单调递增．**(ⅲ)**当** $0<a<1$ **时，令** $f'(x)>0$，**即** $x^2+(2a-4)x+a^2>0$，**解得** $x<2-a-2\sqrt{1-a}$，**或** $x>2-a+2\sqrt{1-a}$．**因此，函数** f(x)**在区间**$(0,2-a-2\sqrt{1-a})$**内单调递增，在区间**$(2-a+2\sqrt{1-a},+\infty)$**内也单调递增．令** $f'(x)<0$，**即** $x^2+(2a-4)x+a^2<0$，**解得** $2-a-2\sqrt{1-a}<x<2-a+2\sqrt{1-a}$．**因此，函数** f(x)**在区间**$(2-a-2\sqrt{1-a},2-a+2\sqrt{1-a})$

内单调递减. 20.(文)本小题主要考查相互独立事件概率的计算,运用数学知识解决问题的能力.满分 12 分. 解:设三种产品各抽取一件,抽到合格产品的事件分别为 A、B 和 C. (Ⅰ)P(A) = 0.90,P(B) = P(C) = 0.95, P($\overline{A}$) = 0.10,P($\overline{B}$) = P($\overline{C}$) = 0.05. 因为事件 A,B,C 相互独立,恰有一件不合格的概率为 P(A·B·$\overline{C}$) + P(A·$\overline{B}$·C) + P($\overline{A}$·B·C) = P(A)·P(B)·P($\overline{C}$) + P(A)·P($\overline{B}$)·P(C) + P($\overline{A}$)·P(B)·P(C) = 2 × 0.90 × 0.95 × 0.05 + 0.10 × 0.95 × 0.95 = 0.176. 答:恰有一件不合格的概率为 0.176. (Ⅱ)解法一:至少有两件不合格的概率为 P(A·$\overline{B}$·$\overline{C}$) + P($\overline{A}$·B·$\overline{C}$) + P($\overline{A}$·$\overline{B}$·C) + P(A·$\overline{B}$·$\overline{C}$) = 0.90 × 0.05^2 + 2 × 0.10 × 0.05 × 0.95 + 0.10 × 0.05^2 = 0.012. 答:至少有两件不合格的概率为 0.012. 解法二:三件产品都合格的概率为 P(A·B·C) = P(A)·P(B)·P(C) = 0.90 × 0.95^2 = 0.812, 由(Ⅰ)知,恰有一件不合格的概率为 0.176,所以至少有两件不合格的概率为 1 - [P(A·B·C) + 0.176] = 1 - (0.812 + 0.176) = 0.012. 答:至少有两件不合格的概率为 0.012. (理)本小题考查离散型随机变量分布列和数学期望等概念,考查运用概率知识解决实际问题的能力.满分 12 分. 解:(Ⅰ)ξ、η 的可能取值分别为 3,2,1,0. P(ξ = 3) = $\frac{2}{3}$ × $\frac{2}{5}$ × $\frac{2}{5}$ = $\frac{8}{75}$, P(ξ = 2) = $\frac{2}{3}$ × $\frac{2}{5}$ × $\frac{3}{5}$ + $\frac{1}{3}$ × $\frac{2}{5}$ × $\frac{2}{5}$ + $\frac{2}{3}$ × $\frac{3}{5}$ × $\frac{2}{5}$ = $\frac{28}{75}$, P(ξ = 1) = $\frac{2}{3}$ × $\frac{3}{5}$ × $\frac{3}{5}$ + $\frac{1}{3}$ × $\frac{2}{5}$ × $\frac{3}{5}$ + $\frac{1}{3}$ × $\frac{3}{5}$ × $\frac{2}{5}$ = $\frac{2}{5}$, P(ξ = 0) = $\frac{1}{3}$ × $\frac{3}{5}$ × $\frac{3}{5}$ = $\frac{3}{25}$; 根据题意知 ξ + η = 3,所以 P(η = 0) = P(ξ = 3) = $\frac{8}{75}$, P(η = 1) = P(ξ = 2) = $\frac{28}{75}$, P(η = 2) = P(ξ = 1) = $\frac{2}{5}$, P(η = 3) = P(ξ = 0) = $\frac{3}{25}$. (Ⅱ)Eξ = 3 × $\frac{8}{75}$ + 2 × $\frac{28}{75}$ + 1 × $\frac{2}{5}$ + 0 × $\frac{3}{25}$ = $\frac{22}{15}$; 因为 ξ + η = 3, 所以 Eη = 3 - Eξ = $\frac{23}{15}$. 21.(文)本小题主要考查三角函数的图像和单调性、奇偶性等基本知识,以及分析问题和推理计算能力.满分 12 分. 解:由 f(x)是偶函数,得 f(- x) = f(x), 即 sin(- ωx + φ) = sin(ωx + φ), 所以 - cosφsinωx = cosφsinωx 对任意 x 都成立,且 ω > 0,所以得 cosφ = 0, 依题设 0 ⩽ φ ⩽ π,所以解得 φ = $\frac{\pi}{2}$. 由 f(x)的图像关于点 M 对称,得 f($\frac{3\pi}{4}$ - x) = - f($\frac{3\pi}{4}$ + x), 取 x = 0,得 f($\frac{3\pi}{4}$) = - f($\frac{3\pi}{4}$),所以 f($\frac{3\pi}{4}$) = 0, f($\frac{3\pi}{4}$) = sin($\frac{3\omega\pi}{4}$ + $\frac{\pi}{2}$) = cos $\frac{3\omega\pi}{4}$, , cos $\frac{3\omega\pi}{4}$ = 0,又 ω > 0,得$\frac{3\omega\pi}{4}$ = $\frac{\pi}{2}$ + kπ, k = 0,1,2,…, , ω = $\frac{2}{3}$(2k + 1), k = 0,1,2,…. 当 k = 0 时,ω = $\frac{2}{3}$, f(x) = sin($\frac{2}{3}$x + $\frac{\pi}{2}$)在[0,$\frac{\pi}{2}$]上是减函数; 当 k = 1 时,ω = 2, f(x) = sin(2x + $\frac{\pi}{2}$)在[0,$\frac{\pi}{2}$]上是减函数; 当 k ⩾ 2 时,ω ⩾ $\frac{10}{3}$, f(x) = sin(ωx + $\frac{\pi}{2}$)在[0,$\frac{\pi}{2}$]上不是单调函数. 所以,综合得 ω = $\frac{2}{3}$或 ω = 2. (理)本小题主要考查平面向量的概念和计算,求轨迹的方法,椭圆的方程和性质,利用方程判定曲线的性质,曲线与方程的关系等解析几何的基本思想和综合解题能力.满分 12 分. 解:根据题设条件,首先求出点 P 坐标满足的方程,据此再判断是否存在两定点,使得点 P 到两定点距离的和为定值. i = (1,0), c = (0,a), , c + λi = (λ,a), i - 2λc = (1, - 2λa). 因此,直线 OP 和 AP 的方程分别为 λy = ax 和 y - a = - 2λax. 消去参数 λ,得点 P

(x,y)的坐标满足方程 $y(y-a)=-2a^2x^2$，整理得 $\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+\frac{(y-\frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2}=1$.

① 因为 $a>0$，所以得：（ⅰ）当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程①是圆方程，故不存在合乎题意的定点 E 和 F；（ⅱ）当 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程①表示椭圆，焦点 $E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2}\right)$ 和 $F\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2}\right)$ 为合乎题意的两个定点；（ⅲ）当 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程①也表示椭圆，焦点 $E\left(0,\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)\right)$ 和 $F\left(0,\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)\right)$ 为合乎题意的两个定点. 22.（文）解法同（理）第 21 题 （理）本小题主要考查数列、等比数列的概念，考查数学归纳法，考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力.满分 14 分. （Ⅰ）证法一：（ⅰ）当 $n=1$ 时，由已知 $a_1=1-2a_0$，等式成立；（ⅱ）假设当 $n=k$ $(k\geqslant 1)$ 等式成立，即 $a_k=\frac{1}{5}[3^k+(-1)^{k-1}2^k]+(-1)^k2^ka_0$，那么 $a_{k+1}=3^k-2a_k=3^k-\frac{2}{5}[3^k+(-1)^{k-1}2^k]-(-1)^k2^{k+1}a_0=\frac{1}{5}[3^{k+1}+(-1)^k2^{k+1}]+(-1)^{k+1}2^{k+1}a_0$，也就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立. 根据（ⅰ）和（ⅱ），可知等式对任何 $n\in N_+$ 成立. 证法二 如果设 $a_n-\alpha 3^n=-2(a_{n-1}-\alpha 3^{n-1})$，用 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}$ 代入，可解出 $\alpha=\frac{1}{5}$. 所以 $\left\{a_n-\frac{3^n}{5}\right\}$ 是公比为 -2，首项为 $a_1-\frac{3}{5}$ 的等比数列，，$a_n-\frac{3^n}{5}=(1-2a_0-\frac{3}{5})(-2)^{n-1}$ $(n\in N_+)$，即 $a_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}2^n}{5}+(-1)^n2^na_0$. （Ⅱ）解法一：由 a_n 通项公式 $a_n-a_{n-1}=\frac{2\times 3^{n-1}+(-1)^{n-1}3\times 2^{n-1}}{5}+(-1)^n3\times 2^{n-1}a_0$，，$a_n>a_{n-1}$ $(n\in N_+)$ 等价于 $(-1)^{n-1}(5a_0-1)<(\frac{3}{2})^{n-2}$ $(n\in N_+)$. ① （ⅰ）当 $n=2k-1$，$k=1,2,\cdots$ 时，①式即为 $(-1)^{2k-2}(5a_0-1)<(\frac{3}{2})^{2k-3}$，即为 $a_0<\frac{1}{5}(\frac{3}{2})^{2k-3}+\frac{1}{5}$. ② ②式对 $k=1,2,\cdots$ 都成立，有 $a_0<\frac{1}{5}\times(\frac{3}{2})^{-1}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$. （ⅱ）当 $n=2k$，$k=1,2,\cdots$ 时，①式即为 $(-1)^{2k-1}(5a_0-1)<(\frac{3}{2})^{2k-2}$，即为 $a_0>-\frac{1}{5}\times(\frac{3}{2})^{2k-2}+\frac{1}{5}$. ③ ③式对 $k=1,2,\cdots$ 都成立，有 $a_0>-\frac{1}{5}\times(\frac{3}{2})^{2\times 1-2}+\frac{1}{5}=0$. 综上，①式对任意 $n\in N_+$ 成立，有 $0<a_0<\frac{1}{3}$. 故 a_0 的取值范围为 $(0\ \frac{1}{3})$.

