

2004 年全国硕士研究生入学考试

数学四试题

一、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(2) 设 $y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} =$ _____.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1 & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)dx =$ _____.

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为三阶可逆矩阵, 则 $B^{2004} - 2A^2 =$ _____.

(5) 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 是实正交矩阵, 且 $a_{11} = 1$, $b = (1, 0, 0)^T$, 则线性方程组 $Ax = b$ 的解是 _____.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-1)^2}$ 在下列哪个区间内有界? ()

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则().

- (A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点
(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点
(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点
(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

(3) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则().

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

- (B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
 (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
 (D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则().

- (A) $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续
 (B) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 在 $x=0$ 点不可导
 (C) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且满足 $F'(x) = f(x)$
 (D) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 但不一定满足 $F'(x) = f(x)$

(5) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是().

- (A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(a)$
 (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(b)$
 (C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$
 (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$

(6) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有().

- (A) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$ (B) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$
 (C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$ (D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha \in (0,1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$,

若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于().

- (A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (B) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (C) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (D) $u_{1-\alpha}$

(8) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 2$. 令随机变量

$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 x 等于().

- (A) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$ (B) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$
 (C) $\text{cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$ (D) $\text{cov}(X_1, Y) = \sigma^2$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

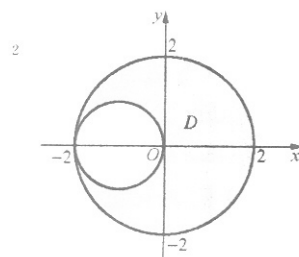
(1) (本题满分 8 分)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right).$$

(2) (本题满分 8 分)

$$\text{求 } \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆 } x^2 + y^2 = 4$$

和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面区域(如右图).



(3) (本题满分 8 分)

设 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且满足

$$f'_u(u, v) + f'_v(u, v) = uv.$$

求 $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

(4) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中价格 $P \in (0, 20)$, Q 为需求量.

() 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$);

() 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (其中 R 为收益), 并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时, 降低价格反而使收益增加.

(5) (本题满分 9 分)

$$\text{设 } F(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0, \\ e^{-2x}, & x > 0, \end{cases} S \text{ 表示夹在 } x \text{ 轴与曲线 } y = F(x) \text{ 之间的面积. 对任何 } t < 0, S_1(t) \text{ 表}$$

示矩形 $-t \leq x \leq t, 0 \leq y \leq F(t)$ 的面积. 求

() $S(t) = S - S_1(t)$ 的表达求;

() $S(t)$ 的最小值.

(6) (本题满分 13 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解.试求

- () 方程组的全部解,并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;
- () 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

(7) (本题满分 13 分)

设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2, $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值.若 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$,

$\alpha_2 = (2, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, -3)^T$ 都是 A 是属于特征值 6 的特征向量.

- () 求 A 的另一特征值和对应的特征向量;
- () 求矩阵 A .

(8) (本题满分 13 分)

设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生,} \end{cases}$$

求: () 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

() X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} ;

() $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布.

(9) (本题满分 13 分)

设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 上服从均匀分布, 求:

- () 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;
- () Y 的概率密度;
- () 概率 $P\{X + Y > 1\}$.