解法二 如果 $a_n>a_{n-1}$ $(n\in N_+)$ 成立，特别取 $n=1,2$ 有 $a_1-a_0=1-3a_0>0$，$a_2-a_1=6a_0>0$，因此 $0<a_0<\frac{1}{3}$. 下面证明当 $0<a_0<\frac{1}{3}$ 时，对任意 $n\in N_+$，有 $a_n-a_{n-1}>0$. 由 a_n 通项公式 $5(a_n-a_{n-1})=2\times 3^{n-1}+(-1)^{n-1}3\times 2^{n-1}+(-1)^n5\times 3\times 2^{n-1}a_0$. （ⅰ）当 $n=2k-1$，$k=1,2,\cdots$ 时，$5(a_n-a_{n-1})=2\times 3^{n-1}+3\times 2^{n-1}-5\times 3\times 2^{n-1}a_0$ $>2\times 2^{n-1}+3\times 2^{n-1}-5\times 2^{n-1}=0$.（ⅱ）当 $n=2k$，$k=1,3\cdots$ 时，$5(a_n-a_{n-1})=2\times 3^{n-1}-3\times 2^{n-1}+5\times 3\times 2^{n-1}a_0.>2\times 3^{n-1}-3\times 2^{n-1}\geqslant 0$. 故

a_0 的取值范围为$(0,\frac{1}{3})$.

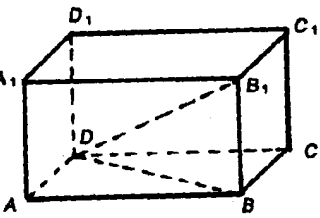
17 2003 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

1.π　2.$\frac{4}{3}\pi$　3.-49　4.文 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$,理 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4}\pi\right)$　5. $\operatorname{arctg}2$　6.$[1,3]$　7.$\arccos\frac{11}{16}$　8.$\left(1,\frac{1}{2}\right)$($a_1>0,0<q<1$ 的一组数)　9.$\frac{119}{190}$　10.2.6　11.4π　12.$|PF_2|=17$　13.C　14.D　15.D　16.B

17.[解] $|z_1\cdot z_2|=|1+\sin\theta\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)i|=\sqrt{(1+\sin\theta\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2}=\sqrt{2+\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}$.

故$|z_1\cdot z_2|$的最大值为$\frac{3}{2}$,最小值为$\sqrt{2}$.

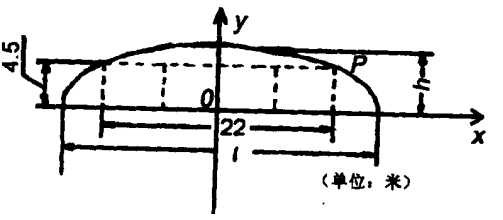
18.[解]连结 BD,因为 $B_1B\perp$平面 ABCD,$B_1D\perp BC$,所以 $BC\perp BD$. 在$\triangle BCD$中,$BC=2,CD=4$, 所以 $BD=2\sqrt{3}$. 又因为直线 B_1D 与平面 ABCD 所成的角等于 30°,所以$\angle B_1DB=30°$.



于是 $BB_1=\frac{1}{\sqrt{3}}BD=2$. 故平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $S_{ABCD}\cdot BB_1=8\sqrt{3}$.　19.(文)[解] x 须满足$\begin{cases}x\neq 0\\ \frac{1+x}{1-x}>0\end{cases}$,由$\frac{1+x}{1-x}>0$得 $-1<x<1$.

所以函数 f(x)的定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$. 因为函数 f(x)的定义域关于原点对称,且对定义域内的任意 x,有 $f(-x)=-\frac{1}{x}-\log_2\frac{1-x}{1+x}=-(\frac{1}{x}-\log_2\frac{1+x}{1-x})=-f(x)$. 所以 f(x)是奇函数. 研究 f(x)在(0,1)内的单调性,任取 $x_1,x_2\in(0,1)$,且设 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\log_2\frac{1+x_1}{1-x_1}-\frac{1}{x_2}+\log_2\frac{1+x_2}{1-x_2}=(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})+[\log_2(\frac{2}{1-x_2}-1)-\log_2(\frac{2}{1-x_1}-1)]$. 由$\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}>0,\log_2(\frac{2}{1-x_2}-1)-\log_2(\frac{2}{1-x_1}-1)>0$, 得 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 f(x)在(0,1)内单调递减. 由于 f(x)是奇函数,所以 f(x)在$(-1,0)$内单调递减. (理)[解](Ⅰ)$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2=a_1-2a_1q+a_1q^2=a_1(1-q)^2$, $a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3=a_1-3a_1q+3a_1q^2-a_1q^3=a_1(1-q)^3$. (Ⅱ)归纳概括的结论为: 若数列 $\{a_n\}$是首项为 a_1,公比为 q 的等比数列,则 $a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^n a_{n+1}C_n^n=a_1(1-q)^n$,n 为正整数. 证明:$a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^n a_{n+1}C_n^n=a_1C_n^0-a_1qC_n^1+a_1q^2C_n^2-a_1q^3C_n^3+\cdots+(-1)^n a_1q^nC_n^n=a_1[C_n^0-qC_n^1+q^2C_n^2-q^3C_n^3+\cdots+(-1)^n q^nC_n^n]=a_1(1-q)^n$.　20.[解](Ⅰ)如图建立直角坐标系,则点 P(11,4.5), 椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 将 $b=h=6$ 与点 P 坐标代入椭圆方程,得 $a=\frac{44\sqrt{7}}{7}$,此时 $l=2a=\frac{88\sqrt{7}}{7}\approx 33.3$. 因此隧道

的拱宽约为 33.3 米. (Ⅱ)[解一]由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$. 因为 $\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}\geqslant\frac{2\times11\times4.5}{ab}$，即 $ab\geqslant99$，且 $l=2a$，$h=b$，所以 $S=\frac{\pi}{4}lh=\frac{\pi ab}{2}\geqslant\frac{99\pi}{2}$.



当 S 取最小值时，有 $\frac{11^2}{a^2}=\frac{4.5^2}{b^2}=\frac{1}{2}$，得 $a=11\sqrt{2}$，$b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ 此时 $l=2a=22\sqrt{2}\approx31.1$，$h=b\approx6.4$. 故当拱高约为 6.4 米、拱宽约为 31.1 米时，土方工程量最小. [解二]由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$. 于是 $b^2=\frac{81}{4}\cdot\frac{a^2}{a^2-121}$，$a^2b^2=\frac{81}{4}\left(a^2-121+\frac{121^2}{a^2-121}+242\right)\geqslant\frac{81}{4}\left(2\sqrt{121^2+242}\right)=81\times121$，即 $ab\geqslant99$，当 S 取最小值时，有 $a^2-121=\frac{121^2}{a^2-121}$，得 $a=11\sqrt{2}$，$b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$. 以下同解一. 21.[解](Ⅰ)设 $\overrightarrow{AB}=\{u,v\}$，则由 $\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{OA}|\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}u^2+v^2=100\\ 4u-3v=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}u=6\\ v=8\end{cases}$，或 $\begin{cases}u=-6\\ v=-8\end{cases}$. 因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\{u+4,v-3\}$，所以 $v-3>0$，得 $v=8$，故 $\overrightarrow{AB}=\{6,8\}$.

(Ⅱ)由 $\overrightarrow{OB}=\{10,5\}$，得 B(10,5)，于是直线 OB 方程：$y=\frac{1}{2}x$. 由条件可知圆的标准方程为：$(x-3)^2+(y+1)^2=10$，得圆心(3,-1)，半径为 $\sqrt{10}$. 设圆心(3,-1)关于直线 OB 的对称点为(x,y)，则 $\begin{cases}\frac{x+3}{2}-2\cdot\frac{y-1}{2}=0\\ \frac{y+1}{x-3}=-2\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$，故所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=10$. (Ⅲ)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$为抛物线上关于直线 OB 对称的两点，则 $\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}-2\frac{y_1+y_2}{2}=0\\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-2\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2}{a}\\ x_1x_2=\frac{5-2a}{2a^2}\end{cases}$，即 x_1、x_2 为方程 $x^2+\frac{2}{a}x+\frac{5-2a}{2a^2}=0$ 的两个相异实根，于是由 $\Delta=\frac{4}{a^2}-4\cdot\frac{5-2a}{2a^2}>0$，得 $a>\frac{3}{2}$. 故当 $a>\frac{3}{2}$ 时，抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两点. 22.(文)[解](Ⅰ)$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2=a_1-2a_1q+a_1q^2=a_1(1-q)^2$，$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3=a_1-3a_1q+3a_1q^2-a_1q^3=a_1(1-q)^3$. (Ⅱ)归纳概括的结论为：若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公比为 q 的等比数列，则 $a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^na_{n+1}C_n^n=a_1(1-q)^n$，n 为正整数. 证明：$a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^na_{n+1}C_n^n=a_1C_n^0-a_1qC_n^1+a_1q^2C_n^2-a_1q^3C_n^3+\cdots+(-1)^na_1q^nC_n^n=a_1[C_n^0-qC_n^1+q^2C_n^2-q^3C_n^3+\cdots+(-1)^nq^nC_n^n]=a_1(1-q)^n$. (Ⅲ)因为 $S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}$，所以 $S_1C_n^0-S_2C_n^1+S_3C_n^2-S_4C_n^3+\cdots+(-1)^nS_{n+1}C_n^n=\frac{a_1-a_1q}{1-q}C_n^0-\frac{a_1-a_1q^2}{1-q}$

$C_n^1+\frac{a_1-a_1q^3}{1-q}C_n^2+\cdots+(-1)^n\frac{a_1-a_1q^{n+1}}{1-q}C_n^n=\frac{a_1}{1-q}[C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n]-\frac{a_1q}{1-q}[C_n^0-qC_n^1+q^2C_n^2-q^3C_n^3+\cdots+(-1)^nq^nC_n^n]=\frac{a_1q}{q-1}(1-q)^n$ **(理)[解](Ⅰ)对于非零常数** T,$f(x+T)=x+T$,$Tf(x)=Tx$. **因为对任意** $x\in R$,$x+T=Tx$ **不能恒成立.** **所以** $f(x)=x\notin M$. **(Ⅱ)因为函数** $f(x)=a^x(a>0$ **且** $a\neq1)$**的图像与函数** $y=x$ **的图像有公共点,所以方程组:** $\begin{cases}y=a^x\\y=x\end{cases}$ **有解,消去** y **得** $a^x=x$, **显然** $x=0$ **不是方程** $a^x=x$ **的解,所以存在非零常数** T,**使** $a^T=T$. **于是对于** $f(x)=a^x$,**有** $f(x+T)=a^{x+T}=a^T\cdot a^x=T\cdot a^x=Tf(x)$, **故** $f(x)=a^x\in M$. **(Ⅲ)当** $k=0$ **时,**$f(x)=0$,**显然** $f(x)=0\in M$. **当** $k\neq0$ **时,因为** $f(x)=\sin kx\in M$,**所以存在非零常数** T, **对任意** $x\in R$,**有** $f(x+T)=Tf(x)$**成立,即** $\sin(kx+kT)=T\sin kx$. **因为** $k\neq0$,**且** $x\in R$,**所以** $kx\in R$,$kx+kT\in R$, **于是** $\sin kx\in[-1,1]$,$\sin(kx+kT)\in[-1,1]$, **故要使** $\sin(kx+kT)=T\sin kx$ **成立,只有** $T=\pm1$. **当** $T=1$ **时,**$\sin(kx+k)=\sin kx$ **成立,则** $k=2m\pi$,$m\in Z$. **当** $T=-1$ **时,**$\sin(kx-k)=-\sin kx$ **成立,** **即** $\sin(kx-k+\pi)=\sin kx$ **成立,** **则** $-k+\pi=2m\pi$,$m\in Z$,**即** $k=-(2m-1)\pi$,$m\in Z$. **综合得,实数** k **的取值范围是** $\{k\mid k=m\pi,m\in Z\}$.

18 2002 年普通高校招生全国统一考试(新课程卷)

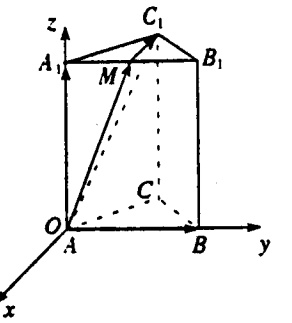
1.**(理)**D **(文)**D 2.**(理)**C **(文)**B 3.**(理)**B **(文)**D 4.**(理)**D **(文)**B 5.C 6.B 7.**(理)**B **(文)**B 8.**(理)**A **(文)** 9.**(理)**D **(文)**A 10.**(理)**D **(文)** 11.B 12.**(理)**C **(文)**D

13.**(理)**$(0,0)$,$(1,1)$ **(文)**1995,2000 14.**(理)**-1 **(文)**$-\frac{\sqrt3}{3}$ 15.**(理)**$\frac{3\pi}{\ln2}$ **(文)甲种** 16.**(理)**$\frac{7}{2}$ **(文)**②④

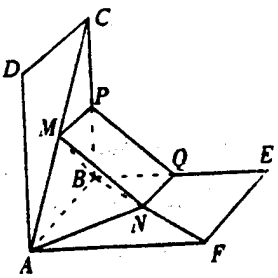
17.**(理)本小题考查同角三角函数关系式、倍角公式等基础知识,考查基本运算能力.满分** 12 **分.** **解:**$\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}(\cos2\alpha-\sin2\alpha)$.**(4 分)** $\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$,$\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})>0$, **此知** $\frac{3\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$, , $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})}=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$.**(8 分)** **从而** $\cos2\alpha=\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=2\times(-\frac{4}{5})\times\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$,$\sin2\alpha=-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{2})=1-2\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})=1-2\times(\frac{3}{5})^2=\frac{7}{25}$.**(10 分)** $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt2}{2}\times(-\frac{24}{25}-\frac{7}{25})=-\frac{31\sqrt2}{50}$.**(12 分)**

本小题主要考查等比数列的基础知识,考查运算能力.满分 12 **分.** **(文)解:设数列** $\{a_n\}$**的公比为** q,**依题意,** $a_6-a_4=a_1q^3(q^2-1)=24$, ①$a_3\cdot a_5=(a_1q^3)^2=64$,**(4 分)**, $a_1q^3=\pm8$.**(6 分)** **将** $a_1q^3=-8$ **代入到①式,得** $q^2-1=-3$,$q^2=-2$,**舍去.** **将** $a_1q^3=8$ **代入到①式,得** $q^2-1=3$,$q=\pm2$.**(8 分)** **当** $q=2$,$a_1=1$,$S_8=\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}=255$,**(10 分)** **当** $q=-2$,a_1

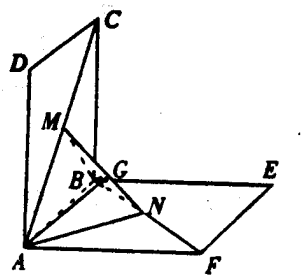
$=-1$，$S_8=\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}=85$.（12 分） 注意：考生在（18 甲）、（18 乙）两题中选一题作答，如果两题都答，只以（18 甲）计分. 18. 甲（理）本小题主要考查空间直角坐标系的概念，空间点和向量的坐标表示以及向量夹角的计算方法，考查运用向量研究空间图形的数学思想方法. 满分 12 分. 解：（Ⅰ）如图，以点 A 为坐标原点 O，以 AB 所在直线为 Oy 轴，以 AA_1 所在直线为 Oz 轴，以经过原点且与平面 ABB_1A_1 垂直的直线为 Ox 轴，建立空间直角坐标系.



由已知，得 $A(0,0,0)$，$B(0,a,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2}a)$，$C_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$.（4 分） （Ⅱ）坐标系如上. 取 A_1B_1 的中点 M，于是有 $M(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$，连 AM，$MC_1$ 有 $\overrightarrow{MC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，且 $\overrightarrow{AB}=(0,a,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{2}a)$ 由于 $\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，所以，$MC_1\perp$面 ABB_1A_1. ，AC_1 与 AM 所成的角就是 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.（8 分） $\overrightarrow{AC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$，$\overrightarrow{AM}=(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$， ，$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AM}=0+\frac{a^2}{4}+2a^2=\frac{9}{4}a^2$.（10 分） 而 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+2a^2}=\sqrt{3}a$. $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2}=\frac{3}{2}a$. ，$\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AM}\rangle=\frac{\frac{9}{4}a^2}{\sqrt{3}a\cdot\frac{3}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以，$\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{AM}$ 所成的角，即 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为 30°.（12 分） 18. 乙（理）本小题主要考查线面关系、二面角和函数极值等基础知识，考查空间想像能力和推理论证能力. 满分 12 分. 解：（Ⅰ）作 MP // AB 交 BC 于点 P，NQ // AB 交 BE 于点 Q，连结 PQ，依题意可得 MP // NQ，且 MP = NQ， 即 MNQP 是平行四边形 ，$MN=PQ$.（3 分） 由已知，$CM=BN=a$，$CB=AB=BE=1$， ，$AC=BF=\sqrt{2}$，$\frac{CP}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$，$\frac{BQ}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 即 $CP=BQ=\frac{a}{\sqrt{2}}$. ，$MN=PQ=\sqrt{(1-CP)^2+BQ^2}=\sqrt{(1-\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{a}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$（$0<a<\sqrt{2}$）.（6 分） （Ⅱ）由（Ⅰ），$MN=\sqrt{(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$， 所以，当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 即 M、N 分别移动到 AC、BF 的中点时，MN 的长最小，最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.（9 分） （Ⅲ）取 MN 的中点 G，连结 AG、BG， $AM=AN$，$BM=BN$， ，$AG\perp MN$，$BG\perp MN$，$\angle AGB$ 即为二面角 α 的平面角， 又 $AG=BG=\frac{\sqrt{6}}{4}$，所以，由余弦定理有 $\cos\alpha=\frac{(\frac{\sqrt{6}}{4})^2+(\frac{\sqrt{6}}{4})^2-1}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}}=-\frac{1}{3}$. 故所求二面角 $\alpha=\arccos$



$\cos(-\frac{1}{3})$.(12 分)　18.(文)本小题主要考查同角三角函数的基本关系式、二倍角公式以及三角函数式的恒等变形等基础知识和基本运算技能.满分 12 分.　解:由倍角公式 $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,(2 分)



由原式得　$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha + 1) = 0$,(8 分)　$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,　,　$\sin\alpha + 1 \neq 0$,$\cos^2\alpha \neq 0$,　,　$2\sin\alpha - 1 = 0$,即 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.　,　$\alpha = \frac{\pi}{6}$,　$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.(2 分)

19. 本小题考查相互独立事件同时发生或互斥事件有一个发生的概率的计算方法,考查运用概率知识解决实际问题的能力.满分 12 分.　解:(Ⅰ)至少 3 人同时上网的概率等于 1 减去至多 2 人同时上网的概率,即 $1 - C_6^0(0.5)^6 - C_6^1(0.5)^6 - C_6^2(0.5)^6$(4 分)　$= 1 - \frac{1+6+15}{64} = \frac{21}{32}$.(6 分)

(Ⅱ)至少 4 人同时上网的概率为　$C_6^4(0.5)^6 + C_6^5(0.5)^6 + C_6^6(0.5)^6 = \frac{11}{32} > 0.3$.(10 分)　至少 5 人同时上网的概率为　$(C_6^5 + C_6^6)(0.5)^6 = \frac{7}{64} < 0.3$.

因此,至少 5 人同时上网的概率小于 0.3.(12 分)　20. 本小题主要考查利用导数求曲线切线的方法,考查不等式的基本性质,以及分析和解决问题的能力.满分 12 分.　(Ⅰ)解:求 $f(x)$的导数:$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$,由此得切线 l 的方程:　$y - (\frac{1 - ax_1}{x_1}) = -\frac{1}{x_1^2}(x - x_1)$.(4 分)　(Ⅱ)证:依题意,切线方程中令 $y = 0$,　$x_2 = x_1(1 - ax_1) + x_1 = x_1(2 - ax_1)$,其中 $0 < x_1 < \frac{2}{a}$.(6 分)

(ⅰ)由 $0 < x_1 < \frac{2}{a}$,$x_2 = x_1(2 - ax_1)$有 $x_2 > 0$,及　$x_2 = -a(x_1 - \frac{1}{a})^2 + \frac{1}{a}$.　,　$0 < x_2 \leqslant \frac{1}{a}$,当且仅当 $x_1 = \frac{1}{a}$ 时,$x_2 = \frac{1}{a}$.(9 分)　(ⅱ)当 $x_1 < \frac{1}{a}$ 时,$ax_1 < 1$,因此,$x_2 = x_1(2 - ax_1) > x_1$,且由(ⅰ),$x_2 < \frac{1}{a}$,　所以 $x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$.

(文)本小题考查相互独立事件同时发生或互斥事件有一个发生的概率的计算方法,考查运用概率知识解决实际问题的能力.满分 12 分.　解:(Ⅰ)至少 3 人同时上网的概率等于 1 减去至多 2 人同时上网的概率,即　$1 - C_6^0(0.5)^6 - C_6^1(0.5)^6 - C_6^2(0.5)^6$(4 分)　$= 1 - \frac{1+6+15}{64} = \frac{21}{32}$.(6 分)　(Ⅱ)至少 4 人同时上网的概率为　$C_6^4(0.5)^6 + C_6^5(0.5)^6 + C_6^6(0.5)^6 = \frac{11}{32} > 0.3$.(10 分)　至少 5 人同时上网的概率为　$(C_6^5 + C_6^6)(0.5)^6 = \frac{7}{64} < 0.3$.　因此,至少 5 人同时上网的概率小于 0.3.(12 分)　21. 本小题主要考查向量的数量积,二次曲线和等差数列等基础知识,以及综合分析和解决问题的能力.满分 12 分.　解:(Ⅰ)记 $P(x,y)$,由 $M(-1,0)$,$N(1,0)$得　$\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MP} = (-1-x,-y)$,　$\overrightarrow{PN} = -\overrightarrow{NP} = (1-x,-y)$,　$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM} = (2,0)$.,　$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN} = 2(1+x)$,　$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN} = x^2 + y^2 - 1$,　$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP} = 2(1-x)$.(3 分)

于是,$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$,$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$,$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 是公差小于零的等差数列等价于

$\begin{cases} x^2+y^2-1=\frac{1}{2}[2(1+x)+2(1-x)], \\ 2(1-x)-2(1+x)<0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ x>0, \end{cases}$ 所以,点 P 的轨迹是以原点为圆心,$\sqrt{3}$为半径的右半圆.(6 分) (Ⅱ)点 P 的坐标为(x_0, y_0). $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=x_0^2+y_0^2-1=2$. $|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}|=\sqrt{(1+x_0)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(1-x_0)^2+y_0^2}=\sqrt{(4+2x_0)(4-2x_0)}=2\sqrt{4-x_0^2}$. , $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}|}=\frac{1}{\sqrt{4-x_0^2}}$.(9 分) $0<x_0\leqslant\sqrt{3}$, , $\frac{1}{2}<\cos\theta\leqslant 1$, $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{3}$, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{4-x_0^2}}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{4-x_0^2}}}{\sqrt{\frac{1}{4-x_0^2}}}=\sqrt{3-x_0^2}=|y_0|$.(12 分) (文)本小题主要考查利用导数求曲线切线的方法,考查不等式的基本性质,以及分析和解决问题的能力.满分 12 分. (Ⅰ)解:求 $f(x)$的导数:$f'(x)=3x^2$,由此得切线 l 的方程: $y-(x_1^3-a)=3x_1^2(x-x_1)$.(4 分) (Ⅱ)证:依题意,切线方程中令 $y=0$, $x_2=x_1-\frac{x_1^3-a}{3x_1^2}=\frac{2x_1^3+a}{3x_1^2}$,(ⅰ) $x_2-a^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3x_1^2}(2x_1^3+a-3x_1^2a^{\frac{1}{3}})=\frac{1}{3x_1^2}(x_1-a^{\frac{1}{3}})(2x_1+a^{\frac{1}{3}})\geqslant 0$, , $x_2\geqslant a^{\frac{1}{3}}$, 当且仅当 $x_1=a^{\frac{1}{3}}$时等号成立.(9 分) (ⅱ)若 $x_1>a^{\frac{1}{3}}$,则 $x_1^3-a>0$, $x_2-x_1=-\frac{x_1^3-a}{3x_1^2}<0$,且由(ⅰ) $x_2>a^{\frac{1}{3}}$, 所以 $a^{\frac{1}{3}}<x_2<x_1$.(12 分) 22. 本小题主要考查数列与等差数列前 n 项和等基础知识,以及准确表述,分析和解决问题的能力.满分 14 分. 解(Ⅰ)由题设得 $a_3a_4=10$,且 a_3、a_4 均为非负整数,所以 a_3 的可能的值为 1,2,5,10.(2 分) 若 $a_3=1$,则 $a_4=10$, $a_5=\frac{3}{2}$,与题设矛盾. 若 $a_3=5$,则 $a_4=2$, $a_5=\frac{35}{2}$,与题设矛盾. 若 $a_3=10$,则 $a_4=1$, $a_5=60$, $a_6=\frac{3}{5}$,与题设矛盾. 所以 $a_3=2$. (Ⅱ)用数学归纳法证明. ①当 $n=3$, $a_3=a_1+2$,等式成立. ②假设当 $n=k(k\geqslant 3)$时等式成立,即 $a_k=a_{k-2}+2$, 由题设 $a_{k+1}a_k=(a_{k-1}+2)(a_{k-2}+2)$, 因为 $a_k=a_{k-2}+2\neq 0$, 所以 $a_{k+1}=a_{k-1}+2$, 也就是说,当 $n=k+1$ 时,等式 $a_{k+1}=a_{k-1}+2$ 成立. 根据①和②,对于所有 $n\geqslant 3$,有 $a_{n+1}=a_{n-1}+2$.(10 分) (Ⅲ)由 $a_{2k-1}=a_{2(k-1)-1}+2$, $a_1=0$,及 $a_{2k}=a_{2(k-1)}+2$, $a_2=3$ 得

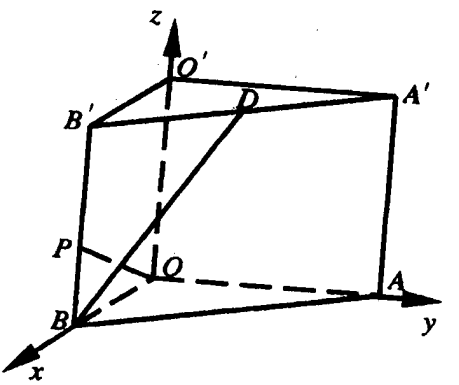
$a_{2k-1}=2(k-1)$, $a_{2k}=2k+1$, $k=1,2,3,\cdots$. 即 $a_n=n+(-1)^n$, $n=1,2,3,\cdots$.(12 分) 所以 $S_n=\begin{cases}\frac{1}{2}n(n+1), & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ \frac{1}{2}n(n+1)-1, & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$ 22. 本小题主要考查向量的数量积,二次曲线和等差数列等基础知识,以及综合分析和解决问题的能力.满分 14 分. 解:(Ⅰ)记 $P(x,y)$,由 $M(-1,0)$, $N(1,0)$得 $\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MP}=(-1-x,-y)$, $\overrightarrow{PN}=-\overrightarrow{NP}=(1-x,-y)$, $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{NM}=(2,0)$. , $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=2(1+x)$, $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=x^2+y^2-1$, $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=2(1-x)$.(4 分) 于是 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 是公差小于零的等差数列等价于 $\begin{cases} x^2+y^2-1=\frac{1}{2}[2(1+x)+2(1-x)], \\ 2(1-x)-2(1+x)<0. \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ x>0. \end{cases}$ 所以,点 P 的

轨迹是以原点为圆心，$\sqrt{3}$为半径的右半圆.(7分) (Ⅱ)点 P 的坐标为(x_0, y_0). $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN} = x_0^2 + y_0^2 - 1 = 2$. $|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}| = \sqrt{(1+x_0)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(1-x_0)^2+y_0^2} = \sqrt{(4+2x_0)(4-2x_0)} = 2\sqrt{4-x_0^2}$. ∴ $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}|} = \frac{1}{\sqrt{4-x_0^2}}$.(11分) $0 < x_0 \leqslant \sqrt{3}$, ∴ $\frac{1}{2} < \cos\theta \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{3}$, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{4-x_0^2}}$, ∴ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4-x_0^2}}}{\sqrt{\frac{1}{4-x_0^2}}} = \sqrt{3-x_0^2} = |y_0|$.(14分)

19 2002 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

1. $-3-i$ 2. 13 3. -1 4. 30° 5. $\frac{1}{2}$ 6. $\frac{4}{3}$ 7. $\frac{3}{13}$ 8. (0,1)

9.文 11,理$(\sqrt{19}, \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4})$ 10. $\frac{\pi}{4}/\frac{3\pi}{4}/\cdots/\frac{\pi}{4}(2k+1)(k\in Z)$ 11. $3^{2^{n-1}}$ 12. $f^{-1}(0) = a$,且 $f^{-1}(x) < x$ $(x\in A)$/$y = f^{-1}(x)$的图象在直线 $y = x$ 的下方,且与 y 轴的交点为$(0,a)$/…… 13. D 14. B 15. C 16. C 17. [解法一]如图,以 O 点为原点建立空间直角坐标系。 由题意,有



$B(3,0,0)$, $D(\frac{3}{2},2,4)$, 设 $P(3,0,z)$, 则 $\overrightarrow{BD} = \{-\frac{3}{2},2,4\}$, $\overrightarrow{OP} = \{3,0,z\}$。

$BD\perp OP$, ∴ $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{OP} = -\frac{9}{2} + 4z = 0$, $z = \frac{9}{8}$。

$BB'\perp$平面 AOB, ∴ $\angle POB$ 是 OP 与底面 AOB 所成的角。 $\operatorname{tg}\angle POB = \frac{3}{8}$, ∴ $\angle POB = \operatorname{arctg}\frac{3}{8}$。 [解法二](略) 18. [解]设点 $C(x,y)$,则 $|CA| - |CB| = \pm 2$, 根据双曲线的定义,可知点 C 的轨迹是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$。 由 $2a = 2$ $2c = |AB| = 2\sqrt{3}$,得 $a^2 = 1, b^2 = 2$, 故点 C 的轨迹方程是 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$。 由 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$,得 $x^2 + 4x - 6 = 0$。 $\Delta > 0$, ∴ 直线与双曲线有两个交点。 设 $D(x_1,y_1)$、$E(x_2,y_2)$,则 $x_1 + x_2 = -4$, $x_1x_2 = -6$, 故 $|DE| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = 4\sqrt{5}$。 19. (文)[解] (1)当 $a = -1$ 时,$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, $x\in[-5,5]$, ∴ $x = 1$ 时,$f(x)$的最小值为 1。 $x = -5$ 时,$f(x)$的最大值为 37。 (2)函数 $f(x) = (x+a)^2 + 2 - a^2$ 图象的对称轴为 $x = -a$。 $f(x)$在区间$[-5,5]$上是单调函数。 ∴ $-a \leq -5$ 或 $-a \geq 5$, 故 a 的取值范围是 $a \leq -5$ 或 $a \geq 5$。 (理)[解](1)当 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x) = x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 1 =$

$(x-\frac{\sqrt{3}}{3})^2-\frac{4}{3}$，$x\in[-1,\sqrt{3}]$，$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$f(x)$的最小值为$-\frac{4}{3}$，$x=-1$时，$f(x)$的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$。(2)函数$f(x)=(x+tg\theta)^2-1-tg^2\theta$图象的对称轴为$x=-tg\theta$。$y=f(x)$在区间$[-1,\sqrt{3}]$上是单调函数，$-tg\theta\le-1$或$-tg\theta\ge\sqrt{3}$，即$tg\theta\ge1$或$tg\theta\le-\sqrt{3}$，因此，$\theta$的取值范围是$(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$。20.[解](1)$\frac{1000\times0.2+130}{1000}=33\%$。(2)设商品的标价为$x$元，则$500\le x\le800$，消费额$\in[400,640]$，由已知得(Ⅰ)$\begin{cases}\frac{0.2x+60}{x}\ge\frac{1}{3}\\400\le0.8x<500\end{cases}$或(Ⅱ)$\begin{cases}\frac{0.2x+100}{x}\ge\frac{1}{3}\\500\le0.8x\le640\end{cases}$不等式组(Ⅰ)无解，不等式组(Ⅱ)的解为$625\le x\le750$。因此，当顾客购买标价在[625,750]元内的商品时，可得到不小于$\frac{1}{3}$的优惠率。21.[解](1)由$\frac{1}{4}=a\cdot b^4$，$1=a\cdot b^5$，得$b=4$，$a=\frac{1}{1024}$，故$f(x)=\frac{1}{1024}4^x$。(2)由题意$a_n=\log_2(\frac{1}{1024}\cdot4^n)=2n-10$，$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=n(n-9)$，$a_nS_n=2n(n-5)(n-9)$。由$a_nS_n\le0$，得$(n-5)(n-9)\le0$，即$5\le n\le9$。故$n=5,6,7,8,9$。(3)(文)$a_1S_1=64$，$a_2S_2=84$，$a_3S_3=72$，$a_4S_4=40$。当$5\le n\le9$时，$a_nS_n\le0$。当$n\ge10$时，$a_nS_n\ge a_{10}S_{10}=100$。因此，96不是数列$\{a_nS_n\}$中的项。(理)$a_1S_1=64$，$a_2S_2=84$，$a_3S_3=72$，$a_4S_4=40$。当$5\le n\le9$时，$a_nS_n\le0$。当$10\le n\le22$时，$a_nS_n\le a_{22}S_{22}=9724<10^4$。当$n\ge23$时，$a_nS_n\ge a_{23}S_{23}=11592>10^4$。因此，$10^4$不是数列$\{a_nS_n\}$中的项。22.[解](1)$C_{-15}^3=\frac{(-15)(-16)(-17)}{3!}=-680$。(2)(文)$\frac{C_x^3}{(C_x^1)^2}=\frac{x(x-1)(x-2)}{6x^2}=\frac{1}{6}(x+\frac{2}{x}-3)$。$x>0$，$x+\frac{2}{x}\ge2\sqrt{2}$，当且仅当$x=\sqrt{2}$时，等号成立，当$x=\sqrt{2}$时，$\frac{C_x^3}{(C_x^1)^2}$取得最小值。(理)性质①不能推广。例如当$x=\sqrt{2}$时，$C_{\frac{1}{2}}^1$有定义，但$C_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-1}$无意义；性质②能推广，它的推广形式是$C_x^m+C_x^{m-1}=C_{x+1}^m$，$x\in R$，$m$是正整数。事实上，当$m=1$时，有$C_x^1+C_x^0=x+1=C_{x+1}^1$，当$m\ge2$时，$C_x^m+C_x^{m-1}=\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}+\frac{x(x-1)\cdots(x-m+2)}{(m-1)!}$(3)(文)答案同(理)(2)(理)当$x\ge m$时，组合数$C_x^m\in Z$。当$0\le x<m$时，$C_x^m=0\in Z$。当$x<0$时，$-x+m-1>0$，$C_x^m=\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}=(-1)^m\frac{(-x+m-1)\cdots(-x+1)(-x)}{m!}=(-1)^mC_{-x+m-1}^m\in Z$。

20 2001年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷)

1.(理)A (文)B 2.B 3.C 4.A 5.(理)B (文)D 6.A 7.A 8.(理)D (文)C 9.A 10.B 11.D 12.D

13.(理)$\frac{5\pi}{3}$ (文)2 14.(理)1.2 (文)16 15.② 16.1

17.(理)本小题主要考查分式不等式的解法，考查分类讨论的数学思想，满

分 12 分.

解 原不等式的解集是下面不等式组(Ⅰ)、(Ⅱ)的解集的并集：(Ⅰ) $\begin{cases} x - a > 0, \\ x - a^2 < 0 \end{cases}$；(Ⅱ) $\begin{cases} x - a < 0, \\ x - a^2 > 0. \end{cases}$ (2 分) 分情况讨论.(ⅰ)当 $a < 0$ 或 $a > 1$ 时,有 $a < a^2$, 此时,不等式组(Ⅰ)的解集为 $\{x \mid a < x < a^2\}$,(6 分) 不等式组(Ⅱ)的解集为空集 ；(ⅱ)当 $0 < a < 1$ 时,有 $a^2 < a$, 此时,不等式组(Ⅰ)的解集为空集 , 不等式组(Ⅱ)的解集为 $\{x \mid a^2 < x < a\}$；(10 分) (ⅲ)当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时,原不等式无解. 综上,当 $a < 0$ 或 $a > 1$ 时,原不等式的解集为 $\{x \mid a < x < a^2\}$； 当 $0 < a < 1$ 时,原不等式的解集为 $\{x \mid a^2 < x < a\}$； 当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时,原不等式的解集为 .(12 分) (文)本小题考查数列求和以及极限的基本概念和运算,考查综合分析的能力.满分 12 分. 解：(Ⅰ)设该等差数列为 $\{a_n\}$,则 $a_1 = a$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3a$, $S_k = 2550$.

由已知有 $a + 3a = 2 \times 4$,解得首项 $a_1 = a = 2$, 公差 $d = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$. 代入公式 $S_k = k \cdot a_1 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d$ 得 $k \cdot 2 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 2 = 2550$. 即 $k^2 + k - 2550 = 0$, 解得 $k = 50, k = -51$(舍去). , $a = 2, k = 50$ (Ⅱ) 由 $S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ 得 $S_n = n(n+1)$, , $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$,(9 分) , $\lim\limits_{n \to} (\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n}) = \lim\limits_{n \to} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$.(12 分) 18. (理)本小题考查相互独立事件同时发生或互斥事件有一个发生的概率的计算方法,考查运用概率知识解决实际问题的能力.满分 12 分. 解：分别记元件 A、B、C 正常工作为事件 A、B、C,由已知条件 $P(A) = 0.80, P(B) = 0.90, P(C) = 0.90$. (Ⅰ)因为事件 A、B、C 是相互独立的,所以,系统 N_1 正常工作的概率 $P_1 = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.80 \times 0.90 \times 0.90 = 0.648$. 故系统 N_1 正常工作的概率为 0.648.(5 分) (Ⅱ)系统 N_2 正常工作的概率 $P_2 = P(A) \cdot [1 - P(\overline{B} \cdot \overline{C})] = P(A) \cdot [1 - P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})]$, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.90 = 0.10$, $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.90 = 0.10$,(10 分) , $P_2 = 0.80 \times [1 - 0.10 \times 0.10] = 0.80 \times 0.99 = 0.792$.

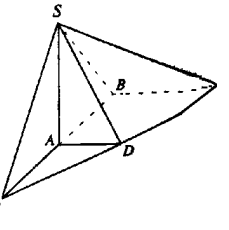
故系统 N_2 正常工作的概率为 0.792.(12 分) (文)本小题考查建立函数关系式,求函数最小值的方法和运用数学知识解决问题的能力.满分 12 分.

解：设画面高为 x cm,宽为 λx cm,则 $\lambda x^2 = 4840$.(1 分) 设纸张面积为 S,有 $S = (x + 16)(\lambda x + 10) = \lambda x^2 + (16\lambda + 10)x + 160$,(3 分) 将 $x = \frac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}$ 代入上式得 $S = 5000 + 44\sqrt{10}(8\sqrt{\lambda} + \frac{5}{\sqrt{\lambda}})$.(6 分) 当 $8\sqrt{\lambda} = \frac{5}{\sqrt{\lambda}}$,即 $\lambda = \frac{5}{8}$($\frac{5}{8} < 1$)时,S 取得取小值.(8 分) 此时,高：$x = \sqrt{\frac{4840}{\lambda}} = 88$ cm, 宽：$\lambda x = \frac{5}{8} \times 88 = 55$ cm. 答：画面高为 88 cm,宽为 55 cm 时,能使所用纸张面积最小.(12 分) 19. 本小题主要考查函数的奇偶性和单调性等基本性质,指数函数和不等式的基本性质和运算,以及综合分析问题的能力,满分 12 分. (Ⅰ)解：依题意,对一切 $x \in R$ 有 $f(x) = f(-x)$,即 $\frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x} = \frac{1}{ae^x} + ae^x$, 所以 $(a - \frac{1}{a})(e^x - \frac{1}{e^x}) = 0$ 对一切 $x \in R$ 成立. 由此得到 $a - \frac{1}{a} = 0$,即 $a^2 = 1$. 又因为 $a > 0$,所以 $a = 1$.(4 分) (Ⅱ)证明一：设

$0 < x_1 < x_2$，$f(x_1) - f(x_2) = e^{x_1} - e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_2}} = (e^{x_2} - e^{x_1})(\frac{1}{e^{x_1+x_2}} - 1) = e^{x_1}$ $(e^{x_2-x_1} - 1) \cdot \frac{1 - e^{x_2+x_1}}{e^{x_2+x_1}}$，(8 分) 由 $x_1 > 0$，$x_2 > 0$，$x_2 - x_1 > 0$，得 $x_1 + x_2 > 0$，$e^{x_2-x_1} - 1 > 0$，$1 - e^{x_2+x_1} < 0$. ∴ $f(x_1) - f(x_2) < 0$，即 $f(x)$在(0，+)上是增函数.(12 分) 证明二 由 $f(x) = e^x + e^{-x}$得 $f'(x) = e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$.(8 分) 当 $x \in (0, +\infty)$时，有 $e^{-x} > 0$，$e^{2x} - 1 > 0$，此时 $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$在(0，+)上是增函数.(12 分) 注意：考生在 20(甲)、20(乙)两题中选一题作答，如果两题都答，只以 20(甲)计分. 20.(甲)本小题主要考查空间直角坐标的概念、空间点和向量的坐标表示以及两个向量夹角的计算方法，考查运用向量研究空间图形的数学思想方法.满分 12 分.

解：(Ⅰ)由题意知 $B(a,a,0)$，$C(-a,a,0)$，$D(-a,-a,0)$，$E(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2})$，由此得 $\vec{BE} = (-\frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{h}{2})$，$\vec{DE} = (\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{h}{2})$，∴ $\vec{BE} \cdot \vec{DE} = (-\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2}) + (-\frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{2}) + \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} = -\frac{3a^2}{2} + \frac{h^2}{4}$，$|\vec{BE}| = |\vec{DE}| = \sqrt{(-\frac{3a}{2})^2 + (-\frac{a}{2})^2 + (\frac{h}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10a^2 + h^2}$.(3 分) 由向量的数量积公式有 $\cos\langle \vec{BE}, \vec{DE} \rangle = \frac{\vec{BE} \cdot \vec{DE}}{|\vec{BE}| \cdot |\vec{DE}|} = \frac{-\frac{3a^2}{2} + \frac{h^2}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{10a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{10a^2 + h^2}} = \frac{-6a^2 + h^2}{10a^2 + h^2}$.(6 分) (Ⅱ)若∠BED 是二面角 $\alpha - VC - \beta$ 的平面角，则 $\vec{BE} \perp \vec{CV}$，即有 $\vec{BE} \cdot \vec{CV} = 0$. 又由 $C(-a,a,0)$，$V(0,0,h)$，有 $\vec{CV} = (a,-a,h)$，且 $\vec{BE} = (-\frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{h}{2})$，∴ $\vec{BE} \cdot \vec{CV} = -\frac{3a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{2} = 0$,(9 分) 即 $h = \sqrt{2}a$，这时有 $\cos\langle \vec{BE}, \vec{DE} \rangle = \frac{-6a^2 + h^2}{10a^2 + h^2} = \frac{-6a^2 + (\sqrt{2}a)^2}{10a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = -\frac{1}{3}$. ∴ $\angle BED = \langle \vec{BE}, \vec{DE} \rangle = \arccos(-\frac{1}{3}) = \pi - \arccos\frac{1}{3}$.(12 分)

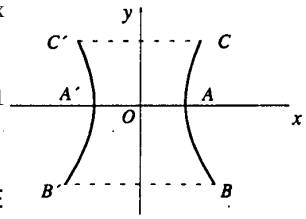
20.(乙)本小题主要考查线面关系和棱锥体积计算，以及空间想像能力和逻辑推理能力，满分 12 分. 解：(Ⅰ)直角梯形 ABCD 的面积是 $M_{底面} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AB = \frac{1+0.5}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$，(2 分) ∴ 四棱锥 S—ABCD 的体积是 $V = \frac{1}{3} \times SA \times M_{底面} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.(4 分) (Ⅱ)延长 BA、CD 相交于点 E，连结 SE，则 SE 是所求二面角的棱.(6 分)



∵ $AD \parallel BC$，$BC = 2AD$，∴ $EA = AB = SA$，∴ $SE \perp SB$，∵ $SA \perp$面 ABCD，得面 SEB ⊥面 EBC，EB 是交线，又 $BC \perp EB$，∴ $BC \perp$面 SEB，故 SB 是 CS 在面 SEB 上的射影，∴ $CS \perp SE$，所以∠BSC 是所求二面角的平面角.(10 分) $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2}$，$BC = 1$，$BC \perp SB$，∴ $\tan\angle BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 即所求二面角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.(12 分)

21.(理)本小题考查选择适当的坐标系建立曲线方程和解方程组等基础知识，考查应用所学积分知识、思想和方法解决实际问题的能力.满分 12 分.

解：(Ⅰ)如图建立直角坐标系 xOy，AA′ 在 x 轴上，AA′ 的中点为坐标原点 O，CC′ 与 BB′ 平行于 x 轴. 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$)，则 $a=\frac{1}{2}AA'=7$. (2 分)



又设 $B(11, y_1)$，$C(9, y_2)$，因为点 B、C 在双曲线上，所以有 $\frac{11^2}{7^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$， ①

$\frac{9^2}{7^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$， ② 由题意知 $y_2-y_1=20$. ③(4 分) 由①、②、③得 $y_1=-12$，

$y_2=8$，

$b=7\sqrt{2}$. 故双曲线方程为 $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{98}=1$. (6 分) (Ⅱ)由双曲线方程得 $x^2=\frac{1}{2}y^2+49$. 设冷却塔的容积为 $V(m^3)$，则 $V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2\,dy=\pi\int_{-12}^{8}(\frac{1}{2}y^2+49)\,dy$(9 分) $=\pi(\frac{1}{6}y^3+49y)\Big|_{-12}^{8}$， 经计算得 $V\approx4.25\times10^3(m^3)$. 答：冷却塔的容积为 $4.25\times10^3m^3$. (12 分) (文)本小题考查函数和函数极值概念，考查运用导数研究函数性质的方法，以及分析和解决数学问题的能力. 满分 12 分. 解：由已知，可得 $f(1)=1-3a+2b=-1$，①

又 $f'(x)=3x^2-6ax+2b$， ， $f'(1)=3-6a+2b=0$. ②

(4 分) 由①、②，可解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=-\frac{1}{2}.\end{cases}$ (6 分) 故函数的解析式为 $f(x)=x^3-x^2-x$. 由此得 $f'(x)=3x^2-2x-1$. (2 分)根据二次函数的性质，当 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$. 因此，在区间 $(-\infty,-\frac{1}{3})$ 和 $(1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 为增函数，在区间 $(-\frac{1}{3},1)$ 内，函数 $f(x)$ 为减函数. (12 分) 22. 本小题主要考查坐标法、曲线的交点和三角函数性质等基础知识，以及逻辑推理能力和运算能力. 满分 14 分.

解：(Ⅰ)两曲线的交点坐标 (x,y) 满足方程组 $\begin{cases}x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1,\\ x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2=\sin\theta+\cos\theta,\\ y^2=\cos\theta-\sin\theta.\end{cases}$ (4 分) 有 4 个不同交点等价于 $x^2>0$ 且 $y^2>0$，即 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta>0,\\ \cos\theta-\sin\theta>0.\end{cases}$ 又因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以得 θ 的取值范围为 $(0,\frac{\pi}{4})$. (8 分) (Ⅱ)由(Ⅰ)的推理知 4 个交点的坐标 (x,y) 满足方程 $x^2+y^2=2\cos\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{4})$，即得 4 个交点共圆，该圆的圆心在原点，半径为 $r=\sqrt{2\cos\theta}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{4})$. (11 分) 因为 $\cos\theta$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上是减函数，所以由 $\cos0=1$，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 知 r 的取值范围是 $(\sqrt[4]{2},\sqrt{2})$. (14 分)

21 2000 年普通高等学校招生全国统一考试(新课程卷)

1.(理)B (文)C 2.B 3.C 4.(理)D (文)D 5.D 6.C 7.B 8.(理)C (文)C 9.(号)A 10.C 11.C 12.D

13.(理)

号	0	1	2
μ	0.9025	0.095	0.0025

(文)252

14. $-\frac{3}{\sqrt{5}} < x < \frac{3}{\sqrt{5}}$ 15. $\frac{1}{n}$ 16.②③

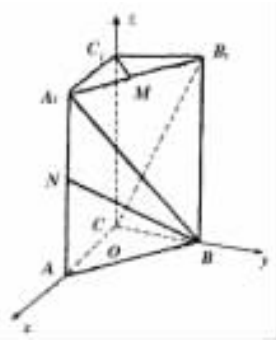
17.(理)本小题主要考查等可能事件的概率计算及分析和解决实际问题的能力.满分 10 分. 解:(Ⅰ)甲从选择题中抽到一题的可能结果有 C_6^1 个,乙依次从判断题中抽到一题的可能结果有 C_4^1 个,故甲抽到选择题、乙依次抽到判断题的可能结果有 $C_6^1C_4^1$ 个;又甲、乙依次抽一题的可能结果有 $C_{10}^1C_9^1$ 个,所以甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率为 $\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^1C_9^1}=\frac{4}{15}$,所求概率为 $\frac{4}{15}$;(5 分) (Ⅱ)甲、乙二人依次都抽到判断题的概率为 $\frac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^1C_9^1}$.故甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率为 $1-\frac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^1C_9^1}=\frac{13}{15}$.所求概率为 $\frac{13}{15}$. 或 $\frac{C_5^1C_4^1}{C_{10}^1C_9^1}+\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^1C_9^1}+\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^1C_9^1}=\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{13}{15}$,所求概率为 $\frac{13}{15}$.(10 分)

(文)本小题主要考查三角函数的图象和性质、利用三角公式进行恒等变形的技能以及运算能力.满分 12 分.

解:(Ⅰ) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $x\in R$.(3 分)

y 取得最大值必须且只需 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$, 即 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$. 所以,当函数 y 取得最大值时,自变量 x 的集合为 $\{x\mid x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z\}$(6 分) (Ⅱ)变换的步骤是:(1)把函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$,得到函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的图象(9 分);(2)令所得到的图象上各点横坐标不变,把纵坐标伸长到原来的 2 倍,得到函数 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 的图象;经过这样的变换就得到函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的图象(12 分).



注意 考生在(18 甲)、(18 乙)两题中选一题作答,如果两题都答,只以(18 甲)计分. 18.(甲)本小题主要考查空间向量及运算的基本知识,满分 12 分. 如图,以 C 为原点建立空间直角坐标系 O—xyz.

(Ⅰ)解:依题意得 B(0,1,0), N(1,0,1). , $|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$.(2 分) (Ⅱ)解:依题意得 $A_1(1,0,2)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,0)$, $B_1(0,1,2)$. , $\overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2)$, $\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$.

$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}=3.|\overrightarrow{BA_1}|=\sqrt{6}.|\overrightarrow{CB_1}|=\sqrt{5}.$(5 分)　，$\cos<\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}>=\frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}|\cdot|\overrightarrow{CB_1}|}=\frac{1}{10}\sqrt{30}.$(9 分)　(Ⅲ)证明:依题意得 $C_1(0,0,2),M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2).\ \overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2),\overrightarrow{C_1M}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0).$　，$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0.$，$\overrightarrow{A_1B}\perp\overrightarrow{C_1M}.$　，$A_1B\perp C_1M.$(12 分)　18.(乙)(理)本小题主要考查直线与直线、直线与平面的关系,逻辑推理能力,满分 12 分.　(Ⅰ)证明:连结 A_1C_1、AC,AC 和 BD 交于 O,连结 $C_1O.$　四边形 ABCD 是菱形,　，$AC\perp BD,BC=CD.$ 又　$\angle BCC_1=\angle DCC_1,C_1C=C_1C.$　，$\triangle C_1BC\cong\triangle C_1DC.$　，$C_1B=C_1D.$　$DO=OB$,　，$C_1O\perp BD$,(2 分)　但　$AC\perp BD,AC\cap C_1O=O$,　，$BD\perp$平面 $AC_1.$ 又 $C_1C\subset$平面 AC_1,　，$C_1C\perp BD.$(4 分)　(Ⅱ)解:由(Ⅰ)知 $AC\perp BD$,$C_1O\perp BD$,，$\angle C_1OC$ 是二角 $\alpha-BD-\beta$ 的平面角.在 $\triangle C_1BC$ 中,$BC=2$,$C_1C=\frac{3}{2}$,$\angle BCC_1=60°$,，$C_1B^2=2^2+(\frac{3}{2})^2-2\times2\times\frac{3}{2}\times\cos60°=\frac{13}{4}.$，$\angle OCb=30°.$，$OB=\frac{1}{2}BC=1.$，$C_1O^2=C_1B^2-OB^2=\frac{13}{4}-1=\frac{9}{4}.$，$C_1O=\frac{3}{2}$即 $C_1O=C_1C.$作 $C_1H\perp OC$,垂足为 H.，点 H 是 OC 的中点,且 $OH=\frac{\sqrt{3}}{3}.$所以 $\cos\angle C_1OC=\frac{OH}{C_1O}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$(Ⅲ)当 $\frac{CD}{CC_1}=1$ 时,能使 $A_1C\perp$平面 $C_1BD.$

证明一：　$\frac{CD}{CC_1}=1$,　，　$BC=CD=C_1C$,　又　$\angle BCD=\angle C_1CB=\angle C_1CD.$ 由此可推得　$BD=C_1B=C_1D.$　，三棱锥 $C-C_1BD$ 是正三棱锥.(10 分)　设　A_1C 与 C_1O 相交于 G,　$A_1C_1/\!/AC$,且 $A_1C_1:OC=2:1$,　，　$C_1G:GO=2:1.$ 又　C_1O 是正三角形 C_1BD 的 BD 边上的高和中线,　，　点 G 是正三角形 C_1BD 的中心,　，　$CG\perp$平面 $C_1BD.$ 即　$A_1C\perp$平面 $C_1BD.$(12 分)　证明二：由(Ⅰ)知,$BD\perp$平面 AC_1,　$A_1C\subset$平面 AC_1,，　$BD\perp A_1C.$(9 分)　当　$\frac{CD}{CC_1}=1$ 时,平行六面体的六个面是全等的菱形,　同 $BD\perp A_1C$ 的证法可得 $BC_1\perp A_1C.$ 又 $BD\cap BC_1=B$,　，　$A_1C\perp$平面 $C_1BD.$(12 分)

(文)本小题主要考查等差数列的基础知识和基本技能,运算能力.满分 12 分.　解:设等差数列 $\{a_n\}$的公差为 d,则　$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d.$ $S_7=7,S_{15}=75$,　，　$7a_1+21d=7$,　$15a_1+105d=75$,(6 分)　即 $a_1+3d=1$,　$a_1+7d=5$,　解得　$a_1=-2,d=1.$(8 分)　，　$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1)$,　$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}.$　，　数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$是等差数列,其首项为 -2,公差为$\frac{1}{2}$,　，　$T_n=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n.$(12 分)

19.(理)本小题主要考查不等式的解法、函数的单调性等基本知识.分类讨论的数学思想方法和运算、推理能力,满分 12 分.　解法一:(Ⅰ)不等式 $f(x)\leqslant1$即　$\sqrt{x^2+1}\leqslant1+ax.$　由此得 $1\leqslant1+ax$,即 $ax\geqslant0$,其中常数 $a>0.$　所以,原不等式等价于　$x^2+1\leqslant(1+ax)^2.$　$x\geqslant0.$　即 $x\geqslant0$,　$(a^2-1)x+2a\geqslant0.$(3 分)　所以,当 $0<a<1$ 时,所给不等式的解集为 $\{x|0\leqslant x\leqslant\frac{2a}{1-a^2}\}$;　当 $a\geqslant1$ 时,所给不等式的解集为 $\{x|x\geqslant0\}$ Z.(6

分)　(Ⅱ)在区间[0,+　)上任取 x_1,x_2 使 $x_1 < x_2$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2+1} - \sqrt{x_2^2+1} - a(x_1 - x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} - a(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} - a\right)$$ (8 分)

(Ⅰ)当 $a \geqslant 1$ 时,　$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} < 1$.　,　$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} - a < 0$.又 $x_1 - x_2 < 0$.　,　$f(x_1) - f(x_2) > 0$.　即　$f(x_1) > f(x_2)$.　所以,当 $a \geqslant 1$ 时,函数 $f(x)$在区间[0,+　)上是单调递减函数.(10 分)　(Ⅱ)当 $0 < a < 1$ 时,在区间[0,+　)上存在两点 $x_1 = 0$,$x_2 = \frac{2a}{1-a^2}$,满足 $f(x_1) = 1$,$f(x_2) = 1$,即 $f(x_1) = f(x_2)$,所以,函数 $f(x)$在区间[0,+　)上不是单调函数.　综上,当且仅当 $a \geqslant 1$ 时,函数 $f(x)$为区间[0,+　)上的单调函数.(12 分)　解法二:$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - a$.　(Ⅰ)当 $a \geqslant 1$ 时,有　$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \leqslant a$.　此时 $f'(x) < 0$.函数 $f(x)$在区间(-　,+　)上是单调递减函数.但 $f(0) = 1$,因此,当且仅当 $x \geqslant 0$ 时　$f(x) \leqslant 1$.(8 分)　(Ⅱ)当 $0 < a < 1$ 时:　解不等式 $f'(x) < 0$ 得 $x < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$,$f(x)$在区间(-　,$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$]上是单调递减函数;　同理,解不等式 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$,$f(x)$在区间[$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$,+　)上是单调递增函数.　解方程 $f(x) = 1$ 得　$x = 0$ 或 $x = \frac{2a}{1-a^2}$.　因为 $0 < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} < \frac{2a}{1-a^2}$.　所以,当且仅当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{2a}{1-a^2}$ 时 $f(x) \leqslant 1$.　综上:(Ⅰ)当 $a \geqslant 1$ 时,$f(x) \leqslant 1$ 的解集为 $\{x \mid x \geqslant 0\}$;　当 $0 < a < 1$ 时,$f(x) \leqslant 1$ 的解集为 $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{2a}{1-a^2}\}$.　(Ⅱ)当且仅当 $a \geqslant 1$ 时,$f(x)$在区间[0,+　)上是单调函数.(12 分)　(文)同 18 题(乙)(理)(Ⅰ)(Ⅱ)问.

20.(理)本小题主要考查应用所学导数的知识、思想和方法解决实际问题的能力,建立函数式、解方程、不等式、最大值等基础知识.满分 12 分.　解:设容器底面短边长为 x m,则另一边长为 $(x + 0.5)$ m,高为 $\frac{14.8 - 4x - 4(x+0.5)}{4} = 3.2 - 2x$.　由 $3.2 - 2x > 0$ 和 $x > 0$,得 $0 < x < 1.6$.

设容器的容积为 y m^3,则有　$y = x(x + 0.5)(3.2 - 2x)(0 < x < 1.6)$.整理,得　$y = -2x^3 + 2.2x^2 + 1.6x$.(4 分)　,　$y' = -6x^2 + 4.4x + 1.6$.(6 分)　令 $y' = 0$,有　$-6x^2 + 4.4x + 1.6 = 0$.　即　$15x^2 - 11x - 4 = 0$.　解得　$x_1 = 1$.$x_2 = -\frac{4}{15}$(不合题意,舍去).(8 分)　从而,在定义域(0,1、6)内只有在 $x = 1$ 处使 $y' = 0$.由题意,若 x 过小(接近 0)或过大(接近1.6)时,y 值很小(接近 0),因此,当 $x = 1$ 时 y 取得最大值　$y_{最大} = -2 + 2.2 + 1.6 = 1.8$.　这时,高为 $3.2 - 2 \times 1 = 1.2$.　答:容器的高为 1.2 m 时容积最大,最大容积为 1.8 m^3.(12 分)　(文)同 19 理.　21.(理)本小题主要考查等比数列的概念和基本性质,推理和运算能力.满分 14 分.　解:(Ⅰ)因为 $|c_{n+1} - pc_n|$ 是等比数列,故有　$(c_{n+1} - pc_n)^2 = (c_{n+2} - pc_{n+1})(c_n - pc_{n-1})$.　将 $c_n = 2^n + 3^n$ 代入上式,得　$[2^{n+1} + 3^{n+1} - p(2^n + 3^n)]^2 = [2^{n+2} + 3^{n+2} - p(2^{n+1} + 3^{n+1})] \cdot [2^n + 3^n - p(2^{n-1} + 3^{n-1})]$.(4 分)　即　$[(2-p)2^n + (3-p)3^n]^2 = [(2-p)2^{n+1} - (3-p)3^{n+1}][(2-p)2^{n-1} + (3-p)3^{n-1}]$.　整理

得 $\frac{1}{6}(2-p)(3-p)\cdot 2^n\cdot 3^n=0$. 解得 $p=2$ 或 $p=3$.(8分) (Ⅱ)设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$的公比分别为 p、q,$p\neq q$,$c_n=a_n+b_n$. 为证 $\{c_n\}$不是等比数列只需证 $c_2^2\neq c_1\cdot c_3$. 事实上,$c_2^2=(a_1p+b_1q)^2=a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq$. $c_1\cdot c_3=(a_1+b_1)(a_1p^2-b_1q^2)=a_1^2p^2+b_1^2q^2+a_1b_1(p^2+q^2)$(12分) 由于 $p\neq q$,$p^2+q^2>2pq$.又 a_1、b_1 不为零. 因此 $c_2^2\neq c_1\cdot c_3$.故 $\{c_n\}$不是等比数列.(14分) (文)本小题主要考查由函数图象建立函数关系式和求函数最大值的问题,考查运用所学知识解决实际问题的能力,满分12分. 解:(Ⅰ)由图一可得市场售价与时间的函数关系为 $f(t)=\begin{cases}300-t, & 0\leqslant t\leqslant 200,\\ 2t-300, & 200<t\leqslant 300;\end{cases}$(2分) 由图二可得种植成本与时间的函数关系为 $g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100$, $0\leqslant t\leqslant 300$.(4分) (Ⅱ)设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$,则由题意得 $h(t)=f(t)-g(t)$,

即 $h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2}, & 0\leqslant t\leqslant 200,\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2}, & 200<t\leqslant 300.\end{cases}$ (6分) 当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时,配方整理得 $h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$, 所以,当 $t=50$ 时,$h(t)$取得区间$[0,200]$上的最大值100; 当 $200<t\leqslant 300$ 时,配方整理得 $h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$, 所以,当 $t=300$ 时,$h(t)$取得区间$(200,300]$上的最大值87.5.(10分) 综上,由 $100>87.5$ 可知,$h(t)$在区间$[0,300]$上可以取得最大值100,此时 $t=50$,即从二月一日开始的第50天时,上市的西红柿纯收益最大.(12分)

22. 本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念和性质、推理、运算能力和综合应用数学知识解决问题的能力.满分14分. 解:如图,以 AB 的垂直平分线为 y 轴,直线 AB 为 x 轴,建立直角坐标系 xOy,则 $CD\perp y$ 轴.因为双曲线经过点 C、D,且以 A、B 为焦点,由双曲线的对称性知 C、D 关于 y 轴对称.(2分) 依题意,记 $A(-c,0)$,$C(\frac{c}{2},h)$,$E(x_0,y_0)$,其中 $c=\frac{1}{2}|AB|$为双曲线的半焦距,h 是梯形的高. 由 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{EC}$,即 $(x_0+c\cdot y_0)=\lambda(\frac{c}{2}-x_0\cdot h-y_0)$得 $x_0=\frac{(\lambda-2)c}{2(1+\lambda)}\cdot y_0=\frac{\lambda h}{1+\lambda}$.(5分) 设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,则离心率 $e=\frac{c}{a}$. 由点 C、E 在双曲线上,将点 C、E 的坐标和 $e=\frac{c}{a}$代入双曲线的方程得

$$\begin{cases}\frac{a^2}{4}-\frac{h^2}{b^2}=1. & ①\\ \frac{e^2}{4}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda+1}\right)^2-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2\frac{h^2}{b^2}=1 & ②\end{cases}$$

(7分) 由①式得 $\frac{h^2}{b^2}=\frac{e^2}{4}-1$. ③ 将③式代入②式,整理得 $\frac{e^2}{4}(4-4\lambda)=1+2\lambda$. 故 $\lambda=1-\frac{3}{e^2+2}$.(10分) 依题设$\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$得,$\frac{2}{3}\leqslant 1-\frac{3}{e^2+2}\leqslant\frac{3}{4}$. 解得 $\sqrt{7}\leqslant e\leqslant\sqrt{10}$. 所以,双曲线的离心率的取值范围为$[\sqrt{7},\sqrt{10}]$.(14分)